Г. АРФКЕН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ

Сокращенный перевод с английского
канд. физ.-матем. наук В. В. Чепкунова

АТОМИЗДАТ
МОСКВА
1970

MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS

GEORGE ARFKEN

DEPARTMENT OF PHYSICS
MIAMI UNIVERSITY, OXFORD OHIO

ACADEMIC PRESS New York and London

Арфкен Г. **Математические методы в физике.** Перев. с англ. М., Атомиздат, 1970.

В монографии изложены разделы математики, к которым наиболее часто приходится обращаться при решении различных физических задач. Построение книги приближает ее к справочному пособию, однако материал изложен значительно подробнее и содержит много примеров из физики, которые необходимы для пояснений.

Книга состоит из 17 глав, в которых рассматриваются векторный анализ, системы координат, тензорный анализ, матрицы и определители, бесконечные ряды, функции комплексного переменного, дифференциальные уравнения второго порядка, теория Штурма — Лиувилля, специальные функции, ряды Фурье, интегральные преобразования, интегральные уравнения, вариационный принцип.

Автору удалось найти оптимальную форму изложения, не перегруженную сложными математическими выкладками и доказательствами.

Книга рассчитана на студентов-физиков, инженеров, а также может быть полезна расчетчикам.

Рисунков — 158, таблиц — 9, библиография — 67 наименований.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Современное состояние науки и темпы ее развития показывают, что ни одна из ее отраслей не может обойтись без помощи математики, методы и приемы которой проникают в такие, казалось бы, далекие и «чуждые» ей области, как биология, медицина, гуманитарные науки и т. п. Что же касается астрономии или теоретической физики, то эти науки (а первая из них существует уже тысячелетия) вообще немыслимы без математики. Более того, математика обязана им если не зарождением, то, по крайней мере, развитием таких разделов, как векторный и тензорный анализ, вариационное исчисление и т. д.

Однако с сожалением приходится констатировать, что общий уровень математизации многих отраслей науки, в том числе и технических, остается весьма низким, хотя уже сейчас накопилось достаточно примеров блестящего использования математических методов в самых необычных разделах. Уже давно известно, что на стыках различных наук исследователя всегда ждут неожиданные и интересные результаты. Так вот, математика да еще, пожалуй, логика в ее строго научном понимании всегда готовы к «стыковке» с любой другой наукой.

С этой точки зрения предлагаемая читателю книга Г. Арфкена «Математические методы в физике» представляется весьма ценной. Широта охвата различных разделов математики в сочетании с ясным, достаточно строгим и в то же время «неотпугивающим» изложением делает ее очень полезной. Многочисленные примеры еще более облегчают пользование книгой, так как конкретно иллюстрируют возможности рассматриваемых математических методов.

Общение читателя с этой книгой можно сравнить с консультацией, которую *сведущий* человек получает у *знаю-*

щего, т. е. у читателя предполагается наличие определенного математического фундамента. После первого и неотложного совета автор рекомендует в нужных случаях обращаться к специальной литературе.

Как пишет автор в своем предисловии, материалом для книги послужили лекции, прочитанные для студентов. Однако подбор и изложение материала свидетельствуют не только просто о желании автора обучить студента математике, а, скорее, о том, чтобы человек, окончивший учебное заведение, сумел бы воспользоваться этой математикой. И в этом, на наш взгляд, главное достоинство книги.

Допущенные при переводе сокращения, главным образом за счет несущественных упражнений, приводимых в конце разделов, не затронули ни существа содержания, ни общей конструкции книги. При переводе были устранены замеченные опечатки.

В. Чепкунов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В основу этой книги положены два курса лекций по математике, прочитанные автором для физиков за последние 14 лет; один из них читался для младших курсов, а другой для выпускников. Книга является пособием по совершенствованию в области математики для студентов, которые в дальнейшем будут специализироваться по теоретической физике. Автор надеется, что на этой математической основе у читателя выработаются определенные навыки и искусство расчета.

Книга построена с учетом двух основных принципов. Во-первых, текст составлен таким образом, чтобы помочь в проведении самостоятельных выкладок. Во-вторых, хотя по тексту часто приводятся перекрестные ссылки, каждую главу можно изучать отдельно, независимо от других.

Язык математики и методы этой науки, как в этом убедится читатель, имеет свою красоту и изящество. К сожалению, эту красоту способен увидеть не каждый: ее в полной мере может оценить знаток, тогда как для начинающего она останется незамеченной. Поэтому, стараясь, насколько это возможно, обратить внимание именно на внутреннюю стройность и изящество математических выкладок, автору приходилось намеренно жертвовать ими с тем, чтобы изложение приобрело большую гибкость и ясность именно *для студентов*.

То же самое можно сказать и о математической строгости. Автор не ставил перед собой цели довести логику и строгость изложения до такого уровня, который затруднял бы практическое использование математического аппарата. В книге везде приводятся объяснения вводимым ограничениям и делаются предупреждения против слепого и неосмысленного применения математических формул.

Второй основной принцип построения книги заключается в том, чтобы дать возможность читателю обоснованно подходить к решению различных задач и проиллюстрировать взаимосвязь математики с теоретическими и прикладными науками.

Этот же принцип сыграл также основную роль при подборе и расположении материала. Например, в главе о дифференциальных уравнениях основной упор делается не на ряд абстрактных и сравнительно малопонятных доказательств, которые для непосвященного имеют характер математических головоломок, а на решения и общие свойства этих уравнений, с которыми студенты чаще всего сталкиваются на практике.

Безусловно, при написании книги такого типа автор пользовался помощью и испытывал на себе влияние многих людей. Я весьма благодарен профессорам, которые были моими учителями по физике и математике и воспитали во мне любовь к этим наукам. Я благодарю также моих коллег за их помощь и ценную критику. Особенно хочется отметить критические замечания и реакцию студенческой аудитории, которой я читал лекции, послужившие основой для этой книги.

Г. Арфкен

ГЛАВА 1

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В науке и технике часто встречаются величины, которые вполне определяются одним числом, так называемой абсолютной величиной, например масса, время, температура и т. д. Эти величины называют *скалярными*. Однако многие физические величины определяются не только числом, но и направлением, например перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс и момент количества движения. Эти величины называют *векторными*. Чтобы отличать векторные величины от скалярных, в дальнейшем будем обозначать их прямым жирным шрифтом (**V**.)

Интересно заметить, что все перечисленные векторные величины заимствованы из механики, однако при развитии механики векторный анализ не был использован; более того, он еще не был создан. Потребность в векторном анализе возникла после того, как Максвелл разработал электромагнитную теорию и стала ясна векторная природа электрического и магнитного полей.

Графически любую векторную величину (в дальнейшем будем называть ее *вектором*) удобно представлять стрелкой, длина которой пропорциональна величине вектора, а направление определяет направление вектора. За положительное принято направление, указанное этой стрелкой. При таком определении сумма векторов

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.1}$$

означает совмещение начала вектора **B** с концом вектора **A**. Стрелка, соединяющая начало вектора **A** с концом вектора **B**, определяет вектор **C**. Эта процедура сложения векторов по правилу треугольника — уравнение (1.1)— проиллюстрирована на рис. 1.1. Дополняя полученный треугольник до параллелограмма, видим (рис. 1.2), что

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \tag{1.2}$$

Правило параллелограмма сложения векторов можно наглядно иллюстрировать следующим образом. Пусть груз

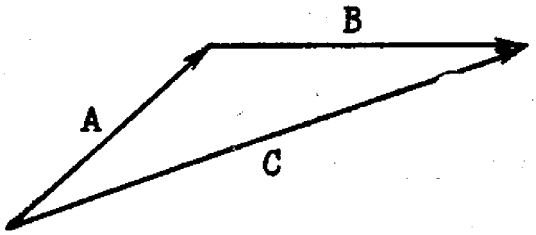


Рис. 1.1. Правило треугольника при сложении векторов.

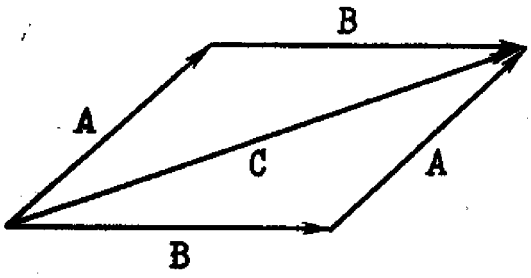


Рис. 1.2. Правило параллелограмма при сложении векторов.

подвешен за две веревочки. Если точка подвеса O (рис. 1.3) находится в покое, то векторная сумма двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ уравновешена направленной вниз силой тяжести $\mathbf{F}_3$.

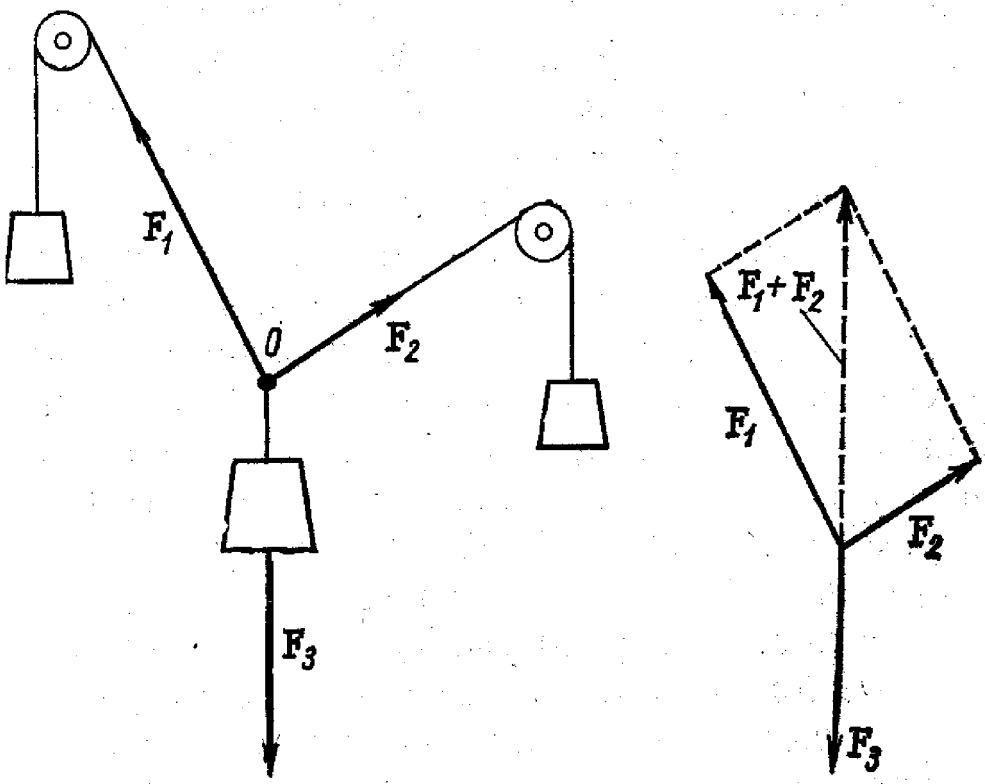


Рис. 1.3. Равновесие сил $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$.

В приведенном примере правило параллелограмма проверяется непосредственно *.

Отметим, что под векторами понимаются геометрические объекты, не зависящие от системы координат. Более того,

* Строго говоря, сложение по правилу параллелограмма введено как определение. Приведенный пример показал, что если при построении параллелограмма создано условие равновесия, а силы — векторы, то результирующая сила равна нулю.

мы даже еще и не вводили никакой системы координат. Это свойство независимости вектора от системы координат более подробно рассматривается в следующем разделе.

Представление вектора **A** в виде направленной стрелки дает возможность определить его несколько иначе. Вектор **A** (рис. 1.4), направленный из начала системы отсчета *, оканчивается в точке (x_1, y_1, z_1). Следовательно,

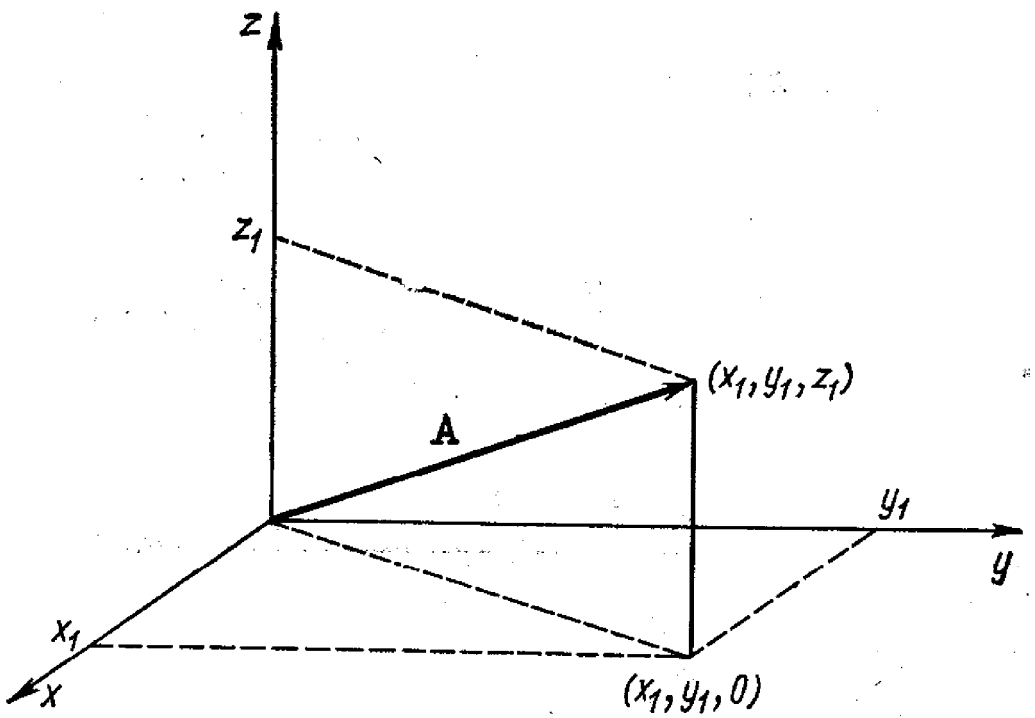


Рис. 1.4. Компоненты вектора в декартовой системе координат.

если мы условимся, что начало вектора совпадает с началом координат, то положение его конца может быть определено декартовыми координатами (x_1, y_1, z_1) его стрелки.

Символом **A** можно обозначить любую векторную величину (импульс, напряженность электрического поля и т. д.), однако некоторые векторные величины, например расстояние от начала координат до точки (x_1, y_1, z_1), обозначают специальным символом **r** (его называют *радиусом-вектором*). Причем произвольно это расстояние можно обозначать либо **r**, либо совокупностью координат (x_1, y_1, z_1) конца вектора:

$$\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1). \qquad (1.3)$$

* Читатель может убедиться, что начало вектора мы могли поместить в любую точку декартовой системы координат. Начало системы выбрано из соображения простоты.

Обозначим символом r абсолютную величину радиуса-вектора. Легко убедиться (рис. 1.5), что координаты конца вектора связаны с абсолютной величиной вектора соотношениями

$$x_1 = r\cos\alpha,\ y_1 = r\cos\beta,\ z_1 = r\cos\gamma. \qquad (1.4)$$

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы, а α, β, γ — соответственно углы между данным вектором

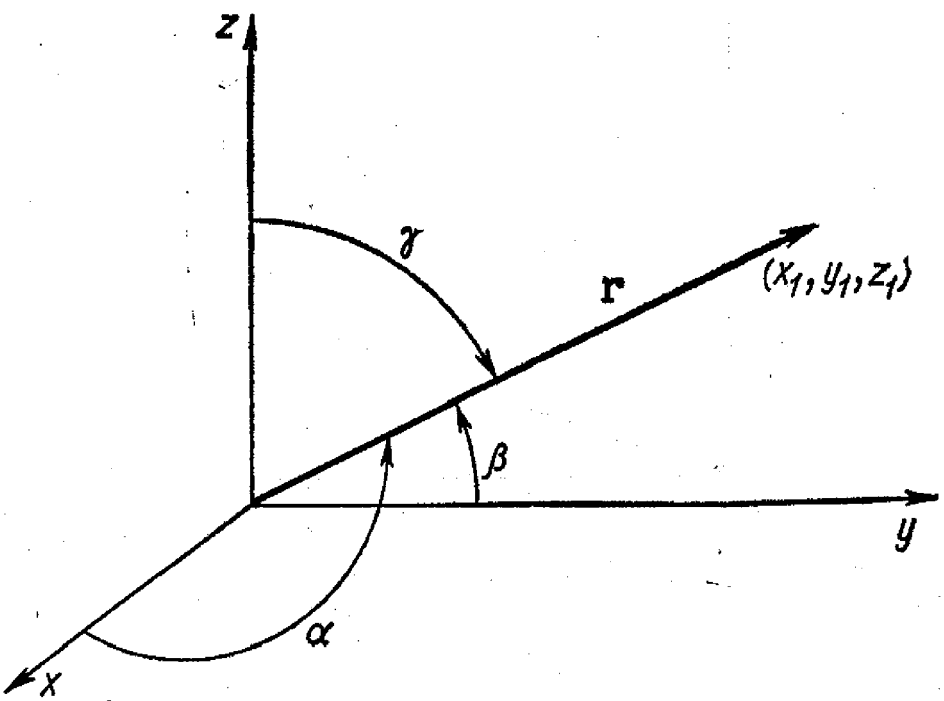


Рис. 1.5. Направляющие косинусы.

и положительными направлениями осей x, y, z. Величины x_1, y_1 и z_1 называются *компонентами* (декартовыми) радиуса-вектора $\mathbf{r}$ или его *проекциями*.

Любой вектор $\mathbf{A}$ можно разложить на компоненты (или спроектировать на координатные оси):

$$A_x = A\cos\alpha. \qquad (1.5)$$

Данный вектор можно представлять либо символом $\mathbf{A}$, либо компонентами (A_x, A_y, A_z).

Введем теперь единичные векторы в направлении каждой из координатных осей. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — соответственно векторы единичной длины, направленные вдоль положительных полуосей x, y, z. Тогда $\mathbf{i}A_x$ — вектор, величина которого равна A_x, а направление совпадает с положительным направлением оси x. Согласно операции векторного

сложения,

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z, \tag{1.6}$$

откуда следует, что вектор равен векторной сумме своих компонент. Заметим, что если $\mathbf{A} = 0$, то каждая из его компонент в отдельности также равна нулю $A_x = A_y = A_z = 0$. В соответствии с теоремой Пифагора абсолютная величина вектора $\mathbf{A}$ равна $A = (A_x^2 + A_x^2 + A_z^2)^{1/2}$. В гл. 2 будет показано, что разложение вектора на компоненты можно произвести и в других системах координат. Здесь ограничимся только декартовыми координатами.

Сложение и вычитание векторов можно выполнить, используя компонентное представление. Для $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$ и $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z$ справедливо

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_x \pm B_x) + \mathbf{j}(A_y + B_y) + \mathbf{k}(A_z + B_z). \tag{1.7}$$

Пример. Пусть $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, тогда

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 8\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Упражнения

1. Определить $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ по заданным $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
2. Вектор $\mathbf{A}$, длина которого равна 10, составляет равные углы с осями координат. Найти A_x, A_y и A_z.
3. Определить компоненты единичного вектора, который лежит в плоскости xy и составляет равные углы с положительными направлениями осей x и y.

1.2. ПОВОРОТ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Определение вектора заданием его абсолютной величины и направления не вполне строгое. Есть величины, например коэффициент упругости и коэффициент преломления в анизотропных кристаллах, которые характеризуются абсолютной величиной и направлением, но тем не менее не являются векторами. Кроме того, данное наглядное определение вектора неудобно и не может быть обобщено на более сложные величины, поэтому дадим новое определение вектора, используя для этой цели радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Для введения нового определения имеются важные физические причины. Мы описываем окружающий нас

мир с помощью математики, но любое физическое описание должно быть *независимым* от математического аппарата. Иногда сравнивают физическую теорию с сооружением, а математический аппарат со строительными лесами, без которых невозможно возвести это сооружение. В конце

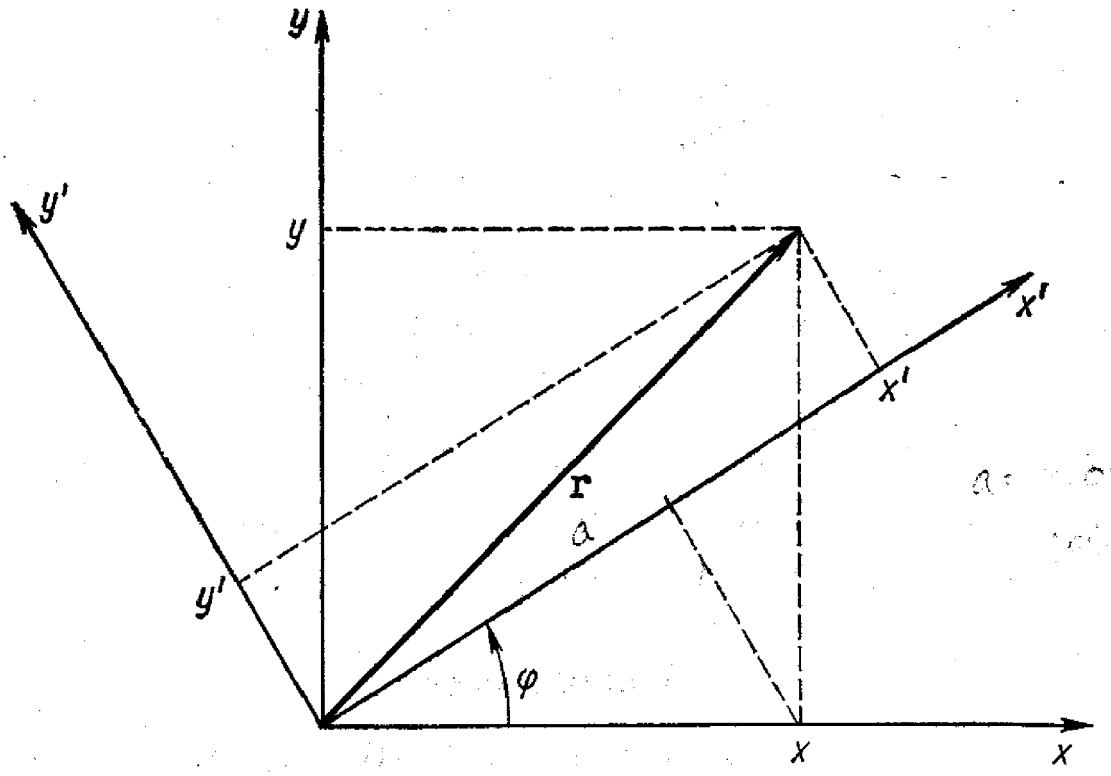


Рис. 1.6. Вращение декартовой системы координат.

строительства леса убирают и взору открывается законченное здание.

В дальнейшем будем предполагать, что пространство изотропно, т. е. отсутствует какое-либо выделенное направление или, иначе, все направления равноправны. В этом случае исследуемая физическая система или сформулированный физический закон не должны зависеть от выбора или от *ориентации* системы координат.

Теперь мы вновь обратимся к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ как геометрическому объекту, не зависящему от системы координат. Рассмотрим $\mathbf{r}$ в двух различных системах, одна из которых повернута относительно другой. Для простоты ограничимся сначала двумерным случаем. Если координатные оси x и y повернуты против часовой стрелки на угол φ и при этом положение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ фиксировано, можно записать следующие соотношения, связывающие компоненты радиуса-вектора в неподвижной систе-

ме с компонентами того же вектора в повернутой (рис. 1.6):

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \qquad (1.8)$$

Мы видели в разд. 1.1, что вектор можно представить с помощью координат его концевой точки, иными словами, координаты этой точки пропорциональны компонентам вектора. Следовательно, компоненты вектора должны преобразовываться при повороте координатных осей так же, как координаты точки (или как радиус-вектор **r**). Более того, если любая пара величин (A_x, A_y), заданных в декартовой системе координат xy, преобразуется в (A'_x, A'_y) поворотом системы координат так, что

$$A'_x = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi, \quad A'_y = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi, \qquad (1.9)$$

то мы считаем A_x и A_y компонентами вектора **A**. Наш вектор определен теперь законом преобразования его компонент при повороте системы координат. Если A_x и A_y преобразуются так же, как компоненты двумерного радиуса-вектора, они являются компонентами вектора **A**. Если A_x и A_y ведут себя при повороте системы координат иначе, то из этих величин нельзя образовать вектор.

Чтобы сделать определение вектора более полным, необходимо выяснить смысл величин A'_x и A'_y в уравнениях (1.9). Предположим, что компоненты **A** — функции координат и, кроме того, некоторого постоянного вектора **c**:

$$A_x = A_x(x, y, c_x, c_y), \quad A_y = A_y(x, y, c_x, c_y). \qquad (1.10)$$

В повернутой системе координат **A** имеет компоненты A'_x и A'_y, которые также зависят от координат этого вектора (в этой же системе) и **c**:

$$A'_x = A'_x(x', y', c'_x, c'_y), \quad A'_y = A'_y(x', y', c'_x, c'_y). \qquad (1.11)$$

Используя уравнения (1.8), координаты x', y', c'_x, c'_y можно выразить через координаты неподвижной системы и угол поворота φ. Вообще должна существовать некоторая зависимость от угла поворота. Однако такая зависимость от ориентации нежелательна. Она означает, что, вопреки исходному предположению, можно выделить некоторую преимущественную систему. Поэтому мы ограничимся функциями, которые не зависят от ориентации. Очевидно,

в частном случае, когда $\varphi = 0$, $A_x = A'_x$, $A_y = A'_y$. Ясно, что A'_x и A'_y зависят от x', y', c'_x и c'_y так же, как A_x и A_y от x, y, c_x, c_y.

Пример 1. Дана пара величин $(-y, x)$. Показать, что эти величины образуют двумерный вектор.

Исследуем, как преобразуются эти величины при повороте системы на угол φ. Имеем

$$V'_x = -y\cos\varphi + x\sin\varphi, \quad V'_y = y\sin\varphi + x\cos\varphi,$$

где $V_x = -y$, $V_y = x$. Используя (1.8), получаем $V'_x = -y'$, $V'_y = x'$, т. е. данная пара величин удовлетворяет уравнениям (1.9), определяющим двумерный вектор. Таким образом, пара $(-y, x)$ представляет собой компоненты вектора.

Пример 2. Рассмотрим $\mathbf{V} = \mathbf{i}x - \mathbf{j}y = (x, -y)$. Согласно (1.9), $V'_x = x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$, $V'_y = -y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi$. Подставляя $V_x = x$ и $V_y = -y$, получаем

$$V'_x = V_x\cos\varphi - V_y\sin\varphi, \quad V'_y = V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi.$$

Эти соотношения не удовлетворяют данному определению вектора. Следовательно, пара $(x, -y)$ не может быть вектором.

Многие авторы предпочитают называть функции A_x и A_y, удовлетворяющие уравнениям (1.9), компонентами (двумерного) *векторного поля*. Однако в отличие от векторных полей существуют *постоянные векторы*, например $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, которые вообще никак не преобразуются, т. е. зависимость $\mathbf{i}'$ от x' и y' такая же, как и от x и y. Действительно, вектор $\mathbf{i}$ вообще не зависит от x и y и является постоянным.

Для перехода к трех- и n-мерному пространству удобно воспользоваться более компактной записью. Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1, \ a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \\ y &= x_2, \ a_{21} = -\sin\varphi, \ a_{22} = \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Тогда уравнения (1.9) можно переписать так:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \tag{1.13}$$

Коэффициент a_{ij} можно отождествить с направляющими косинусами (как косинусом угла между x'_i и x_j), т. е.

$$a_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \sin\varphi,$$

$$a_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi.$$

Преимущество новой записи * в том, что можно ввести символ суммирования Σ и переписать уравнения (1.13) в виде

$$x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2. \tag{1.14}$$

Заметим, что индекс i оставлен здесь как параметр, который дает первое уравнение, если положить его равным 1, и второе уравнение, когда он равен 2. Очевидно, j — индекс суммирования и, так же как и переменная интегрирования, может быть обозначен любой другой буквой.

Теперь очень легко произвести обобщение на случай трех, четырех и более измерений. Набор из N величин V_j определяет компоненты N-мерного вектора $\mathbf{V}$ тогда и только тогда, когда значения этих величин в повернутой системе координат задаются с помощью формулы

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.15}$$

Как и раньше, a_{ij} есть косинус угла между x_i' и x_j.

Исходя из определения a_{ij} как косинуса угла между положительными направлениями осей x_i' и x_j, можно записать в декартовых координатах **

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}. \tag{1.16}$$

Подчеркнем, что это *частные производные*. Подставляя (1.16) в (1.15), получаем

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} V_j. \tag{1.17}$$

---

* Читателя может удивить замена одного параметра φ четырьмя: a_{ij}. Очевидно, что коэффициенты a_{ij} не дают минимального набора параметров. В случае двух измерений четыре коэффициента a_{ij} удовлетворяют трем соотношениям, записанным в форме (1.18). Оправданием для более многословной записи набора направляющих косинусов служит удобство такой записи. Это станет более очевидным при чтении гл. 3 и 4.

** Нужно продифференцировать $x_i' = \sum a_{ij} x_j$ по x_j. См. обсуждение формулы (1.21).

Направляющие косинусы a_{ij} удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \tag{1.18}$$

или, что то же самое,

$$\sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}. \tag{1.19}$$

Здесь δ_{jk} — дельта-символ Кронекера, определенный как

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ для } j = k, \\ 0 \text{ для } j \neq k. \end{cases} \tag{1.20}$$

Подстановкой a_{ij} из (1.12) легко убедиться, что уравнения (1.18) и (1.19) справедливы и для двумерного случая. В результате для $j = k$ имеем хорошо известное тождество

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Чтобы убедиться в справедливости уравнения (1.18) в общем случае, можно использовать выражение (1.16):

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k}. \tag{1.21}$$

Последнее равенство в (1.21) вытекает из обычных правил нахождения частной производной в предположении, что x_j есть функция x_1', x_2', x_3' и т. д. Конечный результат, $\partial x_j/\partial x_k$, равен δ_{jk}, так как x_j и x_k ($j \neq k$) предполагаются взаимно перпендикулярными (для двух или трех измерений) или ортогональными (для любого числа измерений). Очевидно, если $j = k$, частная производная равна 1.

В новом определении вектора через закон преобразования его компонент следует обратить внимание на два момента: 1) оно удобно для описания различных физических явлений; 2) служит основой для перехода к новому разделу математики — тензорному анализу (гл. 3).

Упражнения

1. Задан *постоянный* вектор $\mathbf{V}$ с компонентами $V_x = 1$ и $V_y = 0$. Показать, что компоненты этого вектора в повернутой системе координат имеют вид: $V_x' = \cos\varphi$, $V_y' = -\sin\varphi$, что соответствует закону преобразования векторов. Очевидно, зависимость от угла φ можно

было ожидать заранее. Введя постоянный вектор, мы выделили определенное направление в пространстве.

2. Определить, удовлетворяют ли закону векторного преобразования (1.15) величины: $(x-y,\ x+y,\ 0)$ при повороте вокруг оси z; $(0,\ 2z+y,\ z-2y)$ при повороте вокруг оси x; $(y^2+z^2,\ -xy\ -xz)$ при повороте вокруг каждой из координатных осей.

3. Показать, что $(xyc_x+y^2c_y, -x^2c_x-xyc_y)$ образует вектор. Величины c_x и c_y являются компонентами постоянного вектора **c**. Проделать то же для $(xyc_x-x^2c_y,\ y^2c_x-xyc_y)$.

4. Исследовав вращение вокруг любой из координатных осей, ответить на вопрос, являются ли три функции $V_x=a_1(x^2+y^2+z^2)$, $V_y=a_2(x^2+y^2+z^2)$ и $V_z=a_3(x^2+y^2+z^2)$ компонентами вектора (a_i — постоянные).

5. Двумерный вектор **V** задан в виде $(ax+by,\ cx+dy)$, где a, b, c и d — постоянные. Доказать, что вектор **V** есть линейная комбинация радиального вектора $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y$ и тангенциального вектора $\mathbf{t}=\mathbf{i}y-\mathbf{j}x$:

$$\mathbf{V}=a\mathbf{r}+b\mathbf{t}.$$

Замечание. Закон векторного преобразования должен соблюдаться для любых углов и любых точек (x, y).

1.3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Определив векторы, можно перейти к рассмотрению их произведения. Законы перемножения векторов должны быть математически непротиворечивыми. Из всех возможных определений перемножения векторов выберем два, которые представляют интерес как с математической, так и с физической точки зрения. В гл. 3 будет дано еще одно определение.

Произведение вида $AB\cos\theta$ (в котором A и B — абсолютные величины двух векторов; θ — угол между ними) встречается в физике довольно часто. Например, выражение

$$\text{работа} = \text{сила} \times \text{перемещение} \times \cos\theta$$

обычно рассматривается как произведение перемещения (пути) и проекции силы на направление вдоль него.

Определим *скалярное произведение* векторов **A** и **B** следующим образом:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\sum_i A_iB_i. \qquad (1.22)$$

Заметим, что из определения (1.22) следует $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. Единичные векторы **i**, **j** и **k** удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1, \qquad (1.22a)$$

тогда как

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0. \qquad (1.22б)$$

Если переориентировать оси и направить новую ось x вдоль $\mathbf{A}^*$ (рис. 1.7), то $A_x = A$, $A_y = 0$, $A_z = 0$ и $B_x = B\cos\theta$. В этом случае на основании формулы (1.22) получим соотношение

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \qquad (1.23)$$

которое можно принять в качестве второго определения скалярного произведения. Оно показывает, что работа есть скалярное произведение силы на перемещение.

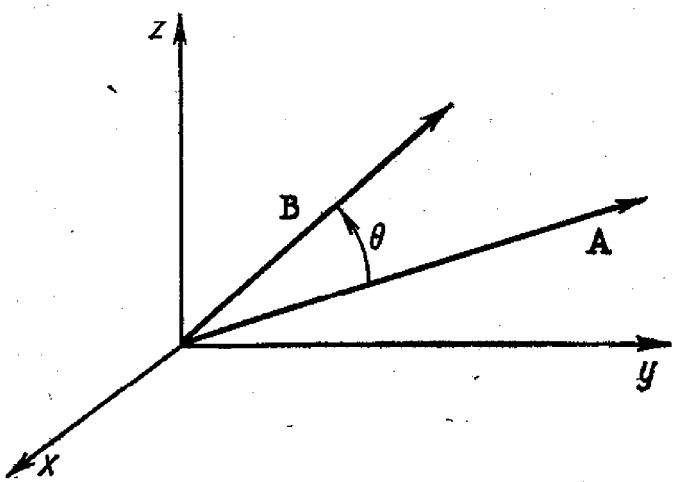


Рис. 1.7. Скалярное произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$.

Пример. Используя (1.22) для двух векторов, определенных в примере из разд. 1.1, получаем $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(12-12-9)=-9$. В этом случае проекция **A** на **B** (или **B** на **A**) отрицательна. Действительно, $|\mathbf{A}|=(36+16+9)^{1/2}=7{,}82$, $|\mathbf{B}|=(419+9)^{1/2}=4{,}70$ и $\cos\theta=0{,}408$, $\theta=114{,}1°$.

Если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ и при этом известно, что $\mathbf{A}\neq 0$ и $\mathbf{B}\neq 0$, то на основании (1.23) $\cos\theta=0$ или $\theta=90°$, $270°$ и т. д. В этом случае векторы **A** и **B** должны быть взаимно перпендикулярны, иначе говоря, **A** и **B** *ортогональны*. Единичные векторы **i**, **j** и **k** являются *ортогональными* векторами.

Для дальнейшего развития понятия ортогональности предположим, что **n** — единичный вектор, а **r** — ненулевой вектор, лежащий в плоскости xy, т. е. $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y$ (рис. 1.8). Если $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ при любых **r**, то **n** перпендикулярен (ортогонален) к плоскости xy.

Мы еще не убедились в оправданности слова *скалярное*, т. е. пока еще не доказано, что скалярное произведение есть действительно скалярная величина. Для этого нужно

* Инвариантность $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ относительно поворота координат доказывается ниже.

исследовать поведение произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ при повороте координатной системы. С помощью (1.15) представим ска-

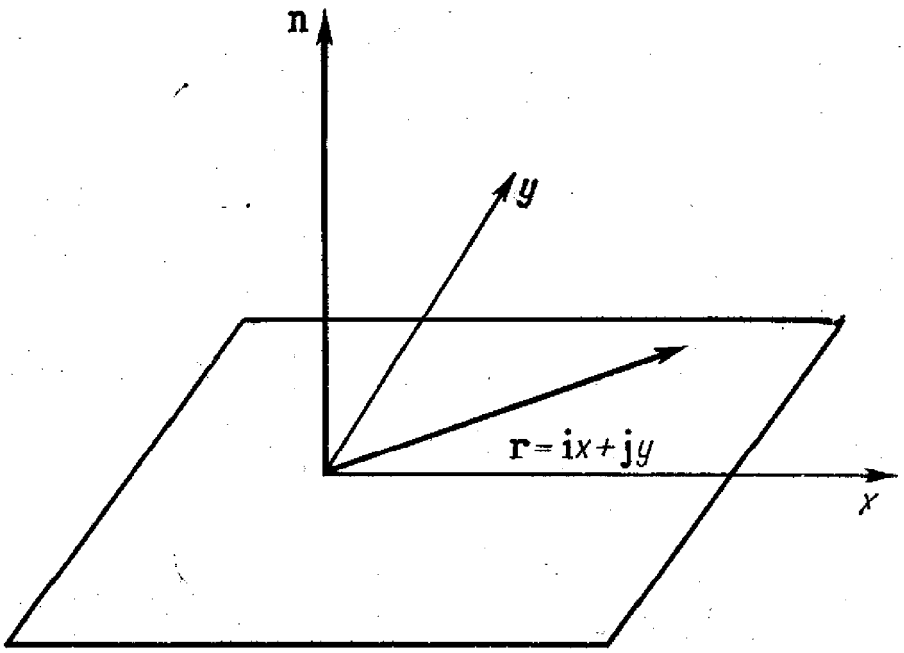


Рис. 1.8. Нормальный вектор.

лярное произведение в виде

$$A'_xB'_x + A'_yB'_y + A'_zB'_z = \sum_i a_{xi}A_i \sum_j a_{xj}B_j + \\ + \sum_i a_{yi}A_i \sum_j a_{yj}B_j + \sum_i a_{zi}A_i \sum_j a_{zj}B_j. \qquad (1.24)$$

Используя индексы k, l, получаем

$$\sum_k A'_kB'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li}A_ia_{lj}B_j. \qquad (1.25)$$

Перегруппировав далее члены, придем к соотношению

$$\sum_k A'_kB'_k = \sum_i \sum_j \sum_l (a_{li}a_{lj})A_iB_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij}A_iB_j = \sum_i A_iB_i. \qquad (1.26)$$

Последние две операции произведены с учетом ортогональности направляющих косинусов (1.19) и определения δ-символа Кронекера (1.20), благодаря которому в уравнении (1.26) суммирование по j исчезло. Конечно, можно положить $i = j$ и исключить суммирование по i. Уравне-

ние (1.26) приводит к равенству

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_i A_i B_i, \tag{1.27}$$

соответствующему определению скалярной величины, которая *инвариантна* относительно поворота системы координат.

Аналогично рассмотрим произведение вектора $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ на самого себя, используя инвариантность скалярного произведения:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}+2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}. \tag{1.28}$$

Квадрат абсолютной величины вектора $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = C^2 \tag{1.29}$$

является инвариантом, следовательно, произведение

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2) \tag{1.30}$$

инвариантно относительно поворота системы координат, поскольку инвариантна правая часть уравнения (1.30). Следовательно, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ — скаляр.

Уравнение (1.28) можно записать в иной форме

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta, \tag{1.31}$$

которая называется *законом косинусов* (рис. 1.9). Сравнивая уравнения (1.28) и (1.31), мы еще раз проверяем уравнение (1.23) и убеждаемся в векторной природе закона косинусов.

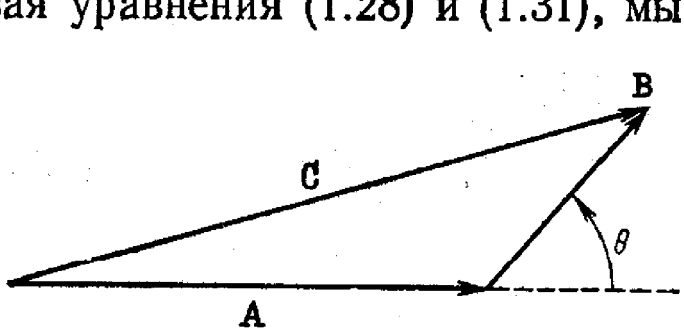


Рис. 1.9. Закон косинусов.

Интересно проиллюстрировать геометрический смысл скалярного произведения на примере из общей теории относительности. Рассмотрим четырехмерную сферу $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ в пространстве (x, y, z, w). Поверхность этой сферы может быть задана вектором $\mathbf{r} = (x, y, z, w)$, на который наложено условие $|\mathbf{r}| = 1$. Построим единичный вектор $\mathbf{t}$, касательный к поверхности этой сферы. В качестве одного из возможных примеров возьмем $\mathbf{t} = (y, -x, w, -z)$. Чита-

тель может проверить, что $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = 1$, откуда ясно, что это единичный вектор; кроме того, $\mathbf{t}\cdot\mathbf{r} = 0$, следовательно, это касательный вектор в любой точке поверхности сферы.

Существует двумерный аналог (см. упр. 1 к разд. 1.1), однако трехмерного аналога нет.

Упражнения

1. Разложением скалярного произведения показать, что если два вектора имеют направляющие косинусы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 соответственно, то

$$\cos\theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2,$$

где θ — угол между двумя векторами.

2. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. *Ответ*: $\cos\theta = 0$, $\theta = \pi/2$.

3. Два единичных вектора $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ либо параллельны, либо перпендикулярны. Показать, что условие ортогональности направляющих косинусов (1.18) следует из скалярного произведения этих векторов $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$.

1.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Вторая форма перемножения векторов связана с использованием синуса угла, заключенного между двумя векторами. Например, момент количества движения определяется как произведение длины плеча на импульс или как произведение расстояния до тела на импульс и на $\sin\theta$ (рис. 1.10).

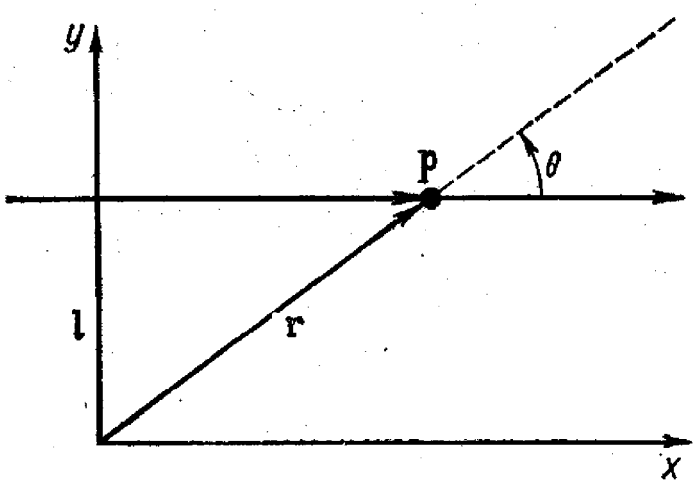


Рис. 1.10. Момент количества движения ($\mathbf{p}$ — импульс; $\mathbf{l}$ — длина плеча; $\mathbf{r}$ — расстояние до тела).

Для рассмотрения различных задач, связанных с такими величинами, как момент количества движения, момент инерции, угловая скорость, определим векторное произведение в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \tag{1.32}$$

где $C = AB\sin\theta$. В отличие от скалярного произведения в данном случае $\mathbf{C}$ уже вектор, и мы, по определению, пола-

гаем, что этот вектор перпендикулярен к плоскости векторов **A** и **B**, а направление его таково, что совокупность векторов **A**, **B** и **C** образует правую систему координат. При указанном выборе направления имеем

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}\ \text{(антикоммутация)}. \tag{1.32а}$$

Из определения векторного произведения следует

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, \tag{1.32б}$$

тогда как

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.\end{aligned}\right\} \tag{1.32в}$$

Векторное произведение имеет важную геометрическую интерпретацию, которой мы воспользуемся в дальнейшем.

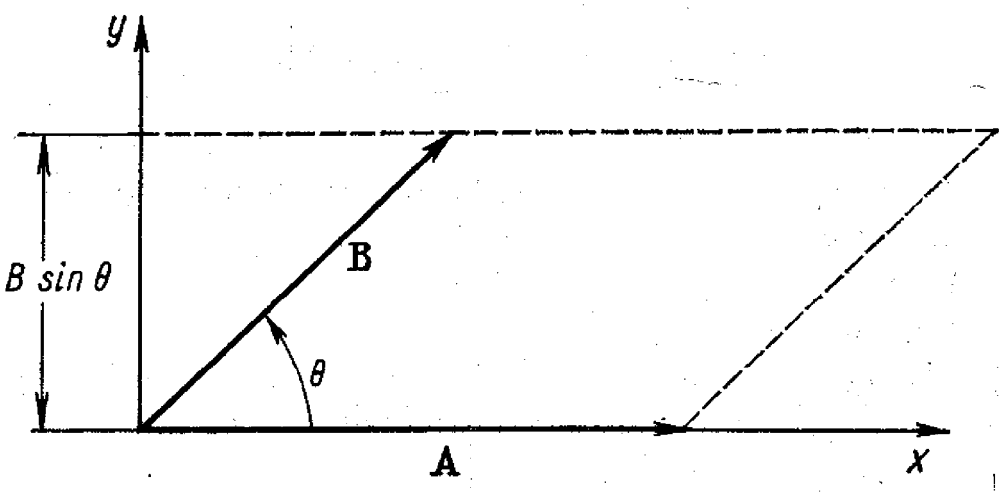


Рис. 1.11. Представление векторного произведения в виде параллелограмма.

В параллелограмме, образованном векторами **A** и **B** (рис. 1.11), $B\sin\theta$ равно высоте, если вектор **A** принят за основание. Тогда $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta$ — площадь параллелограмма. Итак, вектор $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ перпендикулярен к плоскости параллелограмма, образованного векторами **A** и **B**, и по абсолютной величине равен его площади.

Попутно заметим, что уравнения (1.32в) и видоизмененное (1.32б) стимулировали возникновение нового класса чисел *кватернионов*. При этом (1.32б) переписывают в виде

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=-1.$$

Другое определение векторного произведения $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ связано с записью компонент вектора C:

$$C_x=A_yB_z-A_zB_y,\quad C_y=A_zB_x-A_xB_z,$$
$$C_z=A_xB_y-A_yB_x, \tag{1.33}$$

или

$$C_i=A_jB_k-A_kB_j,\quad i,\ j,\ k\text{ — все различны}, \tag{1.34}$$

с циклической перестановкой индексов i, j, k. Векторное произведение C удобно записать в виде определителя (см. разд. 4.1)

$$\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}, \tag{1.35}$$

разложение которого по верхней строке дает три компоненты C, записанные в виде (1.33).

Пример. Пусть $\mathbf{A}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Тогда векторное произведение

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 6 & 4 & 3\\ 2 & -3 & -3\end{vmatrix}=\mathbf{i}(-12+9)-\mathbf{j}(-18-6)+\mathbf{k}(-18-8)=$$
$$=-3\mathbf{i}+24\mathbf{j}-26\mathbf{k}.$$

Чтобы показать эквивалентность определений векторного произведения (1.32) и (1.33), рассмотрим скалярные произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$. Исходя из определения (1.33), получаем

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=A_x(A_yB_z-A_zB_y)+$$
$$+A_y(A_zB_x-A_xB_z)+A_z(A_xB_y-A_yB_x)=0. \tag{1.36}$$

Аналогично

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0. \tag{1.37}$$

Уравнения (1.36) и (1.37) показывают, что вектор C перпендикулярен и к вектору A, и к вектору B ($\cos\theta=0, \theta=\pm 90°$) и, следовательно, перпендикулярен к плоскости, в которой они лежат. Положительное направление определяется дополнительным условием, например $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ ($C=+A_xB_y$).

Рассмотрим далее произведение

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 = \\ = A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta = A^2B^2\sin^2\theta, \tag{1.38}$$

откуда

$$C = AB\sin\theta. \tag{1.39}$$

В уравнении (1.38) мы разлагали векторное произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ на компоненты в виде (1.33) и затем использовали формулы скалярного произведения (1.22). Из уравнений (1.36), (1.37) и (1.39) следует, что два определения векторного произведения (1.32) и (1.33) эквивалентны.

Остается теперь доказать, что $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ действительно вектор, т. е. подчиняется закону преобразования векторов (1.15). В повернутой системе координат

$$C_i' = A_j'B_k' - A_k'B_j' = \sum_l a_{jl}A_l \sum_m a_{km}B_m - \sum_l a_{kl}A_l \sum_m a_{jm}B_m = \\ = \sum_{l,m} (a_{jl}a_{km} - a_{kl}a_{jm})\,A_lB_m, \tag{1.40}$$

где i, j, k берутся в циклическом порядке. Выражение в скобках исчезает при $m = l$. Поэтому индексы j и k принимают определенные значения в зависимости от выбора i и шести комбинаций l и m. Если $i = 3$, то $j = 1$, $k = 2$ (циклический порядок), и мы получаем набор направляющих косинусов

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{33}, \quad a_{13}a_{21} - a_{13}a_{11} = a_{32}, \quad a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = a_{31} \tag{1.41}$$

и соответствующих отрицательных величин. Уравнения (1.41) тождественно удовлетворяются при подстановке в них направляющих косинусов. Подставив (1.41) в уравнение (1.40), получим

$$C_3' = a_{33}A_1B_2 + a_{32}A_3B_1 + a_{31}A_2B_3 - a_{33}A_2B_1 - a_{32}A_1B_3 - \\ - a_{31}A_3B_2 = a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 = \sum_n a_{3n}C_n. \tag{1.42}$$

Переставляя индексы, получаем C_1' и C_2', после этого легко установить, что условие (1.15) выполнено и, следовательно, $\mathbf{C}$ действительно вектор. Необходимо подчеркнуть здесь, что векторная природа векторного произведения непосред-

ственно связана с трехмерностью нашего пространства *. В гл. 3 показано, что векторное произведение можно трактовать как антисимметричный тензор второго ранга.

Упражнения

1. Даны векторы $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$. Определить скалярное и векторное произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

2. Показать, что $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=A^2-B^2$, $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=2\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Необходимые для этих доказательств формулы

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

легко проверить, разлагая векторы на компоненты в декартовой системе координат.

3. Координаты вершин треугольника заданы точками (2, 1, 5), (5, 2, 8) и (4, 8, 2). С помощью векторного анализа определить площадь треугольника.

4. Даны три вектора $\mathbf{P}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{Q}=-6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{R}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Определить, какие два из них взаимно перпендикулярны и какие два параллельны или антипараллельны друг другу.

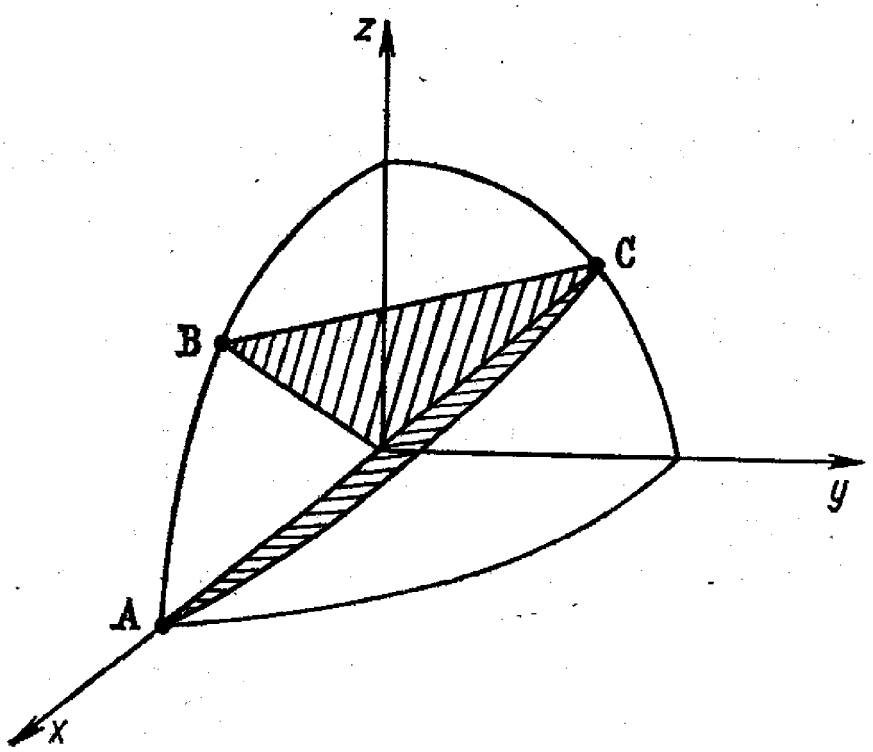


Рис. 1.12. Сферический треугольник.

5. Используя векторы $\mathbf{P}=\mathbf{i}\cos\theta+\mathbf{j}\sin\theta$, $\mathbf{Q}=\mathbf{i}\cos\varphi-\mathbf{j}\sin\varphi$, $\mathbf{R}=\mathbf{i}\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\varphi$, доказать известные тригонометрические формулы $\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$, $\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$.

* Соотношения (1.41) справедливы только для трехмерного пространства.

