В. А. Байков, А. В. Жибер

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Москва ♦ Ижевск

2003

УДК 530.1

Байков В. А., Жибер А. В.
Уравнения математической физики. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 252 стр.

Основу этой книги составляют лекции по базовому университетскому курсу «Уравнения математической физики» для студентов факультета прикладной математики Уфимского государственного авиационного технического университета, прочитанные в течение последних лет профессором В. А. Байковым и профессором А. В. Жибером. Курс в основном посвящен изучению уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, в частности волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа. Также изложены простейшие вопросы теории интегральных уравнений и специальных функций.

Предназначено для студентов 3 курса естественно-научного факультета, изучающих дисциплину «Уравнения математической физики».

ISBN 5-93972-242-3

http://rcd.ru

Оглавление

Предисловие

Курс «Уравнения математической физики» является базовым университетским курсом для студентов факультета прикладной математики. Для того чтобы понять его в полной мере, необходимо знание и свободное оперирование основными понятиями дисциплин «аналитическая геометрия», «высшая алгебра» и «математический анализ», поэтому в университете он входит в программу обучения студентов в пятом и шестом семестрах третьего курса.

Отметим, что выбор материала был ограничен как объемом лекционных часов, так и желанием научить «прикладника» приемам и методам решения прикладных задач. Желающих более глубоко разобраться в предмете можно отослать к работам [1] – [9].

При подборе задач в качестве базового был взят «Сборник задач по уравнениям математической физики» под редакцией В.С. Владимирова [10], а при подготовке курса лекции мы использовали в основном книги [11] – [14].

I. Введение

Лекция 1. Основные уравнения математической физики (уравнение колебаний, уравнение диффузии, уравнения Пуассона и Лапласа)

Предмет теории уравнений математической физики составляет изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, описывающих явления природы. Точные рамки этой дисциплины определить довольно трудно. Кроме того, большое разнообразие вопросов, относящихся к уравнениям математической физики, не позволяет охватить их сколько-нибудь полно в университетском курсе.

Наш курс будет посвящен в основном изучению уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, в частности волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа, обычно называемых классическими уравнениями математической физики.

§1. Уравнение колебаний

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) приводят к уравнению колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u)-q\,u+F(x,t), \qquad (1)$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от n $(n=1,2,3)$ пространственных переменных $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и времени t коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды; $F(x,t)-$плотность внешнего возмущения. В уравнении (1) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Продемонстрируем вывод уравнения (1) на примере малых поперечных колебаний струны. Струной называется упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу.

Пусть в плоскости (x,u) струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x. Обозначим через $u(x,t)$ величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, так что $u=u(x,t)$ есть уравнение струны в момент времени t. Мы будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение $\vec{T}(x,t)$ в точке x в момент времени t направлено по касательной к струне в точке x (Рис. 1).

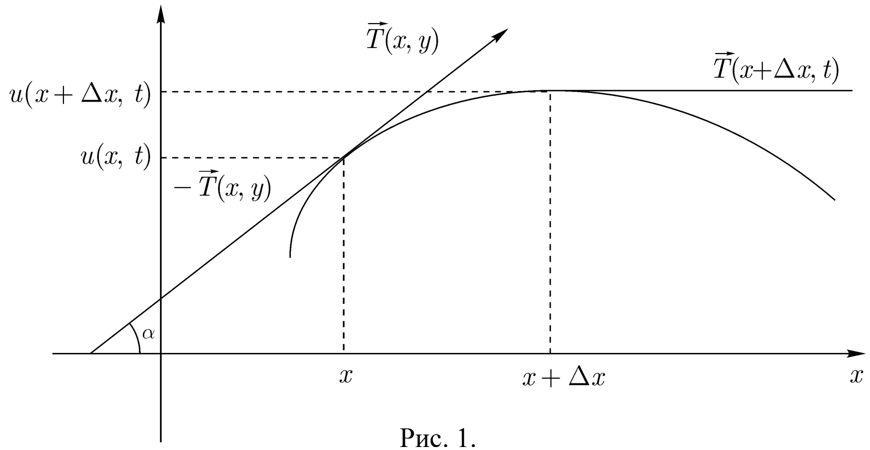

Рис. 1.

Любой участок струны (a,b) после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx b-a$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения $\left|\vec{T}(x,t)\right|$ будет оставаться постоянной, не зависящей от x и t, $\left|\vec{T}(x,t)\right|=T_0$. Обозначим через $F(x,t)$ плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x. Наконец, пусть $\rho(x)$ обозначает линейную плотность струны в точке x так, что $\rho(x)dx$ – масса элементы струны $(x,x+dx)$. Составим теперь уравнение движения струны. На ее элемент $(x,x+dx)$ действуют силы натяжения $\vec{T}(x+dx,t)$, $-\vec{T}(x,t)$ (Рис.1) и внешняя сила, сумма которых, согласно законам Ньютона, должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение. Проектируя это векторное равенство на ось u, получим

$$T_0\sin\alpha\Big|_{x+\Delta x}-T_0\sin\alpha\Big|_{x}+F(x,t)\Delta x=\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Но в рамках нашего приближения

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\approx\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно, из (2) имеем

$$\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(x,t),$$

т.е.

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+F. \tag{3}$$

Уравнение (3) и есть уравнение малых поперечных колебаний струны.

Если плотность ρ постоянна, $\rho(x)=\rho$, то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f, \tag{4}$$

где обозначено $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f=\dfrac{F}{\rho}$. Уравнение (4) мы будем также называть одномерным волновым уравнением.

Уравнение вида (1) описывает также малые продольные колебания упругого стержня

$$\rho S\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t), \tag{5}$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения стержня и $\mathrm{E}(x)$ – модуль Юнга в точке x.

Аналогично, выводится уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)+F. \tag{6}$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны принимает вид

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)+f,\qquad a^2=\frac{T_0}{\rho},\quad f=\frac{F}{\rho}. \tag{7}$$

Уравнение (7) мы будем называть двумерным волновым уравнением.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_3^2}\right)+f \tag{8}$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяет плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Мы будем записывать волновые уравнения (4), (7) и (8) единой формулой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f,$$

где Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

§2. Уравнение диффузии

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - q u + F(x,t). \tag{9}$$

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через $u(x,t)$ температуру среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, а через $\rho(x)$, $c(x)$ и $K(x)$ – соответственно ее плотность, удельную плотность и коэффициент теплопроводности в точке x. Пусть $F(x,t)$ – интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t. Подсчитаем баланс тепла в произвольном объеме V за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$. Обозначим через S границу V, и пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье, через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, \Delta t = \Delta t \iint_S (k \operatorname{grad} u, \vec{n})\, dS,$$

равное, в силу формулы Гаусса–Остроградского,

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dx\, \Delta t.$$

За счет тепловых источников в объеме V возникает количество тепла

$$Q_2 = \iiint_V F(x,t)\, dx\, \Delta t.$$

Так как температура в объеме V за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ выросла на величину

$$u(x, t+\Delta t) - u(x,t) \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, \Delta t.$$

С другой стороны, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ и поэтому

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx\, \Delta t = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема V, получаем уравнение распространения тепла

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{10}$$

Если среда однородна, т.е. c, ρ и k – постоянные, то уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{11}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f = \dfrac{F}{c\rho}$.

Уравнение (11) называется уравнением теплопроводности.

§3. Стационарное уравнение

Для стационарных процессов $F(x,t) = F(x)$, $u(x,t) = u(x)$ и уравнения колебаний (1) и диффузии (9) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q u = F(x). \tag{12}$$

При $p=\text{const}$, $q=0$ уравнение (12) называется уравнением Пуассона

$$\Delta u=-f, \qquad f=\frac{F}{p}; \tag{13}$$

при $f=0$ уравнение (13) называется уравнением Лапласа

$$\Delta u=0.$$

Рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников, а именно, пусть внутри некоторого объема V с границей S имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho=\text{const}$), характеризуемое скоростью $\vec{\upsilon}(x_1,x_2,x_3)$. Если течение жидкости не вихревое $(\text{rot}\,\vec{\upsilon}=0)$, то скорость $\vec{\upsilon}$ является потенциальным вектором, т.е.

$$\vec{\upsilon}=\text{grad}\,u, \tag{14}$$

где u – скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$\text{div}\,\vec{\upsilon}=0. \tag{15}$$

Теперь из формул (14) и (15) получим:

$$\text{div grad}\,u=0$$

или

$$\Delta u=0,$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Задачи

1. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$, $a^2=g$, где $u(x,t)$ – смещение точки, l – длина нити, g – ускорение силы тяжести.

2. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h^2\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $a^2=\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$.

3. Тяжелая однородная нить длины l прикреплена верхним концом $(x=0)$ к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]+\omega^2 u$, $a^2=g$.

4. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся со скоростью $\upsilon(x)$ в направлении оси x, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени являются плоскости, перпендикулярные оси x.

Ответ: $c\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}(\upsilon\cdot u)$.

5. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде для вещества, частицы которого: а) распадаются со скоростью, пропорциональной концентрации; б) размножаются со скоростью, пропорциональной их концентрации.

Ответ: а) $c\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\beta u$; б) $c\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\beta u$.

6. Исходя из Максвелла в вакууме:

$$\text{rot}\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div}\,\vec{E}=0, \quad \text{div}\,\vec{H}=0, \quad \text{rot}\,\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

где $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля. Вывести уравнение для потенциала электрического поля постоянного электрического тока, вывести уравнение для потенциала.

Лекция 2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными

Нашей целью является приведение к каноническому виду в области уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными линейного относительно старших производных

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

§1. Замена независимых переменных

Перейдем от независимых переменных x и y к независимым переменным ξ и η. Пусть

$$\xi=\xi(x,y), \quad \eta=\eta(x,y) \tag{2}$$

– дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

нигде в рассматриваемой области не обращается в нуль. Тогда систему (2) можно однозначно разрешить относительно x и y в некоторой области точек (ξ,η). Полученные функции $x=x(\xi,\eta)$ и $y=y(\xi,\eta)$ будут также дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от ξ и η. С помощью преобразования (2) мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному (1). Естественно возникает задача: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму? Для решения этой задачи преобразуем производные к новым переменным. Полагая

$$u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=\upsilon(\xi,\eta),$$

получаем

$$u_x=\upsilon_\xi\xi_x+\upsilon_\eta\eta_x, \quad u_y=\upsilon_\xi\xi_y+\upsilon_\eta\eta_y,$$

$$u_{xx}=\upsilon_{\xi\xi}\xi_x^2+2\upsilon_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+\upsilon_{\eta\eta}\eta_x^2+\upsilon_\xi\xi_{xx}+\upsilon_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xy}=\upsilon_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+\upsilon_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+\upsilon_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+\upsilon_\xi\xi_{xy}+\upsilon_\eta\eta_{xy}, \tag{3}$$

$$u_{yy}=\upsilon_{\xi\xi}\xi_y^2+2\upsilon_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+\upsilon_{\eta\eta}\eta_y^2+\upsilon_\xi\xi_{yy}+\upsilon_\eta\eta_{yy}.$$

В новых переменных ξ и η уравнение (1), согласно формулам (3), записывается так:

$$\bar a_{11}\upsilon_{\xi\xi}+2\bar a_{12}\upsilon_{\xi\eta}+\bar a_{22}\upsilon_{\eta\eta}+\bar F(\xi,\eta,\upsilon,\upsilon_\xi,\upsilon_\eta)=0, \tag{4}$$

где

$$\bar a_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar a_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar a_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,$$

$$\bar F=F+a_{11}(\upsilon_\xi\xi_{xx}+\upsilon_\eta\eta_{xx})+a_{12}(\upsilon_\xi\xi_{xy}+\upsilon_\eta\eta_{xy})+a_{22}(\upsilon_\xi\xi_{yy}+\upsilon_\eta\eta_{yy}).$$

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar a_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0. \tag{5}$$

Пусть $z=\varphi(x,y)$ – какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi=\varphi(x,y)$, то коэффициент $\bar a_{11}$, очевидно, будет равен нулю. Итак, задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

§2. Уравнения характеристик

Уравнение (5) связано со следующим обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a_{11}d_y^2-2a_{12}d_xd_y+a_{22}d_y^2=0, \tag{6}$$

которое мы будем называть характеристическим, а его интегралы – характеристиками. Эта связь устанавливается в следующем предложении:

Лемма. *Если* $z=\varphi(x,y)$ *– решение уравнения* (5)*, то соотношение* $\varphi(x,y)=C$ *представляет собой интеграл уравнения* (6)*. Обратно, если* $\varphi(x,y)=C$ *– интеграл уравнения* (6)*, то функция* $z=\varphi(x,y)$ *удовлетворяет уравнению* (5)*.*

Доказательство. Пусть $z=\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (5). Соотношение $\varphi(x,y)=C$ задает функцию $y=f(x,C)$, для которой

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x,y)}.$$

Следовательно, $y=f(x,C)$ удовлетворяет уравнению (6), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0.$$

Докажем вторую часть леммы. Пусть $\varphi(x,y)=C$ – интеграл уравнения 6). Через произвольную точку (x_0,y_0) проведем интегральную кривую уравнения (6), полагая $\varphi(x_0,y_0)=C_0$ и рассматривая кривую $y=f(x,C_0)$. Очевидно, $y_0=f(x_0,C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+a_{22}\right]_{y=f(x,C_0)}=0.$$

Полагая в последнем равенстве $x=x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0,y_0)+2a_{12}\varphi_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)+a_{22}\varphi_y^2(x_0,y_0)=0,$$

что и требовалось доказать.

Полагая $\xi=\varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)=C$ есть интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $\upsilon_{\xi\xi}$. Если $\psi(x,y)=C$ – другой интеграл уравнения (6), независимый от $\varphi(x,y)$, то, полагая $\eta=\psi(x,y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $\upsilon_{\eta\eta}$.

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{8}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1). Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением гиперболического типа, если в точке M $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, эллиптического типа, если $\Delta<0$, и параболического типа, если $\Delta=0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)D^2,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как якобиан D преобразования переменных отличен от нуля.

§3. Канонические формы уравнения

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Разберем каждый из этих типов в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $\Delta>0$ и правые части уравнений (7) и (8) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x,y)=C$ и $\psi(x,y)=C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y), \tag{9}$$

приводим уравнение (4) к виду

$$\upsilon_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta), \tag{10}$$

где $\Phi=-\dfrac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$. Уравнение (10) называется канонической формой гиперболического уравнения (1). Часто пользуются другой канонической формой. Положим

$$\xi=x'+y',\quad \eta=x'-y',$$

т.е.

$$x' = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad y' = \frac{\xi-\eta}{2},$$

где x' и y' – новые переменные. Тогда, полагая $\upsilon(\xi,\eta) = W(x',y')$, будем иметь

$$\upsilon_\xi = \frac{1}{2}\left(W_{x'} + W_{y'}\right), \quad \upsilon_\eta = \frac{1}{2}\left(W_{x'} - W_{y'}\right), \quad \upsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(W_{x'x'} - W_{y'y'}\right).$$

В результате уравнение (10) примет вид

$$W_{x'x'} - W_{y'y'} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнения параболического типа $\Delta = 0$ уравнения (7) и (8) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y) \text{ и } \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ – любая функция, независимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

Таким образом, мы получаем каноническую форму для уравнения параболического типа

$$\upsilon_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi,\eta,\upsilon,\upsilon_\xi,\upsilon_\eta\right), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (7) и (8) комплексны. Пусть

$$\varphi(x,y) = C$$

– комплексный интеграл уравнения (7). Тогда

$$\varphi^*(x,y) = C,$$

где φ^* – сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (8). При этом уравнение эллиптического типа (1) приводится к (10) при замене переменных

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \varphi^*(x,y).$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные x' и y', равные

$$x' = \frac{\varphi+\varphi^*}{2}, \quad y' = \frac{\varphi-\varphi^*}{2i},$$

так, что

$$\xi = x' + iy', \quad \eta = x' - iy'.$$

В этом случае, полагая $\upsilon(\xi,\eta) = W(x',y')$, будем иметь

$$\upsilon_\xi = \frac{1}{2}\left(W_{x'} - iW_{y'}\right), \quad \upsilon_\eta = \frac{1}{2}\left(W_{x'} + iW_{y'}\right), \quad \upsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(W_{x'x'} + W_{y'y'}\right).$$

Следовательно, уравнение (10) принимает вид

$$W_{x'x'} + W_{y'y'} = \Psi\left(x',y',W,W_{x'},W_{y'}\right), \quad \Psi = 4\Phi.$$

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$.

Здесь $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -y, \quad \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$. Следовательно, в области $y > 0$ уравнение гиперболично, в области $y < 0$ – эллиптично.

а) Рассмотрим сначала область гиперболичности. Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y},$$

а $x - 2\sqrt{y} = C, \quad x + 2\sqrt{y} = C$ – их общие интегралы.

Производя замену независимых переменных $\xi = x - 2\sqrt{y}, \ \eta = x + 2\sqrt{y}$, получим каноническую форму преобразованного уравнения

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(u_\eta - u_\xi\right).$$

б) В области эллиптичности $(y<0)$ производим замену переменных

$$x'=\frac{\xi+\eta}{2}=x,\quad y'=\frac{\eta-\xi}{2i}=2\sqrt{-y}.$$

Канонический вид уравнения

$$W_{x'x'}+W_{y'y'}-\frac{1}{2\sqrt{-y}}W_{y'}=0.$$

Пример 2. $xu_{xx}-2\sqrt{xy}u_{xy}+yu_{yy}+0{,}5u_y=0$.

Здесь $a_{11}=x,\quad a_{12}=-\sqrt{xy},\quad a_{22}=y,\quad \Delta\equiv 0$. Следовательно, это уравнение всюду параболического типа. Оно имеет одно семейство характеристик, описываемых уравнением

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Общий интеграл этого уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{y}=C$. Поэтому полагаем $\xi=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, η можно положить равной любой функции $\psi(x,y)$, независимой от ξ. Полагаем, например, $\eta=\sqrt{x}$. Тогда получаем следующий канонический вид уравнения

$$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}(u_\xi+u_\eta)=0.$$

Задачи

1. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$,

б) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$,

в) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

г) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$.

2. Введя функцию $\upsilon=ue^{\lambda x+\mu y}$ и выбирая параметры λ и μ, упростить следующие уравнения:

а) $u_{xx}+u_{yy}+3u_x-5y+4u=0$,

б) $u_{xx}+4u_x-u_y+u=0$,

в) $u_{xx}-u_{yy}+4u_x+4u_y-2u=0$.

Лекция 3. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми переменными в точке. Характеристические поверхности

Прежде чем формулировать математические постановки решения различных физических задач, сводящихся к линейным дифференциальным второго порядка относительно старших производных, необходимо классифицировать эти уравнения.

В случае уравнений с двумя независимыми переменными этот вопрос исследован на предыдущей лекции. В этой лекции рассматриваются уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\Phi(x,u,\nabla u)=0 \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x),\quad x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

§1. Классификация уравнений в точке

Выясним, как преобразуется уравнение (1) при произвольной невырожденной замене независимых переменных $\xi=\xi(x)$, т.е.

$$\xi_i=\xi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad i=1,2,\ldots,n;$$

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Так как $D\neq 0$, то в некоторой окрестности можно выразить переменные x через ξ, $x=x(\xi)$. Обозначим $u(x(\xi))=\upsilon(\xi)$; тогда $\upsilon(\xi(x))=u(x)$. Считая $\xi_i\in C^2$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k}\cdot\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial \xi_k\partial \xi_s}\cdot\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}+ \\ +\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k}\cdot\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i\partial x_j}=0 \tag{3}$$

Подставляя выражения для производных (3) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}\right]\frac{\partial^2\upsilon}{\partial \xi_k\partial \xi_s}+\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i\partial x_j}\right]\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k}+ \\ +\Phi^*(\xi,\upsilon,\nabla\upsilon)=0. \tag{4}$$

Здесь $\Phi^*(\xi,\upsilon,\nabla\upsilon)=\Phi(x,u,\nabla u)$. Обозначая теперь через $\widetilde{a}_{ks}$ новые коэффициенты при вторых производных

$$\widetilde{a}_{ks}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \tag{5}$$

и полагая

$$\widetilde{\Phi}(\xi,\upsilon,\nabla\upsilon)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i\partial x_j}\right]\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k}+\Phi^*(\xi,\upsilon,\nabla\upsilon),$$

перепишем уравнение (4) в виде (1):

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\widetilde{a}_{ks}\,\frac{\partial^2\upsilon}{\partial \xi_k\partial \xi_s}+\widetilde{\Phi}(\xi,\upsilon,\nabla\upsilon)=0. \tag{6}$$

Далее фиксируем точку x_0 и положим $\xi=\xi(x_0)$, $\alpha_{ki}=\dfrac{\partial \xi_k(x_0)}{\partial x_i}$. Тогда формула (5) в точке x_0 запишем в виде

$$\widetilde{a}_{ks}(\xi_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_0)\alpha_{ki}\alpha_{sj}. \tag{7}$$

Полеченная формула преобразования коэффициентов a_{ij} в точке x_0 совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_0)\,p_i\,p_j \tag{8}$$

при невырожденном линейном преобразовании

$$p_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}q_k,\quad \det(\alpha_{ki})\neq 0, \tag{9}$$

переводящим форму (8) в форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ks}(\xi_0)q_k q_s. \tag{10}$$

Итак, чтобы упростить уравнение (1) в точке x_0 с помощью замены переменных (2), достаточно упростить в этой точке квадратичную форму (8) с помощью невырожденного линейного преобразования (9). Но в курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует преобразование (9), при котором квадратичная форма (10) принимает следующий каноничный вид:

$$\sum_{k=1}^{n}q_k^2-\sum_{k=r+1}^{m}q_k^2,\quad m\leq n; \tag{11}$$

кроме того, в силу закона инерции квадратичных форм, целые числа r и m не зависят от преобразования (9). Это позволяет классифицировать уравнения (1), а именно:

1) если в форме (11) $m=n$ и все слагаемые одного знака (т.е. либо $r=m$, либо $r=0$), то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа;

2) если $m=n$, но имеются слагаемые разных знаков (т.е. $1 \le r \le n-1$), то уравнение (1) – гиперболического типа (при $r=1$ или $r=n-1$ – нормально-гиперболического типа).
3) если $m<n$, то это уравнение (1) – параболического типа (при $r=n-1$ – нормально-параболического типа).

Пусть коэффициенты a_{ij} в уравнении (1) постоянны, т.е. не зависят от x, и пусть преобразование (9) приводит квадратичную форму (8) к каноническому виду (11). Тогда линейная замена независимых переменных

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k$$

преобразует уравнение (1) к следующему каноническому виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi_k^2} - \sum_{k=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi_k^2} + \tilde{\Phi}(\xi, \upsilon, \nabla \upsilon) = 0. \qquad (12)$$

Примеры. Уравнение Лапласа – эллиптического типа, волновое уравнение – гиперболического типа и уравнение теплопроводности – параболического типа.

Замечание. Выше мы привели способ приведения уравнения (1) к каноническому виду в каждой отдельной точке, где задано это уравнение. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли одним и тем же преобразованием (2) привести уравнение (1) к каноническому виду (12) в достаточно малой окрестности каждой точки? Чтобы это приведение можно было сделать для любого уравнения, необходимо, чтобы число условий

$$\tilde{a}_{ks} = 0, \quad k \ne s, \quad k, s = 1,2,\ldots,n;$$

$$\tilde{a}_{kk} = \varepsilon_k \tilde{a}_{11}, \quad k = 2,3,\ldots,n, \quad \tilde{a}_{11} \ne 0,$$

где $\varepsilon_k = 0, \pm 1$ не превосходило числа неизвестных функций ξ_k, $k=1,2,\ldots,n$:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \le n, \qquad \text{т.е. } n \le 2.$$

Как мы показали в лекции 2, это привидение для $n=2$ всегда можно сделать (для $n=1$ это очевидно).

§2. Характеристики

Пусть функция $\omega(x)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \ge 2$, класса C^1 такова, что на поверхности $\omega(x)=0$ $\nabla\omega(x) \ne 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0. \qquad (13)$$

Тогда поверхность $\omega(x)=0$ называется характеристической поверхностью (или характеристикой) дифференциального уравнения (1). Пусть $\omega \in C^2(G)$ и $\omega - c = 0$ – характеристика при $a<c<b$. Тогда, если в преобразовании (2) взять $\xi_1 = \omega(x)$, то в силу (5), (13) коэффициент $\tilde{a}_{11}$ обратится в нуль в соответствующей области G. Поэтому знание одного или нескольких семейств характеристик дифференциального уравнения дает возможность привести это уравнение к более простому виду.

Примеры характеристик.

1. Для уравнения колебаний струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 = 0$$

или

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - a\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + a\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Поэтому мы имеем два семейства характеристик

$$x + at = c \text{ и } x - at = c.$$

2. Характеристическое уравнение для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t)$$

записывается так

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-a^2\left(\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right)=0.$$

Решением последнего является функция $\omega=a(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2$ на поверхности $\omega=0$. Следовательно, поверхность

$$a(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=0,$$

называемая характеристическим конусом с вершиной в точке (x_0,t_0), есть характеристика волнового уравнения.

Волновое уравнение имеет и другое семейство характеристических поверхностей – семейство плоскостей вида

$$at+a_1x+a_2y+a_3z=c,$$

где a_1,a_2,a_3 и $c-$ любые вещественные числа, причем $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$.

3. Для уравнения теплопроводности

$$u_{tt}-a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)=f(x,y,z,t)$$

имеем характеристическое уравнение вида

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2=0.$$

Его характеристиками, очевидно, являются семейство плоскостей $t=c$.

4. Уравнение Пуассона

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+f(x,y,z)=0$$

не имеет вещественных характеристик, ибо из характеристического уравнения

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2=0$$

вытекает, что $grad\,\omega=0$ на $\omega=0$.

Задачи

Привести к каноническому виду уравнения:

1. $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0$.
2. $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_y+u_z=0$.
3. $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$.
4. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+3u_{tt}=0$.
5. $u_{x_1x_1}+2\sum\limits_{k=2}^{n}u_{x_kx_k}-2\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}=0$.
6. $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{x_kx_k}+\sum\limits_{l<k}u_{x_lx_k}=0$.

Лекция 4. Постановка основных краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка

§1. Классификация краевых задач

Как было показано в лекции 1, линейное уравнение 2-го порядка

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\,grad\,u)-qu+F(x,t) \tag{1}$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(p\,\operatorname{grad}u)-qu+F(x,t) \tag{2}$$

описывает процессы диффузии, а уравнение

$$-\operatorname{div}(p\,\operatorname{grad}u)+qu=F(x) \tag{3}$$

стационарные процессы.

Пусть $G\subset R^n$ – область, где происходит процесс и S – ее граница. Таким образом, G – область задания уравнения (3). Областью задания уравнений (1) и (2) будем считать цилиндр $\Omega_T = G \times (0,T)$ высоты T и с основанием G. Его граница состоит из боковой поверхности $S \times (0,T)$ и двух оснований: нижнего $\overline{G} \times \{0\}$ и верхнего $\overline{G} \times \{T\}$ (Рис. 2).

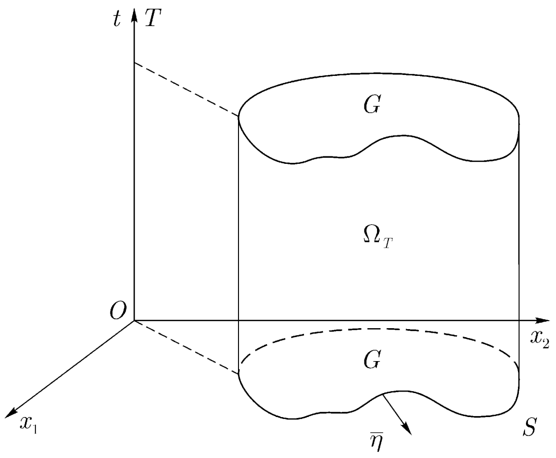

Рис. 2.

Будем предполагать, что коэффициенты ρ, p и q уравнений (1) – (3) не зависят от времени t; далее, в соответствии с их физическим смыслом, будем считать, что $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in \overline{G}$.

При этих предположениях уравнение колебаний (1) – гиперболического типа, уравнение диффузии (2) – параболического типа и стационарное уравнение (3) – эллиптического типа.

Далее чтобы полностью описать физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (начальные условия) и режим на границе той области, в которой происходит процесс (граничные условия).

Различают три типа задач для дифференциальных уравнений.

а) Задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область G совпадает со всем пространством R^n, граничные условия отсутствуют.

б) Краевая задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе S, начальные условия, естественно, отсутствуют.

в) Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются и начальные, и граничные условия, $G \neq R^n$.

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (1) – (3).

§2. Задача Коши

Для уравнения (1) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в полупространстве $t>0$ и начальным условиям при $t=0$:

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x). \tag{4}$$

При этом необходимо

$$F \in C(t>0), \qquad u_0 \in C^1(R^n), \qquad u_1 \in C(R^n).$$

Для уравнения диффузии (2) задача Коши становится так: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t>0) \cap C(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (2) в полупространстве $t>0$ и начальному условию при $t=0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{5}$$

При этом необходимо $F \in C(t>0)$, $\quad u_0 \in C(R^n)$.

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Пусть даны дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \Phi\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{6}$$

кусочно-гладкая поверхность Σ: $t = \sigma(x)$ и функции u_0 и u_1 на Σ. Задача Коши для уравнения (6) состоит в нахождении в некоторой части области

$t>\sigma(x)$, примыкающей к поверхности Σ, решения $u(x,t)$, удовлетворяющего на Σ краевым условиям

$$u\Big|_{\Sigma}=u_0,\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma}=u_1$$

где $\vec{n}$ – нормаль к Σ, направленная в сторону возрастающих t.

§3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа. Смешанная задача

Краевая задача для уравнения (3) состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$, удовлетворяющей в области G уравнению (3) и граничному условию на S вида

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=v, \tag{7}$$

где α, β и v – заданные непрерывные функции на S, причем $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\alpha+\beta>0$.

Выделяют следующие типы граничных условий (7):

Граничное условие I рода $(\alpha=1,\ \beta=0)$

$$u\Big|_S=u_0\,.$$

Граничное условие II рода $(\alpha=0,\ \beta=1)$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=u_1\,.$$

Граничное условие III рода $(\beta=1,\ \alpha\geq 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\Big|_S=u_2\,.$$

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами I, II и III рода.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача I рода

$$\Delta u=-f, \qquad u\Big|_S=u_0$$

называется задачей Дирихле; краевая задача II рода

$$\Delta u=-f, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=u_1$$

называется задачей Неймана.

Для уравнения колебаний (1) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(\Omega_\infty)\cap C^1(\overline{\Omega}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре Ω_∞, начальным условиям (4) при $t=0,\ x\in\overline{G}$ и граничному условию (7) при $x\in S,\ t\geq 0$.

Аналогично для уравнения диффузии (2) смешанная задача ставится так: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(\Omega_\infty)\cap C^1(\overline{\Omega}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (2) в Ω_∞, начальному условию (5) и граничному условию (7).

§4. Корректность постановки задач математической физики. Теорема Ковалевской. Пример Адамара

Поскольку задачи математической физики описывают реальные физические процессы, то математическая постановка этих задач должна удовлетворять следующим требованиям:

а) решение должно существовать в каком-то классе функций M_1;

б) решение должно быть единственным в некотором класса функций M_2;

в) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т.д.). Непрерывная зависимость решения u от данного задачи $\tilde{u}$ обозначает следующее: пусть последовательность данных $\tilde{u}_k$, $k=1,2,3,\ldots$, в каком-то смысле стремится к $\tilde{u}$ и $\tilde{u}_k$, $k=1,2,3,\ldots$, u – соответствующие решения задачи; тогда $u_k\to u,\ k\to\infty$ в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом.

Требование непрерывной зависимости решения обуславливается тем обстоятельством, что данные физической задачи, как правило, определяются из эксперимента, приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям а)–с), называется корректно поставленной, а соответствующее множество функций $M_1 \cap M_2$ – классом корректности.

Нахождение корректных постановок задач математической физики и методов построения их решений и составляет основное содержание предмета уравнений математической физики.

В этом параграфе мы выделим довольно общий класс задач Коши, для которых решение существует и единственно. А именно, рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с N неизвестными функциями $u_1, u_2, \ldots, u_N$:

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_k}} = \Phi_i\left(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right), \quad (8)$$

$i = 1, 2, \ldots, N$. Здесь правые части Φ_i не содержат производные порядка выше k_i и производные по t порядка выше $k_i - 1$, т.е.

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le k_i, \qquad \alpha_0 \le k_i - 1.$$

Для системы уравнений (8) поставим следующую задачу Коши: найти решение $u_1, u_2, \ldots, u_N$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям при $t = t_0$:

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \; k = 0, 1, \ldots, k_i - 1; \; i = 1, 2, \ldots, N, \quad (9)$$

где $\varphi_{ik}(x)$ – заданные функции в некоторой области $G \subset R^n$.

Теорема Ковалевской. *Если все функции* $\varphi_{ik}(x)$ *аналитичны в некоторой окрестности точки* x_0 *и все функции* $\Phi_i\left(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right)$

аналитичны в окрестности точки $\left(x_0, t_0, \varphi_{10}(x_0), \ldots, \varphi_{N0}(x_0), \ldots, \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} \varphi_{j\alpha_0}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right)$, *то задача Коши* (8), (9) *имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки* (x_0, t_0) *и притом единственное в классе аналитических функций.*

Для доказательства этой теоремы решение ищется в виде

$$u_i(x,t) = \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u_i(x_0, t_0)}{\alpha_0! \alpha_1! \ldots \alpha_n!} (t - t_0)^{\alpha_0} \left(x_1 - x_1^0\right)^{\alpha_1} \cdots \quad (10)$$
$$\cdots \left(x_n - x_n^0\right)^{\alpha_{n1}}$$

Из начальных условий (9) и из уравнений (8) последовательно определяются все производные $\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u_i$ в точке (x_0, t_0). Равномерная сходимость рядов (10) в окрестности точки (x_0, t_0) доказывается методом мажорант. Единственность построенного решения в классе аналитических функций следует из теоремы единственности для аналитических функций.

В заключение приведем пример, показывающий, что может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных. Этот пример построен Адамаром.

Решение задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin kx$$

есть $u_k(x,t) = \frac{\mathrm{sh}\, kt}{k^2} \sin kx$. Если $k \to \infty$, то $\frac{1}{k} \sin kx \to 0$; тем не менее при $x \ne j\pi$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ $u_k(x,t)$ не стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно.

Задачи

1. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, предполагая, что концы струны закреплены жестко.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \dfrac{\partial u}{\partial t}$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$,

$u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

2. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец $(x=0)$ жестко закреплен, а нижний свободен.

Ответ: $\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$,

$u(0,t) = 0$, $|u(l,t)| \le M$.

3. Рассмотреть задачу 2 в предположении, что струна вращается с угловой скоростью $\omega = const$ относительно вертикального положения равновесия.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\dfrac{\partial u}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u$, дополнительные условия задачи 2.

4. На боковой поверхности тонкого стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_{cp} = \varphi(t)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на одном конце его поддерживается температура $f_1(t)$, а на другой подается тепловой поток $q(t)$.

Ответ: $c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h[u - \varphi(t)]$, $u(x,0) = f(x)$,

$u(0,t) = f_1(t)$, $k\,u_x(l,t) = q(t)$.

5. Поставить краевую задачу о нагревании полубесконечного стержня, конец которого горит, причем фронт горения распространяется со скоростью v и имеет температуру $\varphi(t)$.

Ответ: $c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\left[k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$, $u(x,0) = 0$, $u(vt,t) = \varphi(t)$.

6. Поставить краевую задачу об остывании тонкого круглого кольца, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей температуру u_0. Неравномерностью распределения температуры по толщине пренебречь.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - h[u - u_0]$, $u(\theta,0) = \varphi(\theta)$, $u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t)$,

$\theta -$ полярный угол, $a^2 = \dfrac{k}{c\rho R^2}$, $R -$ радиуса кольца.

7. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластинке $OACB$ со сторонами $OA = a$, $OB = b$, если:

а) на боковых сторонах пластины поддерживаются заданные температуры;

б) на сторонах OA и OB заданы тепловые потоки, а стороны BC и AC теплоизолированы.

8. На плоскую мембрану, ограниченную кривой L, действует стационарная поперечная нагрузка с плотностью $f(x,y)$. Поставить краевую задачу об отклонении точек мембраны от плоскости, если:

а) мембрана закреплена на краю;

б) край мембраны свободен;

в) край мембраны закреплен упруго.

9. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутренних точек полусферы, если сферическая поверхность поддерживается при заданной температуре $f(\varphi,\theta)$, а основание полусферы – при нулевой температуре.

II. Гиперболические уравнения

Лекция 5. Уравнение колебаний струны и его решение методом Даламбера

§1. Формула Даламбера

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x), \\ & \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Преобразуем уравнение (1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 - a^2 = 0$$

распадается на два уравнения

$$\frac{dx}{dt} - a = 0, \qquad \frac{dx}{dt} + a = 0,$$

интегралами которых являются

$$x - at = C_1, \qquad x + at = C_2.$$

Теперь, полагая

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at,$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ – произвольные функции. Возвращаясь к переменным x, t, получаем:

$$u = f_1(x + at) + f_2(x - at). \tag{4}$$

Полученное решение зависит от двух произвольных функций f_1 и f_2. Оно называется решением Даламбера.

Далее подставляя формулу (4) в (2), будем иметь

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$a\, f_1'(x) - a\, f_2'(x) = \psi(x), \tag{6}$$

откуда, интегрируя второе равенство (6), получим

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\, dy + C, \tag{7}$$

где x_0 и C – постоянные. Из формул (5) и (7) находим

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\, dy + C\right],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\, dy - C\right].$$

При этом, учитывая (4), имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + at) + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x+at} \psi(y)\, dy + C + \varphi(x - at) - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x-at} \psi(y)\, dy - C\right],$$

и окончательно получаем формулу

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy. \tag{8}$$

Формула (8) называется формулой Даламбера.