6. Определить вектор **A**, перпендикулярный к векторам

$$\mathbf{U}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k},\quad \mathbf{V}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Каким должен быть вектор **A**, если дополнительно потребовать, чтобы он по абсолютной величине был равен единице?

7. Четыре вектора **a**, **b**, **c** и **d** лежат в одной плоскости. Показать, что $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=0$. *Замечание.* Обратить внимание на направления векторных произведений.

8. Найти стороны и углы сферического треугольника ABC (рис. 1.12), определенного векторами $\mathbf{A}=(1, 0, 0)$, $\mathbf{B}=(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{C}=(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Начало каждого вектора совпадает с началом координат.

9. Магнитная индукция **B** *определена* уравнением Лоренца

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}),$$

где **v**—скорость электрического заряда q, а F—сила, действующая на заряд.

При выполнении трех экспериментов установлено, что: 1) $\mathbf{v}=\mathbf{i}$, $F/q=2\mathbf{k}-4\mathbf{j}$; 2) $\mathbf{v}=\mathbf{j}$, $F/q=4\mathbf{i}-\mathbf{k}$; 3) $\mathbf{v}=\mathbf{k}$, $F/q=\mathbf{j}-2\mathbf{i}$. По результатам этих экспериментов найти магнитную индукцию.

Ответ: $\mathbf{B}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

1.5. СМЕШАННОЕ И ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

В разд. 1.3 и 1.4 было рассмотрено два типа перемножения векторов. Однако имеются комбинации трех векторов, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ и $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, которые встречаются довольно часто, и поэтому их целесообразно рассмотреть дополнительно. Комбинация векторов $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ известна как *смешанное* произведение. Произведение $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ дает вектор, который затем умножается на вектор **A**, в результате получается скаляр. Заметим, что $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ есть умножение скаляра на вектор, а такая операция еще не определена. Поэтому заранее условимся не рассматривать данную операцию, тогда можно опустить скобки и записать смешанное произведение в виде $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$.

Используя формулу (1.33) для векторного произведения и формулу (1.22) для скалярного произведения, получаем

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)+$$
$$+A_z(B_xC_y-B_yC_x)=\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}=$$
$$=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{B}=-\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{C}\text{ и т. д.}\quad(1.43)$$

Следует отметить высокую степень симметрии в записи (1.43) через компоненты векторов. Каждый член содержит множители A_i, B_j и C_k. Если индексы i, j и k располагаются в циклическом порядке относительно x, y, z, то член имеет положительный знак. Если эти индексы расположены

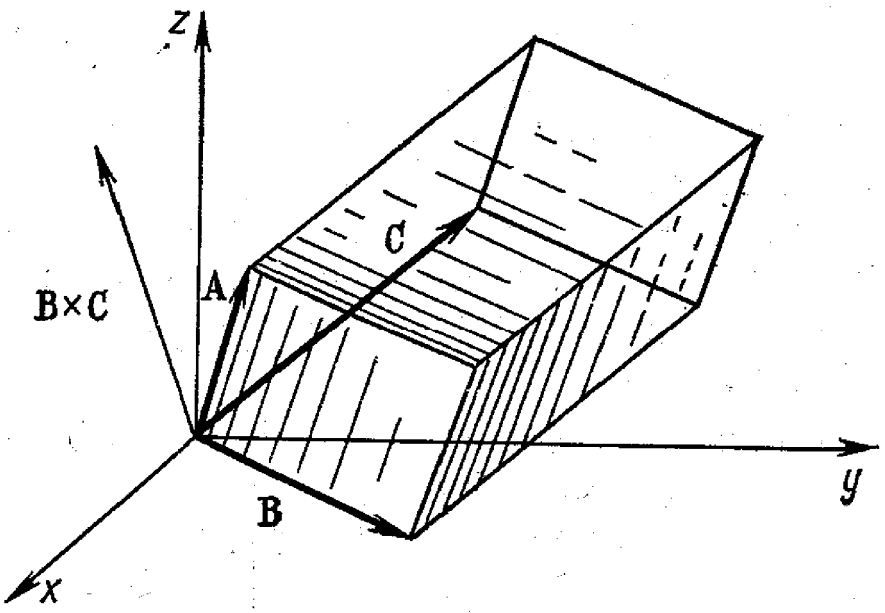


Рис. 1.13. Представление тройного скалярного произведения в виде параллелепипеда.

в обратном порядке, то соответствующий член имеет знак минус. Далее, последовательность скалярного и векторного умножения можно изменить:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}. \tag{1.44}$$

Удобно представить смешанное произведение через определитель (см. разд. 4.1):

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1.45}$$

Из правил замены в определителе строк на столбцы сразу же следуют перестановочные соотношения (1.43), тогда как симметрия векторов **A**, **B** и **C** в такой записи обеспечивает выполнение условия (1.44).

Смешанные произведения, использованные в разд. 1.4 для доказательства перпендикулярности векторного произведения $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ к векторам **A** и **B**, были лишь частными случаями общего результата (1.43).

Смешанное произведение имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Три вектора **A**, **B** и **C** образуют параллелепипед (рис. 1.13):

$$|\mathbf{B}\times\mathbf{C}| = BC\sin\theta = \text{площадь параллелограмма}. \quad (1.46)$$

Вектор $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ направлен, конечно, перпендикулярно к плоскости параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда. Скалярное умножение **A** на этот вектор означает умножение площади параллелограмма на проекцию вектора **A** на нормаль к плоскости, или, иначе, умножение площади на высоту параллелепипеда. Следовательно, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах **A**, **B** и **C**.

Пример 1. Для векторов $\mathbf{A}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}. \quad (1.47)$$

Разложив определитель по верхней строке, получим $1(0+1)-2(0-(-1))-1(0-1)=4$. Это объем параллелепипеда, определенного векторами **A**, **B** и **C**. Читатель должен заметить, что в некоторых случаях произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ может быть отрицательным.

Рассмотрим теперь *двойное векторное произведение*, которое имеет вид $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. В данном случае скобки необходимо сохранить, в чем можно убедиться, остановившись на специальном случае:

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}, \text{ но } (\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}=0. \quad (1.48)$$

Указанное произведение трех векторов само является вектором; это следует из определения векторного произведения. Кроме того, мы видим, что результирующий вектор перпендикулярен к **A** и $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$. Плоскость, определенная векторами **B** и **C**, перпендикулярна к $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, и, следовательно, вектор $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ лежит в этой плоскости. Это означает, что вектор $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ должен быть линейной комбинацией векторов **B** и **C**. Исходя из сказанного, находим соотношение

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}), \quad (1.49)$$

известное под названием правила *BAC — CAB*. Этот результат можно проверить путем прямого, хотя и громоздкого, метода разложения векторов на компоненты (см. упр. 1).

Следует заметить, что как векторы, так и векторное уравнение также не зависит от выбора системы координат. Она определяет лишь компоненты вектора. Поэтому если векторное уравнение записано для декартовой системы координат, то оно сохраняется и остается справедливым и в любой другой системе координат (см. гл. 2).

Пример 2. Используя три вектора, заданные в примере 1, с помощью уравнения (1.49) получаем

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{j}+\mathbf{k})(1-2)-(\mathbf{i}-\mathbf{j})(2-1)=-\mathbf{i}-\mathbf{k}.$$

В подробной записи

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\mathbf{i}-\mathbf{k}.$$

С помощью смешанного и двойного векторного произведений можно упростить другие произведения векторов.

Смешанное произведение находит интересное применение при построении обратной кристаллической решетки. Пусть **a**, **b** и **c** (не обязательно взаимно перпендикулярные)— векторы, определяющие кристаллическую решетку. Расстояние между двумя точками решетки $\mathbf{r}=n_a\mathbf{a}+n_b\mathbf{b}+n_c\mathbf{c}$, где n_a, n_b и n_c — некоторые целые числа. С помощью заданных векторов запишем соотношения

$$\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}},\quad \mathbf{b}'=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}},\quad \mathbf{c}'=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}. \qquad (1.50)$$

Мы видим, что $\mathbf{a}'$ перпендикулярен к плоскости векторов **b** и **c** и по абсолютной величине пропорционален a^{-1}. Действительно, легко показать, что

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{c}=1,\ \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}=$$
$$=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{b}=0.$$

Последние уравнения определяют так называемую обратную решетку. Обратная решетка связана с задачами по рассеянию волн на различных плоскостях кристалла *.

* Подробнее см. Leigton R. B. Principles of Modern Physics. N.Y., McGraw-Hill, 1959, p. 440—448.

Упражнения

1. Доказать формулу $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

2. Показать, что $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$.

3. Вектор $\mathbf{A}$ разложен на радиальный $\mathbf{A}_r$ и тангенциальный вектор $\mathbf{A}_t$, $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор в радиальном направлении. Показать, что $\mathbf{A}_r=\mathbf{r}_0(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{A}_t=-\mathbf{r}_0\times(\mathbf{r}_0\times\mathbf{A})$.

4. Доказать, что необходимым и достаточным условием компланарности трех (ненулевых) векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ является равенство нулю смешанного произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$.

5. Даны три вектора $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. Найти $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, $\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ и $\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$.

6. Сила $\mathbf{F}$ действует на тело, помещенное в точке $\mathbf{r}$. Показать, что результирующий момент L относительно любой из осей, проведенных через начало координат, равен $L=\mathbf{r}\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — единичный вектор в направлении этой оси.

7. Дано:

$$\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}},\quad \mathbf{b}'=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}},\quad \mathbf{c}'=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\quad\text{и}\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0.$$

Показать, что

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\delta_{xy}\ (\mathbf{x},\ \mathbf{y}=\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c});\quad \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^{-1};\quad \mathbf{a}=\frac{\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}'}.$$

8. Убедиться, что если $\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}=\delta_{xy}$ $(\mathbf{x},\ \mathbf{y}=\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$, то $\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$ (задача, обратная предыдущей).

9. Убедиться, что первым этапом при перемножении векторов в уравнении (1.38) было применение правила $BAC-CAB$ к двойному векторному произведению.

10. Даны три вектора $\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{B}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$. Найти смешанное произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$. Имея в виду, что $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$, дать геометрическую интерпретацию смешанного произведения для данных векторов. Найти $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

1.6. ГРАДИЕНТ ∇

Предположим, что $\varphi(x,\ y,\ z)$ — скалярная функция точки пространства, т. е. такая функция, значение которой зависит от значений координат $(x,\ y,\ z)$. Как скаляр она должна иметь одно и то же значение для данной фиксированной точки пространства независимо от вращения системы координат, т. е.

$$\varphi'(x_1',\ x_2',\ x_3')=\varphi(x_1,x_2,x_3). \qquad (1.51)$$

Дифференцируя по x_i' и используя уравнения (1.16), получаем

$$\frac{\partial\varphi'(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_i'} = \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i'} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \sum_j a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}. \tag{1.52}$$

Сравнение (1.52) с законом преобразования векторов (1.17) сразу же убеждает нас, что мы построили вектор с компонентами $\partial\varphi/\partial x_j$. Этот вектор мы назовем *градиентом* φ. Удобно перейти к символической записи

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{1.53}$$

или

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}; \tag{1.54}$$

$\nabla\varphi$ (читается «набла φ») — это градиент скалярной функции φ, где ∇ (набла) — векторный дифференциальный оператор, введенный для обозначения операции дифференцирования, которая должна быть проведена над скаляром φ. Этот оператор обладает свойствами векторов и подчиняется законам частного дифференцирования.

Пример. Вычислим градиент функции $f(r) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$:

$$\nabla f(r) = \mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z}.$$

В данном случае $f(r)$ зависит от x, поскольку r зависит от x. Следовательно,

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение для $\nabla f(r)$, получаем

$$\nabla f(r) = (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\frac{1}{r}\frac{df}{dr} = \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{df}{dr} = \mathbf{r}_0\frac{df}{dr},$$

где $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор в *положительном* направлении радиуса-вектора.

Одно из непосредственных приложений $\nabla\varphi$ связано с вычислением приращения длины

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz. \tag{1.55}$$

Учитывая предыдущую запись, получаем

$$(\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi, \tag{1.56}$$

изменение скалярной функции φ, соответствующее изменению положения $d\mathbf{r}$. Рассмотрим далее две точки P и Q на поверхности $\varphi(x, y, z) = C$. Расстояние между этими двумя точками dr. Тогда при перемещении из P в Q изменение функции на поверхности $\varphi(x, y, z) = C$ равно

$$d\varphi = (\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{1.57}$$

так как перемещение происходит по поверхности $\varphi(x, y, z) = C$. Отсюда следует, что $\nabla\varphi$ перпендикулярен к $d\mathbf{r}$. Поскольку $d\mathbf{r}$ можно провести в любом направлении от точки

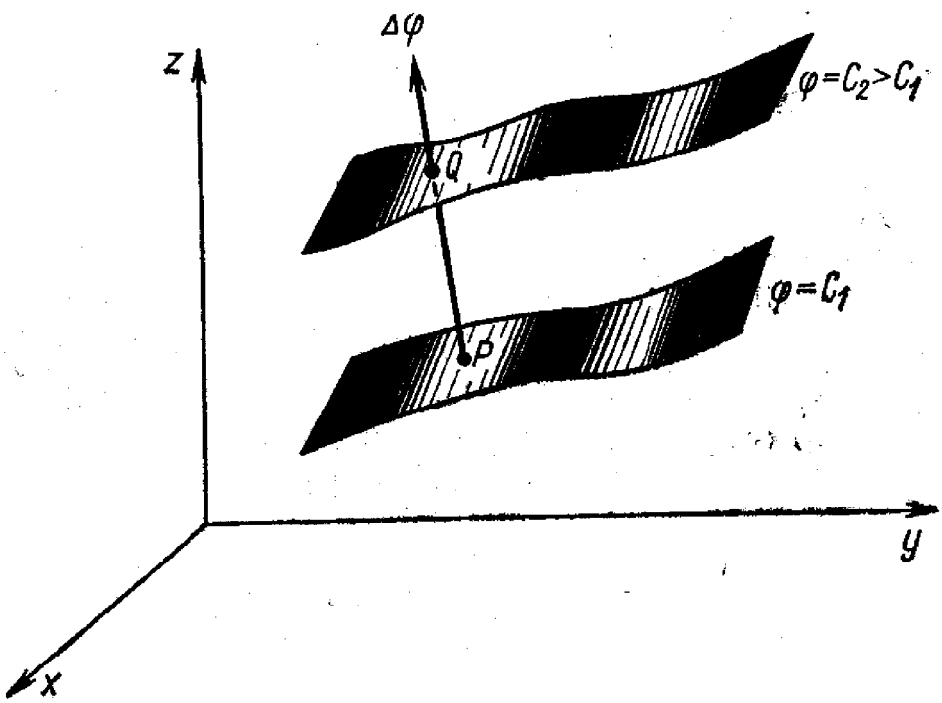


Рис. 1.14. Градиент.

P в Q, лежащую на этой поверхности, а значит, $d\mathbf{r}$ всегда остается на поверхности, $\psi\nabla\varphi$ должен быть перпендикулярен к поверхности $\varphi = \text{const}$ в любой ее точке.

Если предположить теперь, что $d\mathbf{r}$ направлен от одной поверхности $\varphi = C_1$ к соседней $\varphi = C_2$, то

$$d\varphi = C_2 - C_1 = \Delta C = (\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.58}$$

Для данного $d\varphi$ абсолютная величина $|\,d\mathbf{r}\,|$ минимальна, если $d\mathbf{r}$ направлен параллельно $\nabla\varphi$ ($\cos\theta = 1$), или, наоборот, при заданном $|\,d\mathbf{r}\,|$ изменение скалярной функции φ максимально для $d\mathbf{r}$, параллельного $\nabla\varphi$. Это определяет $\nabla\varphi$ как вектор, *указывающий направление максимальной скорости изменения функции* φ (рис. 1.14). Данное опре-

деление градиента будет использовано в гл. 2 при рассмотрении криволинейных систем координат.

Градиент скалярной величины играет очень важную роль в физике при установлении связи между полем сил и потенциальным полем:

$$\text{Сила} = -\nabla\ (\text{потенциал}). \tag{1.59}$$

Это справедливо и для гравитационного, и для электрического поля.

Упражнения

1. Показать, что $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$, где u и v — дифференцируемые скалярные функции x, y и z.

2. Дана функция $S(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. Определить в точке $(1, 2, 3)$ ∇S, его абсолютную величину и направляющие косинусы ∇S.

3. Дан вектор $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{i}(x_1-x_2) + \mathbf{j}(y_1-y_2) + \mathbf{k}(z_1-z_2)$. Показать, что $\nabla_1 r_{12}$ (градиент абсолютной величины векора $\mathbf{r}_{12}$ по переменным x_1, y_1, z_1) есть единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{r}_{12}$.

4. Доказать, что условие $(\nabla u)\times(\nabla v) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы две функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ были связаны соотношением $f(u, v) = 0$. Убедиться, что в случае $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ условие $(\nabla u)\times(\nabla v) = 0$ приводит к двумерному якобиану:

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Функции u и v предполагаются дифференцируемыми.

5. Доказать, что $(\nabla u)\cdot(\nabla v)\times(\nabla w) = 0$ — необходимое и достаточное условие того, чтобы три функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ были связаны некоторой функцией $F(u, v, w) = 0$. Показать также, что смешанное произведение градиентов эквивалентно трехмерному якобиану

$$J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Предполагается существование необходимых производных.

6. Доказать, что если векторная функция $\mathbf{F}$ зависит от пространственных координат x, y, z и от времени t, то

$$d\mathbf{F} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\,dt.$$

1.7. ДИВЕРГЕНЦИЯ $\nabla\cdot$

Дифференцирование векторной функции является обобщением дифференцирования скалярных величин. Предположим, что $\mathbf{r}(t)$ описывает положение некоторого тела в пространстве в момент времени t. Тогда дифференцирование по времени дает

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — линейная скорость. Из рис. 1.15 видно, что эта производная характеризует наклон кривой, которая представляет собой траекторию движения тела.

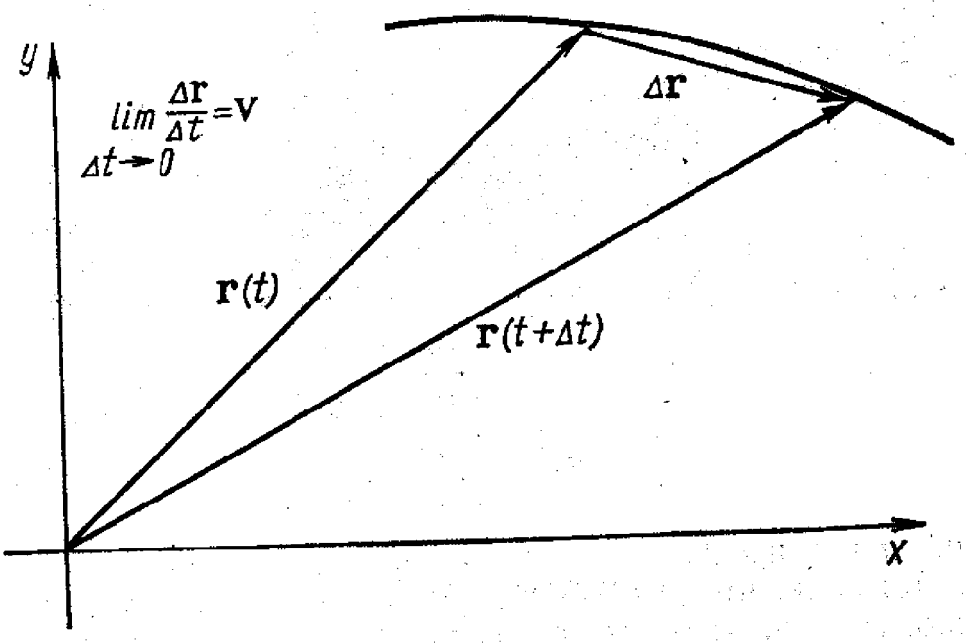


Рис. 1.15. Дифференцирование вектора

Если разложить вектор $\mathbf{r}(t)$ на его компоненты в декартовой системе координат, то $d\mathbf{r}/dt$ всегда сводится к векторной сумме не более чем трех (в трехмерном пространстве) скалярных производных. В других координатных системах (см. гл. 2) ситуация несколько сложнее, так как единичные векторы уже непостоянны по направлению. В дальнейшем будет показано, что дифференцирование по пространственным координатам выполняется точно так же, как и дифференцирование по времени.

В разд. 1.6 оператор ∇ был определен как векторный оператор. Теперь, имея в виду его векторные и дифференциальные свойства, мы рассмотрим действие ∇ на вектор.

Во-первых, скалярное умножение этого векторного оператора на вектор приводит к выражению

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{1.60}$$

которое называется *дивергенцией* вектора $\mathbf{V}$. Дивергенция есть скаляр в том смысле, как он определен в разд. 1.3.

Пример 1. Вычислить $\nabla\cdot\mathbf{r}$.

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)=$$

$$=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

Пример 2. Обобщая предыдущий пример на случай произвольной функции $f(r)$, имеем

$$\nabla\cdot\mathbf{r}f(r)=\frac{\partial}{\partial x}[xf(r)]+\frac{\partial}{\partial y}[yf(r)]+\frac{\partial}{\partial z}[zf(r)]=3f(r)+r\frac{df}{dr}.$$

В частности, если $f(r)=r^{n-1}$, то

$$\nabla\cdot\mathbf{r}r^{n-1}=\nabla\cdot\mathbf{r}_0r^n=3r^{n-1}+(n-1)\,r^{n-1}=(n+2)\,r^{n-1}.$$

Дивергенция этой величины обращается в нуль при $n=-2$; этот факт имеет важное значение для обсуждения в разд. 1.14.

Для более ясного представления физической сущности дивергенции рассмотрим $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$, где $\mathbf{v}(x, y, z)$ — скорость течения сжимаемой жидкости; $\rho(x, y, z)$ — плотность этой жидкости в точке (x, y, z). Если рассмотреть некоторый элемент объема $dx\,dy\,dz$ (рис. 1.16), то количество жидкости, поступающей в этот объем в единицу времени через поверхность $EFGH$ (положительное направление оси x), выразится так: $(\text{приток})_{EFGH}=\rho v_x\,dy\,dz$. Количество вытекшей из объема жидкости через поверхность $ABCD$ (также положительное направление оси x) равно: $(\text{сток})_{ABCD}=\left[\rho v_x+\right.$ $\left.+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dx\right]dy\,dz$; производная * учитывает возможность зависимости неоднородной плотности или скорости, или

* Это разложение дает первые члены ряда Маклорена (см. разд. 5.6) $f(h)=f(0)+(df/dx)\,h+(d^2f/dx^2)\,h^2/2!+\ldots$, в котором $h=dx$. Значение каждой производной берется в начальной точке $x=0$.

сразу обеих этих величин от x *. Полный расход жидкости через эти две поверхности равен просто разности двух потоков или расходу в направлении оси x: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\, dxdy\, dz$.

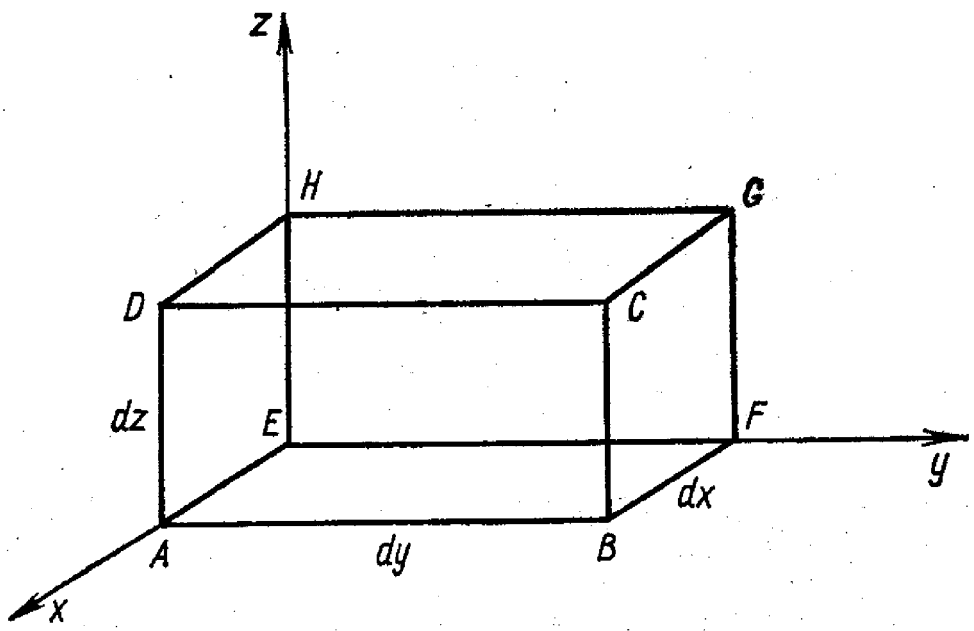


Рис. 1.16. Дифференциальный прямоугольный параллелепипед (в первом, или положительном, октанте).

Дополнительный расход жидкости происходит через остальные четыре поверхности данного элемента объема, полный расход (в единицу времени) равен

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right] dx\, dy\, dz = \nabla\cdot(\rho \mathbf{v})\, dx\, dy\, dz. \tag{1.61}$$

Следовательно, полное количество сжимаемой жидкости, прошедшей через единицу объема в единицу времени, равно $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$. Отсюда и название *дивергенция* или *расходимость*. Одним из примеров использования дивергенции является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0, \tag{1.62}$$

согласно которому полный расход жидкости через данный объем равен уменьшению плотности жидкости внутри этого объема.

---

* Строго говоря, величина ρv_x усредняется по поверхности $ABCD$, по этой же поверхности нужно усреднять и выражение $\rho v_x + (\partial/\partial x)(\rho v_x)\, dx$. Однако, взяв произвольный элемент объема достаточно малым, можно от средних величин перейти к тем, которые использованы выше.

Член $\nabla\cdot(f\mathbf{V})$, в котором f — скалярная функция, а $\mathbf{V}$ — вектор, может быть записан в виде

$$\nabla\cdot(f\mathbf{V})=\frac{\partial}{\partial x}(fV_x)+\frac{\partial}{\partial y}(fV_y)+\frac{\partial}{\partial z}(fV_z)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}V_x+f\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}V_y+f\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}V_z+f\frac{\partial V_z}{\partial z}=$$

$$=(\nabla f)\cdot\mathbf{V}+f\nabla\cdot\mathbf{V}. \qquad (1.63)$$

Полученное соотношение имеет тот же вид, что и формула для производной от произведения. В частном случае, когда $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, вектор $\mathbf{B}$ называют *соленоидальным*. Этот термин заимствован из примера, в котором $\mathbf{B}$ представляет собой магнитную индукцию. Уравнение (1.63) оказывается одним из уравнений Максвелла.

Упражнения

1. Доказать формулу $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot\nabla\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\nabla\cdot\mathbf{b}$. *Замечание.* Рассматривать левую часть формулы как смешанное произведение.

2. Делая поворот системы координат, показать, что $\nabla'\cdot\mathbf{V}'=\nabla\cdot\mathbf{V}$, и, следовательно, по определению, дивергенция вектора — скаляр (достаточно рассмотреть двумерный случай).

3. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Показать, что линейная скорость $\mathbf{v}$ соленоидальна.

4. Электростатическое поле точечного заряда q равно $\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$. Вычислить $\nabla\cdot\mathbf{E}$.

1.8. РОТОР $\nabla\times$

Можно определить операцию векторного умножения ∇ на вектор формулой

$$\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}V_z-\frac{\partial}{\partial z}V_y\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}V_x-\frac{\partial}{\partial x}V_z\right)+$$

$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}V_y-\frac{\partial}{\partial y}V_x\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix}. \qquad (1.64)$$

Полученное выражение называется *ротором* вектора $\mathbf{V}$. При раскрытии определителя или при любых других операциях с ∇ необходимо учитывать его дифференциальную

природу. Специально подчеркнем, что произведение $\mathbf{V}\times\nabla$ определяется как новый векторный дифференциальный оператор. В общем случае он, конечно, не равен $\nabla\times\mathbf{V}$ *. Если ∇ векторно умножается на произведение скаляра и вектора, можно записать

$$\nabla\times(f\mathbf{V})|_x=\mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(fV_z)-\frac{\partial}{\partial z}(fV_y)\right]=$$

$$=\mathbf{i}\left(f\frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}V_z-f\frac{\partial V_y}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}V_z\right)=$$

$$=f\nabla\times\mathbf{V}|_x+(\nabla f)\times\mathbf{V}|_x. \qquad (1.65)$$

Делая циклическую перестановку координат, легко получить y- и z-компоненты. Легко убедиться, что

$$\nabla\times(f\mathbf{V})=f\nabla\times\mathbf{V}+(\nabla f)\times\mathbf{V}. \qquad (1.66)$$

Полученное выражение есть аналог выражения (1.63).

Пример. Вычислить $\nabla\times\mathbf{r}f(r)$.
С помощью формулы (1.66) имеем

$$\nabla\times\mathbf{r}f(r)=f(r)\,\nabla\times\mathbf{r}+[\nabla f(r)]\times\mathbf{r}.$$

Во-первых,

$$\nabla\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x&y&z\end{vmatrix}=0.$$

Во-вторых, пользуясь равенством $\nabla f(r)=\mathbf{r}_0(df/dr)$ (см. пример из разд. 1.6), получаем

$$\nabla\times\mathbf{r}f(r)=\frac{df}{dr}\mathbf{r}_0\times\mathbf{r}=0.$$

Векторное произведение равно нулю, так как $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0 r$ и $\mathbf{r}_0\times\mathbf{r}_0=0$.

Название ротор возникло в связи с тем, что $\nabla\times\mathbf{V}$ описывает вращение векторного поля $\mathbf{V}$ в точке, в которой вычисляется ротор. Пусть имеется твердое тело в плоскости xy, вращающееся вокруг оси z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Линейная скорость $\mathbf{v}$ в точке, которая задана радиусом-векто-

* Точно так же, если $\mathbf{A}$ — дифференциальный оператор, то совсем не обязательно, чтобы $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$. Например, в квантовой механике определяется оператор момента количества движения $\mathbf{L}=i\hbar(\mathbf{r}\times\nabla)$, для которого $\mathbf{L}\times\mathbf{L}=i\hbar\mathbf{L}$.

ром $\mathbf{r}$, равна

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}. \tag{1.67}$$

Чтобы определить $\nabla\times\mathbf{r}$, рассмотрим

$$\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}). \tag{1.68}$$

Перегруппировав члены в уравнении (1.50) в соответствии с операторной природой вектора ∇, получим

$$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\nabla\cdot\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}-\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}. \tag{1.69}$$

Здесь ∇ скалярно умножается на первый вектор, но как дифференциальный оператор он действует на *оба* вектора, действительно,

$$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}\nabla\cdot\mathbf{r}+\mathbf{r}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}-\mathbf{r}\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{r}. \tag{1.70}$$

При постоянной $\boldsymbol{\omega}$ второй и третий члены в уравнении (1.70) исчезают. Далее, как известно

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=3, \tag{1.71}$$

поэтому

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{r}=\omega_x\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)+\omega_y\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)+$$

$$+\omega_z\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)=\mathbf{i}\omega_x+\mathbf{j}\omega_y+\mathbf{k}\omega_z=\boldsymbol{\omega}. \tag{1.72}$$

Подставляя (1.71) и (1.72) в (1.70), получаем

$$\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=2\boldsymbol{\omega}, \tag{1.73}$$

т. е. ротор линейной скорости твердого тела равен удвоенной угловой скорости. Всякий раз, когда ротор вектора $\mathbf{V}$ равен нулю

$$\nabla\times\mathbf{V}=0, \tag{1.74}$$

вектор $\mathbf{V}$ называют *безвихревым*.

Наиболее важные физические примеры безвихревых векторов дают гравитационные и электростатические силы. В каждом из этих случаев

$$\mathbf{V}=C\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}=C\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{1.75}$$

где C — постоянная; $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора. Для закона всемирного тяготения Ньютона (в случае гравитационных сил) $C=-Gm_1m_2$, для закона Кулона $C=q_1q_2/4\pi\varepsilon_0$ (в единицах МКСА).

Разлагая на декартовы компоненты, можно убедиться, что $\mathbf{V}$, заданный в виде (1.75), безвихревой. Иной подход к ротору дан в гл. 2, в которой он выражен в сферических координатах.

Упражнения

1. Показать, что вектор $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ соленоидален, если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — безвихревые векторы.

2. Показать, что вектор $\mathbf{A}\times\mathbf{r}$ соленоидален, если $\mathbf{A}$ — безвихревой вектор.

3. Поворотом координат показать, что компоненты ротора подчиняются закону векторного преобразования. *Замечание.* Воспользоваться направляющими косинусами из уравнения (1.41).

4. Убедиться, что ротор $\nabla\times\mathbf{V}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{V}$, если $\mathbf{V}=\mathbf{i}V_x(x, y)+\mathbf{j}V_y(x, y)$ и $\nabla\times\mathbf{V}\neq 0$.

5. В квантовой механике операторы момента количества движения определены соотношениями

$$L_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad L_y=-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$L_z=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Показать, что $L_xL_y-L_yL_x=i\hbar L_z$ и, следовательно, $\mathbf{L}\times\mathbf{L}=i\hbar\mathbf{L}$.

6. Проверить векторные тождества

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}),$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}).$$

1.9. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ∇

С помощью введенных понятий градиента, дивергенции и ротора можно получить вектор, скаляр и комбинацию векторов. Действуя на каждую из введенных величин оператором ∇, получаем выражения вида $\nabla\cdot\nabla\varphi$, $\nabla\times\nabla\varphi$, $\nabla\nabla\cdot\mathbf{V}$, $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{V}$, $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})$. Все они содержат вторые производные и часто используются в дифференциальных уравнениях второго порядка в математической физике.

Первое из них, $\nabla\cdot\nabla\varphi$, дивергенция градиента, называется *лапласианом* * φ. Имеем

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

---

* Лапласиан часто обозначают символом Δ. — *Прим. перев.*

В случае, когда φ представляет собой электростатический потенциал, получаем уравнение Лапласа: $\nabla \cdot \nabla \varphi = 0$. Комбинацию $\nabla \cdot \nabla$ обозначают ∇^2.

Пример. Вычислить $\nabla \cdot \nabla g(r)$.

Учитывая результаты, полученные в примерах из разд. 1.6 и 1.7, запишем

$$\nabla \cdot \nabla g(r) = \nabla \cdot \mathbf{r}_0 \frac{dg}{dr} = \frac{2}{r} \cdot \frac{dg}{dr} + \frac{d^2g}{dr^2},$$

где $f(r)$ — функция из примера к разд. 1.7 имеет вид $(1/r)\, dg/dr$. Если $g(r) = r^n$, то равенство сводится к

$$\nabla \cdot \nabla r^n = n(n+1) r^{n-2},$$

правая часть которого обращается в нуль при $n = 0$, тогда $g(r) = \text{const}$, и при $n = -1$, т. е. функция $g(r) = 1/r$ — решение уравнения Лапласа, $\nabla^2 g(r) = 0$.

Вторую операцию можно записать как

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{1.76}$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}\right) = 0. \tag{1.77}$$

Здесь предполагалось, что можно изменять порядок дифференцирования. Это можно делать только тогда, когда первые частные производные φ непрерывны. Далее, из уравнения (1.77) следует, что ротор градиента тождественно равен нулю. Следовательно, градиент — всегда безвихревой вектор.

Четвертое выражение представляет собой смешанное произведение, которое можно записать так:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \tag{1.78}$$

Снова, предполагая выполненным условие непрерывности функций, в результате чего порядок дифференцирования становится несущественным, получаем

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0. \tag{1.79}$$

Таким образом, дивергенция ротора равна нулю, т. е. ротор — всегда соленоидальный вектор. В разд. 1.15 мы увидим, что с помощью теоремы Гельмгольца любой вектор можно разложить на соленоидальную и безвихревую составляющие.

Последнее выражение удовлетворяет соотношению

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}. \tag{1.80}$$

Оно следует из уравнения (1.49), которое записывается так, чтобы $\mathbf{C}$ в каждом члене был справа. Член $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$ исключен из рассмотрения, но его можно *определить* уравнением (1.80). Если $\mathbf{V}$ разложить на компоненты в декартовой системе координат, то $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$ — *векторный лапласиан* — приводится к векторной сумме обычных скалярных лапласианов:

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{i} \nabla \cdot \nabla V_x + \mathbf{j} \nabla \cdot \nabla V_y + \mathbf{k} \nabla \cdot \nabla V_z.$$

Разлагая на декартовы координаты, можно показать, что уравнение (1.80) — векторное тождество.

Важное приложение тождества (1.80) связано с волновым уравнением в электромагнитной теории. В вакууме уравнения Максвелла принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{в)}\ \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ &\text{б)}\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{г)}\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{1.81}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — электрическое поле; $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости (в единицах МКСА). Предположим, что $\mathbf{B}$ определяется из уравнений (1.81в) и (1.81г). Это можно сделать, взяв ротор от обеих частей уравнения (1.81г) и производную по времени от обеих частей уравнений (1.81в). Поскольку пространственная и временная производные коммутируют, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.82}$$

то

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{1.83}$$

Комбинируя уравнения (1.80) и (1.81б), получаем векторное волновое уравнение электромагнитного поля

$$\nabla \cdot \nabla E = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{1.84}$$

Снова, если $\mathbf{E}$ разложить в декартовых координатах, то (1.84) распадается на три скалярных волновых уравнения, содержащих скалярный лапласиан.

Упражнения

1. Доказать, что $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$.

2. Доказать, что вектор $(\nabla u) \times (\nabla v)$ соленоидален, если u и v дифференцируемые скалярные функции.

3. Скаляр φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. Показать, что вектор $\nabla \varphi$ соленоидальный и безвихревой.

4. Убедиться, что $\mathbf{C}_1 = \nabla \psi$, $\mathbf{C}_2 = \nabla \times \mathbf{a}\psi$ и $\mathbf{C}_3 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}\psi)$ — решения векторного волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{C} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0.$$

Здесь ψ удовлетворяет скалярному волновому уравнению $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ и $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Доказать также, что $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ ортогональны, вектор $\mathbf{C}_1$ безвихревой, а $\mathbf{C}_2$ и $\mathbf{C}_3$ — соленоидальные векторы.

5. Доказать, что тождество

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

вытекает из правила $BAC - CAB$ для двойного векторного произведения. Объяснить произвольное расположение множителей в членах BAC и CAB.

6. Показать, что любое решение уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0$$

автоматически удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ и условию соленоидальности $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

7. Скалярный потенциал $u_{LM} = j_L(ka) \cdot Y_{LM}(\theta, \varphi)$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 u_{LM} + k^2 u_{LM} = 0.$$

Используя оператор момента количества движения $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$, можно построить векторные потенциалы

$$\mathbf{A}^E_{LM} = -\frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{L} u_{LM}, \quad \mathbf{A}^M_{LM} = l \mathbf{L} u_{LM}.$$

Показать, что оба потенциала удовлетворяют уравнению

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}-k^2\mathbf{A}=0.$$

8. Зависящее от времени уравнение Шредингера имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\nabla+V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r},\ t)=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Положим, $\psi(\mathbf{r},\ t)=A(\mathbf{r},\ t)\,e^{iS(\mathbf{r},\ t)/\hbar}$.

Показать, что такое представление ψ приводит к двум уравнениям (отдельно для реальной и мнимой части):

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V=\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\nabla^2 A}{A},$$

$$m\frac{\partial A}{\partial t}+(\nabla\mathbf{A})\cdot(\nabla\mathbf{S})+\frac{A}{2}\nabla^2 S=0.$$

В квантовой механике плотность вероятности обнаружить частицу в данной точке пространства ρ определяется величиной A^2, а плотность тока $\mathbf{J}$ — величиной $A^2\nabla S/m$. Показать, что второе из записанных уравнений эквивалентно уравнению непрерывности

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

9. Пусть ψ — скалярная функция, показать, что она удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla)\,\psi=r^2\nabla^2\psi-r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2r\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

1.10. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вслед за дифференцированием векторов рассмотрим интегрирование векторов. При этом начнем с линейного интегрирования, а затем перейдем к поверхностным и объемным интегралам. В каждом из этих случаев интеграл от вектора будет сводиться к интегралу от скалярных функций, причем предполагается знакомство читателя с последним типом интеграла. Используя приращение длины $d\mathbf{r}$, можно определить линейные интегралы:

$$\text{а)}\int_C\varphi\,d\mathbf{r},\quad\text{б)}\int_C\mathbf{V}\cdot d\mathbf{r},\quad\text{в)}\int_C\mathbf{V}\times d\mathbf{r},\qquad(1.85)$$

где интегрирование ведется по некоторому контуру C, открытому или замкнутому. Интеграл со скаляром φ сразу

же сводится к обычным интегралам

$$\int_C \varphi\, d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C \varphi(x, y, z)\, dx + \mathbf{j}\int_C \varphi(x, y, z)\, dy + \\ + \mathbf{k}\int_C \varphi(x, y, z)\, dz. \qquad (1.86)$$

Такое разбиение первоначального интеграла возможно благодаря равенству

$$\int \mathbf{i}\varphi\, dx = \mathbf{i}\int \varphi\, dx, \qquad (1.87)$$

которое записано с учетом свойства единичных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, остающихся в прямоугольной системе координат постоянными по величине и направлению. Для прямоугольных координат это достаточно очевидно, однако для криволинейных координат (см. гл. 2) данное утверждение теряет силу.

Три интеграла в правой части уравнения (1.86) представляют собой обычные скалярные интегралы и, опуская доказательства, можно принять, что они являются интегралами Римана. Подчеркнем, однако, что интеграл по переменной x нельзя вычислять, не зная зависимости y и z от x, то же следует заметить и относительно интегралов от других переменных. Это ясно говорит о необходимости точно определить контур интегрирования C. Если только подынтегральная функция не обладает специальными свойствами (в результате чего интеграл будет зависеть только от положения конечных точек контура), значение интеграла определяется особенностями выбора контура C. Например, для частного случая $\varphi = 1$ интеграл (1.85а) будет точным векторным расстоянием от начала контура C до его конечной точки; в этом случае значение интеграла не зависит от выбора пути интегрирования между фиксированными концами. При $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ второй и третий интегралы, рассмотренные выше, тоже приводятся к интегралам от скалярных величин и, так же как и интеграл (1.85а), зависят от выбора пути интегрирования. Интеграл (1.85б) точно равен интегралу, который определяет работу, произведенную силой на заданном отрезке пути:

$$W = -\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \qquad (1.88)$$

где **F** — сила, действующая на частицу или на любой другой объект, который перемещается в поле сил (электростатических, гравитационных и т. д.).

Пример. Проинтегрируем скалярную функцию $r^2=x^2+y^2$ от начала координат до точки (1,1), используя приращение длины $d\mathbf{r}$, т. е. вычислим интеграл $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2+y^2)\,d\mathbf{r}$. Если разложить $d\mathbf{r}$, то интеграл примет вид

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2+y^2)\,(\mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy)=\mathbf{i}\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2+y^2)\,dx+\mathbf{j}\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2+y^2)\,dy.$$

Интегрирование проведем по контуру, изображенному на рис. 1.17. Такой выбор означает, что в первом интеграле $y=0$ и $x=1$ во втором. Подставляя указанные значения в интегралы, получаем

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2+y^2)\,d\mathbf{r}=\mathbf{i}\int_{(0,\,y=0)}^{1} (x^2+y^2)\,dx+\mathbf{j}\int_{(0,\,x=1)}^{1} (x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\mathbf{i}\,\frac{1}{3}+\mathbf{j}\,\frac{4}{3}.$$

Читатель может убедиться, что при контуре интегрирования (0, 0) $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ (0, 1) $\longrightarrow$ (1, 1) интеграл оказывается равным $\mathbf{i}\,(4/3)+\mathbf{j}\,(1/3)$, тогда как интегрирование по контуру $x=y$ приводит к значению $\mathbf{i}\,(2/3)+\mathbf{j}\,(2/3)$. Таким образом, значение интеграла зависит от выбора контура, вдоль которого производят интегрирование.

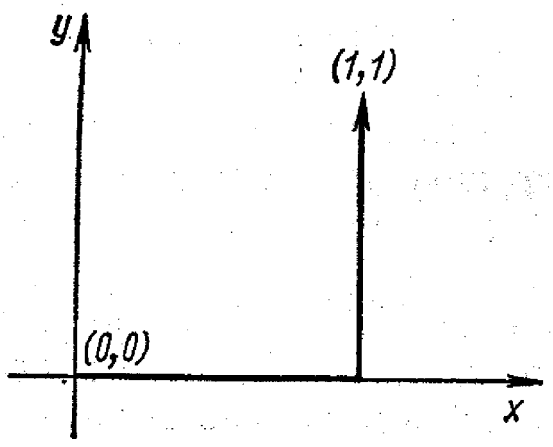


Рис. 1.17. Контур интегрирования.

Поверхностные интегралы записываются так же, как и линейные, только $d\mathbf{r}$ заменяют вектором $d\boldsymbol{\sigma}$ *. Часто этот элемент поверхности записывают в виде $\mathbf{n}dA$, где **n** — единичный (нормальный) вектор положительного направления. Имеется два варианта выбора положительного направления. Если поверхность замкнута, условимся называть положительным направление из объема, ограниченного этой поверхностью. Для открытых поверхностей будем считать, что

* Напомним, что в разд. 1.4 поверхность параллелограмма представлена векторным произведением.

положительное направление зависит от направления обхода периметра этой поверхности. Если пальцы правой руки расположить в направлении обхода по границе поверхности, то направление большого пальца совпадает с положительным направлением. Например, рассмотрим круг в плоскости xy (рис. 1.18), обход по границе которого совершается в последовательности $x \to y \to -x \to -y \to x$, в этом случае положительная нормаль параллельна положительной оси z (в случае правой системы координат).

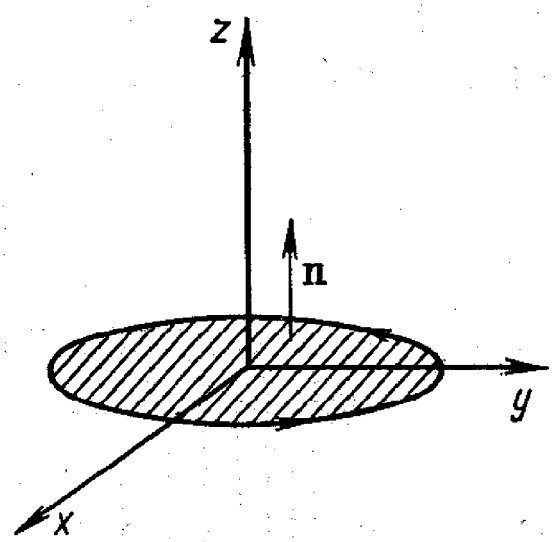


Рис. 1.18. Правило правой руки при выборе положительного направления.

Поверхностный интеграл $\int \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ можно интерпретировать как поток через данную поверхность. (В разд. 1.7 с помощью этого потока проиллюстрирована физическая сущность дивергенции. Эта тождественность вновь проявится в разд. 1.11 при доказательстве теоремы Гаусса.)

Объемные интегралы несколько проще, так как элемент объема $d\tau$ — скаляр. В этом случае объемный интеграл вновь распадается на векторную сумму интегралов от скалярных величин

$$\int_V \mathbf{V}\, d\tau = \mathbf{i} \int_V V_x\, d\tau + \mathbf{j} \int_V V_y\, d\tau + \mathbf{k} \int_V V_z\, d\tau. \qquad (1.89)$$

С помощью поверхностных и объемных интегралов можно определить дифференциальные соотношения иначе:

$$\nabla\varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \varphi\, d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}, \qquad (1.90)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}, \qquad (1.91)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}}{\int d\tau}. \qquad (1.92)$$

В этих трех уравнениях $\int d\tau$ — некоторый малый объем пространства, $d\boldsymbol{\sigma}$ — векторный элемент поверхности этого объема. В разд. 1.7 уже было показано, что выражение (1.91) определяет дивергенцию. Покажем теперь, что выражение (1.90) в действительности соответствует ранее введенной уравнением (1.53) величине $\nabla\varphi$. Для простоты заменим $\int d\tau$ дифференциальным объемом $dx\,dy\,dz$ (рис. 1.19)

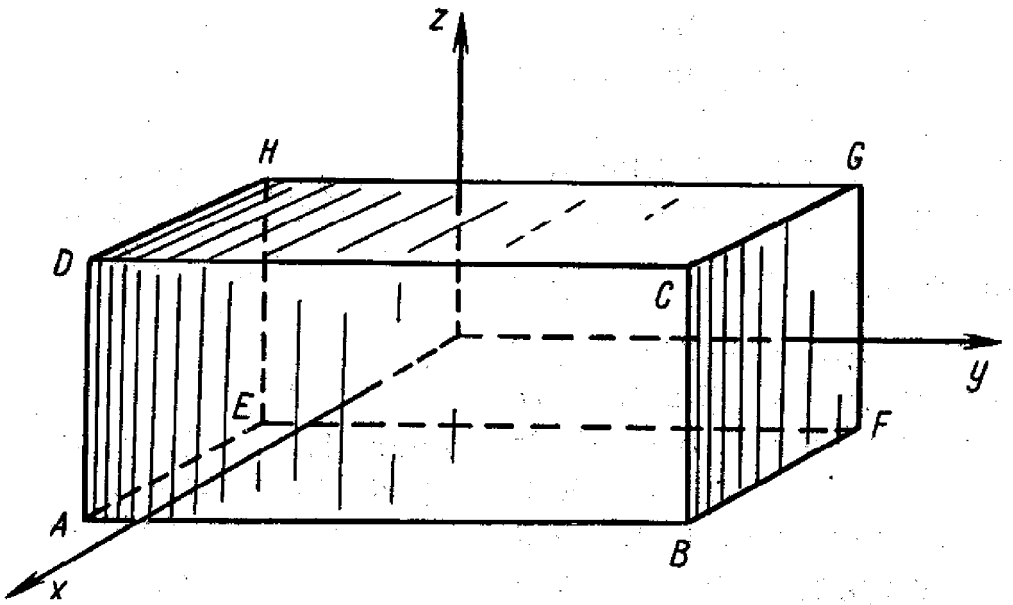


Рис. 1.19. Дифференциальный прямоугольный параллелепипед (начало координат в центре параллелепипеда).

и поместим начало координат в геометрический центр этого элемента объема. Поверхностный интеграл сводится к шести интегралам по каждой из шести граней параллелепипеда. Помня, что вектор $d\boldsymbol{\sigma}$ направлен наружу, имеем $d\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{i} = -|d\boldsymbol{\sigma}|$ для поверхности $EFGH$ и $+|d\boldsymbol{\sigma}|$ для поверхности $ABCD$, поэтому

$$\int \varphi\, d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{i}\int\limits_{EFGH}\left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz +$$

$$+\mathbf{i}\int\limits_{ABCD}\left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz - \mathbf{j}\int\limits_{AEHD}\left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz +$$

$$+\mathbf{j}\int\limits_{BFGC}\left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz - \mathbf{k}\int\limits_{ABFE}\left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy +$$

$$+\mathbf{k}\int\limits_{DCGH}\left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy.$$

Каждая подынтегральная функция вычисляется в начале координат, а затем вводится поправка на расстояние до центра грани. Перегруппировав члены, получаем (с учетом сказанного)

$$\int \varphi \, d\sigma = \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz. \qquad (1.93)$$

Поделив полученное выражение на $\int d\tau = dx\, dy\, dz$, убеждаемся в справедливости (1.90).

При доказательстве мы пренебрегли поправочными членами, содержащими производные более высокого порядка. Дополнительные члены, которые вводятся в разд. 5.6 в связи с рассмотрением ряда Тейлора, исчезают в пределе $\int d\tau \to 0$ ($dx \to 0$, $dy \to 0$, $dz \to 0$). Безусловно, для более строгой проверки уравнений (1.90), (1.91) и (1.92) необходимо совершить указанный предельный переход.

Справедливость уравнения (1.92) доказывается аналогично (используется дифференциальный объем $dx\, dy\, dz$).

Упражнения

1. Поле сил, действующих на двумерный линейный осциллятор, можно записать как $\mathbf{F} = -\mathbf{i}kx - \mathbf{j}ky$. Сравнить работу, которая совершается при движении от точки (1,1) до точки (4,4) в поле этих сил в случае трех различных путей перемещения: (1,1) $\longrightarrow$ (4,1) $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ (4,4), (1,1) $\longrightarrow$ (1,4) $\longrightarrow$ (4,4) и (1,1) $\longrightarrow$ (4,4) вдоль линии $x = y$. Для этого оценить интеграл $-\int\limits_{(1,1)}^{(4,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

2. Задано поле сил $\mathbf{F} = \dfrac{-\mathbf{i}y}{x^2+y^2} + \dfrac{\mathbf{j}x}{x^2+y^2}$. Определить работу, совершаемую при движении по окружности единичного радиуса против часовой стрелки от 0 до π и по часовой стрелке от 0 до $-\pi$ (окружность лежит в плоскости xy). Напомним, что работа зависит от выбора пути.

3. Вычислить интеграл $\dfrac{1}{3}\int\limits_S \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, взятый по поверхности единичного куба, который определен точкой (0, 0) и единичными отрезками в положительных направлениях осей x, y и z. Заметим, что $\mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ равно нулю для трех граней, а каждая из оставшихся граней вносит в интеграл одинаковый вклад.

4. Доказать, что $\lim\limits_{\int d\tau \to 0} \dfrac{\int\limits_S d\sigma \times \mathbf{V}}{\int\limits_S d\tau} = \nabla \times \mathbf{V}$. *Замечание.* При доказательстве пользоваться элементарным объемом $dx\,dy\,dz$.