Нетрудно проверить, что формула (8) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2) при условии, что $\varphi(x)\in C^2(R)$, а $\psi(x)\in C^1(R)$. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

§2. Неоднородное уравнение. Устойчивость решений

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad x\in R, \quad t>0, \tag{9}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \qquad x\in R. \tag{10}$$

Легко проверить, что решение задачи (9), (10) u представимо в форме

$$u=\upsilon+\omega, \tag{11}$$

где υ – решение задачи Коши (1), (2), а ω – решение следующей задачи:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad x\in R, \quad t>0,\\ &\omega(x,0)=0, \quad \frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t}=0, \qquad x\in R.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Пусть $W(x,t;\tau)$ – решение вспомогательной задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad x\in R, \quad t>\tau,\\ &W(x,t;\tau)\big|_{t=\tau}=0, \quad \frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Покажем, что решение $\omega(x,t)$ задачи (12) определяется формулой

$$\omega(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

где $W(x,t;\tau)$ – решение задачи (13). Действительно

$$\omega(x,0)=0, \qquad \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}=W(x,t;t)+\int_0^t\frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\,d\tau$$

и, следовательно, $\dfrac{\partial\omega(x,0)}{\partial t}=0$ в силу начального условия (13). И, наконец,

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 W(x,t;\tau)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 W(x,t;\tau)}{\partial x^2}\right)d\tau=f(x,t).$$

Решение задачи (13) дается формулой Даламбера:

$$W(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{15}$$

Теперь, используя формулы (8), (11), (14) и (15), находим, что решение исходной задачи (9), (10) задается формулой:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Покажем, что задачи (1), (2) непрерывно зависят от начальных данных (устойчиво). А именно: каков бы ни был промежуток времени $[0,t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε, найдется такое $\delta(\varepsilon,t_0)$, что всякие два решения уравнения (1) $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше чем на ε:

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon, \qquad 0\le t\le t_0,$$

если только начальные значения

$$\begin{cases}u_1(x,0)=\varphi_1(x),\\ \dfrac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=\psi_1(x)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}u_2(x,0)=\varphi_2(x),\\ \dfrac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=\psi_2(x)\end{cases}$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ:

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta, \qquad |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta. \tag{16}$$

Действительно функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ связаны со своими начальными данными формулой (8), поэтому имеем

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\frac{1}{2}|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)|+\frac{1}{2}|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)|+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(y)-\psi_2(y)|\,dy.$$

Откуда в силу неравенств (16) получаем:

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\delta\cdot 2at\le\delta(1+t_0),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+t_0}.$$

§3. Метод продолжений

1. Полуограниченная прямая. Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x\ge 0$. Эта задача имеет важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующем образом:

найти решение уравнений колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad \text{при } 0<x<\infty,\ t>0, \tag{17}$$

удовлетворяет граничному условию

$$u(0,t)=\mu(t),\qquad t\ge 0 \tag{18}$$

или

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\upsilon(t),\qquad t\ge 0 \tag{19}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\qquad 0\le x<\infty. \tag{20}$$

Исследуем сначала краевую задачу (17), (18), (20). Решение этой задачи можно представить так:

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+w(x,t), \tag{21}$$

где функции $\upsilon(x,t)$ и $w(x,t)-$ решения следующих задач

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2},\qquad 0<x<\infty,\quad t>0\ , \tag{22}$$

$$\upsilon(0,t)=0,\qquad t\ge 0, \tag{23}$$

$$\upsilon(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial\upsilon(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\qquad 0\le x<\infty \tag{24}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad 0<x<\infty,\quad t>0, \tag{25}$$

$$w(0,t)=\mu(t),\qquad t\ge 0, \tag{26}$$

$$w(x,0)=0,\quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0,\qquad 0\le x<\infty \tag{27}$$

соответственно.

Нетрудно проверить, что функция

$$\upsilon(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(y)\,dy,$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(x)-$ нечетные продолжения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяет условиям (22) – (24). Последнею формулу можно записать так:

$$\upsilon(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy, & \text{для } x>at,\ x>0,\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(y)\,dy, & \text{для } at>x,\ x>0.\end{cases} \tag{28}$$

Далее решение задачи (25) – (27) будем искать в форме

$$w(x,t)=f(x-at).$$

Определим функцию f из граничного условия

$$w(0,t)=f(-at)=\mu(t),$$

откуда

$$f(z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

так, что

$$w(x,t)=\mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Однако эта функция определена лишь в области $x-at\le 0$, так как $\mu(t)$ определена для $t\ge 0$. Чтобы найти $w(x,t)$ для всех значений аргументов, продолжим $\mu(t)$ на отрицательные значения t, полагая $\mu(t)=0$ для $t<0$. Тогда функция

$$w(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right) \qquad (29)$$

будет определена для всех значений аргументов, и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Теперь формулы (21), (28) и (29) дают решение исходной задачи (17), (18), (20):

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy, & \text{для } at<x,\\[2ex] \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(y)\,dy, & \text{для } at>x.\end{cases}$$

Аналогично может быть построено решение задачи (17), (19), (20). Отметим, что для этого начальные данные надо продолжить четным образом.

2. Задача для ограниченного отрезка. Здесь мы на примере следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при } 0<x<l,\ t>0, \qquad (30)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \qquad (31)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0 \qquad (32)$$

покажем, как строить методом продолжения решения краевых задач для уравнения колебаний.

Будем искать решение задачи в виде

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(y)\,dy, \qquad (33)$$

где функции Φ и Ψ, подлежащие определению. Начальные условия (31) определяют Φ и Ψ на интервале $(0,l)$:

$$\Phi(x)=\varphi(x),\qquad \Psi(x)=\psi(x).$$

Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям, наложим на функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ требования нечетности относительно точек $x=0$ и $x=l$:

$$\Phi(x)=-\Phi(-x),\qquad \Phi(x)=-\Phi(2l-x),$$

$$\Psi(x)=-\Psi(-x),\qquad \Psi(x)=-\Psi(2l-x),$$

т.е. Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$. Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на всей прямой. Подставляя их в формулу (33), получаем решение задачи (30) – (32).

Задачи

1. Бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на интервале $(c,2c)$, имеющим форму ломаной с вершинами в точках c, $\frac{3}{2}c$, $2c$. Построить (начертить) профиль струны для моментов времени $t_k=\dfrac{c}{2a}k,\quad k=1,2,3$.

2. Бесконечной струне сообщена только на отрезке $-c\le x\le c$ поперечная начальная скорость $v_0=\mathrm{const}$. Решить задачу о колебании этой

струны. Построить профиль струны для моментов времени $t_k = \frac{c}{2a}k, \quad k = 1,2,3$.

3. Решить задачи:

а) $u_{tt}=u_{xx}+6; \quad u\big|_{t=0}=x^2, \quad u_t\big|_{t=0}=4x$;

б) $u_{tt}=u_{xx}+e^x; \quad u\big|_{t=0}=\sin x, \quad u_t\big|_{t=0}=x+\cos x$;

в) $u_{tt}=9\,u_{xx}+\sin x; \quad u\big|_{t=0}=1, \quad u_t\big|_{t=0}=1$.

4. Полубесконечная струна с жестко закрепленным концом возбуждена начальным отклонением, отличным от нуля лишь на отрезке $(c,3c)$, имеющем форму ломаной с вершинами в точках c, $2c$, $3c$. Начертить профиль струны для моментов времени $t_k = \frac{c}{2a}k, \quad k = 2,4,6$.

5. Какие линейные уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1u_x + b_2u_t + cu = 0$$

имеют решения:

а) в виде произвольных бегущих волн $f(x-at)$, где a=const;

б) в виде произвольных бегущих волн с затуханием $e^{-\alpha t} f(x-at)$.

Лекция 6. Метод разделения переменных на примере уравнения колебаний струны

Метод разделения переменных или метод Фурье является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

§1. Уравнение свободных колебаний струны

И так, рассматривается следующая задача: найти функцию $u(x,t)$ такую, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{3}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу:
Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее однороднограничным условиям (2) и представимое в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4}$$

Подставим предлагаемую форму решения (4) в уравнение (1), получим:

$$T''X = a^2TX''$$

или, после деления на TX,

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{5}$$

Правая часть равенства (5) является функцией только переменного x, а левая – только t, поэтому правая и левая части равенства (5) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Это значение удобно обозначить через $-\lambda a^2$, т.е.

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -a^2\lambda. \tag{6}$$

Из соотношения (6) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{7}$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0. \tag{8}$$

Граничные условия (2) дают:

$$u(0,t)-X(0)T(t)\equiv 0, \qquad u(l,t)=X(l)T(t)=0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0)=X(l)=0. \tag{9}$$

Таким образом, мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (7), (9).

Формулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda<0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничные условия (9) дают

$$c_1+c_2=0,\;\; c_1e^{\alpha}+c_2e^{-\alpha}0, \qquad \alpha=l\sqrt{-\lambda},$$

т. е.

$$c_1=-c_2 \qquad \text{и} \qquad c_1\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)=0.$$

Далее так как $\alpha>0$, то $e^{\alpha}-e^{-\alpha}\neq 0$, поэтому

$$c_1=0, \qquad c_2=0$$

и, следовательно, $X(x)\equiv 0$.

2. При $\lambda=0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x)=c_1x+c_2.$$

Граничные условия (9) дают

$$c_2=0, \qquad c_1l=0,$$

т.е. $c_1=0$, и $c_2=0$ и, следовательно, $X(x)\equiv 0$.

3. При $\lambda>0$ общее решение уравнения (7) может быть записано в виде

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\;x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\;x.$$

Граничные условия дают:

$$c_1=0, \quad c_2\sin\sqrt{\lambda}\;l=0.$$

Если $X(x)$ на равно тождественно нулю, то $c_2\neq 0$, поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}\;l=0$$

или

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l},$$

где n – любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (7), (9) возможны лишь при значениях

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

а именно, существуют ненулевые решения

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8)

$$T_n(t)\mathrm{A}_n\cos\frac{n\pi}{l}a\,t+\mathrm{B}_n\sin\frac{n\pi}{l}a\,t,$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1) – (3), заключаем, что функции

$$u_n(x,\,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(\mathrm{A}_n\cos\frac{n\pi}{l}a\,t+\mathrm{B}_n\sin\frac{n\pi}{1}a\,t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (2).

Обратимся к решению задачи (1) – (3). В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+\mathrm{B}_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{10}$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). Далее потребуем, чтобы функция (10) удовлетворяла начальным условиям (3):

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\\ &\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\mathrm{B}_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \end{aligned} \tag{11}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0\le x\le l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad \text{где} \qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi. \tag{12}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то, учитывая (12), из (11) находим, что

$$\mathrm{A}_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi, \qquad \mathrm{B}_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi. \tag{13}$$

Используя сведения из гармонического анализа, нетрудно доказать следующее предложение:

Теорема. *Пусть* $\varphi(x)\in C^2([0,l])$, $\psi(x)\in C^1([0,l])$, *кроме этого*, $\varphi(x)$ *имеет третью, а* $\psi(x)$ – *вторую кусочно-непрерывную производную и выполнены соотношения* $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$. *Тогда сумма ряда* (10) *с коэффициентами, определенными формулами (13), является решением задачи* (1) – (3).

§2. Неоднородное уравнение. Общая первая краевая задача

Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \quad 0<x<l, \quad t>0 \tag{14}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \quad 0\le x\le l, \tag{15}$$

и однородными граничными условиями

$$u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=0. \tag{16}$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье n_0x

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{17}$$

рассматривая при этом t как параметр. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{18}$$

Подставляя ряды (17) и (18) в исходное уравнение (14)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2u_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны

$$u_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2u_n(t)=f_n(t). \tag{19}$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Далее начальные условия (15) дают:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \psi(x)\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

и, следовательно,

$$u_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi,\quad u_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi,$$
$$\varphi_n=u_n(0),\quad \psi_n=u_n'(0). \tag{20}$$

Условия (20) полностью определяют решение уравнения (19), а именно

$$u_n(t)=\varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,d\tau \tag{21}$$

Таким образом, искомое решение задачи (14)-(16) согласно формулам (17), (21) запишется в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+\right.$$
$$\left.+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,d\tau\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

где величины φ_n,ψ_n и $f_n(\tau)$ вычисляются посредством (18) и (20).

И в заключение мы покажем, как общую первую краевую задачу для уравнения колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{22}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{23}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t) \tag{24}$$

привести к краевой задаче с однородными граничными условиями (14)–(16).

Для этого построим функцию $V(x,t)$ для которой выполняются граничные условия (24). Например, возьмем функцию, линейную относительно переменной x

$$V(x,t)=\mathrm{A}(t)x+\mathrm{B}(t).$$

Условия (24) дают

$$V(0,t)=\mu_1(t)=\mathrm{B}(t),$$
$$V(l,t)=\mu_2(t)=\mathrm{A}(t)l+\mathrm{B}(t).$$

Следовательно

$$V(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Теперь введем новую неизвестную функцию $\upsilon(x,t)$, полагая

$$u(x,t)=V(x,t)+\upsilon(x,t). \tag{25}$$

Далее подставляя функцию (25) в (22) – (24), получаем краевую задачу для определения $\upsilon(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+F(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$

$$\upsilon(x,0)=\Phi(x),\quad \frac{\partial \upsilon(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad 0\le x\le l,$$

$$\upsilon(0,t)=0,\quad \upsilon(l,t)=0.$$

Здесь

$$\Phi(x)=\varphi(x)-\mu_1(0)-\frac{x}{l}[\mu_2(0)-\mu_1(0)],\quad \Psi(x)=\psi(x)-\mu_1'(0)-\frac{x}{l}[\mu_2'(0)-\mu_2'(0)],$$

$$F(x,t)=f(x,t)-\mu_1''(t)-\frac{x}{l}[\mu_2''(t)-\mu_1''(t)].$$

Задачи

1. Решить следующие смешанные задачи:

а) $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<l;\quad u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=t;\quad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0;$

б) $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<1;\quad u|_{x=0}=t+1,\quad u|_{x=1}=t^3+2;\quad u|_{t=0}=x+1,$

$u_t|_{t=0}=0.$

2. Решить следующие смешанные задачи:

а) $u_{tt}=u_{xx}-4u,\quad 0<x<1;\quad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0;\quad u|_{t=0}=x^2-x,$

$u_t|_{t=0}=0;$

б) $u_{tt}+2u_t=u_{xx}-u,\quad 0<x<\pi;\quad u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0;\quad u|_{t=0}=\pi x-x_2,$

$u_t|_{t=0}=0;$

в) $u_{tt}=u_{xx}+u, \quad 0<x<2; \quad u\big|_{x=0}=2t; \quad u\big|_{x=2}=0; \quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0$.

3. Решить следующие смешанные задачи:

а) $u_{tt}-u_{xx}+2u_t=4x+8l^t\cos x, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}; \quad u_x\big|_{x=0}=2t$,

$u\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\pi t; \quad u\big|_{t=0}=\cos x, \quad u_t\big|_{t=0}=2x$;

б) $u_{tt}-u_{xx}-2u_t=4t(\sin - x), \quad 0<x<\frac{\pi}{2}; \; u_x\big|_{x=0}=3, \quad u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=t^2+t$,

$u\big|_{t=0}=3; \quad u_t\big|_{t=0}=x+\sin x$.

4. Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев:

а) один конец стержня $(x=0)$ жестко закреплен, а другой конец $(x=l)$ свободен;

б) оба конца стержня свободны;

в) один конец стержня $(x=0)$ закреплен упруго, а другой конец $(x=l)$ свободен.

Лекция 7. Метод Римана

§ 1. Задача Коши и ее решение по методу Римана

Рассмотрим уравнение

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \tag{1}$$

К такому виду, как мы видели, приводится любое линейное гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными.

Пусть на плоскости x, y задана кривая $\overline{AB}$, которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям координат и на ней заданы две функции φ и ψ.

Задача Коши состоит в следующем: требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее на кривой $\overline{AB}$ условиям

$$u\Big|_{\overline{AB}}=\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\overline{AB}}=\psi, \tag{2}$$

где n означает дифференцирование по нормали к кривой $\overline{AB}$.

Наряду с уравнением $L(u)=0$ рассмотрим сопряженное уравнение, которое определяется следующим образом:

$$L^*(\upsilon)=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x\partial y}-\frac{\partial(a\upsilon)}{\partial x}-\frac{\partial(b\upsilon)}{\partial y}+c\upsilon=0 \tag{3}$$

Нетрудно непосредственным дифференцированием проверить следующее тождество

$$\begin{aligned}\upsilon L(u)-uL^*(\upsilon)=&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+2au\upsilon\right)+\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+2bu\upsilon\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Возьмем теперь произвольную точку $M(x_0,y_0)$ и проведем через нее характеристики $x=x_0$, $y=y_0$, пересекающие кривую AB соответственно в точках P и Q (рис. 1). Обозначим через Ω область ограниченную этими прямыми и дугой PQ.

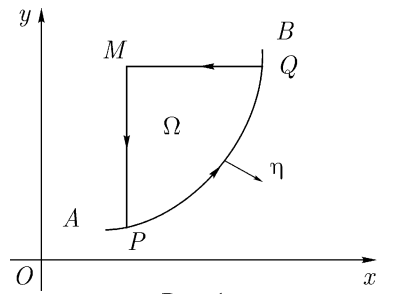

Рис. 1

Интегрируя обе части тождества (4) по области Ω и пользуясь известной формулой Грина, получим

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\upsilon L(u)-u L^{*}(\upsilon)\right] dx\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}-\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2 b u \upsilon\right)dx+ +\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2 a u \upsilon\right)dy, \tag{5}$$

где контур Γ – граница области Ω – состоит из трех частей: характеристик QM и MP и дуги PQ.

Вычислим интеграл, взятый вдоль характеристик QM к MP.

Имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{QMP}-\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2 b u \upsilon\right)dx+\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2 a u \upsilon\right)dy= =-\frac{1}{2}\int\limits_{QM}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2 b u \upsilon\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{MP}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2 u \upsilon a\right)dy=J, \tag{6}$$

так как вдоль QM меняется только x, а вдоль MP y.

Далее так как

$$\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2 b u \upsilon=\frac{\partial (u\upsilon)}{\partial x}+2u\left(b\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)$$

и

$$\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2 a u \upsilon=\frac{\partial (u\upsilon)}{\partial y}+2u\left(a\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right),$$

то выражение J представимо следующим образом:

$$J=\frac{1}{2}(u\upsilon)_Q-\frac{1}{2}(u\upsilon)_M-\int\limits_{QM}u\left(b\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dx+ +\frac{1}{2}(u\upsilon)_P-\frac{1}{2}(u\upsilon)_M+\int\limits_{MP}u\left(a\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dy. \tag{7}$$

Теперь, учитывая формулы (6), (7), из (5) получаем следующее соотношение

$$(u\upsilon)_M=\frac{(u\upsilon)_P+(u\upsilon)_Q}{2}-\int\limits_{QM}u\left(b\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dx+\int\limits_{MP}u\left(a\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dy+ +\frac{1}{2}\int\limits_{PQ}-\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2 b u \upsilon\right)dx+\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2 a u \upsilon\right)dy- -\iint\limits_{\Omega}\left[\upsilon L(u)-u L^{*}(\upsilon)\right]dx\,dy. \tag{8}$$

Пусть теперь $u-$ решение задачи Коши (1), (2), а $\upsilon-$ какое-нибудь решение однородного сопряженного уравнения (3). Тогда формула (8) может быть переписана следующим образом:

$$(u\upsilon)_M=\frac{(u\upsilon)_P+(u\upsilon)_Q}{2}-\int\limits_{QM}u\left(b\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dx+\int\limits_{MP}u\left(a\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dy+ +\frac{1}{2}\int\limits_{PQ}-\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2bu\upsilon\right)dx+\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2au\upsilon\right)dy-\iint\limits_{\Omega}\upsilon f\,dx\,dy. \tag{9}$$

Рассматривая правую часть равенства (9), мы видим, что в интегралы

$$\int\limits_{QM}u\left(b\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)dx,\quad \int\limits_{PM}u\left(a\upsilon-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dy \tag{10}$$

входят неизвестные значения u, так как мы не знаем решения u на характеристиках QM и MP.

Следуя идее Римана, исключим из формулы (9) эти неизвестные члены путем выбора специального решения υ сопряженного уравнения. А именно, возьмем такое решение уравнения (3), которое удовлетворяло бы следующим трем условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \frac{\partial \upsilon}{\partial x}-b\upsilon=0 \text{ на характеристике } QM,\\ &2)\ \frac{\partial \upsilon}{\partial y}-a\upsilon=0 \text{ на характеристике } MP,\\ &3)\ \upsilon=1 \text{ в точке } M. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда интегралы (10) будут равняться нулю, и равенство (9) перейдет в формулу Римана

$$U(M)=\frac{(u\upsilon)_P+(u\upsilon)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int_{QP}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+2bu\upsilon\right)dx-$$
$$-\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+2au\upsilon\right)dy-\iint_{\Omega}\upsilon f\,dx\,dy, \qquad (12)$$

которая и дает решение задачи Коши, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль $\overline{QP}$, содержат функции, известные на кривой $\overline{AB}$. В самом деле, функция υ была определена выше, а функции u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ также определены на кривой $\overline{AB}$ в силу условий (2), а именно:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{AB}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(s,x)+\frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,x)\Big|_{\overline{AB}}=\frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,x)+\psi\cos(n,x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{AB}}=\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,y)+\frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,y)\Big|_{\overline{AB}}=\frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,y)+\psi\cos(n,y),$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ – производная по направлению касательной к кривой $\overline{AB}$.

Рассмотрим природу решения υ сопряженного уравнения (3), удовлетворяющего условиям (11). Это решение является функцией двух пар переменных: текущих координат x, y и фиксированных координат x_0, y_0 точки M. Поэтому, если ввести обозначение

$$\upsilon=\upsilon(x,y;x_0,y_0),$$

то условия (11) могут быть переписаны таким образом:

1) $\frac{\partial \upsilon(x,y_0;x_0,y_0)}{\partial x}=b(x,y_0)\upsilon(x,y_0;x_0,y_0)$ на характеристике QM;

2) $\frac{\partial \upsilon(x_0,y;x_0,y_0)}{\partial y}=a(x_0,y)\upsilon(x_0,y;x_0,y_0)$ на характеристике MP;

3) $\upsilon(x_0,y_0;x_0,y_0)=1$.

Отсюда путем интегрирования получаем

$$\upsilon(x,y_0;x_0,y_0)=e^{\int_{x_0}^{x}b(\xi,y_0)d\xi}, \quad \upsilon(x_0,y;x_0,y_0)=e^{\int_{y_0}^{y}a(x_0,\xi)d\xi}. \qquad (13)$$

Решение $\upsilon(x,y;x_0,y_0)$ сопряженного уравнения (3), удовлетворяющее условиям (13), называется функцией Римана. Эта функция не зависит ни от данных Коши (2) на кривой $\overline{AB}$, ни от вида этой кривой.

Изложенный здесь метод Римана приводит решение задачи Коши к построению функции Римана $\upsilon(x,y;x_0,y_0)$. Можно доказать существование и единственность функции Римана.

Сделанное выше предположение о том, что прямые, параллельные осям, т.е. характеристики, пересекают линию $\overline{AB}$ не более чем в одной точке, является существенным. При невыполнении этого условия задача Коши (1), (2), вообще говоря, неразрешима.

§ 2. Пример

Решим, с использованием метода Римана, следующую задачу: найти функцию $u(x,y)$ такую, что

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (14)$$

$$u\big|_{y=1}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=F(x). \qquad (15)$$

Уравнение (14) является гиперболическим при $x\,y\neq 0$, так как

$$\Delta=x^2y^2>0.$$

Согласно общей теории (см. Лекцию № 2) составляем уравнение характеристик

$$x^2dy^2-y^2dx^2=0$$

или

$$x\,dy+y\,dx=0, \quad x\,dy-y\,dx=0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x\,y = C_1, \quad \frac{y}{x} = C_2.$$

Следовательно, нужно ввести новые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = x\,y, \quad \eta = \frac{y}{x}. \tag{16}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Подставляя значения вторых производных в уравнение (14), мы приведем его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0. \tag{17}$$

Прямая $y = 1$ в новых переменных будет иметь вид равнобочной гиперболы (рис. 2)

$$\xi\eta = 1. \tag{18}$$

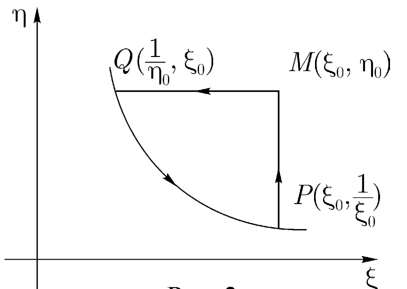

Рис. 2

Далее из соотношений

$x = \sqrt{\dfrac{\xi}{2}}$, $y = \sqrt{\xi\eta}$ ясно, что

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\xi\eta=1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\xi}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\xi\eta=1}.$$

Следовательно, в силу условий (15) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi), \tag{19}$$

а также

$$u = \Big|_{\xi\eta=1} = f(\xi). \tag{20}$$

Полагая в формуле Римана (12) $a = 0, b = -\dfrac{1}{2\xi}, f = 0$, получим

$$u(\xi_0,\eta_0) = \frac{(u\upsilon)_P + (u\upsilon)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_{QP}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} - \frac{u\upsilon}{\xi}\right)d\xi - \left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)d\eta. \tag{21}$$

Далее функция Римана $\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta} = 0 \tag{22}$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\upsilon(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \text{ на } MQ, \ \upsilon(\xi_0,\eta;\xi_0\eta_0) = 1 \text{ на } MP. \tag{23}$$

Легко убедиться, что функция

$$\upsilon(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \tag{24}$$

удовлетворяет уравнению (22) и условиям (23).

Подставляя (19), (20) и (24) в формулу (21), получим

$$u(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{2}\left\{f(\xi_0) + \sqrt{\xi_0\eta_0}\,f\left(\frac{1}{\eta_0}\right) + \frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}}\frac{f(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}}d\xi - \sqrt{\xi_0}\int_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}}\frac{F(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}}d\xi\right\}.$$

Возвращаясь к старым переменным x и y, получим решение задачи (14), (15):

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left\{f(xy) + yf\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{2}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{f(z)}{z^{3/2}}dz - \sqrt{xy}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{F(z)}{z^{3/2}}dz\right\}.$$

Задачи

Решить методом Римана следующие задачи:

1. $u_{xy}+2u_x+u_y+2u=1,\quad 0<x,y<1;\quad u\big|_{x+y=1}=x,\quad u_x\big|_{x+y=1}=x$.

2. $xyu_{xy}+xu_x-yu_y-u=2y, 0<x,y<\infty; u\big|_{xy=1}=1-y, u_y\big|_{xy=1}=x-1$.

3. $u_{xy}+\dfrac{1}{(x+y)}(u_x+u_y)=2,\quad 0<x,y<\infty;\quad u\big|_{y=x}=x^2,\quad u_x\big|_{y=x}=1+x$.

4. $u_{xx}-u_{yy}+\dfrac{2}{x}u_x-\dfrac{2}{y}u_y=0,\quad |x-y|<1,\quad |x+y-2|<1;$

   $u\big|_{y=1}=u_0(x),\quad u_y\big|_{y=1}=u_1(x),\quad u_0\in C^2(0,2),\quad u_1\in C^1(0,2)$.

5. $2u_{xy}-e^{-x}u_{yy}=4x,\quad -\infty<x,y<+\infty;\quad u\big|_{y=x}=x^5\cos x,$

   $u_y\big|_{y=x}=x^2+1$.

Лекция 8. Метод каскадного интегрирования Лапласа

Цель настоящей лекции – изложить результаты Лапласа, касающиеся интегрирования линейных гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y). \qquad (1)$$

Для уравнения канонического вида (1) характеристиками, очевидно, служат прямые, параллельные координатным осям. Легко видеть, что из всех преобразований

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y)$$

такие прямые в себя переводят только преобразования вида

$$\phi=\phi(x),\qquad \psi=\psi(y). \qquad (2)$$

Такие преобразования сохраняют класс уравнений (1) и могут быть использованы для дальнейшего упрощения уравнения, приведенного к канонической форме. Уравнение (1) в результате преобразования (2) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial\psi}+a_1(\phi,\psi)\frac{\partial u}{\partial\phi}+b_1(\phi,\psi)\frac{\partial u}{\partial\psi}+c_1(\phi,\psi)u=f_1(\phi,\psi),$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_1=\frac{a}{\psi'},\quad b_1=\frac{b}{\phi'},\quad c_1=\frac{c}{\phi'\psi'},\quad f_1=\frac{f}{\phi'\psi'}. \qquad (3)$$

§1. Преобразования неизвестной функции

Рассмотрим сдвиг

$$\upsilon(x,y)=u(x,y)-\sigma(x,y)$$

неизвестной функции $u(x,y)$ в уравнении (1) на некоторую заданную функцию $\sigma(x,y)$. Легко видеть, что новая неизвестная $\upsilon(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+b\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+c\,\upsilon=f-\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial\sigma}{\partial x}+b\frac{\partial\sigma}{\partial y}+c\,\sigma\right).$$

Из последней формулы видно, что если в качестве σ выбрать какое-нибудь решение $u_0(x,y)$ уравнения (1), то в результате сдвига получится уравнение с нулевой правой частью. Поскольку действительную трудность в теории уравнений с частными производными представляет не описание какого-нибудь частного решения, а нахождение общего решения или решения, удовлетворяющего заданными начальным или граничным условиям, можно считать, что всякое уравнение (1) сдвигом приводится к канонической форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0. \qquad (4)$$

Другое часто применяемое преобразование для уравнений типа (1), сохраняя прежние независимые переменные x и y, заменяет неизвестную функцию $u(x,y)$ новой неизвестной $\upsilon(x,y)$, связанной с $u(x,y)$ соотношением вида

$$u(x,y)=\lambda(x,y)\upsilon(x,y), \tag{5}$$

где $\lambda(x,y)$ – некоторый известный множитель.

Простое вычисление показывает, что преобразование (5) переводит каноническое уравнение (4) в новое каноническое уравнение

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x\partial y}+a_1(x,y)\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+b_1(x,y)\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+c_1(x,y)\upsilon=0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} a_1&=a+\frac{\partial}{\partial y}\ln\lambda,\\ b_1&=b+\frac{\partial}{\partial y}\ln\lambda,\\ c_1&=c+a_1b_1-a\,b+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\ln\lambda. \end{aligned} \tag{7}$$

Эти формулы (7) показывают, что для того, чтобы уравнения (4) и (6) были связаны преобразованием (5), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция λ, такая, что

$$a_1-a=\frac{\partial}{\partial y}\ln\lambda,\quad b_1-b=\frac{\partial}{\partial y}\ln\lambda,\quad c_1-c=a_1b_1-ab+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\ln\lambda.$$

Из этих соотношений находим, что

$$\frac{\partial(a_1-a)}{\partial x}=\frac{\partial(b_1-b)}{\partial y}=c_1-c-a_1b_1+a\,b,$$

или же, из равенства первой и второй частей третьей

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x}+a_1b_1-c_1&=\frac{\partial a}{\partial x}+a\,b-c,\\ \frac{\partial b_1}{\partial y}+a_1b_1-c_1&=\frac{\partial b}{\partial y}+a\,b-c. \end{aligned} \tag{8}$$

Если условия (8) выполнены, определение множителя λ не представляет уже никакой трудности. А именно, замечая, что тогда

$$\frac{\partial(b_1-b)}{\partial y}=\frac{\partial(a_1-a)}{\partial x}$$

и выражение

$$(b_1-b)d\,x+(a_1-a)d\,y$$

является полным дифференциалом, мы получаем для определения λ формулу

$$\lambda=\exp\int\left[(b_1-b)\,d\,x+(a_1-a)\,d\,y\right].$$

Таким образом, доказано утверждение.

Лемма. *Для того чтобы два уравнения канонического вида* (4) *и* (6) *были приводимы одно к другому посредством некоторого мультипликативного преобразования типа* (5), *необходимо и достаточно, чтобы величины*

$$h=\frac{\partial a}{\partial x}+a\,b-c\quad \text{и}\quad k=\frac{\partial b}{\partial y}+b\,a-c$$

имели для обоих уравнений одно и то же значение.

Следствие. *Уравнение (4) заменой (5) сводится к уравнению* $\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x\partial y}=0$, *если и только если* $h=k=0$.

Согласно лемме, функции h и k являются (абсолютными) инвариантами группы преобразований вида (5). В литературе их обычно называют инвариантами Лапласа уравнения (4).

Легко видеть, что инварианты h и k переходят один в другой при перестановке x и y. Выясним, как h и k меняются при заменах переменных вида (2). Дифференцируем две первые формулы (3), находим, что

$$\frac{\partial a_1}{\partial\phi}=\frac{1}{\phi'\psi'}\cdot\frac{\partial a}{\partial x},\qquad \frac{\partial b_1}{\partial\psi}=\frac{1}{\phi'\psi'}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Используя эти равенства и формулы (3), получаем

$$h_1=\frac{h}{\phi'(x)\psi'(y)},\qquad k_1=\frac{k}{\phi'(x)\psi'(y)}.$$

Выражаясь научно, (10) означает, что h и k являются относительными инвариантами веса 1 группы преобразований вида (2). Лемма и формулы (10) показывают, что отношение инвариантов Лапласа k/h представляет собой (абсолютный) инвариант как для преобразований (5), так и для преобразований (2).

§2. Преобразование Лапласа

Уравнение (4), в зависимости от того, какой из двух инвариантов Лапласа k или h желательно выделить, можно записать в двух равносильных формах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial a}{\partial x}+ab-h\right)u=\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)u-hu=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial b}{\partial y}+ab-k\right)u=\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)u-ku=0.$$

Поэтому уравнение (4) эквивалентно каждой из систем

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)u=u_1,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)u_1-hu=0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)u=u_{-1},\qquad \left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)u_{-1}-ku=0. \tag{12}$$

Формулы (11), (12) показывают, что если хотя бы один из инвариантов h, k тождественно равен нулю, то уравнение (4) интегрируется в квадратурах.

Действительно, если $h\equiv 0$, то второе из уравнений (11) становится обыкновенным линейным дифференциальным уравнением относительно неизвестной u_1. Интегрируя его, получаем

$$u_1=Y(y)\exp\left(-\int b\,dx\right).$$

Используя метод вариации постоянной, из первого уравнения находим:

$$u=\exp\left(-\int a\,dy\right)\left[X(x)+\int Y(y)\exp\left(\int(a\,dy-b\,dx)\right)dy\right],$$

где $X(x)$ – произвольная функция переменного x, а Y – переменного y.

При $k\equiv 0$ из (12) аналогичным образом получаем формулу

$$u=\exp\left(-\int b\,dx\right)\left[Y(y)+\int X(x)\exp\left(\int(b\,dx-a\,dy)\right)dx\right].$$

В случае $h=k=0$ уравнение (4) эквивалентно уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ (см. следствие леммы) и поэтому

$$u=\exp\left(-\int(b\,dx+a\,dy)\right)\left(X(x)+Y(y)\right).$$

К несчастью, очень редко оказывается, что $h\equiv 0$ или $k\equiv 0$! Однако и в более общей ситуации может оказаться полезной запись уравнения (4) в виде одной из систем (11) или (12), поскольку она позволяет преобразовать заданное уравнение в два других уравнения вида (4), одно из которых, в свою очередь, может иметь один из инвариантов Лапласа равный нулю. Соответствующие преобразования называются x- и y-преобразованиями Лапласа. X – преобразование задается первой из формул (11) и состоит в переходе от неизвестной u к неизвестной u_1.

Если $h\neq 0$, то второе из уравнений (11) можно переписать в виде

$$u=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)u_1. \tag{13}$$

Подставляя это выражение вместо u в первое уравнение (11), получим

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)u_1-u_1=$$

$$=\frac{1}{h}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{b}{h}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{1}{h}\frac{\partial b}{\partial y}u_1+\frac{a}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{ab}{h}u_1-\frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial y}bu_1-u_1=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\left(a-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial u_1}{\partial y}+\left(\frac{\partial b}{\partial y}+\left(a-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\right)b-h\right)u_1\right].$$

Аналогично, если $k \neq 0$, то, пользуясь (12), получаем

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u_{-1} - u_{-1} =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial x \partial y} + \left(b - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)\frac{\partial u_{-1}}{\partial y} + a\frac{\partial u_{-1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \left(b - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)a - k\right)u_{-1}\right].$$

Будем обозначать результат x- и y-преобразования Лапласа соответственно через E_1 и E_{-1}, и записывать в более компактном виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + a_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + c_1(x,y)u_1 = 0, \qquad (E_1)$$

$$\frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial x \partial y} + a_{-1}(x,y)\frac{\partial u_{-1}}{\partial x} + b_{-1}(x,y)\frac{\partial u_{-1}}{\partial y} + c_{-1}(x,y)u_{-1} = 0, \qquad (E_{-1})$$

где

$$\begin{aligned} &a_1 = a - \frac{\partial}{\partial y}\ln h, \qquad b_1 = b, \qquad c_1 = a_1 b_1 + \frac{\partial b}{\partial y} - h, \\ &a_{-1} = a, \qquad b_{-1} = b - \frac{\partial}{\partial x}\ln k, \qquad c_{-1} = a_{-1}b_{-1} + \frac{\partial a}{\partial x} - k. \end{aligned} \qquad (14)$$

Используя (14), нетрудно найти инварианты Лапласа для уравнений E_1 и E_{-1}:

$$\begin{aligned} &h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln h, \qquad h_{-1} = k, \\ &k_1 = h, \qquad k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln k. \end{aligned} \qquad (15)$$

Из формул (15) следует, что если к уравнению E_1 применить $y-$ преобразование Лапласа, то результат будет иметь исходные инварианты Лапласа h и k. Но выше было доказано, что если два уравнения вида (4) имеют одинаковые инварианты, то они связаны заменой вида (5). Следующая выкладка

$$(u_1)_{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b_1\right)u_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial a}{\partial x} + b\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right)u = hu$$

показывает, что коэффициент пропорциональности в (5) совпадает с h^{-1}.

Аналогично проверяется, что в результате применения к E_{-1} x-преобразования получается уравнение, связанное с исходным уравнением E_0 заменой (5) с $\lambda = k^{-1}$.

Важно отметить, что ввиду (13), если нам удалось тем или иным способом проинтегрировать уравнение E_1, то мы решим и исходное уравнение E_0. Аналогичным образом уравнение E_0 связано и с E_{-1}. А именно, переписывая второе из соотношений (12) в виде

$$u = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u_{-1}, \qquad (16)$$

мы получаем формулу для решений E_0, если нам известны решения E_{-1}.

Выше было показано, что применение к E_1 y-преобразования, фактически, приводит к исходному уравнению E_0. Однако, если $h_1 \neq 0$, то применяя к E_1 x-преобразование Лапласа, мы приходим к некоторому новому уравнению E_2. Аналогично, с помощью y-преобразования мы, исходя из E_{-1} строим уравнение E_{-2} и т.д. Таким образом, мы имеем целую двустороннюю последовательность уравнений

$$\ldots, E_{-3}, E_{-2}, E_{-1}, E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots, \qquad (17)$$

не обрывающуюся с той или другой стороны, до тех пор пока, возможно, не встретится уравнение, один из инвариантов которого тождественно равен нулю. Эти уравнения находятся в такой взаимной связи, что, проинтегрировав любое из них, мы проинтегрируем и все другие. В частности, если цепочка (17) обрывается хотя бы в одну сторону, то для крайнего из уравнений цепочки один из инвариантов Лапласа равен нулю. Согласно результатам, полученным выше, это уравнение интегрируется в квадратурах, а затем с помощью формул типа (13), (16) находятся решения всех остальных уравнений цепочки (17) и, в частности, исходного уравнения E_0. Этот способ интегрирования уравнений вида (4) называется каскадным методом Лапласа.

Часто построение последовательности (17) оказывается полезным при исследовании уравнения E_0 даже в случае, когда она оказывается бесконечной в обе стороны. При этом, как правило, можно обойтись без явного нахождения коэффициентов уравнений E_i и ограничиться изучением последовательности инвариантов, соответствующих уравнениям (17). Выше было показано (см. формулу (15)), что $k_{i+1} = h_i$. Поэтому достаточно рассматривать только последовательность

$$\ldots, h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h = h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots .$$

Из формул (15) следует, что ее элементы можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln h_i, \quad i \in Z,$$

исходя из “начальных значений”

$$h_{-1} = k, \qquad h_0 = h.$$

Задачи

1. Найдите инварианты уравнения (E_n), если исходное уравнение имеет вид

$$u_{xy} + \frac{\alpha}{(x+y)} u_x + \frac{\beta}{(x+y)} u_y + \frac{\gamma}{(x+y)^2} u = 0,$$

где α, β, γ – постоянные.

2. Покажите, что если уравнения (E_0) и (E_1) имеют одни и те же инварианты, то каждое из них заменой переменных приводится к виду $u_{xy} = u$.

3. Покажите, что если инварианты уравнения (E_2) совпадают с инвариантами исходного уравнения (E_0), то

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln (h \cdot k) = 0$$

и после соответствующей замены независимых переменных $x \leftrightarrow f(x)$, $y \leftrightarrow \varphi(y)$ величины h и k являются решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \sin \omega .$$

4. Покажите, что если для некоторого уравнения $h_2 = k$, то существует замена переменных вида $x \leftrightarrow f(x)$, $y \leftrightarrow g(y)$, в результате которой получается уравнение с $k_2 = h$.

5. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2l(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2m(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + n(x,y)u = 0$$

подвергается замене $\tilde{u} = \lambda(x,y)u$. Докажите, что величины

$$J = \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + l^2 + m^2 - n$$

есть инварианты этого преобразования.

Лекция 9. Уравнения, интегрируемые каскадным методом Лапласа

§1. Каскад Лапласа

Как было показано на предыдущей лекции, x-преобразование Лапласа генерирует из исходного уравнения E_0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

уравнения E_i вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + a_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + c_i u_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots , \tag{2}$$

коэффициенты и инварианты которых связаны между собой соотношениями:

$$
\begin{gathered}
a_i = a_{i-1} - \frac{\partial}{\partial y}\ln h_{i-1}, \quad b_i = b_{i-1}, \quad c_i = a_i b_i + \frac{\partial b_i}{\partial y} - h_{i-1}, \\
h_i = 2\ h_{i-1} - k_{i-1} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln h_{i-1}, \quad k_i = h_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Здесь $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$. Аналогично, y-преобразование Лапласа дает цепочку уравнений E_{-i}:

$$
\frac{\partial^2 u_{-i}}{\partial x \partial y} + a_{-i}\frac{\partial u_{-i}}{\partial x} + b_{-i}\frac{\partial u_{-i}}{\partial y} + c_{-i}\, u_{-i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
a_{-i-1} = a_{-i}, \quad b_{-i-1} = b_{-i} - \frac{\partial}{\partial x}\ln k_{-i}, \quad c_{-i-1} = a_{-i-1}b_{-i-1} + \frac{\partial a_{-i}}{\partial x} - k_{-i}, \\
h_{-i-1} = k_{-i}, \quad k_{-i-1} = 2k_{-i} - h_{-i} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln k_{-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots
\end{gathered}
\tag{5}
$$

В виде систем первого порядка уравнения (1), (2) и (4) записываются в виде:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) u_i = u_{i+1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{i+1} - h_i u_i = 0, \tag{6}
$$

и

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x} + b_{-i}\right) u_{-i} = u_{-i-1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u_{-i-1} - k_{-i} u_{-i} = 0. \tag{7}
$$

Отметим, что инварианты Лапласа h_i и k_i уравнения E_i вычисляются по формулам

$$
\begin{gathered}
h_{k+1} = 2\ h_k - h_{k-1} - \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\ln h_k, \quad k \in \mathrm{Z}, \\
k_{k+1} = h_k, \qquad k = h_{-1}, \qquad h_0 = h.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Здесь h и k – инварианты Лапласа уравнения E_0.

§2. Явные формулы для решений

Как уже отмечалось выше, зная решение u_n уравнения E_n, можно найти решение u исходного уравнения E_0, не прибегая к операции интегрирования. Чтобы найти формулу, связывающую эти решения, перепишем второе из соотношений (6) в виде

$$
u_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{i+1}.
$$

Выражая с помощью этой формулы u_{n-1} через u_n, u_{n-2} через u_{n-1} и т.д., приходим к формуле

$$
u = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\cdots\frac{1}{h_{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_n.
$$

Поскольку

$$
\frac{\partial}{\partial x} + b = e^{-\int b\, dx}\frac{\partial}{\partial x} e^{\int b\, dx},
$$

последнюю формулу можно переписать в виде

$$
u\, e^{\int b\, dx} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x}\cdots\frac{1}{h_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_n e^{\int b\, dx}\right). \tag{9}
$$

Аналогичным образом получаем из соотношения (7)

$$
u\, e^{\int a\, dy} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{k_{-1}}\frac{\partial}{\partial y}\cdots\frac{1}{k_{1-m}}\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{-m} e^{\int a\, dy}\right). \tag{10}
$$

Формулы (9) и (10) важны при интегрировании исходного уравнения E_0 каскадным методом Лапласа. Пусть $h_n = 0$. Тогда из (6) получаем

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_n\right) u_n = Y(y) e^{-\int b\, dx}
$$

или

$$
u_n = e^{\left(-\int a_n\, dy\right)}\left[X(x) + \int Y(y) e^{\int (a_n\, dy - b\, dx)}\, dy\right], \tag{11}
$$

где X и Y – произвольные функции переменных x и y соответственно. Введем обозначения

$$
\alpha = e^{-\int a_n\, dy}, \qquad \beta = e^{\int a_n\, dy - b\, dx}.
$$

Тогда

$$u_n = \alpha\left(X + \int Y \beta\, d\, y\right).$$

Подставляя это выражение для u_n в (9), получаем, что u имеет вид

$$u = A\left(X + \int Y \beta\, d\, y\right) + A_1\left(X' + \int Y \frac{\partial \beta}{\partial x} d\, y\right) + \dots + A_n\left(X^{(n)} + \int Y \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} d\, y\right),$$

где $A, A_1, \dots A_n$ – заданные функции от x и y, а $X^{(m)}$ – производная порядка m произвольной функции $X(x)$. Так как Y – произвольная функция, то, полагая $Y = 0$, мы имеем следующее специальное решение:

$$u = AX + A_1 X' + \dots + A_n X^{(n)}. \tag{12}$$

Итак, если инвариант n-го порядка h_n тождественно равен нулю, то исходное уравнение E_0 (1) имеет специальное решение (12), где $X(x)$ – произвольная функция.

Можно доказать, что если для уравнения E_0 ряд Лапласа обрывается в обе стороны, то общее решение является суммой двух специальных. А именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема. *Пусть для уравнения (1)* $h_s = k_{-r} = 0$. *Тогда общее решение данного уравнения представимо в виде:*

$$u = AX + A_1 X' + \dots + A_n X^{(n)} + BY + B_1 Y' + \dots + B_m Y^{(m)}.$$

Здесь $A, A_1, \dots A_n, B, B_1, \dots B_m$ *– некоторые конкретные функции, а* X *и* Y *– произвольные функции переменных* x *и* y *соответственно.*

§3. Уравнение Эйлера – Пуассона

В качестве примера применения каскадного метода Лапласа рассмотрим важное для приложений уравнение Эйлера – Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{(x-y)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{(x-y)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

где β и β' – некоторые постоянные. Следуя Дарбу, будем обозначать уравнение (13) символом $E(\beta, \beta')$. Сравнивая (13) с (1), находим

$$a = -\frac{\beta'}{x-y}, \qquad b = \frac{\beta}{x-y}, \qquad c = 0.$$

Далее так как инварианты Лапласа уравнения (1) определяются по формулам

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c \quad \text{и} \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c,$$

то для рассматриваемого уравнения (13) имеем

$$h = \frac{\beta'(1-\beta)}{(x-y)^2}, \qquad k = \frac{\beta(1-\beta')}{(x-y)^2}. \tag{14}$$

Теперь из формулы (8) с помощью индукции нетрудно извлечь, что для целого n

$$h_n = \frac{A_n}{(x-y)^2},$$

где постоянные A_i связаны рекуррентными соотношениями

$$A_{n+1} = 2A_n - A_{n-1} + 2. \tag{15}$$

Из (15) находим

$$A_n = (n+1)A_0 - nA_{-1} + n(n+1).$$

Так как в соответствии с (14)

$$A_0 = \beta'(1-\beta), \qquad A_{-1} = \beta(1-\beta'),$$

то окончательно имеем:

$$A_n = n^2 + [\beta' + (1-\beta)]n + \beta'(1-\beta) = (n+\beta')(n+1-\beta). \tag{16}$$

Итак, для любых целых n

$$h_n = \frac{(n+\beta')(n+1-\beta)}{(x-y)^2}, \qquad k_n = \frac{(n-1+\beta')(n-\beta)}{(x-y)^2}. \tag{17}$$

Поскольку инварианты уравнения $E(\beta - n, \beta' + n)$ совпадают с (17), то результат n-кратного применения x-преобразования Лапласа к уравнению

$E(\beta,\beta')$, согласно лемме (см. лекцию 8), дает уравнение, связанное преобразованием вида

$$u(x,y)=\lambda(x,y)\upsilon(x,y)$$

с $E(\beta-n,\beta'+n)$.

Второй факт, непосредственно вытекающий из формулы (17), состоит в том, что уравнение Эйлера – Пуассона интегрируемо в квадратурах каскадным методом Лапласа тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел β и β' является целым. В самом деле, в этом и только в этом случае $h_n=0$ или $k_n=0$ для некоторого целого n.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{(x-y)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \qquad (18)$$

В этом случае $\beta=\beta'=-1$ и из (17) имеем $h_1=k_{-1}=0$. Поскольку для уравнения (18) $h=k=\dfrac{2}{(x-y)^2}$, формулы (3), (5) дают

$$a_1=-\frac{1}{x-y},\qquad b_{-1}=\frac{1}{x-y}.$$

Теперь из формулы (11) получаем, что

$$u_1=\frac{1}{(x-y)}\left[X(x)+\int Y(y)(x-y)^2dy\right]$$

и, следовательно, решение исходного уравнения (18) имеет вид (см. (9)):

$$u=e^{-\int b\,dx}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1e^{\int b\,dx}\right)=$$

$$=-X(x)+\frac{(x-y)}{2}X'(x)-\int Y(y)(x-y)^2dy+(x-y)\int Y(y)(x-y)dy. \qquad (19)$$

Полагая в формуле (19) $Y(y)\equiv 0$, мы получаем специальное решение

$$u=\frac{(x-y)}{2}X'(x)-X(x). \qquad (20)$$

Совершенно, аналогично, используя формулу (10), получаем специальное решение вида

$$u=\frac{(y-x)}{2}\widetilde{Y}'(y)-\widetilde{Y}(y). \qquad (21)$$

Далее положим в формуле (19) $Y(y)=\frac{1}{2}\widetilde{Y}'''(y)$. Тогда интегрированием по частям приводим общее решение (19) к следующей форме

$$u=\frac{(x-y)}{2}\left[X'(x)-\widetilde{Y}'(y)\right]-\left[X(x)+\widetilde{Y}(y)\right]. \qquad (22)$$

Таким образом, общее решение (22) уравнения (18) есть сумма специальных решений (20) и (21).

Задачи

1. Докажите, что уравнение

$$u_{xy}+\frac{\alpha}{(x+y)}u_x+\frac{\beta}{(x+y)}u_y+\frac{\gamma}{(x+y)^2}u=0$$

имеет решение вида

$$u=AX+A_1X'+\ldots+A_nX^{(n)},$$

где $X(x)$ – произвольная функция, если $\gamma=(\alpha+n)(\beta-n-1)$, n – любое натуральное число. Найдите общее решение для произвольного γ при $n=1$.

2. Проинтегрируйте уравнения:

а) $u_{xy}+xu_x+yu_y+(1+xy)u=0$;

б) $u_{xy}+mxu_x+nyu_y+(2m-n+mnxy)u=0$;

в) $u_{xy}+myu_x+e^{cy}u_y+(2c+my)e^{cy}u=0$,

где m, n, c – некоторые постоянные.

3. Покажите, что уравнение

$$u_{xy}+xyu_x+nxz=0,\qquad n\text{ – целое,}$$

имеет решение вида

$$u=AX+A_1X'+\ldots+A_nX^{(n)},$$

где $X(x)$ – произвольная функция переменного x. Построить эти решения для случая $n=2$ и $n=-1$.

4. Проинтегрируйте уравнения:

а) $u_{xy}-\dfrac{1}{y}\;u_x+\dfrac{k}{x}\;u_y-\dfrac{k}{xy}\;u=0,\quad k=\text{const};$

б) $u_{xy}+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x-y}\right)u_x-\dfrac{2}{x}u_y-\dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x-y}\right)u=0;$

в) $u_{xy}+\dfrac{2}{(x-y)}u_x-\dfrac{2}{(x-y)}u_y-\dfrac{4}{(x-y)^2}u=0.$

Лекция 10. Волновое уравнение. Формула Пуассона

В этой лекции рассматривается задача с начальными данными (задача Коши) для уравнения колебаний при отсутствии внешних возмущений.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u,\quad u=u(M,t) \tag{1}$$

в неограниченном пространстве $(M=M(x,y,z))$. Здесь $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

§1. Частные решения

Рассмотрим частные решения уравнения (1), обладающие центральной симметрией относительно некоторой точки M_0, т.е. решения вида

$$u(M,t)=u(r,t), \tag{2}$$

где $r=|MM_0|$ – расстояние между точками M и M_0. Для функции вида (2) результат применения оператора Лапласа в случае записывается в виде

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,u),$$

в чем можно убедится дифференцированием. Поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,u).$$

Вводя теперь функцию

$$\upsilon=ru, \tag{3}$$

получаем для нее уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2}. \tag{4}$$

Если функция $u(r,t)$ ограничена при $r=0$, то функция (3) обращается в нуль при $r=0,\ \upsilon(0,t)=0$. Поэтому задача Коши для исходного уравнения (1) с начальными данными

$$u(r,0)=\varphi(r),\quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t}=\psi(r) \tag{5}$$

сводится к задаче о колебаниях полуограниченной струны $(0\le r\le\infty)$ с закрепленным концом $r=0$:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2},\ \upsilon(r,0)=r\,\varphi(r),\quad \frac{\partial \upsilon(r,0)}{\partial t}=r\psi(r),\quad \upsilon(0,t)=0, \tag{6}$$

рассмотренной в лекции 5.

Общее решение уравнения (4) дается формулой

$$\upsilon(r,t)=f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{a}\right)$$

и, следовательно,

$$\upsilon(r,t)=\frac{1}{r}f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{r}f_2\left(t+\frac{r}{a}\right),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции. Частные решения уравнения (1)

$$u_1=\frac{1}{r}f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)\ \text{и}\ u_2=\frac{1}{r}f_2\left(t+\frac{r}{a}\right)$$

называются сферическими волнами: $u_1(r,t)$ есть расходящаяся сферическая волна, $u_2(r,t)$ – сходящаяся в точку $r=0$ сферическая волна, a – скорость распространения волн.

Таким образом, общее решение уравнения (1) в случае центральной симметрии представляется в виде суммы двух сферических волн.

Учитывая условие $\upsilon(0,t)=0$, находим $f_1(t)+f_2(t)=0$ или $f_2(t)=-f_1(t)$ для всех значений $t>0$, т.е.

$$u(r,t)=\frac{1}{r}f\left(t+\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{a}\right) \qquad \text{при } t>\frac{r}{a} \tag{7}$$

и, в частности,

$$u(0,t)=\frac{2}{a}f'(t). \tag{8}$$

§2. Метод усреднения

Существует интегральное преобразование, существенно использующее сферическую симметрию оператора Лапласа Δ, которое сводит уравнение (1) к (4). Этот классический метод решения принадлежит Пуассону. Мы применим его для решения следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^{2u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\quad M(x,y,z)\in R^3,\ t>0,\\ u(M,0)=\varphi(M),\ \frac{\partial u(M,0)}{\partial t}=\psi(M).\end{gathered} \tag{9}$$

Предположим, что решение задачи (9) существует и пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – фиксированная точка.

Рассмотрим функцию

$$\overline{u}(r,t)=M_r[u]=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{s_r}u\,ds_r, \tag{10}$$

являющуюся средним значением u на сфере s_r радиуса r с центром в точке M_0.

Из (10) видно, что

$$u(M_0,t)=\overline{u}(0,t). \tag{11}$$

Покажем, что функция $r\overline{u}(r,t)=v(r,t)$, обладающая сферической симметрией относительно точки M_0, удовлетворяет уравнению (4). Для этого проектируем уравнение (9) по объему шара k_r, ограниченного сферой s_r:

$$\iiint_{k_r}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dv=a^2\iiint_{k_r}\Delta u\,dv. \tag{12}$$

Теперь, используя формулу Остроградского

$$\iiint_{k_r}\operatorname{div}\overline{\mathrm{A}}\,d\,v=\iint_{s_r}\left(\overline{\mathrm{A}},\overline{n}\right)d\,s_r$$

для векторного поля $\overline{\mathrm{A}}-\operatorname{grad}u$, соотношение (12) перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint_{k_r}u\,dv=a^2\iint_{s_r}\frac{\partial u}{\partial r}ds_r.$$

Здесь мы учли, что нормаль к s_r направлена по радиусу и $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}$. Далее, представляя шар как совокупность концентрических сфер, последнее соотношение можно представить так

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r\left[\iint_{s_\rho}u\,ds_\rho\right]d\rho=a^2\iint_{s_r}\frac{\partial u}{\partial r}ds_r. \tag{13}$$

Теперь, учитывая формулу (10), равенство (13) приводим к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r\rho^2\overline{u}(\rho,t)d\rho=a^2r^2\,\frac{\partial\overline{u}(r,t)}{\partial r}. \tag{14}$$

Дифференцируя (14) по r и полагая $v=r\,\overline{u}$, получим (4). Следовательно, согласно формулам (11) и (8), имеем

$$u(M_0,t)=\overline{u}(0,t)=\frac{2}{a}f'(t). \tag{15}$$

Выразим f через начальные данные φ и ψ. Для этого продифференцируем $r\bar{u}(r,t)=f\left(t+\frac{r}{a}\right)-f\left(t-\frac{r}{a}\right)$ (см. (7)) по r и t:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})=f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\frac{1}{a}+f'\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{1}{a},\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})=f'\left(t+\frac{r}{a}\right)-f'\left(t-\frac{r}{a}\right).$$

Из последних соотношений получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\,\bar{u})=\frac{2}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right). \tag{16}$$

Далее полагая в (16) $t=0$ и $r=at$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\,\bar{\varphi})+t\bar{\psi}=\frac{2}{a}f'(t). \tag{17}$$

Здесь $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ – средние значения функции φ и ψ на сфере s_{at} радиуса $r=at$ с центром в точке M_0, и наконец из (15) и (17) получаем формулу Пуассона

$$u(M_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}(t\bar{\varphi})+t\bar{\psi},$$

которую, учитывая (10), можно записать в виде

$$u(M_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[tM_{at}(\varphi)\right]+tM_{at}(\bar{\psi}), \tag{18}$$

где

$$M_{at}(\varphi)=\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{s_{at}}\varphi ds_{at},\qquad M_{at}(\varphi)=\frac{1}{4\pi\, a^2t^2}\iint\limits_{s_{at}}\psi\, ds_{at}. \tag{19}$$

Из формулы Пуассона (18), полученной в предложении существования решения задачи Коши (9), следует единственность указанного решения. В самом деле, предполагая, что задача Коши имеет два решения u_1 и u_2, получим для разности начальные условия $\varphi=0,\psi=0$. Применяя к функции u_1–u_2 предыдущие рассуждения, приходим к формуле (18), в которой $\varphi=0,\psi=0$ и, следовательно, $u\equiv 0$ или $u_1\equiv u_2$.

Нетрудно доказать, что функция $u(M_0,t)$, определяемая формулой Пуассона (18), в самом деле дает решение задачи Коши (9), если $\varphi(x,y,z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\psi(x,y,z)$ – до второго порядка включительно.

Из формул (18), (19) непосредственно видна непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных. Действительно, опуская индекс 0 при M_0 формулы (18),(19), можно представить так

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint\limits_{s_1}\varphi(x+at\xi,\,y+at\eta,\,z+at\zeta)ds_1\right]+ \\ +\frac{1}{4\pi}\psi(x+at\xi,y+at\eta,\,z+at\zeta)ds_1 \tag{20}$$

Здесь s_1 – сфера, заданная уравнением $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$. Теперь вместо функций φ и ψ мы подставим в формулу (20) другие φ_0 и ψ_0, такие, что

$$|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right|<\varepsilon,\quad |\psi-\psi_0|<\varepsilon,$$

то решение u_0 задачи Коши, как это вытекает из формулы (20), для новых начальных данных будет мало отличаться от решения для старых, ибо

$$|u_0-u|=\frac{1}{4\pi}\left|\iint\limits_{s_1}\left[(\varphi_0-\varphi)+t(\psi_0-\psi)+t\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)a+t\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)a\eta+\right.\right. \\ \left.\left.+t\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)a\zeta\right]ds_1\right|\le(1+t+3at)\varepsilon.$$

Из последней формулы следует, что решение и задачи Коши (9) непрерывным образом зависит от начальных данных на любом конечном временном интервале.

И наконец, используя представление (20), нетрудно проверить, что эта функция $u(x,y,z,t)$ – решение задачи (9).

Задачи

1. Пусть функция $u(x,y,z,t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\quad u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad u_t\big|_{t=0}=0.$$

Доказать, что функция

$$v(x,y,z,t)=\int_0^t u(x,y,z,\tau)d\tau$$

является решением задачи Коши

$$v_{tt}=a^2\Delta v,\quad v_{t=0}=0,\quad v_t\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z).$$

2. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\quad M(x,y,z)\in R^3,$$
$$u\big|_{t=0}=f(x)g(y,z),\quad u_t\big|_{t=0}=0$$

достаточно, чтобы функция $g(y,z)$ была гармонической и $f(x)\in c^2(R)$.

Найти это решение.

3. Решить задачи:

а) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right),\quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=x^2+y^2+z^2$;

б) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right),\quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Лекция 11. Волновое уравнение (Метод спуска, метод отражения, формула Кирхгоффа)

Явный вид решения и волнового уравнения в трехмерном пространстве был получен в предыдущей лекции методом усреднения. А именно показано, что решение следующей задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right),\quad M(x,y,z)\in R^3,\quad t>0 \tag{1}$$

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad \frac{\partial u(M,0)}{\partial t}=\psi(M) \tag{2}$$

дается формулой Пуассона

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint_S\varphi(x+at\xi,\ y+at\eta,z+at\xi)ds\right]+\\+\frac{t}{4\pi}\iint_S\psi(x+at\xi,\ y+at\eta,z+at\xi)ds,\end{aligned} \tag{3}$$

где S – сфера заданная уравнением $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$.

§ 1. Метод спуска

Чтобы получить решение двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

(уравнения колебаний мембраны), мы используем «метод спуска» Адамара. Пусть $u=u(x,y,t)$ – решение уравнения (4) с начальными условиями

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y). \tag{5}$$

Тогда и можно рассматривать как решение задачи Коши (1), (2) в специальном случае, когда u,φ,ψ не зависят от z. Следовательно, решение задачи (4), (5) согласно формуле (3) вычисляется так:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint_{\xi^2+\eta^2\le 1}\frac{\psi(x+at\xi,y+at\eta)}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta\right]+$$
$$+\frac{t}{2\pi}\iint_{\xi^2+\eta^2\le 1}\frac{\psi(x+at\xi,y+at\eta)}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta.$$

Полагая $M(x,y)$, $M'(x',y')$, $x'=x+at\xi$, $y'=y+at\eta$, последнюю формулу можно записать следующим образом

$$u(M,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{|MM'|\le at}\frac{\varphi(M')dx'dy'}{\sqrt{a^2t^2-|MM'|^2}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{|MM'|\le at}\frac{\psi(M')dx'dy'}{\sqrt{a^2t^2-|MM'|^2}}.$$

§ 2. Метод отражения

Задача с начальными условиями для волнового уравнения в случае областей, ограниченных плоскостями, может быть решена методом отражений.

Рассмотрим, например, задачу для полупространства $z > 0$: найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{array}{l} u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \\ \dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = \psi(x, y, z) \end{array}\right\} \quad (z \geq 0)$$

и граничному условию

$$u(x, y, 0, t) = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0.$$

Решение этой задачи дается формулой (3), если начальные условия продолжить на все пространство нечетно по z (при $u(x, y, 0, t) = 0$)

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = -\psi(x, y, -z)$$

или четно (при $\dfrac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0$)

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = \psi(x, y, -z).$$

Проверим, что при нечетном по переменной z продолжении функций φ и ψ граничное условие $u(x, y, 0, t)$ выполняется автоматически.

В самом деле из (3) следует, что

$$u(x, y, 0, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[t \iint_S \varphi(x + at\xi, y + at\eta, at\xi) ds \right] +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \iint_S \psi(x + at\xi,\ y + at\eta,\ at\xi) ds = 0,$$

так как поверхностные интегралы равны нулю при нечетных функциях φ и ψ.

§ 3. Формула Кирхгоффа

Задача, которую мы рассмотрим в этом параграфе, – это задача с начальными условиями для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + f(M, t), \quad M(x, y, z) \in R^3, \qquad (6)$$

где «внешняя сила» f – известная функция. Поскольку разность двух решений уравнения (6) удовлетворяет однородному уравнению, для которого единственность установлена, то очевидно, что решение и уравнения (6) также определяется однозначно по начальным данным (2). Достаточно найти решение уравнения (6) с начальными данными вида

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0. \qquad (7)$$

Тогда решение с более общими начальными данными вида (2) получится прибавлением правой части выражения (3).

Решение неоднородного дифференциального уравнения с однородными начальными данными можно свести к решению набора задач с начальными условиями для однородного волнового уравнения с помощью «интеграла Дюамеля» (метод импульсов). Пусть $\upsilon(M, t, s)$ для любого $s > 0$ обозначаем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} \right), \qquad (8)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\upsilon = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = f(M, s) \qquad \text{при} \quad t = 0. \qquad (9)$$

Такая функция $\upsilon(x,y,z,t,s)$ существует и принадлежит классу C^2, если $f\in C^2$. Покажем, что функция

$$u(M,t)=\int_0^t \upsilon(M,t-s,s)\,ds \tag{10}$$

и есть искомое решение задачи (6), (7). Действительно $u(M,0)=0$. Далее

$$\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial \upsilon(M,t-s,s)}{\partial t}\,ds+\upsilon(M,0,t). \tag{11}$$

Полагая в последнем соотношении $t=0$, получаем, что $\dfrac{\partial u(M,0)}{\partial t}=0.$ Итак, условия (7) выполнены. Теперь из (10) и (11) дифференцированием получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial \upsilon(M,0,t)}{\partial t}+$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right)\right]ds.$$

И, наконец, учитывая (8) и (9), приходим к равенству (6).

Подставляя вместо υ его представление в виде (3), которое получается при $\varphi=0,\quad \psi=f(M,s)$, мы получим из (10):

$$u(M,t)=\int_0^t\left[\frac{t-\tau}{4\pi}\iint_S f(x+a(t-\tau)\xi,y+a(t-\tau)\eta,z+a(t-\tau)\zeta,\tau)\,ds\right]d\tau.$$

Здесь мы заменим в формуле (10) параметр s на τ.

Полагая $x'=x+a(t-\tau)\xi,\quad y'=y+a(t-\tau)\eta,\quad z'=z+a(t-\tau)\zeta$, последнюю формулу представим следующим образом:

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left[\iint_{|MM'|=a(t-\tau)} f(M',\tau)\frac{1}{a^2(t-\tau)}\,ds_{a(t-\tau)}\right]d\tau=$$
$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\frac{1}{r}\iint_{S_r} f\left(M',t-\frac{r}{a}\right)ds_r\,dr= \tag{12}$$
$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|M'M|\le at}\frac{1}{|M'M|}f\left(M',t-\frac{|M'M|}{a}\right)dx'dy'dz'.$$

Таким образом, решение неоднородного уравнения (6), удовлетворяющего начальным условиям (2), является суммой правых частей формул (3) и (12):

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint_S \varphi(x+at\xi,\ y+at\eta,z+at\xi)\,ds\right]+$$
$$+\frac{t}{4\pi}\iint_S \psi(x+at\xi,\ y+at\eta,z+at\xi)\,ds+ \tag{13}$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|M'M|\le at}\frac{f\left(M',t-\dfrac{|M'M|}{a}\right)}{|M'M|}dx'dy'dz'.$$

Формула (13) называется формулой Кирхгоффа.

При $n=2$ формула (13) примет вид:

$$u(M,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{|MM'|\le at}\frac{\varphi(M')dx'dy'}{\sqrt{a^2t^2-|MM'|^2}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{|MM'|\le at}\frac{\psi(M')dx'dy'}{\sqrt{a^2t^2-|MM'|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\iint_{|MM'|<a(t-\tau)}\frac{f(M',\tau)dx'dy'}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|MM'|^2}}d\tau.$$

Задачи

1. Доказать, что если функции f,u_0,u_1 – гармонические в R^n $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, а $g(t)\in C^1(t\ge 0)$, то решение задачи Коши

$$u_{tt}=a^2\Delta u+g(t)f(x_1,x_2,\dots,x_n);\quad u|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t|_{t=0}=u_1(x)$$

выражается формулой

$$u(x,t)=u_0(x)+tu_1(x)+f(x)\int_0^t(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

2. Найти решение задачи Коши

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x);\quad u|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t|_{t=0}=u_1(x),$$

если $\Delta^m f=0,\quad \Delta^m u_0=0,\quad \Delta^m u_1=0.$

3. Решить задачи $(n=2)$:

а) $u_{tt}=\Delta u+2, \quad u\big|_{t=0}=x, \quad u_t\big|_{t=0}=y;$

б) $u_{tt}=a^2\Delta u, \quad u\Big|_{t=0}=u_t\Big|_{t=0}=\left(x^2+y^2\right)^2;$

в) $u_{tt}=a^2\Delta u+e^t\left(x^2+y^2\right)^2, \quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0.$

4. Решить задачи $(n=3)$:

а) $u_{tt}=3\Delta u+6\left(x^2+y^2+z^2\right), \quad u\big|_{t=0}=x^2y^2z^2, \quad u_t\big|_{t=0}=x\,y\,z;$

б) $u_{tt}=a^2\Delta u+\left(x^2+y^2+z^2\right)e^t, \quad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0.$

Лекция 12. Колебания ограниченных объемов

Одним из наиболее эффективных методов решения многомерных краевых задач является метод Фурье (разделения переменных). В настоящей лекции мы применим этот метод для решения первой краевой задачи для уравнений колебаний:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\operatorname{div}\left(p\operatorname{grad}u\right)-q\,u, \quad M\in\Omega,\ t>0, \tag{1}$$

$$u(M,0)=\varphi(M), \quad \frac{\partial u(M,0)}{\partial t}=\psi(M), \qquad M\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u\big|_S=0 \quad \text{для } t\ge 0. \tag{3}$$

Здесь $\Omega-$ некоторый объем, ограниченный замкнутой поверхностью S, а функции $\rho(M)$, $p(M)$ и $q(M)$ определяются свойствами среды такими, что $\rho(M)>0$, $p(M)>0$, $q(M)\ge 0$.

Задачи типа (1) – (3) встречаются при изучении процесса колебаний мембраны (случай двух независимых пространственных переменных), акустических колебаний газа, электромагнитных процессов в непроводящих средах.

§1. Схема метода разделения переменных

В этом параграфе мы ограничимся изложением формальной схемы решения задачи (1) – (3). С этой целью рассмотрим основную вспомогательную задачу:

Найти нетривиальное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (3), представимое в виде произведения

$$u(M,t)=\upsilon(M)T(t). \tag{4}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в (1) и разделяя, как обычно, переменные, приходим к следующим уравнениям для функций $\upsilon(M)$ и $T(t)$:

$$div(p\ grad\,\upsilon)-q\,\upsilon+\lambda\rho\upsilon=0, \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_S=0;$$

$$T''+\lambda T=0. \tag{6}$$

Для $\upsilon(M)$ получаем задачу на собственные значения (задачу Штурмана–Лиувилля):

Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (5), а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями задачи (5).

В нашем случае уравнение для собственных функций представляет собой уравнение с частными производными, вследствие чего трудно рассчитывать на получение явного представления собственных функций для произвольной области Ω. Мы рассмотрим общие свойства собственных функций и собственных значений и проведем формальную схему метода разделения переменных. Перечислим эти свойства.

1. *Существует счетное множество собственных значений* $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots$, *которым соответствуют собственные функции* $\upsilon_1(M),\upsilon_2(M),\ldots,\upsilon_n(M),\ldots$.

Собственные значения λ_n *с возрастанием номера* n *неограниченно возрастают:* $\lambda_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

2. *При* $q \ge 0$ *все собственные значения* λ *положительны:*

$$\lambda_n > 0.$$

3. *Собственные функции* $\{\upsilon_n\}$ *ортогональны между собой с весом* $\rho(M)$ *в области* Ω*:*

$$\iiint_\Omega \rho(M)\upsilon_n(M)\upsilon_m(M)d\upsilon = 0 \text{ при } n \ne m. \qquad (7)$$

4. **Теорема разложимости.** *Произвольная функция* $F(M)$ *из класса* $C^2(\Omega)$ *и удовлетворяющая граничному условию*

$$F|_S = 0$$

разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{\upsilon_n(M)\}$*:*

$$F(M) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i\, \upsilon_i(M),$$

где F_i *– коэффициенты разложения определяются по формулам*

$$F_i = \frac{\iiint_\Omega F(M)\rho(M)\upsilon_i(M)d\upsilon}{\iiint_\Omega \rho(M)\upsilon_i^2(M)d\upsilon}, \qquad i = 1,2,\dots .$$

Доказательство свойств 1 и 4 основывается обычно на теории интегральных уравнений. Перейдем к доказательству свойств 2 и 3, не требующему специального математического аппарата. Докажем ортогональность собственных функций $\{\upsilon_n\}$ (свойство 3). Пусть $\upsilon_n(M)$ и $\upsilon_m(M)$ – две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_m:

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} \upsilon_n) - q\,\upsilon_n + \lambda_n\, \rho\, \upsilon_n = 0, \qquad \upsilon_n|_S = 0,$$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} \upsilon_m) - q\,\upsilon_m + \lambda_m\, \rho\upsilon_m = 0, \qquad \upsilon_m|_S = 0.$$

Умножая первое уравнение на $\upsilon_m(M)$ и вычитая из него второе уравнение, умноженное на $\upsilon_n(M)$, находим:

$$\iiint_\Omega \left[\upsilon_m \operatorname{div}(p \operatorname{grad}\upsilon_n) - \upsilon_n \operatorname{div}(p \operatorname{grad}\upsilon_m) + (\lambda_n - \lambda_m)\,\rho\,\upsilon_n\,\upsilon_m\right] d\upsilon = 0.$$

Отсюда с использованием формулы Остроградского нетрудно

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{A}\, d\upsilon = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\, ds$$

получить соотношение

$$\iint_S \left(\upsilon_m\, \rho \frac{\partial \upsilon_n}{\partial n} - \upsilon_n\, \rho \frac{\partial \upsilon_m}{\partial n}\right) ds + (\lambda_n - \lambda_m)\iiint_\Omega \rho\,\upsilon_n\,\upsilon_m\, d\upsilon = 0.$$

Теперь в силу граничных условий $\upsilon_n = 0$ и $\upsilon_m = 0$ на S,

$$(\lambda_n - \lambda_m)\iiint_\Omega \rho\,\upsilon_n\,\upsilon_m\, d\upsilon = 0,$$

откуда и следует, что при $\lambda_n \ne \lambda_m$

$$\iiint_\Omega \rho\,\upsilon_n\,\upsilon_m\, d\upsilon = 0,$$

т.е. собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны между собой с весом $\rho(M)$.

Если собственные функции, соответствующие некоторому λ_n, не ортогональны между собой, то мы можем ортогонализировать их и получить новую систему собственных функций, ортогональных между собой и соответствующих тому же λ_n.

Совокупность таких систем собственных функций для разных λ_n образует ортогональную систему собственных функций рассматриваемой краевой задачи (5).

Для доказательства положительности собственных значений (свойство 2) достаточно воспользоваться первой формулой Грина

$$\iiint_\Omega (p \operatorname{grad}\upsilon_n)^2 d\upsilon = -\iiint_\Omega \upsilon_n \operatorname{div}(p \operatorname{grad}\upsilon_n)\, d\upsilon + \iint_S \upsilon_n\, p\frac{\partial \upsilon_n}{\partial n}\, ds =$$

$$= -\iiint_\Omega q\,\upsilon_n^2\, d\upsilon + \lambda_n \iiint_\Omega \rho\,\upsilon_n^2\, d\upsilon.$$

Отсюда видно, что при $q \ge 0$ собственные значения λ_n положительны.

Вернемся теперь к уравнению в частных производных. Решение уравнения (6) при $\lambda=\lambda_n$ имеет вид

$$T_n(t)=A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t,$$

так что решение нашей основной вспомогательной задачи будет произведение

$$u_n(M,t)=T_n(t)\upsilon_n(M)=\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right)\upsilon_n(M).$$

Решение исходной задачи (1) – (3) естественно искать в виде суммы

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right)\upsilon_n(M).$$

Удовлетворяя начальным условиям (2)

$$\varphi(M)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\upsilon_n(M),\qquad \psi(M)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}\,\upsilon_n(M)$$

и пользуясь теоремой разложимости 4, находим:

$$A_n=\varphi_n,\qquad B_n\sqrt{\lambda_n}=\psi_n,$$

где φ_n и ψ_n – коэффициенты Фурье функций $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ в их разложении по ортогональной с весом $\rho(M)$ системе функций $\upsilon_n(M)$. Тем самым формальное построение решения исходной задачи закончено.

§2. Колебания прямоугольной мембраны

Пусть в плоскости (x,y) расположена прямоугольная мембрана со сторонами b_1 и b_2, закрепленная по краям и возбуждаемая с помощью начального отклонения и начальной скорости. Для нахождения функции $u(x,y,t)$, характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия, мы должны решить уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\tag{8}$$

при начальных данных

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y)\tag{9}$$

и граничных условиях

$$u(0,y,t)=0,\qquad u(b_1,y,t)=0,\tag{10}$$

$$u(x,0,t)=0,\qquad u(x,b_2,t)=0.\tag{11}$$

Мы ищем решение методом разделения переменных, полагая

$$u(x,y,t)=\upsilon(x,y)T(t).\tag{12}$$

Подставляя (12) в (8) и разделяя переменные, получаем для функции $T(t)$ уравнение

$$T''(t)+a^2\lambda T=0,\tag{13}$$

а для функции $\upsilon(x,y)$ – следующую краевую задачу:

$$\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}+\lambda\upsilon=0;\tag{14}$$

$$\upsilon(0,y)=0,\qquad \upsilon(b_1,y)=0,\qquad \upsilon(x,0)=0,\qquad \upsilon(x,b_2)=0.$$

Теперь и задачу (14) будем решать методом разделения переменных, полагая

$$\upsilon(x,y)=X(x)Y(y).$$

Проведя разделение переменных, получаем следующие одномерные задачи на собственные значения:

$$X''+\chi X=0,\qquad X(0)=0,\quad X(b_1)=0;\tag{15}$$

$$Y''+\mu Y=0,\qquad Y(0)=0,\quad Y(b_2)=0,\tag{16}$$

где χ и μ – постоянные разделения переменных, связанных соотношением

$$\chi+\mu=\lambda.\tag{17}$$

Решения уравнений (15) и (16) имеют вид

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{b_1}x,\quad \chi_1=\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2\quad\text{и}\quad Y_m(y)=\sin\frac{m\pi}{b_2}y,\quad \mu_m=\left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2$$

соответственно. Таким образом, согласно (17) собственным значениям $\lambda_{n,m}=\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2$ задачи (14) соответствуют собственные функции

$$\upsilon_{n,m}=A_{n,m}\sin\frac{n\pi}{b_1}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b_2}y,$$

где $A_{n,m}$ – некоторый постоянный множитель. Выберем его так, чтобы норма функций $\upsilon_{n,m}$ с весом 1 была равна единице

$$\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\upsilon_{n,m}^2\,dx\,dy = A_{n,m}^2\int_0^{b_1}\sin^2\frac{n\pi}{b_1}x\,dx\cdot\int_0^{b_2}\sin^2\frac{m\pi}{b_2}y\,dy = 1.$$

Отсюда

$$A_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{b_1 b_2}}.$$

Ортогональность функций $\{\upsilon_{n,m}\}$ очевидна. Следовательно, функции

$$\upsilon_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{b_1 b_2}}\sin\frac{n\pi}{b_1}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b_2}y \qquad (18)$$

образуют ортонормированную систему собственных функций прямоугольной мембраны (14). Далее из (13) получаем, что

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at + B_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at,$$

и таким образом получаем семейство частных решений задачи (8), (10), (11):

$$u_{n,m} = \upsilon_{n,m}(x,y)\cdot T_{n,m}(t).$$

Теперь искомое решение уравнения (8) при дополнительных условиях (9) – (11) имеет вид

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at + B_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at\right)\upsilon_{n,m}(x,y), \qquad (19)$$

где $\upsilon_{n,m}$ определяются формулой (18), а коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ равны

$$A_{n,m} = \int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x,y)\upsilon_{n,m}(x,y)\,dx\,dy = \frac{2}{\sqrt{b_1 b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x,y)\sin\frac{n\pi x}{b_1}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b_2}\,dx\,dy,$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{a^2\lambda_{n,m}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{b_1 b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\psi(x,y)\sin\frac{n\pi x}{b_1}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b_2}\,dx\,dy.$$

Сходимость ряда (19) и возможность его почленного дифференцирования можно обосновать, используя теорию кратных рядов Фурье.