5. Найти работу, которая совершается при перемещении из точки (1,1) в точку (3,3). Приложенная сила равна $\mathbf{F} = \mathbf{i}(x-y) + \mathbf{j}(x+y)$. Определить точно путь перемещения. Заметим, что эта сила неконсервативна.

1.11. ТЕОРЕМА ГАУССА*

В этом разделе мы установим полезное соотношение между поверхностным интегралом от вектора и объемным интегралом от производной вектора. Пусть заданы $\mathbf{V}$ и $\nabla \cdot \mathbf{V}$, непрерывные во всей интересующей нас области. Теорема Гаусса утверждает, что

$$\int\limits_S \mathbf{V} \cdot d\sigma = \int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{V}\, d\tau. \tag{1.94}$$

При обсуждении уравнения (1.61) мы указали, что под $\nabla \cdot \mathbf{V}$ можно понимать количество жидкости, вытекшей из единичного объема. Следовательно, правая часть уравнения (1.94) равна полному количеству жидкости, вытекшей из объема V, по которому ведется интегрирование. Убеждаясь, что левая часть уравнения описывает поток жидкости через поверхность S, которая ограничивает данный объем, мы тем самым доказываем теорему Гаусса. Более детальное и математически строгое доказательство теоремы Гаусса можно найти в литературе, рекомендованной к данной главе.

Из теоремы Гаусса вытекает одно полезное следствие, известное как *теорема Грина*. Если u и v — две скалярные функции, то имеем

$$\nabla \cdot (u \nabla v) \equiv u \nabla \cdot \nabla v + (\nabla u) \cdot (\nabla v), \tag{1.95}$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) \equiv v \nabla \cdot \nabla u + (\nabla v) \cdot (\nabla u). \tag{1.96}$$

Вычитая (1.96) из (1.95), интегрируя по объему (u, v и их производные предполагаются непрерывными) и применяя формулу (1.94) (теорему Гаусса), получаем теорему Грина

$$\int\limits_V (u \nabla \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \nabla u)\, d\tau = \int\limits_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma. \tag{1.97}$$

* Более точно следует называть данную теорему теоремой Остроградского — Гаусса.— *Прим. перев.*

Уравнение (1.95) допускает иную запись:

$$\int_S u\nabla v\cdot d\sigma=\int_V u\nabla\cdot\nabla v\,d\tau+\int_V \nabla u\cdot\nabla v\,d\tau. \qquad (1.98)$$

Несмотря на то что выражение (1.94), содержащее дивергенцию, является наиболее важной формой записи теоремы Гаусса, может встретиться и такая форма этой теоремы, когда объемные интегралы будут содержать градиент и ротор. Предположим, что

$$\mathbf{V}(x, y, z)=V(x, y, z)\,\mathbf{a}, \qquad (1.99)$$

где $\mathbf{a}$ — постоянный по абсолютной величине и направлению вектор (направление выбрано произвольно, но выбранное направление затем всегда остается фиксированным).

С помощью соотношения (1.62а) уравнение (1.94) в этом случае перепишется так:

$$\mathbf{a}\int_V V\,d\sigma=\int_V \nabla\cdot\mathbf{a}V\,d\tau=\mathbf{a}\int_V \nabla V\,d\tau, \qquad (1.100)$$

что, в свою очередь, можно представить

$$\mathbf{a}\cdot\Big[\int_S V\,d\sigma-\int_V \nabla V\,d\tau\Big]=0. \qquad (1.101)$$

Поскольку $|\mathbf{a}|\neq 0$, а направление этого вектора произвольно (т. е. косинус угла не равен тождественно нулю), из (1.101) следует, что

$$\int_S V\,d\sigma=\int_V \nabla V\,d\tau. \qquad (1.102)$$

Аналогично, считая, что $\mathbf{V}=\mathbf{a}\times\mathbf{P}$ ($\mathbf{a}$ — постоянный вектор), легко доказать

$$\int_S d\sigma\times\mathbf{P}=\int_V \nabla\times\mathbf{P}\,d\tau. \qquad (1.103)$$

Упражнения

1. Доказать теорему Гаусса в форме (1.103).
2. Доказать, что $\int_S d\sigma=0$, если S — замкнутая поверхность.

3. Показать, что $\frac{1}{3}\int_S \mathbf{r}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = V$ (V — объем, ограниченный замкнутой поверхностью S).

4. Показать, что для любой замкнутой поверхности S $\int_S \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$, если $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

1.12. ТЕОРЕМА СТОКСА

Теорема Гаусса связывает объемный интеграл от дивергенции некоторой функции с интегралом по замкнутой поверхности, ограничивающей объем, от той же функции.

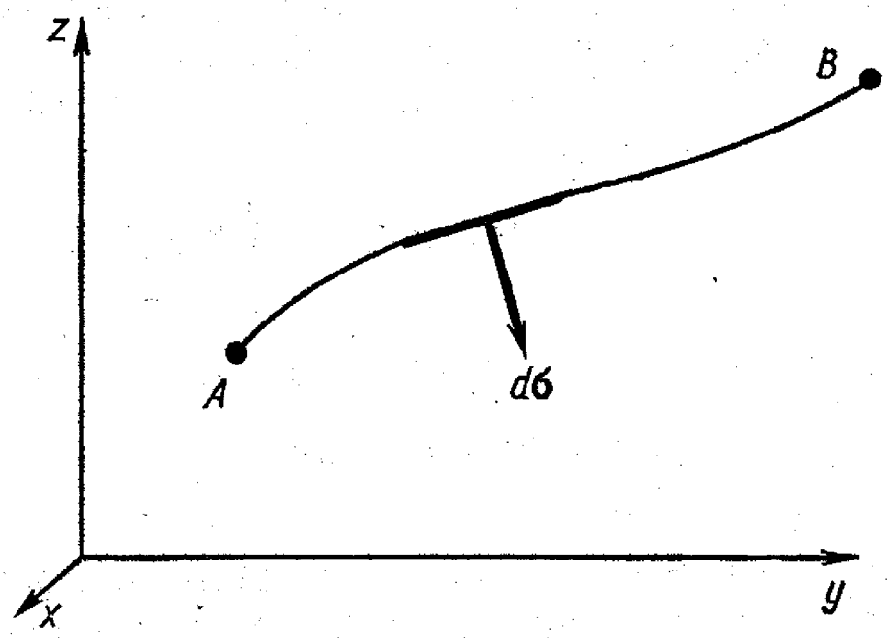


Рис. 1.20. Пересечение поверхности S с плоскостью $x = c$.

Здесь рассмотрим аналогичное соотношение между поверхностным интегралом от дивергенции некоторой функции и линейным интегралом от той же функции, причем линейное интегрирование ведется по периметру заданной поверхности. С этой целью преобразуем поверхностный интеграл от ротора, применив для этой цели к подынтегральной функции формулу смешанного произведения

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}d\sigma_z + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V_y}{\partial x}d\sigma_z - \frac{\partial V_y}{\partial z}d\sigma_x + \frac{\partial V_z}{\partial y}d\sigma_x - \frac{\partial V_z}{\partial x}d\sigma_y\right). \quad (1.104)$$

Поверхностный интеграл берется по некоторой заданной поверхности. Ориентируем оси декартовой системы координат так, чтобы поверхность пересекала плоскость $x = c$ по линии AB (рис. 1.20). Граница поверхности совпадает с линией, лежащей в плоскости $x = c$, положительное направление на этой линии соответствует направлению от A

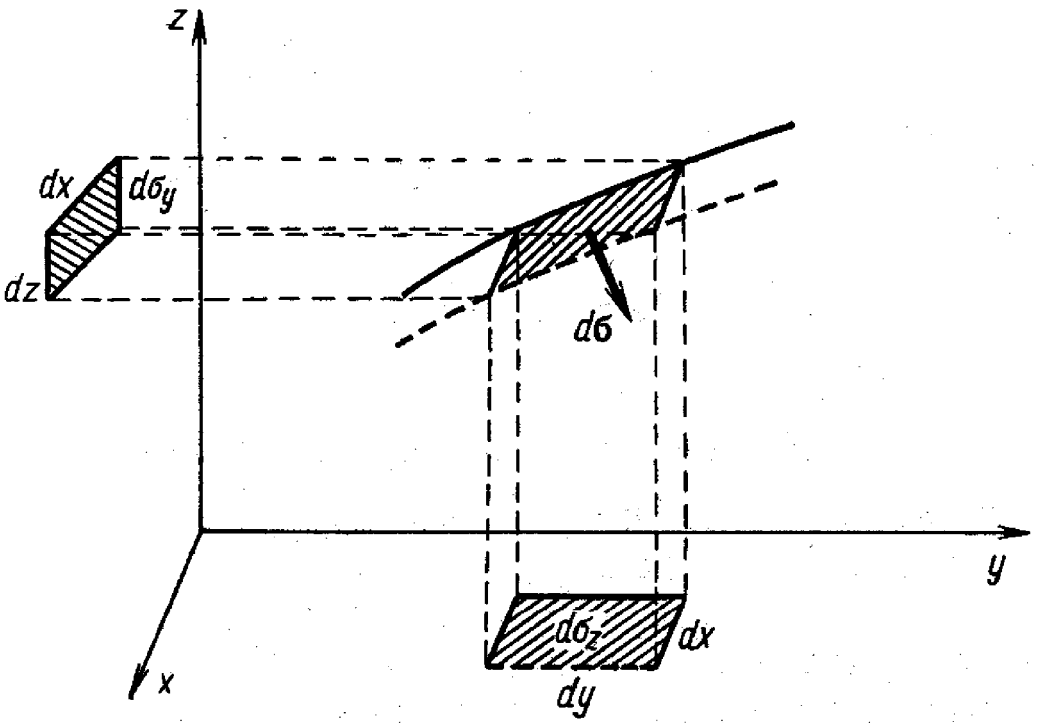


Рис. 1.21. Проекции $d\boldsymbol{\sigma}$ на плоскости xy и xz.

к B, направление $d\boldsymbol{\sigma}$ указано на рис. 1.20. В частности, как показано на рис. 1.21,

$$d\sigma_y = dx\,dy, \quad d\sigma_z = -dx\,dy. \tag{1.105}$$

Приращение dx соответствует поверхности, заключенной между плоскостями $x = c$ и $x = c + dx$. Интегрируя производные от V_x по указанному приращению поверхности, получаем

$$\int_S \left(\frac{dV_x}{\partial z}\,d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\,d\sigma_z\right) = \int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\,dy + \frac{dV_x}{\partial z}\,dz\right) dx. \tag{1.106}$$

Поскольку x остается постоянным при интегрировании от A до B

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V_x}{\partial z}\,dz = dV_x, \tag{1.107}$$

поверхностный интеграл преобразуется к виду

$$\int dx \int_A^B dV_x = \int V_x(x, y_B, z_B)\, dx - \int V_x(x, y_A, z_A)\, dx. \tag{1.107a}$$

Указанный выбор направления при обходе границы области означает, что $dx = d\lambda_x$ — в направлении к точке B и $dx = -d\lambda_x$ — в направлении к A, где $d\boldsymbol{\lambda}$ — вектор приращения длины вдоль периметра. Наконец, полагая, что x при своем изменении охватывает всю заданную поверхность, получаем

$$\int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\, d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\, d\sigma_z\right) = \oint V_x\, d\lambda_x. \tag{1.108}$$

Символом $\oint$ обозначено интегрирование по замкнутому пути, в данном случае по периметру заданной поверхности. Далее, циклической перестановкой координат (или совершенно аналогично рассматривая производные от V_y, плоскость $y = c$ и т. д.) для производных от V_y и V_z получаются такие же выражения, поэтому окончательно

$$\int \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint (V_x\, d\lambda_x + V_y\, d\lambda_y + V_z)\, d\lambda_z = \oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda}. \tag{1.109}$$

Это и есть *теорема Стокса*.

С помощью теоремы Стокса можно установить дополнительные соотношения между поверхностными и линейными интегралами:

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla\varphi = \oint \varphi\, d\boldsymbol{\lambda}, \tag{1.110}$$

$$\int_S (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint d\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{P}. \tag{1.111}$$

В справедливости (1.110) легко убедиться подстановкой в (1.109) $\mathbf{V} = \mathbf{a}\varphi$, где $\mathbf{a}$ — вектор, постоянный по величине и направлению:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}\varphi) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\int_S \mathbf{a} \times \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{a} \cdot \int_S \nabla\varphi \times d\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.112}$$

Для линейного интеграла

$$\oint \mathbf{a}\varphi \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a} \cdot \oint \varphi \, d\boldsymbol{\lambda}, \tag{1.113}$$

поэтому

$$\mathbf{a} \cdot \left(\oint \varphi \, d\boldsymbol{\lambda} + \int_S \nabla\varphi \times d\boldsymbol{\sigma} \right) = 0. \tag{1.114}$$

Поскольку направление $\mathbf{a}$ произвольно, выражение в круглых скобках равно нулю. Таким образом, соотношение (1.110) доказано. Аналогично доказывается соотношение (1.111), в котором нужно положить $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathrm{P}$; вектор $\mathbf{a}$ имеет тот же смысл, что и выше.

Вернемся к уравнению (1.109), в котором член $\oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$ можно рассматривать как поток жидкости, циркулирующей по замкнутому контуру. Если в качестве поверхности выбран круг площадью $k\,d\sigma$, то $|\nabla \times \mathbf{V}|\, d\sigma$ равно циркуляции вектора $\mathbf{V}$ вдоль замкнутого контура площадью $d\sigma$ в плоскости xy. Это позволяет измерить ротор вектора $\mathbf{V}$ вращением небольшого гребного винта. Если винт не вращается, циркуляция равна нулю, и, следовательно, на основании теоремы Стокса, вектор $\mathbf{V}$ — безвихревой.

Упражнения

1. Доказать теорему Стокса в форме (1.111).

2. Пусть $\mathbf{t} = -\mathbf{i}y + \mathbf{j}x$. Используя теорему Стокса, показать, что интеграл вдоль непрерывной замкнутой кривой в плоскости xy равен

$$\frac{1}{2} \oint \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \oint (x\,dy - y\,dx) = A,$$

где A — площадь поверхности, ограниченной этой кривой.

3. Интегрированием по периметру поверхности, расположенной в плоскости xy, показать, что по абсолютной величине интеграл $\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ вдвое больше самой поверхности.

4. Показать, что $\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$, если S — замкнутая поверхность.

5. Доказать соотношения

$$\oint u \nabla v \cdot d\boldsymbol{\lambda} = -\oint v \nabla u \cdot d\boldsymbol{\lambda}, \quad \oint u \nabla v \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S (\nabla u) \times (\nabla v) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

6. Указать ошибку в следующих рассуждениях. Запишем уравнение Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1}$$

Подставляя (1) в выражение (1.94), получаем

$$\int \nabla \cdot \mathbf{B}\, d\tau = \int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{2}$$

Соленоидальный вектор $\mathbf{B}$ можно выразить через ротор некоторого вектора (векторный потенциал)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{3}$$

Подстановкой (3) в (2) получим

$$\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{4}$$

По теореме Стокса

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\lambda}. \tag{5}$$

Уравнение (5) эквивалентно условию для поля консервативных сил

$$\mathbf{A} = \nabla \varphi. \tag{6}$$

Подставляя в (3), получаем

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \varphi = 0,$$

т. е. все магнитные поля $\mathbf{B}$ исчезают (магнитные поля не являются реальностью).

1.13. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Скалярный потенциал. Если некоторую силу в заданной области пространства S можно выразить в виде отрицательного градиента некоторой скалярной функции φ

$$\mathbf{F} = -\nabla \varphi, \tag{1.115}$$

то φ будем называть *скалярным потенциалом*. Сила $\mathbf{F}$, равная отрицательному градиенту однозначного скалярного потенциала, называется *консервативной силой*. Определим условия существования скалярного потенциала. Для этого следует показать, что два соотношения

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0, \tag{1.116}$$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{1.117}$$

эквивалентны уравнению (1.115). Выражение (1.117) справедливо для любого замкнутого контура в области S. Дока-

жем, что каждое из трех записанных выше уравнений эквивалентно двум другим.

Начнем с уравнения

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi, \tag{1.118}$$

которое сводится к (1.116) с помощью соотношения (1.77). Интегральное условие (1.117) с учетом (1.56) перепишется в виде

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\oint \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = -\oint d\varphi. \tag{1.119}$$

Интегрирование по $d\varphi$ дает φ, но так как рассматриваемый контур замкнут, то его концевые точки совпадают, поэтому результат интегрирования будет равен нулю для любого замкнутого контура в области S, в которой справедливо уравнение (1.116). Обратим внимание на сделанные ограничения: 1) требование однозначности потенциала; 2) выполнение условия (1.115) во всех точках S. Это замечание существенно в теории скалярного магнитного потенциала для кругового тока. Как только мы выберем контур в пространстве, который окружает линии тока, магнитный скалярный потенциал перестает быть однозначным, и приведенный анализ применять нельзя.

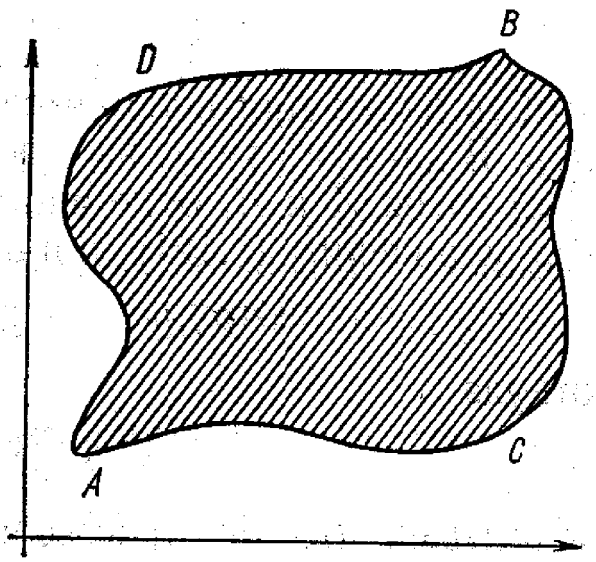


Рис. 1.22. Возможные пути обхода при совершении работы.

Продолжая доказательство эквивалентности, полагаем, что выполнено условие (1.117). Если $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ для любого контура в S, то значение интеграла, вычисленного между двумя точками A и B, не зависит от пути (рис. 1.22). Действительно, поскольку

$$\oint_{ACBDA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0,$$

то

$$\int_{ACB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{BDA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \qquad (1.120)$$

где перемена знака указывает изменение направления интегрирования. Физически это означает, что работа, совершаемая при перемещении из точки A в точку B, не зависит от пути, а работа при перемещении по замкнутому контуру равна нулю. Благодаря этому сила названа консервативной — энергия сохраняется.

Из уравнения (1.120) следует, что работа зависит только от концевых точек A и B, т. е.

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B). \qquad (1.121)$$

Выбор знака при положительном обходе контура произволен. В данном случае знак выбран в соответствии с (1.115). Для точек A и B, отстоящих друг от друга на расстояние $d\mathbf{r}$, уравнение (1.121) принимает вид

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -d\varphi = -\nabla\varphi\cdot d\mathbf{r}, \qquad (1.122)$$

откуда

$$(\mathbf{F} + \nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r} = 0. \qquad (1.123)$$

Учитывая, что $d\mathbf{r}$ произвольно, получаем из (1.123) уравнение (1.115). Если

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0,$$

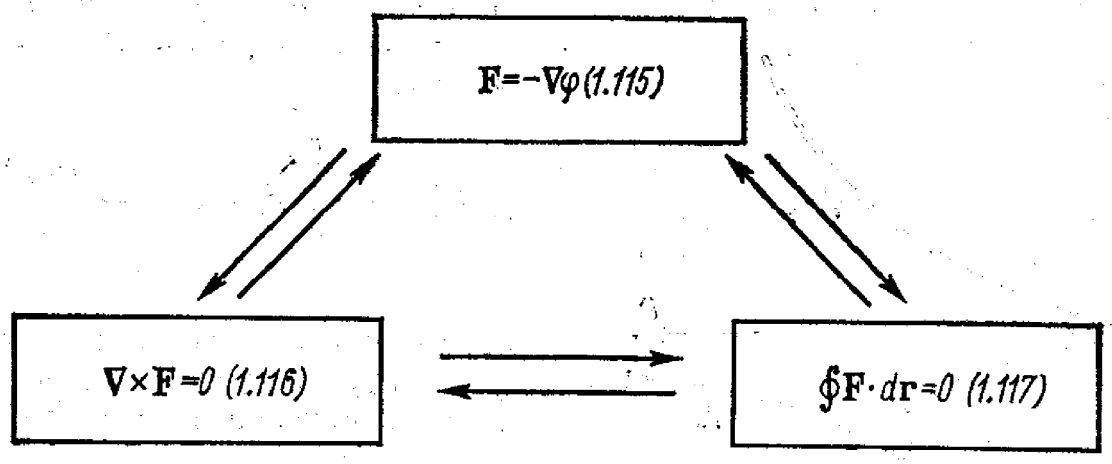
то (1.116) можно получить, применяя теорему Стокса (1.109):

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\sigma. \qquad (1.124)$$

Если в качестве контура интегрирования выбрать периметр элемента поверхности $d\sigma$, то подынтегральная функция в поверхностном интеграле обратится в нуль. Следовательно, из (1.117) вытекает соотношение (1.116).

Наконец, если $\nabla\times\mathbf{F} = 0$, то для получения из этого условия уравнения (1.117) необходимо обратить последовательность доказательства теоремы Стокса [в форме (1.124)]. Далее, с учетом (1.121) и (1.123) получается уравнение

(1.115). Эквивалентность всех трех соотношений демонстрируется следующей схемой:



Суммируя результаты, полученные в этом разделе, можно сказать, что скалярный потенциал φ существует тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{F}$ безвихревой, или работа, совершаемая при перемещении вдоль любого замкнутого контура, равна нулю. Гравитационные и электростатические силы, заданные уравнением (1.75), являются безвихревыми и, следовательно, консервативными, поэтому гравитационный и электростатический потенциалы существуют.

Пример 1. Найдем скалярный потенциал для гравитационной силы, действующей на единичную массу m_1:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}_0}{r^2} = -\frac{k\mathbf{r}_0}{r^2}.$$

Интегрируя (1.115) от бесконечности до $\mathbf{r}$, получаем

$$\varphi_G(r) - \varphi_G(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = +\int_{r}^{\infty} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}. \qquad (1.125)$$

Полагая, что $\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ — сила, приложенная к массе), и учитывая (1.88), видим, что потенциал равен работе, которая затрачивается на перенос единичной массы из бесконечности в точку $\mathbf{r}$. (Можно определить только разность потенциалов. В данном случае произвольно полагалось, что на бесконечности потенциал равен нулю.) Интеграл в правой части уравнения (1.125) отрицателен, т. е. значение $\varphi_G(r)$ также отрицательно. Поскольку $\mathbf{F}_G$ радиальна, то

$$\varphi_G(r) = \int_{r}^{\infty} -\frac{k\,dr}{r^2} = -\frac{k}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Знак минус означает, что гравитационная сила есть сила притяжения.

Пример 2. Вычислить скалярный потенциал *центробежной* силы, действующей на единичную массу. Сила направлена радиально от центра и равна $\mathbf{F}_C = \omega^2 r \mathbf{r}_0$. В отличие от примера 1 интегрирование проводится от начала координат, причем полагаем $\varphi_C(0) = 0$. Потенциал центробежной силы имеет вид

$$\varphi_C(r) = -\int_0^r \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

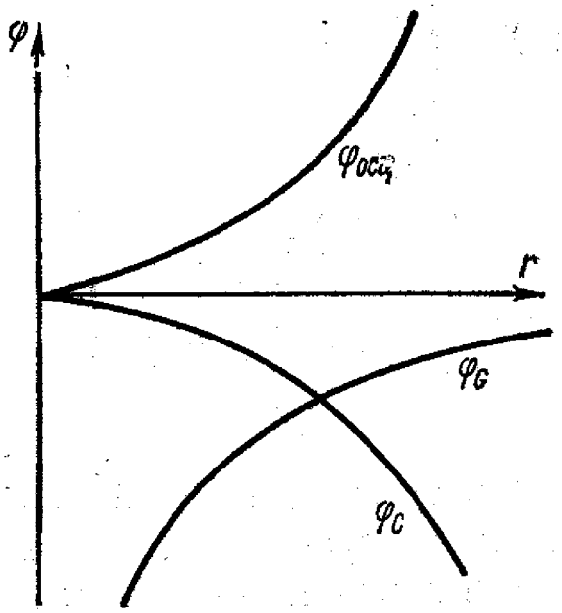


Рис. 1.23. Зависимость потенциальной энергии от расстояния:
φ_G — гравитационная, φ_C — центробежная, $\varphi_{осц}$ — энергия линейного гармонического осциллятора.

Если изменить знак и положить $\mathbf{F}_{осц} = -k\mathbf{r}$, то потенциал линейного гармонического осциллятора $\varphi_{осц} = kr^2/2$.

На рис. 1.23 представлены потенциалы гравитационной и центробежной силы, а также потенциал линейного гармонического осциллятора. Последний характеризует устойчивое состояние и описывает силу возврата. Потенциал центробежной силы описывает неустойчивое состояние.

В термодинамике, которую в свое время называли наукой о полных дифференциалах, встречаются уравнения типа

$$df = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (1.126)$$

Обычно требуется определить, зависит ли интеграл $\oint [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]$ только от конечных точек контура интегрирования, т. е. является ли df полным дифференциалом. Необходимое и достаточное условие этого формулируется в виде уравнения

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \qquad (1.126а)$$

или

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (1.126б)$$

Функции P и Q, удовлетворяющие (1.126б), связаны соотношением

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \qquad (1.126в)$$

которое представляет собой точную аналогию условия (1.116), требующего, чтобы **F** был безвихревым. В самом деле, z-компонента уравнения (1.116) дает

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \tag{1.126г}$$

Векторный потенциал. В некоторых областях физики, особенно в электромагнитной теории, часто вводят векторный потенциал **A** такой, что поле **B** задают в виде

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.127}$$

Очевидно, если выполнено (1.127), то на основании (1.79) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и, следовательно, **B** — соленоидальный вектор. Докажем обратное, т. е. если **B** соленоидален, то векторный потенциал **A** существует. Докажем это утверждение прямым вычислением **A**. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3$, а векторный потенциал $\mathbf{A} = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$. Из уравнения (1.127) имеем

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1, \tag{1.128а}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = b_2, \tag{1.128б}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_3. \tag{1.128в}$$

Предположим далее, что система координат выбрана таким образом, что **A** параллелен плоскости yz, т. е. $a_1 = 0$. Тогда

$$b_2 = -\frac{\partial a_3}{\partial z}, \quad b_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x}. \tag{1.129}$$

Проинтегрируем

$$a_2 = \int_{x_0}^{x} b_3\,dx + f_2(y, z), \quad a_3 = -\int_{x_0}^{x} b_2\,dx + f_3(y, z), \tag{1.130}$$

где f_2 и f_3 — производные функции y и z, *не зависящие* от x. Подставляя (1.130) в (1.128а) и учитывая, что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, получаем

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial b_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{1.131}$$

Интегрируя по x, имеем

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}=b_1(x, y, z)-b_1(x_0, y, z)+\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}. \quad (1.132)$$

Поскольку f_3 и f_2 — произвольные функции y и z, можно положить

$$f_2=0,\ f_3=\int_{y_0}^{y} b_1(x_0, y, z)\,dy, \quad (1.133)$$

после чего в соответствии с (1.128а) в правой части (1.132) остается зависимость от одной лишь функции $b_1(x, y, z)$. Взяв f_2 и f_3, из (1.133) можно построить $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}=\mathbf{j}\int_{x_0}^{x} b_3(x, y, z)\,dx+\mathbf{k}\left[\int_{y_0}^{y} b_1(x_0, y, z)\,dy-\int_{x_0}^{x} b_2(x, y, z)\,dx\right]. \quad (1.134)$$

Это определение не является совершенно полным. Можно прибавить произвольную постоянную, поскольку $\mathbf{B}$ записывается через производную от вектора $\mathbf{A}$. Однако, что более важно, можно прибавить и любой градиент скалярной функции $\nabla\varphi$, не изменяя $\mathbf{B}$. Наконец, в силу произвольности f_2 и f_3 возможен другой выбор этих функций. В разд. 1.15 дополнительно будет определена величина $\nabla\cdot\mathbf{A}$.

Пример 3. Для иллюстрации построим магнитный векторный потенциал. Рассмотрим частный, но очень важный случай постоянной магнитной индукции

$$\mathbf{B}=\mathbf{k}B_z, \quad (1.135)$$

где B_z — постоянная. Для этого случая уравнения (1.128) принимают вид

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}=0,\ \frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}=0,\ \frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}=B_z. \quad (1.136)$$

Полагая, как и раньше, $a_1=0$, получаем из (1.134)

$$\mathbf{A}=\mathbf{j}\int_{x}^{x} B_z\,dx=\mathbf{j}xB_z. \quad (1.137)$$

Здесь постоянная интегрирования положена равной нулю. Легко заметить, что полученное выражение для $\mathbf{A}$ удовлетворяет (1.127).

Для доказательства того, что условие $a_1=0$ не является слишком жестким, наложим условие $a_3=0$.

Тогда из (1.136) получим

$$\frac{\partial a_2}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial a_1}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}=B_z. \tag{1.138}$$

Мы видим, что a_1 и a_2 не зависят от z, т. е.

$$a_1=a_1(x, y),\ a_2=a_2(x, y). \tag{1.139}$$

Последнее из условий (1.138) будет выполнено, если положить

$$a_2=p\int^{x} B_2\,dx=pxB_z, \tag{1.140}$$

$$a_1=(p-1)\int^{y} B_z\,dy=(p-1)\,yB_z, \tag{1.141}$$

где p — произвольная постоянная. Тогда

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}(p-1)\,yB_z+\mathbf{j}pxB_z. \tag{1.142}$$

Кроме того, нужно показать, что уравнения (1.127), (1.135) и (1.142) непротиворечивы. Сравнение (1.137) и (1.142) сразу же убеждает нас, что выбор **A** неоднозначен. Различие между уравнениями (1.137) и (1.142) и наличие параметра p в уравнении (1.142) можно учесть, если переписать его так:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{i}y-\mathbf{j}x)\,B_z+\left(p-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{i}y+\mathbf{j}x)\,B_z=$$

$$=-\frac{1}{2}(\mathbf{i}y-\mathbf{j}x)\,B_z+\left(p-\frac{1}{2}\right)B_z\nabla\varphi, \tag{1.143}$$

где *

$$\varphi=xy. \tag{1.144}$$

Первый член в **A** соответствует обычной форме

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r}) \tag{1.145}$$

для постоянного **B**.

Во многих случаях магнитный векторный потенциал получают исходя из распределения тока, вызванного магнитным полем **B**. Это достигается решением векторного уравнения Пуассона (см. упр. 1 к разд. 1.14).

* Очевидно, что $\varphi(x,y)=xy$ не является скаляром в смысле разд. 1.3, т. е. произведение xy неинвариантно относительно поворота вокруг оси z. Если потребовать инвариантность, то p необходимо положить равным 1/2.

Упражнения

1. Определить, какие из приведенных сил

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}\frac{-y}{x^2+y^2}+\mathbf{j}\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{F}=\mathbf{i}\frac{y}{r}-\mathbf{j}\frac{x}{r},$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}xf(r)+\mathbf{j}yf(r)+\mathbf{j}yf(r)+\mathbf{k}zf(r),$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}f_1(x)+\mathbf{j}f_2(y)+\mathbf{k}f_3(z)$$

(здесь $f(r)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ — произвольные функции) носят потенциальный характер, указать физическую природу поля сил. Найти потенциал в тех случаях, когда это можно сделать. *Указание.* Обратить особое внимание на поведение $\mathbf{F}$ в начале координат.

2. Пусть $\mathbf{B}=\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}=\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$. Определить $\mathbf{A}$ так, чтобы $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$. Одно из возможных решений

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{i}yz}{r(x^2+y^2)}-\frac{\mathbf{j}xz}{r(x^2+y^2)}.$$

3. Имеется равномерно (по объему) заряженная сфера радиусом a. Определить электростатический потенциал $\varphi(r)$ для $0\leqslant r<\infty$. *Замечание.* В разд. 1.14 показано, что кулоновская сила, действующая на заряд, помещенный в точке $r=r_0$, зависит от заряда только для расстояний, меньших r_0, и не зависит от него для расстояний, превышающих r_0. Подчеркнем, что это справедливо для *сферически симметричного* распределения заряда.

4. Показать, что уравнения $\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})$, $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ описывают произвольный постоянный вектор $\mathbf{B}$.

1.14. ЗАКОН ГАУССА. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Закон Гаусса. Точечный электрический заряд помещен в начало координат. Он создает электрическое поле $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}=\frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{1.146}$$

С помощью (1.146) получим *закон Гаусса*, согласно которому поверхностный интеграл

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\begin{cases} q/\varepsilon_0 & \text{заряд внутри } V,\\ 0 & \text{заряд вне } V,\end{cases} \tag{1.147}$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V.

Используя теорему Гаусса в виде (1.94) (и опуская множитель $q/4\pi\varepsilon_0$), получаем, учитывая, что $\nabla\cdot\mathbf{r}_0 r^{-2}=0$

(см. пример 2 к разд. 1.7), для поверхности, не охватывающей начало координат, в котором подынтегральная функция неопределенна,

$$\int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\sigma}{r^2} = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}\right) d\tau = 0. \qquad (1.148)$$

Это доказывает закон Гаусса для случая, когда заряд лежит вне объема V.

Если поверхность S охватывает начало координат, можно построить малую сферу S' радиусом δ с центром

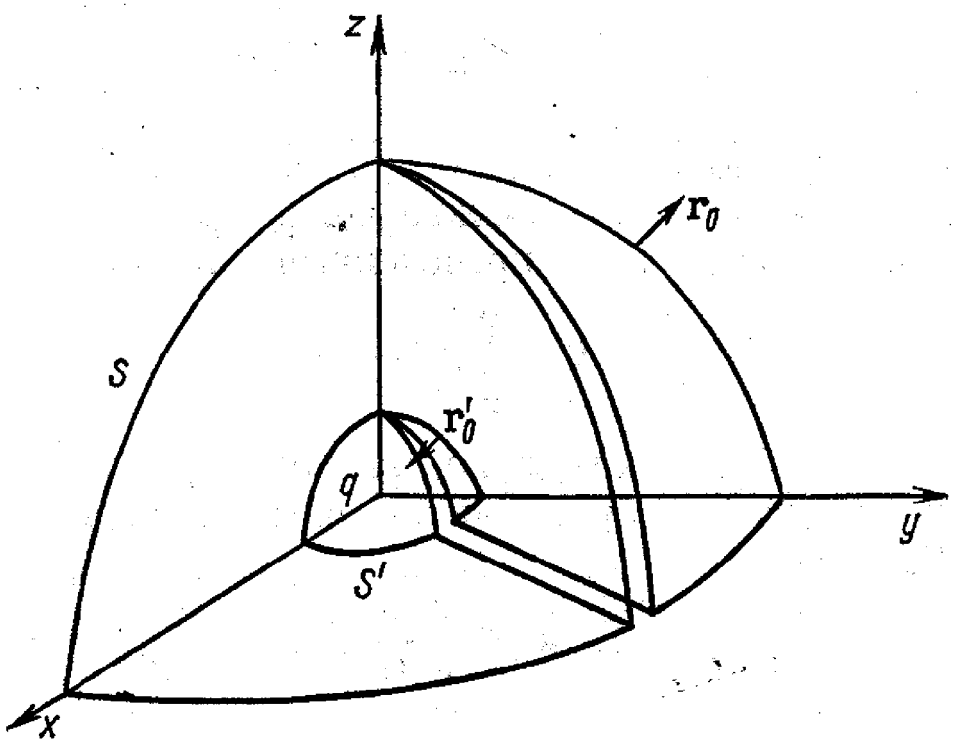


Рис. 1.24. Исключение начала координат.

в начале координат (рис. 1.24). Чтобы не возникал вопрос, какая из поверхностей внутренняя, а какая наружная, шаровой слой, ограниченный сферами S и S', имеет разрез, который связывает сферы S и S', в результате чего образуется односвязная замкнутая поверхность. Поскольку разрез можно сделать как угодно малым, вклад в поверхностный интеграл, обусловленный разрезом, стремится к нулю. Теперь уже можно применить теорему Гаусса к объему, заключенному между двумя поверхностями S и S':

$$\int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\sigma}{r^2} + \int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\sigma'}{\delta^2} = 0. \qquad (1.149)$$

Можно оценить второй интеграл, полагая $d\boldsymbol{\sigma}' = -\mathbf{r}_0\delta^2 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Знак минус, в соответствии с разд. 1.10, фиксирует положительное направление нормали $\mathbf{r}_0'$. В этом случае положительное направление $\mathbf{r}_0'$ соответствует отрицательному направлению радиуса-вектора: $\mathbf{r}_0' = -\mathbf{r}_0$. Интегрируя по всем углам, получаем

$$\int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = -\int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \delta^2 \, d\Omega}{\delta^2} = -4\pi. \qquad (1.150)$$

С учетом постоянного множителя в (1.146)

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (1.151)$$

и закон Гаусса полностью доказан. Заметим, что поверхность S не обязательно должна быть сферической.

Рассмотрим теперь распределенный заряд

$$q = \int_V \rho \, d\tau. \qquad (1.152)$$

Уравнение (1.151) справедливо, но под зарядом q нужно понимать полный заряд, заключенный внутри поверхности S:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau. \qquad (1.153)$$

На основании теоремы Гаусса получаем

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau. \qquad (1.154)$$

Поскольку выбор объема произволен, подынтегральные выражения должны быть равны

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0. \qquad (1.155)$$

Это соотношение — одно из уравнений Максвелла.

Можно пойти обратным путем и, используя приведенное уравнение Максвелла, доказать закон Гаусса.

Уравнение Пуассона. Если в уравнении (1.155) $\mathbf{E}$ заменить на $-\nabla\varphi$, то получим уравнение Пуассона

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\rho/\varepsilon_0. \qquad (1.156)$$

При условии $\rho = 0$ оно приводится к известному уравнению Лапласа

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0. \tag{1.157}$$

Упражнения

1. Используя уравнения Максвелла, показать, что для статической системы (постоянный ток) магнитный векторный потенциал $\mathbf{A}$ удовлетворяет векторному уравнению Пуассона $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$, если $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

2. Сформулировать закон Гаусса для двумерного случая, для которого $\varphi = -q \frac{\ln r}{2\pi\varepsilon_0}$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = q \frac{\mathbf{r}_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$, где q — заряд, отнесенный к единице длины, а двумерная система представляет собой цилиндрический слой единичной толщины; r — расстояние по радиусу от точки измерения до осевой линии.

3. Получить закон Гаусса из уравнения Максвелла (1.155).

4. Предполагая электрическое поле точечного заряда q сферически симметричным, показать, что из закона Гаусса следует закон Кулона

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

1.15. ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В разд. 1.13 было указано, что выбор магнитного векторного потенциала $\mathbf{A}$ неоднозначен. Дивергенция $\mathbf{A}$ осталась неопределенной. В этом разделе докажем две теоремы о дивергенции и роторе вектора.

Вектор внутри некоторой области можно определить однозначно заданием его дивергенции, ротора и нормальной компоненты на границе этой области. Положим

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = s, \quad \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mathbf{c}, \tag{1.158}$$

где s — плотность источника (заряд); $\mathbf{c}$ — плотность циркуляции (тока). Кроме того, задана нормальная компонента V_n на границе области. Докажем, что сделанные предположения однозначно определяют вектор $\mathbf{V}_1$. Пусть существует вектор $\mathbf{V}_2$, который удовлетворяет уравнению (1.158) и имеет ту же самую нормальную компоненту на границе. Покажем, что $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$. Обозначим $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$. Тогда

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0, \tag{1.159}$$

$$\nabla \times \mathbf{W} = 0. \tag{1.160}$$

Можно положить (см. разд. 1.13)

$$\mathbf{W} = -\nabla\varphi. \tag{1.161}$$

Подставляя это в уравнение (1.159), получаем уравнение Лапласа

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = 0. \tag{1.162}$$

Теперь воспользуемся теоремой Грина (1.98), полагая u и v равными φ. Поскольку на границе

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0, \tag{1.163}$$

то теорема Грина сводится к

$$\int_V (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\,d\tau = \int_V \mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\,d\tau = 0. \tag{1.164}$$

Величина $\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} = W^2$ неотрицательна, откуда

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0 \tag{1.165}$$

всюду в заданной области. Следовательно, $\mathbf{V}_1$ единствен и теорема доказана.

Докажем теперь вторую теорему — теорему Гельмгольца. Вектор $\mathbf{V}$, удовлетворяющий условиям (1.158), в которых $\mathbf{c}$ и s на бесконечности равны нулю, можно записать в виде суммы двух векторов, один из которых безвихревой, а другой соленоидальный. Попытаемся доказать, что данный вектор $\mathbf{V}$ можно записать в виде

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla\times\mathbf{A}, \tag{1.166}$$

причем $-\nabla\varphi$ — безвихревая часть, а $\nabla\times\mathbf{A}$ — соленоидальная. В частности, φ, соответствующая скалярному потенциалу, записывается как

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}}\,d\tau_2, \tag{1.167}$$

а $\mathbf{A}$, соответствующий векторному потенциалу, равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}}\,d\tau_2. \tag{1.168}$$

Здесь $\mathbf{r}_1$ указывает координату точки поля (x_1, y_1, z_1), а $\mathbf{r}_2$ — координату источника (x_2, y_2, z_2), тогда как

$$r_{12} = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2]^{1/2}. \tag{1.169}$$

Направления векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ показаны на рис. 1.25. В качестве положительного направления $\mathbf{r}_{12}$ взято направление из точки источника в точку наблюдения. Для существования интегралов необходимо, чтобы s и $\mathbf{c}$ на больших расстояниях достаточно быстро стремились к нулю.

Соотношением (1.166) $\mathbf{V}$ задан в виде суммы безвихревой и соленоидальной частей, причем скалярный и векторный потенциалы определены (1.167) и (1.168). Покажем,

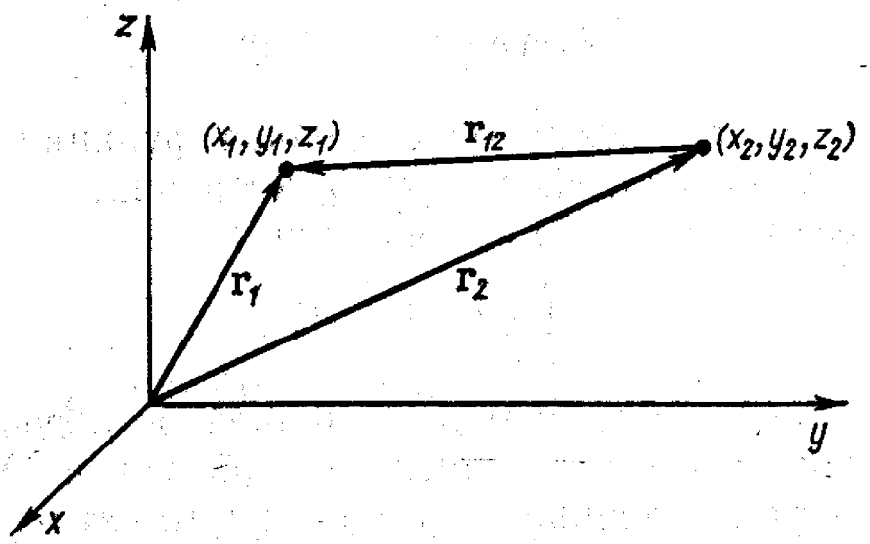


Рис. 1.25. Координаты источника (x_2, y_2, z_2) и точки наблюдения (x_1, y_1, z_1).

что $\mathbf{V}$ удовлетворяет также условиям (1.158), тогда на основании предыдущей теоремы $\mathbf{V}$ будет определен однозначно, и теорема Гельмгольца доказана.

Во-первых, поскольку дивергенция ротора равна нулю, дивергенция $\mathbf{V}$ определяется первым членом в правой части уравнения (1.166):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2. \qquad (1.170)$$

Оператор Лапласа $\nabla \cdot \nabla$, или ∇^2, действует на координаты (x_1, y_1, z_1), поэтому его можно ввести под знак интеграла, так как интегрирование ведется по переменным (x_1, y_2, z_2):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}_2) \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right) d\tau_2. \qquad (1.171)$$

На основании закона Гаусса (см. разд. 1.14)

$$\int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}\right) d\tau = \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \begin{cases} -4\pi \\ 0 \end{cases}. \qquad (1.172)$$

Тот или иной результат зависит от того, охватывает ли замкнутая поверхность интегрирования начало координат $r = 0$. Этот результат удобно выразить с помощью δ-функции Дирака $\delta(r)$:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r). \tag{1.173}$$

Дельта-функция Дирака *определена* следующим образом:

$$\delta(r) = 0 \text{ при } r \neq 0, \tag{1.174а}$$

$$\int f(r)\,\delta(r)\,d\tau = f(0), \tag{1.174б}$$

где $f(r)$ — любая, всюду определенная функция, а объем интегрирования включает начало координат. В частном случае уравнение (1.174 б) сводится к

$$\int \delta(r)\,d\tau = 1. \tag{1.175}$$

Величина $\delta(r)$ не является функцией в общепринятом смысле, так как она не определена (бесконечна) в точке $r = 0$. По этой причине со стороны математиков иногда наблюдалось пренебрежительное отношение к этой функции. Со временем ее стали трактовать как условную запись предела. Мы будем пользоваться этой функцией в смысле определения (1.174). Несколько подробнее свойства δ-функции обсуждаются в разд. 8.6.

Прежде чем продолжить обсуждение, рассмотрим две модификации уравнения (1.173). Во-первых, пусть заданный источник расположен в точке $\mathbf{r}_2$, которая не совпадает с началом координат. Отсюда следует, что множитель 4π в законе Гаусса появляется в том и только в том случае, если поверхность охватывает точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$. Чтобы убедиться в этом, перепишем уравнение (1.173):

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{1.176}$$

Перенос источника в точку $\mathbf{r}_2$ изменит условия (1.174)

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0, \quad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2, \tag{1.177а}$$

$$\int f(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1 = f(\mathbf{r}_2). \tag{1.177б}$$

Во-вторых, двойное дифференцирование r_{12}^{-1} по переменным x_2, y_2, z_2 равносильно двойному дифференцированию

по переменным x_1, y_1, z_1:

$$\nabla_1^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)=\nabla_2^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=-4\pi\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1). \tag{1.178}$$

Нужно заметить, что из определения δ-функции следует

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1). \tag{1.179}$$

Подставляя (1.176) в уравнение (1.171) и проводя интегрирование с помощью δ-функции (1.178), получаем

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=-\frac{1}{4\pi}\int s(\mathbf{r}_2)\,\nabla_2^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\mathbf{r}_2=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int s(\mathbf{r}_2)\,(-4\pi)\,\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,d\mathbf{r}_2=s(\mathbf{r}_1). \tag{1.180}$$

Последнее равенство следует из (1.177б), в котором поменяли местами индексы 1 и 2. Выражение (1.180) показывает, что принятая форма записи вектора **V** и скалярного потенциала φ находится в согласии с первым условием (1.158).

Для полного доказательства теоремы Гельмгольца необходимо показать, что сделанные предположения согласуются и со вторым условием (1.158). На основании уравнения (1.166)

$$\nabla\times\mathbf{V}=\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A}. \tag{1.181}$$

С учетом (1.168) первый член

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}=\int\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\cdot\nabla_1\nabla_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2. \tag{1.182}$$

Заменяя вновь вторые производные по x_1, y_1, z_1 вторыми производными по x_2, y_2, z_2, проинтегрируем по частям каждую компоненту уравнения (1.182):

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}|_x=\int\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\cdot\nabla_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2=$$

$$=\int\nabla_2\cdot\left[\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\partial r_{12}}\right)\right]d\tau_2-\int[\nabla_2\cdot\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)]\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2. \tag{1.183}$$

Второй интеграл исчезает, поскольку **c** соленоидален, а первый на основании теоремы Гаусса можно преобразовать в поверхностный интеграл. Если **c** ограничен в пространстве или при больших r стремится к нулю быстрее, чем $1/r$,

то интеграл (1.168) существует, и тогда при выборе достаточно удаленной поверхности первый интеграл в правой части уравнения (1.183) тоже окажется равным нулю.

При условии $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ уравнение (1.181) сводится к (1.171), в котором скаляр $s(\mathbf{r}_2)$ заменен на вектор $\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)$:

$$\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right) d\mathbf{r}. \quad (1.184)$$

Определяя по-прежнему δ-функцию как некоторый закон интегрирования, можно видеть, что (1.184) сводится ко второму условию (1.158). Таким образом, запись $\mathbf{V}$ в виде (1.166) и векторного потенциала $\mathbf{A}$ в виде (1.168) удовлетворяет второму условию (1.158), определяющему ротор $\mathbf{V}$.

На этом завершается доказательство теоремы Гельмгольца, утверждающей, что вектор может быть разложен на безвихревую и соленоидальную части. В применении к электромагнитному полю это означает, что вектор поля $\mathbf{V}$ можно составить из двух компонент: безвихревого вектора электрического поля $\mathbf{E}$, определенного скалярным потенциалом φ, и соленоидального магнитного поля $\mathbf{B}$, которое задается векторным потенциалом $\mathbf{A}$. Плотность источника $s(\mathbf{r})$ можно рассматривать как плотность электрического заряда (деленную на диэлектрическую постоянную ε), а плотность циркуляции $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ как плотность электрического тока (умноженную на магнитную постоянную μ).

Упражнения

1. Полагая, что $\mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2$ решение векторного уравнения Пуассона

$$\nabla_1^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{V}(\mathbf{r}_1),$$

доказать теорему Гельмгольца (1.166), в которой

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{P}, \quad \varphi = \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

2. Убедиться, что данное решение $\mathbf{P}(\mathbf{r}_1)$ при подстановке в φ и $\mathbf{A}$ приводит к выражениям, которые даны для этих величин в разд. 1.15.

ГЛАВА 2

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В гл. 1 мы почти целиком ограничились декартовой системой координат, в которой предполагалось, что единичные векторы **i**, **j** и **k** постоянны. Мы ввели радиус-вектор **r**, но и его тоже считали функцией x, y и z. Однако не все физические задачи успешно решаются в декартовой системе. Например, для центральных сил $\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 F(r)$ (таких, как гравитационные или электростатические) декартовы координаты могут оказаться крайне неудобными, поэтому пользуются такой системой, в которой одной из координат служит расстояние в радиальном направлении.

Систему координат следует выбирать из условия наилучшего соответствия поставленной задаче, используя различные условия и симметрию, характерные для рассматриваемой проблемы. Правильный выбор системы координат позволяет быстрее получить решение. Очень часто слово «быстрее» означает, что дифференциальное уравнение в частных производных в новой системе можно свести к дифференциальным уравнениям первого порядка «стандартного» вида методом разделения переменных (см. разд. 2.5).

Рассмотрим сначала координаты, в которых уравнение

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \qquad (2.1)$$

допускает разделение переменных. Уравнение (2.1) имеет гораздо более общий смысл, чем это может показаться с первого взгляда. Например, при $k^2 = 0$ оно представляет собой уравнение Лапласа, при $k^2 = (+)$ const — уравнение Гельмгольца, при $k^2 = (-)$ const — уравнение диффузии (пространственная часть) и при $k^2 = \text{const} \times$ кинетическая энергия — волновое уравнение Шредингера.

Показано *, что существует одиннадцать координатных систем, в которых уравнение (2.1) допускает разделение

* Eisenhart L. P. Phys. Rev., **45**, 427 (1934).

переменных. Каждую из этих систем можно рассматривать как частный случай системы софокусных эллипсоидов. Кроме того, кратко рассмотрим еще три системы, которыми пользуются при решении уравнения Лапласа.

2.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Декартовы координаты образуются тремя семействами взаимно перпендикулярных плоскостей: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Представим себе, что мы наложили на эту систему три других семейства поверхностей. Поверхности любого из этих семейств не параллельны друг другу, и, кроме того, они не должны быть плоскостями. Все три новых семейства поверхностей не должны быть взаимно перпендикулярными, однако для простоты мы опустим это условие. Положение любой точки (x, y, z) можно задать пересечением трех плоскостей в декартовой системе или пересечением трех поверхностей, которые образуют новую систему криволинейных координат. Полагая поверхности криволинейных координат $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$, мы тем самым фиксируем положение заданной точки координатами (q_1, q_2, q_3) так же, как и координатами (x, y, z). Это означает, что в принципе можно записать

$$x = x(q_1, q_2, q_3),\quad y = y(q_1, q_2, q_3),\quad z = z(q_1, q_2, q_3), \tag{2.2}$$

где x, y и z заданы через новые координаты q. Возможна и обратная зависимость:

$$q_1 = q_1(x, y, z),\quad q_2 = q_2(x, y, z),\quad q_3 = q_3(x, y, z). \tag{2.3}$$

Каждому семейству поверхностей $q_i = \text{const}$ можно поставить в соответствие единичный вектор $\mathbf{a}_i$, нормальный к поверхности $q_i = \text{const}$ и направленный в сторону возрастания q_i.

Квадрат расстояния между двумя точками вычисляется по формуле

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{ij} h_{ij}^2\, dq_i\, dq_j. \tag{2.4}$$

Коэффициенты h_{ij}^2 называют коэффициентами Ламе; их можно рассматривать как некие параметры, характеризующие заданную систему координат q_1, q_2, q_3. Совокупность коэффициентов Ламе определяет *метрику* системы координат.