Задачи

1. Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны $(0<x<p,\ \ 0<y<p)$, закрепленной вдоль контура, если

$$u\Big|_{t=0} = A\sin\frac{\pi x}{p}\,\sin\frac{\pi y}{p}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

2. Решить следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad 0<x<\pi, \quad 0<x\le\pi,$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = 3\sin x\sin 2y, \qquad u_t\big|_{t=0} = 5\sin 3x\sin 4y.$$

3. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0<x<p,\ \ 0<y<q)$, закрепленной вдоль контура, если

$$u\big|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Ш. Уравнение теплопроводности

Лекция 13. Одномерное уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач. Принцип максимума. Теоремы единственности

Процесс распространения температуры в стержне, теплоизолированном с боков и достаточно тонком, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой, может быть описан функцией $u(x,t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t. Эта функция $u(x,t)$ – решение уравнения

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t), \tag{1}$$

называемое уравнением теплопроводности. Здесь $\rho(x), c(x)$ и $k(x)$ – соответственно плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности стержня в точке x, а $F(x,t)$ – интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t.

§ 1. Постановка краевых задач

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции $u(x,t)$ в начальный момент t_0.

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x=0$ задана температура

$$u(0,t)=\mu(t),$$

где $\mu(t)$ – функция, заданная в некотором промежутке $t_0\le t\le T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x=l$ задано значение производной

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=V(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l,t)$, протекающего через торцевое сечение стержня

$$Q(l,t)=-k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}$$

($Q(l,t)$ – плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшего в единицу времени через площадь в 1 см^2), откуда $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=V(t)$, где $V(t)$ – известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l,t)$ по формуле

$$V(t)=-\frac{Q(l,t)}{k}.$$

3. На конце $x=l$ задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u(l,x)}{\partial x}=-\lambda[u(l,t)-\theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x=l$,

$$Q=h(u-\theta)$$

и

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x},$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -\lambda\left[u(l,t) - \theta(t)\right],$$

где $\lambda = \dfrac{h}{k}$ – коэффициент теплообмена, $\theta(t)$ – некоторая заданная функция. Для конца $x = 0$ стержня $(0,l)$ третье граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \lambda\left[u(0,t) - \theta(t)\right].$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ могут быть разных типов, так что число различных задач велико.

Первая краевая задача состоит в отыскании решения $u = u(x,t)$ уравнения теплопроводности при $0<x<l,\ 0<t\le T$, удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$
$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u \quad (l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – заданные функции.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи с различными комбинациями краевых условий при $x = 0$ и $x = l$. Возможны краевые условия более сложного типа, чем те, которые были рассмотрены выше.

Кроме названных здесь, задач часто встречаются их предельные случаи. Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь начальным распределением температуры. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится задача с

начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой:

Найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$ и $t \ge t_0$, удовлетворяющее условию

$$u(x,t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен, и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \le x \le \infty$. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня:

Найти решение уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ и $t_0 \le t$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty,$$
$$u(0,t) = \mu(t), \quad t \ge t_0,$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ – заданные функции.

§ 2. Принцип максимума

В этом параграфе мы рассмотрим однородный стержень, т.е. k, c, ρ – постоянные. Кроме того, будем считать, что тепловые источники отсутствуют $(F(x,t) = 0)$. Тогда уравнение теплопроводности (1) принимает простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Здесь $a^2 = k / c\rho$. Докажем следующее свойство решений этого уравнения, которое мы будем называть принципом максимального значения.

Теорема 1. *Если функция* $u(x,t)$, *определенная и непрерывная в замкнутой области* $0 \le t \le T$ *и* $0 \le x \le l$, *удовлетворяет уравнению теплопроводности* (2) *в точках области* $0 < x < l$, $0 < t \le T$, *то максимальное и минимальное значение функции* $u(x,t)$ *достигаются или в начальный момент, или в точках границы* $x = 0$ *или* $x = l$.

Доказательство. Так как теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме переменной знака y $u(x,t)$, то мы ограничимся доказательством теоремы о максимуме.

Доказательство теоремы ведется от противного. Обозначим через M максимальное значение $u(x,t)$ при $t = 0 (0 \le x \le l)$, или при $x = 0$, или при $x = l$ $(0 \le t \le T)$ и допустим, что в некоторой точке (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \le T)$ функция $u(x,t)$ достигает своего максимального значения

$$u(x_0, y_0) = M + \varepsilon.$$

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (2) в точке (x_0, t_0) функция достигает своего максимального значения, то необходимо должно быть

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x^2} \le 0. \tag{3}$$

Далее, так как $u(x_0, t)$ достигает максимального значения при $t = t_0$, то

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} \ge 0. \tag{4}$$

Так как, если $t_0 < T$, то $\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} = 0$, если же $t_0 = T$, то $\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} \ge 0$.

Далее рассмотрим вспомогательную функцию

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t), \tag{5}$$

где k – некоторое постоянное число. Очевидно, что

$$\upsilon(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \varepsilon$$

и

$$k(t_0 - t) \le kT.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kT был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $k < \frac{\varepsilon}{2T}$, тогда максимальное значение $\upsilon(x,t)$ при $t = 0$ или при $x = 0, x = l$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\upsilon(x,t) \le M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{при } t = 0 \text{ или } x = 0, \text{ или } x = l), \tag{6}$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (5) не превосходит M, а второе – $\frac{\varepsilon}{2}$.

В силу непрерывности функции $\upsilon(x,t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$\upsilon(x_1,t_1) \ge \upsilon(x_0,t_0) = M + \varepsilon.$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$ или $x = 0, l$ имеет место неравенство (6). В точке (x_1, t_1) по аналогии с (3) и (4), должно быть $\frac{\partial^2 \upsilon(x_1,t_1)}{\partial x^2} \le 0$, $\frac{\partial \upsilon(x_1,t_1)}{\partial t} \ge 0$. Учитывая (5), находим:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \upsilon(x_1,t_1)}{\partial x^2} \le 0,$$

$$\frac{\partial u(x_1,t_1)}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon(x_1,t_1)}{\partial t} + k \ge k > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u(x_1,t_1)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x^2} \ge k > 0,$$

т.е. уравнение (2) во внутренней точке (x_1, t_1) не удовлетворяется. Тем самым доказано, что решение $u(x,t)$ уравнения (2) внутри области не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение $u(x,t)$ на границе (т.е. при $t=0, x=0, x=l$).

§ 3. Теоремы единственности

Обратимся теперь к установлению ряда следствий из принципа максимального значения. Прежде всего докажем теорему единственности для первой краевой задачи.

Теорема 2. *Если две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, определенные и непрерывные в области $0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 + f(x,t)} \text{ (для } 0 < x < l, \quad t > 0\text{)}, \tag{7}$$

одинаковым начальным и граничным условиям

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x),$$
$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t),$$
$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_2(t),$$

то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\upsilon(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Функция $\upsilon(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности (2).

Таким образом, в силу теоремы 1 она достигает своего максимального и минимального значений или при $t=0$, или при $x=0$, или при $x=l$. Однако по условию мы имеем:

$$\upsilon(x,0) = 0, \quad \upsilon(0,t) = 0, \quad \upsilon(l,t) = 0.$$

Поэтому

$$\upsilon(x,t) \equiv 0,$$

т.е.

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t).$$

Отсюда следует, что решение первой краевой задачи единственно.

Нетрудно доказать справедливость следующих следствий из принципа максимального значения.

Следствие 1. *Если два решения уравнения (7) $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют условиям*

$$u_1(x,0) \le u_2(x,0), \quad u_1(0,t) \le u_2(0,t), \quad u_1(l,t) \le u_2(l,t),$$

то $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ для всех значений $0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T$.

Следствие 2. *Если для двух решений уравнения теплопроводности* (7) *$u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ имеет место неравенство $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$ для $t=0, \quad x=0, \quad x=l$, то $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$ для всех $x, t, 0 \le x \le l, 0 \le t \le T$.*

Следствие 2 позволяет установить непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от начального и граничных значений.

Теорема 3. *Если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – непрерывные, ограниченные во всей области изменения переменных (x,t) функции, удовлетворяют уравнению* (7) *при $-\infty < x < \infty, \quad t > 0$ и условию $u_1(x,0) = u_2(x,0) \quad (-\infty < x < \infty)$, то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t) \quad (-\infty < x < \infty, \quad t \ge 0)$.*

Из теоремы 3 вытекает единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.

Доказательство этой теоремы также основано на принципе максимума.

Лекция 14. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Однородная краевая задача. Функция мгновенного источника. Неоднородное уравнение теплопроводности. Общая первая краевая задача

§1. Однородная краевая задача

Изучение общей первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad 0<x<l, \quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \qquad t\ge 0, \tag{3}$$

мы начнем с решения следующей простейшей задачи.

Найти непрерывное в замкнутой области $(0\le x\le l,\ 0\le t\le T)$ решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0<x<l, \quad 0<t\le T, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l \tag{5}$$

и однородным граничным условиям

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \qquad 0\le t\le T. \tag{6}$$

Предположим, что решение $u(x,t)$ задачи (4) – (6) можно представить как сумму ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{7}$$

который можно почленно дифференцировать дважды по x и один раз по t. Тогда граничные условия (6) выполнены, а подстановка ряда (7) в (4), (5) приводит к соотношениям

$$\frac{d u_n(t)}{dt}+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t)=0,$$

$$u_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi, \quad n=1,2,\ldots$$

из которых определяются коэффициенты $u_n(t)$:

$$u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi\cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}. \tag{8}$$

Выясним теперь, каким требованиям должна удовлетворять функция $\varphi(x)$, чтобы ряд (7) с коэффициентами (8) являлся решением исходной задачи (4) – (6).

Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)|\le M$ и рассмотрим ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d u_n(t)}{dt}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Имеем

$$\left|\frac{d u_n(t)}{dt}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right|=\left|u_n(0)\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right|\le$$

$$\le\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2|u_n(0)|\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t},$$

и так как

$$|u_n(0)|\le 2M,$$

то получаем оценку

$$\left|\frac{d u_n(t)}{dt}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right|\le 2M\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\bar t} \qquad \text{для } t\ge\bar t$$

и аналогично

$$\left| u_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l} \right| \le 2M\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \bar t} \qquad \text{для } t \ge \bar t .$$

Вообще

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} u_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l} \right| \le 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k}\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \bar t} \quad \text{для } t \ge \bar t .$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где

$$\alpha_n = N n^a e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \bar t}.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (2n+1)\bar t} = 0 .$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (7) любое число раз в области $t \ge \bar t > 0$. Таким образом, функция, определяемая этим рядом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности $\bar t$ это имеет место для всех $t > 0$.

Пусть теперь функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0$. Тогда ряд из модулей коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$ сходится, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} | u_n(0) | < +\infty ,$$

и поэтому в силу неравенства

$$\left| u_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \right| < | u_n(0) | \qquad (\text{при } t \ge 0, \quad 0 \le x \le l)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (7) при $t \ge 0, \quad 0 \le x \le l$. Следовательно, ряд (7) определяет непрерывную функцию при $t \ge 0$.

Итак, задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью.

§2. Функция мгновенного источника

Преобразуем полученное решение (7), заменяя $u_n(t)$ их значениями (8):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi\right] e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{n\pi}{l} x\, dx =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l}\xi\right]\varphi(\xi)\, d\xi .$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования всегда законно при $t > 0$ в силу того, что ряд в скобках сходится равномерно по ξ при $t > 0$.

Обозначим

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \sin\frac{n\pi\xi}{l} .$$

Пользуясь функцией $G(x,\xi,t)$, можно представить функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi . \tag{9}$$

Функция $G(x,\xi,t)$ называется функцией мгновенного точечного источника.

Покажем, что функция источника $G(x,\xi,t)$, рассматриваемая как функция x, представляет распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ в момент времени t, если температура в начальный момент $t = 0$ равна нулю и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется количество тепла $Q = c\rho$, а на краях стержня все время поддерживается нулевая температура.

Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$, равная нулю вне интервала $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, а внутри этого интервала положительная и непрерывно-дифференцируемая, задает начальное распределение температуры в стержне. Тогда количество тепла, вызвавшее изменение температуры на величину $\varphi_\varepsilon(x)$, вычисляется по формуле

$$Q = c\rho\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\,\xi, \tag{10}$$

а сам процесс распространения температуры в этом случае определяется формулой (9):

$$u_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^l G(x,\xi,t)\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\,\xi. \tag{11}$$

Совершим теперь предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Принимая во внимание непрерывность G при $t>0$ и равенство (10) и применяя теорему о среднем значении при фиксированных значениях x, t, формулу (11) представим так

$$u_\varepsilon(x,t) = \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}G(x,\xi,t)\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\,\xi = G\left(x,\xi^*,t\right)\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\,\xi = G\left(x,\xi^*,t\right)\frac{Q}{c\rho},$$

где $\xi^* \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$. Теперь в силу непрерывности функции $G(x,\xi,t)$ по ξ при $t>0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = \frac{Q}{c\,\rho}G\left(x,\xi^*,t\right) = \frac{Q}{c\,\rho}\cdot\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}\cdot\sin\frac{n\,\pi\,\xi}{l}.$$

Отсюда следует, что $G(x,\xi,t)$ представляет температуру в точке x в момент t, вызванную действием мгновенного точечного источника мощности $Q = c\rho$, помещенного в момент $t=0$ в точке ξ промежутка $(0,l)$.

§3. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{12}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0 \tag{13}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{14}$$

Будем искать решение этой задачи $u(x,t)$ в виде ряда Фурье по функциям $\left\{\sin\frac{n\,\pi}{l}x\right\}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\,\pi}{l}x, \tag{15}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения $u(x,t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\,\pi}{l}x, \tag{16}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\,\pi}{l}\xi\,d\,\xi.$$

Подставляя функции (15), (16) в исходное уравнение (12), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\,\pi\,a}{l}\right)^2 u_n(t) + \frac{d\,u_n(t)}{d\,t} - f_n(t)\right]\sin\frac{n\,\pi}{l}x = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$\frac{d\,u_n(t)}{d\,t} = -\left(\frac{a\,n\,\pi}{l}\right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{17}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x,t)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{n\,\pi}{l}x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \tag{18}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (17) с нулевым начальным условием (18), находим:

$$u_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\,\tau. \tag{19}$$

Подставляя выражения (19) для $u_n(t)$ в формулу (15), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (20)$$

И, наконец, воспользовавшись выражением (16) для $f_n(t)$, найденное решение (20) можно представить с помощью функции точечного источника $G(x,\xi,t)$ следующим образом

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

§4. Общая первая краевая задача

Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности (1) – (3). Введем новую неизвестную функцию $\upsilon(x,t)$

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-U(x,t),$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(x,t)$.

Эта функция $\upsilon(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\bar f(x,t), \qquad \bar f(x,t)=f(x,t)-\left[\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right]$$

с дополнительными условиями

$$\upsilon(x,0)=\bar\varphi(x), \qquad \bar\varphi(x)=\varphi(x)-U(x,0),$$

$$\upsilon(0,t)=\bar\mu_1(t), \qquad \bar\mu_1(t)=\mu_1(t)-U(0,t),$$

$$\upsilon(l,t)=\bar\mu_2(t), \qquad \bar\mu_2(t)=\mu_2(t)-U(l,t).$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x,t)$ таким образом, чтобы

$$\bar\mu_1(t)=0 \qquad \text{и} \qquad \bar\mu_2(t)=0,$$

для чего достаточно положить

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

Таким образом, нахождение функции $u(x,t)$, дающей решение общей краевой задачи, сведено к нахождению функции $\upsilon(x,t)$, дающей решение краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Последнею функцию $\upsilon(x,t)$ можно представить как сумму решений задачи (4) – (6) и задачи (12) – (14).

Задачи

1. Дан тонкий однородный стержень $0<x<l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

а) концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u\big|_{t=0}=\begin{cases} u_0=\text{const}, & \text{если } 0<x<\dfrac{l}{2},\\ 0, & \text{если } \dfrac{l}{2}<x<l.\end{cases}$$

Изучить поведение $u(x,t)$ при $t\to\infty$;

б) концы стержня теплоизолированы, а

$$u\big|_{t=0}=\begin{cases} \dfrac{2u_0}{l}x, & \text{если } 0<x<\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2u_0}{l}(l-x), & \text{если } \dfrac{l}{2}\le x<l,\end{cases}$$

где $u_0=\text{const}$. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$;

в) концы стержня имеют постоянную температуру $u\big|_{x=0}=u_1$, $u\big|_{x=l}=u_1$, а начальная температура задается формулой $u\big|_{t=0}=Ax(l-x)$, где $A=\text{const}$. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$.

2. Решить следующие смешанные задачи:

а) $u_t=u_{xx}$, $\quad 0<x<l,\quad u_x\big|_{x=0}=1,\quad u\big|_{x=l}=0,\quad u\big|_{t=0}=0$;

б) $u_t=u_{xx}-2u_x+x+2t,\quad 0<x<l,\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=t,$

$u\big|_{t=0}=e^x\sin\pi x$;

в) $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + sin\, 2x, \qquad 0 < x < l,$

$u_x\big|_{t=0} = 1, \quad u_x\big|_{x=0} = 2\pi t + 1, \quad u\big|_{t=0} = x.$

Лекция 15. Задачи на бесконечной прямой (Задача Коши. Краевые задачи для полуограниченной прямой)

§ 1. Задача Коши

Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными (задачу Коши): найти функцию $u(x,t)$ $(t > 0, -\infty < x < \infty)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

к начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \, (-\infty < x < +\infty), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная функция.

Используя принцип максимума (см. лекцию 13), можно доказать, что решение задачи (1), (2) в классе ограниченных функций единственно.

Докажем существование решения этой задачи. Найдем сначала частные решения уравнения (1) вида

$$u(x,t) = T(t)\,\mathrm{X}(x). \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 – постоянная. Мы получаем, таким образом,

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad \mathrm{X}''(x) + \lambda^2 \mathrm{X}(x) = 0,$$

откуда, полагая постоянный множитель в выражении $T(t)$ равным единице, $T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$, а $\mathrm{X}(x)$ выберем таким: $\mathrm{X}(x) = A(\lambda)e^{i\lambda x}$, имеем частное решение уравнения (1) вида

$$u_\lambda(x,t) = A(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}. \tag{4}$$

Здесь λ – любое вещественное число $-\infty < \lambda < +\infty$. Интегрируя (4) по параметру λ, получим также решение уравнения (1)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda. \tag{5}$$

Требуя выполнения начального условия при $t = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi.$$

Подставляя эту функцию в (5) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi\right] e^{-a^2\lambda 5t + i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda\right]\varphi(\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{6}$$

Внутренний интеграл в (6) равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), приходим к интегральному представлению искомого решения

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{9}$$

Функцию (9) называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Можно убедиться в том, что фундаментальное решение (9) дает распределение температуры в бесконечном стержне, если в начальный момент времени $t=0$ в точке ξ мгновенно выделяется количество тепла $Q=c\rho$.

Теперь выясним условия применимости формулы (8).

Докажем, что формула

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

называемая интегралом Пуассона, для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ представляет при $t>0$ ограниченное решение уравнения теплопроводности, непрерывно примыкающее при $t=0$ к $\varphi(x)$.

Покажем, во-первых , что если функция ограничена,

$|\varphi(x)|<M$, то интеграл (10) сходится и представляет ограниченную функцию. В самом деле

$$|u(x,t)|<\frac{M}{2\sqrt{\pi a^2\, t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\left|\alpha=\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}\right|=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=M,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\sqrt{\pi}.$$

Покажем далее, что интеграл (10) удовлетворяет уравнению теплопроводности при $t>0$. Для этого достаточно доказать, что производные этого интеграла при $t>0$ можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

В случае конечных пределов интегрирования это законно, так как все производные функции (9) при $t>0$ непрерывны. Для возможности дифференцирования под знаком интеграла при бесконечных пределах достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла, полученного после дифференцирования под знаком интеграла. После дифференцирования под знаком интеграла выделяется множитель $\xi-x$ в положительной степени, который остается под знаком интеграла, и множитель t в некоторой степени, который можно вынести из под знака интеграла. Таким образом, дифференцируя (10) несколько раз по x и t, мы получим сумму интегралов вида

$$I=\frac{1}{t^k}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi)^m e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{11}$$

Производя замену переменных

$$-\alpha=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}},\quad t>0,$$

преобразуем интеграл (11) к виду

$$I=(2a)^{m+1}t^{\frac{m+1}{2}-k}(-1)^m\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^m e^{-\alpha^2}\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)d\alpha.$$

Отсюда легко видеть, что этот интеграл равномерно сходится при $t\ge t_0>0$, так как подынтегральная функция мажорируется функцией

$$M|\alpha|^m e^{-\alpha^2},$$

которая интегрируема в промежутке $(-\infty,\infty)$.

Таким образом, функция $u(x,t)$, определяемая формулой (10), непрерывна и имеет производные любого порядка по x и t при $t>0$. Так как подынтегральная функция удовлетворяет уравнению (1) при $t>0$, то отсюда следует, что и функция $u(x,t)$ удовлетворяет этому уравнению при $t>0$.

Докажем теперь, что функция (10) удовлетворяет начальному условию (2), т.е. что

$$\lim_{t\to 0}u(x,t)=\varphi(x)$$

при любом x из $(-\infty,\infty)$. Запишем интеграл (10) так

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)d\alpha. \qquad (12)$$

Далее так как

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\varphi(x)\,d\alpha,$$

то, вычитая это равенство из (12), получим

$$u(x,t)-\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)-\varphi(x)\right]e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

откуда

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)-\varphi(x)\right|e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \qquad (13)$$

Пусть $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число. Выберем число N столь большим, что

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}}=\int_{-\infty}^{-N}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\le\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \frac{2M}{\sqrt{\pi}}=\int_{N}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\le\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (14)$$

Разбивая промежуток интегрирования на три:

$$(-\infty,N),\quad(-N,N),\quad(N,\infty)$$

и принимая во внимание неравенство

$$\left|\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)-\varphi(x)\right|\le 2M$$

и оценки (14), будем иметь

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}\left|\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)-\varphi(x)\right|e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ при всех t, достаточно близких к нулю, и при $|\alpha|\le N$ имеем

$$\left|\varphi\left(x+2a\alpha\sqrt{t}\right)-\varphi(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{3},$$

и последнее неравенство дает

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

и тем более

$$\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|\le\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

т.е., в силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=1,$$

мы имеем $\left|u(x,t)-\varphi(x)\right|<\varepsilon$ при всех t, достаточно близких к нулю, и при всех x, откуда ввиду произвольности $\varepsilon>0$ и следует

$$\lim_{t\to 0}u(x,t)=\varphi(x).$$

Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), а $\bar{u}(x,t)$ – решение этого же уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{u}(x,0)=\bar{\varphi}(x).$$

Тогда нетрудно показать, что если $\left|\bar{\varphi}(x)-\varphi(x)\right|<\varepsilon$, то $\left|u(x,t)-\bar{u}(x,t)\right|<\varepsilon$ при любых x и $t>0$. Последнее означает, что решение задачи Коши непрерывным образом зависит от начальной функции.

Решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad(-\infty<x<\infty,t>0) \qquad (15)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0)=0, \qquad (16)$$

очевидно, должно представляться формулой

$$u(x,t)=\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

как то следует из физического смысла функции $G(x,\xi,t)$.

Ясно, что решение задачи Коши (15), (2) есть сумма решения задачи (1), (2) и задачи (15), (16).

§ 2. Краевые задачи для полуограниченной прямой

В тех случаях, когда интересуются распределением температуры вблизи одного из концов стержня, а влияние другого конца несущественно, принимают, что этот конец находится в бесконечности. Это приводит к задаче об определении решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{17}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x > 0 \tag{18}$$

и граничному условию, которое, в зависимости от заданного характера граничного режима, берется в одном из следующих видов:

$u(0,t) = \mu(t)$ (первая краевая задача),

$\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = V(t)$ (вторая краевая задача),

$\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \lambda[u(0,t) - \theta(t)]$ (третья краевая задача).

Здесь мы ограничимся построением решения только первой краевой задачи в случае $\mu(t) \equiv 0$, т.е.

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0. \tag{19}$$

Положим

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

и функцию $\upsilon(x,t)$ определим по формуле

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi)\, d\xi.$$

Легко проверить, что $\upsilon(0,t) = 0$. Таким образом, согласно § 1 функция $u(x,t) = \upsilon(x,t)$ при $x > 0$ дает решение краевой задачи (17)–(19). Пользуясь определением функции $\phi(x)$, будем иметь:

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi)\, d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi)\, d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left[-\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right].$$

Соединяя оба интеграла вместе, получим искомую функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{0}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Задачи

1. Решить задачи:

   а) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad u|_{t=0} = 2;$

   б) $u_t = u_{xx} + 3t^2, \quad u|_{t=0} = \sin x;$

   в) $u_t = u_{xx} + \sin t, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2};$

   г) $u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = xe^{-x^2}.$

2. Показать, что уравнение

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t),$$

где a, b, c – постоянные, заменой

$$\upsilon(y,t) = e^{-ct} u(y - bt, t)$$

сводится к уравнению теплопроводности.

3. Найти решение задачи

$$u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t), \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$

со следующими данными:

а) $f=1,\quad u_0=1,\quad c=1;$

б) $f=e^t,\quad u_0=\cos x,\quad a=c=1,\quad b=0;$

в) $f=e^t,\quad u_0=\cos x,\quad a=c=2,\quad b=0;$

г) $f=t\sin x,\quad u_0=1,\quad a=c=1,\quad b=0.$

Лекция 16. Уравнение распространения тепла в пространстве. Фундаментальное решение. Решение задачи Коши

В лекции 1 было показано, что процесс распространения тепла в однородном изотропном пространстве определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \tag{1}$$

где $u(x,y,z,t)$ – температура точки $M(x,y,z)$ в момент t, $a^2=\dfrac{K}{c\rho}$, ρ – плотность, c – коэффициент удельной теплопроводности, а $c\rho f$ – плотность тепловых источников.

Рассмотрим в неограниченном пространстве следующую задачу.

Найти решение уравнения теплопроводности (1) при начальном условии

$$u=(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z). \tag{2}$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде суммы

$$u=u_1+u_2,$$

где u_1 – решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

с неоднородными начальными условиями (2) u_2 – решение неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными условиями. При изучении соответствующих одномерных задач мы видели (см. лекцию 15), что их решения определялись с помощью фундаментального решения.

§1. Фундаментальное решение

Введем в рассмотрение функцию

$$G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}. \tag{4}$$

Докажем несколько утверждений относительно этой функции.

Лемма 1. *Функция* G *– удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности* (3).

Доказательство. В самом деле, дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3\frac{(-1)}{2a^2t}+\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3\frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$$

и аналогичные выражения для производных по y и z, откуда

$$\Delta G=\left[-3+\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{2a^2t}\right]\frac{1}{2a^2t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$$

здесь $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ и далее

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\left[-3+\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{2a^2t}\right]\frac{1}{2t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a^2\Delta G.$$

Лемма 2. *При* $t>0$ *имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=1. \qquad (5)$$

Доказательство. В самом деле интеграл (5) можно представить в виде произведения трех интегралов, каждый из которых равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\eta\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\zeta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=1\left(\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Функция (4) представляет собой температуру в точке $M(x,y,z)$ в момент времени t, вызываемую точечным источником мощности $Q=c\rho$, помещенным в момент $t=0$ в точку $M'(\xi,\eta,\zeta)$. Функцию G называют функцией температурного влияния мгновенного источника тепла или фундаментальными решением уравнения теплопроводности.

§2. Задачи Коши

Используем теперь фундаментальное решение (4) для решения задачи о распространении начальной температуры в неограниченном пространстве.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\quad -\infty<x,y,z<+\infty, t>0, \qquad (6)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,y,z,o)=\varphi(x,y,z). \qquad (7)$$

Начальное температурное состояние, очевидно, можно представить как результат суперпозиции действия мгновенных источников, создающих на-

чальную температуру. Рассмотрим элемент объема $d\xi\,d\eta\,d\zeta$, содержащий точку $M'(\xi,\eta,\zeta)$. Для создания начальной температуры $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ необходимо в объеме $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ поместить количество тепла $dQ=c\rho\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta$.

Это сосредоточенное количество тепла создает в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$ в момент t температуру.

$$\frac{dQ}{c\rho}G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)=G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (8)$$

В силу принципа суперпозиции решение нашей задачи может быть получено интегрированием (8) по всему пространству

$$u(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (9)$$

Формула (10) получена нами в результате наводящих рассуждений, не определяющих границы ее применимости и не имеющих доказательной силы.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Если функция* φ *непрерывна и ограничена,* $|\varphi|<M$*, то функция* u *определяема выражением* (9),

1) *ограничена во всем :* $|u|<M$;
2) *является решением уравнения теплопроводности при* $t>0$;
3) *при* $t=0$ *функция* u *непрерывно примыкает к* φ *т.е.* $\lim\limits_{t\to 0}u(x,y,z,t)=\varphi(x,y,z)$.

Доказательство. Ограниченность функции u, определяемой формулой (9), устанавливается непосредственно, если принять во внимание равенство (5):

$$|u|<A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=A.$$

Далее, как известно, дифференцирование по параметру под знаком несобственного интеграла возможно, если:

1) производная по параметру от подынтегральной функции непрерывна;
2) интеграл, полученный после формального дифференцирования, равномерно сходится.

Производя формальное дифференцирование интеграла (9) по x получим:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{(x-\xi)}{2a^2 t}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Подынтегральная функция непрерывна при $0<t<T$, а наличие множителя $exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\}$ обеспечивает равномерную сходимость, если φ ограничено: $|\varphi|<A$. Аналогичные результаты мы получим при повторном дифференцировании по x и при дифференцировании по t; то же относится и к дифференцированию по y и z. Теперь в силу леммы 1 функция u при $t>0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Перейдем к доказательству непрерывности $u(x,y,z,t)$ при $t=0$. Для этого формулу (9) перепишем в виде

$$u(M,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(M,M',t)\varphi(M')dv,\ M=M(x,y,z),\ M'=M'(\xi,\eta,\zeta).$$

Рассмотрим точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и докажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$|u(M,t)-\varphi(M_0)|<\varepsilon \text{ при } |MM_0|<\delta(\varepsilon) \text{ и } t<\delta(\varepsilon). \tag{10}$$

Далее пусть V_1 – область, содержащая точку M_0; ее размеры будут определены ниже; остальную часть пространства обозначим через V_2. Принимая во внимание равенства

$$u(M,t)=\iiint\limits_{V_1}G(M,M',t)\varphi(M')dv+\iiint\limits_{V_2}G(M,M',t)\varphi(M')dv,$$

$$\varphi(M_0)=\iiint\limits_{V_1}G(M,M',t)\varphi(M_0)dv+\iiint\limits_{V_2}G(M,M',t)\varphi(M_0)dv,$$

а также положительность функции $G(M,M',t)$, будем иметь:

$$|u(M,t)-\varphi(M_0)|\le J_1+J_2, \tag{11}$$

где

$$J_1=\iiint\limits_{V_1}G(M,M',t)|\varphi(M')-\varphi(M_0)|dv,\ J_2=2A\iiint\limits_{V_2}G(M,M',t)dv.$$

Теперь в качестве области V_1 выберем шар в точке $M(x,y,z)$ радиуса ρ. Зададим $\varepsilon>0$. Тогда в силу непрерывности функции φ в фиксированной точке M_0, найдется $\delta'>0$, что

$$|\varphi(M')-\varphi(M_0)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad \text{если } |M'M_0|<\delta'.$$

Таким образом, если диаметр шара V_1 не превосходит δ', т.е. $\rho\le\frac{1}{2}\delta'$, то

$$J_1<\frac{\varepsilon}{3}\iiint\limits_{V_1}G\,dv<\frac{\varepsilon}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\,dv=\frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Переходя к сферической системе координат с центром в точке M, получаем

$$\iiint\limits_{V_1}G\,d\upsilon=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3\int\limits_0^{\rho}e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}r^2dr=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\rho}{2\sqrt{a^2 t}}}\alpha^2 e^{-\alpha^2}d\alpha \xrightarrow[t\to 0]{}$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}x^2 e^{-\alpha^2}d\alpha=1 \qquad \left(\alpha=\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty}x^2 e^{-\alpha^2}d\alpha=-\frac{1}{2}a\,e^{-a^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_{V_2}G\,d\upsilon=1-\iiint\limits_{V_1}G\,d\upsilon\to 0 \text{ при } t\to 0,$$

т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ'', что

$$\iiint_{V_2} G\, d\upsilon < \frac{\varepsilon}{3A},$$

и, следовательно,

$$J_2 < \frac{2\varepsilon}{3},$$

если только $t < \delta''$.

Выбирая из чисел $\frac{1}{2}\delta'$ и δ'' наименьшее и обозначая его через δ, будем иметь неравенство (10):

$$|u(M,t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad |MM_0| < \delta \quad \text{и} \qquad t < \delta,$$

которое и доказывает непрерывность $u(M,t)$ при $t = 0$ во всякой точке M_0.

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) \quad -\infty < x < y, z < \infty,\ t > 0$$

при нулевом начальном условии $u(x,y,z,o) = 0$.

Рассмотрим точку $M'(\xi,\eta,\zeta)$ в момент времени $r < t$. Количество тепла, выделяющегося в элементе $d\xi d\eta d\zeta$ за время dr и равное

$$dQ = c\rho f\, d\xi d\eta d\zeta dr,$$

вызывает в точке $M(x,y,z)$ в момент времени t температуру

$$G(M,M',t-r) f(M',r) d\xi d\eta d\zeta dr.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем написать решение поставленной задачи в виде

$$u(M,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(M,M',t-r) f(M',r) d\xi d\eta d\zeta dr.$$

Задачи для полупространства с однородными граничными условиями первого и второго рода решаются методом отражения.

Задачи

1. Пусть функция $f(x,t) \in c^2(t \ge 0)$ является гармонической по x при каждом фиксированном $t \ge 0$. Доказать, что функция $u(x,t) = \int_0^t f(x,r)dr$ является решением задачи Коши $u_t = a^2\Delta u + f(x,t),\ \ u|_{t=0} = 0$. Здесь $x \in R^n$, $n = 2, 3$.

2. Решить задачи $(n = 2)$:

а) $u_t = \Delta u + e^t$,$u|_{t=0} = \cos x \sin y$.

б) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y$, $u|_{t=0} = 1$.

В) $2u_t = \Delta u$, $u|_{t=0} = \cos xy$.

3. Решить задачи $(n = 3)$:

а) $u_t = 3\Delta u + e^t$, $u|_{t=0} = \sin(x-y-z)$.

б) $u_t = \Delta u + \cos(x-y+z)$, $u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}$.

в) $u_t = \Delta u$, $u|_{t=0} = \cos(x\, y) \sin z$.

Лекция 17. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных. Остывание однородного шара. Распространение тепла в прямоугольной пластинке

При изучении распространения тепла в ограниченном теле необходимо к уравнению и начальному условию добавить условия на границе тела, которые в простейших случаях являются граничными условиями первого, второго или третьего рода.

Рассмотрим простейшую задачу с однородным граничным условием первого рода:

найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{ внутри } T \text{ при } t > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \tag{2}$$

и граничным условием

$$u|_{\Sigma} = 0, \tag{3}$$

где Σ – граница области T.

Решение этой задачи может быть получено обычным методом разделения переменных, изложенным применительно к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

в лекции 12; применение этого метода к нашей задаче проходит совершенно аналогично.

§1. Схема метода разделения переменных

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее однородному граничному условию (3) и представимое в виде произведения

$$u(M,t) = \upsilon(M)T(t) \neq 0, \qquad M = M(x, y, z). \tag{4}$$

Подставляя функцию (4) в уравнение (1), приходим к следующим условиям, определяющим функции $\upsilon(M)$ и $T(t)$:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} + \lambda\upsilon = 0, \qquad M \in T, \quad \upsilon(M) \neq 0, \tag{5}$$

$$\upsilon = 0 \qquad \text{на} \qquad \Sigma$$

и

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{6}$$

Для функции υ получаем задачу на отыскание собственных значений, с которой мы встречались при рассмотрении колебаний ограниченных объемов (см. лекцию 12).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ – собственные значения, а $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n, \ldots$ – собственные функции задачи (5). Функции $\{\upsilon_n\}$ образуют ортогональную систему, т.е.

$$\iiint_T \upsilon_m(M)\cdot\upsilon_n(M)\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad \text{при} \quad m \neq n.$$

Соответствующие функции $T_n(t)$ имеют вид

$$T_n(t) = C_n\, e^{-a^2\lambda_n t},$$

и вспомогательная задача имеет нетривиальное решение

$$u_n(M,t) = C_n\,\upsilon_n(M)e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Общее решение исходной задачи может быть представлено в виде

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-a^2\lambda_n t}\,\upsilon_n(M). \tag{7}$$

Удовлетворяя начальному условию

$$u(M,0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\upsilon_n(M),$$

находим коэффициенты

$$C_n = \frac{\iiint_T \varphi(M)\upsilon_n(M)\,dx\,dy\,dz}{\|\upsilon_n\|^2}, \tag{8}$$

где

$$\|\upsilon_n\| = \left[\iiint_T \upsilon_n^2(M)\,dx\,dy\,dz\right]^{1/2} \text{– норма функции } \upsilon_n.$$

Функция $u(M,t)$, определяемая формулами (7), (8), дает решение исходной задачи (1) – (3).

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(M,t) \qquad (9)$$

при однородных граничном и начальном условиях может быть также решено методом разделения переменных.

Полагая, как обычно,

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\upsilon_n(M) \qquad (10)$$

и разлагая функцию $f(M,t)$ по собственным функциям $\upsilon_n(M)$

$$f(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\upsilon_n(M), \qquad f_n(t)=\frac{1}{\|\upsilon_n\|^2}\iiint_T f(M,t)\upsilon_n(M)\,dx\,dy\,dz,$$

из (9) получаем для определения $T_n(t)$ уравнение

$$T_n'+a^2\lambda_n T_n=f_n(t)$$

с начальным условием $T_n(0)=0$, так как $u(M,0)=0$. Следовательно, имеем

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau. \qquad (11)$$

Теперь формулу (10) с учетом (11) перепишем так

$$u(M,t)=\int_0^t\iiint_T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}\frac{\upsilon_n(M)\upsilon_n'(M)}{\|\upsilon_n\|^2}\right\}f(M',\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Здесь $M'=M'(\xi,\eta,\zeta)$. Выражение в фигурных скобках, очевидно, соответствует функции влияния мгновенного источника мощности $Q=c\rho$, помещенного в точку M' в момент времени τ,

$$G(M,M',t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\upsilon_n(M)\upsilon_n'(M)}{\|\upsilon_n\|^2}e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}.$$

Решение первой краевой задачи $\bar{u}$ для уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями $\bar{u}=\psi$ на поверхности Σ легко приводится к решению и неоднородного уравнения с однородными граничными условиями $u=0$ на Σ, если положить

$$\bar{u}=u+\phi,$$

где $\phi-$ произвольная (достаточно гладкая) функция, принимающая значения ψ на Σ.

Таким образом, основная трудность при решении задач о распространении тепла в ограниченной области состоит в нахождении собственных функции и собственных значений для данной области.

§2. Остывание однородного шара

Рассмотрим задачу об остывании однородного шара радиуса R, имеющего некоторую начальную температуру зависящую только от расстояния r точки от центра шара, если на его поверхности поддерживается температура равная нулю.

В этом случае задача приводится к интегрированию уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad 0<r<R, \quad t>0 \qquad (12)$$

при начальном условии

$$u(r,0)=\varphi(r), \qquad 0\le r<R \qquad (13)$$

и при граничном условии

$$u(R,t)=0. \qquad (14)$$

Согласно методу разделения переменных (см. §1) задача на собственные значения (5) имеет вид

$$\frac{d^2\upsilon}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\upsilon}{dr}+\lambda\upsilon=0 \qquad 0\le r<R, \qquad (15)$$
$$\upsilon(R)=0.$$

Полагая $w = r\upsilon$ (15), приводим к следующей задаче:

$$\frac{d^2w}{d\,r^2} + \lambda\, w = 0, \quad w(0) = 0, \quad w(R) = 0. \tag{16}$$

Собственные значения и собственные функции краевой задачи (16), как известно, даются формулами:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2, \qquad w_n = \sin\frac{n\pi}{R}r.$$

Таким образом,

$$T_n(t) = C_n\, e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t}, \qquad \upsilon_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{n\pi}{R}r,$$

далее, удовлетворяя начальному условию (13), находим (см. (8))

$$C_n = \frac{2}{R}\int_0^R \varphi(r)\, r\sin\frac{n\pi r}{R}\,d\,r.$$

Следовательно, решение задачи (12) – (14) вычисляется по формуле

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{R}\int_0^R \varphi(r)\, r\sin\frac{n\pi r}{R}\,d\,r\right] e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t}\,\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}.$$

§3. Распространение тепла в прямоугольной пластинке

Рассмотрим тонкую однородную прямоугольную пластинку, контур которой поддерживается при температуре $0°$. Начальное распределение температуры задано, и задача заключается в определении температуры пластинки в любой момент времени $t > 0$, в предположении, что тепловой обмен между боковой поверхностью пластинки с окружающей средой отсутствует.

Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad 0 < x < p, \quad 0 < y < q, \quad t > 0 \tag{17}$$

при граничных условиях

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(p, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, q, t) = 0 \tag{18}$$

и при начальном условии

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y). \tag{19}$$

Согласно методу разделения переменных, будем искать частные решения уравнения (17) в виде произведения

$$u = T(t)X(x)Y(y);$$

тогда для определения функции $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ получим следующие уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \quad T'(t) + a^2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)T(t) = 0,$$

где λ^2 и μ^2 – постоянные.

Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$X = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x, \quad Y = C_3\cos\mu y + C_4\sin\mu y, \quad T(t) = A\,e^{-\left(\lambda^2+\mu^2\right)a^2 t}.$$

Для выполнения граничных условий (18) следует положить

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \lambda = \frac{m\pi}{p}, \quad \mu = \frac{n\pi}{q} \quad (m, n = 1,2,3,\ldots).$$

Таким образом, частными решениями уравнения (17), удовлетворяющими граничным условиям (18), будут:

$$u_{nm} = A_{mn} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)t}\sin\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{q}y.$$

Составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)t}\sin\frac{m\pi}{p}x\cdot\sin\frac{n\pi}{q}y. \tag{20}$$

Требуя выполнения начального условия (19), получим

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}x\cdot\sin\frac{n\pi}{q}y.$$

Написанный ряд представляет собой разложение функции $\varphi(x, y)$ в двойной ряд Фурье, и коэффициенты A_{mn} определяются, как не трудно видеть, по формуле

$$A_{mn} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \varphi(x, y)\sin\frac{m\pi x}{p}\cdot\sin\frac{n\pi y}{q}\,d\,x\,d\,y.$$

Внося эти значения коэффициентов A_{mn} в ряд (20), получим решение задачи (17) – (19).

Задачи

1. Дан однородный шар радиуса R с центром в начале координат. Определить температуру внутри шара, если:

а) внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т.е. $u|_{t=0} = u_0(r)$;

б) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а $u|_{t=0} = u_0(r)$;

в) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $u_1 = \mathrm{const}$, а $u|_{t=0} = u_0 = \mathrm{const}$;

г) внутрь шара, начиная с момента $t = 0$, через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности $q = \mathrm{const}$, а начальная температура $u|_{t=0} = u_0 = \mathrm{const}$.

2. Сфера радиуса R содержит растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 = \mathrm{const}$. Концентрация на поверхности сферы поддерживается постоянной, равной $C_1 > C_0$. Найти количество абсорбированного вещества в момент времени $t > 0$.

3. Однородное твердое тело ограничено двумя концентрическими сферами с радиусами R и $2R$. Внутренняя поверхность тела непроницаема для тепла. Шаровой слой нагрет до температуры u_0 и затем охлаждается в среде с нулевой температурой. Найти температуру в точках внутри шарового слоя в момент времени $t > 0$.

IV. Теория потенциала

Лекция 18. Уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве. Теорема максимума. Фундаментальное решение. Формула Грина. Потенциалы объема, простого слоя и двойного слоя

Целый ряд вопросов математической физики сводится к решению тех или иных уравнений эллиптического типа. Мы займемся простейшими такими уравнениями: уравнением Лапласа

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

и уравнением Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{2}$$

Напомним, что $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Всякая функция, имеющая непрерывные вторые производные и удовлетворяющая в некоторой области уравнению Лапласа, называется гармонической функцией в этой области.

Прежде чем переходить к решению задач, связанных с этими уравнениями, мы изучим некоторые общие свойства, которыми обладают решения этих уравнений.

§1. Теорема максимума

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если функция* $\rho(x,y,z)$ *положительна в точке* $M_0(x_0,y_0,z_0)$, *лежащей внутри области, где определено уравнение* (2), *то решение этого уравнения не может достигать минимума в этой точке.*

Доказательство: В самом деле, если бы в этой точке функция $u(M)$, $M=M(x,y,z)$, удовлетворяющая уравнению (2), достигала бы минимума, то $u(M)$ достигала бы минимума в этой точке по каждому переменному в отдельности. Но тогда все первые производные от u должны были бы быть равными нулю в этой точке, а вторые производные по каждому переменному – неотрицательными. Следовательно, сумма вторых производных должна была быть также неотрицательной, что противоречит условию

$$\rho(M_0)>0.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\rho(M)$ *отрицательна в точке* M_0, *то* $u(M)$ *в этой точке не может достигать максимума.*

Доказывается переменой знака ρ *и* u.

Теорема 1. *Гармоническая функция, заданная в некоторой области* Ω *и непрерывная вплоть до границы* S, *нигде внутри* Ω *не может принимать значений больших, чем наибольшее ее значение на границе, или меньших, чем ее значение на границе, т.е.*

$$\min_S u(M)\le u(M)\le \max_S u(M).$$

Доказательство. В самом деле, пусть

$$u(M_0)>\max_S u(M)+\varepsilon.$$

Тогда функция

$$\upsilon(M)=u(M)+\eta|MM_0|^2,$$

где η – некоторая положительная постоянная, будет при достаточно малом η принимать в точке M_0 значения все еще большее, чем $\max\limits_S \upsilon(M)$.

В самом деле, $\upsilon(M_0)=u(M_0)$ и по предположению

$$u(M_0)>\max_S u(M)+\varepsilon\ge\left(\upsilon(M)-\eta\,|MM_0|^2\right)\Big|_S+\varepsilon.$$

Выбрав η настолько малым, чтобы иметь во всей области Ω

$$\varepsilon-\eta|MM_0|^2>\frac{\varepsilon}{2},$$

мы получим

$$\upsilon(M_0)>\max_S \upsilon(M)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, υ будет достигать максимума где-то внутри области. Но

$$\Delta\upsilon=6\eta.$$

Это противоречит лемме 1.

Вторая часть теоремы доказывается заменой u на $-u$.

Следствие 1. *Гармоническая функция, равная нулю на границе некоторой конечной области, тождественно равна нулю во всей области.*

Отсюда вытекает, что две гармонические функции, принимающие одинаковые значения в точках границы области, совпадают и всюду внутри области.

Следствие 2. *Если последовательность функций* u_n, *гармонических в области* Ω *и непрерывных вплоть до границы, сходится равномерно на границе* S *этой области, то она сходится равномерно во всей замкнутой области.*

Это вытекает из того, что разность

$$|u_{n_1}-u_{n_2}|,\qquad \text{где } n_1>N \text{ и } n_2>N,$$

будучи сколь угодно малой на границе при достаточно большом N, будет малой и внутри. Признак Коши дает нам равномерную сходимость u_n, во всей замкнутой области, что и требовалось доказать.

§2. Фундаментальное решение. Формула Грина

Прямым вычислением получаем, что функция

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\frac{1}{r}=0 \tag{3}$$

везде, кроме точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где $\frac{1}{r}$ обращается в бесконечность.

При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского имеет вид

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{A}\,d\Omega=\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds, \tag{4}$$

где Ω – область, ограниченная достаточно гладкой поверхностью S, векторное поле $\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$,

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},\quad \vec{A}\cdot\vec{n}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma,$$

а $\alpha=\angle n,x$, $\beta=\angle n,y$, $\gamma=\angle n,z$ – углы внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности S.

Пусть $u(x,y,z)$ и $\upsilon(x,y,z)$ – функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $\overline{\Omega}$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри Ω.

Полагая

$$P=u\frac{\partial\upsilon}{\partial x},\qquad Q=u\frac{\partial\upsilon}{\partial y},\qquad R=u\frac{\partial\upsilon}{\partial z}$$

и пользуясь формулой (4), приходим к так называемой первой формуле Грина

$$\iiint_\Omega u\,\Delta\upsilon\,d\Omega=-\iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla\upsilon\,d\Omega+\iint_S u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}ds. \tag{5}$$

Меняя местами функции u и υ в (5), будем иметь:

$$\iiint_\Omega \upsilon\,\Delta u\,d\Omega=-\iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla\upsilon\,d\Omega+\iint_S \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}ds. \tag{6}$$

Вычитая из равенства (5) равенство (6), получаем вторую формулу Грина

$$\iiint_\Omega (u\,\Delta\upsilon-\upsilon\,\Delta u)d\Omega=\iint_S\left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial n}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \tag{7}$$

Лемма 2. *Если* $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, *то имеет место формула:*

$$\iiint_\Omega \frac{1}{r}\Delta u\,d\Omega=\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)ds-4\pi u(M_0). \tag{8}$$

Доказательство. Вырежем из области Ω шар K_ε радиуса ε с центром в точке M_0 и применим к оставшейся области формулу Грина (7), получим $\left(\upsilon=\frac{1}{r}\right)$:

$$\iiint_{\Omega\setminus K_\varepsilon}\left(u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right)d\Omega=\iint_S\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds+\iint_{S_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \tag{9}$$

Здесь S_ε – сфера радиуса ε с центром в точке M_0.

Далее нетрудно видеть, что на сфере S_ε

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\varepsilon^2},$$

и, следовательно

$$\iint_{S_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}u\,ds=4\pi\overline{u}, \tag{10}$$

где $\overline{u}$ – среднее значение функции $u(M)$ на S_ε. Интеграл

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\frac{1}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\right)=4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\right), \tag{11}$$

где $\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)$ – среднее значение нормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ на сфере S_ε.

Подставляя выражения (10) и (11) в формулу (9) и учитывая, что $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)=0$ в $\Omega \setminus K_\varepsilon$, будем иметь:

$$-\iiint\limits_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \frac{1}{r}\Delta u\, d\Omega = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + 4\pi\bar{u} - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right). \quad (12)$$

Устремим теперь радиус ε к нулю. Тогда получим:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{u} = u(M_0)$, так как $u(M)$ – непрерывная функция, а $\bar{u}$ – ее среднее значение по сфере радиуса ε с центром в точке M_0;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)=0$, так как из непрерывности первых производных функции $u(M)$ в Ω сразу же вытекает ограниченность нормальной производной в окрестности точки M_0;

3) по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega \setminus K_\varepsilon} \frac{1}{r}\Delta u\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta u\, d\Omega.$$

В результате указанного предельного перехода $\varepsilon \to 0$ в формуле (12) мы приходим к интегральной формуле Грина (8).

Если точка M_0 находится вне области Ω, то $\upsilon = \dfrac{1}{r}$ не имеет особенности во всех точках $\overline{\Omega}$ и тогда формула (7) имеет вид

$$-\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta u\, d\Omega = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right) ds. \quad (13)$$

Если точка M_0 принадлежит поверхности S, то, повторяя выше приведенные рассуждения, мы в результате приходим к формуле, получающейся из (8) при замене 4π на 2π.

Объединяя все случаи, запишем основную формулу Грина в виде

$$\alpha u(M_0) = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta u\, d\Omega + \iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) ds, \quad (14)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } M_0 \in \Omega, \\ 2\pi, & \text{если } M_0 \in S, \\ 0, & \text{если } M_0 \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Часто функцию $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{|MM_0|}$ называют фундаментальным решением уравнения Лапласа.

§3. Потенциалы объема, простого слоя и двойного слоя

Если бы нам были известны, из каких-либо соображений, значения u, Δu и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, входящих в формулу Грина (8):

$$\Delta u = -4\pi\rho, \qquad u|_S = f_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2,$$

то формула Грина дала бы нам явное представление для неизвестной функции u:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho}{r} d\Omega + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{1}{r} f_2\, ds - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f_1 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds. \quad (15)$$

Однако мы не можем задать произвольно f_1 и f_2, и поэтому формула (15) не дает возможности строить решение уравнения (2) по произвольным предельным значениям на границе его самого и его нормальной производной. Мы дадим особые названия интегралам, стоящим в правой части этой формулы.

Интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\rho}{r} d\Omega$ мы будем называть ньютоновым потенциалом, а функцию ρ – плотностью этого потенциала. Аналогично, $\iint\limits_S \dfrac{1}{r} f_2\, ds$ мы назовем потенциалом простого слоя с плотностью f_2, а $\iint\limits_S f_1 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds$ – потенциалом двойного слоя с плотностью f_1.

Ньютонов потенциал имеет очень простой физический смысл. Он является потенциалом тяготения массы, распределенной с плотность ρ в объеме Ω.

Ту же интерпретацию допускает и потенциал простого слоя. Это есть потенциал тяготения массы, распределенной с плотностью f_2 на поверхности S.

Задачи

1. Вычислить объемный потенциал для шара $|x| < R$ со следующими плотностями:

а) $\rho = \rho(|x|) \in C$;

б) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$;

в) $\rho = |x|$;

г) $\rho = e^{-|x|}$;

д) $\rho = \sin|x|$.

2. Для сферного слоя $R_1 < |x| < R_2$ вычислить объемный потенциал масс, распределенных с плотностями:

а) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$;

б) $\rho = \rho(|x|) \in C(R_1 \le |x| \le R_2)$.

3. В точке, лежащей на оси $\theta = 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$, найти потенциал простого слоя, распределенного на сфере $r = R$ со следующими плотностями:

а) μ – пропорциональна квадрату расстояния от плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$;

б) $\mu = \sin\frac{\theta}{2}$;

в) $\mu = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$ и $\mu = e^{2\pi - \varphi}$, $\pi \le \varphi \le 2\pi$.

4. Найти потенциал двойного слоя с постоянной плотностью μ_0 для сферы $|x| = R$.

Лекция 19. Основные свойства гармонических функций. Теорема о среднем арифметическом. Поведение гармонической функции вблизи особой точки. Поведение гармонических функций на бесконечности

Основная интегральная формула Грина имеет вид

$$-\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta u \, d\Omega + \iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) ds = \begin{cases} 4\pi u(M_0), & \text{если } M_0 \in \Omega, \\ 2\pi u(M_0), & \text{если } M_0 \in S, \\ 0, & \text{если } M_0 \,\overline{\in}\, S. \end{cases} \qquad (1)$$

Вывод соотношения (1) был основан на использовании второй формулы Грина

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\,\Delta \upsilon - \upsilon\,\Delta u) d\Omega = \iint\limits_S \left(u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} - \upsilon \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \qquad (2)$$

Сейчас мы получим несколько важнейших свойств гармонических функций.

§1. Теорема о среднем арифметическом

Лемма 1. *Если u – функций, гармоническая в области Ω, ограниченной поверхностью S, то*

$$\iint\limits_{S'} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \qquad (3)$$

где S' – любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области Ω.

Доказательство. Подставляя в (2) гармоническую функцию u, $\Delta u = 0$ и функцию $\upsilon \equiv 1$, сразу же получим формулу (3).

Из формулы (3) следует, что вторая краевая задача:

$$\Delta u = 0, \qquad M(x, y, z) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}\Big|_S = f$$

может иметь решение только при условии

$$\iint_S f\, ds = 0.$$

Теорема 1 *(Теорема о среднем арифметическом). Значение гармонической функции в центре некоторого шара равно среднему арифметическому ее значений на поверхности этого шара.*

Доказательство: Применим формулу (1) к шару K_a с центром в точке M_0 и радиуса a:

$$4\pi u(M_0) = \iint_{S_a} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) ds. \tag{4}$$

Здесь S_a – сфера. Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \text{ на } S_a, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{S_a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=a} = -\frac{1}{a^2}$$

и формулу (3), из (4) получаем соотношение

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_a} u\, ds. \tag{5}$$

Теорема доказана.

Записывая (5) в виде

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \iint_{S_\rho} u\, ds$$

и интегрируя по ρ от 0 до a, получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \iiint_{K_a} u\, d\Omega, \qquad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

т.е. $u(M_0)$ есть среднее по объему шара K_a с границей S_a.

Теперь используя теорему 1, установим справедливость утверждения:

Лемма 2. *Функция, гармоническая внутри ограниченной области Ω и непрерывная в замкнутой области $\overline{\Omega}$, достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная.*

Доказательство. Пусть $u(M)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ области Ω. Проведем сферу S_ρ с центром в точке M_0 и радиусом ρ, принадлежащую целиком области Ω, применим теорему о среднем арифметическом и заменим подынтегральную функцию $u(M)$ ее наибольшем значением $u(M') = \max\limits_{M \in S_\rho} u(M)$ на сфере. Таким образом, получим

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u\, ds \le \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u(M')\, ds = u(M').$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда u на сфере S_ρ есть постоянная, равная $u(M_0)$. Поскольку по предположению $u(M_0)$ есть наибольшее значение $u(M)$ в области Ω, мы можем утверждать, что имеет место знак равенства и что, следовательно, $u(M)$ равна постоянной внутри u на поверхности всякой сферы с центром M_0, целиком принадлежащей области Ω. Покажем, что отсюда следует, что $u(M)$ есть постоянная и во всей области Ω. Действительно, соединим точку M_0 с произвольной внутренней точкой M при помощи какой-либо гладкой кривой L, лежащей целиком внутри Ω. При этом минимальное расстояние от точек линии L до точек границы области, будет положительным. Следовательно, существует такое положительное число ε, что шар радиуса ε, описанной вокруг любой точки линии L, будет лежать целиком внутри Ω. На линии L можно указать конечное число точек $M_0, M_1, \ldots, M_n = M$, обладающих тем свойством, что каждая последующая лежит внутри шара радиуса ε, описанной вокруг предыдущей. Пользуясь доказанным свойством постоянства u на любой внутренней сфере, окружающей всякую точку, где u принимает максимальное значение, и переходя последовательно от одной вершины ломанной к другой, получим:

$$u(M) = u(M_0).$$

Аналогично доказывается, что гармоническая функция не может достигать наименьшего значения внутри Ω. Согласно теореме Вейерштрасса функция $u(M)$ в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения, и она достигает их на границе области Ω, ибо, по доказанному, внутри области Ω гармоническая функция $u(M)$ не может достигать наибольшего и наименьшего значений. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что гармоническая функция $u(M)$ не может иметь внутри области Ω ни максимумов, ни минимумов.

§2. Изолированные особые точки

Рассмотрим особые точки гармонической функции. Пусть M_0 – изолированная особая точка, лежащая внутри области гармоничности функции u. Представляется возможным два случая:

1) гармоническая функция ограничена в окрестности точки M_0;
2) гармоническая функция не ограничена в окрестности точки M_0.

С особыми точками второго рода мы уже встречались $u = \dfrac{1}{r}, \quad r = |MM_0|$.

Следующая теорема показывает, что первый тип особых точек не может быть осуществлен.

Теорема 2. *Если ограниченная функция $u(M)$ является гармонической внутри области Ω, за исключением точки M_0, то можно так определить значение $u(M_0)$, чтобы функция $u(M)$ была гармонической всюду внутри Ω.*

Доказательство. Возьмем шар K_a радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащей внутри Ω, и рассмотрим внутри него гармоническую функцию υ, совпадающую с функцией u на сфере S_a шара K_a.

Составим разность

$$w = u - U,$$

которая

1) гармонична всюду внутри K_a, кроме точки M_0, в которой w не определена;
2) непрерывно примыкает к нулевым граничным условиям S_a;
3) ограничена в замкнутой области $K_a \cup S_a \quad (|w| < A)$.

Далее рассмотрим неотрицательную гармоническую функцию

$$U(M) = \varepsilon\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Здесь $\varepsilon -$ произвольное положительное число, $a -$ радиус шара K_a, $r = |MM_0|$.

Построим шар K_b с центром в точке M_0, выбрав его радиус b так, чтобы на его сфере значение υ превосходило A, и рассмотрим область $K_a \setminus K_b$. Функция w непрерывна в замкнутой области $b \le r \le a$, и на границе этой области имеет место неравенство $|w| \le U$. В силу принципа максимального значения неотрицательная функция U является мажорантой функции w

$$|w| \le U(M) \quad \text{для } b \le r \le a.$$

Фиксируя произвольную точку M области K_a, не совпадающую с M_0, и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0,$$

следовательно, всюду, за исключением, быть может, точки M_0

$$w = 0.$$

Таким образом, функция u всюду в области Ω, за исключением точки M_0, совпадает с функцией U. Полагая $u(M_0) = U(M_0)$, мы получим функцию $u \equiv U$, гармоническую всюду внутри области Ω. Тем самым теорема доказана.

При доказательстве теоремы этого пункта мы предполагали, что функция u ограничена в окрестности точки M_0. Однако те же рассуждения остаются в силе, если предположить, что функция u в окрестности точки M_0 удовлетворяет неравенству

$$|u(M)| \le \varepsilon(r)\frac{1}{r}, \tag{6}$$

где $\varepsilon(r)-$ произвольная функция, стремящаяся к нулю при $r \to 0$, т.е. в окрестности точки M_0 функция $u(M)$ растет медленнее, чем $\frac{1}{r}$.

Итак, если гармоническая функция $u(M)$ в окрестности изолированной особой точки M_0 растет медленнее, чем $\frac{1}{r}$, т.е. выполнена оценка (6), то она ограничена в окрестности этой точки, и можно так определить значения $u(M_0)$, чтобы функция $u(M_0)$ была гармонической и в самой точке M_0.

§3. Поведение гармонической функции на бесконечности

Гармоническая функция $u(M)$ называется регулярной на бесконечности, если

$$|u| < \frac{A}{r}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2}$$

при достаточно большом $r \ge r_0$.

Теорема 3. *Если функция $u(M)$ гармонична вне некоторой замкнутой поверхности S и равномерно стремится к нулю на бесконечности, т.е. существует такая функция $\bar{\varepsilon}(r)$, что*

$$|u(M)| < \bar{\varepsilon}(r), \qquad \bar{\varepsilon}(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{7}$$

где $r-$ радиус-вектор точки M, то она регулярна на бесконечности.

Доказательство. Совершая преобразование Кельвина

$$\upsilon(r', \theta, \varphi) = r\,u(r, \theta, \varphi), \qquad \text{где } r' = \frac{1}{r}, \tag{8}$$

получим, что функция υ гармонична всюду внутри поверхности S, в которую переходит поверхность S при преобразовании обратных радиус-векторов за исключением начала координат, где она имеет изолированную особую точку.

Из условия (7) следует, что в окрестности начала координат (см. (8)) для функции υ имеет место неравенство

$$|\upsilon(r', \theta, \varphi)| \le \bar{\varepsilon}\left(\frac{1}{r'}\right)\cdot\frac{1}{r'} = \varepsilon(r')\frac{1}{r'},$$

где

$$\varepsilon(r') = \bar{\varepsilon}\left(\frac{1}{r'}\right) \to 0 \qquad \text{при } r' \to 0.$$

На основании выводов §2 функция $\upsilon(r', \theta, \varphi)$ ограничена и гармонична при $r' \le r_0'$:

$$\left|\upsilon(r', \theta, \varphi)\right| \le A \quad \text{при } r' \le r_0',$$

$$\left|u(r, \theta, \varphi)\right| = \frac{\left|\upsilon(r', \theta, \varphi)\right|}{r} \le \frac{A}{r} \quad \text{при } r \ge r_0 = \frac{1}{r_0'}.$$

В силу гармоничности функции υ при $r' = 0$ можно написать:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\upsilon(x', y', z')\right) = -\frac{x}{r^2}\upsilon + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}\right],$$

где

$$x' = \frac{x}{r} r', \qquad y' = \frac{y}{r} r', \qquad z' = \frac{z}{r} r'.$$

Отсюда, вычисляя производные $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial x}$ и принимая во внимание ограниченность первых производных функции υ в окрестности точки $r' = 0$, получаем:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2} \quad \text{при } r \to \infty.$$

Аналогичные оценки имеют место для производных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Лекция 20. Уравнение Пуассона в пространстве. Ньютонов потенциал

Здесь мы исследуем уравнение Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z) \tag{1}$$

в области, которая совпадает со всем пространством.

§1. Теорема единственности

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Решение уравнения Пуассона* (1) *в неограниченном пространстве, стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.*

Доказательство. В самом деле, если u_1 и u_2 – два таких решения, то их разность

$$\upsilon = u_1 - u_2$$

есть гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, а именно

$$|\upsilon(x, y, z)| < \varepsilon(R), \tag{2}$$

где $\varepsilon(R) \to 0$ при $R \to \infty$ $\left(R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

Теперь, применяя теорему 1 лекции 18 к сколь угодно большому шару, видим, что в любой точке пространства значение гармонической функции сколь мало в силу (2). Отсюда и вытекает справедливость теоремы.

§2. Построение решения уравнения Пуассона

Переходим теперь к решению уравнения (1) в неограниченном пространстве.

Пусть функция $\rho(x, y, z)$ интегрируема и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |\rho(x, y, z)| &< \frac{A}{R^{2+\alpha}}, \qquad \text{если } r \ge 1, \\ |\rho(x, y, z)| &< A, \qquad \text{если } r < 1, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{и} \quad \alpha > 0.$$

При выполнении условий (3) решение уравнения (1) легко построить с помощью интегральной формулы Грина. Пусть $u(x_0, y_0, z_0)$ – решение (1), стремящееся к нулю на бесконечности. Взяв произвольный объем Ω, ограниченный поверхностью S, мы имеем на основании этой формулы:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS, \tag{4}$$

где r – расстояние между точкой $M(x, y, z)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Возьмем за объем Ω шар радиуса R с центром в начале координат и устремим R к бесконечности. При этом первое слагаемое правой части (4) будет стремиться к определенному пределу, так как в силу условий (3) объемный интеграл сходится. Сумма двух других слагаемых представляет собой некоторую гармоническую функцию. Мы покажем далее, что предел первого слагаемого дает решение поставленной задачи. В силу доказанной единственности решения отсюда будет следовать, что сумма второго и третьего слагаемых стремится к нулю.

Докажем, что функция

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x,y,z)}{r}\,dx\,dy\,dz \tag{5}$$

действительно удовлетворяет уравнению (1) и поставленным условиям.

Функция (5) называется ньютоновым потенциалом, а $\rho(x,y,z)$ – его плотностью.

Покажем прежде всего стремление к нулю функции и на бесконечности. Используя (3), из формулы (5) получим

$$|\,u(x_0, y_0, z_0)| \le A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r\,R^{2+\alpha}}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Переходя к оценке последнего интеграла, заметим, что величина его зависит от $R_0 = \sqrt{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2}}$, и если положить $x_0 = R_0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0$, то она не изменится. В самом деле, очевидно, этот интеграл не меняется при повороте координатных осей, и можно выбрать, эти координатные оси так, чтобы ось OX проходила через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Делая теперь замену переменных

$$x = R_0\xi, \quad y = R_0\eta, \quad z = R_0\zeta,$$

приведем его к виду

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_0^3\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{R_0^{3+\alpha}\,p^{2+\alpha}\,p_1} = \frac{A}{R_0^{\ 2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{p_1\,p^{2+\alpha}},$$

где $p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, $p_1 = \sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Последний интеграл сходится, так как:

1) при $p \to \infty$ подынтегральная функция убывает как $\dfrac{1}{p^{3+\alpha}}$;

2) вблизи $p = 0$ особенность порядка $\dfrac{1}{p^{2+\alpha}}$ интегрируема (ввиду того, что без ограничения общности можно считать $\alpha < 1$), ибо в противном случае замена α на $\alpha_1 < \alpha$ только ослабит неравенство (3));

3) вблизи $p_1 = 0$ особенность порядка $\dfrac{1}{p_1}$ интегрируема.

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p_1\,p^{2+\alpha}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = B,$$

будем иметь

$$|\,u(x_0, y_0, z_0)| \le \frac{AB}{R_0^{\ \alpha}},$$

что и доказывает стремление к нулю функции u на бесконечности.

Докажем теперь, что u имеет непрерывные производные, которые получаются дифференцированием под знаком интеграла.

Например,

$$4\pi\frac{\partial u}{\partial x_0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho\,\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right)dx\,dy\,dz\,.$$

Дифференцирование под знаком интеграла выполнимо, так как полученный интеграл равномерно по x_0 сходится. В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x - x_0}{r^3} \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right)\right| \le \frac{1}{r^{\ 2}},$$

откуда и следует сходимость. Одновременно доказано существование непрерывных первых производных у ньютонова потенциала. Чтобы доказать существование и непрерывность вторых производных, необходимо наложить некоторые новые ограничения на функцию $\rho(x,y,z)$. Именно, мы положим, что эта функция имеет непрерывные производные первого порядка. Это ограничение не является существенным, но замена его другим, более слабым, потребовала бы больших усилий.

Функцию ρ всегда можно разбить на два слагаемых ρ_1 и ρ_2 так, чтобы в окрестности данной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция ρ_2 была бы тождественна нулю, а функция ρ_1 была бы тождественна нулю в некоторой окрестности бесконечности, т.е. везде вне некоторой области Ω. При этом можно добиться того, что ρ_1 и ρ_2, в свою очередь, будут иметь, непрерывные производные первого порядка. Тогда

$$4\pi u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1}{r}\, dx\, dy\, dz + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_2}{r}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Ввиду того, что $\rho_2 \equiv 0$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, можно из второго интеграла исключить эту окрестность и тогда дифференцировать по параметру два раза, получая равномерно сходящиеся интегралы. Займемся первым интегралом. Будем иметь, например:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1}{r}\, dx\, dy\, dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_1 \frac{(x - x_0)}{r^3}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Вводя новые переменные $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1}{r}\, dx\, dy\, dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\rho_1(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta)}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^3}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,,$$

и, очевидно, что по параметрам x_0, y_0, z_0 этот последний интеграл дифференцировать можно. Это следует из того, что интегралы от производных будут сходиться равномерно.

Нам осталось доказать, что ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.

Возьмем функцию $\psi(x_0, y_0, z_0)$, равную нулю везде, кроме некоторого шара K с центром $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и имеющую непрерывные производные

нескольких порядков, и рассмотрим интегральную формулу Грина для функции ψ:

$$4\pi\psi(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_K \frac{1}{r}\Delta\psi\, dk + \iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] ds\,.$$

Так как вне шара K ψ и $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ равны нулю, получим

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\psi}{r}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Умножая последнее соотношение на $\rho(x_0, y_0, z_0)$ и интегрируя по x_0, y_0, z_0, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0, z_0)\rho(x_0, y_0, z_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\Delta\psi(x, y, z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{r}\, dx_0\, dy_0\, dz_0\right]\right\} dx\, dy\, dz = \qquad (6)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z)\Delta\psi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Далее для достаточно большой области Ω

$$\iiint_\Omega u\,\Delta\psi\, d\Omega = \iiint_\Omega \psi\,\Delta u\, d\Omega\,. \qquad (7)$$

Теперь из формул (6) и (7) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z)[\Delta u + \rho]\, dx\, dy\, dz = 0\,.$$

Из произвольности $\psi(x, y, z)$ вытекает

$$\Delta u = -\rho\,.$$

Итак, доказано утверждение:

Теорема 2. *Пусть функция* $\rho = \rho(x, y, z)$ *имеет непрерывные первые производные и, кроме этого, выполнены условия* (3). *Тогда формула* (5) *задает решение уравнения Пуассона* (1), *стремящееся к нулю на бесконечности.*

Лекция 21. Решение задачи Дирихле для шара

Пусть Ω – конечная область, ограниченная поверхностью S. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона ставится так: найти решение $u(M)$ уравнения

$$\Delta u = \rho(M), \quad M(x,y,z)\in\Omega, \tag{1}$$

непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и принимающее на поверхности S заданные значения

$$u = f(M), \quad M(x,y,z)\in S. \tag{2}$$

В настоящей лекции мы будем заниматься решением задачи Дирихле для шара.

§1. Функция Грина задачи Дирихле

Применяя интегральную формулу Грина (см. лекцию 19) к решению и уравнения Пуассона (1), получим

$$u(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho}{r}d\Omega + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds. \tag{3}$$

Пусть известна функция $g(M,M_0)$, обладающая следующими двумя свойствами: 1) как функция переменной точки M она является гармонической внутри области Ω и имеет непрерывные первые производные вплоть до поверхности S; 2) на поверхности S функция $g(M,M_0)$ принимает граничные значения $-\frac{1}{r}$.

Применяя вторую формулу Грина (см. лекцию 18) к функциям $u(M)$ и $g(M,M_0)$, получим

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta g - g\Delta u)d\Omega = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}g\rho\, d\Omega = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{s}\left[u\frac{\partial g}{\partial\eta} - g\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]ds$$

или, в силу граничных значений для функции $g(M,M_0)$,

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}g\rho\, d\Omega = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{s}\left[u\frac{\partial g}{\partial\eta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]ds.$$

Вычитая это равенство из (3), мы найдем

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{r}+g\right]d\Omega - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{s}u\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{r}+g\right]ds. \tag{4}$$

Положим

$$G(M,\eta_0) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{g}{4\pi}.$$

Эта функция называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Определение. *Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона называется функция* $G(M,M_0)$, *удовлетворяющая следующим условиям:* 1) $G(M,M_0)$ *как функция точки* M *есть гармоническая внутри области* Ω, *исключая точку* M_0, *где она обращается в бесконечность;* 2) *она удовлетворяет граничному условию*

$$G(M,M_0)\big|_s = 0; \tag{5}$$

3) *в области* Ω *функция* $G(M,M_0)$ *допускает представление*

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{g(M,M_0)}{4\pi}, \tag{6}$$

где $r = |M_0M|$ *и* $g(M,M_0)$ – *гармоническая функция везде внутри* Ω.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $g(M,M_0)$, которая определяется из решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta g(M,M_0) = 0, \quad g(M,M_0)\big|_s = -\frac{1}{r}, \quad M_0\in\Omega.$$

С помощью функции Грина решение внутренней задачи Дирихле (если оно существует) дается формулой, согласно (2), (4), (6):

$$u(M_0) = -\iiint\limits_{\Omega}\rho(M)G(M,M_0)d\Omega - \iint\limits_{s}f(M)\frac{\partial}{\partial\eta}G(M,M_0)ds. \tag{7}$$

При выводе формулы (7) мы предполагали существование функции $u(M)$ – решения внутренней задачи Дирихле с граничными значениями $f(M)$, непрерывного вместе с первыми производными вплоть до границы S. Таким образом, не давая доказательства существования решения, формула (7) дает интегральное представление существующих достаточно гладких решений задачи Дирихле. Подробное исследование формулы (7), проведенное А.М. Ляпуновым, показало, что для поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова, она представляет решение задачи Дирихле при любом выборе непрерывной функции $f(M)$, входящей в граничное условие, и при условии непрерывной дифференцируемости правой части $\rho(M)$.

Используя принцип максимума, нетрудно показать, что функция Грина $G(M,M_0)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < G(M,M_0) < \frac{1}{4\pi r}, \quad M \in \Omega. \tag{8}$$

Кроме того, функция Грина симметрична, т.е.

$$G(M,M_0) = G(M_0,M).$$

§2. Решение внутренней задачи Дирихле для шара

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле для шара. В этом случае можно построить функцию Грина в явном виде. Пусть R – радиус шара с центром в точке 0; возьмем внутри его произвольную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и обозначим через ρ расстояние этой точки от центра шара (рис. 1). Подвергнем точку M_0 преобразованию инверсии относительно сферы S. Преобразованная точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ будет лежать на прямой OM_0 вне шара на расстоянии ρ_1 от центра шара, причем

$$\rho\rho_1 = R^2. \tag{9}$$

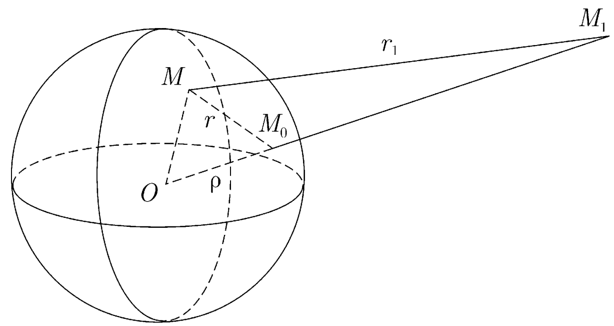

Рис. 1

Далее обозначим через r и r_1 расстояние от точки M соответственно до точек M_0 и M_1. Найдем соотношение между r и r_1 когда точка M находится на поверхности шара. Треугольники OM_0M и OM_1M подобны, так как они имеют общий угол при вершине O и стороны, образующие эти углы, пропорциональны в силу (9). Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R}$$

или

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1} = 0 \qquad \text{при } M \in S. \tag{10}$$

Покажем теперь, что функция Грина для шара будет иметь следующий вид:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}. \tag{11}$$

Действительно, функция $G(M,M_0)$ как функция точки M является гармонической внутри шара, за исключением точки M_0, где она обращается в бесконечность. На поверхности S шара она обращается в нуль, что следует из (10). Таким образом, построенная функция удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функцию Грина задачи Дирихле. Подставляя найденную функцию Грина в формулу (7), получим

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho r_1}\right)\rho d\Omega-\frac{1}{4\pi}\iint_{s}f(M)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho r_1}\right)ds. \qquad (12)$$

Проверим теперь, что формула (12) действительно дает решение задачи Дирихле для шара.

Докажем сначала, что функция

$$u_1(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho r_1}\right)\rho\, d\Omega \qquad (13)$$

обращается в нуль на границе и удовлетворяет уравнению Пуассона.

Так как для функции Грина $G(M,M_0)$ выполнены неравенства, то интеграл (13) сходится равномерно в точке M_0; следовательно, он представляет собой непрерывную функцию. Значение ее, если M_0 является точкой границы, есть нуль, следовательно, интеграл (13) стремится к нулю, если M_0 стремится к точке границы.