Чтобы определить h_{ij}^2, продифференцируем уравнения (2.2)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \tag{2.5}$$

аналогичные соотношения получаются для dy и dz. Возводя (2.5) в квадрат и подставляя затем в (2.4), получаем

$$h_{ij}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j}. \tag{2.6}$$

Ограничимся *ортогональными* системами координат (взаимно перпендикулярные поверхности); математически это означает, что

$$h_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{2.7}$$

Чтобы упростить обозначения, положим $h_{ii} = h_i$, тогда

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2. \tag{2.8}$$

В последующих разделах каждая система координат будет определяться заданием коэффициентов Ламе h_1, h_2 и h_3. И наоборот, для любого заданного dq_i, полагая остальные q постоянными, эти величины удобно определять с помощью соотношения

$$ds_i = h_i dq_i. \tag{2.9}$$

Подчеркнем, что криволинейные координаты q_1, q_2 и q_3 безразмерны. Коэффициенты Ламе h_i могут зависеть от q и могут иметь размерность. Произведение $h_i dq_i$ может иметь размерность длины.

Из соотношения (2.9) немедленно получаются элементы поверхности и объема

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j, \tag{2.10}$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \tag{2.11}$$

Выражения (2.10) и (2.11) полностью согласуются с законом преобразования (2.2).

Упражнения

1. Показать, что требованию ортогональности системы координат соответствует условие (2.7).

2. Показать, что якобиан $J\left(\frac{x,\ y,\ z}{q_1,\ q_2,\ q_3}\right) = h_1 h_2 h_3$ и, следовательно, элемент объема $J\left(\frac{x,\ y,\ z}{q_1,\ q_2,\ q_3}\right) dq_1\, dq_2\, dq_3$ в согласии с (2.11) равен $h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$.

2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В основу рассмотрения операторов градиента, дивергенции и ротора в криволинейных координатах мы положим определение градиента некоторой функции как вектора, имеющего абсолютную величину и направление максимальной скорости изменения этой функции в пространстве

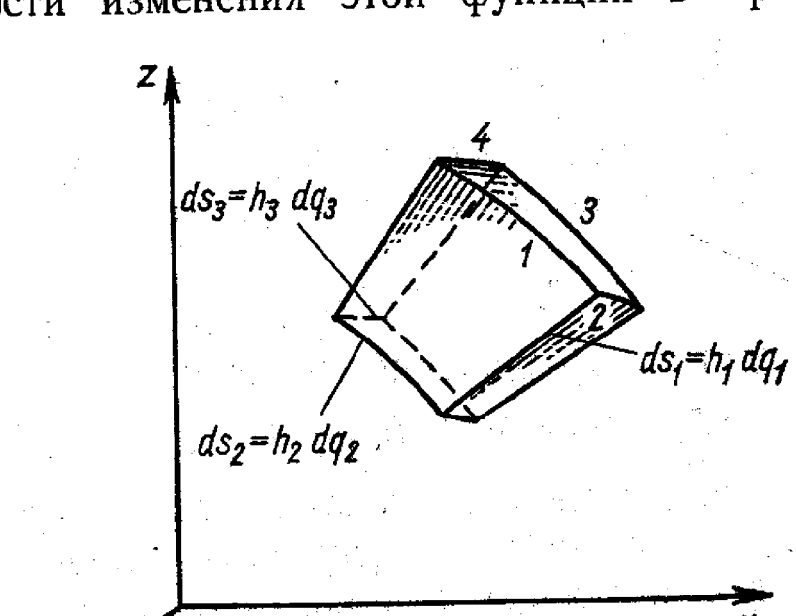


Рис. 2.1. Криволинейный элемент объема.

(см. разд. 1.6). Тогда компонента $\nabla\psi\ (q_1, q_2, q_3)$ в направлении, нормальном к семейству поверхностей $q_1 = \text{const}$, задается в виде *

$$\nabla\psi\,|_1 = \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{\partial\psi}{h_1 \partial q_1}, \tag{2.12}$$

поскольку она характеризует скорость изменения ψ при изменении q_1 (q_2 и q_3 фиксированы). Величина ds_1 — приращение длины в направлении увеличения q_1. В разд. 2.1 был введен единичный вектор $\mathbf{a}_1$ для указания этого направления. Для переменных q_1 и q_3 получим выражение (2.12); векторно сложив их, представим градиент в виде

$$\nabla\psi\,(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{a}_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial\psi}{\partial s_3} =$$

$$= \mathbf{a}_1 \frac{\partial\psi}{h_1 \partial q_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial\psi}{h_2 \partial q_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial\psi}{h_3 \partial q_3}. \tag{2.13}$$

* Здесь мы не используем символ φ для обозначения функции, поскольку под φ в дальнейшем будем понимать азимутальную координату.

Оператор дивергенции можно получить, используя уравнение (1.91) или, что эквивалентно, теорему Гаусса. Для определенности будем исходить из уравнения (1.91)

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}, \tag{2.14}$$

где в качестве элемента объема взято произведение $h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3$. Положительные направления выбраны так, что q_1, q_2, q_3 или $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ образуют правую систему (рис. 2.1).

Как и в разд. 1.7 и 1.10 *, интегрирование по двум поверхностям $q_1 = \text{const}$ дает:

$$\left[V_1h_2h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)\,dq_1\right] dq_2\,dq_3 - \\ - V_1h_2h_3\,dq_2\,dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{2.15}$$

Добавляя аналогичные результаты для двух других пар поверхностей, получаем

$$\int \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right] dq_1\,dq_2\,dq_3 \tag{2.16}$$

или, после деления на элементарный объем,

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right], \tag{2.17}$$

где V_i — проекция $\mathbf{V}$ на направление $\mathbf{a}_i$, т. е. $V_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{V}$. Комбинируя уравнения (2.13) и (2.17), а также учитывая, что $\mathbf{V} = \nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$, получаем лапласиан

$$\nabla \cdot \nabla\psi(q_1, q_2, q_3) = \\ = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{2.18a}$$

* Поскольку рассматривается предел $dq_1\,dq_2\,dq_3 \to 0$, производные выше второго порядка можно опустить.

Наконец, с помощью теоремы Стокса (см. разд. 1.12) выпишем в явном виде $\nabla \times \mathbf{V}$ и перейдем к пределу, устремив к нулю площадь поверхности. Рассмотрим дифференциальный элемент поверхности на криволинейной поверхности

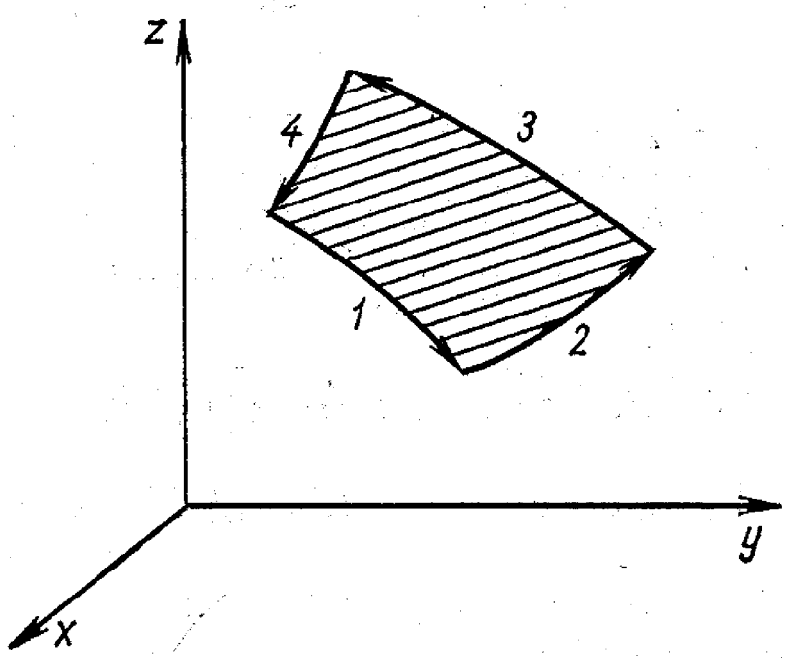


Рис. 2.2. Криволинейный элемент поверхности (на рис. 2.1 этот элемент отмечен цифрами *1*, *2*, *3*, *4*).

$q_1 = \text{const}$. Из

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \nabla \times \mathbf{V}\,|_1 h_2 h_3\, dq_2\, dq_3, \qquad (2.18б)$$

согласно теореме Стокса,

$$\nabla \times \mathbf{V}\,|_1 h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 = \oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda}. \qquad (2.19)$$

Здесь линейный интеграл взят по контуру, лежащему на поверхности $q_1 = \text{const}$. Проходя последовательно вдоль участков *1*, *2*, *3*, *4* границы (рис. 2.2), получаем

$$\oint \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\boldsymbol{\lambda} = V_2 h_2\, dq_2 + \left[V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_3 h_3)\, dq_2\right] dq_3 -$$

$$- \left[V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_2 h_2)\, dq_3\right] dq_2 - V_3 h_3\, dq_3 =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 V_2)\right] dq_2\, dq_3\,. \qquad (2.20)$$

На участках пути *1* и *2* выбран знак плюс, тогда как на участках *3* и *4* взят знак минус, поскольку во втором случае обход совершается в отрицательном направлении. Из (2.19) получаем

$$\nabla \times \mathbf{V}|_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 \mathbf{V}_2)\right]. \qquad (2.21)$$

Остальные две компоненты $\nabla \times \mathbf{V}$ можно получить циклической перестановкой индексов. Как уже отмечалось в гл. 1, часто удобно записывать ротор в виде определителя

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 h_1 & \mathbf{a}_2 h_2 & \mathbf{a}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.22)$$

На этом завершается определение операторов ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ и лапласиана ∇^2 в системе криволинейных координат.

Упражнения

1. Пусть $\mathbf{a}_1$ — единичный вектор в направлении возрастания q_1. Показать, что

$$\nabla\cdot\mathbf{a}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\frac{\partial(h_2 h_3)}{\partial q_1}, \quad \nabla\times\mathbf{a}_1 = \frac{1}{h_1}\left[\mathbf{a}_2\frac{\partial h_1}{h_3\,\partial q_3} - \mathbf{a}_3\frac{\partial h_1}{h_2\,\partial q_2}\right].$$

2. Показать, что ортогональные единичные векторы $\mathbf{a}_i$ можно определить как $\mathbf{a}_i = \dfrac{1}{h_i}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$. В частности, доказать, что условие $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_i = 1$ приводит к выражению для h_i, которое согласуется с уравнением (2.6).

Учитывая определение $\mathbf{a}_i$, можно получить формулы

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_j} = \mathbf{a}_j\frac{\partial h_j}{h_i\,\partial q_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_i} = -\sum_{j\neq i}\mathbf{a}_j\frac{\partial h_i}{h_j\,\partial q_j}, \quad i \neq j.$$

3. Обосновать утверждение, что обычные скалярное и векторное произведения (не содержащие оператор ∇) в ортогональных криволинейных координатах раскрываются точно так же, как и в декартовых, и *не содержат* коэффициентов Ламе.

4. Используя векторное тождество $\nabla\cdot\nabla\mathbf{V} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{V} - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})$, получить в криволинейных координатах векторный лапласиан $\nabla\cdot\nabla\mathbf{V}$.

2.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ДЕКАРТОВЫ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ) КООРДИНАТЫ

Как уже отмечалось, выбор системы координат может зависеть от физической природы и симметрии решаемой проблемы. Полезно перечислить все 14 систем, классифицируя их в соответствии с тем, обладают ли они осью сдвига (перпендикулярной семейству параллельных плоскостей), или осью симметрии вращения.

В табл. 2.1 перечислено 15 систем координат, так как круговые цилиндрические координаты обладают и осью

Таблица 2.1

Ось сдвига	Ось вращения	Системы, не имеющие осей
Декартовы (3 оси)	—	Софокусного эллипсоида
Круговые цилиндрические	Круговые цилиндрические	—
—	Сферические (3 оси)	—
Эллиптические цилиндрические	Вытянутого сфероида	—
—	Сплющенного сфероида	—
Параболические цилиндрические	Параболические	—
Биполярные	Тороидальные	—
—	Бисферические	Конические
—	—	Координаты софокусного параболоида

сдвига, и осью вращения, а потому приведены дважды. Расположены системы в таблице так, чтобы показать связь между различными координатами. В результате вращения двумерной ($z = 0$) системы с осью сдвига (левая колонка) вокруг оси симметрии получим систему координат, приведенную в центральной колонке таблицы. Например, вращая плоскость ($z = 0$) эллиптической цилиндрической системы координат вокруг большой (малой) оси, получаем систему

вытянутого (сплющенного) сфероида. В третьей колонке включены три системы координат, у которых нет ни осей сдвига, ни осей вращения. Заметим, что в этой асимметричной группе приведена система софокусных эллипсоидов, которая в некотором смысле является наиболее общей, и почти все остальные системы * можно получить из нее.

Декартовы координаты. В декартовой системе координат (гл. 1), простейшей из всех систем,

$$h_1 = h_x = 1, \quad h_2 = h_y = 1, \quad h_3 = h_z = 1. \tag{2.23}$$

Семейства координатных поверхностей представляют собой три набора параллельных плоскостей: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Декартова система — единственная, в которой все коэффициенты Ламе h_i постоянны. Это обстоятельство будет особенно важным при рассмотрении тензоров в гл. 3. Подчеркнем, что направление единичных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ или $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ фиксировано.

Исходя из уравнений (2.13), (2.17), (2.18) и (2.22) можно получить результаты, рассмотренные в гл. 1:

$$\nabla\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{2.24}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{2.25}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{2.26}$$

$$\nabla\times\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

2.4. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ r, θ, φ

Обозначая q_1, q_2, q_3 буквами r, θ, φ, можно указать основные семейства поверхностей сферической системы координат.

1. Концентрические сферы с общим центром в начале координат: $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{const}$.

---

* За исключением биполярной и ее двух вращательных разновидностей — тороидальной и бисферической.

2. Концентрические поверхности прямых круговых конусов с полярной осью z и вершинами в начале координат:

$$\theta = \arccos \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \text{const}.$$

3. Полуплоскости, проходящие через ось z: $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x) = \text{const}$.

В силу произвольного выбора полярного угла θ и азимутального угла φ все привязки производят относительно

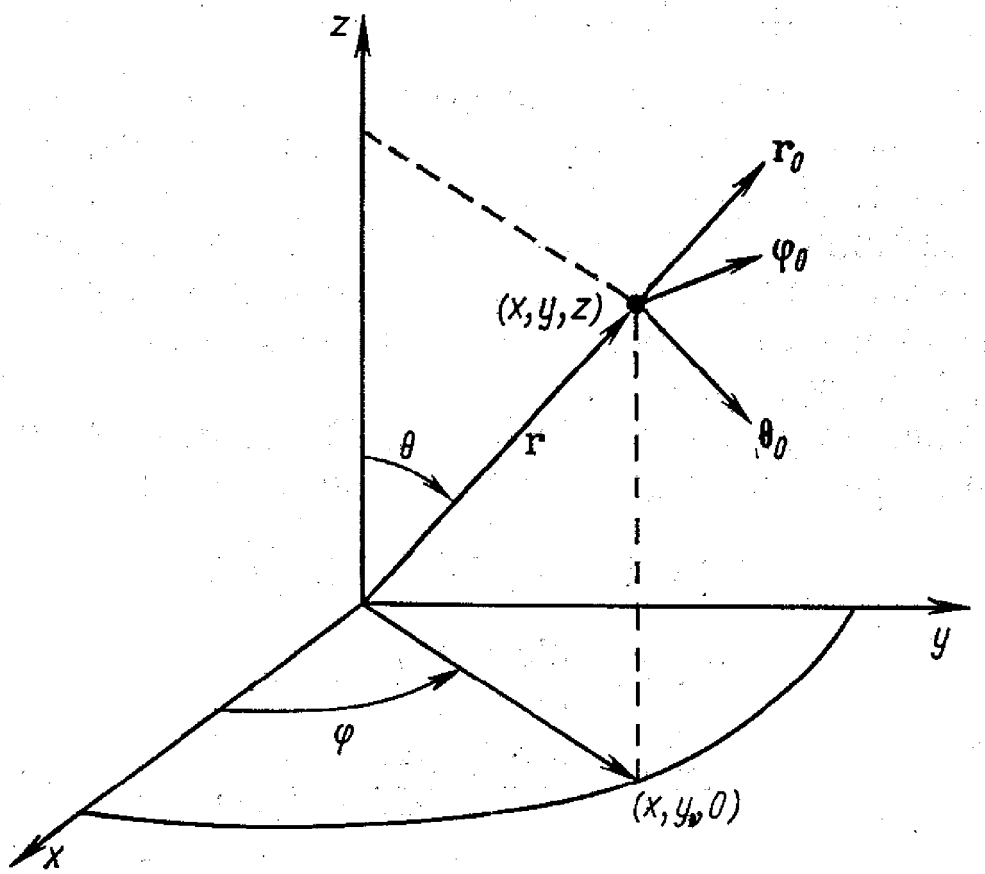


Рис. 2.3. Сферические полярные координаты.

оси z. Уравнения преобразования координат, соответствующие уравнениям (2.2), имеют вид

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta. \qquad (2.28)$$

Здесь θ отсчитывают от положительного направления оси z, а φ в плоскости xy от положительного направления оси x (рис. 2.3). Введенные координаты изменяются в пределах $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Из уравнения (2.6)

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r \sin\theta. \qquad (2.29)$$

Следует подчеркнуть, что единичные векторы $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ меняют направление, которое определено углами θ и φ.

Эти единичные векторы выражаются через фиксированные единичные векторы декартовой системы координат $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta,$$

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\varphi - \mathbf{k}\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi.$$

Полагая в разд. 2.2 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\theta}_0$, $\mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\varphi}_0$, получаем основные соотношения

$$\nabla\psi = \mathbf{r}_0\frac{\partial\psi}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}_0\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \tag{2.30}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right], \tag{2.31}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right], \tag{2.32}$$

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi \end{vmatrix}. \tag{2.33}$$

Иногда требуется записать векторный лапласиан $\nabla^2\mathbf{V}$ в сферических координатах. Это можно сделать с помощью векторного тождества (1.80):

$$\nabla^2\mathbf{V}|_r = \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)V_r + \left(-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)V_\theta + \left(-\frac{2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)V_\varphi = \nabla^2V_r - \frac{2}{r^2}V_r - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}V_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{2.34}$$

$$\nabla^2\mathbf{V}|_\theta = \nabla^2V_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_\theta + \frac{2\partial V_r}{r^2\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{2.35}$$

$$\nabla^2\mathbf{V}|_\varphi = \nabla^2V_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}. \tag{2.36}$$

Пример 1. Используя уравнения (2.30)—(2.33), можно проверить некоторые результаты, полученные в декартовых координатах в гл. 1. Из уравнения (2.30)

$$\nabla f(r)=\mathbf{r}_0\frac{df}{dr},\quad \nabla r^n=\mathbf{r}_0 n r^{n-1}. \tag{2.37}$$

Из уравнения (2.31)

$$\nabla\cdot\mathbf{r}_0 f(r)=\frac{2}{r}f(r)+\frac{df}{dr},\quad \nabla\cdot\mathbf{r}_0 r^n=(n+2)\,r^{n-1}. \tag{2.38}$$

Из уравнения (2.32)

$$\nabla^2 f(r)=\frac{2}{r}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{d^2f}{dr^2},\quad \nabla^2 r^n=n(n+1)\,r^{n-2}, \tag{2.39}$$

наконец, из (2.33)

$$\nabla\times\mathbf{r}_0 f(r)=0. \tag{2.40}$$

Пример 2. Вычисление магнитного векторного потенциала кругового тока в плоскости xy связано с определением вектора

$$\mathbf{V}=\nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi(r,\theta)]. \tag{2.41}$$

В сферических координатах

$$\mathbf{V}=\nabla\times\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ 0 & 0 & r\sin\theta A_\varphi(r,\theta)\end{vmatrix}=$$

$$=\nabla\times\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\mathbf{r}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi)-r\boldsymbol{\theta}_0\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right], \tag{2.41а}$$

или

$$\mathbf{V}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) & -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi) & 0\end{vmatrix}. \tag{2.41б}$$

Разлагая (2.41б) по первой строке, имеем

$$\mathbf{V}=-\boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA_\varphi)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)\right]\right\}=$$

$$=-\boldsymbol{\varphi}_0\left[\nabla^2 A_\varphi(r,\theta)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi(r,\theta)\right].$$

В гл. 12 мы покажем, что вектор $\mathbf{V}$ связан с присоединенным уравнением Лежандра, а A_φ можно представить в виде ряда по присоединенным полиномам Лежандра.

Упражнения

1. Выразить единичные векторы сферической системы координат через декартовы. *Ответ*:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta,$$
$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\varphi - \mathbf{k}\sin\theta,$$
$$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi.$$

2. Получить формулы обратного преобразования

$$\mathbf{i} = \mathbf{r}_0\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\cos\varphi - \boldsymbol{\varphi}_0\sin\varphi,$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{r}_0\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi,$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{r}_0\cos\theta - \boldsymbol{\vartheta}_0\sin\theta.$$

3. Частица перемещается в пространстве. Найти компоненты ее скорости и ускорения в сферической системе координат:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi};$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\dot{\varphi}^2;$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2;$$
$$a_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}.$$

4. Движение частицы с массой m под действием центральных сил определяется вторым законом Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 f(\mathbf{r})$. Показать, что $\mathbf{r}\times\mathbf{r} = \mathbf{c} = \text{const}$ и геометрическое толкование этого факта приводит ко второму закону Кеплера.

5. Выразить $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\varphi\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

6. Используя результаты упр. 5, получить формулу

$$-i\left(x\frac{\partial}{dy} - y\frac{\partial}{dx}\right) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Это — квантовый оператор, соответствующий z-компоненте момента количества движения.

7. Доказать эквивалентность трех форм $\nabla^2\psi(r)$ (в сферических координатах)

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right], \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2}{dr^2}[r\psi(r)], \quad \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d\psi(r)}{dr}.$$

Вторая форма особенно удобна для проверки соответствия между Востановкой задачи в сферических и декартовых координатах.

8. Пусть $\nabla^2\psi=0$. Показать, что $\nabla^2\nabla^2(r^2\psi)=0$.

9. В одной из моделей солнечной короны предполагается, что поток тепла удовлетворяет стационарному уравнению непрерывности: $\nabla\cdot(k\nabla T)=0$, где $k\sim T^{5/2}$ — теплопроводность. Полагая, что температура $T\sim r^n$, доказать, что это уравнение имеет решение $T=T_0(r_0/r)^{2/7}$.

10. Проверить векторные равенства

$$\nabla=\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0\cdot\nabla)-\mathbf{r}_0\times(\mathbf{r}_0\times\nabla),\quad \nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla)=\mathbf{r}\nabla^2-\nabla\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

11. Показать, что уравнения Максвелла в сферических координатах имеют вид

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\varphi)-\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right]+\mu_0\frac{\partial E_r}{\partial t}=0,$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}+\mu_0\frac{\partial H_\theta}{\partial t}=0,$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_r}{\partial\theta}+\mu_0\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=0,$$

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2H_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial H_\varphi}{\partial\varphi}=0.$$

К этим уравнениям нужно добавить еще четыре с заменой $\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{H}$ и $\mu_0\mathbf{H}\longrightarrow-\varepsilon_0\mathbf{E}$.

2.5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В декартовых системах уравнение Гельмгольца (2.1) с помощью лапласиана (2.26) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0. \tag{2.42}$$

Ограничимся случаем постоянного k^2. Вероятно, самый простой путь решения дифференциального уравнения в частных производных типа (2.42) состоит в том, чтобы свести его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого положим

$$\psi(x, y, z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z) \tag{2.43}$$

и подставим в (2.42). Как мы узнали, что можно представить функцию $\psi(x, y, z)$ в виде (2.43)? Ответ очень прост: мы вообще не знаем, справедливо ли такое представление искомого решения. Но если наша попытка увенчается

успехом, то представление ψ в виде (2.43) подтвердится. В противном случае уравнение (2.42) следует решать с помощью функции Грина, интегральных преобразований или численных методов.

Положим, что представление (2.43) справедливо, подставим его в (2.42):

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2XYZ=0. \qquad (2.44)$$

Разделив на $\psi=XYZ$ и перегруппировав члены, получим

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2-\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}. \qquad (2.45)$$

Таким образом, переменные разделяются: левая часть уравнения зависит только от x, тогда как правая только от y и z. Поскольку x, y и z — независимые переменные, поведение x не может определяться поведением y и z. Следовательно, остается приравнять каждую часть уравнения некоторой постоянной, *постоянной разделения*. Мы выберем *

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}=-l^2, \qquad (2.46)$$

$$-k^2-\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=-l^2. \qquad (2.47)$$

Теперь перепишем уравнение (2.47):

$$\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2+l^2-\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}, \qquad (2.48)$$

переменные снова разделены. Приравняем каждую часть уравнения постоянной:

$$\frac{1}{Y}\cdot\frac{d^2Y}{dy^2}=-m^2, \qquad (2.49)$$

$$\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2+l^2+m^2=-n^2. \qquad (2.50)$$

Введенная постоянная n^2 позволяет получить симметричный набор трех обыкновенных уравнений (2.46), (2.49) и (2.50), которые заменяют уравнение (2.42). Таким образом, исходное предположение (2.43) оказалось оправданным.

---

* Выбор знака здесь произведен совершенно произвольно, но в каждом конкретном случае определяется спецификой рассматриваемой задачи и диктуется конкретными граничными условиями.

Решение должно иметь индексы в соответствии с выбором постоянных l, m и n:

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x)\, Y_m(y)\, Z_n(z), \qquad (2.50а)$$

где l, m и n — любые числа, удовлетворяющие условию $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$. Функция (2.50а) должна быть решением уравнения (2.1), если $X_l(x)$ — решение уравнения (2.46), $Y_m(y)$ — решение (2.49), Z_n — решение (2.50). Общий вид решения уравнения (2.1) можно представить как линейную комбинацию решений ψ_{lmn}

$$\Psi = \sum_{l,\,m,\,n} a_{lmn}\psi_{lmn}. \qquad (2.50б)$$

Постоянные коэффициенты a_{lmn} выбираются так, чтобы выполнялись граничные условия задачи.

Каким образом можно добиться этого и почему можно записывать решение в виде (2.50б)? Такое представление основано на том, что $\nabla^2 + k^2$ — линейный дифференциальный оператор. По определению, линейный оператор $\mathcal{L}$ обладает двумя свойствами:

$$\mathcal{L}(a\psi) = a\mathcal{L}\psi, \quad \mathcal{L}(\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{L}\psi_1 + \mathcal{L}\psi_2,$$

где a — постоянная.

Следствием этих свойств является то, что любая линейная комбинация решений линейного дифференциального уравнения также будет его решением. Из явного вида оператора $\nabla^2 + k^2$ вытекает, что он линейный. Таким образом, решение уравнения (2.42) можно записать в форме (2.50б).

Рассмотренный метод разделения переменных действует и в том случае, когда

$$k^2 = f(x) + g(y) + h(z) + k'^2, \qquad (2.50в)$$

где k'^2 — новая постоянная.

Уравнение (2.46) теперь принимает вид

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2} + f(x) = -l^2. \qquad (2.50г)$$

Решения X, Y и Z будут уже иными, однако преобразование дифференциального уравнения и построение линейной комбинации решений остаются прежними.

Читатель не должен удивляться, почему в этом разделе мы разбирали метод разделения переменных дифференциаль-

ного уравнения в частных производных. Этот пример приведен здесь в качестве иллюстрации полезности различных систем координат. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся после разделения переменных, изложены в гл. 8—13.

Попытаемся разделить переменные в уравнении (2.1) с постоянным k^2, записав это уравнение в сферической системе координат. Используя формулу (2.32), получаем

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]-k^2\psi. \tag{2.51}$$

Положим теперь

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \tag{2.52}$$

Подставим (2.52) в уравнение (2.51) и разделим на $R\Theta\Phi$:

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-k^2. \tag{2.53}$$

Заметим, что вместо частных производных в уравнении появились обычные. Умножив на $r^2\sin^2\theta$, выделим член

$$\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=r^2\sin^2\theta\left[-k^2-\frac{1}{r^2R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right]. \tag{2.54}$$

Уравнение (2.54) связывает функцию Φ, зависящую только от φ, с функцией, которая зависит от r и θ. Поскольку переменные r, θ и φ независимы, можно приравнять обе части этого уравнения некоторой постоянной. Следует заметить, что почти во всех физических задачах φ играет роль азимутального угла, поэтому более вероятно, что решение будет иметь периодический характер, а не экспоненциальный. Учитывая это, полагаем постоянную разделения равной $-m^2$, тогда

$$\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-m^2, \tag{2.55}$$

$$\frac{1}{r^2R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-$$
$$-\frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}=-k^2. \tag{2.56}$$

Умножив (2.56) на r^2 и перегруппировав члены, получим

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+r^2k^2=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}. \tag{2.57}$$

Переменные снова разделились. Приравняем каждую часть уравнения постоянной λ^2, тогда окончательно

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta+\lambda^2\Theta=0, \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R-\frac{\lambda^2R}{r^2}=0. \tag{2.59}$$

Нам снова удалось свести дифференциальное уравнение в частных производных к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение этих уравнений обсуждается в гл. 11 и 12. Например, в гл. 12 уравнение (2.58) классифицируется как уравнение для присоединенных полиномов Лежандра, в котором $\lambda^2=l(l+1)$, где l — целое число. Полное решение имеет вид

$$\psi_{lm}(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}R_l(r)\,\Theta_{lm}(\theta)\,\Phi_m(\varphi). \tag{2.60а}$$

Величина k^2 может быть и переменной. Разделение переменных возможно, если k^2 выражается формулой

$$k^2=f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi)+k'^2. \tag{2.60б}$$

В случае атома водорода $k^2=f(r)$. Уравнение (2.59), записанное для атома водорода, сводится к уравнению для присоединенных полиномов Лежандра. Разделение переменных и исследование полученных при этом обыкновенных дифференциальных уравнений проведено в разд. 8.3, а здесь мы вновь возвратимся к изучению систем координат.

Упражнения

1. Подействовать оператором ∇^2+k^2 на сумму $a_1\psi_1(x,y,z)+a_2\psi_2(x,y,z)$ и доказать линейность этого оператора, т. е.

$$(\nabla^2+k^2)(a_1\psi_1+a_2\varphi_2)=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2.$$

2. Проверить, что уравнение

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi)+\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi)\right]\psi(r,\theta,\varphi)=0$$

допускает разделение переменных (в сферических координатах). Функции f, g и h зависят только от указанных переменных, $k^2 = \text{const}$.

3. Атомная (квантовомеханическая) частица помещена в прямоугольный ящик со сторонами a, b и c. Частица описывается волновой функцией ψ, которая удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi.$$

Волновая функция должна исчезать на каждой стенке ящика (но не должна быть равной нулю тождественно). Это требование влияет на константы разделения и, следовательно, на энергию E. Каково наименьшее значение E, для которого можно найти такое решение?

Ответ: $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.

2.6. КРУГОВЫЕ * ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ρ, φ, z

Легко получить соотношения, которые определяют связь между декартовыми и круговыми цилиндрическими координатами (рис. 2.4):

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z, \tag{2.61}$$

где ρ — расстояние по нормали от оси z, а r по-прежнему обозначает расстояние от начала отсчета в декартовой системе. В соответствии с этими формулами коэффициенты Ламе оказываются равными

$$h_1 = h_\rho = 1,\quad h_2 = h_\varphi = \rho,\quad h_3 = h_z = 1. \tag{2.62}$$

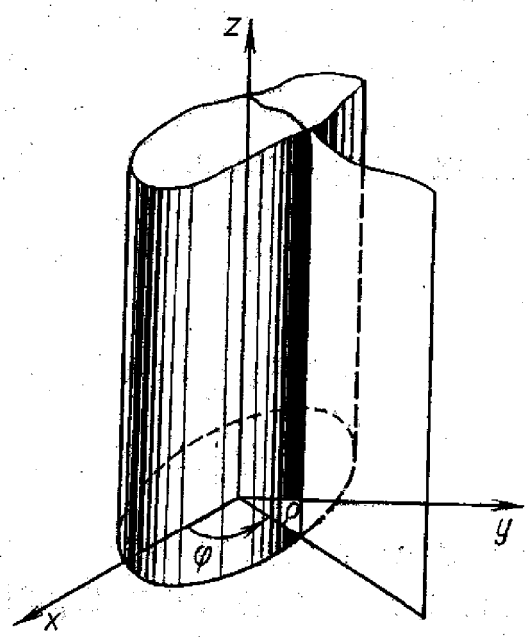


Рис. 2.4. Круговые цилиндрические координаты.

Эта система координат образована следующими семействами координатных поверхностей на рис. 2.4:

1) правильные круговые цилиндры с осью z в качестве общей оси: $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = \text{const}$;

2) полуплоскости, проходящие через ось z: $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \text{const}$;

* В дальнейшем круговые цилиндрические координаты будем называть просто цилиндрическими, если не будет специальных оговорок.— *Прим. перев.*

3) плоскости, параллельные плоскости xy: $z=\text{const}$. Переменные ρ, φ и z изменяются в пределах $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\infty<z<\infty$. Из уравнений (2.13), (2.17), (2.18) и (2.22) имеем

$$\nabla\psi(\rho,\varphi,z)=\boldsymbol{\rho}_0\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{2.63}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{2.64}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{2.65}$$

$$\nabla\times\mathbf{V}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\rho}_0 & \rho\boldsymbol{\varphi}_0 & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\varphi\partial} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z\end{vmatrix}. \tag{2.66}$$

Наконец, для задач, в которых рассматриваются цилиндрические волноводы или объемные резонаторы, необходимо знание компонент векторного лапласиана $\nabla^2\mathbf{V}$ в цилиндрических координатах:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{V}|_\rho&=\nabla^2\mathbf{V}_\rho-\frac{1}{\rho^2}V_\rho-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi},\\ \nabla^2\mathbf{V}|_\varphi&=\nabla^2V_\varphi-\frac{1}{\rho^2}V_\varphi+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi},\\ \nabla^2\mathbf{V}|_z&=\nabla^2V_z.\end{aligned}\right\} \tag{2.67}$$

Вид z-компоненты лапласиана определяется тем, что оси z в декартовой и цилиндрической системе совпадают, т. е.

$$\nabla^2(\boldsymbol{\rho}_0V_\rho+\boldsymbol{\varphi}_0V_\varphi+\mathbf{k}V_z)=\nabla^2(\boldsymbol{\rho}_0V_\rho+\boldsymbol{\varphi}_0V_\varphi)+\mathbf{k}\nabla^2V_z=$$
$$=\boldsymbol{\rho}_0f(V_\rho V_\varphi)+\boldsymbol{\varphi}_0g(V_\rho,V_\varphi)+\mathbf{k}\nabla^2V_z.$$

Оператор ∇^2 действует на единичные векторы $\boldsymbol{\rho}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$, лежащие в плоскости $\boldsymbol{\rho}_0\boldsymbol{\varphi}_0$. Это свойство оператора распространяется на любые цилиндрические системы.

Пример. Пространственная часть амплитуды электромагнитной волны в цилиндрическом волноводе подчиняется волновому уравнению

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0.$$

Волновод с абсолютно проводящими стенками не ослабляет волну, а потому нет зависимости от z (центральная ось волновода совпа-

дает с осью z). Тогда, используя выражение (2.65), получаем

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+k^2\psi=0. \tag{2.68}$$

Пусть

$$\psi(\rho,\varphi)=P(\rho)\,\Phi(\varphi), \tag{2.69}$$

тогда

$$\frac{1}{P\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi\rho^2}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2=0. \tag{2.70}$$

Умножая (2.70) на ρ^2, выделяем член, зависящий только от φ:

$$\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2. \tag{2.71}$$

Здесь постоянная равна $-m^2$, так как φ — азимутальный угол, и ожидаемое решение должно иметь зависимость $\sin m\varphi$ или $\cos m\varphi$. Уравнение для радиальной части представляет собой уравнение Бесселя (подробнее см. гл. 11):

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)P=0. \tag{2.72}$$

Упражнения

1. Разложить единичные векторы цилиндрической системы на компоненты в декартовой системе координат

$$\boldsymbol{\rho}_0=\mathbf{i}\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\varphi,\quad \boldsymbol{\varphi}_0=-\mathbf{i}\sin\varphi+\mathbf{j}\cos\varphi,\quad \mathbf{k}_0=\mathbf{k}.$$

2. Разложить единичные векторы декартовой системы на компоненты в цилиндрической системе координат

$$\mathbf{i}=\boldsymbol{\rho}_0\cos\varphi-\boldsymbol{\varphi}_0\sin\varphi,\quad \mathbf{j}=\boldsymbol{\rho}_0\sin\varphi+\boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi,\quad \mathbf{k}=\mathbf{k}_0.$$

3. Частица движется в пространстве. Найти компоненты ее скорости и ускорения в цилиндрической системе

$$v_\rho=\dot\rho,\quad v_\varphi=\rho\dot\varphi,\quad v_z=\dot z;\quad a_\rho=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2,\quad a_\varphi=\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi,\quad a_z=\ddot z.$$

4. Проводник, по которому течет ток I, расположен вдоль оси z. Векторный магнитный потенциал равен $\mathbf{A}=\mathbf{k}\dfrac{\mu I}{2\pi}\ln\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$. Показать, что магнитная индукция $\mathbf{B}$ равна $\mathbf{B}=\boldsymbol{\varphi}_0\dfrac{\mu I}{2\pi\rho}$.

5. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2\psi=0$ в цилиндрических координатах для случая $\psi=\psi(\rho)$. *Ответ*: $\psi=k\ln(\rho/\rho_0)$.

6. В цилиндрических координатах задана векторная функция $\mathbf{V}(\rho,\varphi)=\boldsymbol{\rho}_0V_\rho(\rho,\varphi)+\boldsymbol{\varphi}_0V_\varphi(\rho,\varphi)$. Показать, что $\nabla\times\mathbf{V}$ имеет только z-компоненту. Заметим, что этот результат справедлив для любого вектора на поверхности $q_3=\text{const}$, если только произведения h_1V_1 и h_2V_2 не зависят от q_3.

7. Задана сила $\mathbf{F}=-\mathbf{i}\frac{y}{x^2+y^2}+\mathbf{j}\frac{x}{x^2+y^2}$. Выразить в цилиндрических координатах $\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$. Определить работу, совершаемую под действием силы $\mathbf{F}$, при однократном перемещении по окружности единичного радиуса против часовой стрелки. Как согласовать полученные результаты?

8. Доказать, что в уравнении Гельмгольца $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ переменные разделяются в цилиндрических координатах, если

$$k^2=k^2+f(\rho)+(1/\rho^2)\,g(\varphi)+h(z).$$

2.7. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ u, v, z

Логично начать классификацию систем координат, допускающих разделение переменных, с софокусной эллип-

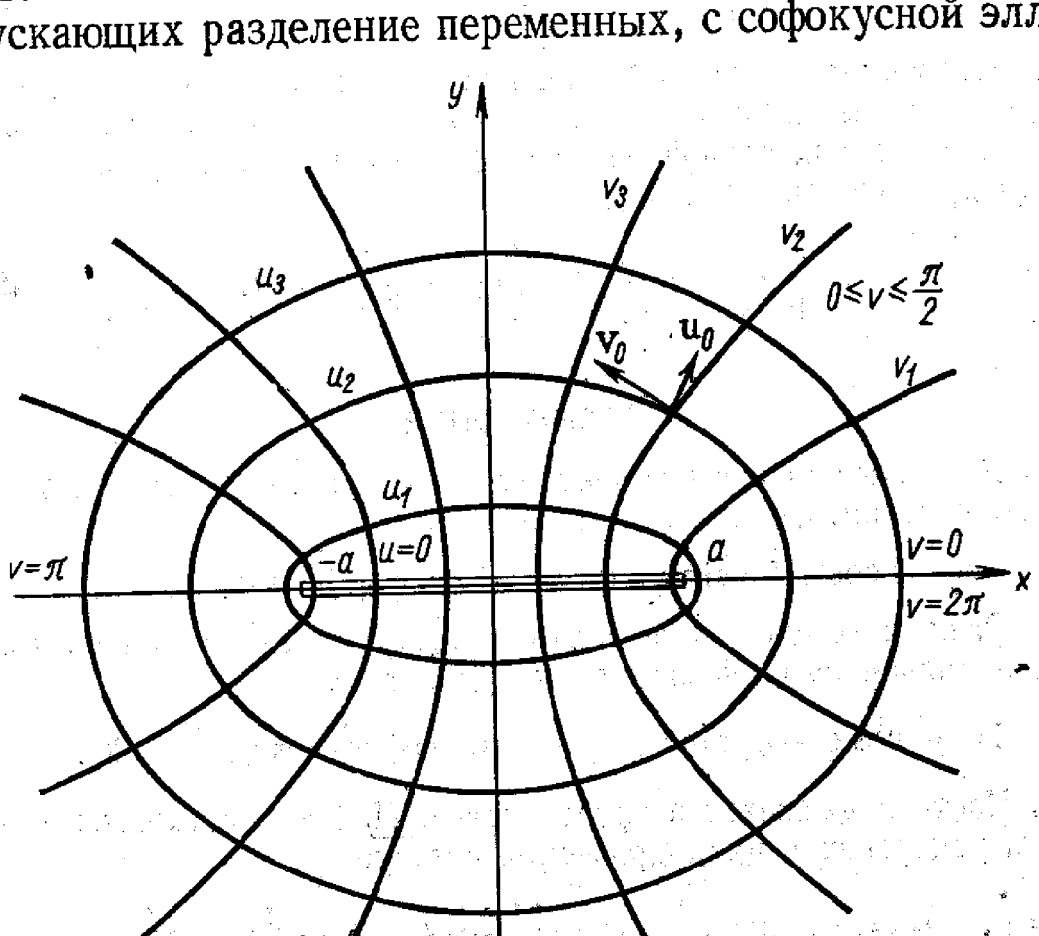


Рис. 2.5. Эллиптические цилиндрические координаты.

соидальной системы (см. разд. 2.15), а все остальные рассматривать как ее частные случаи *. Будем рассматривать свойства симметрии систем координат, которые обусловливаются осью сдвига.

* Подробнее см. Морс П. М., Фешбах Х. «Методы математической физики». Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.

Для эллиптической цилиндрической системы имеем

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = z. \tag{2.73}$$

Софокусную эллипсоидальную систему образуют следующие семейства координатных поверхностей (рис. 2.5):

1) эллиптические цилиндры: $u = \text{const}$, $0 \leqslant u < \infty$;
2) гиперболические цилиндры: $v = \text{const}$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$;
3) плоскости, параллельные плоскости xy: $z = \text{const}$, $-\infty < z < \infty$.

Возводя в квадрат формулы (2.73), получаем

$$x^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 u \cos^2 v, \tag{2.74}$$

$$y^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v, \tag{2.75}$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 u} = 1, \tag{2.76}$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1. \tag{2.77}$$

При фиксированном u уравнение (2.76) описывает семейство эллипсов с осью x в качестве главной оси. При $v = \text{const}$ уравнение (2.77) дает гиперболы с фокусами, расположенными по оси x.

Коэффициенты Ламе равны

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_u &= a\left(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v\right)^{1/2}, \\ h_2 = h_v &= a\left(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v\right)^{1/2}, \quad h_3 = h_z = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.78}$$

Упражнение

Пусть $\operatorname{ch} u = q_1$, $\cos v = q_2$, $z = q_3$. Определить новые коэффициенты Ламе h_{q_1} и h_{q_2}.

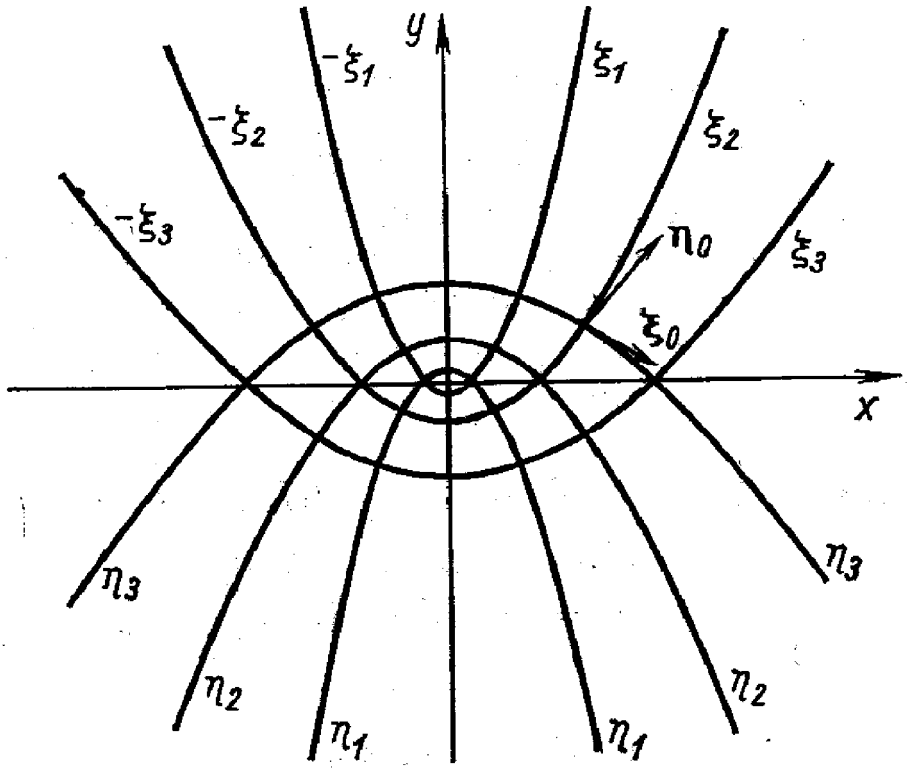
Ответ: $h_{q_1} = a\left(\dfrac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - 1}\right)^{1/2}$, $h_{q_2} = a\left(\dfrac{q_1^2 - q_2^2}{1 - q_2^2}\right)^{1/2}$.

2.8. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ξ, η, z

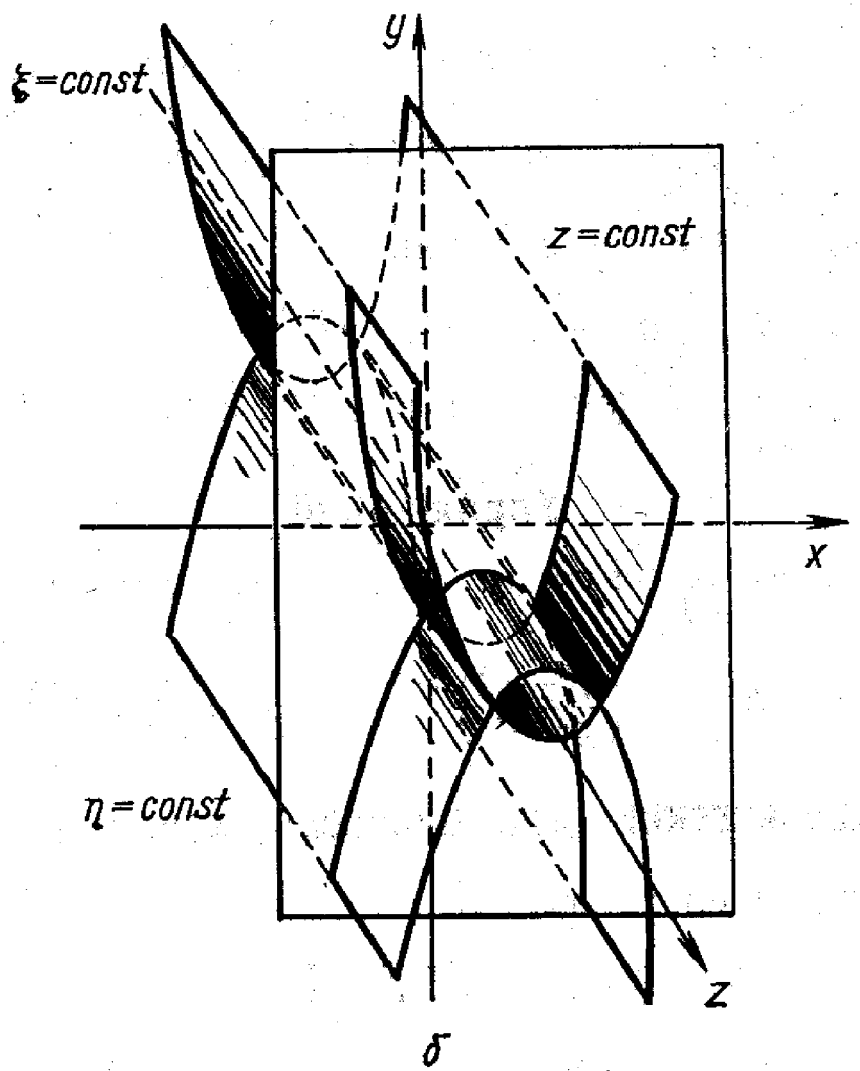
Формулы преобразования

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \xi^2\right), \quad z = z \tag{2.79}$$

описывают две системы ортогональных параболических цилиндров (рис. 2.6). Разрешив уравнения (2.79) относительно ξ и η, получим семейства этих поверхностей:



а



б

Рис. 2.6. Параболические цилиндрические координаты (*а*) и их аксонометрия (*б*).

1) параболические цилиндры: $\xi = \text{const}$ *, $-\infty < \xi < \infty$;

2) параболические цилиндры: $\eta = \text{const}$, $0 \leqslant \eta < \infty$;

3) плоскости, параллельные плоскости xy: $z = \text{const}$.

Из уравнений (2.6) находим коэффициенты Ламе

$$h_1 = h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad h_2 = h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad h_3 = h_z = 1. \tag{2.80}$$

2.9. БИПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ ξ, η, z

Эту систему координат можно назвать нечетносферической. Ее нельзя рассматривать как частный случай софокусной эллипсоидальной системы координат. В этой системе даже для $k^2 = 0$ (см. упр. 2) переменные полностью не разделяются, и здесь она приведена для иллюстрации того, как нужно выбирать систему координат для решения конкретной задачи.

Формулы преобразования записываются так:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad z = z. \tag{2.81}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\sin \xi}. \tag{2.82}$$

Теперь исключим ξ из первого уравнения

$$(x - a \operatorname{cth} \eta)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csh}^2 \eta. \tag{2.83}$$

Аналогично исключим η из второго уравнения

$$x^2 + (y - \operatorname{ctg} \xi)^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 \xi. \tag{2.84}$$

С помощью соотношений (2.83) и (2.84) находим семейство координатных поверхностей этой системы (рис. 2.7):

1) круговые цилиндры: $\xi = \text{const}$, $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$ с центром в точке $y = a \operatorname{ctg} \xi$;

2) круговые цилиндры: $\eta = \text{const}$, $-\infty < \eta < \infty$ с центром в точке $x = a \operatorname{cth} \eta$;

* Параболическая цилиндрическая поверхность $\xi = \text{const}$ инвариантна относительно знака. Для отрицательных ξ (или η) следует брать со знаком минус.

3) плоскости: $z = \text{const}$, $-\infty < z < \infty$, параллельные плоскости xy.

Если $\eta \to 0$, то $\operatorname{cth}\eta \to 1$ и $\operatorname{csh}\eta \to 0$. Тогда уравнение (2.83) имеет решение $x = a$, $y = 0$. С другой стороны, при $\eta \to -\infty$ решением является $x = -a$, $y = 0$, круг вырождается в точку, а цилиндр — в линию. Все окружности

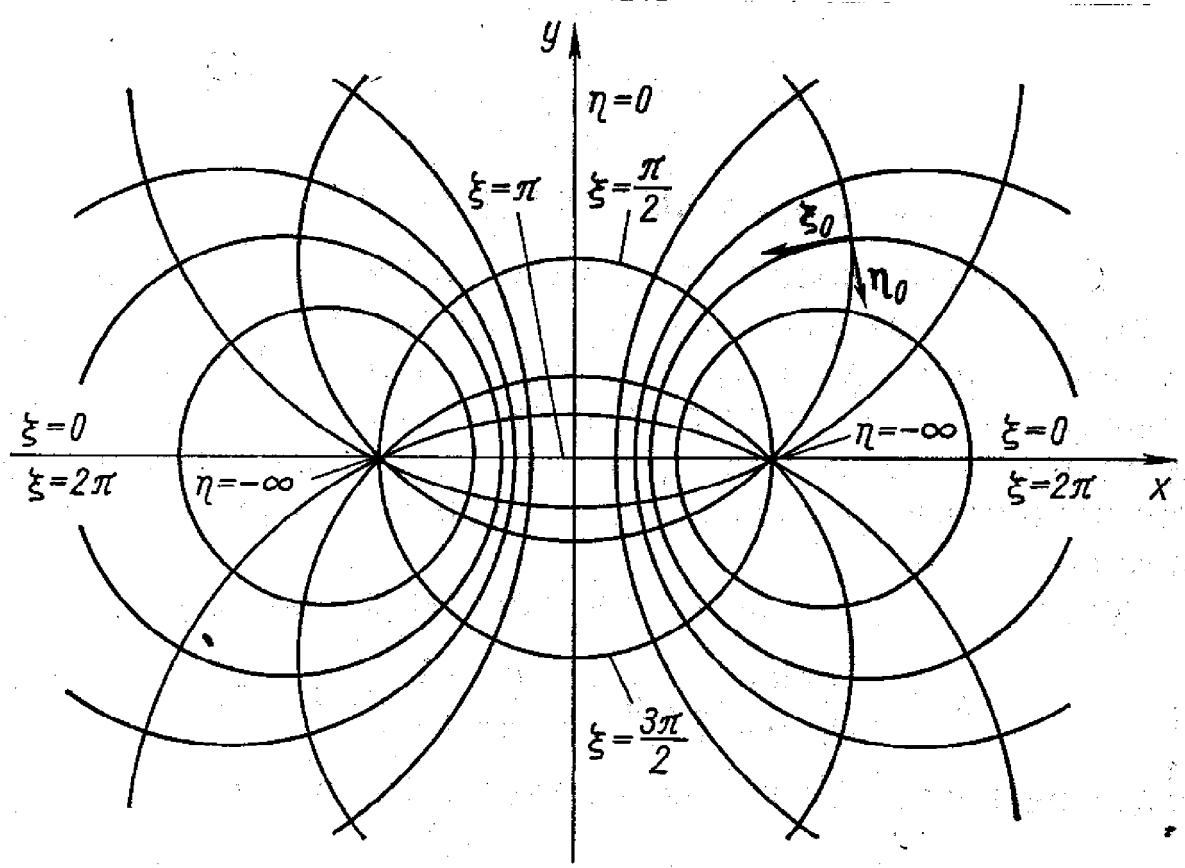


Рис. 2.7. Биполярные координаты.

(в плоскости xy), описываемые уравнением (2.84), проходят через обе эти точки, поскольку $x = \pm a$, $y = 0$ — решения уравнения (2.84) при любых ξ.

Коэффициенты Ламе для биполярной системы координат равны

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \frac{a}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ h_2 = h_\eta &= \frac{a}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \quad h_3 = h_z = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.85}$$

Пусть заданы три точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$ и (x, y) и два радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$, расположенных под углами θ_1 и θ_2 к положительному направлению оси x. Из чертежа (рис. 2.8) следует

$$\rho_1^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = (x+a)^2 + y^2 \tag{2.86}$$

и

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{y}{x-a}\,,\quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{y}{x+a}\,. \tag{2.87}$$

Введем обозначения

$$\eta_{12} = \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),\quad \xi_{12} = \theta_1 - \theta_2. \tag{2.88}$$

Найдем $\operatorname{tg}\xi_{12}$, воспользовавшись для этого уравнениями (2.87)

$$\operatorname{tg}\xi_{12} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{1+\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{y/(x-a) - y/(x+a)}{1+y^2/(x-a)(x+a)}\,. \tag{2.89}$$

Из этого соотношения легко получить (2.84). Это показывает, что ξ совпадает с $\xi_{12} = \theta_1 - \theta_2$. Разрешая первое из уравнений (2.88) относительно ρ_2/ρ_1 и учитывая (2.86), получаем

$$e^{2\eta_{12}} = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\,. \tag{2.90}$$

Умножая на $e^{-\eta_{12}}$ и пользуясь определением гиперболического синуса и косинуса, приходим к уравнению (2.83), что также указывает на тождественность η и $\eta_{12} = \ln(\rho_2/\rho_1)$. Приведем пример использования этой тождественности.

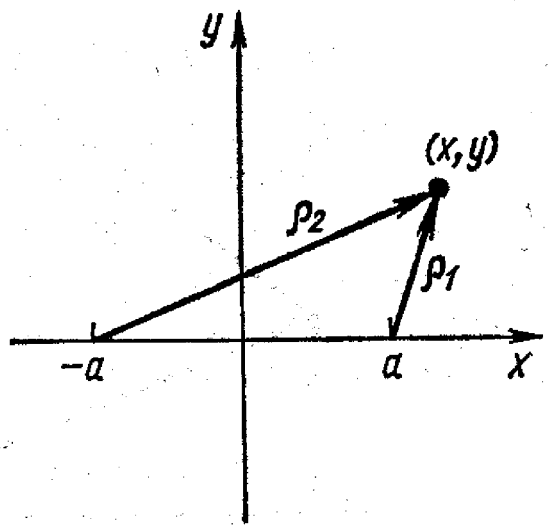


Рис. 2.8. Радиусы-векторы ρ_1 и ρ_2.

Пример. По бесконечному проводнику течет ток I в отрицательном направлении z (рис. 2.9). Во втором бесконечном проводнике, который параллелен первому, направление тока I совпадает с положительным направлением оси z. Пользуясь определением

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{d\lambda}{r}\,, \tag{2.91}$$

найти магнитный векторный потенциал **A** и магнитную индукцию **B**.

Согласно уравнению (2.91), **A** имеет только z-компоненту. Интегрируя вдоль каждого проводника от 0 до P и переходя к пределу при $P \longrightarrow \infty$, получаем

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{P\to\infty}\left(2\int_0^P \frac{dz}{\sqrt{\rho_2^2+z^2}} - 2\int_0^P \frac{dz}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}\right), \tag{2.92}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{P\to\infty} 2\left[\ln\left(z+\sqrt{\rho_2^2+z^2}\right)-\ln\left(z-\sqrt{\rho_1^2+z^2}\right)\right]_0^P =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\lim_{P\to\infty} 2\ln\frac{P+\sqrt{\rho_2^2+P^2}}{P+\sqrt{\rho_1^2+P^2}} - 2\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}\right). \qquad (2.93)$$

Последнее соотношение приводится к

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\eta. \qquad (2.94)$$

До сих пор биполярные координаты не были нужны. Сейчас, однако, нам потребуется определить магнитную индукцию **B** по формуле

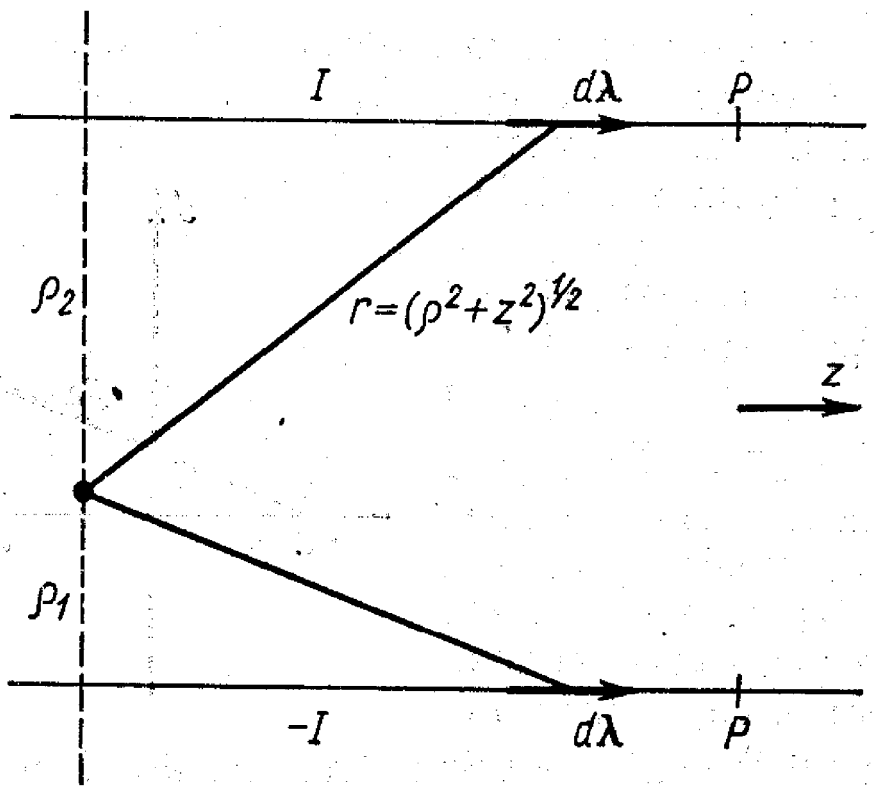


Рис. 2.9. Антипараллельные электрические токи.

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Из уравнений (2.22) и (2.85)

$$\mathbf{B} = \frac{(\operatorname{ch}\eta-\cos\xi)^2}{a^2}\begin{vmatrix} h_\xi\xi_0 & h_\eta\eta_0 & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\eta \end{vmatrix} =$$

$$= -\xi_0\frac{(\operatorname{ch}\eta-\cos\xi)}{a}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi}. \qquad (2.95)$$

Магнитное поле имеет только z-компоненту. Читателю предлагается вычислить **B** в других системах координат.

Упражнения

1. Проверить ортогональность поверхностей $\xi = b_i$ и $\eta = c_j$: а) показать, что наклон одной поверхности (по линии пересечения с плоскостью $z = \text{const}$) противоположен наклону другой; б) вычислить $h^2_{\xi\eta}$.

2. Показать, что в биполярных координатах переменные в уравнении Лапласа $\nabla^2\psi(\xi, \eta, z) = 0$ разделяются не полностью. Показать, что полное разделение возможно в двумерном случае, т. е. когда $\psi = \psi(\xi, \eta)$.

3. Найти емкость на единицу длины двух параллельных бесконечных проводящих цилиндров с радиусами b и c; расстояние между осями равно d.

Ответ: $C = 2\pi\varepsilon_0/(\eta_1 - \eta_2)$.

4. Найти емкость на единицу длины, если система состоит из бесконечных проводящих цилиндра и плоскости (ось цилиндра параллельна плоскости). *Ответ*: $C = 2\pi\varepsilon_0/\eta_1$.

2.10. КООРДИНАТЫ ВЫТЯНУТОГО СФЕРОИДА u, v, φ

Обратимся к двумерной системе эллиптических координат (см. разд. 2.7). Можно образовать трехмерную систему, вращая двумерную вокруг большой или малой осей эллипса и вводя азимутальный угол φ (рис. 2.10). Вращение вокруг главной оси приводит к системе координат вытянутых сфероидов со следующими координатными поверхностями:

1) вытянутые сфероиды: $u = \text{const}$, $0 \leqslant u < \infty$;

2) двуполостные гиперболоиды: $v = \text{const}$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$;

3) полуплоскости, проходящие через ось z: $\varphi = \text{const}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Уравнения преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v \cos\varphi,\ y = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v \sin\varphi, \\ z = a\,\mathrm{ch}\,u \cos v. \end{aligned}\right\} \quad (2.96)$$

Отметим, что оси в декартовой системе расположены так, что осью вращательной симметрии будет ось z. Коэффициенты Ламе в такой системе равны:

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_u = a(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2} = a(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)^{1/2}, \\ h_2 = h_v = a(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2},\ h_3 = h_\varphi = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v. \end{aligned}\right\} \quad (2.97)$$

Координаты вытянутого сфероида играют важную роль в физике, главным образом в исследовании проблемы «двух центров». Два центра соответствуют двум фокальным

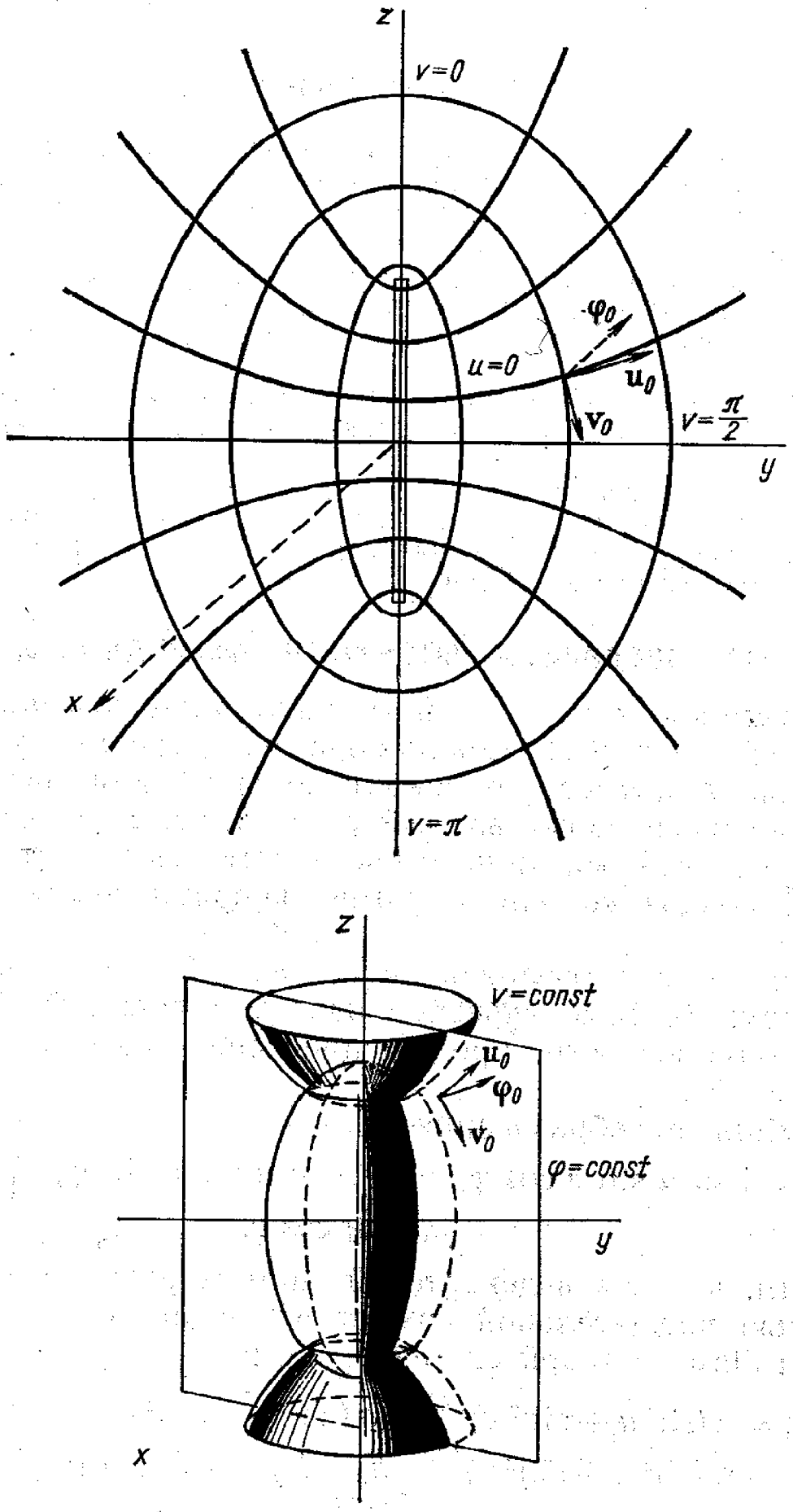


Рис 2.10. Координаты вытянутого сфероида. Поперечный разрез.

точкам (0, 0, a) и (0, 0, $-a$) эллипсоида и гиперболоида вращения. В соответствии с рис. 2.11 пусть r_1 — расстояние от точки (z, x) до левого фокуса, а r_2 — расстояние

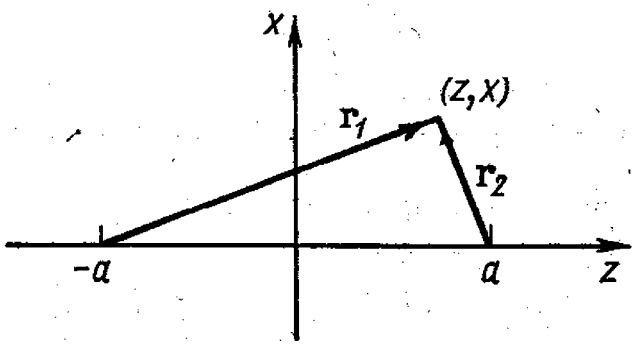


Рис. 2.11. «Два центра».

до правого фокуса, причем при фиксированном u $r_1 + r_2 = \text{const}$. Точка (z, x) в переменных u и v описывается уравнениями (2.96). Азимутальный угол в данном случае не учитывается. Из свойств эллипса и гиперболы известно, что

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \text{const} \quad \text{при фиксированном } u, \\ r_1 - r_2 &= \text{const} \quad \text{при фиксированном } v. \end{aligned}\right\} \tag{2.98}$$

Учитывая соотношения

$$r_1 = [(a+z)^2 + x^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(a-z)^2 + x^2]^{1/2} \tag{2.99}$$

и уравнения (2.96), мы находим

$$r_1 = a(\operatorname{ch} u + \cos v), \quad r_2 = a(\operatorname{ch} u - \cos v) \tag{2.100}$$

или

$$\frac{r_1 + r_2}{2a} = \operatorname{ch} u, \quad \frac{r_1 - r_2}{2a} = \cos v. \tag{2.101}$$

Это означает, что u зависит от суммы расстояний до двух центров, а v — от разности этих расстояний.

Чтобы было удобнее пользоваться этой системой координат, сделаем замену переменных

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \operatorname{ch} u \qquad 1 \leqslant \xi_1 < \infty; \\ \xi_2 &= \cos v \qquad -1 \leqslant \xi_2 \leqslant 1; \\ \xi_3 &= \varphi \qquad\quad 0 \leqslant \xi_3 \leqslant 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{2.102}$$

Специально подчеркнем, что тогда изменятся и коэффициенты Ламе, т. е.

$$h_{\xi_1} = h_{\operatorname{ch} u} \neq h_u. \tag{2.103}$$

Пример. Молекулярный ион водорода состоит из двух протонов, которые расположены в фокальных точках, и одного электрона. Запишем уравнение Шредингера для данной системы:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi-\frac{e^2}{r_1}\psi-\frac{e^2}{r_2}\psi+\frac{e^2}{r_{12}}\psi=E\psi. \tag{2.104}$$

Переменные r_1 и r_2 определены в соответствии с рис. 2.11, а $r_{12}=2a$ — расстояние между двумя протонами. Задача заключается в разделении переменных в уравнении (2.104).

В избранной системе координат вытянутого сфероида первый этап связан с вычислением коэффициентов Ламе

$$\left.\begin{aligned} h_{\xi_1}&=a\left(\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_1^2-1}\right)^{1/2},\quad h_{\xi_2}=a\left(\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{1-\xi_2^2}\right)^{1/2},\\ h_{\xi_3}&=a(\xi_1^2-1)^{1/2}(1-\xi_2^2)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.105}$$

Используя полученные коэффициенты и уравнение (2.18), находим

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{(\xi_1^2-\xi_2^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[(\xi_1^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[(1-\xi_2^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right]+\frac{1}{(\xi_1^2-1)(1-\xi_2^2)}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_3^2}\right\}. \tag{2.106}$$

Из уравнения (2.100)

$$\frac{e^2}{r_1}+\frac{e^2}{r_2}=\frac{e^2 2a\xi_1}{a(\xi_1^2-\xi_2^2)}. \tag{2.107}$$

Подставляя (2.106) и (2.107) в уравнение (2.104) и считая, что

$$\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)f_3(\xi_3), \tag{2.108}$$

выделяем азимутальную зависимость

$$-\frac{\hbar^2}{2Ma}\left\{\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\cdot\frac{1}{f_1}\frac{d}{d\xi_1}\left[(\xi_1^2-1)\frac{df_1}{d\xi_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\cdot\frac{1}{f_2}\cdot\frac{d}{d\xi_2}\left[(1-\xi_2^2)\frac{df_2}{d\xi_2}\right]\right\}-\frac{2e^2}{a}\cdot\frac{\xi_1}{\xi_1^2-\xi_2^2}-E'=$$

$$=\frac{\hbar^2}{2Ma}\cdot\frac{1}{(\xi_1^2-1)(1-\xi_2^2)}\cdot\frac{1}{f_3}\cdot\frac{d^2f_3}{d\xi_3^2}. \tag{2.109}$$

Здесь $E'=E-e^2/r_{12}=\text{const}$. Как и в разд. 2.5 и 2.6, положим

$$\frac{1}{f_3}\cdot\frac{d^2f_3}{d\xi_3^2}=-m^2. \tag{2.110}$$

После этого равенство (2.109) упрощается:

$$\frac{1}{f_1}\cdot\frac{d}{d\xi_1}\left[(\xi_1^2-1)\frac{df_1}{d\xi_1}\right]+\frac{1}{f_2}\cdot\frac{d}{d\xi_2}\left[(1+\xi_2^2)\frac{df_2}{d\xi_2}\right]+$$

$$+\frac{4Mae^2}{\hbar^2}+\frac{2Ma^2E'}{\hbar^2}(\xi_1^2-\xi_2^2)=m^2\left[\frac{1}{\xi_1^2-1}+\frac{1}{1-\xi_2^2}\right]. \tag{2.111}$$

Проверка убеждает нас, что переменные ξ_1 и ξ_2 разделяются. Итак, получается одно дифференциальное уравнение второго порядка для определения $f_1(\xi_1)$, а другое — для $f_2(\xi_2)$.

Упражнения

1. Вычислить h_ξ^2, h_η^2 и $h_\varphi^2(\xi, \eta, \varphi)$ для $\xi = \operatorname{ch} u$ и $\eta = \cos v$.

2. Показать, что $h_{uv}^2 = 0$ (координаты вытянутого сфероида).

3. В квантовомеханическом рассмотрении молекулы водорода по методу Гайтлера—Лондона встречается интеграл

$$I = \frac{1}{\pi a_0^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a_0}\, d\tau,$$

в котором интегрирование ведется по всему пространству. Ввести координаты вытянутого сфероида и вычислить этот интеграл.

Ответ: $I = (1 + 2a/a_0 + 4a^2/3a_0^2)\, e^{-2a/a_0}$.

4. Полагая $\xi = \operatorname{ch} u$, $\eta = \cos v$, показать, что элемент объема в координатах вытянутого сфероида получается непосредственно из выражения

$$d\tau = a^3 (\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v) \operatorname{sh} u \sin v\, du\, dv\, d\varphi$$

и равен $d\tau = -a^3 (\xi^2 - \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\varphi$. (Знак минус выбран для перемены местами пределов интегрирования по η.)

5. В системе координат вытянутого сфероида с помощью объемного интеграла вычислить объем заданного эллипсоида, для чего использовать поочередно переменные u, v, φ и ξ, η, φ. Показать, что полученные результаты совпадают с обычной формулой объема эллипсоида, в которую входят его полуоси: $V = \frac{4}{3}\pi a_0^2 b_0$, где a_0 и b_0 — малая и большая полуоси.

2.11. КООРДИНАТЫ СПЛЮЩЕННОГО СФЕРОИДА u, v, φ

Вращая эллиптическую систему координат (см. разд. 2.7) вокруг малой оси эллипса, получаем другую трехмерную систему — систему координат сплющенного сфероида (угол φ по-прежнему азимутальный угол). Координатными поверхностями являются:

1) сплющенные сфероиды: $u = \text{const}$, $0 \leqslant u < \infty$;

2) однополосные гиперболоиды: $v = \text{const}$ *, $-\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$;

* Область изменения v равна π, а в эллиптических цилиндрических координатах она составляет 2π. Отрицательные значения v приводят к отрицательным значениям z.

3) полуплоскости, проходящие через ось z: $\varphi = \text{const}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Уравнения перехода к декартовым координатам можно записать так:

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{ch} u \cos v \sin \varphi,$$
$$z = \operatorname{sh} u \sin v.$$

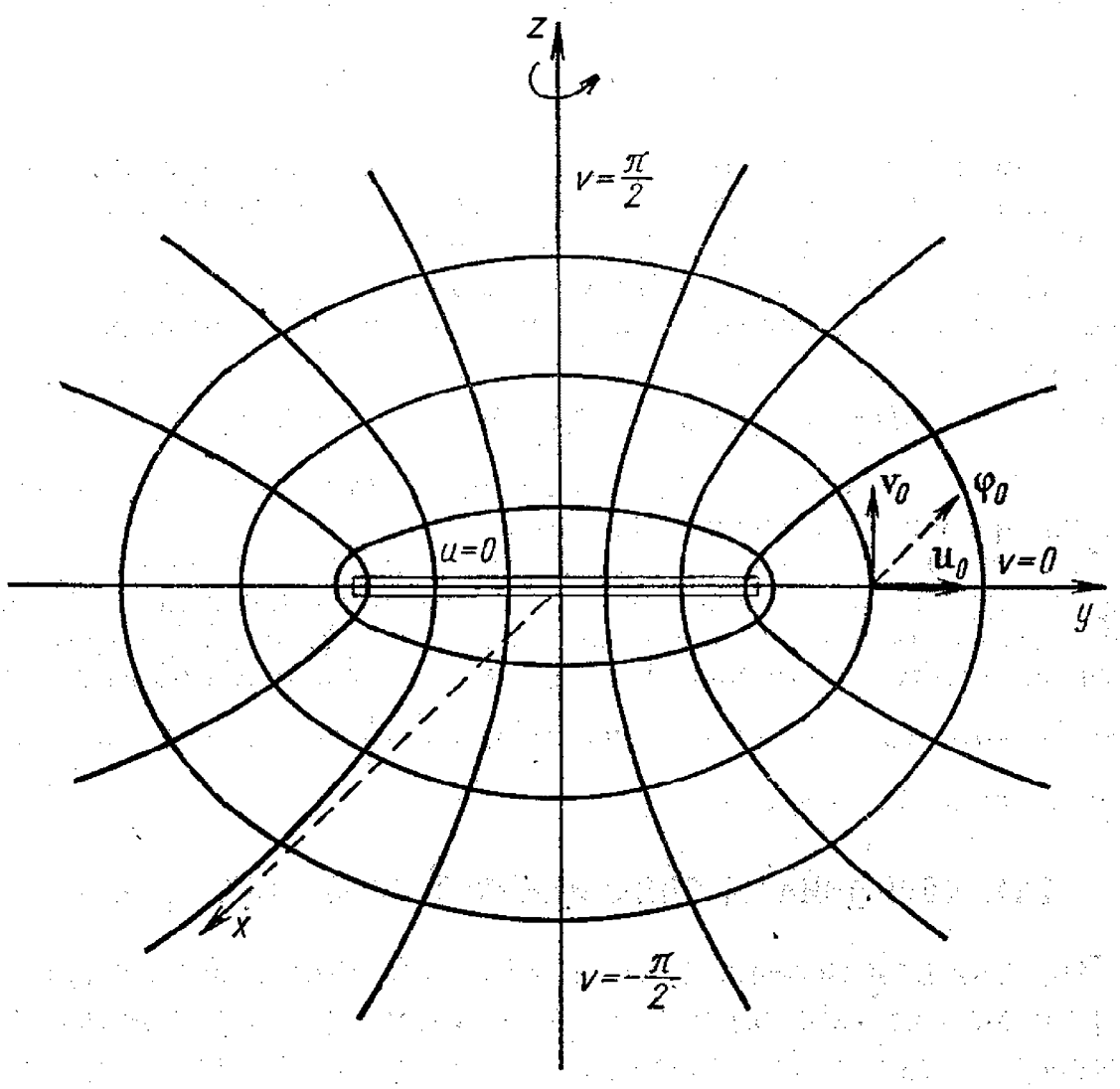


Рис. 2.12. Координаты сплющенного сфероида. Поперечный разрез (стрелкой указано вращение вокруг оси симметрии).

Коэффициенты Ламе равны:

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_u = a\,(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2} = a\,(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)^{1/2}, \\ h_2 = h_v = a\,(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2}, \quad h_3 = h_\varphi = a \operatorname{ch} u \cos v. \end{aligned}\right\} \qquad (2.112)$$

Поверхность $u = \text{const}$ описывает сплющенный сфероид, который с хорошим приближением соответствует планетарной поверхности, поэтому эта система координат при-

меняется при описании гравитационного поля Земли *. Системы координат вытянутого и сплющенного сфероида встретятся далее в разд. 12.10 при рассмотрении функций Лежандра второго рода.

Существенно заметить, что если вести отсчет угла φ, как обычно, от оси x в направлении оси y и требовать порядок (u, v, φ), то получается левая система. Это повлечет появление множителя (-1) в выражении для ротора. Чтобы система осталась правой, необходим такой порядок: (v, u, φ), тогда (рис. 2.12) $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{u}_0 = +\boldsymbol{\varphi}_0$, или в уравнениях преобразования заменить v на $(\pi/2) - v$.

Упражнения

1. Разделить переменные в уравнении Лапласа в координатной системе сплющенного сфероида. Решить дифференциальное уравнение с зависимостью от φ.

2. Тонкий проводящий металлический диск радиусом a имеет общий электрический заряд Q. Найти электростатическую емкость диска и распределение заряда на его поверхности.

Ответ: $C = 8a\varepsilon_0$, $\sigma = \varphi/4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}$ (на каждой стороне).

2.12. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ξ, η, φ

В разд. 2.8 описаны два семейства ортогональных софокусных парабол. Представим себе, что мы имеем семейство парабол, лежащих в плоскости xy (см. рис. 2.6), и вращаем их вокруг оси y, которая служит осью симметрии для обоих семейств кривых. В результате будут образованы два семейства ортогональных софокусных параболоидов. Делая такую циклическую перестановку координат, чтобы ось z стала осью вращения, мы получаем:

1) параболоиды $\xi = \text{const}$, $0 \leqslant \xi < \infty$ вокруг положительного направления оси z;

2) параболоиды $\eta = \text{const}$, $0 \leqslant \eta < \infty$ вокруг отрицательного направления оси z;

3) полуплоскости $\varphi = \text{const}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, проходящие через ось z.

Как обычно, угол φ будем отсчитывать от оси x в плоскости xy, тогда

$$x = \xi\eta\cos\varphi, \quad y = \xi\eta\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2). \qquad (2.113)$$

* Vinti J. P. Phys. Rev. Letters, 3, 8 (1959).

Из уравнения (2.113) находим

$$h_1 = h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad h_2 = h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad h_3 = h_\varphi = \xi\eta. \tag{2.114}$$

Из рис. 2.13 видно, что $\xi_0 \times \eta_0 = -\varphi_0$, т. е. параболическая система при заданном здесь порядке переменных ξ, η, φ является левой. В соответствии с уравнениями

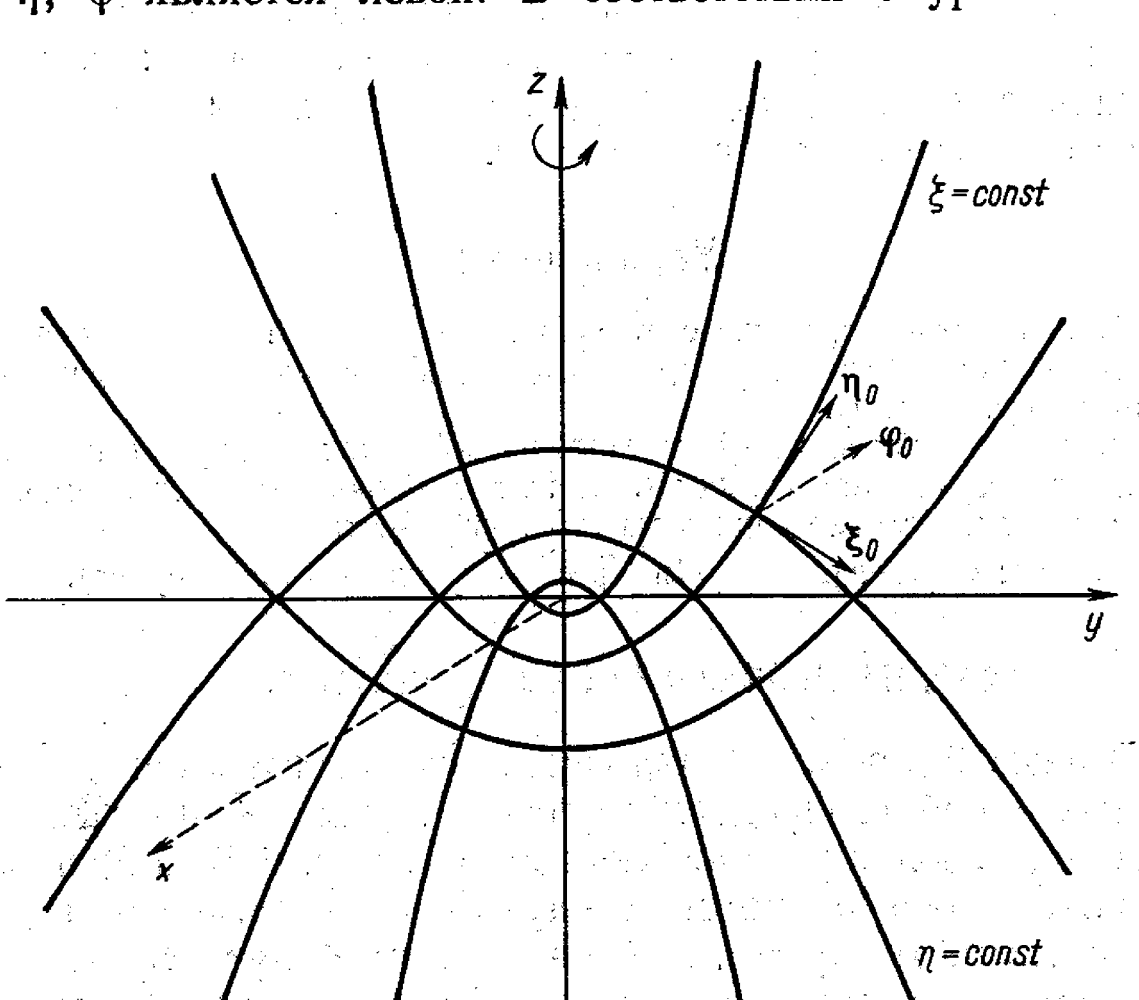


Рис. 2.13. Параболические координаты (стрелкой указано вращение вокруг оси симметрии).

(2.113) ξ и η имеют размерность корня квадратного из длины. По этой причине некоторые авторы предпочитают использовать $\xi^{1/2}$ и $\eta^{1/2}$ вместо ξ и η.

Параболическими координатами пользуются для анализа эффекта Штарка * при описании расщепленных энергетических уровней атома, помещенного в электрическое поле.

* Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1960.

Эффект Штарка. Наличие внешнего электрического поля E_0 вдоль положительного направления оси z добавляет к потенциальной энергии в волновом уравнении Шредингера дополнительный член $-eE_0z$:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi-\frac{e^2}{r}\psi-eE_0z\psi=E\psi. \qquad (2.115)$$

Требуется разделить переменные в этом уравнении. Используем уравнения (2.18) и (2.114):

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\xi\eta(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi\eta\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\xi\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]\right\}+ \\ +\frac{1}{\xi^2\eta^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \qquad (2.116)$$

Кроме того,

$$r=\frac{\xi^2+\eta^2}{2}. \qquad (2.117)$$

Подставим в исходное волновое уравнение (2.115) два последних выражения и функцию $\psi=f(\xi)\,g(\eta)\,\Phi(\varphi)$:

$$\frac{\hbar^2}{2M}\cdot\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left[\frac{1}{\xi f}\cdot\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{1}{\eta g}\cdot\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dg}{d\eta}\right)\right]+ \\ +\frac{\hbar^2}{2M}\cdot\frac{1}{\xi^2\eta^2}\cdot\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{2e^2}{\xi^2+\eta^2}+\frac{eE_0}{2}(\eta^2-\xi^2)+E=0. \qquad (2.118)$$

Положим

$$\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2, \qquad (2.119)$$

тогда уравнение (2.118) можно легко свести к двум новым:

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{\xi f}\cdot\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df}{d\xi}\right)-\frac{m^2}{\xi^2}\right]+E\xi^2-\frac{eE_0\xi^4}{2}+A=0, \qquad (2.120)$$

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{\eta g}\cdot\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dg}{d\eta}\right)-\frac{m^2}{\eta^2}\right]+E\eta^2+\frac{eE_0\eta^4}{2}+B=0. \qquad (2.121)$$

Постоянные A и B произвольны, но удовлетворяют условию $A+B=2e^2$.

Упражнения

1. Рассмотрим свойство четности (свойство волновой функции оставаться четной или нечетной при инверсии координат). В декартовой системе координат инверсия, выраженная в операторной форме как действие оператора четности P, имеет вид

$$P(x, y, z) = -x, \ -y, \ -z.$$

Записать соответствующие операторные уравнения в следующих системах координат: 1) в сферической системе r, 0, φ; 2) в круговой цилиндрической системе ρ, φ, z; 3) в координатах вытянутого сфероида u, v, φ; 4) в координатах вытянутого сфероида ξ, η, φ; 5) в координатах сплющенного сфероида u, v, φ; 6) в параболической системе ξ, η, φ.

2. Тяжелая частица движется внутри параболоида, ось которого вертикальна, а вершина покоится на земле. Показать с помощью множителей Лагранжа, что давление частицы на поверхность пропорционально кривизне параболы в этой точке. *Замечание.* Постановка данной задачи и множители Лагранжа обсуждаются в гл. 17.

3. Волновое уравнение для водородоподобного атома имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u + Vu = Eu,$$

где $V = -Ze^2/r$ — потенциальная энергия электрона, а E — полная энергия. Показать, что в параболических координатах это уравнение допускает разделение переменных. Показать, что переменные можно разделить и в координатной системе вытянутого сфероида, если ядро атома поместить в один из фокусов.

4. В волновом уравнении, описывающем процесс кулоновского рассеяния, $V = (ZZ'e^2)/r$, где Ze и $Z'e$ — заряды первой и второй частиц. Рассматривая задачу в параболической системе координат, показать, что функция $u = e^{ikz} f(\xi)$ определяет решение уравнения, в котором $f(\xi)$ удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению.

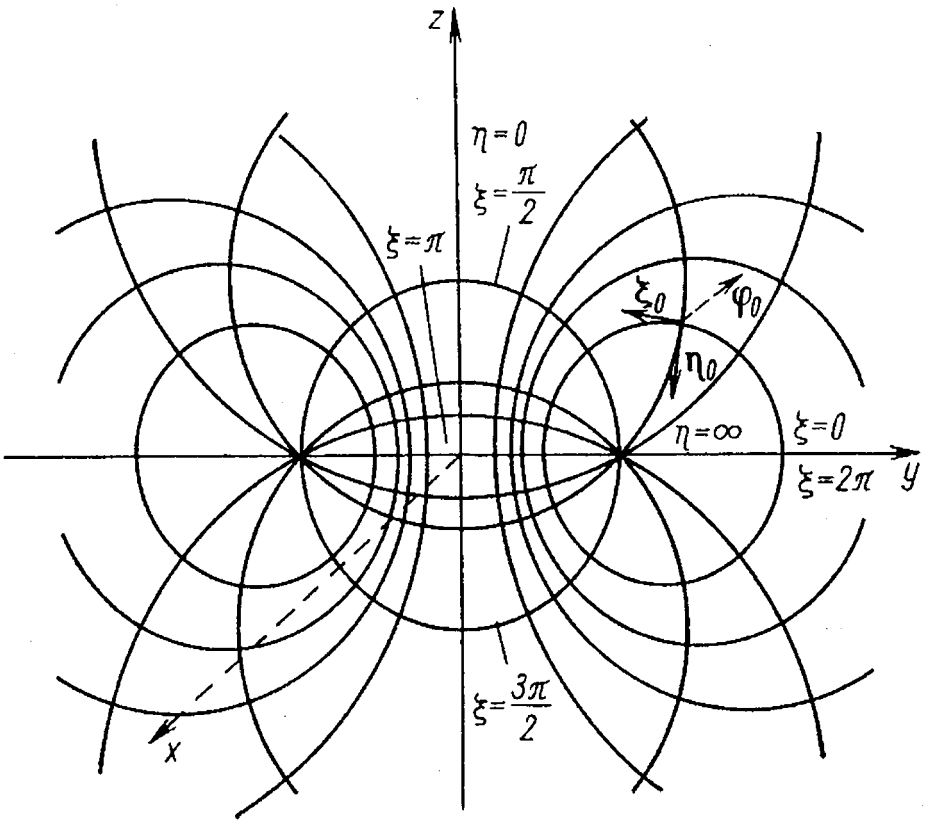
5. Определить h_ξ^2, h_η^2 и h_φ^2, если параболические координаты связаны с обычными декартовыми координатами соотношениями

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

6. Исследовать трехмерную систему координат, образованную вращением плоской параболической системы ξ, η из разд. 2.8 вокруг оси x.

2.13. ТОРОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ξ, η, φ

Эта система координат получается при вращении плоскости xy биполярной системы (разд. 2.9) вокруг оси y (см. рис. 2.7). Окружности, центры которых расположены по оси y (ξ = const), при таком вращении образуют сферы, а окружности с центрами по оси x (η = const) — тороиды (рис. 2.14). Обозначим координаты так, чтобы ось вращения



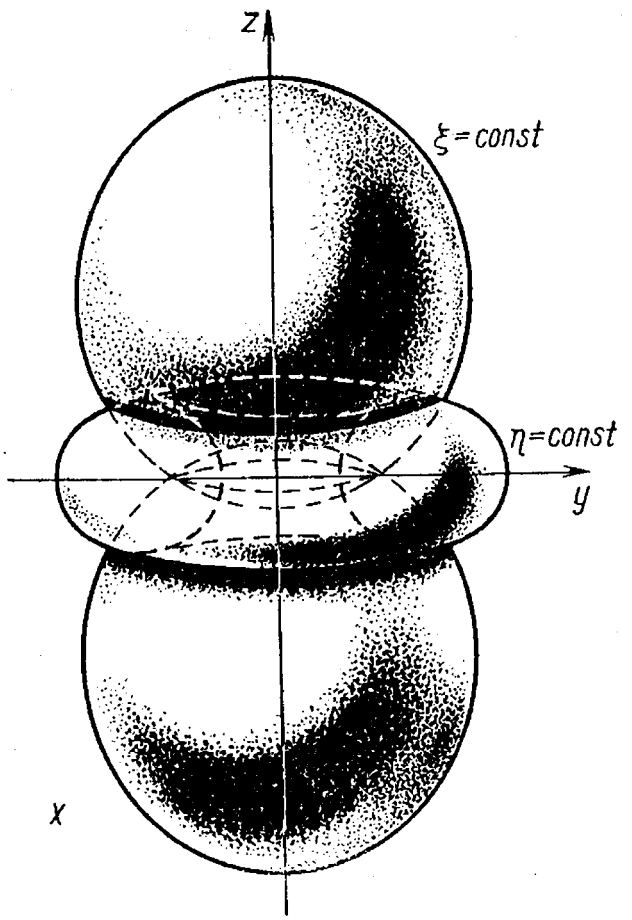


Рис. 2.14. Тороидальные координаты. Поперечный разрез.

совпала с осью z, тогда формулы преобразования

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh}\eta \cos\varphi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi}, \\ y = \frac{a \operatorname{sh}\eta \sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \quad z &= \frac{a \sin\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{2.122}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \frac{a}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ h_2 = h_\eta &= \frac{a}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ h_3 = h_\varphi &= \frac{a \operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{2.123}$$

Координатными поверхностями, образованными при вращении, служат:

1) сферы с центрами в точках $(0, 0, a \cdot \operatorname{ctg}\xi)$ и радиусами $a\,|\operatorname{cosec}\xi|$:

$$\xi = \text{const}, \quad 2az \operatorname{ctg}\xi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi; \tag{2.124}$$

2) тороиды

$$\eta = \text{const}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi.$$

Центры кругов

$$4a^2 (x^2 + y^2) \operatorname{cth}^2 \eta = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2),^2 \tag{2.125}$$

возникающих в поперечном сечении тороидов, расположены на расстоянии $a \cdot \operatorname{cth}\eta$ от оси z и имеют радиус $a \cdot \operatorname{csh}\eta$;

3) полуплоскости: $\varphi = \text{const}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, проходящие через ось z.

В тороидальных координатах переменные в уравнении Лапласа полностью разделяются. Эта система координат встречается довольно редко, однако она все же используется в некоторых физических приложениях (например, при описании вихревых колец).

Отметим, что переменные ξ, η, φ образуют левую систему. Чтобы сделать систему правой, нужно избрать для координат порядок η, ξ, φ.

Упражнение

Показать, что площадь поверхности тороида равна $(2\pi a)\cdot(2\pi b) = 4\pi^2 ab$, где a — радиус тора, b — расстояние от центра до оси.

2.14. БИСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ξ, η, φ

Обратимся вновь к биполярным координатам (разд. 2.9) и будем вращать плоскость xy (см. рис. 2.7) вокруг оси x,

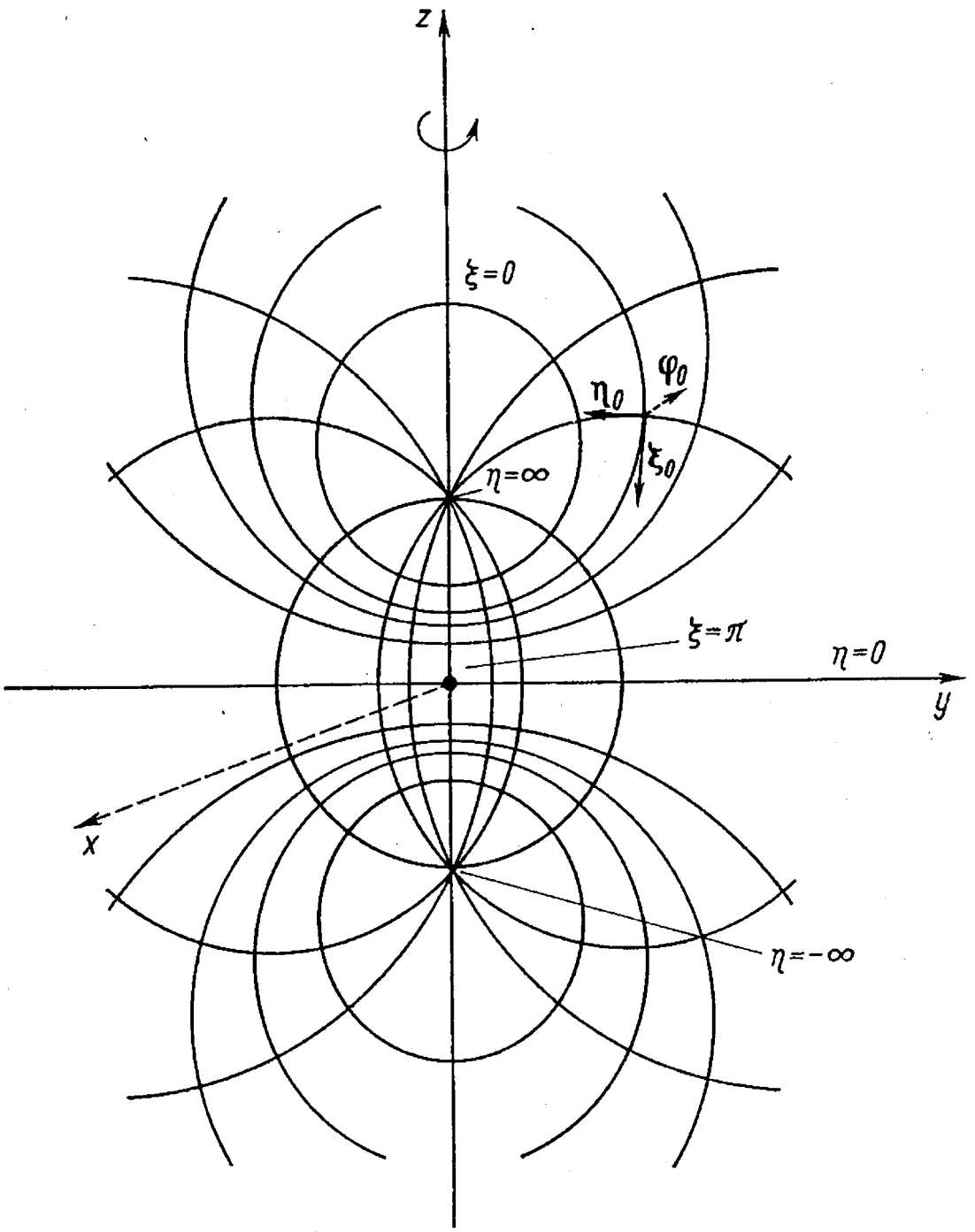


Рис. 2.15. Бисферические координаты (стрелкой указано вращение вокруг оси симметрии).

при этом возникнут два семейства ортогональных пересекающихся сфер (рис. 2.15). Дополненные плоскостями

постоянного азимута, они образуют бисферическую систему координат, характеризующуюся уравнениями преобразования:

$$x=\frac{a\sin\xi\cos\varphi}{\operatorname{ch}\eta-\cos\xi},\quad y=\frac{a\sin\xi\sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta-\cos\xi},\quad z=\frac{a\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\xi}. \tag{2.126}$$

Опять за ось вращения примем ось z. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} h_1=h_\xi&=\frac{a}{\operatorname{ch}\eta-\cos\xi},\\ h_2=h_\eta=\frac{a}{\operatorname{ch}\eta-\cos\xi},\quad h_3&=h_\varphi=\frac{a\sin\xi}{\operatorname{ch}\eta-\cos\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{2.127}$$

Тороидальная система характеризуется следующими координатными поверхностями:

1) поверхность вращения четвертого порядка (вращение вокруг оси z)

$$\xi=\text{const}\begin{cases} 0<\xi<\frac{\pi}{2}, & \text{«воронки» вдоль оси } z,\\ \xi=\frac{\pi}{2}, & \text{сфера,}\\ \frac{\pi}{2}<\xi<\pi, & \text{острые выступы вдоль оси } z\text{, напоминающие рог Луны;} \end{cases}$$

2) сферы радиусом $a\,|\operatorname{csh}\eta|$ с центрами в точках $(0,\ 0,\ a\operatorname{cth}\eta)$: $\eta=\text{const}$, $-\infty<\eta<\infty$;

3) полуплоскости: $\varphi=\text{const}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, проходящие через ось z.

В уравнении Лапласа переменные частично разделяются в этой системе, хотя в уравнении (2.1) в общем виде (при $k^2\neq 0$) нельзя произвести такого разделения. Бисферическая система координат используется в специальных задачах электростатики, например при вычислении электростатической емкости между проводящим шаром и проводящей плоскостью (см. упражнение).

Упражнение

Определить электростатическую емкость системы, состоящей из проводящего шара и проводящей плоскости (шар и плоскость не пересекаются).

2.15. СОФОКУСНЫЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ξ_1, ξ_2, ξ_3

Эта обобщенная система координат образована тремя семействами поверхностей:

1) эллипсоиды (все оси различны), $\xi_1 = \text{const}$:

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_1}+\frac{y^2}{b^2-\xi_1}+\frac{z^2}{c^2-\xi_1}=1; \tag{2.128}$$

2) однополостные гиперболоиды, $\xi_2 = \text{const}$:

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_2}+\frac{y^2}{b^2-\xi_2}-\frac{z^2}{\xi_2-c^2}=1; \tag{2.129}$$

3) двуполостные гиперболоиды, $\xi_3 = \text{const}$:

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_3}-\frac{y^2}{\xi_3-b^2}-\frac{z^2}{\xi_3-c^2}=1. \tag{2.130}$$

Постоянные a, b и c — параметры, характеризующие эллипсоиды и гиперболоиды и удовлетворяющие неравенствам

$$a^2 > \xi_3 > b^2 > \xi_2 > c^2 > \xi_1. \tag{2.131}$$

Отрицательные знаки перед некоторыми членами в уравнениях (2.128) — (2.130) появились благодаря этим неравенствам.

Переход от общих эллипсоидальных координат к декартовым осуществляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2-\xi_1)(a^2-\xi_2)(a^2-\xi_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2-\xi_1)(b^2-\xi_2)(\xi_3-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2-\xi_1)(\xi_2-c^2)(\xi_3-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.132}$$

В результате громоздких выкладок получим коэффициенты Ламе:

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_{\xi_1} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{(a^2-\xi_1)(b^2-\xi_1)(c^2-\xi_1)}\right]^{1/2}, \\ h_2 = h_{\xi_2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_2)(\xi_2-\xi_1)}{(a^2-\xi_2)(b^2-\xi_2)(c^2-\xi_2)}\right]^{1/2}, \\ h_3 = h_{\xi_3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}{(a^2-\xi_3)(\xi_3-b^2)(\xi_3-c^2)}\right]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.133}$$

Как и в уравнениях координатных поверхностей, симметрия этих соотношений нарушена требованием, чтобы каждый из полученных коэффициентов имел знак плюс.

Из уравнений преобразования (2.132) видно, что некоторой заданной точке $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ соответствует восемь возможных точек $(\pm x, \pm y, \pm z)$ в декартовой системе. Эта восьмизначность ликвидируется введением соответствующих условий, которые налагаются на знаки ξ_1, ξ_2 и ξ_3.

Несмотря на то что рассматриваемая система координат может найти применение в различных задачах математической физики, пользоваться ею трудно вследствие слишком общего характера, поэтому в дальнейшем мы ограничимся эллипсоидами с осью вращательной симметрии.

2.16. КОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ξ_1, ξ_2, ξ_3

Эта система координат представляется одним из наиболее необычных (и наименее распространенных) вырожденных случаев софокусной эллипсоидальной системы координат. Координатные поверхности:

1) сферы с центром в начале координат и радиусом $\xi_1 = \text{const}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi_1^2; \tag{2.134}$$

2) эллиптические конусы (вершины конусов совпадают с началом координат, а оси — с осью z, $\xi_2 = \text{const}$):

$$\frac{x^2}{\xi_1^2} + \frac{y^2}{\xi_1^2 - b^2} = \frac{z^2}{c^2 - \xi_2^2}; \tag{2.135}$$

3) эллиптические конусы (вершины конусов совпадают с началом координат, а оси — с осью x, $\xi_3 = \text{const}$):

$$\frac{x^2}{\xi_3^2} = \frac{y^2}{b^2 - \xi_3^2} + \frac{z^3}{c^2 - \xi_3^2}. \tag{2.136}$$

Как и в разд. 2.15, параметры b и c подчиняются условию

$$c^2 > \xi_2^2 > b^2 > \xi_3^2. \tag{2.137}$$

Разрешая уравнения (2.134) — (2.136) относительно x^2, y^2 и z^2, получаем формулы преобразования

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{bc}\right)^2, \quad y^2 = \frac{\xi_1^2(\xi_2^2 - b^2)(b^2 - \xi_3^2)}{b^2(c^2 - b^2)}, \\ z^2 &= \frac{\xi_1^2(c^2 - \xi_2^2)(c^2 - \xi_3^2)}{c^2(c^2 - b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.138}$$

С помощью полученных формул и уравнения (2.6) вычислим коэффициенты Ламе:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= h_{\xi_1} = 1, \\ h_2 &= h_{\xi_2} = \left[\frac{\xi_1^2(\xi_2^2-\xi_3^2)}{(\xi_2^2-b^2)(c^2-\xi_2^2)}\right]^{1/2}, \\ h_3 &= h_{\xi_3} = \left[\frac{\xi_1(\xi_2^2-\xi_3^2)}{(b^2-\xi_3^2)(c-\xi_3^2)}\right]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.139)$$

Эта нечетносферическая система координат почти нигде не использовалась. Однако в этой системе удалось описать собственные функции момента количества движения в задаче об асимметричном роторе *.