Пусть точка M_0 лежит внутри шара; запишем интеграл (13) в виде

$$u_1(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\rho}{r}\,d\,r+\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\rho\, g d\Omega.$$

Первое слагаемое есть ньютонов потенциал и, следовательно, применение к нему оператора Лапласа дает ρ. Второе слагаемое есть гармоническая функция, так как

$$\Delta_0\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\rho g\, d\,\Omega\right]=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\rho\,\Delta_0\, g d\Omega=0.$$

(Мы обозначим здесь оператор Лапласа Δ_0, чтобы подчеркнуть, что производные берутся по аргументам x_0, y_0, z_0.) Следовательно, формула (13) дает нужное нам решение уравнения Пуассона.

Второе слагаемое, стоящее в правой части (12), обозначим так:

$$u_2(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{s}f(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{y}-\frac{R}{\rho r_1}\right)ds. \qquad (14)$$

Таким образом, если решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре существует и если оно непрерывно в замкнутом шаре вместе

с первыми производными, то это решение представимо по формуле (14). Эта формула носит название формулы Пуассона.

Преобразуем формулу (14). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}x\left(\frac{1}{r}\right)\cos\left(\widehat{\bar n,x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\left(\widehat{\bar n,y}\right)+z\left(\frac{1}{r}\right)\cos\left(\widehat{\bar n,z}\right)=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{x-x_0}{r}\cos\left(\widehat{\bar n,x}\right)+\frac{y-y_0}{r}\cos\left(\widehat{\bar n,y}\right)+\frac{z-z_0}{r}\cos\left(\widehat{\bar n,z}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\cos\left(\widehat{\bar r-\bar r_0,x}\right)\cos\left(\widehat{\bar n,x}\right)+\cos\left(\widehat{\bar r-\bar r_0,y}\right)\cos\left(\widehat{\bar n,x}\right)+\cos\left(\widehat{\bar r-\bar r_0,x}\right)\cos\left(\widehat{\bar n,z}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\cos\left(\widehat{\bar r-\bar r_0,\bar n}\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}\cos\left(\widehat{\bar r-\bar r,\bar n}\right).$$

Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{s}\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r^2}\cos\alpha+\frac{R}{\rho\, r_1^2}\cos\beta \text{ на } S. \qquad (14)$$

Здесь α – угол между векторами $\bar r-\bar r_0$ и $\bar n$, а β – между $\bar r-\bar r_1$ и $\bar n$ (рис. 2).

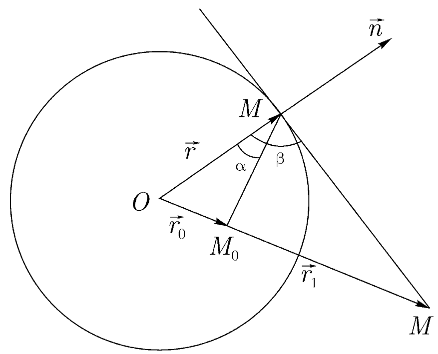

Рис. 2

Из треугольников OMM_0, OMM_1 имеем

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2R\,r\cos\alpha,$$

$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2R\,r_1\cos\beta.$$

Определяя отсюда $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ и подставляя их в (14), получим

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho r_1}\right) = \frac{\rho^2 - R^2 - r^2}{2Rr^3} + \frac{R^2 + r^2 - \rho_1^2}{2\rho r_1^3}$$

или, в силу (9), (10),

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho r_1}\right) = \frac{\rho^2 - R^2}{R r^3} \text{ на } S.$$

Подставляя в формулу (14), окончательно получим

$$u_2(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_S f(M)\frac{\left(R^2 - \rho^2\right)}{r^3}ds. \qquad (15)$$

Можно доказать, что если функция $f(M)$ непрерывна, то формула (15) дает решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Например гармоничность функции $u_2(M_0)$ следует из того, что при $\rho < R$ имеем

$$\Delta_0\frac{R^2}{r^2} = \Delta_0\frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{r^3} - \Delta\frac{1}{r} = -2R\Delta\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{2n} = -2R\frac{\partial}{\partial n}\Delta\frac{1}{r} = 0 \quad (M \in S).$$

Задачи

1. Построить функцию Грина для следующих областей в R^3:
   а) полупространства $z > 0$;
   б) двугранного угла $y > 0, z > 0$;
   в) октанта $x > 0, y > 0, z > 0$.
2. Построить функцию Грина для следующих областей в R^3:
   а) полушара $x_2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$;
   б) четверти шара $x_2 + y^2 + z^2 < R^2$, $y > 0$, $z > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле
   $$\Delta u = -f(x, y, z), \quad z > 0; \quad u|_{z=0} = u_0(x, y),$$
   для следующих f и u_0:
   а) $f = 0$, $u_0 = \cos x\cos y$;
   б) $f = e^{-z}\sin x\cos y$, $u_0 = 0$.
4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара
   $x_2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$.

Лекция 22. Задачи Дирихле и Неймана для полупространства

Мы встречались уже с постановкой двух основных задач теории уравнения Лапласа, а именно, с задачами Дирихле и Неймана.

Напомним, что задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в определении функции u в области Ω с границей S, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u = 0, \qquad M(x, y, z) \in \Omega, \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$u|_S = f_1(M). \qquad (2)$$

Задача Неймана состоит в отыскании решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2(M). \qquad (3)$$

§1. Теорема единственности решений задач Дирихле и Неймана

Пусть $\Omega -$полупространство $z > 0$; поверхность S является тогда плоскостью oxy.

Теорема 1. *Решение* $u(M)$ *задачи Дирихле* (1), (2) *единственно в классе ограниченных функций.*

Доказательство. Пусть задача (1), (2) имеет два решения u_1 и u_2. Тогда разность $\upsilon = u_1 - u_2$ будет гармонической функцией, обращающейся в нуль при $z = 0$. Определим υ для отрицательных значений z нечетным образом:

$$\upsilon(x, y, z) = -\upsilon(x, y, -z).$$

Докажем, что эта функция будет теперь гармонической во всем пространстве, включая и плоскость $z = 0$.

Построим сферу σ произвольного радиуса с центром на плоскости $z = 0$ и определим функцию υ_1, гармоническую внутри шара, ограниченного этой сферой, и принимающую на поверхности значения

$$\upsilon_1(M) = \upsilon(M), \qquad M \in \sigma. \tag{4}$$

Легко видеть, что υ_1 будет равна нулю при $z = 0$. В самом деле, функция

$$w_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\left[\upsilon_1(x, y, z) + \upsilon_1(x, y, -z)\right]$$

будет гармонической и примет на сфере σ значения нуль, следовательно, $w_1(x, y, 0) = 0$. Но

$$w_1(x, y, 0) = \upsilon_1(x, y, 0).$$

Плоскость $z = 0$ рассечет наш шар на два полушара. Функция υ_1 на границе каждого из них совпадает с υ; на поверхности σ это следует из (4), а на части плоскости $z = 0$ обе эти функции равны нулю. Следовательно, $\upsilon = \upsilon_1$, и, значит, функция υ имеет все производные всюду внутри шара и гармонична в нем. Так как положение центра шара произвольно, то υ будет гармонической во всем пространстве. Теперь согласно теоремы Лиувилля

она тождественно равна некоторой постоянной. Эта постоянная может быть только нулем, так как $\upsilon = 0$ при $z = 0$.

Теорема 2. *Решение* $u(M)$ *задачи Неймана* (1), (3) *стремящееся к нулю, когда точка* $M(x, y, z)$ *стремится к бесконечности единственно.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем оценку

$$|u(x, y, z)| < \varepsilon, \qquad \text{если} \qquad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R(\varepsilon) \tag{5}$$

$\left(R(\varepsilon) \to \infty, \text{ при } \varepsilon \to 0\right)$. Далее пусть u_1 и u_2 – два решения задачи Неймана. Тогда функция $\upsilon = u_1 - u_2$ удовлетворяет условию:

$$\Delta\upsilon = 0 \quad \text{при } z > 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0.$$

Определим для отрицательных z функцию υ с помощью формулы

$$\upsilon(x, y, z) = \upsilon(x, y, -z).$$

Докажем, что функция υ будет гармонической всюду, включая плоскость $z = 0$.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = w(x, y, z).$$

Это будет функция, гармоническая в верхнем и в нижнем полупространстве, удовлетворяющая условиям

$$w(x, y, z) = -w(x, y, -z), \qquad w(x, y, 0) = 0,$$

и, следовательно, как мы только что доказали, гармоническая во всем пространстве.

При этом функция

$$\omega(x, y, z) = \int_z^{z+1} w(x, y, \xi)\, d\xi = \upsilon(x, y, z + 1) - \upsilon(x, y, z)$$

также будет гармонической во всем пространстве. Это легко проверить непосредственным дифференцированием.

Отсюда следует, что функция $\upsilon(x,y,z)-$ также гармоническая во всем пространстве. В самом деле, она могла бы не быть гармонической только на плоскости $z=0$. Но

$$\upsilon(x,y,z)=\upsilon(x,y,z+1)+\omega(x,y,z). \qquad (6)$$

Правая часть (6) гармонична на этой плоскости, следовательно, гармонична и левая.

Ввиду ограниченности υ во всем пространстве по теореме Лиувилля имеем

$$\upsilon=\mathrm{const}.$$

Следовательно, решение задачи Неймана единственно с точностью до постоянного слагаемого в классе ограниченных решений.

При выполнении условия (5), очевидно, что $\upsilon=0$.

Теорема доказана.

§2. Построение решений задач Дирихле и Неймана

Предположим, что рассматриваемая нами гармоническая функция удовлетворяет условиям

$$|u(x,y,z)|\le\frac{A}{R^{\alpha}},\quad \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\right|\le\frac{A}{R^{1+\alpha}},\quad \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\right|\le\frac{A}{R^{1+\alpha}},$$
$$\left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|\le\frac{A}{R^{1+\alpha}}, \qquad (7)$$

где $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\alpha>0$, а $A-$ постоянная.

После того как явное решение задач будет нами получено, надобность в этом предположении отпадет.

Применим к функции u интегральную формулу Грина, выбрав за объем Ω полушар с центром в начале координат

$$R<B,\qquad z>0.$$

Так как $\Delta u=0$, то

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds, \qquad (8)$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Поверхность S состоит из куска S_1 плоскости $z=0$ и из поверхности S_2 полусферы $R=B$, поэтому формулу (8) можно переписать так

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds+\frac{1}{4\pi}\iint_{S_2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds. \qquad (9)$$

Оценим второй интеграл правой части (9). Имеем в силу (7)

$$\left|\iint_{S_2}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds\right|\le\frac{1}{(B-R_0)^2}\iint_{S_2}|u|\,ds\le\frac{2\pi AB^2}{(B-R_0)^2B^{\alpha}},$$

$$\left|\iint_{S_2}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}ds\right|\le\frac{1}{(B-R_0)^2}\iint_{S_2}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|ds\le\frac{2\pi AB^2}{(B-R_0)B^{1+\alpha}},$$

где $R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. Таким образом

$$\lim_{B\to\infty}\iint_{S_2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds=0.$$

Поэтому

$$u(x_0,y_0,z_0)=\lim_{B\to\infty}\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint_{z=0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds \qquad (10)$$

Рассмотрим вместе с $M_0(x_0, y_0, z_0)$ еще точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, и пусть $r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$. В верхней полуплоскости $\frac{1}{r_1}$ – гармоническая функция, так же как и u. Поэтому

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{r_1}\Delta u - u\,\Delta\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]d\Omega = 0$$

и, следовательно, согласно второй формуле Грина имеем

$$\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]ds = \iint\limits_{S_1}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]ds +$$

$$+\iint\limits_{S_2}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]ds = 0.$$

Переходя к пределу, когда B стремится к бесконечности, и пользуясь теми же оценками, что и при выводе формулы (10), получим

$$\iint\limits_{z=0}\left[\frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]ds = 0.$$

Заметим теперь, что не плоскости $z = 0$ имеют место равенства $r_1 = r$, $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ (радиус-векторы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}$ симметричны относительно плоскости $z = 0$), откуда

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{z=0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds = 0.$$

Складывая (10) и (11), получаем

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}\frac{1}{r}f_2(M)\,ds. \qquad (12)$$

Вычитывая (11) из (6), будем иметь

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}f_1(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds. \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) перепишем, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$, следующим образом

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} \qquad (12')$$

и

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0 f_1(x,y)\,dx\,dy}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right]^{3/2}}. \qquad (13')$$

Можно показать, что если $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|\,f_1(x,y)| \le A, \qquad |\,f_2(x,y)| \le \frac{A}{\rho^{1+\alpha}},$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha > 0$, а A – постоянная, то формулы (12′) и (13′) дают решения задач Неймана и Дирихле, при этом интеграл (13′) представляет собой ограниченную функцию, а интеграл (12′) функцию $u(x_0, y_0, z_0)$, обращаются в нуль на бесконечности.

Лекция 23. Свойства потенциалов объема, простого и двойного слоя

Чтобы рассмотреть задачи Дирихле и Неймана кроме шара и полупространства еще и для областей, мы должны рассмотреть в отдельности интегралы

$$I_1 = \iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(M)}{r}d\Omega, \quad I_2 = -\iint\limits_{S}f_1(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS, \quad I_3 = \iint\limits_{S}\frac{f_2(M)}{r}dS,$$

которые встречались нам уже неоднократно. Как мы упоминали раньше, интеграл I_1 называется потенциалом объема, а функция $\rho(M)$ – его плотностью; интеграл I_2 называется потенциалом второго слоя, а $f_1(M)$ – его плотностью; интеграл I_3 называется потенциалом простого слоя, а $f_2(M)$ – его плотностью.

§1. Потенциал объема

Рассмотрим потенциал объема

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(M)}{r} d\Omega \qquad \left(r = |M_0 M|\right), \tag{1}$$

где Ω – конечная область. Предположим, что плотность $\rho(M)$ ограничена и интегрируема в Ω. Интеграл (1) является собственным, если точка M_0 лежит вне $\Omega(r \neq 0)$. В этом случае функция $u(M_0)$ непрерывна и имеет частные производные всех порядков. Эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, и $u(M_0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ вне области Ω. Покажем, что при стремлении точки M_0 в бесконечность по любому направлению функция $u(M_0)$ стремится к нулю, так что

$$|u(M_0)| < \frac{A}{R}, \quad A = \text{const}$$

где $R = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2}$.

Пусть начало координат принадлежит области Ω. Тогда

$$|M_0 M| \geq |OM_0| - |OM|$$

или

$$r \geq R - |OM|.$$

Обозначим через d – диаметр области Ω. Тогда

$$r \geq R - d.$$

Будем считать, что точка M_0 настолько удалена от начала координат, что $R > 2d$, т.е. $d < R/2$, тогда $r > R/2$ или $1/r < \frac{2}{R}$. Теперь

$$|\upsilon(M_0)| \leq \iiint\limits_{\Omega} |\rho(M)| \frac{d\Omega}{r} < \frac{2}{R} \iiint\limits_{\Omega} |\rho(M)| d\Omega = \frac{A}{R},$$

где

$$A = 2 \iiint\limits_{\Omega} |\rho(M)| d\Omega.$$

Таким образом, потенциал объема $u(M_0)$ есть гармоническая функция вне области Ω.

Пусть теперь точка M_0 лежит внутри области Ω. Тогда интеграл (1) будет несобственным. В силу ограниченности плотности $\rho(M)$ интеграл (1) сходится так, как

$$\frac{|\rho(M)|}{r} < \frac{C}{r}.$$

Кроме того, можно показать, что потенциал $u(M_0)$ и его производные первого порядка непрерывны во всем пространстве и эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.

Для существования производных второго порядков требуется наложить на плотность потенциала $\rho(M)$ дополнительные ограничения. А именно, справедливо утверждение:

Теорема 1. *Если плотность $\rho(M)$ непрерывна в замкнутой области Ω и имеет непрерывные производные второго порядка внутри Ω, то потенциал объема* (1) *имеет непрерывные производные второго порядка внутри Ω и удовлетворяет внутри Ω уравнению Пуассона*

$$\Delta u(M_0) = -4\pi\rho(M_0).$$

Итак, если $f(M) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, то уравнение Пуассона

$$\Delta u(M_0) + f(M_0) = 0$$

имеет частные решение

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{f(M)}{|M_0 M|} d\Omega.$$

§2. Поверхности Лапунова

Для возможного строгого установления свойств потенциалов простого и двойного слоя необходимо подчинить ряду требований те поверхности, на которых расположены эти слои.

Будем называть замкнутую поверхность S поверхностью Ляпунова, если выполнены следующие три условия:

1. Поверхность S имеет везде касательную плоскость.
2. Вокруг каждой точки M_0 поверхности можно описать такой шар радиуса h, не зависящего от M_0, внутрь которого попадет лишь участок Σ поверхности S, встречающий прямые, параллельные нормам $\bar{n}_0$ в точке M_0, не более чем один раз.
3. Если θ – острый угол, образованный нормалями к S в двух ее точках M_1 и M_2, и r – расстояние между этими двумя точками, то имеет место неравенство

$$\theta \le a r^{\alpha},$$

где a и α – постоянные числа, причем $0<\alpha\le 1$.

Условие 1 дает возможность в точке M поверхности Ляпунова построить местную прямоугольную систему координат XYZ, беря точку M за начало координат, касательную плоскость в точке M за плоскость XY и нормаль поверхности в точке M за ось OZ. Условие 2 показывает что в этой местной системе координат уравнение части поверхности S, заключенной внутри сферы C с центром в точке M и радиусом h, может быть представлено в виде, разрешенном относительно Z:

$$Z=f(x,y).$$

Из условия 3 следует, что частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ являются непрерывными функциями x и y.

§3. Потенциал двойного слоя

Рассмотрим потенциал двойного слоя непрерывной плотности $f_1(M)$, заданной на поверхности Ляпунова

$$\omega(x_0,y_0,z_0)=-\iint_S f_1(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \qquad (2)$$

Потенциал двойного слоя имеет везде вне S производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласса. Покажем, что потенциал двойного слоя стремится к нулю на бесконечности. Возьмем начало координат внутри области Ω, ограниченной поверхностью S. Тогда

$$|M_0M|\ge|OM_0|-|OM|$$

или

$$r\ge R-|OM|.$$

Обозначим через L наибольшее расстояние точек поверхности от начала координат. Тогда

$$r\ge R-L.$$

Будем считать, что точка M_0 настолько удалена от начала координат, что $R>2L$, т.е. $L<R/2$, тогда $r>R/2$ или $1/r<\dfrac{2}{R}$. Далее обозначим через φ угол, образованный векторами $\bar{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где $\bar{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S в точке M. Тогда формулу (2) можно представить так

$$\omega\left(x_0,y_0,z_0\right)=\iint_S f_1(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS.$$

Теперь

$$\left|\omega\left(M_0\right)\right|\le\iint_S\left|f_1(M)\right|\cdot\frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS<\frac{4}{R^2}\iint_S\left|f_1(M)\right|dS=\frac{A}{R^2},$$

где

$$A=4\iint\le\iint_S\left|f_1(M)\right|dS.$$

Следовательно, потенциал двойного слоя стремится к нулю на бесконечности как $\frac{1}{R^2}$.

Далее мы приводим свойства двойного слоя, не останавливаясь на их доказательстве.

Пусть теперь точка M_0 лежит на поверхности S. Тогда $r=|M_0M|$ обращается в нуль при совпадении точек M_0 и M и интеграл (2) является несобственным. Можно показать, что он сходится. Таким образом, потенциал двойного слоя (2) определен во всем пространстве.

Если точка M_0 лежит на поверхности S, то значение интеграла (2) в этой точке называют прямым значением потенциала двойного слоя. Пусть теперь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ находится вне поверхности S и пусть точка M_0 приближается к точке $N_0 \in S$. Если при этом приближении оказывается, что потенциал двойного слоя $\omega(M_0)$ стремится к некоторому конечному пределу, то мы будем говорить, что потенциал двойного слоя принимает в точке N_0 предельное значение. Предельные и прямые значения потенциала двойного слоя, вообще говоря, не совпадают. Оказывается, что предельные значения потенциала двойного слоя $\omega(M_0)$ различны в зависимости от того, извне или изнутри стремится точка M_0 к поверхности S, и эти предельные значения не совпадают с прямыми значениями, а именно, справедливо утверждение:

Теорема 2. *Потенциал двойного слоя $\omega(M_0)$ имеет пределы при стремлении точки M_0 к точке N_0 поверхности S извне или изнутри.*

Если пределы значений $\omega(M_0)$ извне обозначить через $\omega_e(N_0)$, а предел изнутри – через $\omega_i(N_0)$, то имеют место формулы

$$\omega_e(N_0)=\omega(N_0)-2\pi f_1(N_0),$$
$$\omega_i(N_0)=\omega(N_0)+2\pi f_1(N_0).$$

Итак, потенциал двойного слоя $\omega(M_0)$ есть разрывная функция, которая претерпевает разрыв непрерывности при переходе через поверхность.

§4. Потенциал простого слоя

Рассмотрим потенциал простого слоя непрерывной плотности $f_2(M)$, заданной на поверхности Ляпунова S:

$$\sigma(M_0)=\iint_S \frac{f_2(M)}{r}dS. \qquad (3)$$

Во всех точках $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пространства, не принадлежащих поверхности S, потенциал простого слоя имеет производные любого порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа. Совершенно так же, как в §3, можно показать, что потенциал простого слоя стремится к нулю на бесконечности, как $\frac{1}{R}$, где $R=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

Можно доказать, что потенциал простого слоя с непрерывной плотностью есть функция, непрерывная во всем пространстве.

Рассмотрим нормальную производную петенциала простого слоя. Выберем произвольную точку N_0 на поверхности S и обозначим через $\overline{n}_0$ направление внешней нормали в этой точке. Производная по направлению $\overline{n}_0$ в точке M_0, не лежащей на поверхности, будет

$$\frac{\partial\sigma(M_0)}{\partial n_0}=\iint_S f_2(M)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \qquad (4)$$

Оказывается, что интеграл (4) сохраняет смысл также в том случае, если точка M_0 совпадет с точкой N_0 на поверхности, и является непрерывной функцией точки N_0 на этой поверхности.

Обозначим через

$$\left[\frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0}\right]_i \quad \text{и} \quad \left[\frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0}\right]_e$$

соответственно предельные значения нормальной производной при приближении точки M_0 к точке N_0 по нормали изнутри S и извне S. Имеет место предложение:

Теорема 3. *При непрерывной функции f_2 справедливы формулы:*

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0}\right]_i &= \frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0} + 2\pi f_2(N_0), \\ \left[\frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0}\right]_e &= \frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0} - 2\pi f_2(N_0). \end{aligned} \tag{5}$$

Из формулы (5) непосредственно следует величина скачка нормальной функции производной потенциала простого слоя

$$\left[\frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0}\right]_i - \left[\frac{\partial\sigma(N_0)}{\partial n_0}\right]_e = 4\pi f_2(N_0).$$

Лекция 24. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям

§ 1. Постановка задач и единственность их решений

Пусть S – замкнутая достаточно гладкая поверхность. Обозначим через Ω_1 ограниченную этой поверхностью, а через Ω_2 – бесконечную область, внешнюю по отношению к S, также ограниченную поверхность s.

Рассмотрим четыре задачи:

1. Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию u, гармоническую в Ω_1, при условии

$$u = f_1(M), \quad M \in S.$$

2. Внешняя задача Дирихле. Найти функцию u, гармоническую в Ω_2, при условиях:

а) $u = f_1(M), \quad M \in S$,

б) $\lim\limits_{R\to\infty} u = 0, \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. Внутренняя задача Неймана. Найти функцию u, гармоническую в Ω_1, при условии

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2(M), \quad M \in S.$$

4. Внешняя задача Неймана. Найти функцию, гармоническую в Ω_2, при условиях:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f_2(M), \quad M \in S$

б) $\lim\limits_{R\to\infty} u = 0.$

Прежде чем намечать пути решения этих задач, займемся их исследованием.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно.*

Доказательство. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Дирихле. Предположим, что существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ одной и той же задачи Дирихле. Тогда их разность

$$u(M) = u_1(M) - u_2(M)$$

будет гармонической функцией, равной нулю на S. Отсюда из принципа максимума следует, что $u(M) \equiv 0$, т.е. $u_1(M) = u_2(M)$ во всей области Ω_1, так как в противном случае она должна была бы достигать внутри области Ω_1 положительного наибольшего значения или отрицательного наименьшего значения, что невозможно.

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Дирихле. Как и выше, предположим, что существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Тогда их разность $u(M)=u_1(M)-u_2(M)$ будет гармонической функцией, равной нулю на S и $u(M)\to 0$ при $M\to\infty$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое A, что $|u(M)|<\varepsilon$ при $R\ge\mathrm{A}$. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка бесконечной области Ω_2. Проведем сферу S_{R_0} с центром в начале координат и радиусом $R_0\ge\mathrm{A}$ столь большим, чтобы точка M и поверхность S лежали внутри этой сферы. Тогда $|u(M)|<\varepsilon$, что следует из теоремы о максимуме и минимуме, примененной к конечной области, заключенной между S и S_{R_0}. В силу произвольности $\varepsilon>0$ заключаем, что $u(M)=0$, а так как M – любая точка области Ω_2, то $u\equiv 0$ в Ω_2, т.е. $u_1=u_2$.

Теорема 2. *Решение внешней задачи Неймана, имеющее непрерывные вплоть до границы производные первого порядка, единственно, решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Неймана. Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – два решения задачи Неймана в области Ω_1 с границей S, удовлетворяющие одному и тому же граничному условию

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}=f_2(M),\quad \frac{\partial u_2}{\partial n}=f_2(M),\quad M\in S.$$

Тогда их разность $u=u_1-u_2$ будет гармонической функцией внутри области Ω_1, для которой $\dfrac{\partial u(M)}{\partial n}=0$ при $M\in S$.

Воспользуемся первой формулой Грина для гармонических функций

$$\iiint_{\Omega_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega=\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

Правая часть равна нулю, значит, и левая часть равна нулю. Тогда в силу непрерывности функции $u(M)$ и ее первых производных следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

т.е. $u(M)=u_1(M)-u_2(M)=\text{const}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что внутренняя задача Неймана не всегда разрешима. Для ее разрешимости необходимо, чтобы

$$\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_S f_2(M)ds=0.$$

Необходимость вытекает из свойства гармонических функций. Для рассмотрения внешней задачи возьмем сферу S_{R_0} радиуса R_0, где R_0 – достаточно большое число, и пусть Ω_3 – объем, заключенный между S и S_{R_0}. Далее пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – два решения внешней задачи Неймана, удовлетворяющие одному и тому же граничному условию. Тогда их разность есть гармоническая функция в бесконечной области, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad M\in S,\quad |u(M)|\le\frac{\mathrm{A}}{R},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\le\frac{\mathrm{A}}{R^2}. \tag{1}$$

Теперь, применяя формулу Грина для гармонических функций к области Ω_3, получим

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}ds+\iint_{S_{R_0}}u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iiint_{\Omega_3}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega$$

или, в силу (1),

$$\iiint_{\Omega_3}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega=\iint_{S_{R_0}}u\frac{\partial u}{\partial n}ds. \tag{2}$$

В силу оценок (1) имеем

$$\left|\iint_{S_{R_0}}u\frac{\partial}{}\right|\left|\iint_{S_{R_0}}u\frac{\partial u}{\partial n}ds\right|\le\frac{4\pi\mathrm{A}^2}{R_0}.$$

Тогда из (2) получаем, что при достаточно большом R_0 имеем

$$\iiint\limits_{\Omega_3}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega<\varepsilon$$

при любом $\varepsilon>0$, что возможно лишь при условии

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Значить, $u=\mathrm{const}$; так как $u(M)\to 0$ при $M\to\infty$, то $u(M)=0$, т.е. $u_1(M)=u_2(M)$.

§2. Интегральные уравнения для краевых задач

Полученные нами в предыдущей лекции свойства потенциалов позволяют решать задачи Дирихле и Неймана для любых областей, ограниченных достаточно гладкими поверхностями, приведением их к интегральным уравнениям.

Рассмотрим решение внутренней задачи Дирихле. Будем предполагать, что искомая функция и есть потенциал двойного слоя w с неизвестной пока плотностью $\mu(M)$:

$$u(x_0,y_0,z_0)=w(x_0,y_0,z_0)=-\iint\limits_S\mu(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

Как известно, потенциал двойного слоя есть гармоническая функция. Мы должны подчинить w тому условию, чтобы ее предельное значение изнутри равнялось $f_1(N_0)$:

$$w_i(N_0)=f_1(N_0),\quad N_0\in S.$$

Из теоремы 2 лекции 23 имеем

$$w_i=2\pi\mu(N_0)+w(N_0).$$

Таким образом, для неизвестной плотности $\mu(M)$ получим уравнение

$$f_1(N_0)=2\pi\mu(N_0)-\iint\limits_S\mu(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

Здесь r – расстояние между точками M и N_0 поверхности S.

Полагая $F_1(N_0)=\dfrac{1}{2\pi}f_1(N_0)$, $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{r}\right)=\mathrm{K}(M,N_0)$, приходим к уравнению

$$\mu(N_0)=F_1(N_0)+\iint\limits_S\mathrm{K}(M,N_0)\mu(M)ds. \qquad (3)$$

Интегральное уравнение (3) называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода. К изучению таких уравнений мы вскоре перейдем.

Так же точно можно свести и задачу Дирихле для внешней области, ограниченной поверхностью S, т.е. для бесконечной области, границей которой служит S, опять к уравнению Фредгольма второго рода.

В самом деле, отыскивая решение снова в виде потенциала двойного слоя из условия $w_e(N_0)=f_1(N_0)$, $N_0\in S$, получим (см. теорему 2 лекции 23), аналогично прежнему, для неизвестной плотности $\mu(M)$

$$w_e(N_0)=-2\pi\mu(N_0)+w(N_0).$$

Откуда

$$\mu(N_0)=-\frac{f_1(N_0)}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\mu(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds;$$

вводя обозначение $-\dfrac{f_1(N_0)}{2\pi}=\Phi_1(N_0)$, получим

$$\mu(N_0)=\Phi_1(N_0)=\iint\limits_S\mathrm{K}(M,N_0)\mu(N_0)ds. \qquad (4)$$

Это уравнение есть уравнение того же типа и рода, что и предыдущее.

К интегральным уравнениям приводятся также внутренняя и внешняя задачи Неймана.

Будем искать решение внутренней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя

$$u(x_0,y_0,v_0)=v(x_0,y_0,z_0)=\iint\limits_S\frac{\mu(M)}{r}ds.$$

Как и выше, из формулы (5) (см. лекцию 23) имеем

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n_0}\right]_i=\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0}+2\pi\mu(N_0)=f_2(N_0),$$

откуда

$$\mu(N_0)=\frac{1}{2\pi}f_2(N_0)-\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(M)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

Полагая $\frac{1}{2\pi}f_2(N_0)=F_2(N_0)$, получим для $\mu(M)$ уравнение

$$\mu(N_0)=F_2(N_0)-\iint_S \mu(M)\mathrm{K}(M,N_0)ds. \qquad (5)$$

Наконец, если искать решение внешней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя v, будем иметь согласно формулы (5) лекции 23 соотношение

$$\left[\frac{\partial v(N_o)}{\partial n_0}\right]_e=\frac{\partial v(N_0)}{\partial n_0}-2\pi\mu(N_0)=f_2(N_0)$$

или

$$\mu(N_0)=-\frac{1}{2\pi}f_2(N_0)+\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(M)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

Полагая

$$-\frac{1}{2\pi}f_2(N_0)=\Phi_2(N_0),$$

получим для неизвестной плотности $\mu(N_0)$ уравнение

$$\mu(N_0)=\Phi_2(N_0)+\iint_S \mathrm{K}(M,N_0)\mu(M)ds. \qquad (6)$$

Если нам удастся найти такие функции $\mu(M)$, удовлетворяющие уравнениям (3) – (6), то соответствующие задачи математической физики будут решены.

Лекция 25. Уравнения Лапласа и Пуассона на плоскости

Мы разобрали довольно подробно уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве. На практике часто бывает, что функция u не зависти от одного

из переменных, например z. Тогда уравнения переходят в уравнения с двумя независимыми переменными. Те же самые задачи, которые мы ставили для пространства, мы можем теперь ставить на плоскости oxy для уравнения

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\rho(x,y).$$

Рассмотрим некоторые свойства таких двумерных задач, отличающие их от трехмерного случая.

Совершенно так же, как и в пространстве, легко доказать, что функция, гармоническая в некоторой области D плоскости oxy, достигает своего максимального и минимального значений на контуре этой области. Отсюда следует единственность решения задачи Дирихле для любой ограниченной области. Однако задача Дирихле для неограниченной области в прежней постановке смысла не имеет. Ставить вопрос об отыскании гармонической функции, равной нулю на бесконечности, здесь не имеет смысла. Дело в том, что решения, обращающегося в нуль на бесконечности, вообще говоря, не существует, и вопрос о единственности такого решения лишен содержания.

Нетрудно проверить, что функция

$$\ln\frac{1}{r},\quad r=|MM_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

есть гармоническая функция переменных x и y.

В самом деле,

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^2}+\frac{2\,(x-x_0)^2}{r^4},$$

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^2}+\frac{2\,(y-y_0)^2}{r^4},$$

откуда

$$\Delta\ln\frac{1}{r}=0.$$

Приведем аналог интегрируемой формулы Грина в пространстве для плоскости. Пусть $D-$ некоторая область на плоскости oxy, ограниченная контуром C, а $n-$ направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области D. Проводя рассуждения, подобные тем, которые были проведены для трехмерного случая, получим основную интегральную формулу Грина на плоскости

$$\Omega\, u(M_0)=\int_C\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]dl-\iint_D\Delta u(M)\ln\frac{1}{r}\,dx\,dy,$$

где

$$\Omega=\begin{cases}2\pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит внутри } D,\\ \pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит на границе } C,\\ 0, & \text{если } M_0 \text{ лежит вне } D.\end{cases}$$

Если $u(M)-$ гармоническая внутри D функция и M_0 лежит внутри D, то

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\ln\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]dl.$$

§1. Основные задачи

Задача о нахождении решения уравнения Пуассона

$$\Delta u=\rho(x,y)$$

на всей плоскости, обращающегося в нуль на бесконечности, для уравнения с двумя переменными, вообще говоря, неразрешима. Заметим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\ln\frac{1}{r}\,dx\,dy,$$

если ρ отлично от нуля лишь в конечной области, есть все же частные решения уравнения Пуассона, но, вообще говоря, неограниченно растущие на бесконечности.

Задача Дирихле для полуплоскости при некоторых ограничениях на граничную функцию имеет решение в классе функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Пусть функция $f_1(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f_1(x)|<\frac{A}{|x^\alpha|},\qquad \text{где}\quad \alpha>0.$$

Решение уравнения

$$\Delta u=0$$

при условии

$$u=f_1(x)\quad \text{при}\quad y=0,$$

обращающееся в нуль на бесконечности, имеет вид

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial n}\,dx.$$

Задача Неймана для полуплоскости не только равных нулю на бесконечности, но даже и просто ограниченных решений не имеет.

Задача Дирихле для круга решается приемом, аналогичным прежнему. Так решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u=0,\qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}<a,$$

$$u|_{R=a}=f(\varphi)$$

дается формулой

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\frac{(a^2-\rho^2)}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}\,d\psi, \tag{1}$$

в том случае когда функция $f(\varphi)$ является непрерывной.

Формула (1) называется интегралом Пуассона.

Решение внешней краевой задачи, очевидно, имеет вид

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\pi}f(\psi)\frac{(\rho^2-a^2)}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}\,d\psi$$

при $\rho>a$ и $u(\rho,\varphi)=f(\varphi)$ при $\rho=a$.

§2. Логарифмический потенциал

На функции двух переменных можно перенести также понятие о потенциалах.

Интеграл вида

$$\upsilon = \int_C \mu(M) \ln\frac{1}{r} dl$$

называется логарифмическим потенциалом простого слоя. Это гармоническая функция вне и внутри области D, ограниченной контуром C. Функция эта непрерывна при переходе через C, а ее нормальная производная терпит разрыв.

Обозначим через n_0 внешнюю нормаль к контуру C в точке N_0. Если $M_0 \overline{\in} C$, то ясно, что существует производная $\dfrac{\partial \upsilon(M_0)}{\partial n_0}$ и

$$\frac{\partial \upsilon(M_0)}{\partial n_0} = \int_C \mu(M) \frac{\partial}{\partial n_0}\left(ln\frac{1}{r}\right) dl. \tag{2}$$

Оказывается, что интеграл (2) имеет смысл в случае, если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на границе C. Обозначим через $\left[\dfrac{\partial \upsilon}{\partial n_0}\right]_i$ $\left(\left[\dfrac{\partial \upsilon}{\partial n_0}\right]_e\right)$ предел интеграла (2) при стремлении точки M_0 в направлении нормали n_0 к точке $N_0 \in C$ изнутри (извне) области D. Тогда справедливы формулы

$$\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial n_0}\right]_i = \pi\mu(N_0) + \frac{\partial \upsilon(N_0)}{\partial n_0}, \qquad \left[\frac{\partial \upsilon}{\partial n_0}\right]_e = -\pi\mu(N_0) + \frac{\partial \upsilon(N_0)}{\partial n_0}.$$

Интеграл вида

$$\omega(M_0) = -\int_C \mu(M) \frac{\partial}{\partial n}\left(ln\frac{1}{r}\right) dl \tag{3}$$

называется логарифмическим потенциалом двойного слоя. Это гармоническая функция как внутри, так и вне области D, ограниченной контуром C. На контуре C эта функция терпит разрыв.

Если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на контуре $(M_0 = N_0)$, который мы предполагаем достаточно гладким, то интеграл (3) имеет смысл. Обозначим через $\omega_i(N_0)$ и $\omega_e(N_0)$ пределы интеграла (3), когда точка M_0 стремится к точке N_0 на контуре C изнутри и извне области D соответственно. Можно показать, что имеют место соотношения

$$\omega_e(N_0) = -\pi\mu(N_0) + \omega(N_0), \qquad \omega_i(N_0) = \pi\mu(N_0) + \omega(N_0).$$

Аналогично пространственному случаю можно поставить задачу Дирихле и Неймана также и для плоскости. При этом, однако, будут некоторые особенности во внешних задачах.

Во внешней задаче Дирихле вместо обращения u в нуль на бесконечности нужно требовать ограниченности этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом задача Дирихле получает определенное и единственное решение.

Во внешней задаче Неймана нужно по-прежнему искать решение, равное нулю на бесконечности, но в отличие от прежнего эта задача уже не будет, вообще говоря, иметь решения.

Необходимое и достаточное условие существования такого решения будет

$$\int_C f_2(M) dl = 0,$$

где $f_2(M)$ – значения нормальной производной на контуре.

Можно аналогично, как и в предыдущей лекции, свести задачи Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.

Для плоской задачи интегрирования уравнения Лапласа существует еще один чрезвычайно мощный метод, основанный на применении теории функций комплексного переменного. Мы укажем лишь сущность этого метода, не останавливаясь на нем подробно.

Рассмотрим какую-либо аналитическую функцию $\omega(z)=u+i\upsilon$ комплексного переменного $z=x+iy$. Считая независимыми переменными x и y и применяя оператор Лапласа к ω, получим

$$\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\omega''(z)+i^2\omega''(z)=0.$$

Отсюда следует, что функция $\omega(z)$ является гармонической функцией переменных x и y. Следовательно, ее действительная и мнимая части $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ порознь будут гармоническими в области аналитичности $\omega(z)$.

Введем новое независимое комплексное переменное $\varsigma=\xi+i\eta$, положив

$$z=\psi(\varsigma),$$

где ψ – какая-нибудь аналитическая функция. Тогда

$$x=x(\xi,\eta), \qquad y=y(\xi,\eta).$$

При этом аналитическая функция $\omega(z)$ перейдет в аналитическую функцию переменного ς:

$$\omega^*(\varsigma)=\omega(\psi(\varsigma)).$$

Следовательно,

$$u^*(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)), \qquad \upsilon^*(\xi,\eta)=\upsilon(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

будут снова гармоническими функциями переменных ξ, η.