2.17. СОФОКУСНЫЕ ПАРАБОЛОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ξ_1, ξ_2, ξ_3

За исключением биполярных, тороидальных и бисферических систем координат, все остальные можно получить из софокусной эллипсоидальной системы (разд. 2.15). Последней в ряду этих вырожденных систем стоит система координат софокусных параболоидов. Для нее координатными поверхностями являются:

1) софокусные параболоиды с эллипсом в сечении (направление осей совпадает с отрицательным направлением оси z, $\xi_1 = \text{const}$):

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_1} + \frac{y^2}{b^2-\xi_1} + 2z + \xi_1 = 0; \qquad (2.140)$$

2) гиперболические параболоиды, $\xi_2 = \text{const}$:

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_2} - \frac{y^2}{\xi_2-b^2} + 2z + \xi_2 = 0; \qquad (2.141)$$

3) софокусные параболоиды с эллипсом в сечении, направление осей совпадает с положительным направлением оси z, $\xi_3 = \text{const}$:

$$\frac{x^2}{\xi_3-a^2} + \frac{y^2}{\xi_3-b^2} - 2z - \xi_3 = 0. \qquad (2.142)$$

Как и в разд. 2.15 и 2.16, параметры a^2 и b^2 и независимые переменные подчиняются неравенствам

$$\xi_3 > a^2 > \xi_2 > b^2 > \xi_1. \qquad (2.143)$$

* Spense R. D. Amer. J. Phys., 27, 329 (1959).

Уравнения преобразования имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2-\xi_1)(a^2-\xi_2)(\xi_3-a^2)}{a^2-b^2}, \\ y^2 &= \frac{(b^2-\xi_1)(\xi_2-b^2)(\xi_3-b^2)}{a^2-b^2}, \\ z &= \frac{1}{2}(a^2+b^2-\xi_1-\xi_2-\xi_3). \end{aligned}\right\} \qquad (2.144)$$

Отсюда коэффициенты Ламе равны

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_{\xi_1} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{(a^2-\xi_1)(b^2-\xi_1)}\right]^{1/2}, \\ h_2 = h_{\xi_2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_2)(\xi_2-\xi_1)}{(a^2-\xi_2)(\xi_2-b^2)}\right]^{1/2}, \\ h_3 = h_{\xi_3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}{(\xi_3-a^2)(\xi_3-b^2)}\right]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.145)$$

Эта система используется в электромагнитной теории *.

* Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. I. 3rd ed. Oxford, Oxford University Press, 1904, Ch. X.

ГЛАВА 3

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

3.1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Тензоры играют важную роль во многих областях физики, в частности в общей теории относительности и электромагнитной теории, широко используются при изучении анизотропных (упругих, оптических, электрических и магнитных) свойств твердого тела. Здесь же в качестве примера рассмотрим закон Ома в обычной форме

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока; $\mathbf{E}$ — электрическое поле; σ — электропроводность. Если изучаемая среда изотропна, то σ — скаляр и, например, для x-компоненты тока выполняется равенство

$$j_1 = \sigma E_1. \tag{3.2}$$

Однако, если среда анизотропна, как, например, во многих кристаллах, плотность тока в x-направлении может зависеть от электрических полей в y- и z-направлениях. Предполагая линейную зависимость, можно переписать уравнение (3.2) в виде

$$j_1 = \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3, \tag{3.3}$$

или, в общей форме,

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k. \tag{3.4}$$

В обычном трехмерном пространстве скалярная электропроводность задается набором девяти элементов σ_{ik}:

$$\hat{\sigma} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

В разд. 3.3 показано, что эта таблица из девяти элементов определяет тензор.

Величины, которые не изменяются при повороте системы координат, т. е. являются инвариантными, в гл. 1 были определены как скаляры. Величины, компоненты которых преобразуются по тем же законам, что и компоненты радиуса-вектора (уравнение (1.13), разд. 1.2), были названы векторами. Это свойство принято за определяющую характеристику вектора. Однако такое определение вектора

$$A_i' = \sum_j a_{ij} A_j, \tag{3.6}$$

в котором коэффициенты a_{ij} представляют собой набор косинусов угла между осями x_i' и x_j, содержит некоторую неопределенность.

Возьмем наш радиус-вектор $\mathbf{r}$, тогда

$$x_i' = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} x_j. \tag{3.7}$$

Если определить производные как

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}, \tag{3.8}$$

то уравнения (3.6) и (3.7) окажутся идентичными. Любой набор величин A_j, преобразующихся по закону

$$A_i' = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} A_j, \tag{3.9}$$

определяет *контравариантный* вектор.

Однако мы уже знакомы с несколько иным типом векторного преобразования. Градиент скаляра, определенный как

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \tag{3.10}$$

(для x, y и z использованы обозначения x_1, x_2, и x_3), преобразуется по закону

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x_i'} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}, \tag{3.11}$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z') = \varphi'$ — скаляр. Заметим, что уравнение (3.11) отличается от (3.9), поскольку вместо $\partial x_i'/\partial x_j$ имеем $\partial x_j/\partial x_i'$. Уравнение (3.11) определяет *ковариантный* вектор. Примером такого вектора служит градиент скаляра.

В декартовых координатах

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = a_{ij}, \tag{3.12}$$

и, следовательно, контравариантные и ковариантные преобразования совпадают. В других системах координат соотношение (3.12), вообще говоря, не имеет места, поэтому в них контравариантные и ковариантные величины различны, что необходимо учитывать. Мы будем отмечать компоненты контравариантного вектора индексом сверху A^i, а компоненты ковариантного — индексом снизу A_i. Чтобы избавить читателя от некоторой боязни и неуверенности перед словом *тензор*, назовем скаляр тензором нулевого ранга, а вектор — тензором первого ранга.

Теперь определим контравариантные, смешанные и ковариантные тензоры второго ранга с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} A'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} A^{kl}; \\ B_j'^{i} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} B_l^k; \\ C_{ij}' &= \sum_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} C_{kl}. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Мы видим, что A^{kl} контравариантен по обоим индексам, C_{kl} ковариантен по обоим индексам, а B_l^k преобразуется контравариантно по первому индексу k, но ковариантно по второму индексу l. В декартовых координатах все три типа тензоров второго ранга — контравариантные, смешанные и ковариантные — совпадают.

Тензор второго ранга $\boldsymbol{A}$ (с компонентами A^{kl}) удобно представить, записав его компоненты в виде квадратной таблицы (3×3 в случае трехмерного пространства):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Это не означает, однако, что любая квадратная таблица чисел или функций образует тензор. Существенное условие, налагаемое на компоненты тензора, состоит в том, что они

преобразуются по закону (3.13). Это требование можно проиллюстрировать подробным изучением двумерного тензора

$$T=\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}.$$

В повернутой системе координат компонента $T^{11'}$ должна равняться $-x'y'$. Проверим, преобразуется ли T^{11} по закону (3.13):

$$T^{11'}=-x'y'\overset{?}{=}\sum_{kl}\frac{\partial x_1'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_1'}{\partial x_l}T^{kl}=\sum_{kl}a_{1k}a_{1l}T^{kl},$$

где $i, j=1$. Записывая левую часть уравнения в явном виде в неподвижной системе координат и подставляя вместо a_{1k}, a_{1l} и T^{kl} их действительные значения, получаем

$$-(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)\overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\cos^2\theta T^{11}+\cos\theta\sin\theta T^{12}+\sin\theta\cos\theta T^{21}+\sin^2\theta T^{22}=$$

$$=-xy\cos^2\theta-y^2\cos\theta\sin\theta+x^2\sin\theta\cos\theta+xy\sin^2\theta.$$

Возникло тождество, показывающее, что условие (3.13) выполнено для $T^{11'}$. Аналогичные выкладки с другими компонентами показывают, что все они преобразуются по закону (3.13), т. е. T — действительно тензор второго ранга.

Указанное свойство преобразования нужно проверять каждый раз заново. Например, если изменить знак у компоненты T^{22} и считать ее равной $-xy$, то $T^{11'}\neq\sum_{kl}a_{1k}a_{1l}T^{kl}$, и поэтому таблица

$$\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

не определяет тензора, так как ее элементы не удовлетворяют требуемым условиям преобразования.

Сложение тензоров определим аналогично сложению векторов:

$$A+B=C, \tag{3.15}$$

если $A^{ij}+B^{ij}=C^{ij}$. При этом, конечно, тензоры A и B должны иметь один и тот же ранг и оба должны быть заданы в пространстве одинаковой размерности.

Обычно в тензорном анализе для упрощения суммирования уравнения (3.13) записывают в более компактной форме. Поскольку мы различаем контравариантный и ковариантный тензоры, условимся, что если два одинаковых индекса встретились в одной части какого-то выражения, причем один индекс верхний, а другой нижний, то по этим индексам производится суммирование. Поэтому второе выражение из (3.13) можно переписать в виде

$$B'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^{k}_{l}, \tag{3.16}$$

где подразумевается суммирование по k и l. Этим определено правило суммирования.

Для иллюстрации этого правила и в какой-то мере самой техники тензорного анализа покажем, что δ-символ Кронекера δ_{kl} в действительности представляет собой смешанный тензор второго ранга δ^{k}_{l}. Во-первых, необходимо установить, преобразуется ли δ^{k}_{l} в соответствии с (3.13), т. е. является ли он тензором. По определению символа Кронекера с учетом правила суммирования, имеем

$$\delta^{k}_{l} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}, \tag{3.17}$$

причем

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j}. \tag{3.18}$$

Однако x'_j и x'_i — независимые координаты, и, следовательно, производная в (3.18) равна

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \delta'^{i}_{j}, \tag{3.19}$$

поэтому

$$\delta'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \delta^{k}_{l},$$

т. е. δ^{k}_{l} — действительно смешанный тензор второго ранга. Символ Кронекера обладает еще одним интересным свойством: он имеет одинаковые компоненты во всех вращающихся системах координат, и поэтому его можно назвать изотропным. В разд. 3.4 мы встретимся с изотропным тензором третьего ранга.

Вообще говоря, A^{mn} не зависит от A^{nm}, поэтому важен порядок, в котором проставлены индексы тензора. Однако имеется несколько интересных специальных случаев; так, если

$$A^{mn}=A^{nm}, \tag{3.20}$$

то тензор называют *симметричным*; если же

$$A^{mn}=-A^{nm}, \tag{3.21}$$

то тензор *антисимметричен*. Очевидно, всякий тензор (второго ранга) можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$A^{mn}=\frac{1}{2}(A^{mn}+A^{nm})+\frac{1}{2}(A^{mn}-A^{nm}). \tag{3.22}$$

Первый член в круглых скобках в правой части — симметричный тензор, а второй — антисимметричный. Это свойство тензора распадаться на симметричную и антисимметричную части используется в теории упругости (разд. 3.5). Аналогичное разделение функции на симметричную и антисимметричную части играет исключительно важную роль в квантовой механике.

Упражнения

1. Доказать, что

$$A=\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y & xy \end{pmatrix}$$

являются тензорами, а

$$C=\begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \text{ и } D=\begin{pmatrix} xy & y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

нет.

2. В общей теории относительности четырехмерный тензор кривизны четвертого ранга R_{iklm} (Римана—Кристоффеля) удовлетворяет условиям симметрии $R_{iklm}=-R_{ikml}=-R_{kilm}$. Показать, что число независимых компонент при этом условии снижается с 256 до 36, а условие $R_{iklm}=R_{lmik}$ дополнительно уменьшает число независимых компонент до 21 (индексы принимают значения от 1 до 4). Наконец, показать, что если справедливо тождество $R_{iklm}+R_{ilmk}+R_{imkl}=0$, то число независимых компонент равно 20. *Замечание.* Последнее соотношение можно считать дополнительным условием только в том случае, когда все четыре индекса различны. Тогда число независимых компонент уменьшается на одну треть.

3. Разложить тензор $\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$ на симметричную и антисимметричную части.

4. Доказать, что если компоненты тензора произвольного ранга равны нулю в заданной системе координат, то они равны нулю и во всех остальных системах координат.

5. Компоненты тензора A равны соответствующим компонентам тензора B в некоторой заданной системе координат, т. е. $A^0_{ji} = B^0_{ij}$. Показать, что тензор A равен тензору B во всех системах координат, т. е. $A_{ij} = B_{ij}$.

3.2. СВЕРТЫВАНИЕ, ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Изучая векторы, мы определили скалярное произведение (разд. 1.3) как сумму произведений соответствующих компонент:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{A_i B_i\}. \tag{3.23}$$

Обобщением этого выражения в тензорном анализе служит операция *свертывания*. Два индекса, один ковариантный, а другой контравариантный, полагаются равными друг другу и затем (в соответствии с правилом суммирования) производится суммирование по этому повторяющемуся индексу. Например, свернем смешанный тензор второго ранга $B^{i'}_{j}$

$$B^{'i}_{j} \to B^{'i}_{i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} B^k_l = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B^k_l \tag{3.24}$$

с учетом уравнений (3.18) и (3.19)

$$B^{'i}_{i} = \delta^l_k B^k_l = B^k_k. \tag{3.25}$$

Таким образом, свернутый смешанный тензор второго ранга инвариантен и, следовательно, является скаляром. Это в точности соответствует тому, что мы получили в разд. 1.3 для скалярного произведения двух векторов и в разд. 1.7 для дивергенции вектора. Вообще, операция свертывания уменьшает ранг тензора на два.

Компоненты ковариантного и контравариантного векторов (тензоров первого ранга) можно умножить одна на другую, в результате чего получится член $a_i b^j$. Согласно определению (3.13), полученное произведение есть тензор второго ранга

$$a'_i b^{j'} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a_k \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} a_k b^l. \tag{3.26}$$

Производя свертывание, как и в уравнениях (3.24) и (3.25), получаем обычное скалярное произведение

$$a'_i b^{i'} = a_k b^k. \tag{3.27}$$

Приведенная операция называется *прямым произведением*. В случае двух векторов прямое произведение представляет собой тензор второго ранга. Именно в таком смысле можно понимать величину $\nabla\mathbf{E}$, которая не была определена в рамках векторного анализа. И вообще, прямое произведение двух тензоров есть тензор, ранг которого равен сумме рангов двух первоначальных тензоров, т. е.

$$A_j^i B^{kl} = C_j^{ikl}, \tag{3.28}$$

где C_j^{ikl} — тензор четвертого ранга.

До сих пор мы сохраняли различие между ковариантным и контравариантным преобразованиями, поскольку оно имеет место в неевклидовом пространстве и играет большую роль в общей теории относительности. В связи с этим мы отсылаем читателей, интересующихся этим вопросом, к большому числу превосходных специальных курсов, а сами ограничимся в оставшейся части этой главы декартовыми координатами. В дальнейшем мы не будем различать ковариантные и контравариантные тензоры, поэтому примем систему нижних индексов. Кроме того, будем пользоваться правилом суммирования и операцией свертывания.

Правило суммирования. Если индекс (буква, но не число) встречается дважды на одной стороне уравнения, то по этому индексу подразумевается суммирование.

Свертывание. Свертывание заключается в приравнивании двух различных индексов друг другу и в последующем применении правила суммирования.

Упражнения

1. Задан тензор n-го ранга $T_{\ldots i}$. Доказать, что $\partial T_{\ldots i}/\partial x_j$ — тензор $(n+1)$-го ранга (в декартовых координатах). *Замечание.* В любой другой системе координат коэффициенты a_{ij}, вообще говоря, зависят от координат, и производная тензора n-го ранга не есть тензор, за исключением специального случая $n=0$, когда производная (3.11) — ковариантный вектор, т. е. тензор первого ранга.

2. Задан тензор n-го ранга $T_{ijk\ldots}$, доказать, что $\sum \partial T_{ijk\ldots}/\partial x_j$ — тензор $(n-1)$-го ранга (в декартовых координатах).

3. Величина L — скалярная функция недекартовых переменных q_i, их производных по времени $\dot{q}_i$ и, кроме того, в явном виде зависит от времени t, т. е. $L'(q_i', \dot{q}_i', t) = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Показать, что

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}$ представляют собой компоненты вектора. *Замечание.* Считается, что q_j и $\dot{q}_j$ независимые переменные. Однако $\partial \dot{q}_j/\partial q_j \neq 0$.

4. Задана скалярная функция L, которая представляет собой лагранжиан $L=T-V$ частицы или системы частиц (разность кинетической и потенциальной энергии). Показать, что вектор $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}$ равен нулю в декартовой системе координат и, следовательно, он равен нулю и во всех других системах, подчиняющихся соотношению $q_i=a_{ij}x_j$. Поскольку предполагается, что q_i не являются декартовыми переменными, коэффициенты преобразования a_{ij} не будут направляющими косинусами.

3.3. ПРАВИЛО ЧАСТНОГО

Если A_i и B_j — векторы, то легко доказать (см. разд. 3.2), что A_iB_j — тензор второго ранга. Рассмотрим теперь ряд обратных зависимостей. Пусть заданы уравнения

$$K_iA_i=B, \tag{3.29а}$$

$$K_{ij}A_j=B_i, \tag{3.29б}$$

$$K_{ij}A_{jk}=B_{ik}, \tag{3.29в}$$

$$K_{ijkl}A_{ij}=B_{kl}, \tag{3.29г}$$

$$K_{ij}A_k=B_{ijk}. \tag{3.29д}$$

В каждом из этих уравнений $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — известные тензоры, ранг которых определен числом индексов и, кроме того, $\boldsymbol{A}$ произволен. В каждом случае $\boldsymbol{K}$ — неизвестная величина. Нам необходимо установить поведение величины $\boldsymbol{K}$ при ее преобразовании. Согласно правилу частного, если интересующее нас уравнение выполняется в любой вращающейся (повернутой) декартовой системе координат, то $\boldsymbol{K}$ — тензор указанного ранга. В качестве иллюстрации остановимся на уравнении (3.29б). Учитывая векторные свойства преобразования $\boldsymbol{B}$, можно записать, что в неподвижной системе координат

$$K'_{ij}A'_j=B'_i=a_{ik}B_k. \tag{3.30}$$

Уравнение (3.29б) справедливо в любой вращающейся

декартовой системе координат, поэтому

$$a_{ik}B_k = a_{ik}(K_{kl}A_l). \tag{3.31}$$

В последнем уравнении вновь запишем A во вращающейся системе координат* [см. уравнение (3.9)]:

$$K'_{ij}A'_j = a_{ik}K_{kl}a_{jl}A'_i, \tag{3.32}$$

тогда

$$(K'_{ij} - a_{ik}a_{jl}K_{kl})\,A'_j = 0. \tag{3.33}$$

Последнее равенство выполняется при любом i и в любой вращающейся системе. Поскольку A_j произвольно **, то

$$K'_{ij} = a_{ik}a_{jl}K_{kl}, \tag{3.34}$$

что совпадает с определением тензора второго ранга.

Аналогично можно рассмотреть другие уравнения (3.29) и получить соответствующие варианты выражения (3.34). В заключение следует предостеречь от неправильного применения правила частного. Оно может не выполняться, если $B = 0$. В этом случае свойства преобразования не определены.

3.4. ПСЕВДОТЕНЗОРЫ

До сих пор все преобразования системы координат ограничивались чистым вращением. Рассмотрим теперь операцию *отражения*, или *инверсии*. Если заданы коэффициенты преобразования $a_{ij} = -\delta_{ij}$, то из уравнения (3.7)

$$x_i = -x'_i. \tag{3.35}$$

Полученная зависимость характеризует инверсию. Существенно, что это преобразование заменяет первоначальную правую систему координат на левую. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ с компонентами (x_1, x_2, x_3) трансформируется в $\mathbf{r} = (x'_1, x'_2, x'_3) =$

* Существенно обратить внимание на порядок индексов направляющих косинусов a_{jl} в этом обратном преобразовании

$$A_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} A'_j = \sum_j a_{jl}A'_j.$$

** Можно, например, положить $A_1 = 1$, а $A'_m = 0$ для $m \neq 1$. Из этого условия сразу получаем уравнение $K'_{11} = a_{ik}\,a_{1l}\,K_{kl}$. Остальные компоненты уравнения (3.34) получаются при другом специальном выборе A'_j.

$= (-x_1, -x_2, -x_3)$. Этот новый вектор имеет отрицательные компоненты относительно новых преобразованных осей. Как видно из рис. 3.1, одновременное изменение знаков как у осей, так и у компонент не меняет вектора (направление в пространстве). Радиус-вектор $\mathbf{r}$ и все другие

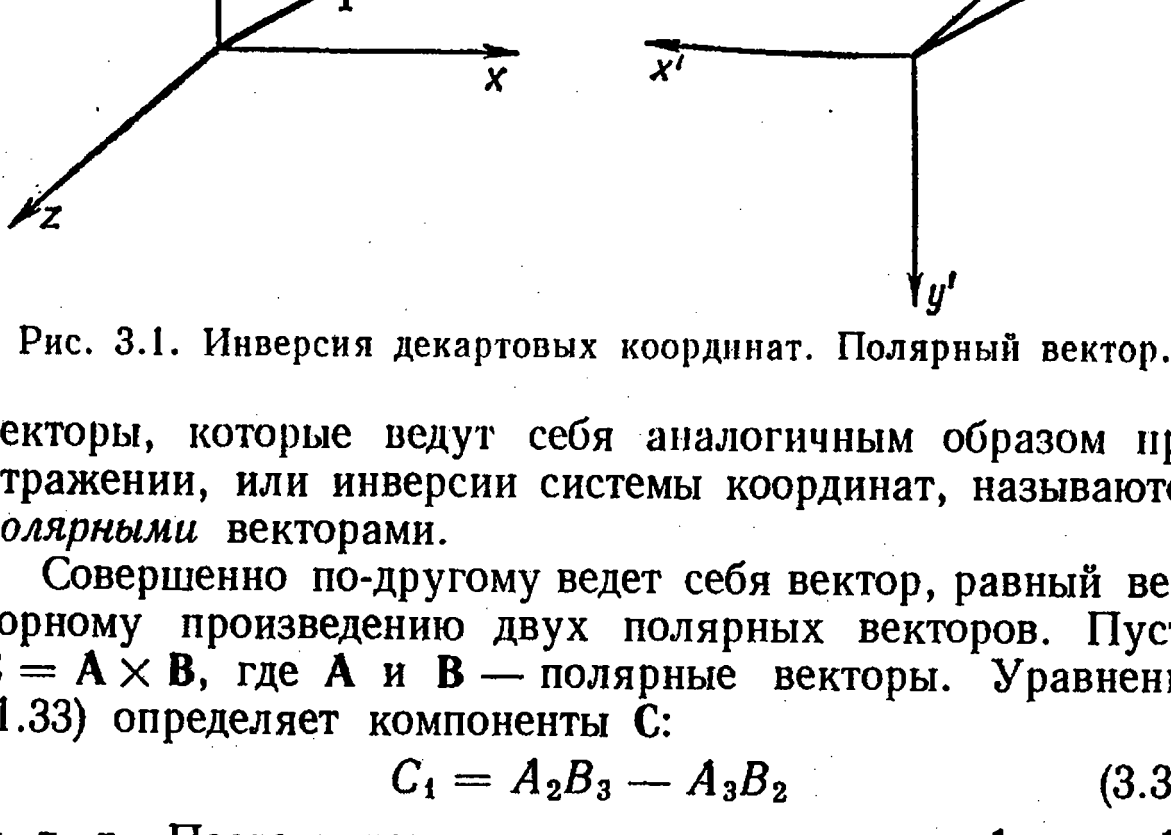


Рис. 3.1. Инверсия декартовых координат. Полярный вектор.

векторы, которые ведут себя аналогичным образом при отражении, или инверсии системы координат, называются *полярными* векторами.

Совершенно по-другому ведет себя вектор, равный векторному произведению двух полярных векторов. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — полярные векторы. Уравнение (1.33) определяет компоненты $\mathbf{C}$:

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2 \tag{3.36}$$

и т. д. После инверсии системы координат $A_i \to -A_i$, $B_j \to -B_j$, но $C_k \to -C_k$; т. е. $\mathbf{C}$ при инверсии ведет себя не так, как полярный вектор. Чтобы различать их, мы назовем вектор $\mathbf{C}$ *псевдовектором* или *аксиальным* вектором (рис. 3.2). Аксиальные (осевые) векторы часто используются потому, что они возникают при описании процессов, связанных с вращением. Например, угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$, момент количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$, момент вращения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$, магнитное поле $\mathbf{B}$, для которого $d\mathbf{B}/dt = -\nabla \times \mathbf{E}$. Как видно, аксиальные векторы часто используются в физике, хотя это обычно не подчеркивается. В правой системе координат вектор $\mathbf{C}$ характеризует вращение, которое связывают с правилом правой руки (см. разд. 1.4). В левой, инвертированной системе, вращение изменяется на левое. Это показано круглыми стрелками на рис. 3.2.

Вообще говоря, псевдовекторы и псевдотензоры преобразуются по формулам

$$C_i' = |a| a_{ij} C_j, \quad A_{ij}' = |a| a_{ik} a_{jl} A_{kl}, \tag{3.37}$$

где $|a|$ — есть определитель, составленный из элементов таблицы для коэффициентов a_{mn}. В случае инверсии определитель имеет вид

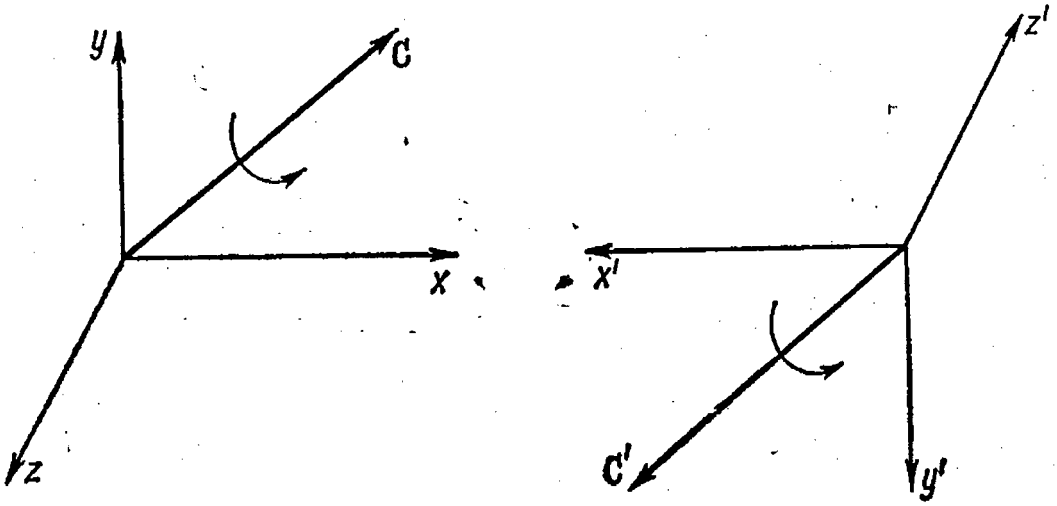


Рис. 3.2. Инверсия декартовых координат. Аксиальный вектор.

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \tag{3.38}$$

При инверсии одной лишь оси x

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \tag{3.39}$$

и снова определитель $|a| = -1$. С другой стороны, для любого чистого вращения определитель $|a|$ всегда равен $+1$. На этом мы подробнее остановимся в разд. 4.3. Величины, которые преобразуются в соответствии с (3.37), часто называют *тензорными* плотностями. Они ведут себя как обычные тензоры при вращениях, однако при инверсии координат возникает дополнительный отрицательный знак перед определителем $|a|$, что является единственной отличительной особенностью.

В гл. 1 мы видели, что смешанное произведение $S = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ ведет себя подобно скаляру (при вращениях).

Однако при инверсии координат (3.35) $S \to -S$, т. е. в действительности S — псевдоскаляр. Это свойство смешанного произведения затемняется его геометрической трактовкой как объема параллелепипеда. В самом деле, если все три параметра объема — длину, ширину и высоту — заменить на отрицательные, то произведение этих трех величин будет отрицательно. Псевдоскалярная природа элемента объема раскрывается еще в одном интересном примере. В уравнении Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho/\varepsilon_0$ будем считать ∇ и $\mathbf{E}$ полярными векторами, а ε_0 — скаляром. Тогда объемная плотность заряда ρ должна быть скалярной величиной, однако только что было показано, что объем является псевдоскаляром. Следовательно, электрический заряд также псевдоскаляр.

Для дальнейшего удобно ввести трехмерный символ Леви — Чивита ε_{ijk}, определенный как

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ &\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\ &\text{все остальные } \varepsilon_{ijk} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

Пусть псевдотензор третьего ранга δ_{ijk} в некоторой системе координат равен ε_{ijk}. Тогда, по определению псевдотензора,

$$\delta'_{ijk} = |a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr}. \tag{3.41}$$

Раскрыв определитель и показав, что $\delta'_{123} = |a|^2 = 1$, из (3.41) получим

$$a_{1p} a_{2q} a_{3r} \varepsilon_{pqr} = |a|. \tag{3.42}$$

Рассмотрев другие возможности, найдем, что для вращений и инверсий

$$\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}. \tag{3.43}$$

Отсюда следует, что ε_{ijk} — псевдотензор. Более того, очевидно, он должен быть изотропным псевдотензором с одинаковыми компонентами в любой вращающейся декартовой системе координат.

Любому *антисимметричному* тензору второго ранга C_{ij} (в трехмерном пространстве) можно сопоставить *дуальный* псевдовектор C_i, определенный как

$$C_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} C_{jk}. \tag{3.44}$$

Антисимметричный тензор C_{jk} задан таблицей

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{31} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Двойное свертывание (псевдо-) тензора пятого ранга $\varepsilon_{ijk}C_{mn}$ показывает, что при вращениях системы координат величина C_i должна вести себя как вектор, но наличие псевдотензора ε_{ijk} приводит к тому, что в действительности C_i является псевдовектором. Компоненты **C** заданы как

$$(C_1, C_2, C_3) = (C_{23}, C_{31}, C_{12}). \tag{3.46}$$

Заметим, что циклический порядок индексов возник из-за цикличности компонент ε_{ijk}. Эта дуальность, зафиксированная в (3.46), означает, что трехмерное векторное произведение простым буквенным обозначением можно записать либо в виде псевдовектора, либо в виде антисимметричного тензора второго ранга.

Если задать три (полярных) вектора **A**, **B** и **C**, то можно определить

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_j & B_j & C_j \\ A_k & B_k & C_k \end{vmatrix} = A_iB_jC_k - A_iB_kC_j + \ldots \tag{3.47}$$

Очевидно, в соответствии с содержанием разд. 3.1 каждый член $A_pB_qC_r$ должен быть тензором третьего ранга, а совокупность всех членов определяет тензор третьего ранга V_{ijk}. Поскольку определитель (3.47) полностью антисимметричен, то при перестановке любых двух индексов, или, другими словами, при перестановке любых двух строк произойдет изменение знака. Очевидно, дуальная величина

$$V = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}V_{ijk} \tag{3.48}$$

есть псевдоскаляр. Раскрывая в явном виде определитель

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \tag{3.49}$$

легко убедиться, что это — смешанное произведение.

Для доказательства ковариантности уравнений Максвелла необходимо распространить данный результат на четырехмерное пространство и, в частности, показать, что четырехмерный элемент объема $dx_1dx_2dx_3dx_4$ — псевдоскаляр.

Введем четырехмерный символ Леви — Чивита δ_{ijkl}, аналог трехмерного ε_{ijk}. По определению, δ_{ijkl} полностью антисимметричен по всем четырем индексам. Если порядок $(ijkl)$ получен четным числом перестановок из совокупности чисел (1, 2, 3, 4), то δ_{ijkl} полагается равным $+1$, если нечетным, то $\delta_{ijkl} = -1$. Аналогично тому, как это было проделано для ε_{ijk}, можно показать, что δ_{ijkl} — псевдотензор четвертого ранга.

Введя тензор четвертого ранга

$$H_{ijkl} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix}, \tag{3.50}$$

элементами которого служат компоненты полярных векторов **A**, **B**, **C** и **D**, можно определить дуальную величину

$$H = \frac{1}{4!}\delta_{ijkl}H_{ijkl}. \tag{3.51}$$

Здесь подразумевается четырехкратное суммирование, которое снижает ранг тензора до нуля. Поскольку δ_{ijkl} имеет псевдотензорную природу, H тоже псевдоскаляр. Предположим теперь, что **A**, **B**, **C** и **D** имеют бесконечно малую протяженность вдоль четырех координатных осей (пространство Минковского)

$$\mathbf{A} = (dx_1, 0, 0, 0),\ \mathbf{B} = (0, dx_2, 0, 0), \ldots, \tag{3.52}$$

а четырехмерный элемент объема

$$H = dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4, \tag{3.53}$$

как мы теперь видим, является псевдоскаляром. Это можно было предсказать заранее, имея в виду результаты специальной теории относительности. Лоренцево сокращение $dx_1dx_2dx_3$ в точности компенсируется удлинением временного интервала dx_4.

Мы перешли к четырехмерному пространству простым математическим обобщением трехмерного пространства.

Аналогично можно рассмотреть 5-, 6- и N-мерные пространства. В физике четырехмерное пространство обычно называют *пространством Минковского*, причем

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict), \tag{3.54}$$

где t — время. Указанное объединение пространства и времени проводится в специальной теории относительности. Преобразования, которые в специальной теории относительности описывают вращение в четырехмерном пространстве, называются *преобразованием Лоренца*.

В некоторых приложениях, особенно при квантовомеханическом рассмотрении момента количества движения, не совсем удобно пользоваться тензорами в декартовой системе координат. В математическом смысле общий тензор второго ранга A_{ij} можно разложить на тензоры более низкого ранга. Действительно, мы уже прибегали к такому приему. В соответствии с уравнением (3.25)

$$A = A_{ii} \tag{3.55}$$

есть скаляр — *след* тензора A_{ij}. Антисимметричная часть,

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}), \tag{3.56}$$

как было показано, эквивалентна псевдовектору, т. е.

$$B_{ij} = C_k \text{ (циклическая перестановка } i, j, k). \tag{3.57}$$

Вычитая скаляр A и вектор C_k из первоначального тензора, получаем неприводимый симметричный тензор второго ранга S_{ij}, который имеет пять независимых компонент с нулевым следом:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3} A\delta_{ij}. \tag{3.58}$$

После этого первоначальный тензор, заданный в декартовых координатах, можно окончательно записать в виде

$$A_{ij} = \frac{1}{3} A\delta_{ij} + C_k + S_{ij}. \tag{3.59}$$

Три величины A, C_k и S_{ij} образуют сферические тензоры нулевого, первого и второго рангов соответственно и преобразуются подобно сферическим функциям Y_L^M (гл. 12) с $L = 0$, 1 и 2.

Упражнения

1. Задана антисимметричная таблица, элементы которой (C_1, C_2, C_3) образуют псевдовектор,

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что соотношение $C_i = (1/2!)\,\varepsilon_{ijk}C_{jk}$ выполняется во всех системах координат, доказать, что C_{jk} — тензор (здесь в другом виде сформулирована теорема частного).

2. Оператор $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ можно записать в виде суммы $\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, в которой $x_4 = ict$. Этот четырехмерный лапласиан, обычно называемый даламбертианом, обозначают символом $\Box^2$. Показать, что $\Box^2$ — *скалярный* оператор.

3. Показать, что $\delta_{ii} = 3$, $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$, $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

4. Показать, что $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$.

5. Проверить, что каждый из следующих тензоров четвертого ранга: $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$, $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ изотропен, т. е. форма каждого из них не зависит от вращения системы координат.

6. Применив инверсию, доказать, что изотропный тензор в действительности имеет псевдотензорную природу.

3.5. АФФИНОРЫ *

Аффинор введен с целью распространить правила обычного векторного анализа на тензоры второго ранга. Возьмем два вектора $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ и образуем комбинацию $\mathbf{ij}$. Эта комбинация и называется аффинором. Умножение (скалярное или векторное) слева заключается в перемножении левого множителя на первый множитель из пары, записанной справа.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{ij} = [(\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)\cdot\mathbf{i}]\,\mathbf{j} = A_x\mathbf{j}. \qquad (3.60)$$

Умножение справа предполагает обратный порядок, т. е.

$$\mathbf{ij}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{i}\,[\mathbf{j}\cdot(\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)]\,\mathbf{j} = \mathbf{i}A_y. \qquad (3.61)$$

Отсюда видно, что, вообще говоря, операция умножения не коммутативна. Нужно четко представлять, что $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, образующие аффинор $\mathbf{ij}$, не взаимодействуют друг с другом.

---

* Иногда, особенно в старой литературе, аффиноры называют диадами.— *Прим. перев.*

Если они имеют скалярные коэффициенты, то эти коэффициенты перемножаются, сами же единичные векторы не образуют ни скалярного, ни векторного произведения. Итак, порядок имеет существенное значение, т. е. $\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$. При изучении матриц (гл. 4) и комплексных чисел (гл. 6) мы вновь встретимся с такой же зависимостью. Комплексное число фактически представляет собой упорядоченную пару вещественных чисел.

Теперь образуем комбинацию двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} T = \mathbf{AB} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z) = \\ = \mathbf{ii}A_xB_x + \mathbf{ij}A_xB_y + \mathbf{ik}A_xB_z + \mathbf{ji}A_yB_x + \\ + \mathbf{jj}A_yB_y + \mathbf{jk}A_yB_z + \mathbf{ki}A_zB_x + \mathbf{kj}A_zB_y + \mathbf{kk}A_zB_z. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Величина $T = AB$ представляет собой *аффинор*, образованный, как показано выше, из комбинации аффиноров. Было установлено (см. разд. 3.2), что произведение двух векторов $\mathbf{AB}$ — тензор второго ранга. Следовательно, аффиноры тоже являются тензорами второго ранга, записанными в форме, которая подчеркивает их векторное происхождение, но, с другой стороны, такая форма записи несколько затемняет тензорные свойства преобразования.

Уже отмечалось, что операция умножения вектора и и аффинора не коммутативна, однако существует один важный частный случай, когда эта операция обладает свойством коммутативности. Возьмем аффинор $\mathbf{AB}$ и положим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{a}, \quad (3.63)$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Если $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, то $A_x\mathbf{B} = \mathbf{A}B_x$, т. е.

$$\mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{k}A_xB_z = \mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{j}A_yB_x + \mathbf{k}A_zB_x. \quad (3.64)$$

Приравнивая отдельные компоненты друг другу, получаем

$$A_xB_x = A_xB_x, \; A_xB_y = A_yB_x, \; A_xB_z = A_zB_x, \quad (3.65)$$

т. е. $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, где c — постоянная. Иначе, если умножение на произвольный вектор коммутативно, то аффинор должен быть симметричным. И наоборот, при симметричном аффиноре операция умножения коммутативна.

Одно из наиболее важных свойств симметричного аффинора заключается в том, что специальным выбором координатных осей его всегда можно представить в нормальной

или диагональной форме

$$\boldsymbol{T} \rightarrow \mathbf{ii}T_{xx} + \mathbf{jj}T_{yy} + \mathbf{kk}T_{zz}, \tag{3.66}$$

поскольку все недиагональные коэффициенты равны нулю. Преобразование координат, которое приводит аффинор к диагональной форме, называется приведением к главным осям (см. разд. 4.5).

Интересно и полезно дать геометрическую трактовку симметричного аффинора. Для простоты предположим, что симметричный аффинор $\boldsymbol{T}$ задан в диагональной форме. Тогда с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$ запишем уравнение

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{r} = 1, \tag{3.67}$$

которое накладывает ограничение на абсолютную величину $\mathbf{r}$ в зависимости от его ориентации. Раскроем уравнение (3.67):

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot (\mathbf{ii}T_{xx} + \mathbf{jj}T_{yy} + \mathbf{kk}T_{zz}) \times \\ \times (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = 1, \\ x^2T_{xx} + y^2T_{yy} + z^2T_{zz} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

Последнее равенство определяет эллипсоид с полуосями

$$a = T_{xx}^{-1/2}, \quad b = T_{yy}^{-1/2}, \quad c = T_{zz}^{-1/2}. \tag{3.69}$$

Следовательно, диагонализация аффинора соответствует ориентированию аффинорного эллипсоида таким образом, чтобы его оси совпали с осями координат.

Если задан антисимметричный аффинор $\boldsymbol{U}$, т. е. $U_{ii} = 0$, $U_{ij} = -U_{ji}$ $(i \neq j;\ i, j = x, y, z)$, то для любого вектора $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{U} = -\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{a}. \tag{3.70}$$

Иначе говоря, умножение вектора на антисимметричный аффинор подчиняется правилу антикоммутации (см. упр. 1).

Формализм аффиноров гораздо менее удобен по сравнению с обычным тензорным анализом. Представление с помощью аффиноров тензоров третьего и более высокого ранга крайне затруднительно, поэтому мы вновь возвратимся к тензорному анализу и в дальнейшем не будем делать никаких ссылок на аффиноры.

Упражнения

1. Даны антисимметричный аффинор U и вектор $\mathbf{V}$. Доказать, что $\mathbf{V}\cdot U=-U\cdot\mathbf{V}$, $\mathbf{V}\cdot U\cdot\mathbf{V}=0$.

2. Пусть U — симметричный аффинор, $\mathbf{a}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Показать, что конец радиуса-вектора скользит по поверхности эллипсоида, когда $\mathbf{r}=U\cdot\mathbf{a}$.

3. Двумерные векторы $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y$ и $\mathbf{t}=-\mathbf{i}y+\mathbf{j}x$ могут быть связаны уравнением $\mathbf{r}U=\mathbf{t}$. Определить тензор U, используя для этой цели обычное тензорное представление. Найти U и дать его определение с точки зрения аффиноров.

4. В теории взаимодействия молекул используют аффинор, образованный из единичных векторов относительно расстояния между молекулами, эти векторы определяются как $\mathbf{e}_{12}=\dfrac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$. Показать, что для данного $U=I-3\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12}$. Здесь I — единичный аффинор, т. е. $I=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}$.

5. Показать, что $I=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}$ есть единичный аффинор в том смысле, что для любого вектора $\mathbf{V}$

$$I\cdot\mathbf{V}=\mathbf{V}.$$

3.6. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Когда на упругое твердое тело действует внешняя сила оно либо деформируется, либо внутри него возникают некоторые напряжения. Наше рассмотрение теории упругости с применением тензорного анализа естественным образом распадается на три этапа: 1) описание деформации упругого тела; 2) описание сил, которые вызывают (обычно эти силы называют напряжениями) деформацию; 3) запись обобщенного закона Гука в тензорной форме.

Деформация упругого тела. Деформацию упругого тела можно охарактеризовать изменением в расположении отдельных его частей относительно друг друга, когда на тело действуют некоторые внешние силы. Рассмотрим точку P_0 (рис. 3.3), находящуюся на расстоянии $\mathbf{r}$ от начала координат, и вторую точку Q_0, которая находится на расстоянии $\delta\mathbf{x}$ от P_0. Обозначим δx_i координаты точки Q_0 *относительно* P_0 в недеформированном твердом теле; при наличии деформации, когда точка P_0 сместится на расстояние $\mathbf{u}$ в точку P_1, а точка Q_0 — на расстояние $\mathbf{v}$ в точку Q_1, координатами точки Q_1 относительно P_1 будут $\delta y_i=\delta x_i+\delta u_i$. Следовательно, изменение в *относительном* расположении

точек P и Q равно δu_i. Пренебрегая дифференциалами второго и более высокого порядков, получаем

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{x}) - u(\mathbf{r}) = (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}, \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\delta x_k. \qquad (3.71)$$

Поскольку u_i — компонента вектора, производная du_i/dx_k представляет собой элемент тензора второго ранга $\nabla \mathbf{u}$.

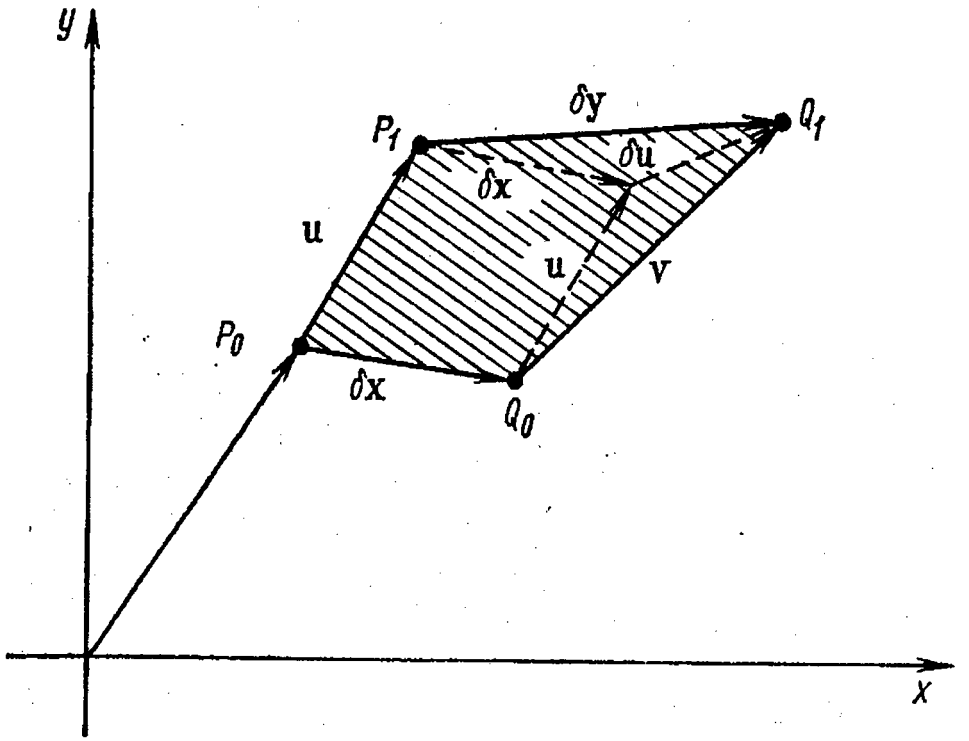


Рис. 3.3. Упругая деформация.

Разложим этот тензор на симметричную и антисимметричную части

$$\delta u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k = \\ = \eta_{ik}\delta x_k - \xi_{ik}\delta x_k. \qquad (3.72)$$

Антисимметричную часть ξ_{ik} можно отождествить с чистым вращением.

В соответствии с разд. 3.4 установим связь аксиального вектора $\boldsymbol{\xi}$ с ξ_{ij}:

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}. \qquad (3.73)$$

Смещение $\delta \mathbf{u}$, соответствующее антисимметричной части $-\xi_{ik}\,dx_k$, равно

$$\delta \mathbf{u} = -\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta \mathbf{x}. \qquad (3.74)$$

Это вращение вокруг мгновенной оси, которая проходит через точку P_0 в направлении вектора $\nabla \times \mathbf{u}$, а угол вращения, измеренный в радианах, равен $|\nabla \times \mathbf{u}|/2$. Оставшаяся симметричная часть η_{ij} называется тензором чистой

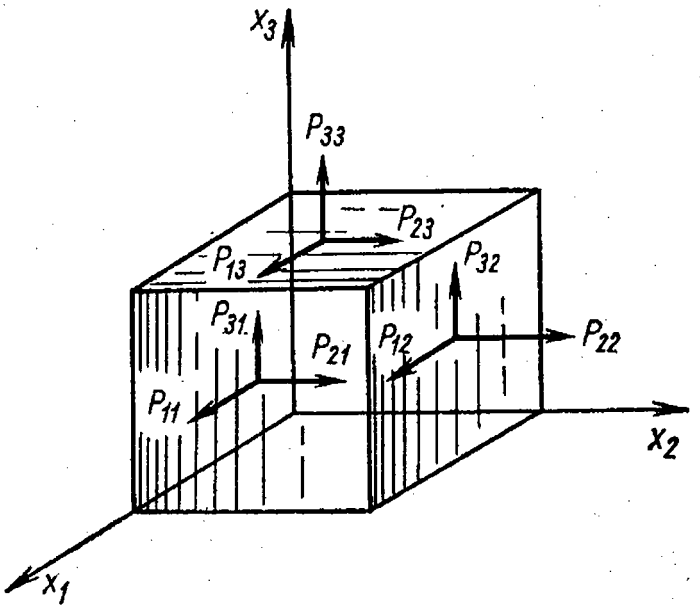


Рис. 3.4. Напряжения.

деформации. Диагональные элементы тензора η_{ik} характеризуют удлинение, а недиагональные элементы — деформацию сдвига.

Если точка Q_0 сдвинута относительно P_0 только в направлении оси x, то $\delta\mathbf{x} = \mathbf{i}\delta x_1$. Тогда из уравнения (3.72)

$$\delta u_1 = \eta_{11}\delta x_1, \quad \delta u_2 = \eta_{21}\delta x_1, \quad \delta u_3 = \eta_{31}\delta x_1. \tag{3.75}$$

Отсюда при наличии деформации смещение окажется равным

$$\left.\begin{aligned} \delta y_1 &= \delta x_1 + \delta u_1 = (1 + \eta_{11})\,\delta x_1, \\ \delta y_2 &= \quad\ \delta u_2 = \quad\ \eta_{21}\delta x_1, \\ \delta y_3 &= \quad\ \delta u_3 = \quad\ \eta_{31}\delta x_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

При заданном начальном расположении, $\delta\mathbf{x} = \mathbf{i}\delta x_1$, диагональный элемент η_{11} вносит вклад в первую компоненту $\delta\mathbf{y}$ (удлинение), а η_{21} и η_{31} соответственно в δy_2 и δy_3, которые характеризуют сдвиг.

Напряжение. Напряжения, или силы, необходимо определять с особой тщательностью. Обратимся к рис. 3.4, на котором показан элемент объема, и обозначим символом

$P_{ij}dA$ силу, действующую в направлении x_i на площадку dA, перпендикулярную к направлению x_j. P_{ij} имеет смысл давления (сила/площадь). Необходимо помнить, что, как только речь идет о силе, величина P_{ij} должна умножаться на соответствующий элемент поверхности. Эти силы, действующие на малый параллелепипед, показаны на рис. 3.4. Чтобы не загромождать рисунок, на нем представлены

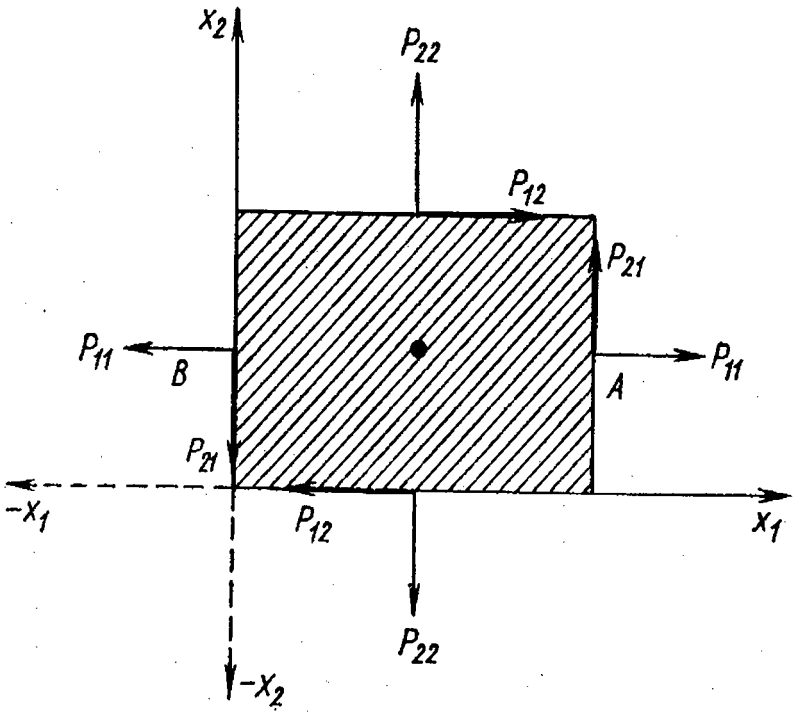


Рис. 3.5. Однородные напряжения. Противоположное направление сил.

только те силы, которые действуют на три ближайшие фронтальные грани. Если предположить, что напряжения изотропны, то силы, приложенные к противоположным поверхностям, будут иметь обратные знаки (рис. 3.5). Заметим, что P_{21} характеризует сдвиг грани в направлении x_2. При изотропных напряжениях на *внешнюю среду* со стороны поверхности действует та же самая сила P_{21}. В свою очередь сила, приложенная к поверхности B, направлена в отрицательном направлении оси x_2 и также равна P_{21}. В основе этих выводов лежат три положения, которые нужно выделить отдельно: 1) напряжения изотропно передаются в твердом теле; 2) существует статическое равновесие; 3) отсутствуют внутренние силы (например, гравитационные) и вращающие моменты (внешнее магнитное поле, действующее на магнитные домены).

Эти допущения позволяют наложить дальнейшие ограничения на P_{ij}. Рассмотрим вращающий момент, который вызывает вращение параллелепипеда, изображенного на рис. 3.4 и 3.6, вокруг оси x_3. Нормальные силы P_{ij} не создают момента. Силы сдвига P_{31} и P_{32} также не создают момента, так как имеют нулевое плечо. Силы сдвига P_{13} и P_{23} уравновешены равными, но противоположно направленными силами на нижней грани ($x_3 = 0$). Остались два вращающих момента

$$P_{21}\,(dx_2dx_3)\,dx_1,$$
$$P_{12}\,(dx_1dx_3)\,dx_2, \quad (3.77)$$

которые, если вращения нет, надо приравнять друг другу:

$$P_{21}dx_1dx_2dx_3 = P_{12}dx_1dx_2dx_3, \quad (3.78)$$

т. е. $P_{21} = P_{12}$.

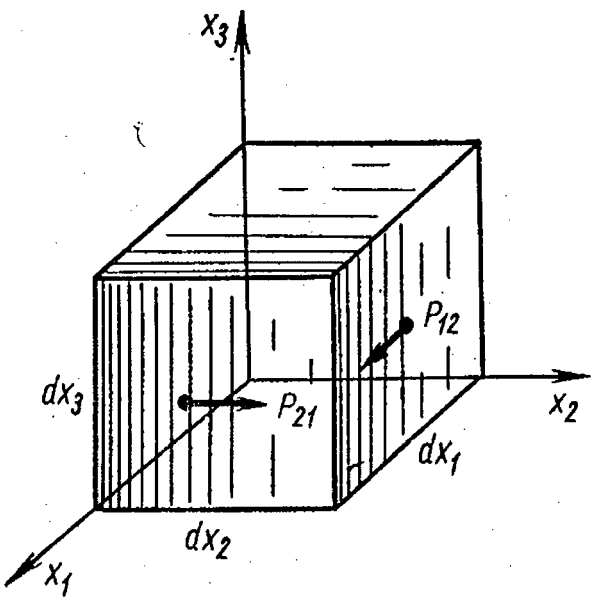


Рис. 3.6. Однородные напряжения. Равновесие крутящих моментов.

Проведя аналогичные рассуждения в случае отсутствия вращения вокруг осей x_1 и x_2, получим общее соотношение

$$P_{ij} = P_{ji}, \quad (3.79)$$

которое подчеркивает равенство абсолютной величины, а не направления, заданного первым индексом.

Таким образом, таблица элементов, описывающих силы (давление) P_{ij} симметрична. Теперь мы видим, что этой таблицей определен тензор. Образуем далее бесконечно малый тетраэдр с наклонной гранью, площадь которой равна dA и перпендикулярна к направлению x_j', как показано на рис. 3.7. Силы, приложенные к наклонной грани, равны $P_{ij}'\,dA$. Силы, действующие на остальные грани $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, равны соответственно $P_{m1}\,(a_{j1}dA)$, $P_{m2}\,(a_{j2}dA)$, $P_{m3}\,(a_{j3}dA)$; $a_{jk}dA$ — площадь грани $x_k = 0$, которая задана как проекция наклонной грани dA на плоскость $x_k = 0$. Величина a_{jk} представляет собой обычный направляющий косинус, т. е. косинус угла между осями x_j' и x_k.

Сила $P_{m1}a_{j1}dA$ направлена вдоль x_m. Ее проекция на направление x_i' равна $a_{im}a_{j1}P_{m1}dA$ (суммирование не производится). Если затем просуммировать по индексу m, то это выражение определит сумму x_i'-компонент трех сил, приложенных к задней грани $x_1 = 0$ в x_i'-направлении. Наконец, просуммировав по всем трем граням, получим полную

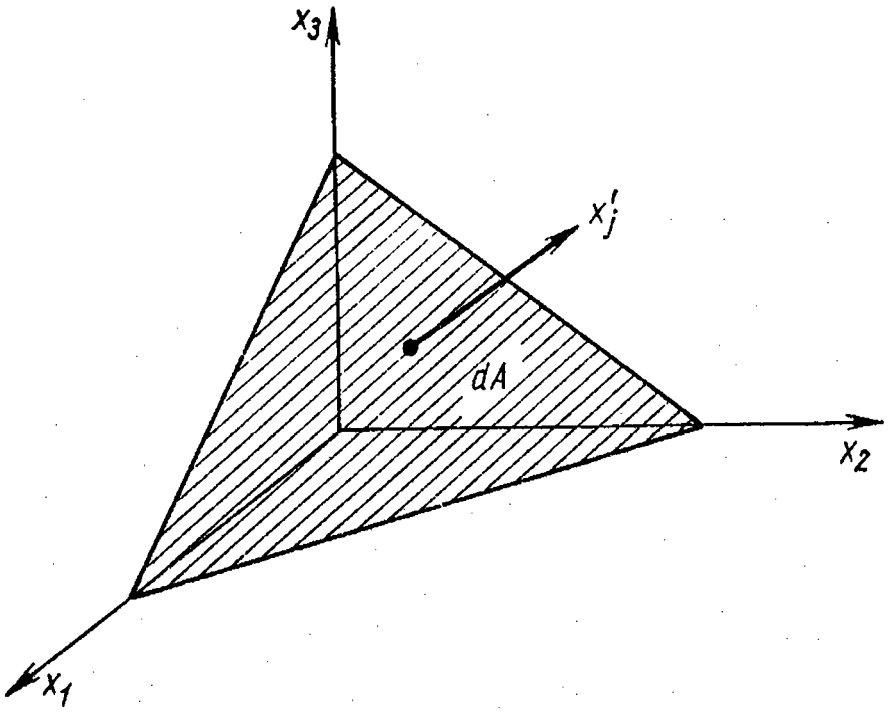


Рис. 3.7. Бесконечно малый тетраэдр. Равновесие сил.

силу, действующую вдоль x_i', при условии статического равновесия:

$$a_{im}a_{jk}P_{mk}\,dA = P_{ij}'\,dA. \tag{3.80}$$

Поскольку элемент площади dA выбран произвольно, можно перейти к соотношению

$$P_{ij}' = a_{im}a_{jk}P_{mk}, \tag{3.81}$$

которое в соответствии с определением показывает, что P_{mk} — тензор.

Закон Гука. Во-первых, будем предполагать, что упругое твердое тело изотропно. В дальнейшем мы возвратимся к общему случаю анизотропии. Рассмотрим однородный стержень, параллельный оси x_1^*. Если растягивающая сила

---

* Такой специальный выбор в конечном итоге приведет нас к системе главных осей (гл. 4), характерная особенность этой системы заключается в исчезновении деформаций сдвига.

P_{11} невелика то

$$E\eta_{11} = P_{11},\ E\eta_{22} = -\sigma P_{11},\ E\eta_{33} = -\sigma P_{11}, \quad (3.82)$$

где E — модуль Юнга; σ — отношение Пуассона. Добавление дополнительных малых P_{22} и P_{33} приведет первое уравнение (3.82) к виду

$$E\eta_{11} = P_{11} - \sigma P_{22} - \sigma P_{33}. \quad (3.83)$$

Здесь мы ограничились малыми силами и деформациями, поэтому эти величины будут связаны линейной зависимостью. Перепишем уравнение (3.83)

$$E\eta_{11} = (1+\sigma)\, P_{11} - \sigma\,(P_{11} + P_{22} + P_{33}). \quad (3.84)$$

Аналогичные выражения получаются для $E\eta_{22}$ и $E\eta_{33}$.

Как было показано, η_{ij} и P_{ij} являются тензорами. Вследствие симметрии выбранной системы недиагональные элементы этих тензоров равны нулю. Для обобщения уравнения (3.84) на произвольно ориентированную декартову систему координат мы произведем вращение системы

$$\eta'_{ij} = a_{ik}a_{jh}\eta_{hk},\ P'_{ij} = a_{ik}a_{jh}P_{hk}. \quad (3.85)$$

Если умножить уравнение (3.84) на $a_{i1}a_{j1}$, а уравнения для $E\eta_{22}$ и $E\eta_{33}$ соответственно на $a_{i2}a_{j2}$ и $a_{i3}a_{j3}$ и сложить полученные уравнения, то

$$Ea_{ik}a_{jk}\eta_{kk} = (1+\sigma)\, a_{ik}a_{jk}P_{kk} - \sigma\,(P_{nn})\, a_{ik}a_{jk}. \quad (3.86)$$

Используем (3.85) и (3.18), тогда

$$E\eta'_{ij} = (1+\sigma)\, P'_{ij} - \sigma\,(P'_{mm})\,\delta_{ij}, \quad (3.87)$$

где тензор

$$(P'_{mm}) = (P_{nn}) = P_{11} + P_{22} + P_{33} \quad (3.88)$$

представляет собой свернутый (и, следовательно, инвариантный) тензор P_{ij}.

Часто бывает удобнее разрешить последнее уравнение относительно P_{ij}. Это можно сделать, положив $i = j$ и произведя свертывание:

$$E\eta_{jj} = (1+\sigma)\, P_{jj} - 3\sigma P_{jj} = (1-2\sigma)\, P_{jj}. \quad (3.89)$$

Подставим обратно в уравнение (3.87):

$$(1+\sigma)\, P_{ij} = E\eta_{ij} + \frac{E\sigma}{1-2\sigma}\,\eta_{mm}\delta_{ij} \quad (3.90)$$

или

$$P_{ij} = 2\mu\eta_{ij} + \lambda\eta_{mm}\delta_{ij}, \tag{3.91}$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе — имеют вид

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \tag{3.92}$$

Постоянную μ можно связать с модулем сдвига. Рассмотрим параллелепипед (рис. 3.8), жестко закрепленный на плоскости $x_3 = 0$; на этот параллелепипед действует тангенциальная сила P_{12}. Смещение равно $(\eta x_2, 0, 0)$. Переходя

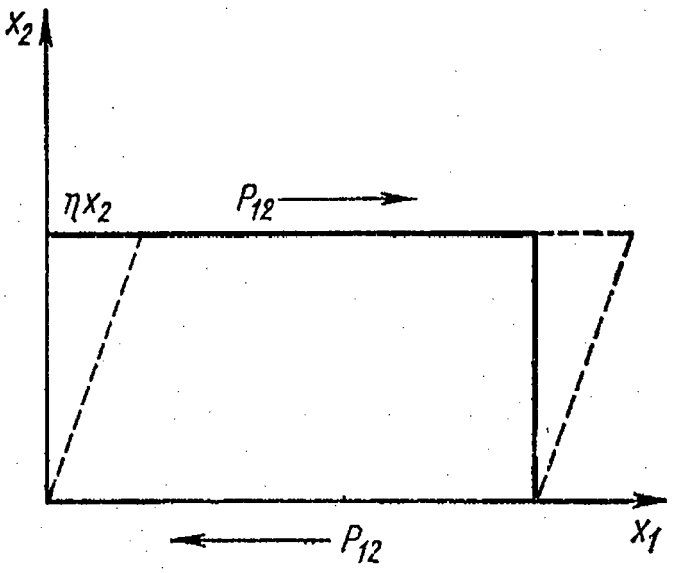


Рис. 3.8. Напряжение и деформация сдвига.

на тензорный язык, запишем, что все η_{ij}, за исключением $\eta_{12} = \eta_{21} = \eta/2$, равны нулю. Тогда из (3.91) получим

$$P_{12} = 2\mu\frac{1}{2}\eta = \mu\eta, \tag{3.93}$$

откуда видно, что μ — отношение напряжения сдвига к модулю сдвига η.

Если деформация сферически симметрична, как при гидростатическом сжатии, то

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33}, \quad \eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23} = 0. \tag{3.94}$$

В этом случае

$$P_{11} = 3\lambda\eta_{11} + 2\mu\eta_{11} = 3k\eta_{11}, \tag{3.95}$$

где

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{3.96}$$

Поскольку в первом приближении $3\eta_{11}$ представляет собой относительное изменение объема, постоянную k можно отождествить с коэффициентом объемного расширения.

Обобщение на случай анизотропных свойств твердого тела получается с помощью обобщенного закона Гука и все той же линейной зависимости между напряжением и деформацией

$$P_{ij} = c_{ijkl}\eta_{kl}, \tag{3.97}$$

где в соответствии с теоремой частного c_{ijkl} — тензор четвертого ранга. В силу симметричности тензора напряжений P_{ij} и тензора деформации η_{kl}

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}, \tag{3.98}$$

поэтому число независимых компонент уменьшается с $81 = 3^4$ до 36. Далее можно показать*, что

$$c_{ijkl} = c_{klij}, \tag{3.99}$$

после чего число независимых компонент снизится до 21.

В случае применения общего тензорного соотношения (3.97) к изотропному телу тензор упругости c_{ijkl} должен быть линейной комбинацией более общих изотропных тензоров четвертого ранга. Использовав результаты упр. 5 (разд. 3.4), получим

$$c_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\,[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + c\,[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}]. \tag{3.100}$$

Подставим это в уравнение (3.97):

$$P_{ij} = a\delta_{ij}\eta_{kk} + b\,(\eta_{ij} + \eta_{ji}) + c\,(\eta_{ij} - \eta_{ji}). \tag{3.101}$$

Поскольку η_{ij} симметричны, то, в полном согласии с (3.91),

$$P_{ij} = a\eta_{kk}\delta_{ij} + 2b\eta_{ij}.$$

Упражнение

Трехмерный тензор четвертого ранга c_{ijkl} удовлетворяет условиям: $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}$. Показать, что эти условия приводят к уменьшению числа независимых компонент, или элементов, c_{ijkl} с 81 до 36. Далее, показать, что при выполнении условия $c_{ijkl} = c_{klij}$ число независимых компонент сокращается до 21.

---

* См. Sokolnikoff I. S. Mathematical Theory of Elasticity. N.Y., McGraw-Hill, 1956.

3.7. КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Как известно из специальной теории относительности, преобразования Лоренца, связанные с пространством и временем, эквивалентны вращению в четырехмерном пространстве Минковского *, в котором четвертая координата $x_4 = ict$. Мнимая единица i введена для того, чтобы в этом пространстве четырехмерный аналог теоремы Пифагора имел такой же вид, как в трехмерном пространстве. Запишем уравнения Максвелла в тензорном виде в пространстве Минковского. Если это возможно, то благодаря свойствам преобразования тензоров автоматически будет достигнуто согласие со специальной теорией относительности. Уравнения Максвелла в вакууме ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.102а}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v}, \tag{3.102б}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3.102в}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.102г}$$

где

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \tag{3.103}$$

Привлекая скалярный и векторный потенциалы, можно записать

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \tag{3.104}$$

В уравнение (3.104) входит ротор $\mathbf{A}$; дивергенция $\mathbf{A}$ пока еще не определена (см. разд. 1.13 и 1.15). Однако для удобства можно наложить новое ограничение на векторный потенциал $\mathbf{A}$ — условие Лоренца:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{3.105}$$

Из уравнений (3.102в) и (3.104) следует, что

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{3.106}$$

* Голдстейн Г. Классическая механика. Перев. с англ. М., Гостехтеориздат, 1957, глава 6. Тензорное уравнение для фотонов $\sum x_\lambda^2 = 0$ приводит к преобразованиям Лоренца.

а из уравнений (3.102б), (3.104) и (1.80) получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}\} = \frac{\rho \mathbf{v}}{\varepsilon_0}. \quad (3.107)$$

Воспользуемся условием Лоренца (3.105) и зависимостью $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \mathbf{A} = -\mu_0 \rho \mathbf{v}, \quad \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.108)$$

Дифференциальный оператор $\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ в пространстве Минковского равен $\sum_{\lambda=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}$. Здесь использованы индексы, принятые в специальной теории относительности. Легко показать, что $\Box^2$ — скалярный оператор (см. упр. 2 к разд. 3.4).

Для удобства положим

$$A_1 \equiv \frac{A_x}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_x, \quad A_2 \equiv \frac{A_y}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_y,$$
$$A_3 \equiv \frac{A_z}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_z, \quad A_4 \equiv i\varepsilon_0 \varphi. \quad (3.109)$$

Если теперь обозначить

$$\frac{\rho v_x}{c} \equiv j_1, \quad \frac{\rho v_y}{c} \equiv j_2, \quad \frac{\rho v_z}{c} \equiv j_3, \quad i\rho \equiv j_4, \quad (3.110)$$

то уравнение (3.108а) можно переписать в форме

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2} A_\mu = -j_\mu. \quad (3.111)$$

Это уравнение по внешнему виду напоминает тензорное уравнение, однако простое сходство — еще не доказательство. Чтобы это доказать, прежде всего рассмотрим свойства преобразования обобщенного тока j_μ. Элемент электрического заряда de — инвариантная величина:

$$de = \rho dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.112)$$

Мы видели в разд. 3.4, что четырехмерный элемент объема $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ также инвариантен. Поэтому, сравнивая уравнения (3.53) и (3.112), можно заключить, что плотность электрического заряда ρ должна преобразовываться так же,

как и dx_4, четвертая компонента четырехмерного вектора dx_λ. Компонента j_4 вектора j_μ равна $i\rho$. Другие компоненты из (3.110) можно выразить через j_4:

$$j_1 = \frac{\rho v_x}{c} = \frac{\rho}{c}\frac{dx_1}{dt} = \frac{i\rho}{ic}\cdot\frac{dx_1}{dt} = j_4\frac{dx_1}{dx_4}. \qquad (3.113)$$

Поскольку j_4 преобразуется по тому же закону, что и dx_4, то j_1 преобразуется как dx_1. Аналогичные результаты получаются для j_2 и j_3. Следовательно, j_λ и dx_λ преобразуются по одному и тому же закону, т. е. j_λ — четырехмерный вектор в пространстве Минковского.

Уравнение (3.111), которое вытекает непосредственно из уравнений Максвелла (3.102), предполагается выполненным во всех декартовых системах координат. В этом случае на основании теоремы частного заключаем, что A_μ — вектор и уравнение (3.111) действительно тензорное.

Теперь, возвращаясь к уравнениям (3.104), можно написать

$$\left.\begin{aligned} i\varepsilon_0 E_j &= \frac{\partial A_j}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_j} \qquad j = 1, 2, 3, \\ \frac{1}{\mu_0 c} B_i &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_4} \qquad (i, j, k) = (1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \qquad (3.114)$$

(циклическая перестановка по i, j, k).

Определим новый антисимметричный тензор второго ранга (так как A_λ — вектор):

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \equiv f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu}.$$

Перепишем его в явном виде

$$f_{\mu\lambda} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.115)$$

С помощью этого тензора два уравнения Максвелла (3.102б) и (3.102в) можно записать в тензорном виде

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = j_\lambda. \qquad (3.116)$$

В левой части этого уравнения стоит четырехмерная дивергенция тензора, т. е. вектор. Это, конечно, эквивалентно

свертыванию тензора третьего ранга $df_{\lambda\mu}/dx_\nu$ (см. упр. 1 и 2 к разд. 3.2) Оставшиеся два уравнения Максвелла также запишем в тензорной форме. Имеем для уравнения (3.102г)

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}=0 \tag{3.117}$$

и для (3.102а) три уравнения вида

$$\frac{\partial f_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{23}}{\partial x_4}=0. \tag{3.118}$$

(Второе уравнение имеет индексы 1, 2, 4, а третье 1, 3, 4.) Поскольку $df_{\lambda\mu}/dx_\nu \equiv t_{\lambda\mu\nu}$ — тензор (третьего ранга), соотношения (3.102а) и (3.102г) можно выразить тензорным уравнением

$$t_{\lambda\mu\nu}+t_{\nu\lambda\mu}+t_{\mu\nu\lambda}=0. \tag{3.119}$$

Из (3.117) и (3.118) легко увидеть, что индексы λ, μ и ν предполагаются различными, ибо в противном случае при совпадении любых двух индексов уравнение (3.119) автоматически вырождается в тривиальное тождество $0=0$ (см. упр. 4).

Получив соотношения (3.116) и (3.119), мы полностью завершили вывод уравнений Максвелла в ковариантной форме, однако представляется интересным исследовать еще тензорные свойства $f_{\lambda\mu}$ (3.115). «Направляющие косинусы» в преобразованиях Лоренца, соответствующих движению вдоль оси z (ось x_3) со скоростью v, имеют вид *

$$a_{\lambda\mu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma&i\beta\gamma\\0&0&-i\beta\gamma&\gamma\end{pmatrix}, \tag{3.120}$$

где

$$\beta=v/c,\quad \gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}. \tag{3.121}$$

Используя закон преобразования тензоров, можно выразить электрическое и магнитное поле в движущейся системе через соответствующие величины в неподвижной системе отсчета.

---

* См. сноску на стр. 147.

Из уравнений (3.113), (3.115) и (3.120) получаем

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_x - vB_y), \quad E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y + vB_x), \\ E'_z &= E_z; \end{aligned}\right\} \tag{3.122}$$

$$\left.\begin{aligned} B'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_x + \frac{v}{c}E_y\right), \\ B'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_y - \frac{v}{c}E_x\right), \quad B'_z = B_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.123}$$

Полученную зависимость между **E** и **B** можно было ожидать заранее. В самом деле, рассмотрим, например, случай нулевого электрического поля в неподвижной системе $E_x = E_y = E_z = 0$. Очевидно, на покоящуюся заряженную частицу не будут действовать никакие силы. Когда частица движется с малой * скоростью **v** вдоль оси z, наблюдатель, движущийся вместе с частицей, зафиксирует наличие поля (потому, что оно действует на заряженную частицу) $E'_x = -vB_y$, $E'_y = vB_x$. Здесь **B** — магнитное поле в неподвижной системе. Этим равенствам можно придать векторную форму

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ или } \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{3.124}$$

которая обычно и служит определением магнитного поля.

Наконец, тензорные (или векторные) свойства позволяют строить различные инвариантные величины. Одной из наиболее важных является скалярное произведение двух четырехмерных векторов A_λ и j_λ:

$$\begin{aligned} A_\lambda j_\lambda = c\varepsilon_0 A_x \frac{\rho v_x}{c} + c\varepsilon_0 A_y \frac{\rho v_y}{c} + c\varepsilon_0 Az \frac{\rho v_z}{c} + \\ + i\varepsilon_0 \varphi i\rho = \varepsilon_0 (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} - \rho\varphi), \end{aligned} \tag{3.125}$$

где **A** — векторный потенциал; **j** — плотность тока. Последний член $\rho\varphi$ описывает обычную электростатическую связь и имеет размерность энергии на единицу объема. Следовательно, новый построенный скалярный инвариант представляет собой плотность энергии. Динамическое взаимодействие поля и тока дается произведением $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}$. Другие возможные инварианты электромагнитного поля рассматриваются в упр. 3.

---

* Если скорость не мала, так что v^2/c^2 нельзя пренебречь, необходимо пользоваться релятивистскими соотношениями.

Упражнения

1. Тензор B можно определить через дуальный четырехмерный тензор второго ранга B':

$$B'_{ij}=\frac{1}{2!}\,\delta_{ijkl}B_{kl}.$$

Показать, что B' преобразуется при вращении как тензор второго ранга, а при инверсии как псевдотензор.

2. С помощью тензора f, элементы которого заданы выражением (3.115), построить дуальный тензор f'.

Ответ:
$$f'=\varepsilon_0\begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение тензора f' соответствует замене $c\mathbf{B}\longrightarrow i\mathbf{E}$, $-i\mathbf{E}\longrightarrow c\mathbf{B}$. Это преобразование, называемое иногда «дуальным», оставляет инвариантными уравнения Максвелла в вакууме ($\rho=0$).

3. Показать, что $c^2B^2-E^2$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$ инвариантны.

4. Показать, что при совпадении хотя бы двух индексов λ, μ и ν уравнение (3.119) вырождается в тривиальное тождество $0=0$.

5. Записать условие Лоренца (3.105) в виде тензорного уравнения в пространстве Минковского.

6. Показать, что выражение $\sum\limits_{\mu}\dfrac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0$ соответствует условию непрерывности заряда и тока (см. разд. 1.7). Если известно, что это уравнение справедливо во всех лоренцевых системах отсчета, то почему нельзя утверждать, что j_μ — вектор?

7. Калибровочное преобразование состоит в том, что скалярный и векторный потенциалы φ_1 и $\mathbf{A}_1$ можно брать в виде

$$\varphi_2=\varphi_1+\frac{\partial\chi}{dt},\quad \mathbf{A}_2=\mathbf{A}_1-\nabla\chi.$$

При этом новая функция χ удовлетворяет однородному волновому уравнению $\nabla^2\chi-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0$. Доказать, что 1) преобразование Лоренца остается без изменения; 2) новые потенциалы удовлетворяют тем же неоднородным волновым уравнениям, что и первоначальные; 3) поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не изменяются.

ГЛАВА 4

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

4.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Мы начнем изучение матриц с обобщения некоторых свойств определителей, поскольку они применяются в математическом аппарате матриц, а также отчасти из желания выяснить, что вообще можно называть матрицами.

Свойства определителей. Определитель записывают в виде квадратной таблицы чисел или функций, которая состоит из n строк и n столбцов

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Величина n называется *порядком* определителя. Выраженный через свои элементы определитель имеет вид

$$D=\sum_{i,j,k\dots}\delta_{ijk\dots}a_ib_jc_k\dots, \tag{4.2}$$

где $\delta_{ijk\dots}$, аналогично символу Леви — Чивита (разд. 3.4) равно $+1$ для четного числа перестановок индексов $(1, 2, 3, \dots, n)$, -1 для нечетного числа перестановок и нулю в случае повторения любых двух индексов. В частности, для определителя третьего порядка

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

уравнение (4.2) дает

$$\begin{aligned} D = {} & +a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - \\ & - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Таким образом, определитель третьего порядка представляет собой обычную линейную комбинацию произведений трех сомножителей. Каждое произведение содержит один и только один элемент из каждой строки и из каждого столбца, причем оно положительно, если число перестановок, которым достигнут порядок индексов в этом произведении, четно (относительно перестановки столбцов a, b и c или чисел 1, 2 и 3), и отрицательно, если число перестановок нечетно.

Некоторые свойства определителей n-го порядка следуют уже из уравнения (4.4), поэтому воспользуемся им для иллюстрации этих свойств.

Представление определителя с помощью миноров. Уравнение (4.4) можно (разложение Лапласа) переписать так:

$$D = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (4.5)$$

И вообще, определитель n-го порядка можно представить в виде линейной комбинации произведений элементов любой строки (или любого столбца) и определителей $(n-1)$-го порядка, образованных вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} определителя. Полученный таким образом определитель $(n-1)$-го порядка (в данном случае второго) называют минором и обозначают M_{ij}. Минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, называют алгебраическим дополнением к элементу, который находится на пересечении a_{ij}, и обозначают C_{ij}. Теперь уравнение (4.5) можно переписать так:

$$D = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_i M_{i1} = \sum_{i=1}^{3} a_i C_{i1}.$$

В данном случае разложение произведено по первому столбцу, $j = 1$, а суммирование производится по i.

Такое представление называют разложением Лапласа. Оно удобно для оценки определителей высокого порядка, в которых большое число элементов равно нулю. Например,

определитель

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{4.6}$$

если разложить его по верхней строке, имеет вид:

$$D = (-1)^{1+2}(1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Повторное разложение по верхней строке дает

$$D = (-1)(-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \tag{4.8}$$

Вычисленный определитель D образован из элементов одной из матриц Дирака, рассматриваемых в релятивистской теории электрона.

Антисимметрия. Определитель изменяет знак на обратный, если поменять местами любые две строки или любые два столбца — это свойство антисимметричности следует из четно-нечетного характера множителя δ в уравнении (4.2); более ясно это видно из уравнений (4.3) и (4.4) *. Оно использовано в разд. 3.4 в связи с построением антисимметричной линейной комбинации. Кроме того, им часто пользуются в квантовой механике при записи волновой функции системы многих частиц, которая в соответствии с принципом Паули должна быть антисимметрична при перестановке любых двух одинаковых частиц со спином $^1/_2$ (электроны, протоны, нейтроны и т. д.).

Имеют место следующие утверждения:

1) определитель с двумя равными строками (столбцами) равен нулю;

---

* Изменение знака совершенно очевидно при перестановке двух соседних строк (или столбцов); ясно, что в этом случае перестановка нечетна. Читатель может убедиться сам, что перестановка двух любых строк также нечетна.

2) если каждый элемент в строке (столбце) равен нулю, то определитель также равен нулю;

3) если все элементы строки (столбца) умножить на некоторую постоянную, то весь определитель умножится на ту же постоянную;

4) величина определителя не изменится, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторую постоянную.

Мы имеем

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

Используем разложение Лапласа

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.10}$$

На основании свойства антисимметрии второй определитель в правой части равен нулю. Из свойства антисимметрии и свойства 3 следует, что определитель равен нулю, если две его любые строки или два столбца пропорциональны. Это доказывает соотношение (4.9).

Решение системы однородных уравнений. Одно из главных применений определителей связано с отысканием условия существования нетривиального решения системы линейных однородных алгебраических уравнений. Пусть имеется система трех однородных уравнений с тремя неизвестными (или n уравнений с n неизвестными):

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Необходимо установить, имеет ли эта система любое, отличное от тривиального $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, решение.

Образуем определитель из коэффициентов системы (4.11), затем умножим его на x и воспользуемся свойством 4:

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

В последнем определителе каждый элемент первого столбца в силу (4.11) равен нулю. т. е.

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

Отсюда следует, что для существования нетривиального решения системы уравнений (4.11) определитель, составленный из коэффициентов этой системы, должен равняться нулю. И наоборот, можно показать, что если определитель, составленный из коэффициентов некоторой системы, равен нулю, эта система должна иметь нетривиальное решение. Этим мы воспользуемся в разд. 7.6 при изучении линейной зависимости системы функций.

Упражнения

1. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Исследовать систему однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+3y+3z&=0, \\ x-y+z&=0, \\ 2x+y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

и установить, имеет ли она нетривиальное решение.

3. Дано алгебраическое дополнение C_{ij} элемента a_{ij}. Доказать, что $\sum_i a_{ij}C_{ij} = \sum_i a_{ji}C_{ji} = |A|$, где $|A|$ — определитель, составленный из элементов a_{ij}, кроме того, доказать, что $\sum_i a_{ij}C_{ik} = \sum_i a_{ij}C_{ki} = 0$, $j \neq k$.

4.2. МАТРИЦЫ

Основные определения. *Матрицу можно определить как квадратную или прямоугольную таблицу чисел или функций, которые подчиняются определенным условиям.* Такое определение представляется логическим развитием хорошо известных математических понятий. В арифметике мы сталкиваемся с простыми числами. В теории комплексной переменной (гл. 6) имеем дело с определенными парами чисел $(1, 2) = 1 + 2i$, для которых важен порядок их написания. Теперь займемся числами (или функциями), составляющими квадратную или прямоугольную таблицу. Для удобства числам присвоены два индекса, первый указывает номер строки, а второй — номер столбца, которым принадлежит данное число. Например, a_{13} — матричный элемент первой строки и третьего столбца. На основании вышесказанного матрица $\boldsymbol{A}$ из m строк и n столбцов записывается в виде:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Особенно важно отметить, что каждый матричный элемент a_{ij} не является комбинацией других элементов. Матрицу нельзя отождествлять с определителем, который равен просто числу, матрица — эта таблица упорядоченных чисел. Поэтому теряет всякий смысл операция сложения (или умножения) всех матричных элементов a_{ij} с каким-либо числом.

Как таблица чисел матрица $\boldsymbol{A}$ обладает определенными свойствами, о которых условливаются заранее. Мы постулируем, что матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ с элементами a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} соответственно подчиняются следующим правилам.

Равенство матриц. Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равны тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j (при этом, конечно,

предполагается, что A и B имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов).

Сложение матриц. $A + B = C$ в том и только в том случае, если $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ при любых i и j (сложение матричных элементов происходит по обычным законам алгебры или арифметики, если в качестве элементов служат простые числа). Это значит, что $A + B = B = A$, т. е. сложение обладает свойством коммутативности. Кроме того, выполняется и ассоциативный закон: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Умножение (на скаляр). Под умножением матрицы A на скаляр α понимают операцию $\alpha A = (\alpha A)$, где элементами матрицы αA служат αa_{ij}, иными словами, каждый элемент матрицы A умножается на скалярный множитель. Этим матрицы существенно отличаются от определителей, у которых умножение на α соответствует умножению только на один столбец или одну строку, а не на каждый элемент всего определителя в целом. В соответствии с этим умножение на скаляр также коммутативно, $\alpha A = A\alpha$.

Произведение матриц. Матрица C является произведением матриц A и B

$$AB = C \tag{4.15}$$

в том и только в том случае, если $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

Элемент матрицы C с индексом ij образован как скалярное произведение i-й строки матрицы A с j-м столбцом матрицы B (при этом требуется, чтобы число столбцов матрицы A совпадало с числом строк матрицы B). Немой индекс k пробегает все значения 1, 2, ..., n, т. е. для $n = 3$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j}. \tag{4.16}$$

Очевидно, немой индекс k можно заменить на любой другой, который еще не использовался, уравнение (4.15) от этого не изменится. Возможно, дополнительное пояснение внесет замечание, что уравнение (4.15) фиксирует способ перемножения заданных матриц. Этот способ сочетания матриц называется матричным умножением. В качестве иллюстрации

рассмотрим произведение матриц

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Здесь $(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3)_{ij} = \hat{\sigma}_{1i_1}\hat{\sigma}_{3i_1 j} + \hat{\sigma}_{1i_2}\hat{\sigma}_{3i_2 j}$. Непосредственное вычисление с помощью правила перемножения матриц дает

$$\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

а из уравнения (4.15) имеем

$$\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1 = -\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3. \tag{4.20}$$

Таким образом, за исключением специальных случаев, операция перемножения матриц некоммутативна *

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}. \tag{4.21}$$

Тем не менее по смыслу определения операции перемножения матриц можно видеть, что ассоциативный закон выполняется: $(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{BC})$. Справедлив также и дистрибутивный закон: $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$.

Интересно остановиться на некоторых специальных матрицах. Если матрица содержит один столбец и n строк, она называется вектор-столбцом $\{x\}$ с компонентами x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично, если матрица состоит из одной строки, в которой содержится n элементов, она называется вектор-строкой $[x]$ с компонентами x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, если $\boldsymbol{A}$ представляет собой квадратную $n \times n$-матрицу и при этом заданы n-компонентный вектор-столбец $\{x\}$ и n-компонентная вектор-строка $[x]$, то $\boldsymbol{A}\{x\}$ и $[x]\boldsymbol{A}$ определены уравнением (4.15), в то время как $\boldsymbol{A}[x]$ и $\{x\}\boldsymbol{A}$ не имеют смысла.

В оставшейся части этой главы мы сконцентрируем главное внимание на вектор-столбцах, вектор-строках и и квадратных матрицах. Единичная матрица в качестве

---

* Коммутацию принято обозначать специальным символом, квадратными скобками: $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$. В этом обозначении уравнение (4.21) выглядит как $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \neq 0$.

матричных элементов имеет символ Кронекера δ_{ij}, и ее свойства таковы, что $IA = AI = A$ для любых A.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Если все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется нулевой или нуль-матрицей и обозначается символом O. Для всех A имеем $OA = OA = O$, поскольку

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Любопытно, что в результате перемножения двух матриц можно получить нулевую матрицу, хотя ни одна из перемножаемых матриц не является нулевой. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

то $AB = O$.

Диагональные матрицы. Имеется один важный специальный случай, когда в квадратной матрице все недиагональные элементы равны нулю. В частности, если 3×3-матрица A диагональна, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Физическое толкование таких диагональных матриц и метод приведения матриц к диагональной форме рассматриваются в разд. 4.5. Здесь же мы просто отметим важное свойство диагональных матриц: диагональные матрицы коммутируют т. е. $AB = BA$, если A и B диагональны.

След матрицы *. В любой квадратной матрице сумма ее диагональных элементов называется *следом* этой матрицы. Одно из интересных и полезных свойств состоит в том, что след произведения двух матриц A и B не зависит от порядка сомножителей:

$$\mathrm{Tr}\ (AB)=\sum_i (AB)_{ii}=\sum_i\sum_j a_{ij}b_{ji}=$$

$$=\sum_j\sum_i b_{ji}a_{ij}=\sum_i (BA)_{jj}=\mathrm{Tr}\ (BA).$$

Это выполняется даже в том случае, когда $AB\neq BA$.

Упражнения

1. Даны спиновые матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Показать, что $\hat{\sigma}_i^2=I$, $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j=i\sigma_k$, $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j+\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i=2\delta_{ij}I$ $(i, j, k)=(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Эти матрицы были использованы Паули в нерелятивистской теории электрона.

2. Даны три матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найти все возможные произведения A, B и C, в том числе и их квадраты. Выразить ответы через A, B и C и единичную матрицу I. Эти три матрицы наряду с единичной матрицей образуют математическую группу.

3. При описании частицы со спином 1 пользуются матрицами

$$M_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad M_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},$$

$$M_z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Показать, что: 1) $[M_x, M_y]=iM_z$ и т. д. (циклическая перестановка); 2) $M^2\equiv M_x^2+M_y^2+M_z^2=2I$, где I — единичная матрица; 3) $[M^2, M_i]=0$, $[M_z, L^+]=L^+$, $[L^+, L^-]=2M_z$, где $L^\pm\equiv M_x\pm iM_y$.

---

* Обычно обозначается символами Sp или Tr. Мы используем второе обозначение.— *Прим. перев.*

Показать, что соотношения 1)—3) справедливы для двух наборов матриц M:

$$M_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad M_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad M_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$M_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix},$$

$$M_y=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&-2&0\\0&2&0&-\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix},$$

$$M_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}.$$

Второй набор используется при описании частиц со спином 3/2.

4. Используя матрицы Паули из упр. 1, показать, что

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{a})\,(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+i\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\equiv\mathbf{i}\hat{\sigma}_x+\mathbf{j}\hat{\sigma}_y+\mathbf{k}\hat{\sigma}_z$; $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — обычные векторы.

5. Доказать, что перемножение матриц ассоциативно: $(AB)\,C=A\,(BC)$.

6. Матрица A диагональна, причем все ее диагональные элементы различны. Доказать, что если A и B коммутируют, то B диагональна.

7. Доказать, что если матрицы A и B диагональны, то они коммутируют.

8. Убедиться, что след каждой из двух несингулярных антикоммутирующих матриц равен нулю. (Несингулярность означает, что определитель, составленный из матричных элементов, не равен нулю.)

9. Показать, что $\mathrm{Tr}\,(ABCD)=\mathrm{Tr}\,(DABC)$.

10. Дана матрица A^{-1} с элементами $a^{-1}_{ij}=C_{ij}/|A|$, где C_{ij} — алгебраическое дополнение $|A|$. Показать, что $A^{-1}\cdot A=I$. Следовательно, A^{-1} — обратная матрица ($|A|\neq 0$).

11. Проверить тождество Якоби

$$[A,[B,C]]=[B,[A,C]]-[C,[A,B]].$$

Оно встречается в теории элементарных частиц. В качестве мнемонического правила читатель может взять известную формулу $BAC-CAB$ из разд. 1.5.

12. Матрица C образована в результате перемножения A и B. Показать, что определитель матрицы C равен произведению определителей матриц A и B

$$\det C = \det A \cdot \det B.$$

4.3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Обычное трехмерное пространство можно описать, используя хорошо известные декартовы координаты x, y, z. Рассмотрим вторую систему декартовых координат x', y',z', начало которой совпадает с началом первой системы, однако оси ориентированы иначе. В этом разделе будут повторены некоторые результаты гл. 1 и 3, но в несколько отличном виде и с другими целями. В гл. 1 и 3 все внимание фокусировалось на векторе или тензоре. Здесь же основной упор сделан на вращении системы координат.

Направляющие косинусы. Единичный вектор, направленный по оси x' ($\mathbf{i}'$), можно разложить на компоненты этого вектора вдоль осей x, y и z:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos(x', x) + \mathbf{j}\cos(x', y) + \mathbf{k}\cos(x', z). \quad (4.25)$$

Для удобства введем обозначения

$$\cos(x', x) = a_{11},\ \cos(x', y) = a_{12},\ \cos(x', z) = a_{13} \quad (4.26)$$

и соответственно

$$\cos(y', x) = a_{21}\ (a_{21} \neq a_{12}),\ \cos(y', y) = a_{22} \text{ и т. д.} \quad (4.27)$$

Теперь уравнение (4.25) и аналогичные выражения для $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}' = \mathbf{i}a_{11} + \mathbf{j}a_{12} + \mathbf{k}a_{13},\ \mathbf{j}' = \mathbf{i}a_{21} + \mathbf{j}a_{22} + \mathbf{k}a_{23}, \\ \mathbf{k}' = \mathbf{i}a_{31} + \mathbf{j}a_{32} + \mathbf{k}a_{33}. \end{aligned}\right\} \quad (4.28)$$

С другой стороны, можно выразить векторы через их компоненты в повернутой системе координат:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} = \mathbf{i}'a_{11} + \mathbf{j}'a_{21} + \mathbf{k}a_{31},\ \mathbf{j} = \mathbf{i}'a_{12} + \mathbf{j}'a_{22} + \mathbf{k}'a_{32}, \\ \mathbf{k} = \mathbf{i}'a_{13} + \mathbf{j}'a_{23} + \mathbf{k}'a_{33}. \end{aligned}\right\} \quad (4.29)$$

Поставив индекс 1 в соответствие векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}'$, индекс 2 — векторам $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}'$, а индекс 3 — векторам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$

(рис. 4.1), замечаем, что в каждом случае первый индекс a_{ij} относится к единичным векторам повернутой системы $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, а второй — к векторам первой системы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

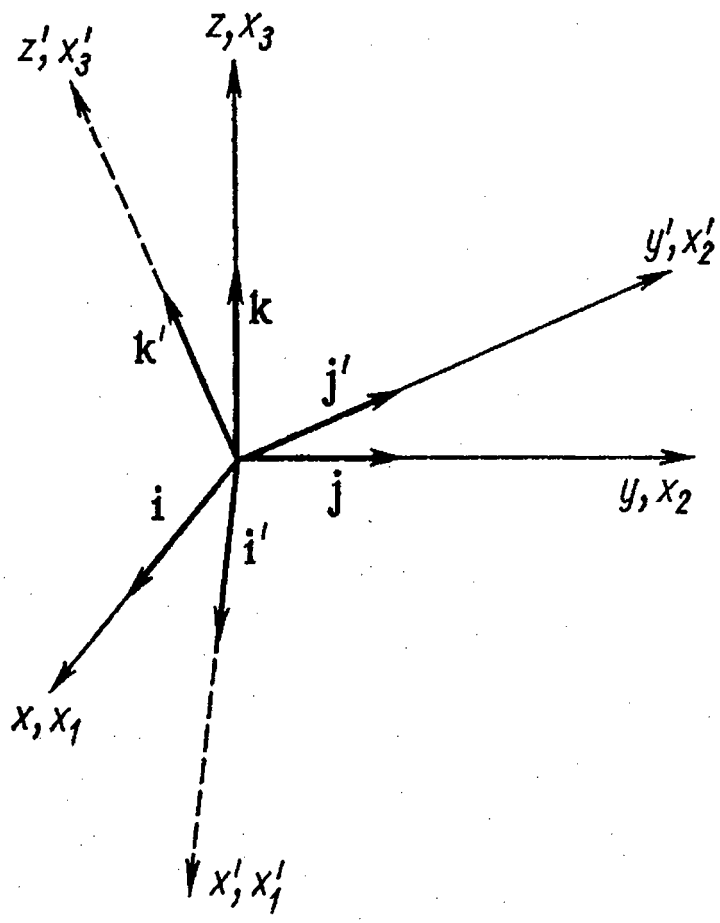


Рис. 4.1. Декартовы системы координат.

Векторы. Если рассматривается вектор, компоненты которого являются функциями положения в пространстве, то

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z = \\ = \mathbf{V}'(x', y', z') = \mathbf{i}'V'_{x'} + \mathbf{j}'V'_{y'} + \mathbf{k}'V'_{z'}, \qquad (4.30)$$

поскольку точку в пространстве можно задать как с помощью координат x, y, z, так и с помощью координат x', y', z'. Подставив вместо $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ их выражения из (4.29), можно разбить уравнение (4.30) на три отдельных скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} V'_{x'} &= a_{11}V_x + a_{12}V_y + a_{13}V_z, \\ V'_{y'} &= a_{21}V_x + a_{22}V_y + a_{23}V_z, \\ V'_{z'} &= a_{31}V_x + a_{32}V_y + a_{33}V_z. \end{aligned}\right\} \qquad (4.31)$$

В частности, эти соотношения выполняются и для координат точки (x, y, z) и (x', y', z'):

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Удобно обозначить координаты этой точки следующим образом:

$$x \to x_1, \quad y \to x_2, \quad z \to x_3. \tag{4.33}$$

Аналогичные обозначения введем для координат повернутой системы. Тогда систему трех уравнений (4.32) можно записать в форме

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.34}$$

Мы не будем пока касаться этих результатов и попытаемся решить ту же проблему иначе. Рассмотрим две координатные системы x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' с общим началом отсчета и некоторой заданной точкой, которая в неподвижной системе имеет координаты x_1, x_2, x_3, а в подвижной (x_1', x_2', x_3'). Следует отметить обычную двойственность обозначений. Та же самая буква x относится и к координатной оси и описывает расстояние вдоль этой оси. Поскольку заданная система линейна, x_i' можно выразить в виде линейной комбинации переменных x_i:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j. \tag{4.35}$$

Здесь коэффициенты a_{ij} можно отождествить с направляющими косинусами. Ниже, при исследовании двумерного случая, это будет проделано строго.

Если в двух системах координат заданы два набора величин (V_1, V_2, V_3) и (V_1', V_2', V_3'), связанных между собой по закону, аналогичному закону (4.35)

$$V_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}V_j, \tag{4.36}$$

то (см. разд. 1.2) величины (V_1, V_2, V_3) представляют собой компоненты вектора, т. е. при вращении системы

координат они подчиняются законам преобразования компонент вектора. В известной степени координаты точки являются прототипом вектора. Целесообразность и удобство этого определения стали ясными в гл. 3, где оно было распространено на псевдовекторы и тензоры.

Из уравнения (4.34) можно извлечь интересную информацию о коэффициентах a_{ij}, которые характеризуют ориентацию координатной системы x_1', x_2', x_3' относительно системы x_1, x_2, x_3. Расстояние от начала отсчета до заданной точки одинаково в обеих системах. Рассмотрим для удобства квадрат расстояния

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i x_i'^2 = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}x_j\right)\left(\sum_k a_{ik}x_k\right)^* = \\ = \sum_{j,k} x_j x_k \sum_i a_{ij}a_{ik}. \tag{4.37}$$

Последнее справедливо для всех точек в том и только в том случае, если

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \tag{4.38}$$

Проверить это условие можно, подставляя в уравнение (4.37) значения $x = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ и т. д., после чего процедуру мы вправе делать, так как уравнение (4.37) должно выполняться при всех x для данного набора a_{ij}. Таким образом, условие (4.38) требует, чтобы длина оставалась постоянной (инвариантной) при вращении системы координат, это условие называется *условием ортогональности*. Элементы a_{ij} образуют ортогональную матрицу $\boldsymbol{A}$. Отметим, что в (4.38) нет никакого перемножения матриц. Скорее, его можно истолковать как скалярное произведение двух столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$.

В матричной форме уравнение (4.34) имеет вид

$$\{x'\} = \boldsymbol{A}\{x\}. \tag{4.39}$$

Условия ортогональности, двумерный случай. Чтобы яснее представить себе смысл элемента a_{ij} и понять условие ортогональности, подробно исследуем вращение двумерной системы. (Такая ситуация соответствует вращению

* Заметим, что индексы j и k независимы.

трехмерной системы вокруг оси x_3.) Геометрические построения на рис. 1.6 приводят к соотношениям

$$x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \quad x_2' = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi. \tag{4.40}$$

Следовательно, с учетом (4.39)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Из того же рисунка видно, что

$$a_{11} = \cos\varphi = \cos(x_1', x_1), \quad a_{12} = \sin\varphi = \\ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(x_1', x_2), \ \ldots \ . \tag{4.42}$$

Сравнение (4.41) и (4.42) показывает, что матричные элементы совпадают с направляющими косинусами. Условие ортогональности (4.38) сводится в данном случае к уравнениям

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1, \quad \sin\varphi\cos\varphi = 0. \tag{4.43}$$

Распространение полученных результатов на трехмерный случай (поворот системы координат вокруг оси x_3 на угол φ против часовой стрелки) дает

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Равенство $a_{33} = 1$ означает, что $x_3' = x_3$, так как поворот осуществлялся вокруг оси x_3. Нулевые матричные элементы обеспечивают независимость x_1' и x_2' от x_3, а x_3' от x_1 и x_2.

Обратная матрица A^{-1}. Обратную матрицу определяют формулой

$$\{x\} = A^{-1}\{x'\}. \tag{4.45}$$

Матрица A^{-1} описывает обратный поворот, определенный матрицей A, и возвращает координатную систему в ее первоначальное положение. Символически комбинация уравнений (4.39) и (4.45) дает

$$\{x\} = A^{-1}A\{x\}. \tag{4.46}$$

Поскольку $\{x\}$ произволен, то

$$A^{-1}A = I. \tag{4.47}$$

Аналогично

$$AA^{-1}=I. \tag{4.48}$$

Транспонированная матрица $\tilde{A}$. Элементы введенной обратной матрицы A^{-1} можно определить с помощью условия ортогональности (4.38). Оно не согласуется с данным определением произведения матриц, однако это противоречие устраняется, если *ввести новую* матрицу $\boldsymbol{A}$, такую, что

$$\tilde{a}_{ij}=a_{ji}. \tag{4.49}$$

Составленная из элементов a_{ji} матрица $\tilde{A}$ называется *транспонированной*. Как видно, она отличается от A заменой строк на столбцы. Теперь условие ортогональности (4.38) можно переписать в новой форме

$$\tilde{A}A=I, \tag{4.50}$$

которую можно взять в качестве определения ортогональности матриц. Умножив (4.50) на A^{-1} справа, получим с помощью (4.48)

$$\tilde{A}=A^{-1}. \tag{4.51}$$

То, что обратная матрица равна транспонированной, справедливо только для ортогональных матриц, поэтому (4.51) можно считать новым условием ортогональности матриц. Умножив уравнение (4.51) на A слева

$$\tilde{A}A=I \tag{4.52}$$

или

$$\sum_i a_{ji}a_{ki}=\delta_{jk}, \tag{4.53}$$

получим еще одну форму условия ортогональности. Теперь становится ясным, почему эти матрицы названы *ортогональными*.

Пусть в общей форме

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы a_{ij} представляют собой косинусы углов между x_i' и x_j. Следовательно, a_{11}, a_{12} и a_{13} — направляющие косинусы, которые характеризуют расположение

оси x_1' относительно осей x_1, x_2 и x_3 и определяют единицу длины вдоль оси x_1', т. е. единичный вектор

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}a_{11} + \mathbf{j}a_{12} + \mathbf{k}a_{13}.$$

Условие ортогональности (4.53) просто устанавливает, что единичные векторы $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ взаимно перпендикулярны или ортогональны. Заданная ортогональная матрица A преобразует одну ортогональную систему координат в другую ортогональную систему.

Инверсия неортогональной матрицы (если только обратная матрица существует) определена уравнением (4.47) или эквивалентным ему уравнением (4.48). Необходимые и достаточные условия существования обратной матрицы заключаются в том, чтобы исходная матрица была квадратной размером $n \times n$ и чтобы ее определитель был отличен от нуля (см. упр. 10 к разд. 4.2).

Необходимо отметить, что до сих пор подход к матрицам был двояким: они рассматривались с помощью компонентного представления и как нечто единое целое. Каждый из этих подходов обладает собственными преимуществами.

Рассмотрим $(ST)^{-1}$, где ST — матрица, имеющая обратную матрицу. Тогда ясно, что

$$(ST)(ST)^{-1} = I. \tag{4.54}$$

Умножим слева это равенство последовательно сначала на S^{-1}, а затем на T^{-1}, откуда

$$(ST^{-1}) = T^{-1}S^{-1}. \tag{4.55}$$

Таким образом, инверсия прозведения матриц равна произведению обратных матриц, перемноженных в обратном порядке. Этот результат легко обобщить на любое количество сомножителей.

С другой стороны, оценку, $\widetilde{(ST)}$ лучше производить, используя компонентное представление. Согласно определению транспонирования,

$$u_{ik} = \sum_j s_{ij}t_{jk} = \sum \tilde{t}_{kj}\tilde{s}_{ji}, \tag{4.56}$$

но

$$u_{ik} = \tilde{u}_{ki}, \tag{4.57}$$

поэтому предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\widetilde{(ST)} = \tilde{T}\tilde{S}. \tag{4.58}$$

Следовательно, в результате транспонирования произведения двух матриц получается произведение транспонированных матриц, перемноженных в обратном порядке. Заметим, что ни в одном из двух приведенных примеров не требовалось, чтобы S или T были ортогональными.

Свойства симметрии. Для определения свойств симметрии пользуются транспонированной матрицей. Если

$$A = \tilde{A}, \text{ т. е. } a_{ij} = a_{ji}, \tag{4.59}$$

то матрица называется *симметричной*. Если же

$$A = -\tilde{A}, \; a_{ji} = -a_{ji}, \tag{4.60}$$

то она называется *антисимметричной* или *кососимметричной*, и ее диагональные элементы равны нулю. Легко видеть, что любую квадратную матрицу можно записать в виде суммы симметричной и антисимметричной матрицы. Рассмотрим тождество

$$A = \frac{1}{2}[A + \tilde{A}] + \frac{1}{2}[A - \tilde{A}]. \tag{4.61}$$

Здесь матрица $A + \tilde{A}$ симметрична, а $A - \tilde{A}$ — антисимметрична. Последнее выражение является матричным аналогом тензорного уравнения (3.22).

Последовательные повороты, умножение матриц. Обратимся вновь к ортогональным матрицам и рассмотрим поворот системы, заданный матрицей A:

$$\{x'\} = A\{x\} \tag{4.62}$$

и последующий поворот, заданный матрицей B, такой, что

$$\{x''\} = B\{x'\}. \tag{4.63}$$

В компонентной форме это запишется так:

$$x_i'' = \sum_j b_{ij}x_j' = \sum_j b_{ij}\sum_k a_{jk}x_k = \sum_k \left(\sum_j b_{ij}a_{jk}\right) x_k. \tag{4.64}$$

Суммирование по индексу j означает умножение матриц, в результате которого получается новая матрица $C = BA$, такая, что

$$x_i'' = \sum_k c_{ik}x_k. \tag{4.65}$$

Мы опять видим, что умножение матриц полезно, а это уже само по себе оправдывает введение такой операции. Фактически умножение двух матриц означает двойной поворот, который переводит первоначальную систему координат в новую. Таким образом, мы ставим в соответствие поворот системы координат, который изменяет компоненты фиксированного вектора (вектор остается неподвижным при повороте системы, см. рис. 1.6). Однако уравнение (4.62) можно интерпретировать и как поворот *вектора в противоположном* направлении (рис. 4.2).

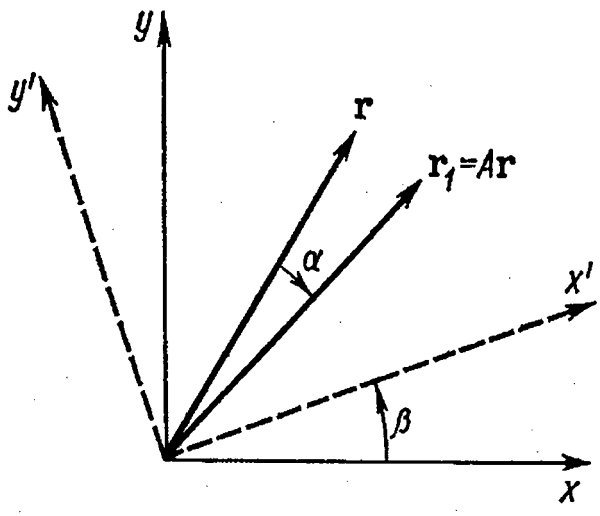


Рис. 4.2. Поворот вектора в неподвижной системе координат.

Предположим, мы считаем, что A переводит вектор $\mathbf{r}$ в новое положение $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}_1 = A\mathbf{r}. \tag{4.66}$$

Далее с помощью матрицы B произведем поворот системы координат, при котором $(x, y, z) \to (x', y', z')$:

$$B\mathbf{r}_1 = BA\mathbf{r} = BA\,(B^{-1}B)\,\mathbf{r} = (BAB^{-1})\,B\mathbf{r}, \tag{4.67}$$

где $B\mathbf{r}_1$ есть как раз $\mathbf{r}_1$ в новой системе координат, то же самое справедливо и для $B\mathbf{r}$. Следовательно, в этой новой системе ($B\mathbf{r}$) в результате действия матрицы BAB^{-1} повернут в положение ($B\mathbf{r}_1$), или, другими словами, в новой системе, координаты которой соответствуют повороту, заданному матрицей B, матрица A равна

$$A' = BAB^{-1}. \tag{4.68}$$

Преобразование подобия. Преобразование, заданное выражением (4.68), в котором B — любая матрица, не обязательно ортогональная, известно как преобразование *подобия*. В компонентной форме оно перепишется как

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} b^{-1}_{lj}. \tag{4.69}$$

Если же B — ортогональная матрица, то

$$b_{ij}^{-1} = \tilde{b}_{ij} = b_{ji} \tag{4.70}$$

и

$$a'_{ij} = \sum_{kl} b_{ik} b_{jl} a_{kl}. \tag{4.71}$$

Связь с тензорами. Сравнивая (4.71) с уравнениями из разд. 3.1, замечаем, что оно определяет тензор второго ранга. Следовательно, матрица, которая преобразуется ортогональным преобразованием подобия, есть, по определению, тензор. Тогда очевидно, что любая ортогональная матрица A, вызывающая поворот вектора [уравнение (4.66)], может быть названа тензором. Однако если мы имеем дело с ортогональной матрицей, матричными элементами которой служат фиксированные направляющие косинусы, определяющие новую ориентацию координатной системы, то такая матрица не определяет тензорного преобразования.

Симметрия и антисимметрия матриц сохраняется при ортогональных преобразованиях подобия. Пусть задана симметричная матрица A, т. е. $A = \tilde{A}$, и, кроме того,

$$A' = BAB^{-1}. \tag{4.72}$$

Тогда в силу ортогональности B

$$\tilde{A}' = \widetilde{BAB^{-1}} = \tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B} = B\tilde{A}B^{-1}, \tag{4.73}$$

но $A = \tilde{A}$, поэтому

$$\tilde{A}' = BAB^{-1} = A'. \tag{4.74}$$

Отсюда видно, что симметрия матрицы сохраняется при ортогональном преобразовании подобия.

Упражнения *

1. Записать матрицу, которая определяет поворот (правой) системы координат около оси x_2 против часовой стрелки.

2. Показать, что произведение двух ортогональных матриц ортогонально.

3. Показать, что $\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(CBA)$, если любые две из этих трех матриц коммутируют.

---

* Все матричные элементы предполагаются вещественными числами.

4. Показать, что след произведения симметричной и антисимметричной матриц равен нулю.

5. Показать, что $BA=I$, если $AB=I$.

6. Суммируя тройное произведение ортогональных матричных элементов

$$\sum_i \sum_k a_{ij}a_{ik}a_{kl}^{-1} = \sum_k \sum_i a_{ij}a_{ik}a_{kl}^{-1},$$

доказать, что $A=A^{-1}$. Здесь a_{kl}^{-1} — матричный элемент обратной матрицы A^{-1}.

7. Убедиться, что операции инверсии и транспонирования коммутируют: $(\widetilde{M})^{-1}=(\widetilde{M^{-1}})$.

8. Пусть матрица имеет обратную, доказать, что обратная матрица единственна.

9. Пусть A антисимметрична, убедиться, что $\mathbf{r}A\mathbf{r}=0$, где $\mathbf{r}$ — вектор-столбец.

10. Показать, что след матрицы инвариантен относительно преобразования подобия.

11. Показать, что сумма квадратов матричных элементов инвариантна относительно ортогонального преобразования подобия.

12. Обобщить результат упр. 11 и показать, что

$$\sum_{jk} S_{jk}T_{jk} = \sum_{lm} S'_{lm}T'_{lm},$$

где матричные элементы в повернутой и первоначальной системах связаны ортогональным преобразованием подобия. Этот результат используется при выводе инвариантов электромагнитного поля (см. разд. 3.7).

13. Проверить, что определитель матрицы остается инвариантным при преобразованиях подобия.

14. Показать, что свойство антисимметрии инвариантно относительно ортогонального преобразования подобия.

15. Убедиться, что симметрия матрицы автоматически влечет за собой ее ортогональность, если $AA=I$.

16. Показать, что ортогональность матрицы автоматически влечет за собой ее симметрию, если $AA=I$.

17. Пусть A ортогональна, проверить, что ее определитель равен единице.

4.4. ЭРМИТОВЫ И УНИТАРНЫЕ МАТРИЦЫ

Определения. До сих пор мы предполагали, что матричные элементы вещественны. В большинстве вопросов классической физики предположение о вещественности матричных элементов вполне достаточно. Однако в квантовой механике вследствие вида основных коммутационных соотношений (или формы уравнения Шредингера) неизбежно появляются комплексные переменные. В связи с этим обоб-

щим матричный анализ на случай комплексных матричных элементов. Введем следующие определения.

1. Комплексно-сопряженная матрица A^* получается при комплексном сопряжении ($i \to -i$) каждого матричного элемента.

2. Матрица $A^\dagger$ получается при транспонировании A^*

$$A^\dagger = \tilde{A}^* = \tilde{A^*}. \tag{4.75}$$

3. Матрица A *эрмитова* (или самосопряженная), если

$$A = A^\dagger. \tag{4.76}$$

В квантовой механике (или в матричной механике) матрицы обычно эрмитовы.

4. Матрица U *унитарна*, если

$$U^\dagger = U^{-1}. \tag{4.77}$$

Понятие унитарности служит дальнейшим развитием понятия ортогональности матриц (4.51).

Если подвергнутая преобразованию подобия матрица унитарна, то преобразование называется унитарным:

$$A' = UAU^\dagger. \tag{4.78}$$

Покажем, что произведение двух унитарных матриц унитарно. Пусть матрицы U_1 и U_2 унитарны. Тогда

$$I = (U_1U_2)(U_1U_2)^{-1} = U_1U_2U_2^{-1}U_1^{-1} = U_1U_2U_2^\dagger U_1^\dagger. \tag{4.79}$$

Поскольку операция присоединения совпадает с транспонированием (за исключением комплексного сопряжения), то

$$(U_1U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger \tag{4.80}$$

(см. упр. 2). Подставив (4.80) в (4.79), получим

$$I = (U_1U_2)(U_1U_2)^\dagger. \tag{4.81}$$

Умножим это соотношение слева на $(U_1U_2)^{-1}$

$$(U_1U_2)^{-1} = (U_1U_2)^\dagger. \tag{4.82}$$

Полученный результат и доказывает наше утверждение. Другие свойства унитарных матриц рассмотрены в упражнениях.

Матрицы Паули. В релятивистской теории электрона широко используются комплексные 4×4-матрицы. Однако

сначала рассмотрим набор трех 2×2-матриц Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.83}$$

Матрицы Паули введены для описания частиц со спином 1/2 (нерелятивистская теория). Легко показать (см. упр. 1 к разд. 4.2), что они удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 2\delta_{ij} I \text{ — антикоммутация,} \tag{4.84}$$

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i\hat{\sigma}_k \text{ — циклическая перестановка индексов,} \tag{4.85}$$

$$(\hat{\sigma}_i)^2 = I. \tag{4.86}$$

Матрицы Дирака. В 1927 г. Дирак дополнил три матрицы Паули единичной матрицей и получил набор четырех антикоммутирующих матриц, который является полным в том смысле, что любую постоянную 2×2-матрицу M можно записать как

$$M = c_0 I + c_1 \hat{\sigma}_1 + c_2 \hat{\sigma}_2 + c_3 \hat{\sigma}_3, \tag{4.87}$$

где c_0, c_1, c_2 и c_3 — постоянные. Следовательно, система матриц Паули была неполной, поскольку не было четвертой антикоммутирующей матрицы. Можно показать, что 3×3-матрицы не могут образовать полного набора четырех антикоммутирующих матриц.

Обратимся вновь к 4×4-матрицам и построим полный набор из матриц Паули. Положим

$$\hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & O \\ O & \hat{\sigma}_i \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \tag{4.88}$$

каждый матричный элемент этих матриц представляет собой 2×2-матрицу. Например,

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.89}$$

Первоначально Дирак выбрал набор следующих четырех матриц:

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\rho}_1\hat{\sigma}_i,\ \hat{\alpha}_4 \equiv \hat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3. \quad (4.90)$$

Если же добавить матрицу $\hat{\rho}_2$, заданную в виде

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & -i\boldsymbol{I} \\ i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

то можно показать, что эти 4×4-матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i &= 2\delta_{ij}\boldsymbol{I} \\ \hat{\rho}_i\hat{\rho}_j + \hat{\rho}_i\hat{\rho}_i &= 2\delta_{ij}\boldsymbol{I} \end{aligned}\right\} \text{(антикоммутация)} \quad (4.92)$$

$$\hat{\sigma}_i\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_j\hat{\sigma}_i \equiv [\hat{\sigma}_i, \hat{\rho}_j] = 0 \text{ (коммутация)} \quad (4.93)$$

и

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = i\hat{\sigma}_k,\ \hat{\rho}_i\hat{\rho}_j = i\hat{\rho}_k \text{ — циклическая перестановка индексов.} \quad (4.94)$$

В табл. 4.1 сведены матрицы Дирака, образованные перемножением рассмотренных матриц. Обозначим эти 4×4-матрицы Дирака $\boldsymbol{E}_{ij} = \hat{\rho}_i\,\hat{\sigma}_j$. Имея в виду, что $\hat{\rho}_0 = \hat{\sigma}_0 = \boldsymbol{I}$ (единичная матрица), можно сказать, что индексы $i, j = 0, 1, 2, 3$. Эти 16 матриц обладают интересными свойствами:

1) $\boldsymbol{E}_{ij}^2 = \boldsymbol{I}$;

2) $\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{E}_{ij}^{\dagger}$, т. е. все эти три матрицы эрмитовы и, следовательно, на основании свойства 1, унитарны;

3) шестнадцать матриц E_{ij} *почти* образуют математическую группу * (в результате умножения любых двух из этих матриц получается третья, принадлежащая тому

* E_{ij} можно видоизменить так, чтобы они в точности удовлетворяли определению группы, но тогда они потеряют свойства эрмитовости и унитарности.

же набору матриц, с точностью до множителя -1 или $\pm i$);

4) все матрицы E_{ij} линейно независимы, т. е. ни одну из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных 15 матриц;

Таблица 4.1

Матрица	I	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
I	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ I	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ $\hat{\sigma}_1$	$\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$ $\hat{\sigma}_2$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ $\hat{\sigma}_3$
$\hat{\rho}_1$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\rho}_1,\ -\hat{\gamma}_5$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\alpha}_1$	$\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\alpha}_2$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\alpha}_3$
$\hat{\rho}_2$	$\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\rho}_2,\ \hat{\alpha}_5$	$\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\gamma}_1$	$\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\gamma}_2$	$\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}$ $\hat{\gamma}_3$
$\hat{\rho}_3$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ $\hat{\rho}_3,\ \hat{\alpha}_4,\ \hat{\gamma}_4,\ \hat{\beta}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$ $\hat{\delta}_1$	$\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix}$ $\hat{\delta}_2$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\hat{\delta}_3$

5) шестнадцать матриц E_{ij} образуют полную систему, т. е. любую 4×4-матрицу (с постоянными элементами) можно записать в виде линейной комбинации данных 16 матриц

$$A=\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij}E_{ij},$$

где коэффициенты c_{ij} (вещественные или комплексные) постоянны.

Наборы антикоммутирующих матриц. Из указанных 16 эрмитовых матриц можно получить шесть наборов антикоммутирующих матриц по пять матриц в каждом. Используя обозначения табл. 4.1, выпишем эти наборы:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \hat{\alpha}_1,\ \hat{\alpha}_2,\ \hat{\alpha}_3,\ \hat{\alpha}_4,\ \hat{\alpha}_5; & 4.\ \hat{\alpha}_1,\ \hat{\gamma}_1,\ \hat{\delta}_1,\ \hat{\sigma}_2,\ \hat{\sigma}_3; \\ 2.\ \hat{\gamma}_1,\ \hat{\gamma}_2,\ \hat{\gamma}_3,\ \hat{\gamma}_4,\ \hat{\gamma}_5; & 5.\ \hat{\alpha}_2,\ \hat{\gamma}_2,\ \hat{\delta}_2,\ \hat{\sigma}_1,\ \hat{\delta}_3; \\ 3.\ \hat{\delta}_1,\ \hat{\delta}_2,\ \hat{\delta}_3,\ \hat{\rho}_1,\ \hat{\rho}_2; & 6.\ \hat{\alpha}_3,\ \hat{\gamma}_3,\ \hat{\delta}_3,\ \hat{\sigma}_1,\ \hat{\sigma}_2. \end{array}\right\} \quad (4.95)$$

Наряду с набором $\hat{\alpha}$-матриц в релятивистской квантовой механике широко используются $\hat{\gamma}$-матрицы.

Обсуждение ортогональных матриц в разд. 4.3 и унитарных матриц в этом разделе следует рассматривать только как некоторое введение. Дальнейшее развитие матричный анализ получил в современной теории элементарных частиц. На основе матриц Паули и Дирака можно построить спиноры, которые используются в теории электронов, протонов и других частиц со спином 1/2. Поворот систем координат описывается группой вращения $\mathscr{D}$, составленной обычно из матриц, элементы которых зависят от углов, определяющих данное вращение. Очень плодотворным оказалось применение специальной унитарной группы $SU(n)$ в теории тяжелых частиц — мезонов и бозонов.

Упражнения

1. Показать, что $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

2. Даны эрмитовы матрицы A и B. Показать, что матрицы $(AB+BA)$ и $i(AB-BA)$ также эрмитовы.

3. Доказать унитарность обратной матрицы, если исходная матрица унитарна.

4. Показать, что эрмитовость матрицы сохраняется при унитарных преобразованиях подобия.

5. Дана матрица $C=S^\dagger S$. Показать, что след матрицы C положителен, если только S — ненулевая матрица, в последнем случае $\mathrm{Tr}\, C=0$.

6. Показать, что все 4×4-матрицы (элементами которых служат комплексные числа) можно представить в виде линейной комбинации матриц I, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_4$ и их произведений.

7. Обозначив 16 матриц Дирака $E_{ij}=\hat{\rho}_i\,\hat{\sigma}_j$ ($\rho_0=\sigma_0=I$), показать, что $E_{ij}^2=I$ для всех i и j и, кроме того, $E_{ij}=E_{ij}^\dagger$. *Замечание.* Воспользоваться известными свойствами матриц $\hat{\rho}_i$ и $\hat{\sigma}_j$.

8. Проверить справедливость уравнений (4.92) — (4.94) для 4×4-матриц $\hat{\sigma}$ и $\hat{\rho}$.

9. Воспользоваться уравнениями (4.93) и (4.94) и показать, что матрицы набора (4.95), образующие шесть различных систем, действительно антикоммутируют.

10. С помощью уравнений (4.93) и (4.94) показать, что

$$\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_3\hat{\alpha}_4\hat{\alpha}_5=+1, \quad \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_5=+1.$$

11. Доказать, что $M^2=M$, если $M=(I+\hat{\gamma}_5)/2$.

Отметим, что матрицу $\hat{\gamma}_5$ можно заменить на любую другую матрицу Дирака (на любую матрицу E_{ij} из табл. 4.1).

4.5. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МАТРИЦ

Матрица момента инерции. Во многих задачах физики, требующих привлечения матричного анализа для приведения матрицы к диагональной форме, желательно произвести ортогональное преобразование подобия или унитарное преобразование, которое все недиагональные матричные элементы делает нулевыми. Проиллюстрируем этот метод на известном примере матрицы момента инерции J твердого тела. По определению момента количества движения,

$$\mathbf{L}=J\boldsymbol{\omega}, \tag{4.96}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость. Диагональные элементы J равны

$$J_{xx}=\sum_i m_i\,(r_i^2-x_i^2) \text{ и т. д.} \tag{4.97}$$

Индекс i относится к массе m_i. Для недиагональных элементов имеем

$$J_{xy}=-\sum_i m_i x_i y_i=J_{yx}. \tag{4.98}$$

Проверка показывает, что матрица J симметрична. Кроме того, поскольку J входит в уравнение (4.96), которое справедливо для любых ориентаций системы координат, ее можно считать тензором.

Задача состоит теперь в том, как ориентировать координатные оси в пространстве, чтобы J_{xy} и другие недиагональные элементы стали нулевыми. Следствием и признаком такой ориентации является параллельность векторов угловой скорости и момента количества движения в том случае, если угловая скорость направлена вдоль одной из таких переориентированных осей.

Геометрическая трактовка — эллипсоид. Умножим матрицу J справа и слева на единичный вектор переменного направления $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$[\mathbf{n}]\, J\, \{\mathbf{n}\} = \mathbf{I}. \tag{4.99}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — число (скаляр), величина которого зависит от выбора направления $\mathbf{n}$. Выполним умножение

$$\mathbf{I} = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 + 2J_{xy}\alpha\beta + 2J_{xz}\alpha\gamma + \\ + 2J_{yz}\beta\gamma. \tag{4.100}$$

Введем обозначение

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n}/\sqrt{\mathbf{I}}, \tag{4.101}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ изменяется по величине и направлению. Тогда уравнение (4.100) примет общую форму уравнения эллипсоида

$$1 = J_{xx}\rho_1^2 + J_{yy}\rho_2^2 + J_{zz}\rho_3^2 + 2J_{xy}\rho_1\rho_2 + 2J_{xz}\rho_1\rho_3 + 2J_{yz}\rho_2\rho_3 \tag{4.102}$$

в переменных ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Из аналитической геометрии известно, что координатные оси всегда можно повернуть таким

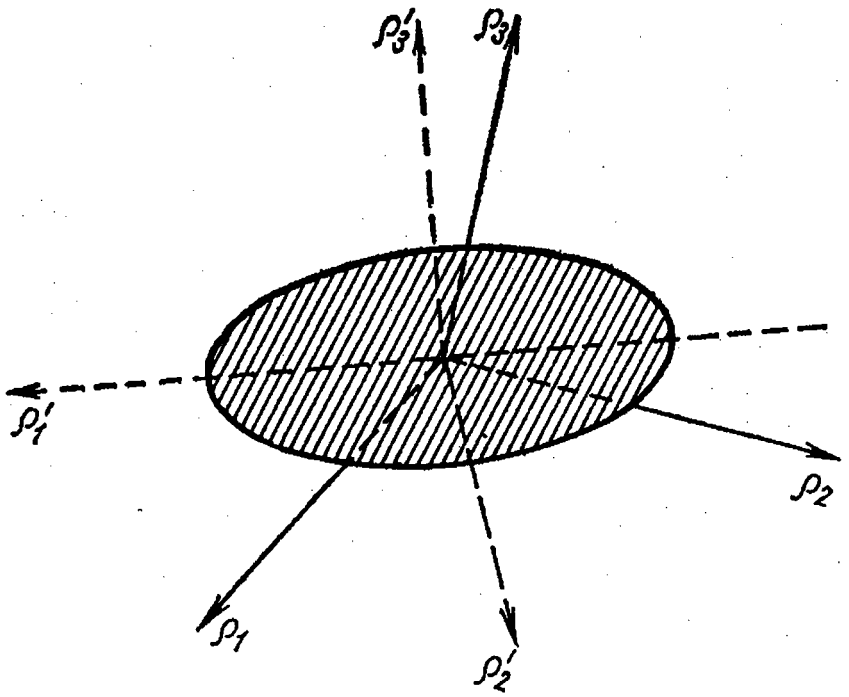


Рис. 4.3. Эллипсоид момента инерции.

образом, чтобы они совпали с главными осями эллипсоида (рис. 4.3). Тогда

$$1 = J_1\rho_1'^2 + J_2\rho_2'^2 + J_3\rho_3'^2, \tag{4.103}$$

где ρ_1', ρ_2' и ρ_3' образуют новый набор координат.

Эрмитовы матрицы. Начнем с важной теоремы о диагональных элементах и главных осях. В уравнении

$$\boldsymbol{A}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \tag{4.104}$$

число λ (скаляр) — собственное значение, соответствующий вектор $\mathbf{r}$ — собственный вектор *. Мы докажем сейчас, что если $\boldsymbol{A}$ — эрмитова матрица **, то ее собственные значения вещественны, а собственные векторы ортогональны.

Пусть λ_i, λ_j — собственные значения, $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ — соответствующие собственные векторы эрмитовой матрицы $\boldsymbol{A}$. Тогда

$$\boldsymbol{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i, \tag{4.105}$$

$$\boldsymbol{A}\mathbf{r}_j = \lambda_j\mathbf{r}_j. \tag{4.106}$$

Умножим уравнение (4.105) на $\mathbf{r}_j^\dagger$:

$$\mathbf{r}_j^\dagger\boldsymbol{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_j^\dagger\mathbf{r}_i. \tag{4.107}$$

(Заметим, что если $\mathbf{r}$ — вектор-столбец, то $\mathbf{r}^\dagger$ — вектор-строка.) Уравнение (4.106) умножим на $\mathbf{r}_i^\dagger$:

$$\mathbf{r}_i^\dagger\boldsymbol{A}\mathbf{r}_j = \lambda_j\mathbf{r}_i^\dagger\mathbf{r}_j. \tag{4.108}$$

Применим к этому уравнению операцию комплексного сопряжения:

$$\mathbf{r}_j^\dagger\boldsymbol{A}^\dagger\mathbf{r}_i = \lambda_j^*\mathbf{r}_j^\dagger\mathbf{r}_i, \tag{4.109}$$

или, в силу эрмитовости $\boldsymbol{A}$,

$$\mathbf{r}_j^\dagger\boldsymbol{A}\mathbf{r}_i = \lambda_j^*\mathbf{r}_j\mathbf{r}_i. \tag{4.110}$$

Подставив (4.110) в уравнение (4.107), получим

$$(\lambda_i - \lambda_j^*)\,\mathbf{r}_j^\dagger\mathbf{r}_i = 0. \tag{4.111}$$

Это соотношение носит общий характер и выполняется для всех возможных комбинаций i и j. Положим сначала $i = j$. Тогда из последнего уравнения имеем

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)\,|\mathbf{r}_i|^2 = 0. \tag{4.112}$$

---

* Уравнению (4.96) можно придать такой же вид, если взять $\boldsymbol{\omega}$ в направлении одной из главных осей. Тогда $\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ и $J\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$.

** Если матричные элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ вещественны, то требование эрмитовости заменяется требованием симметрии.

Поскольку $|\mathbf{r}_i| = 0$ представляет собой тривиальное решение уравнения (4.112), мы вправе записать, что

$$\lambda_i = \lambda_i^*, \tag{4.113}$$

т. е. λ_i — вещественные числа при любых i.

В случае $i \neq j$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$(\lambda_i - \lambda_j)\,\mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i = 0 \tag{4.114}$$

или

$$\mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i = 0, \tag{4.115}$$

а это означает, что собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны; уравнение (4.115) служит обобщением свойства ортогональности на комплексное пространство.

Если $\lambda_i = \lambda_j$ (вырожденный случай), $\mathbf{r}_i$ не может автоматически быть ортогональным $\mathbf{r}_j$, но его можно сделать ортогональным. Обратимся вновь к матрице момента инерции. Если x_1 совпадает с осью вращательной симметрии, то $\lambda_2 = \lambda_3$. Оба собственных вектора $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ перпендикулярны к оси симметрии $\mathbf{r}_1$, однако их положение произвольно в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{r}_1$; таким образом, любая линейная комбинация $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ — также собственный вектор. Рассмотрим $a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3$, где a_2 и a_3 постоянны. Тогда

$$A(a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3) = a_2\lambda_2\mathbf{r}_2 + a_3\lambda_3\mathbf{r}_3 = \lambda_2(a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3), \tag{4.116}$$

что и следовало ожидать, так как x_1 — ось вращательной симметрии. Следовательно, если $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ фиксированы, $\mathbf{r}_3$ можно просто выбрать перпендикулярным $\mathbf{r}_2$ и лежащим в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{r}_1$. Общий метод получения ортогональных решений, так называемый метод Шмидта, применительно к функциям изложен в разд. 9.3.

Все, о чем говорилось выше, по существу представляет собой теорему существования. Для нахождения собственных значений λ_i и собственных векторов $\mathbf{r}_i$ обратимся к уравнению (4.104). Предполагая, что $\mathbf{r}$ умножен на единичную матрицу, перепишем уравнение (4.104)

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{r} = 0, \tag{4.117}$$

здесь I — единичная матрица. Мы получили систему однородных линейных уравнений. Как установлено в разд. 4.1, она имеет нетривиальные решения только в том случае, если определитель из коэффициентов этой

системы равен нулю

$$|A-\lambda I|=0. \tag{4.118}$$

Остановимся на случае, когда A представляет собой эрмитову матрицу из девяти элементов. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{4.119}$$

Это уравнение часто используют в астрономии, поэтому его обычно называют *секулярным* или *вековым* уравнением. Выражение (4.119) сводится к кубическому уравнению относительно λ, которое, конечно, имеет три корня. Из (4.113) мы знаем, что эти корни вещественны. Подставляя конкретные значения корней в уравнение (4.117), можно найти соответствующие собственные векторы.

Пример 1. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.120}$$

Секулярное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{4.121}$$

или

$$-\lambda(\lambda^2-1)=0. \tag{4.122}$$

Корни этого уравнения $\lambda=-1,\ 0,\ 1$. Для нахождения собственного вектора, соответствующего $\lambda=-1$, подставим это значение в уравнение (4.117)

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.123}$$

при $\lambda=-1$ это дает

$$x+y=0,\quad z=0. \tag{4.124}$$

С точностью до произвольного множителя и произвольного знака (или фазы) $\mathbf{r}_1=(1,\ -1,\ 0)$. Отметим, что (для вещественных $\mathbf{r}$ в обычном пространстве) собственный вектор определяет линию в пространстве,

Однако его знак произволен. Эту неопределенность можно было ожидать заранее, если вспомнить, что уравнение (4.117) однородно относительно $\mathbf{r}$. Для простоты мы потребуем, чтобы собственные векторы были нормированы на единицу $|\mathbf{r}_1|=1$. При таком выборе

$$\mathbf{r}_1=(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0). \tag{4.125}$$

Для $\lambda=0$ уравнение (4.117) приводит к

$$y=0,\ x=0, \tag{4.126}$$

откуда второй собственный вектор $\mathbf{r}_2=(0,\ 0,\ 1)$. Наконец, для $\lambda=1$ получим

$$-x+y=0,\ z=0 \tag{4.127}$$

или

$$\mathbf{r}_3=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0). \tag{4.128}$$

Легко убедиться в ортогональности $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$, соответствующих трем собственным значениям.

Пример. 2. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.129}$$

Секулярное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{4.130}$$

или

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0,\ \lambda=-1,\ 1,\ 1, \tag{4.131}$$

т. е. мы имеем вырожденный случай. Если $\lambda=-1$, то уравнение для собственных значений (4.117) дает

$$2x=0,\ y+z=0. \tag{4.132}$$

Соответствующий нормированный собственный вектор равен

$$\mathbf{r}_1=(0,\ 1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}). \tag{4.133}$$

Для $\lambda=1$ получим

$$-y+z=0, \tag{4.134}$$

никакой дополнительной информации относительно переменной x не имеется. Мы получили бесконечное число возможных значений. Допустим, что один из возможных вариантов—

$$\mathbf{r}_2=(0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}), \tag{4.135}$$

который удовлетворяет уравнению (4.134). Поскольку $\mathbf{r}_3$ должен быть перпендикулярен $\mathbf{r}_1$ и его можно выбрать перпендикулярным $\mathbf{r}_2$, поло-

жим его равным

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (1, 0, 0). \tag{4.136}$$

Диагонализация. Для получения матрицы преобразования, которая приводит эрмитову матрицу $\boldsymbol{A}$ к диагональному виду, можно воспользоваться уравнениями, выведенными при доказательстве теоремы единственности. Пусть $\boldsymbol{R}$ — матрица, образованная из трех ортонормированных вектор-столбцов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$, расположенных в требуемом порядке,

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \tag{4.137}$$

в которой каждый столбец $[x_i, y_i, z_i]$ представляет собой собственный вектор $\mathbf{r}_i$. Поскольку

$$\mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j = \delta_{ij}, \tag{4.138}$$

матрица $\boldsymbol{R}$ унитарна (или просто ортогональна, если $\boldsymbol{A}$ и, следовательно, $\mathbf{r}_i$ вещественны). Тогда, преобразуя $\boldsymbol{R}^\dagger \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}$, имеем

$$\boldsymbol{R}^\dagger \boldsymbol{A} \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} [\mathbf{r}_1^*] \\ [\mathbf{r}_2^*] \\ [\mathbf{r}_3^*] \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \left(\{\mathbf{r}_1\}\{\mathbf{r}_2\}\{\mathbf{r}_3\}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} [\mathbf{r}_1^*] \\ [\mathbf{r}_2^*] \\ [\mathbf{r}_3^*] \end{pmatrix} \left(\{\lambda_1 \mathbf{r}\}\{\lambda_2 \mathbf{r}_2\}\{\lambda_3 \mathbf{r}_3\}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{4.139}$$

Отсюда видно, что $\boldsymbol{R}^\dagger \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}$ — диагональная матрица с собственными значениями λ_i, порядок собственных значений соответствует порядку вектор-столбцов $\mathbf{r}_i$ в $\boldsymbol{R}$. Чтобы дать геометрическую трактовку, возьмем в качестве примера вещественную (симметричную) матрицу $\boldsymbol{A}$ с вещественными собственными значениями и собственными векторами. Матрица $\boldsymbol{R}$ соответствует $\boldsymbol{B}^{-1}$ из уравнения (4.68) или, что лучше, $\tilde{\boldsymbol{R}}$ соответствует $\boldsymbol{B}$; $\tilde{\boldsymbol{R}}$ составлена из собственных векторов $\mathbf{r}_i$, записанных в виде вектор-строк:

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{r}_1] \\ [\mathbf{r}_2] \\ [\mathbf{r}_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.140}$$

Далее, строка $[b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}]$, которая определяет единичный вектор $\mathbf{r}_i$ в первоначальной системе координат, задает три направляющих косинуса, характеризующих расположение $\mathbf{r}_i$ относительно осей этой системы. Поскольку B осуществляет поворот системы координат, причем в новой системе матрица A диагональна, новая система определена с помощью трех собственных векторов $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Они являются единичными векторами, направленными вдоль главных осей, т. е. тех осей, относительно которых матрица A диагональна.

Содержание этого раздела дает представление о диагонализации матриц. Однако для матриц размером более чем 3×3 процесс диагонализации становится настолько затруднительным, что гораздо целесообразнее использовать вычислительные машины и итерационные методы.

Упражнения

1. Показать, что собственные значения матрицы не изменяются при преобразовании подобия.

2. Предполагая, что унитарная матрица U удовлетворяет уравнению для собственных значений $U\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$, показать, что собственные значения унитарной матрицы равны единице.

3. Две матрицы диагонализируются с помощью одного и того же преобразования подобия. Показать, что исходные матрицы должны коммутировать. *Замечание.* Это свойство особенно важно в матричной (гейзенберговской) формулировке квантовой механики.

4. Две эрмитовы матрицы A и B имеют одинаковые собственные значения. Показать, что эти матрицы связаны унитарным преобразованием подобия.

5. Найти матрицу преобразования, которая связывает матрицы единичного спина из упр. 3 и 4 к разд. 4.2 (преобразование подобия). *Замечание.* Необходимо помнить, что мы можем по своему усмотрению распорядиться фазовым множителем.

6. Найти собственные значения и построить матрицы R и R^{-1}, которые будут приводить матрицу A к диагональному виду $A' = R^{-1}AR$. Считать, что A равно $\hat{\sigma}_1$ или $\hat{\sigma}_2$ из набора спиновых матриц Паули (упр. 1 к разд. 4.2).

7. Определить собственные значения и найти систему соответствующих ортонормированных (ортогональных и нормированных) собственных векторов для матриц из упр. 3, 4 и 5 к разд. 4.2.

8. Найти собственные значения и соответствующие ортонормированные собственные векторы для следующих матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & -14 \end{pmatrix}, \quad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 9) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: 1) $\lambda=0, 1, 2$; 2) $\lambda=-17, -1, 10$; 3) $\lambda=-1, 0, 2$; 4) $\lambda=-1, 1, 2$; 5) $\lambda=-3, 1, 5$; 6) $\lambda=0, 1, 2$; 7) $\lambda=-1, 1, 2$; 8) $\lambda=-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$; 9) $\lambda=0, 2, 2$.

9. Твердое тело задано тремя точечными массами $m_1=1$ в точке $(1, 1, -2)$; $m_2=2$ в точке $(-1, -1, 0)$; $m_3=1$ в точке $(1, 1, 2)$. Найти матрицу инерции, диагонализировать ее и определить собственные значения и главные оси (ортонормированные собственные векторы).

10. Показать, что недиагональную матрицу с вещественными матричными элементами нельзя диагонализировать ортогональным преобразованием подобия.

11. Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется *сингулярной*.

Показать, что необходимым и достаточным условием существования для сингулярной матрицы A, по крайней мере одного ненулевого вектор-столбца v, является равенство

$$A\mathrm{v}=0.$$

ГЛАВА 5

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Выражение вида $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ называется бесконечным рядом, в котором суммируется бесконечное число членов. В основе теории функций часто лежит представление исследуемых функций рядами. С помощью рядов вычисляют точные значения трансцендентных констант, функций и интегралы (разд. 5.6 и 5.7), решают дифференциальные уравнения (разд. 8.4 и 8.5), рядами Фурье (гл. 14) наряду с интегральными представлениями пользуются для описания большого числа специальных функций (гл. 11—13).

Определим значение суммы бесконечного числа членов. Для этого обычно начинают с частичных сумм. Пусть задана последовательность бесконечного числа членов $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots$ Определим i-ю частичную сумму как сумму конечного числа членов

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} u_n. \tag{5.1}$$

Если частичные суммы s_i сходятся к конечному пределу при $i \to \infty$

$$\lim_{i \to \infty} s_i = S, \tag{5.2}$$

то говорят, что бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится* к S. Важно отметить, что мы вполне разумно, но пока еще произвольно *определили* равенство суммы ряда величине S. Кроме того, следует помнить, что необходимое условие сходимости заключается в равенстве нулю предела $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. Однако это условие не является достаточным.

Частичные суммы s_i могут осциллировать, а не сходиться к определенному пределу, например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1-1+1-1+1+\ldots+(-1)^n+\ldots. \quad (5.3)$$

Очевидно, для четных i $s_i = 1$, а для нечетных $s_i = 0$. В данном случае ряд не имеет предела, подобные ряды называют осциллирующими.

Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\ldots+n+\ldots \quad (5.4)$$

мы имеем

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5.5)$$

При $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \quad (5.6)$$

Всякий раз, когда последовательность частичных сумм расходится (стремится к $\pm\infty$), бесконечный ряд называется *расходящимся*. Часто расходящимся называют и осциллирующий ряд.

Поскольку мы оценивали частичные суммы по правилам обычной арифметики, сходящиеся ряды, определенные как пределы частичных сумм, предполагают существование точной верхней границы. Два следующих примера помогут выяснить главные свойства сходящихся и расходящихся рядов, а также послужат основой для дальнейшего рассмотрения.

Геометрическая прогрессия, первый член которой равен a, а знаменатель r ($r \geqslant 0$), имеет вид: a, ar, ar^2, ar^3, . . ., ar^{n-1}, . . . Частичная сумма прогрессии равна

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}. \quad (5.7)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} \quad \text{для } r < 1. \quad (5.8)$$

Следовательно, бесконечный ряд, образованный геометрической прогрессией, сходится при $r<1$ и имеет своей суммой

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}. \tag{5.9}$$

С другой стороны, если $r \geqslant 1$, необходимое условие $u_n \to 0$ не выполняется, и бесконечный ряд расходится.

В качестве второго, более сложного примера, рассмотрим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{5.10}$$

Мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но этого недостаточно для сходимости ряда. Если сгруппировать члены ряда (не изменяя их порядка) так:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots, \tag{5.11}$$

то можно заметить, что в каждых скобках содержится p членов вида

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{p+p} > \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}. \tag{5.12}$$

Образуем частичные суммы последовательным сложением сгруппированных членов:

$$\left.\begin{aligned} &s_1 = 1,\ s_2 = \frac{3}{2},\ s_3 > \frac{4}{2}, \\ &s_4 > \frac{5}{2},\ s_5 > \frac{6}{2},\ \ldots,\ s_n > \frac{n+1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Теперь очевидно, что гармонический ряд безусловно расходится. В разд. 5.2 мы проведем другое независимое от этого доказательство его расходимости.

Используя биномиальную теорему * (разд. 5.6), можно разложить функцию $(1+x)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^{n-1} + \ldots \tag{5.14}$$

* Действительно, уравнение (5.14) можно рассматривать как тождество, которое, проверяется умножением его обеих частей на $(1+x)$.

Если положить $x \to 1$, то это разложение перейдет в ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots, \tag{5.15}$$

который выше мы назвали осциллирующим. Несмотря на то что он не сходится в обычном смысле, ему можно приписать определенное значение. Эйлер, например, на основании соответствия этого ряда хорошо известной функции $(1 + x)^{-1}$ приписывал сумме этих осциллирующих чисел значение 1/2. Однако такое соответствие между рядом и функцией неоднозначно, поэтому здесь требуется уточнение. Разработаны и другие методы определения значения расходящихся или осциллирующих рядов.

5.2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ

В некоторых специальных случаях (см. разд. 5.10) можно использовать и расходящиеся ряды, однако мы обычно будем требовать, чтобы ряды были сходящимися, поэтому важно знать заранее, сходится ли данный ряд. Мы исследуем несколько признаков сходимости, начиная с простых и сравнительно грубых и кончая более сложными и совершенно строгими. Для начала будем полагать, что члены ряда — положительные числа: $a_n > 0$.

Сравнительный признак. *Если для любого члена ряда выполняется неравенство* $u_n \leqslant a_n$, *причем* $\sum_n a_n$ *сходится, то ряд* $\sum_n u_n$ *также сходится. Если для любого члена ряда выполняется неравенство* $v_n \geqslant b_n$, *причем* $\sum_n b_n$ *расходится, то и ряд* $\sum_n v_n$ *расходится.*

В качестве сходящегося ряда a_n мы уже рассматривали геометрическую прогрессию, тогда как гармонический ряд служил примером расходящегося ряда. Наряду с другими сходящимися или расходящимися рядами их можно использовать для исследования сходимости заданных рядов с помощью сравнительного признака.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum_n n^{-p}$ при $p = 0{,}999$.

Очевидно, $n^{-0{,}999} > n^{-1}$, а $b_n = n^{-1}$ образует расходящийся гармонический ряд, следовательно, на основании сравнительного признака

ряд $\sum_n n^{-0,999}$ расходится. Вообще, очевидно, ряд $\sum_n n^{-p}$ расходится при любых $p \leqslant 1$.

Признак Коши. *Если* $a_n^{1/n} \leqslant r < 1$ *для всех достаточно больших* n, *причем* r *не зависит от* n, *то ряд* $\sum_n a_n$ *сходится. Если* $a_n^{1/n} \geqslant 1$ *для всех достаточно больших* n, *то ряд* $\sum_n a_n$ *расходится.*

Первую часть этого признака легко доказать, возводя $a_n^{1/n} \leqslant r$ в степень n. В результате получим

$$a_n \leqslant r^n < 1.$$

Поскольку r^n в точности равен n-му члену сходящегося ряда (геометрическая прогрессия), ряд $\sum_n a_n$ сходится на основании сравнительного признака. И наоборот, если $a_n^{1/n} \geqslant 1$, то $a_n \geqslant 1$, и ряд расходится. Этот признак особенно удобен при исследовании сходимости степенных рядов (см. разд. 5.7).

Признак Даламбера. *Если* $a_{n+1}/a_n \leqslant r < 1$ *для всех достаточно больших* n, *причем* r *не зависит от* n, *то ряд* $\sum_n a_n$ *сходится. Если* $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ *для всех достаточно больших* n, *то ряд* $\sum_n a_n$ *расходится.*

Сходимость доказывается прямым сравнением с геометрической прогрессией $a_n(1 + r + r^2 + \ldots)$. Вторая часть признака означает, что $a_{n+1} \geqslant a_n$, в силу чего расходимость должна быть достаточно очевидной. Хотя признак Даламбера не является таким чувствительным, как признак Коши, однако он относится к числу наиболее удобных и поэтому используется очень часто. Запишем этот признак сходимости в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1 & \text{ряд сходится,} \\ > 1 & \text{ряд расходится,} \\ = 1 & \text{неопределенность.} \end{cases} \qquad (5.16)$$

Вследствие неопределенности, возникшей в третьем варианте, признак сходимости Даламбера может привести к ошибке в точках поворота, поэтому необходимы более тонкие

и чувствительные признаки. Возникает вопрос: откуда появилась эта неопределенность. В действительности же она содержалась уже в первом условии $a_{n+1}/a_n \leqslant r < 1$. Можно столкнуться с таким положением, когда $a_{n+1}/a_n < 1$, но нельзя выбрать $r < 1$, независимое от n, так, чтобы $a_{n+1}/a_n \leqslant r$ для всех достаточно больших n. Поясним это на примере того же гармонического ряда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1. \tag{5.17}$$

Вследствие того что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \tag{5.18}$$

нельзя найти такое $r < 1$, чтобы при любых n выполнилось исходное требование признака, т. е. в этом случае указанным признаком пользоваться нельзя.

Пример 2. Исследуем сходимость ряда $\sum_n \frac{n}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}. \tag{5.19}$$

Поскольку

$$a_{n+1}/a_n \leqslant 3/4 \quad \text{для} \quad n \geqslant 2, \tag{5.20}$$

указанный ряд сходится. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = 1/2, \tag{5.21}$$

и мы вновь получим подтверждение сходимости ряда.

Интегральный признак Коши. *Пусть $f(x)$—непрерывная монотонная функция, такая, что $f(n) = a_n$. Тогда ряд $\sum_n a_n$ сходится, если интеграл $\int_1^\infty f(x)\,dx$ конечен, и расходится, если этот интеграл бесконечен.*

Этот признак представляет собой разновидность сравнительного признака сходимости, в нем ряд сравнивается с интегралом. С геометрической точки зрения мы сравниваем суммарную площадь прямоугольников единичной ширины с площадью, ограниченной кривой.

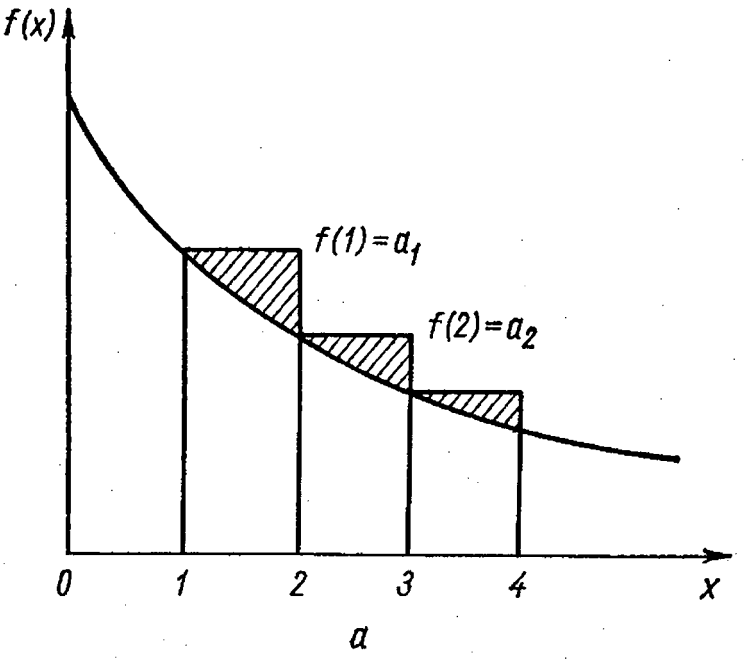
Для i-й частичной суммы

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} a_n = \sum_{n=1}^{i} f(n), \tag{5.22}$$

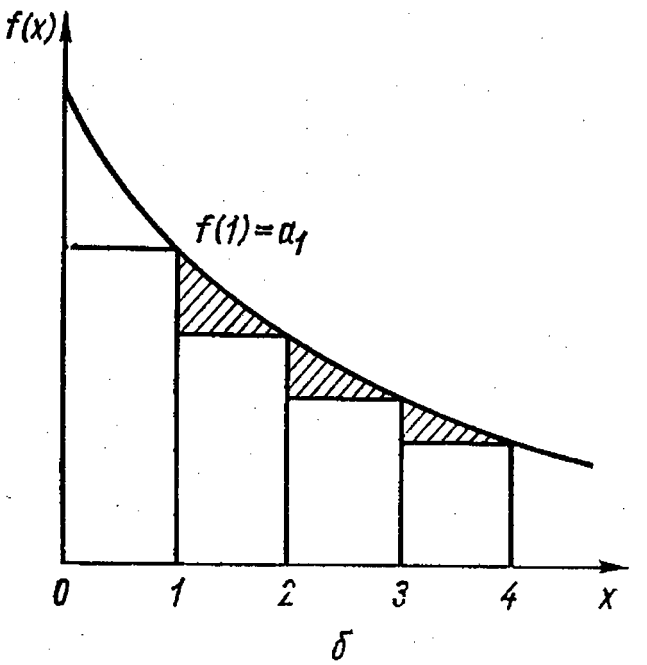
но

$$s_i > \int_1^{i+1} f(x)\,dx, \tag{5.23}$$

если $f(x)$ монотонно убывает (рис. 5.1, *а*). С другой сто-



а



б

Рис. 5.1. Приближение интеграла прямоугольниками, площадь которых больше (*а*) и меньше (*б*) площади, ограниченной кривой $f(x)$ и осью x.

роны (рис. 5.1, *б*),

$$s_{i+1} - a_1 < \int_1^{i} f(x)\,dx. \tag{5.24}$$

Переходя к пределу $i \to \infty$, получим

$$\int_1^\infty f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^\infty f(x)\,dx + a_1. \qquad (5.25)$$

Отсюда следует, что данный бесконечный ряд сходится или расходится в зависимости от сходимости или расходимости соответствующего интеграла.

Пример 3. Дзета-функция Римана определена рядом

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}. \qquad (5.26)$$

Мы можем взять $f(x) = x^{-p}$ и тогда

$$\int_1^\infty x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^\infty, & p \neq 1, \\ \ln x\,|_1^\infty, & p = 1. \end{cases} \qquad (5.27)$$

Интеграл, а следовательно, и ряд расходится при $p \leqslant 1$ и сходится при $p > 1$. Мы получили еще одно независимое доказательство, что гармонический ряд расходится ($p = 1$), причем расходится логарифмически. Сумма первого миллиона членов гармонического ряда равна 14,392726 ...

Рассмотренный интегральный признак помогает также определить верхний предел постоянной Эйлера C, определенной формулой

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} m^{-1} - \ln n \right). \qquad (5.28)$$

Обратимся к частичным суммам

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} m^{-1} - \ln n < \int_1^n \frac{dx}{x} - \ln n + 1. \qquad (5.29)$$

Оценивая интеграл справа, мы видим, что $s_n < 1$ при любых n, и поэтому $C < 1$. Действительно, постоянная Эйлера равна 0,57721566490...

Признак сходимости Куммера. Можно показать, что не существует такого сходящегося ряда, который характеризовался бы наименьшей скоростью сходимости, в равной мере нельзя указать и такого расходящегося ряда, который отличался бы самой медленной расходимостью, т. е.

признаки сходимости, включая и признак Куммера, могут иногда не дать желаемого результата.

Мы рассмотрим ряд из положительных u_i, а также ряд, составленный из ограниченных положительных констант a_i.

Если

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant C > 0 \tag{5.30}$$

для всех $n \geqslant N$, *где* N — *некоторое фиксированное число, то ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходится. Если же*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0 \tag{5.31}$$

и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$ *расходится, то и ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *также расходится.*

Доказательство этого весьма чувствительного признака чрезвычайно просто. Из неравенства (5.30), в котором C — некоторая положительная постоянная, имеем

$$\left.\begin{aligned} &Cu_{N+1} \leqslant a_N u_N - a_{N+1} u_{N+1}, \\ &Cu_{N+2} \leqslant a_{N+1} u_{N+1} - a_{N+2} u_{N+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Cu_n \leqslant a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n. \end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

Сложив эти выражения и разделив их на $C\,(C \neq 0)$, получим неравенство

$$\sum_{i=N+1}^{n} u_i \leqslant \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C}, \tag{5.33}$$

которое позволит оценить частичную сумму

$$s_n \leqslant \sum_{i=1}^{N} u_i + \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C} < \sum_{i=1}^{N} u_i + \frac{a_N u_N}{C}. \tag{5.34}$$

Справа стоит константа, не зависящая от n. Следовательно, частичные суммы ограничены сверху. Очевидно, нижняя граница ряда $\sum_i u_i$ — нуль, и этот ряд сходится.

Расходимость доказывается следующим образом. Из соотношения (5.31)

$$a_n u_n \geqslant a_{n-1} u_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant a_N u_N, \tag{5.35}$$

т. е.

$$u_n \geqslant \frac{a_N u_N}{a_n}, \tag{5.36}$$

и

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \geqslant a_N u_N \sum_{i=N+1}^{\infty} a_n^{-1}. \tag{5.37}$$

На основании сравнительного признака сходимости ряд $\sum_i u_i$ расходится.

Условия (5.30) и (5.31) часто задают в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) = C. \tag{5.38}$$

Следовательно, при $C > 0$ ряд сходится, в то время как для $C < 0$ (и ряд $\sum_i a_i^{-1}$ расходится) расходится. Можно доказать эквивалентность предела (5.38) и неравенств (5.30) и (5.31) и проследить характер неопределенности в случае, когда $C = 0$. По определению предела,

$$\left| a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} - C \right| < \varepsilon \tag{5.39}$$

для всех $n \geqslant N$ и любых как угодно малых $\varepsilon > 0$. Если ликвидировать знак модуля, то

$$C - \varepsilon < a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < C + \varepsilon. \tag{5.40}$$

Далее, если $C > 0$, то соотношение (5.30) следует из (5.40) при достаточно малом ε. С другой стороны, если $C < 0$, то получается условие (5.31). Однако если $C = 0$, то $a_n (u_n/u_{n+1}) - a_{n+1}$ может быть положительной или отрицательной, поэтому доказательство теряет силу. В основном признак сходимости Куммера служит для доказательства других признаков, например