Как доказывается в курсах теории функций комплексного переменного, формулы (4) осуществляют конформное отображение плоскости x, y на плоскость ξ, η, причем любое конформное отображение может быть получено таким образом. Итак, гармоническая функция переменных x, y в некоторой области остается гармонической, если эту область подвергнуть конформному преобразованию.

Для любой односвязной области D плоскости x, y получаем следующий метод решения задачи Дирихле. Найдем конформное отображение (4), переводящее область D в круг. Как известно, такое отображение существует.

Функция $u^*(\xi,\eta)$ должна быть гармонической в круге функцией, принимающей на границе заданные значения. Такую функцию можно построить при помощи формулы Пуассона, возвращаясь к переменным x, y, получим решение рассматриваемой задачи.

Задачи

1. Найти логарифмический потенциал круга с постоянной плотностью.
2. Найти логарифмический потенциал простого слоя отрезка с постоянной плотностью зарядов.
3. Найти логарифмический потенциал двойного слоя отрезка с постоянной плотностью моментов.
4. С помощью потенциала двойного слоя решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа:

   а) вне круга;

   б) в полуплоскости.

V. Интегральные уравнения

Лекция 26. Уравнения Фредгольма и Вольтерра

Мы уже видели в прошлых лекциях, что решения некоторых задач математической физики приводятся к решению линейных интегральных уравнений. Ниже мы изложим начальные сведения о таких уравнениях. Для простоты записи будем рассматривать одномерный случай. Все результаты верны и для многомерного.

§1. Классификация интегральных уравнений

Уравнение вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,d\,s=f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция, $f(x)$, $K(x,s)$ – известные функции, λ – числовой параметр, называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Если $f(x)\equiv 0$, уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным. Функция $K(x,s)$ называется ядром интегрального уравнения.

Уравнение вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,d\,s=f(x), \tag{2}$$

называется интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Уравнение (2) является частным видом уравнений Фредгольма (1). Действительно, если положить

$$K_1(x,s)=\begin{cases}0, & x<s<b,\\ K(x,s), & a<s<x,\end{cases}$$

то уравнение Вольтерра (2) можно записать как уравнение Фредгольма с ядром $K_1(x,s)$

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K_1(x,s)\varphi(s)\,d\,s=f(x).$$

Ядра $K_1(x,s)$ указанного вида иногда называется ядрами Вольтерра.

Уравнения вида

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,d\,s=f(x)$$

называются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, а уравнения

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,d\,s=f(x)$$

называются уравнениями Вольтерра первого рода.

Заметим, что параметр λ и функции $\varphi(x)$, $K(x,s)$ и $f(x)$ могут принимать как действительные, так и комплексные значения.

Характер интегрального уравнения в существенном определяется свойствами его ядра. В приложениях часто приходится иметь дело с непрерывным ядром, но встречаются и разрывные ядра.

§2. Метод последовательных приближений. Понятие о резольвенте

Мы докажем существование решения уравнения (1) (при достаточно малых значениях $|\lambda|$) методом последовательных приближений.

Для простоты выкладок будем предполагать, что:

1) ядро $K(x,s)$ непрерывно в квадрате $a \le x, s \le b$; тогда оно ограничено некоторой константой A, $|K| \le A$;
2) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, следовательно, она ограничена на этом отрезке некоторой константой B, $|f| \le B$. Построим последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ \ldots, \varphi_n(x), \ \ldots$$

по следующему правилу:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)\,ds, \tag{3}$$

где $\varphi_0(s)$ – произвольная фиксированная непрерывная функция,

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)\,ds, \tag{4}$$

. . . .

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)\,ds, \tag{5}$$

. . . .

Теорема 1. *Последовательность* (3) – (5) *функций* $\varphi_n(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $[a,b]$ *к функции* $\varphi(x)$*, являющейся решением уравнения* (1) *при* $\lambda < \dfrac{1}{A(b-a)}$.

Доказательство. Преобразуем формулы для получения функций $\varphi_n(x)$. Подставляя функцию $\varphi_1(x)$ в формулу для $\varphi_2(x)$, получим

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b K(x,s) \int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)\,dt\,ds.$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получим

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s) f(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,s)\varphi_0(s)\,ds,$$

где

$$K_1(x,s) = K(x,s), \qquad K_2(x,s) = \int_a^b K_1(x,t) K_1(t,s)\,dt.$$

Аналогично находим

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s) f(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,s) f(s)\,ds + \cdots,$$

$$\cdots + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{n-1}(x,s) f(s)\,ds + \lambda^n \int_a^b K_n(x,s)\varphi_0(s)\,ds,$$

где

$$K_n(x,s) = \int_a^b K_1(x,t) K_{n-1}(t,s)\,dt.$$

Предел функции $\varphi_n(x)$, если он существует, равен сумме ряда

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s) f(s)\,ds + \cdots + \lambda^n \int_a^b K_n(x,s) f(s)\,ds + \cdots. \tag{6}$$

Докажем равномерную сходимость этого ряда. Для этого оценим интегралы

$$\int_a^b K_n(x,s) f(s)\,ds.$$

Имеем

$$|K_2(x,s)| \le \int_a^b |K_1(x,t) K_1(t,s)|\,dt \le A^2(b-a),$$

$$|K_3(x,s)| \le \int_a^b |K_1(x,t) K_2(t,s)|\,dt \le A^3(b-a)^2,$$

. . . .

$$|K_n(x,s)| \le \int_a^b |K_1(x,t) K_{n-1}(t,s)|\,dt \le A^n(b-a)^{n-1},$$

поэтому

$$\left| \int_a^b K_n(x,s) f(s)\,ds \right| \le A^n(b-a)^{n-1} \int_a^b |f(s)|\,ds \le A^n B(b-a)^n.$$

Следовательно, числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n B|\lambda|^n (b-a)^n \qquad (7)$$

является мажорантным для ряда (6). Если $\lambda < \dfrac{1}{A(b-a)}$, то ряд (7) сходится.

Следовательно, при таких λ ряд (7) сходится, а вместе с ним и последовательность функций $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к функции $\tilde{\varphi}(x)$. Эта функция является решением уравнения (1). В самом деле, переходя в формуле (5) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\tilde{\varphi}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\tilde{\varphi}(s)\,ds + f(x).$$

Переход к пределу под знаком интеграла здесь законен, так как последовательность сходится равномерно.

Заметим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \tilde{\varphi}(x)$ не зависит от выбора функции $\varphi_0(x)$ (нулевого приближения). В самом деле, если существует еще одно решение $\psi(x)$ уравнения (1), то, полагая в процедуре построения функций (3) – (5) $\varphi_0(x) = \psi(x)$, получим

$$\varphi_1(x) = \psi(x), \quad \varphi_2(x) = \psi(x), \ \ldots, \varphi_n(x) = \psi(x), \quad \ldots .$$

Эта последовательность имеет пределом функцию $\tilde{\varphi}(x)$. Но вместе с тем очевидно:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \psi(x).$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}(x) = \psi(x)$. Теорема доказана.

Поскольку ряд (7) сходится при $\lambda < \dfrac{1}{A(b-a)}$, то при таких же λ сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n |\lambda|^{n-1} (b-a)^{n-1}.$$

Но этот ряд является мажорантным для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x,s). \qquad (8)$$

Следовательно, ряд (8) сходится равномерно. Поэтому ряд (6) можно записать в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) \right\} f(s)\,ds$$

или

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)\,ds, \qquad (9)$$

где функция

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$$

называется резольвентой уравнения (1).

§3. Уравнения Вольтерра

Если мы описанную выше процедуру применим к уравнению Вольтерра (2), то получим последовательность функций:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi_0(s)\,ds,$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi_1(s)\,ds,$$

. . . .

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi_{n-1}(s)\,ds,$$

. . . .

Эта последовательность равномерно сходится на $[a,b]$ при любых значениях параметра λ. В самом деле, очевидно, справедливы неравенства:

$$|\varphi_1(x)| \le |f(x)| + |\lambda| \int_a^x |K(x,s)||\varphi_0(s)|\,ds \le B + |\lambda| A B_0 (x-a),$$

где $|\,\varphi_0(s)| \le B_0$,

$$|\,\varphi_2(x)| \le |\,f(x)| + |\,\lambda\,| \int_a^x |\,K(x,s)|\,|\,\varphi_1(s)|\,ds \le$$

$$\le B + |\,\lambda\,|\,A\int_a^x \{B + |\,\lambda\,|A\,B_0(s-a)\}\,ds = B + |\,\lambda\,|A\,B(x-a) + |\,\lambda\,|^2 A^2 B_0 \frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Вообще

$$|\varphi_n(x)| \le B + |\,\lambda\,|AB(x-a) + \dots + |\,\lambda\,|^{n-1} A^{n-1} B \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + |\,\lambda\,|^n A^n B_0 \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} B|\,\lambda\,|^n A^n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ и его частичные суммы являются мажорантными для функций $\varphi_n(x)$, то последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ также сходится равномерно; $\tilde{\varphi}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, очевидно, является решением уравнения (2) и притом единственным. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Если* $K(x,s) \in C\{[a,b]\times[a,b]\}$ *и* $f(x) \in C([a,b])$, *то последовательность приближения для уравнения Вольтерра* (2) *сходятся при всех значениях* λ. *Предельная функция является единственным решением этого уравнения.*

Задачи

1. Пусть $L-$ интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x,y)$ $\left(L\,f = \int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy\right)$. Доказать, что операторы $L^p = L(L^{p-1})$, $p = 2,3,\dots$, являются интегральными операторами с непрерывными ядрами $K_p(x,y)$ и эти ядра удовлетворяют

$$K_p(x,y) = \int_a^b K(x,s)\,K_{p-1}(s,y)\,ds.$$

2. Показать, что резольвента $R(x,s,\lambda)$ непрерывного ядра $K(x,s)$ удовлетворяет при $\lambda < \dfrac{1}{A(b-a)}$ $(|\,K(x,s)| \le A)$ каждому из уравнений:

а) $R(x,s,\lambda) = \lambda \int_a^b K(x,t)R(t,s,\lambda)\,dt + K(x,s)$;

б) $R(x,s,\lambda) = \lambda \int_a^b K(t,s)R(x,t,\lambda)\,dt + K(x,s)$;

в) $\dfrac{\partial R(x,s,\lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b R(x,t,\lambda)R(t,s,\lambda)\,dt$.

3. Показать, что дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = F(x)$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$, $i = 1,2,\dots,n$ при начальных условиях $y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$ равносильно интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x),$$

где

$$K(x,y) = \sum_{m-1}^{n} a_m \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$f(x) = F(x) - C_{n-1}a_1(x) - (C_{n-1}x + C_{n-2})a_2(x) - \dots$$

$$\dots - \left(C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0\right)a_n(x).$$

4. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

с ядром

а) $K(x,y) = 1$;

б) $K(x,y) = x - y$.

5. Решить следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x (y - x)\varphi(y)\,d\,y$;

б) $\varphi(x) = 1 + \lambda \int\limits_0^x (x - y)\varphi(y)\,d\,y$;

в) $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x (x - y)\varphi(y)\,d\,y + x^2$.

6. Показать, что если $\varphi \in C^1(x \ge 0)$, $\varphi(0) = 0$, $0 < \alpha < 1$, то функция

$$f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^x \frac{\varphi'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,d\,y$$

удовлетворяет интегральному уравнению Абеля

$$\int\limits_0^x \frac{f(y)}{(x - y)^{\alpha}}\,d\,x = \varphi(x).$$

Лекция 27. Интегральные уравнения с выраженным ядром. Теоремы Фредгольма

Мы рассматриваем уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, \varsigma)\varphi(s)dS + f(x). \tag{1}$$

§1. Уравнения с вырожденным ядром

Ядро $K(x,s)$ называется вырожденным, если оно имеет вид

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(s), \tag{2}$$

где $a_i(x)$ можно считать линейно независимым; в противном случае число слагаемых в (2) можно уменьшить.

Точно так же можно считать независимыми и функции $b_i(s)$.

Интегральное уравнение (1) с вырожденным ядром представляется в следующей форме:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int\limits_a^b b_i(s)\varphi(s)dS + f(x). \tag{3}$$

Обозначим

$$c_i = \int\limits_a^b b_i(s)\varphi(s)dS. \tag{4}$$

Величины c_i суть постоянные, неизвестные, так как неизвестна функция $\varphi(x)$. Из уравнения (3) мы получаем теперь согласно (4)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i\, a_i(x) + f(x) \tag{5}$$

и дело сводится к определению постоянных c_i. С этой целью поставим выражение (5) в интегральное уравнение (3). После простых преобразований мы получим:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \left\{ c_i - \int\limits_a^b b_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k\, a_k(s) \right] dS \right\} = 0.$$

Так как функции $a_i(x)$ линейно независимы, то из последнего равенства следует:

$$c_i - \int\limits_a^b b_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(s) \right] dS = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Обозначим еще для краткости

$$\int\limits_a^b b_i(s) f(s)\,d\,S = f_i \int\limits_a^b b_i(s)\,a_k(s)\,d\,S = \alpha_{ik}.$$

Тогда

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} c_k = f_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Для определения постоянных c_i мы получим систему линейных алгебраических уравнений. Решив ее, мы тем самым решим и уравнение (3); его решение дается формулой (5). Наоборот, если система (6) неразрешима, то не имеет решения и интегральное уравнение.

Определитель системы (6) равен

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это полином от λ степени не выше n; он не равен тождественно нулю, так как при $\lambda=0$ он обращается в единицу. Отсюда следует, что существуют не более n различных значений λ, при которых $D(\lambda)=0$. При этих значениях λ система (6), а с ней и интегральное уравнение (3), либо неразрешимо, либо имеет бесчисленное множество решений. При всех остальных значениях λ интегральное уравнение разрешимо и имеет единственное решение.

Теорема 1. *Система уравнений* (6) *при значениях* λ, *для которых* $D(\lambda)\neq 0$, *однозначно решима при любых* f_i, *и уравнение* (3) *разрешимо при любой функции* $f(x)$.

В частности уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)dS \tag{7}$$

имеет при этом только тривиальное решение.

Утверждение теоремы доказывается в курсах алгебры.

В случае $D(\lambda)=0$ система (6) разрешима не при всяких f_i, а следовательно, уравнение (1) – не при всяких $f(x)$.

При этом однородная система

$$c_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\,c_k=0,\qquad i=1,2,\dots,n \tag{8}$$

имеет $n-q$ линейно независимых решений, где q – ранг матрицы системы.

Пусть эти решения будут

$$c_1^{(s)},c_2^{(s)},\dots,c_n^{(s)},\qquad s=1,2,\dots n-q.$$

Уравнение (7) будет, очевидно, также иметь ровно $n-q$ линейно независимых решений

$$\varphi_s(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k^{(s)}a_k(x),\qquad s=1,2,\dots n-q.$$

Известно, что в том случае, когда определитель системы равен нулю, неоднородная система может не иметь ни одного решения. Напомним необходимое и достаточное условие для разрешимости системы (6).

Рассмотрим систему уравнений, которая задается транспонированной матрицей по отношению к матрице системы (8)

$$\beta_k-\lambda\sum_{e=1}^{n}\alpha_{ek}\beta_e=0,\qquad k=1,2,\dots n. \tag{9}$$

Определитель системы (9) $D(\lambda)=0$. Как доказывается в курсах алгебры, число линейно независимых решений (9) опять $n-q$. Пусть эти решения будут

$$\beta_1^{(s)},\beta_2^{(s)},\dots,\beta_n^{(s)},\qquad s=1,2,\dots n-q.$$

Для разрешимости (6) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\sum_{e=1}^{n}f_e\beta_e^{(s)}=0,\qquad s=1,2,\dots,n-q \tag{10}$$

Подобно тому как система (6) соответствовала уравнению (1), а система (8) – уравнению (7), можно установить соответствие между системой (9) и уравнением

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)dS, \tag{11}$$

которое будем называть однородным уравнением, сопряженным с уравнением (7).

Решения уравнения (11) имеют вид

$$\psi_s(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(s)}b_k(x), \tag{12}$$

где $\beta_k^{(s)}$ – числа, удовлетворяющие (9). Отсюда получаем теорему.

Теорема 2. *Однородное уравнение* (7) *и сопряженное с ним уравнение* (11) *имеют одинаковое число решений, линейно независимых между собой. Это число равняется* $r = n - q$, *где* q *– ранг матрицы системы (6), а* n *– число слагаемых в вырожденном ядре* (2).

Подставим в уравнения (10) вместо f_i их выражения.

Будем иметь

$$\int_a^b f(x) \sum_{e=1}^n \beta_e^{(s)} b_e(x) dx = 0$$

или согласно (12)

$$\int_a^b f(x) \psi_s(x) dx = 0, \qquad s = 1,2,\ldots n - q. \tag{13}$$

Очевидно, что (10) и (13) равносильны.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения* (3) *при* $D(\lambda) = 0$ *является ортогональность его свободного члена* $f(x)$ *ко всем решениям сопряженного однородного уравнения.*

Очевидно, что при этом общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n-q} C_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_0(x)$ – некоторое частное решение, а $\varphi_k(x)$, $k = 1,2,\ldots n - q$ - частные решения однородного уравнения (7).

Замечание. Теорема 1 по существу следует из второй и третьей. В самом деле, если число линейно независимых решений у сопряженного уравнения и у соответствующего однородного уравнения равно нулю, то условия ортогональности пропадают, и неоднородное уравнение будет однозначно разрешимо.

§2. Теоремы Фредгольма

Однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) dS \tag{14}$$

при любых значениях параметра λ, очевидно, имеет тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Однако при некоторых значениях λ оно может иметь и нетривиальное решение.

Определение. *Значение параметра* λ, *при которых уравнение* (7) *имеет нетривиальные решения (т.е. не равные тождественно нулю) называются собственными значениями уравнения* (7) *(ядра* $K(x,s)$*), а соответствующие им решения* $\varphi(x)$ *– собственными функциями уравнения (ядра).*

Справедливо утверждение

Лемма 1. *Если в уравнении (1)* λ *не равно собственному значению соответствующего однородного уравнения (14), то уравнение (1) может иметь лишь единственное решение.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – два решения уравнения (1). Тогда справедливы тождества

$$\varphi_1(x) \equiv \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_1(s) dS + f(x),$$

$$\varphi_2(x) \equiv \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_2(s) dS + f(x),$$

откуда

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \equiv \lambda \int_a^b K(x,s) (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) dS.$$

Следовательно, разность $\varphi(x)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)$ является решением однородного уравнения. Поскольку λ не является собственным значением, то $\varphi(x)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\equiv 0$. Лемма доказана.

Теоремы 1, 2 и 3 (см. §1) остаются справедливыми не только для уравнений с выроженным ядром (3), но и для более общих уравнений (1). Для более общего случая они называются соответственно 1-й, 2-й, 3-й теоремами Фредгольма.

Мы приведем формулировки теорем Фредгольма, не вдаваясь в их доказательства.

2-я теорема Фредгольма. *Число* q *линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения* (14) *для уравнения* (1) *и сопряженного с ним* (11) *совпадают.*

3-я теорема Фредгольма. *Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения* (1) *состоит в том, чтобы свободный член его был ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного уравнения* (11).

1-я теорема Фредгольма. *Если уравнение* (1) *разрешимо при любой функции* $f(x)$ *в правой части, то решение его единственно, и, значит, соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Наоборот, если однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то уравнение разрешимо при любой функции* $f(x)$.

Эта теорема, как отмечено выше, есть следствие 2-й и 3-й теорем Фредгольма.

Задачи

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy+f(x)$$

в случаях:

а) $K(x,y)=x-1, \qquad f(x)=x$;

б) $K(x,y)=2e^{x+y}, \qquad f(x)=e^x$;

в) $K(x,y)=x+y-2xy, \qquad f(x)=x+x^2$.

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi K(x,y)\varphi(y)dy+f(x)$$

в случаях:

а) $K(x,y)=sin(x-2y), \qquad f(x)=cos\,2x$;

б) $K(x,y)=sin\,y+y\,cos\,x, \qquad f(x)=1-\dfrac{2x}{\pi}$;

в) $K(x,y)=cos^2(x-y), \qquad f(x)=1+cos\,4x$.

3. Найти все характеристические числа и соответствующие собственные функции следующих интегральных уравнений:

а) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\left[sin(x+y)+\dfrac{1}{2}\right]\varphi(y)dy$;

б) $\varphi(x)=\lambda\int_0^1\left(x^2y^2-\dfrac{2}{45}\right)\varphi(y)dy$;

в) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\left[cos^2(x+y)+\dfrac{1}{2}\right]\varphi(y)dy$.

Лекция 28. Интегральные уравнения с симметричными ядрами

В этой лекции мы будем рассматривать уравнения Фредгальма только с симметричными ядрами. Ядро $K(x,s)$ называется симметричным, если для всех x и s из квадрата $a\le x,s\le b$ выполняется тождество

$$K(x,s)\equiv K(s,x).$$

Если ядро $K(x,s)$ симметрично, то, очевидно, и все итерированные ядра $K_n(x,s)$:

$$K_n(x,s)=\int_a^b K_1(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt,\quad n=2,3,\ldots,$$

$K_1(x,s)=K(x,s)$ также симметричны.

Уравнения с симметричными ядрами чаще других встречаются в задачах математической физики. Они обладают целым рядом специфических свойств, главное из которых выражает

Теорема 1. *Всякое непрерывное симметричное ядро, не равное тождественно нулю, имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Совокупность всех собственных значений уравнения (ядра) будем называть спектром уравнения (ядра).

§ 1. Свойства собственных функций и собственных значений

Очевидно, справедливы следующие два свойства.

Свойство 1. *Если $\varphi(x)$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению λ, то $C\varphi(x)$ - где C- произвольная постоянная, также является собственной функцией, соответствующей тому же λ.*

Постоянный множитель C можно выбрать так, чтобы норма собственной функции $C\varphi(x)$ т.е.

$$\|c\,\varphi\|=\left(\int_a^b c^2\varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}=1.$$

Свойство 2. *Если две собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответствуют одному и тому же собственному значению λ, то, каковы бы ни были постоянные C_1 и C_2 функции $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ также являются собственными функциями, соответствующими тому же собственному значению λ.*

Докажем

Свойство 3. *Собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ортогональные на отрезке $[a,b]$, т.е.*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx=0.$$

Доказательство. Имеем тождества

$$\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\equiv\int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)\,ds,\quad \frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(x)\equiv\int_a^b K(x,s)\varphi_2(s)\,ds.$$

Первое из них умножим на $\varphi_2(x)$, второе на $\varphi_1(x)$ и почленно вычтем результаты один из другого. Полученное тождество интегрируем по x по отрезку $[a,b]$:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx=\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)\,\varphi_2(x)\,dx\,ds-$$
$$-\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_2(s)\,\varphi_1(x)\,ds\,dx.$$

Меняя порядок интегрирования во втором члене правой части равенства и учитывая симметричность ядра, получим

$$\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_2(s)\varphi_1(x)\,ds\,dx=\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)\varphi_2(x)\,ds\,dx.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx=0.$$

Отсюда и следует ортогональность.

Если ортогонализировать собственные функции, соответствующие одному собственному значению λ, то можно утверждать, что любые две линейно независимые собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ортогональны. Таким образом, можно считать, что семейство собственных функций является ортонормированным.

Свойство 4. *Все собственные значения интегральных уравнений с симметричными ядрами вещественны.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, есть комплексное собственное значение, а $\varphi(x) = \psi_1(x) + i\psi_2(x)$ – соответствующая ему собственная функция. Тогда

$$\psi_1(x) + i\psi_2(x) \equiv (\alpha + i\beta)\int_a^b K(x,s)\left[\psi_1(x) + i\psi_2(x)\right] ds.$$

Отсюда следуют тождества

$$\psi_1(x) \equiv \alpha \int_a^b K(x,s)\psi_1(s)\,ds - \beta\int_a^b K(x,s)\psi_2(s)\,ds,$$

$$\psi_2(x) \equiv \alpha \int_a^b K(x,s)\psi_2(s)\,ds - \beta\int_a^b K(x,s)\psi_1(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$\psi_1(x) - i\psi_2(x) \equiv (\alpha - i\beta)\int_a^b K(x,s)\left[\psi_1(x) - i\psi_2(x)\right] ds.$$

Таким образом,

$$\lambda = \alpha - i\beta \quad и \quad \overline{\varphi}(x) = \psi_1(x) - i\psi_2(x)$$

также являются соответствующими друг другу собственным значением и собственной функцией. Поскольку $\lambda \neq \overline{\lambda}$ (ибо $\beta \neq 0$), то по свойству 3 функции $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi}(x)$ ортогональны, т.е.

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi}(x)\,dx = \int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx = 0.$$

Отсюда ввиду непрерывности функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует, что $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0.$ А тогда $\varphi(x) \equiv 0$, что невозможно. Свойство доказано.

Свойство 5. *На каждом конечном отрезке $[A,B]$ содержится лишь конечное число собственных значений.*

Доказательство. Допустим, что на некотором отрезке $[A,B]$ содержится бесконечное множество собственных значений. Выберем из этого множества бесконечную последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – последовательность соответствующих им собственных функций, а ряд

$$C_1(x)\varphi_1(s) + C_2(x)\varphi_2(s) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(s) + \ldots$$

является рядом Фурье ядра $K(x,s)$. Поскольку семейство $\{\varphi_n(s)\}$ является ортонормированным, то коэффициенты

$$C_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)$$

и справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} \leq \int_a^b K^2(x,s)\,ds.$$

Следовательно, для любого целого $p > 0$

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} \leq \int_a^b K^2(x,s)\,ds.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[a,b]$, получим

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\lambda_n^2} \leq \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,ds\,dx. \qquad (1)$$

Так как $\lambda_n \in [A_0, B_0]$, то $\lambda_n^2 \leq C^2$, где $C^2 = max\left(A_0^2, B_0^2\right)$. Тогда из (1) получаем

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{B^2} \leq \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,ds\,dx,$$

что невозможно, ибо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{B^2}$ расходящийся.

Из свойства 5 следует, что:

1) все собственные значения можно занумеровать в порядке роста их абсолютных величин, т.е.

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots;$$

2) если спектр собственных значений бесконечный, то $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Свойство 6. *Каждому собственному значению λ соответствует конечное число q собственных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.*

Доказательство. Допустим, что некоторому λ соответствует бесконечная последовательность собственных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$. Из неравенства Бесселя следует, что для всякого целого $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda^2} \le \int_a^b K^2(x,s)\,ds.$$

Откуда интегрированием получаем

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\lambda^2} \le \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,ds\,dx \text{ или } p \le \lambda^2 \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,ds\,dx,$$

что невозможно.

§ 2 Теорема о конечном спектре

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы спектр симметрического ядра был конечным, необходимо и достаточно, чтобы ядро было вырожденным.*

Доказательство. Из изложенного в лекции 27 следует, что вырожденное симметрическое ядро имеет лишь конечный спектр. Верно и обратное: если

ядро $K(x,s)$ имеет конечный спектр, то оно вырожденное. Действительно, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – спектр ядра, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – совокупность всех собственных функций. Рассмотрим симметрическую непрерывную функцию

$$K^{(n)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x)\varphi_i(s).$$

Если $K^{(n)}(x,s) \ne 0$, то по теореме 1 она имеет собственное значение μ и соответствующую собственную функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) \equiv \mu \int_a^b K^{(n)}(x,s)\psi(s)\,ds.$$

Функция $\psi(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_i(x)$ ядра $K(x,s)$ ибо

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_q(x)\,dx \equiv \mu \int_a^b\int_a^b K^{(n)}(x,s)\cdot\varphi_q(x)\psi(s)\,ds\,dx =$$

$$= \mu \int_a^b \psi(s) \int_a^b \left\{ K(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \right\} \varphi_q(x)\,dx\,ds =$$

$$= \mu \int_a^b \psi(s) \left\{ \int_a^b K(x,s)\cdot\varphi_q(x)\,dx - \frac{\varphi_q(s)}{\lambda_q} \right\} ds =$$

$$= \mu \int_a^b \psi(s) \left[\frac{1}{\lambda_q}\varphi_q(s) - \frac{1}{\lambda_q}\varphi_q(s) \right] ds = 0.$$

Далее μ и $\psi(x)$ суть собственное значение и собственная функция ядра $K(x,s)$, так как

$$\mu \int_a^b K(x,s)\psi(s)\,ds = \mu \int_a^b \left\{ K^n(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \right\} \psi(s)\,ds =$$

$$= \mu \int_a^b K^n(x,s)\psi(s)\,ds = \psi(x).$$

Поскольку $\psi(x)$ есть собственная функция ядра $K(x,s)$ и функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют полную систему собственных функций ядра $K(x,s)$, то $\psi(x)$ должна быть линейной комбинацией функций

$\varphi_1(x), \varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$. Но это невозможно, так как $\psi(x)$ ортогональна всем этим функциям. Следовательно, $K^n(x,s)\equiv 0$ или

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x)\varphi_i(s),$$

т.е. ядро $K(x,s)$ является вырожденным. Теорема доказана.

§ 3 Спектр итерированных (повторных) ядер

Положим

$$A\varphi\equiv\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds.$$

Из определения итерированных ядер следует, что

$$A^n\varphi=A\left(A^{n-1}\varphi\right)=\int_a^b K_n(x,s)\varphi(s)\,ds.$$

Для собственных функций $\varphi_k(x)$ и собственных значений λ_k ядра $K(x,s)$ справедливы равенства

$$\varphi_k(x)=\lambda_k A\varphi_k=\lambda_k A(\lambda_k A\varphi_k)=\lambda_k^2 A^2\varphi_k=\dots$$

$$\dots=\lambda_k^n A^n\varphi_k=\lambda_k^n\int_a^b K_n(x,s)\varphi_k(s)\,ds$$

из которых следует

Теорема 3. *Если $\varphi_k(x)$ и λ_k суть собственные функции и собственные значения ядра $K(x,s)$, то $\varphi_k(x)$ и λ_k^n будут собственной функцией и собственным значением ядра $K_n(x,s)$.*

Справедлива также

Теорема 4. *Если μ есть собственное значение ядра $K_n(x,s)$, то собственным значением ядра $K(x,s)$ будет, по крайней мере один из вещественных корней n-й степени числа μ.*

Доказательство. Легко показать, что если $h_1,h_2,\dots,h_n$ – корни уравнения $h^n=\mu$, то

$$h_1^s+h_2^s+\dots+h_n^s=0 \tag{2}$$

для $s=1,2,\dots,n-1$.

Пусть теперь $\psi(x)$ – собственная функция ядра $K_n(x,s)$, соответствующая собственному значению. Определим функции $\varphi_k(x)$ по формулам

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{n}\left[\psi+h_k A\psi+h_k^2A^2\psi+\dots+h_k^{n-1}A_\psi^{n-1}\right] \tag{3}$$

Суммируя равенства (3) и принимая во внимание (2), получим

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x). \tag{4}$$

Далее применяя оператор A к равенству (3) и умножая результат на h_k, получим

$$h_kA\varphi_k=\frac{1}{n}\left(h_kA\psi+h_k^2A^2\psi+\dots+h_k^{n-1}A^{n-1}\psi\right)+\frac{1}{n}h_k^nA^n\psi$$

или

$$h_kA\varphi_k=\varphi_k(x)-\frac{1}{n}\psi(x)+\frac{1}{n}h_k^nA^n\psi=\varphi_k(x),$$

поскольку $h_k^n=\mu$ и $\mu A^n\psi=\psi$. Таким образом, не равные тождественно нулю функции $\varphi_k(x)$ являются собственными функциями ядра $K(x,s)$, а h_k – соответствующими им собственными значениями. По свойству 4 ядро $K(x,s)$ имеет лишь вещественные собственные значения. Следовательно, функции $\varphi_k(x)$, отвечающие комплексным корням h_k, тождественно равны нулю. Теорема доказана.

Лекция 29. Теорема Гильберта – Шмидта.

В этой лекции мы докажем одну из фундаментальных теорем теории линейных интегральных уравнений, имеющую многочисленные приложения теорему разложения.

§1. Разложение интегрированных ядер

Напомним (см. предыдущую лекцию), что если $\varphi_i(x)$ и λ_i суть собственных функции и собственные значения ядра $K(x,s)$, то $\varphi_i(x)$ и λ_i^n являются собственными функциями и собственными значениями интегрированного ядра $K_n(x,s)$.

Теорема 1. *Для всякого $n \ge 3$ справедливо разложение*

$$K_n(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^n}, \tag{1}$$

в котором ряд сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a \le x,s \le b$.

Доказательство. Докажем сначала, что ряд, стоящий в правой части (1), сходится абсолютно и равномерно. Для этого оценим отрезок ряда

$$\sum_{i=m}^{m+q}\frac{1}{\left|\lambda_i^n\right|}\left|\varphi_i(x)\varphi_i(s)\right| \le \frac{1}{2\left|\lambda_m\right|^{n-2}}\sum_{i=m}^{m+q}\left[\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}+\frac{\varphi_i^2(s)}{\lambda_i^2}\right]. \tag{2}$$

Мы при этом воспользовались неравенством

$$\left|a\cdot b\right| \le \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

и тем, что $\left|\lambda_i\right|$ монотонно стремятся к бесконечности при $i\to\infty$. По неравенству Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \le \int_a^b K^2(x,s)\,ds \le M, \tag{3}$$

где $M=const$. Поэтому из (2) с учетом (3) имеем

$$\sum_{i=m}^{m+q}\frac{1}{\left|\lambda_i^n\right|}\left|\varphi_i(x)\varphi_i(s)\right| \le \frac{M}{\left|\lambda_m\right|^{n-2}}. \tag{4}$$

Так как $\left|\lambda_m\right|\to\infty$ при $m\to\infty$, то из неравенства (5) по критерию Коши и следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (1).

Пусть

$$\Phi(x,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^n}\varphi_i(x)\varphi_i(s).$$

Нам надо доказать, что $K_n(x,s)=\Phi(x,s)$. Предположим, что это неверно. Тогда симметричная функция

$$Q(x,s)=K_n(x,s)-\Phi(x,s),$$

как известно, имеет собственное значение μ и собственную функцию $\psi(x)$, т.е.

$$\psi(x)=\mu\int_a^b Q(x,s)\psi(s)\,ds.$$

Функция $\psi(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_i(x)$ ядра $K(x,s)$, так как

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_i(x)\,dx=\mu\int_a^b\int_a^b Q(x,s)\psi(s)\varphi_i(x)\,ds\,dx=$$

$$=\mu\int_a^b\psi(s)\int_a^b\left\{K_n(x,s)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^n}\varphi_j(x)\varphi_j(s)\right\}\varphi_i(x)\,dx\,ds=$$

$$=\mu\int_a^b\left\{\int_a^b K_n(x,s)\varphi_i(x)\,dx-\frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i^n}\right\}ds=0,$$

поскольку $\varphi_i(s)\equiv\lambda_i^n\int_a^b K_n(x,s)\varphi_i(x)\,dx$. Функция $\psi(x)$ является собственной функцией ядра $K_n(x,s)$, так как

$$\psi(x)\equiv\mu\int_a^b\left\{K_n(x,s)-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^n}\right\}\psi(s)\,ds\equiv\mu\int_a^b K_n(x,s)\psi(s)\,ds.$$

Следовательно, $\psi(x)$ должна быть линейной комбинацией функций $\varphi_i(x)$. Но это невозможно, так как $\psi(x)$ ортогональна всем функциям $\varphi_i(x)$. Таким образом, нельзя предполагать, что $Q(x,s)\ne 0$.

Замечание. Разложение (1) справедливо и для $K_2(x,s)$ $(n=2)$, а также при некоторых дополнительных условиях, и для $K(x,s)$.

§2. Теорема Гильберта – Шмидта

Справедливо утверждение

Лемма 1. *Для того чтобы непрерывная функция* $Q(x)$ *была ортогональной ядру* $K(x,s)$, *т.е.*

$$\int_a^b K(x,s)Q(s)\,d\,s \equiv 0\,, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы она была ортогональной каждой собственной функции ядра, т.е.

$$\int_a^b Q(x)\varphi_i(x)\,d\,x = 0, \quad i = 1,2,\ldots\ . \tag{6}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^b Q(x)\varphi_i(x)\,d\,x = \lambda_i \int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)Q(x)\,d\,s\,d\,x =$$

$$= \lambda_i \int_a^b \varphi_i(s)\left\{\int_a^b K(x,s)Q(x)\,d\,x\right\}d\,s = 0$$

при условии (5). Итак, достаточность (5) доказана.

Далее рассмотрим интеграл

$$J = \int_a^b\int_a^b K_4(x,s)Q(x)Q(s)\,d\,s\,d\,x\,.$$

Он равен нулю, так как, используя разложение (1) для $n=4$ и равенства (6), получим

$$J = \int_a^b\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^4}Q(x)Q(s)\,d\,s\,d\,x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^4}\int_a^b \varphi_i(x)Q(x)\,d\,x\int_a^b \varphi_i(s)Q(s)\,d\,s = 0\,.$$

Поскольку

$$K_4(x,s) = \int_a^b K_2(x,t)K_2(t,s)\,d\,t\,,$$

то

$$J = \int_a^b\int_a^b\left\{\int_a^b K_2(x,t)K_2(t,s)\,d\,t\right\}Q(x)Q(s)\,d\,s\,d\,x =$$

$$= \int_a^b\left\{\left[\int_a^b K_2(x,t)Q(x)\,d\,x\right]\left[\int_a^b K_2(t,s)Q(s)\,d\,s\right]\right\}d\,t = \int_a^b\left\{\int_a^b K_2(x,t)Q(x)\,d\,x\right\}^2 d\,t = 0\,.$$

Следовательно

$$\int_a^b K_2(x,t)Q(x)\,d\,x = 0\,. \tag{7}$$

Умножая тождество (7) на $Q(t)$ и интегрируя результат по отрезку $[a,b]$, получим

$$\int_a^b\int_a^b K_2(x,t)Q(x)Q(t)\,d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Заменяя в этом равенстве $K_2(x,t)$ интегралом $\int_a^b K(x,s)K(s,t)\,d\,s$ и производя преобразования, аналогичные произведенным выше, получим

$$\int_a^b K(x,s)Q(x)\,d\,x \equiv 0\,.$$

Лемма доказана.

Теперь, используя лемму 1, докажем основное утверждение:

Теорема 2 (Теорема Гильберта - Шмидта). *Если функция* $f(x)$ *может быть представлена в форме*

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)\,d\,s\,, \tag{8}$$

где $h(s)$ *– кусочно-непрерывная на* $[a,b]$, *то она представляется рядом Фурье по собственным функциям ядра* $K(x,s)$, *т.е.*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,\varphi_i(x),$$

где

$$f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx,$$

и этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Имеем

$$f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = \int_a^b \varphi_i(x)\int_a^b K(x,s)h(s)\,ds\,dx = \int_a^b h(s)\int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\,dx\,ds =$$

$$= \int_a^b h(s)\frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i}\,ds = \frac{h_i}{\lambda_i}.$$

Следовательно, коэффициенты Фурье f_i функции $f(x)$ равны $\frac{h_i}{\lambda_i}$, где h_i – коэффициенты Фурье функции $h(s)$, поэтому вместо ряда (9) можно рассматривать ряд

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x). \tag{10}$$

Докажем сначала абсолютную и равномерную сходимость ряда (10). По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{i=n}^{n+q}\left|\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right| \le \left\{\sum_{i=n}^{n+q}h_i^2\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{i=n}^{n+q}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}\right\}^{1/2}.$$

По неравенству Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty}h_i^2 \le \int_a^b h^2(s)\,ds \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \le \int_a^b K^2(x,t)\,dt \le M.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}h_i^2$ сходится, поэтому его отрезок $\sum_{i=n}^{n+q}h_i^2$ может быть сделан меньшим $\frac{\varepsilon}{M}$ (где ε – произвольное число), если n взять достаточно большим. Отсюда для достаточно больших n

$$\sum_{i=n}^{n+q}\left|\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{для всех} \qquad x\in[a,b].$$

Что и означает абсолютную и равномерную сходимость ряда (10).

Далее пусть

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x) - f(x).$$

Функция $Q(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и ортогональна всем функциям $\varphi_i(x)$. Следовательно, согласно лемме 1, она ортогональна ядру $K(x,s)$, т.е.

$$\int_a^b K(x,s)Q(x)\,dx \equiv 0. \tag{11}$$

Теперь в силу ортогональности функций $Q(x)$ и $\varphi_i(x)$

$$\int_a^b Q^2(x)\,dx = \int_a^b Q(x)\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x) - f(x)\right\}dx = -\int_a^b Q(x)f(x)\,dx.$$

Заменяя здесь $f(x)$ по формуле (8) и используя (11), получим

$$\int_a^b Q^2(x)\,dx = -\int_a^b Q(x)\int_a^b K(x,s)h(s)\,ds\,dx = -\int_a^b h(s)\int_a^b K(x,s)Q(x)\,dx\,ds = 0.$$

Следовательно,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x) - f(x) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

§3. Решение неоднородного уравнения

Пусть в уравнении

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds + f(x) \tag{12}$$

λ не равно ни одному из собственных значений. Тогда по 1-й теореме Фредгольма это уравнение имеет единственное решение, которое можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\,\psi(x), \tag{13}$$

где

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds.$$

По теореме Гильберта – Шмидта функция $\psi(x)$ может быть представлена рядом по собственным функциям ядра $K(x,s)$:

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(x). \qquad (14)$$

Подставим в уравнение (12) функцию $\varphi(x)$, определенную формулами (13), (14), получим

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(x)\equiv f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\left\{f(s)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(s)\right\}d\,s$$

или

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(x)\equiv\int_a^b K(x,s)\,f(s)\,d\,s+\lambda\sum_{i=1}^{\infty} c_i\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\,d\,s.$$

Применяя теорему Гильберта – Шмидта к функции

$$\int_a^b K(x,s)\,f(s)\,d\,s$$

и заменяя $\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\,d\,s$ через $\dfrac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\varphi_i(x)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\ ,$$

откуда

$$c_i=\frac{f_i}{\lambda_i}+\frac{\lambda}{\lambda_i}c_i \qquad \text{или} \qquad c_i=\frac{f_i}{\lambda_i-\lambda}. \qquad (15)$$

Таким образом, искомое решение уравнения (12) представляется следующим абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{\lambda_i-\lambda}\varphi_i(x).$$

Если λ – равно некоторому собственному значению λ_r, которому отвечают собственные функции $\varphi_r(x),\varphi_{r+1}(x),\ldots,\varphi_{r+q}(x)$, то $\lambda_r=\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_{r+q}$.

В этом случае из формул (15) получаем

$$f_r=f_{r+1}=\cdots=f_{r+q}=0$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi_{r+i}(x)\,d\,x=0, \qquad i=0,1,\ldots,q.$$

При этом коэффициенты $c_r,c_{r+1},\ldots,c_{r+q}$ остаются произвольными и решение уравнения (12) имеет вид

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=0}^{q}c_{r+i}\varphi_{r+i}(x)+\lambda_r{\sum}'\frac{f_i}{\lambda_i-\lambda_r}\varphi_i(x),$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем значениям i, кроме $r,r+1,\ldots,r+q$.

Задачи

1. Пусть $K(x,y)$ – симметричное непрерывное ядро, $K_n(x,y)$ – повторное ядро ядра $K(x,y)$. Доказать формулы:

а) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\,\varphi_m(x)|^2}{\lambda_m^2}=\int_a^b|\,K(x,y)|^2\,d\,y$;

б) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^2}=\int_a^b\int_a^b|\,K(x,y)|^2\,d\,x\,d\,y$;

в) $\displaystyle(Lf,f)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\,(f,\varphi_k)|^2}{\lambda_k}$,

L – интегральный оператор я ядром $K(x,y)$;

в) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^{2p}}=\int_a^b\int_a^b\left|\,K_p(x,y)\right|^2\,d\,x\,d\,y, \qquad p=1,2,\ldots$.

Здесь $\varphi_m(x)$ – собственная функция соответствующая собственному значению λ_m.

2. Найти характеристические числа и соответствующие собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,d\,y$$

в следующих случаях:

а) $K(x,y)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\le x\le y\le 1, \\ y, & \text{если } 0\le y\le x\le 1; \end{cases}$

б) $K(x,y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{если } 0\le x\le y\le 1, \\ y(1-x), & \text{если } 0\le y\le x\le 1; \end{cases}$

в) $K(x,y)=\begin{cases} \sin x \sin(1-y), & \text{если } 0\le x\le y\le 1, \\ \sin(1-x)\sin y, & \text{если } 0\le y\le x\le 1. \end{cases}$

3. Решить интегральное уравнение $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy+f(x)$, если $f(x)\in C^2[0,1]$ и $K(x,y)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\le x\le \theta\, y\le 1, \\ y, & \text{если } 0\le y\le x\le 1. \end{cases}$

VI. Специальные функции

Лекция 30. Функции Бесселя. Полное разделение переменных в уравнении колебаний круглой мембраны

При решении многих задач математической физики приходят к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0. \qquad (1)$$

К такому уравнению мы придем, например, при решении задачи о колебании круглой мембраны, об остывании круглого цилиндра методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами. Уравнение (1) носит название уравнения Бесселя. В курсах аналитической теории дифференциальных уравнений и в курсах теории специальных функций устанавливается ряд важных свойств решений этого уравнения, которые мы приведем без полного доказательства.

§1. Функции Бесселя

Так как уравнение (1) имеет особую точку $x=0$, то его частное решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x)=x^{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \quad (a_0\ne 0). \qquad (2)$$

Подставляя ряд (2) в уравнение (1), получим

$$\left(\sigma^2-\nu^2\right)a_0x^{\sigma}+\left[(\sigma+1)^2-\nu^2\right]a_1x^{\sigma+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[(\sigma+k)^2-\nu^2\right]a_k+a_{k-2}\right\}x^{\sigma+k}=0.$$

Теперь приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x, будем иметь

$$\begin{aligned} &\sigma^2-\nu^2=0, \\ &\left[(\sigma+1)^2-\nu^2\right]a_1=0, \\ &\left[(\sigma+k)^2-\nu^2\right]\ a_k+a_{k-2}=0, \quad k=2,3,\dots\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Из первого уравнения (3) следует, что

$$\sigma=\pm\nu.$$

Далее предположим, что

$$(\sigma+k)^2-\nu^2=(\sigma+k+\nu)(\sigma+k-\nu)\neq 0,$$

то есть $\sigma+\nu$ или $\sigma-\nu$ (и соответственно -2ν или 2ν) не равно отрицательному целому числу. Тогда из (3) получаем рекуррентную формулу для определения a_k через a_{k-2}:

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{(\sigma+k+\nu)(a+k-\nu)}. \tag{4}$$

Так как, $a_1=0$, то из формулы (4) заключаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю.

Пусть $\sigma=\nu$. Из (4) следует, что каждый четный коэффициент может быть выражен через предыдущий:

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+\nu)m}.$$

Последовательное применение этой формулы позволяет найти a_{2m} через a_0

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}.$$

Теперь воспользуемся свойством гамма-функции $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=\cdots=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n).$$

Если s – целое число, то

$$\Gamma(s+1)=s!$$

Коэффициент a_0 до сих пор оставался произвольным. Положим

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$$

и, используя отмеченное выше свойство гамма-функций, получим

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Вносся найденные значения коэффициентов a_{2k+1} и a_{2k} в ряд (2), получим частное решение уравнения (1). Это решение носит название функции Бесселя 1-го рода ν-го порядка и обозначается обычно через $J_\nu(x)$.

Таким образом

$$J_\nu(x)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{5}$$

Используя, второй корень $\sigma=-\nu$, можно построить второе частное решение уравнения (1). Оно может быть получено, очевидно, из решения 95) простой заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (1) содержит только ν^2 и не меняется при замене ν на $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \tag{6}$$

Для нецелых значений ν частные решения (5) и (6) уравнения (1) будут линейно независимыми, так как разложения, стоящие в правых частях формул (5) и (6), начинаются с разных степеней x.

Для целых значений $\nu=m$ функции Бесселя порядка m и порядка $-m$ уже не будут независимыми:

$$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x).$$

Для того чтобы найти общее решение уравнения (1) в этом случае, необходимо построить второе, линейнонезачисимое от $J_\nu(x)$ частное решение. Для этого введем новую функцию $\mathrm{Y}_\nu(x)$ по формуле

$$\mathrm{Y}_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}. \tag{7}$$

Введенная функция $Y_v(x)$ называется функцией Бесселя второго рода v-го порядка. Эта функция является решением уравнения (1) и в том случае, когда v – целое число, причем функции $J_v(x)$ и $Y_v(x)$ линейно независимы при любом . Следовательно общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$y = c_1 J_v(x) + c_2 Y_v(x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Отметим, что для функций Бесселя первого и второго рода имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\frac{dJ_v(x)}{dx} = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x), \qquad \frac{dY_v(x)}{dx} = Y_{v-1}(x) - \frac{v}{x} Y_v(x),$$

$$\frac{dJ_v(x)}{dx} = -J_{v-1}(x) + \frac{v}{x} J_v(x), \qquad \frac{dY_v(x)}{dx} = -Y_{v-1}(x) + \frac{v}{x} Y_v(x),$$

$$J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v=1}(x), \qquad Y_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} Y_v(x) - Y_{v=1}(x).$$

Далее, используя правило Лопиталя при целом положительном n, из (7) получаем, что функция Бесселя второго рода представляется в виде

$$Y_v(x) = \frac{2}{\pi} J_v(x) ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \\ -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \tag{8}$$

§ 2. Полное разделение переменных в уравнении колебаний круглой мембраны

Рассмотрим волновое уравнение на плоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

При изучении круглой колебаний мембраны полезно перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда волновое уравнение запишется в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{9}$$

Будем искать решение этого уравнения при заданных начальных данных

$$u(r,\varphi,0) = u_0(r,\varphi), \qquad \frac{\partial u(r,\varphi,0)}{\partial t} = u_1(r,\varphi) \tag{10}$$

и граничном условии

$$u(1,\varphi,t) = 0 \tag{11}$$

(закрепленная по краям мембрана радиуса 1).

Согласно методу Фурье частные решения уравнения (9) ищем в следующей форме

$$u(r,\varphi,t) = \upsilon(r,\varphi)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (9), мы получим уравнение для $T(t)$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0,$$

т.е.

$$T(t) = c_1\cos\sqrt{a^2\lambda}\, t + c_2\sin\sqrt{a^2\lambda}\, t,$$

и следующую задачу на собственные значения для функции $\upsilon(r,\varphi)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\varphi^2} + \lambda\upsilon = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{12}$$

$$\upsilon(1,\varphi) = 0. \tag{13}$$

Мы налагаем на функцию $\upsilon(r,\varphi)$ условие ограниченности в точке $r = 0$ и условие периодичности с периодом 2π по переменной φ.

Далее положим

$$\upsilon(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Тогда из уравнения (12) получаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R}+\frac{\Phi''}{\Phi}+\lambda r^2=0.$$

Отсюда согласно (13) и наложенных ограничений на функцию $v(r,\varphi)$ приходим к уравнениям

$$\Phi''+\mu^2\Phi=0,\qquad \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi),$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R=0,\quad R(1)=0,\quad |R(0)|<\infty.$$

Нетривиальные периодические решения для $\Phi(\varphi)$ существуют лишь при $\mu^2=n^2$ (n – целое число) и имеют вид

$$\Phi_n(\varphi)=\mathrm{A}_n\cos n\varphi+\mathrm{B}_n\sin n\varphi.$$

Для определения функции $R(r)$ мы имеем задачу

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{r}+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0,\quad 0<r<1,$$

$$R(1)=0,\quad |R(0)|<\infty.$$

Вводя новую переменную

$$x=\sqrt{\lambda}\,r$$

и обозначая

$$R(r)=R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)=y(x),$$

получим для определения функции $y(x)$ уравнение Бесселя (1) n-го порядка $(v=n)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{14}$$

с дополнительными граничными условиями

$$\begin{gathered} y(x_0)=0,\quad x_0=\sqrt{\lambda},\\ |y(0)|<\infty. \end{gathered} \tag{15}$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид (см. §1)

$$y(x)=c_1J_n(x)+c_2Y_n(x).$$

Из второго условия (15) согласно формуле (8) имеем $c_2=0$, а первое условие дает:

$$J_n\left(\sqrt{\lambda}\right)=0 \ \text{или}\ J_n(\mu)=0\qquad \left(\mu=\sqrt{\lambda}\right).$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесконечное множество вещественных корней μ_m^n, $m=0,1,2,\ldots$. Таким образом, мы имеем последовательность собственных значений

$$\lambda_{n,m}=\left(\mu_m^{(n)}\right)^2,\quad m=0,1,2,\ldots,$$

которым принадлежат собственные функции

$$R_{n,m}(r)=y\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r\right)=J_n\left(\mu_m^{(n)}r\right) \tag{16}$$

Таким образом, для собственного значения $\lambda_{n,m}$ задачи (13) имеем две собственные функции

$$\upsilon_{n,m}=J_n\left(\mu_m^{(n)}r\right)\cos n\varphi,\quad u_{n,m}=J_n\left(\mu_m^{(n)}r\right)\sin n\varphi.$$

Теперь решение исходной задачи о колебаниях мембраны (9)–(11) согласно методу Фурье можно представить так:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\upsilon_{n,m}(r,\varphi)\left(\mathrm{A}_{n,m}\cos\mu_m^{(n)}at+\mathrm{B}_{n,m}\sin\mu_m^{(n)}at\right)+\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}(r,\varphi)\left(C_{n,m}\cos\mu_m^{(n)}at+D_{n,m}\sin\mu_m^{(n)}at\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Можно показать, что собственные функции (16), принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны с весом r:

$$\int_0^1 rJ_n\left(\mu_{m_1}^{(n)}r\right)J_n\left(\mu_{m_2}^{(n)}r\right)dr=0. \tag{18}$$

Норма этих функций равна

$$\int_0^1 rJ_n^2\left(\mu_{m_1}^{(n)}r\right)dr=\frac{1}{2}\left(J_n'\left(\mu_{m_2}^{(n)}r\right)\right)^2. \tag{19}$$

Коэффициенты $\mathrm{A}_{n,m}$, $\mathrm{B}_{n,m}$, $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ ряда (17) определяются из начальных условий (10)

$$\begin{aligned} u_0(r,\varphi) &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\sum^{\infty} \left(\mathrm{A}_{n,m}\upsilon_{n,m} + C_{n,m}u_{n,m}\right), \\ u_1(r,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\left(\mathrm{B}_{n,m}\upsilon_{n,m} + D_{n,m}u_{n,m}\right)a\mu_m^{(n)} \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь, используя соотношения (18), (19) из (20), находим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{n,m} &= \frac{2\int_0^{2\pi}\int_0^1 u_0(r,\varphi)\, J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\cos n\varphi\, r\,dr\,d\varphi}{\pi\,\varepsilon_n\left[J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\right)\right]^2}, \\ C_{n,m} &= \frac{2\int_0^{2\pi}\int_0^1 u_0(r,\varphi)\, J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin n\varphi\, r\,dr\,d\varphi}{\pi\,\varepsilon_n\left[J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\right)\right]^2}, \\ \mathrm{B}_{n,m} &= \frac{2\int_0^{2\pi}\int_0^1 u_1(r,\varphi) J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\cos n\varphi\, r\,dr\,d\varphi}{a\,\pi\,\varepsilon_n\sqrt{\lambda_{n,m}}\left[J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\right)\right]^2}, \\ D_{n,m} &= \frac{2\int_0^{2\pi}\int_0^1 u_1(r,\varphi) J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\sin n\varphi\, r\,dr\,d\varphi}{a\,\pi\,\varepsilon_n\sqrt{\lambda_{n,m}}\left[J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\right)\right]^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n=0, \\ 1 & \text{при } n=1. \end{cases}$

Таким образом, решение задачи (9) – (11) вычисляется по формулам (17), (21).

Задачи

1. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, в следующих случаях:

а) начальное отклонение определяется равенством $u\big|_{t=0} = \Delta J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$, где μ_k – положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0$; начальная скорость равна нулю;

б) начальное отклонение и начальная скорость зависят только от r:

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad u_t\big|_{t=0} = F(r);$$

в) начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальная скорость равна нулю.

2. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + f(t)J_0(\mu_k x),$$

где μ_k – положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0,\quad 0<x<1,$

$$u\big|_{x=1} = u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad \left|u\big|_{x=0}\right| < \infty, \text{ если}$$

а) $f(t) = t^2+1$;

б) $f(t) = \sin t + \cos t$.

3. Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса R. Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени t, если :

а) на поверхности цилиндра поддерживается все время нулевая температура, а температура внутри цилиндра в начальный момент равна $u\big|_{t=0} = \Delta J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$, где μ_k – положительный корень уравнения $J_0(\mu)=0$;

б) поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре u_0, а начальная температура внутри цилиндра равна нулю;

в) с поверхности цилиндра происходит лучеиспускание в окружающую среду, температура которой равна нулю, а начальная температура равна $u\big|_{t=0} = u_0(r)$.

Лекция 31. Многочлены Лежандра. Определение потенциала внутри сферы

Простейшим классом сферических функций являются многочлены Лежандра от $\cos\theta$. Эти многочлены мы обозначим как $P_n(\cos\theta)$ и определим их несколько формальным способом – через производящую функцию. Последнее позволит нам проще и короче получить их основные свойства.

§ 1 Многочлены Лежандра

Производящая функция

Функция

$$f(x,t)=\left[1-2xt+t^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

называется производящей функцией многочленов Лежандра. Разложим эту функцию в степенной ряд по степеням t.
Получим

$$f(x,t)=P_0(x)+P_1(x)t+\ldots+P_n(x)t^n+\ldots \qquad (1)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты этого разложения $P_n(x)$ являются многочленами. Эти многочлены носят название многочленов Лежандра.
Полагая в разложении (1) $x=1$, получим

$$f(1,t)=\frac{1}{1-t}=1+t+\ldots+t^n+\ldots\ .$$

Следовательно, $P_n(1)=1,\quad n=0,1,2,\ldots$. При $x=-1$ имеем

$$f(-1,t)=\frac{1}{1+t}=1-t+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots,$$

поэтому $P_n(-1)=(-1)^n$. Ясно, что

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}f(x,t)\right]_{t=0} \qquad (2)$$

С другой стороны, производная n-го порядка $\dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}$

при $t=0$ с применением интегральной формулы Коши вычисляется как

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}f(x,t)\right]_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(x,\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi, \qquad (3)$$

где C – замкнутый контур, охватывающий точку $\xi=0$. Далее полагая

$$\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}=1-\xi z$$

в интеграле (3) и учитывая (2), получаем

$$P_n(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{2^n n!}\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}}dz\,.$$

Здесь C_1 – замкнутый контур, охватывающий точку $z=x$. Теперь, используя формулу для n-й производной интеграла Коши, будем иметь

$$P_n(x)=\frac{n!}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что $P_{2k}(x)$ – четная функция, а $P_{2k-1}(x)$ – нечетная.

Так для $n=0,1,2$ имеем $P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра

Получим дифференциальное уравнение, решением которого является $P_n(x)$. Для этого введем функцию $w=\left(x^2-1\right)^n$.
Очевидно, что

$$\left(x^2-1\right)\frac{dw}{dx}-2nxw=0\,.$$

Дифференцируя это тождество $(n+1)$ раз, получим

$$\left[\left(x^2-1\right)\frac{d^{n+2}}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}-n(n+1)\right]\frac{d^n w}{dx^n}\equiv 0\,.$$

Таким образом, функция $\dfrac{d^n w}{d x^n}$, а следовательно, и $P_n(x)$ (поскольку $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n w}{d x^n}$), удовлетворяет уравнению

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2 y}{d x^2}-2x\frac{d y}{d x}+\lambda y=0, \quad \lambda=n(n+1). \tag{5}$$

Это уравнение называется уравнением Лежандра.

Отметим, что полиномы Лежандра можно построить и иначе: искать ограниченное на отрезке $[-1,1]$ решение уравнения (5) в виде степенного ряда $y(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n+\ldots$. При $\lambda=n(n+1)$ этот ряд обрывается на члене с n-й степенью, т.е. при $\lambda=n(n+1)$ решением будет полином n-й степени, который отличается от полинома Лежандра n-й степени лишь постоянным множителем.

Свойство ортогональности

Докажем, что многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1,1]$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)\,dx=0, \text{ если } n\neq k.$$

Действительно в силу уравнения (5) имеем два тождества:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n(x)\equiv 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_k}{dx}\right]+k(k+1)P_k(x)\equiv 0.$$

Первое из них умножим на $P_k(x)$, второе – на $P_n(x)$; результаты вычтем один из другого и полученную разность проинтегрируем по промежутку $[-1,1]$. Получим

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_k\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d p_n}{dx}\right]-P_n\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d p_k}{dx}\right]\right\}dx=$$

$$=[k(k+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx$$

или

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\left[\frac{d p_n}{dx}\cdot P_k-\frac{dP_k}{dx}P_n\right]\right\}dx=$$

$$=(k-n)(k+n+1)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx$$

Следовательно

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)\,dx=\frac{1}{(k-n)(k+n+1)}\left[\left(1-x^2\right)\left(\frac{dP_n}{dx}P_k-\frac{dP_k}{dx}P_n\right)\right]\Big|_{-1}^{1}=0$$

при $n\neq k$.

Прежде чем вычислить норму многочлена Лежандра, мы докажем справедливость двух рекуррентных соотношений

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)x\,P_n(x)+nP_{n-1}(x)\equiv 0, \tag{6}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right]. \tag{7}$$

Для этого продифференцируем по переменным t и x соотношение (1). Получим тождества:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\frac{(x-t)f(x,t)}{\left(1-2xt+t^2\right)}\equiv P_1+2P_2t+\ldots+nP_nt^{n-1}+\ldots,$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=\frac{t\,f(x,t)}{\left(1-2xt+t^2\right)}\equiv\frac{dP_0}{dx}+\frac{dP_1}{dx}t+\ldots+\frac{dP_n}{dx^n}t^n+\ldots$$

Следовательно, имеем

$$(x+t)\left[P_0+P_1t+\ldots+P_nt^n+\ldots\right]\equiv\left(1-2xt+t^2\right)\left[P_1+2P_2t+\ldots+nP_nt^{n-1}+\ldots\right],$$

$$t\left[P_0+P_1t+\ldots+P_nt^n+\ldots\right]\equiv\left(1-2xt+t^2\right)\left[\frac{dP_0}{dx}+\frac{dP_1}{dx}t+\ldots+\frac{dP_n}{dx}t^n+\ldots\right].$$

Сравнивая в последних тождествах коэффициенты при одинаковых степенях t, получим равенства (6)

$$(n+1)P_{n-1}(x)-(2n+1)x\,P_n(x)+n\,P_{n-1}(x)\equiv 0$$

и

$$P_n(x)\equiv\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}. \tag{8}$$

Теперь, дифференцируя соотношения (6), получим

$$(n+1)\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)x\frac{dP_n(x)}{dx}+n\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}\equiv 0.$$

И, наконец, исключая из этого соотношения и соотношения (8) произведение $\frac{xdP_n(x)}{dx}$, приходим к формулам (7).

Отметим, что с помощью (6) и формул

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x$$

можно определить все многочлены Лежандра, а формулы (7) позволяют выразить интеграл $\int P_n(x)dx$ через многочлены $P_{n+1}(x)$ и $P_{n-1}(x)$.

Для вычисления квадрата нормы многочлена Лежандра

$$\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

один из множителей подынтегральной функции $P_n(x)$ выразим через $P_{n-1}(x)$ и $P_{n-2}(x)$ по формуле (6), заменив в ней n на $n-1$. Получим

$$\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n\left[\frac{2n-1}{n}x\,P_{n-1}-\frac{n-1}{n}P_{n-2}\right]dx=\frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1}xP_nP_{n-1}dx.$$

Мы здесь воспользовались ортогональностью многочленов P_n и P_{n-2}. Далее в последнем интеграле произведение xP_n заменим по формуле (6) через P_{n+1} и P_{n-1} будем иметь

$$\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1}P_{n-1}\left\{\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}\right\}dx=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)\,dx$$

или

$$\|P_n\|^2=\frac{2n-1}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2,\quad n=1,2,... \tag{9}$$

из (9) получаем, что

$$\|P_n\|^2=\frac{1}{2n+1}\|P_0\|^2=\frac{2}{2n+1}.$$

Теорема о разложимости

В этом пункте мы приведем без доказательства теорему о разложимости функции в ряд Фурье по многочленам Лежандра:

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *кусочно-непрерывна вместе с производной первого порядка* $\frac{d\,\varphi(x)}{dx}$ *на интервале* $[-1,1]$. *Тогда в каждой точке непрерывности* $\varphi(x)$ *ее ряд Фурье по многочленам Лежандра сходится к этой функции.*

§ 2. Потенциал полой сферы

Применим введенные выше многочлены Лежандра для вычисления потенциала внутри полой сферы радиуса R, составленной из двух полусфер, изолированных друг от друга тонкой прокладкой и заряженных до потенциалов υ_1 и υ_2.

Математическая постановка этой задачи: требуется найти решение $u(r,\theta)$ уравнения

$$\Delta u=0,\quad 0\le r<R, \tag{10}$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$|u(0,\theta)|<\infty,\quad u(R,\theta)=\begin{cases}\upsilon_1, & 0\le\theta<\frac{\pi}{2},\\ \upsilon_2, & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi.\end{cases} \tag{11}$$

Так как потенциал $u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta)$ не зависит от φ, то уравнение Лапласа (10), записанное в сферических координатах, для него будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \tag{12}$$

Сначала найдем решения уравнения (12) вида

$$u=f(r)\varphi(\theta),\ y$$

удовлетворяющее только условию ограниченности. Разделяя, переменные получим

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2 f'(r)\right)}{f(r)}=\frac{-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\varphi'(\theta)\sin\theta\right)}{\varphi(\theta)}=\lambda.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 f'(r)\right)-\lambda\ f(r)=0,\quad \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\varphi'(\theta)\sin\theta\right)+\lambda\varphi=0.$$

В последнем уравнении произведем замену переменной $\xi=\cos\theta$.

Получим уравнение

$$\left(1-\xi^2\right)\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-2\xi\frac{d\varphi}{d\xi}+\lambda\varphi=0,$$

которое при $\lambda=n(n+1)$ имеет ограниченное на $[-1,1]$ решение в виде многочлена Лежандра $P_n(\xi)$. При таких значениях λ уравнение для $f(r)$ имеет ограниченное решение вида

$$f(r)=r^n.$$

Теперь решение исходной задачи (10), (11) ищем в виде, согласно теоремы 1

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{13}$$

Коэффициенты C_n определим из второго краевого условия (11), пользуясь свойством ортогональности многочленов Лежандра:

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}u(R,\theta)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2n+1}{2}\left\{\upsilon_2\int_{-1}^{0}P_n(\xi)\,d\xi+\upsilon_1\int_{-1}^{0}P_n(\xi)\,d\xi\right\}.$$

Последние интегралы вычисляем, пользуясь формулами (6) и (7). Получим

$$C_n=\frac{(\upsilon_2-\upsilon_1)(2n+1)}{2n}P_{n+1}(0). \tag{14}$$

Итак, решение задачи (10, (11) вычисляется по формулам (13) и (14).

Задачи

1. Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что

$$u\big|_{r=R}=f(\theta),$$

где

а) $f(\theta)=\cos\theta$;

б) $f(\theta)=\cos^2\theta$;

в) $f(\theta)=\cos 2\theta$;

2. Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса R и такую, что:

$$(u+u_r)\big|_{r=R}=1+\cos^2\theta.$$

3. Найти функцию, гармоническую вне шара радиуса R и такую, что:

а) $u_r\big|_{r=R}=\sin^2\theta$;

б) $(u-u_r)\big|_{r=R}=\sin^2\theta$;

в) $u_r\big|_{r=R}=A\cos\theta$.

4. Найти гармоническую внутри шарового слоя $1<r<2$ функцию такую, что

$$u\big|_{r=1}=f_1(\theta),\quad u\big|_{r=2}=f_2(\theta),$$

если:

а) $f_1=\cos^2\theta;\quad f_2=\frac{1}{8}\left(\cos^2\theta+1\right)$;

б) $f_1=\cos^2\theta;\quad f_2=4\cos^2\theta-\frac{4}{3}$;

в) $f_1=\frac{1}{2}\cos\theta;\quad f_2=1+\cos 2\theta$.

5. Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса R, если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0, а основание полусферы – при нулевой температуре.

Лекция 32. Сферические функции. Задача Дирихле для шара

Сферические функции проще всего могут быть введены при решении уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных.

§1. Определение сферических функций

Будем искать решения уравнения Лапласа, записанного в сферических переменных r, θ, φ

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (1)$$

вида

$$u(r,\theta,\varphi) = F(r)Y(\theta,\varphi).$$

Тогда для определения $F(r)$ получаем уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dr}\left(r^2F'(r)\right) - \lambda F(r) = 0, \qquad (2)$$

а для определения функции $Y(\theta,\varphi)$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \qquad (3)$$

Определение. *Ограниченные в области* $0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ *решения уравнения* (3), *такие что*

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta,\varphi),$$

называются сферическими функциями.

Если ограниченные решения уравнения (3) искать в классе функций вида

$$Y(\theta,\varphi) = \Psi(\theta)\Phi(\varphi), \qquad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

то для функций $\Psi(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ получим уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\Psi'(\theta)\sin\theta\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Psi(\theta) = 0, \qquad (4)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0. \qquad (5)$$

Из условия периодичности функции $\Phi(\varphi)$ находим $\mu = k^2$ (где k – целое число). Поэтому

$$\Phi(\varphi) = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi.$$

В уравнении (4) произведем замену переменной

$$\cos\theta = \xi.$$

Получим уравнение

$$\left(1-\xi^2\right)\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Psi}{d\xi} + \left[\lambda - \frac{k^2}{1-\xi^2}\right]\Psi = 0, \qquad -1 < \xi < 1. \qquad (6)$$

Определение. *Ограниченные на отрезке* $[-1,1]$ *решения уравнения* (6) *называются присоединенными функциями Лежандра.*

Для отыскания их произведем замену

$$\psi = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}} z(\xi).$$

Для функции $z(\xi)$ получим уравнение

$$\left(1-\xi^2\right)z'' - 2\xi(k+1)z' + [\lambda - k(k+1)]z = 0. \qquad (7)$$

Отметим, что такое же уравнение мы получим из уравнения Лежандра

$$\left(1-\xi^2\right)y'' - 2\xi y' + \lambda y = 0,$$

если продифференцируем его k раз. Поэтому ограниченным на отрезке $[-1,1]$ решением уравнения (7) при $\lambda = n(n+1)$ будет функция

$$z(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k}P_n(\xi).$$

Здесь $P_n(\xi)$ – полином Лежандра (см. лекцию 31).

Следовательно, ограниченное на $[-1,1]$ решение уравнения (6) при $\lambda = n(n+1)$, т.е. присоединенная функция Лежандра $P_n^k(\xi)$, имеет вид

$$P_n^k(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}}\frac{d^k}{d\xi^k}P_n(\xi), \quad 0 \le k \le n. \qquad (8)$$

Итак, $\psi = P_n^k(\xi)$, и поэтому сферическими функциями вида

$$\psi(\theta)\Phi(\varphi), \quad \phi(\varphi+2\pi)=\phi(\varphi)$$

будут следующие функции:

$$Y_n^k(\theta,\varphi)=P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi,\ Y_n^{-k}(\theta,\varphi)=P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi, \quad k=0,1,2,\dots .$$

Эти функции называют фундаментальными сферическими функциями n-го порядка. Ясно, что функции

$$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{k=-n}^{n} C_k Y_n^k(\theta,\varphi)$$

будут также сферическими функциями. Они называются сферическими функциями n-го порядка. При $\lambda = n(n+1)$ уравнение (2) имеет решения

$$F_1(r)=r^n \text{ и } F_2(r)=\frac{1}{r^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$u_1(r,\theta,\varphi)=r^n Y_n(\theta,\varphi), \quad u_2(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^{n+1}}Y_n(\theta,\varphi)$$

являются гармоническими функциями. Они называются шаровыми функциями n-го порядка.

Таким образом, сферические функции n-го порядка, $Y_n(\theta,\varphi)$, являются значениями шаровых функций n-го порядка на единичной сфере.

§ 2. Свойство ортогональности

Используя свойство ортогональности многочленов Лежандра и формулу (8) нетрудно показать, что присоединенные функции Лежандра ортогональны на промежутке $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(\xi)\,P_s^k(\xi)d\xi=0, \text{ при } n\neq s. \tag{9}$$

Квадрат нормы присоединенной функции дается формулой

$$\left\|P_n^k\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left[P_n^k(\xi)\right]^2 d\xi=\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cdot\frac{2}{(2n+1)} \tag{10}$$

Сферические функции обладают свойством ортогональности на единичной сфере s:

$$\iint_s Y_n(\theta,\varphi)\cdot Y_s(\theta,\varphi)d\sigma=0, \text{ если } n\neq s,$$

или

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta,\varphi)\cdot Y_s(\theta,\varphi)\sin\theta\ d\theta\ d\varphi=0. \tag{11}$$

Для доказательства этого заметим, что свойством ортогональности обладают фундаментальные сферические функции:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta,\varphi)\cdot Y_s^p(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=0 \text{ при } (n,k)\neq(s,p),$$

ибо

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^k(\theta,\varphi)\cdot Y_s^p(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\left[\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\cos p\varphi\,d\varphi\right]\cdot\int_{-1}^{1}P_n^k(\xi)\,P_s^p(\xi)\,d\xi=0$$

при $(n,k)\neq(s,p)$. Если $k\neq p$, то первый интеграл правой части равенства равен нулю. Если же $k=p$, но $n\neq s$, то второй интеграл в силу (9) равен нулю.

Из ортогональности фундаментальных сферических функций следует ортогональность (11).

И, наконец, вычислим квадрат нормы

$$\left\|Y_n^k\right\|^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Y_n^k(\theta,\varphi)\right]^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^2 k\varphi\,d\varphi\cdot\int_{-1}^{1}\left[P_n^k(\xi)\right]^2 d\xi.$$

Следовательно, учитывая (10), будем иметь

$$\left\|Y_n^k\right\|^2=\frac{2\pi}{(2n+1)}\cdot\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\varepsilon, \quad \varepsilon=\begin{cases}1, & k\neq 0,\\ 2, & k=0.\end{cases} \tag{12}$$

§ 3. Гармонические многочлены

В этом параграфе мы докажем справедливость следующего утверждения:

Теорема 1. *Шаровые функции* $r^n Y_n(\theta,\varphi)$ *являются однородными гармоническими многочленами* n*-й степени по переменным* x, y, z.

Доказательство. Поскольку

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} C_k Y_n^k(\theta,\varphi),$$

нам достаточно доказать теорему для функций

$$r^n Y_n(\theta,\varphi).$$

Для определенности полагаем $k > 0$. Тогда

$$Y_n^k(\theta,\varphi) = P_n^k(\xi)\cos k\varphi = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{d\xi^k} P_n(\xi)\cos k\varphi =$$

$$= \left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{d\xi^k} \sum_{q=0} a_q \xi^{n-2q} \cos k\varphi = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{q=0} b_q \xi^{n-2q-k} \cos k\varphi,$$

где $\xi = \cos\theta$. Очевидно, достаточно доказать теорему для функций вида

$$r^n \sin^k\theta(\cos\theta)^{n-2q-k} \cos k\varphi.$$

Для таких функций мы имеем

$$r^n \sin^k\theta(\cos\theta)^{n-2q-k} \cos k\varphi = r^k \sin^k\theta \operatorname{Re}\left(e^{ik\varphi}\right) r^{2q} r^{n-2q-k} (\cos\theta)^{n-2q-k} =$$

$$= \operatorname{Re}(x+iy)^k \left(x^2+y^2+z^2\right)^{2q} z^{n-2q-k}.$$

Очевидно, это однородный многочлен n-й степени.

§ 4. Задача Дирихле для шара

Пусть дана сфера радиуса R. Поместим в центр этой сферы начало сферической системы координат (r,θ,φ) и рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \text{ при } r < R, \quad u\big|_{r=R} = f(\theta,\varphi) \text{ (внутренняя задача)}, \tag{13}$$

$$\Delta u = 0 \text{ при } r > R, \quad u\big|_{r=R} = f(\theta,\varphi) \text{ (внешняя задача)}, \tag{14}$$

где $f = f(\theta,\varphi)$ – заданная функция на поверхности сферы. Предполагая возможность разложения функции $f(\theta,\varphi)$ в ряд по сферическим функциям (возможность такого разложения для дважды непрерывно дифференцируемой функции можно обосновать), допускающей почленное интегрирование, получим

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\right) P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{15}$$

где A_{nm} и B_{nm} – коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$\begin{aligned} A_{nm}\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \\ B_{nm}\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь значение нормы $\left\|Y_n^{(m)}\right\|$ определяется из (12).

Формулу (15) перепишем в виде

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi), \quad Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n} \left(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\right) P_n^{(m)}(\cos\theta). \tag{17}$$

Далее общее решение уравнения Лапласа для внутренней краевой задачи (13) можно представить в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \widetilde{Y}_n(\theta,\varphi). \tag{18}$$

Пользуясь граничным условием при $r = R$ и учитывая разложение для $f(\theta,\varphi)$, находим

$$\widetilde{Y}_n(\theta,\varphi) = Y_n(\theta,\varphi). \tag{19}$$

Таким образом, решение исходной задачи (13) дается формулами (18), (19), (17) и (16).

Аналогично находим решение внешней задачи (14):

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi).$$

Задачи

1. Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что:

   а) $u\big|_{r=1} = \cos\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta$;

   б) $u\big|_{r=1} = \sin\theta\,(\sin\varphi + \sin\theta)$.

2. Найти функцию, гармоническую вне единичной сферы и такую, что:

   а) $u\big|_{r=1} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta$;

   б) $u\big|_{r=1} = \cos^2\theta\sin\theta\cdot\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. Найти функцию, гармоническую внутри сферического слоя $1 < r < 2$ и такую, что $u\big|_{r=1} = f_1(\theta,\varphi)$, $u\big|_{r=2} = f_2(\theta,\varphi)$, где:

   а) $f_1 = \sin\theta\sin\varphi$, $f_2 = 0$;

   б) $f_1 = 3\sin 2\varphi\sin^2\theta$, $f_2 = 3\cos\theta$;

   в) $f_1 = 7\sin\theta\cos\varphi$, $f_2 = 7\cos\theta$.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 2-е, Наука, 1971.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. Наука, 1971.
3. Кошляков Н.С., Глипер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Высшая школа, 1970.
4. Куракт Р. Уравнения с частными производными. Мир, 1964.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I и II, Гостехиздат, 1951.
6. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
7. Михлин С.Г. Курс математической физики. Наука, 1968.
8. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 3-е, Физматгиз, 1961.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. Изд. 3-е, Наука, 1965.
10. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. Наука, 1974.
11. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. Наука, 1966.
12. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Наука, 1966.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
14. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.
15. Жибер А.В., Соколов В.В. Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу. Уфа: БГУ, 1996.

Байков Виталий Анварович

Жибер Анатолий Васильевич

Уравнения математической физики

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 07.02.03. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,65. Уч. изд. л. 14,34.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru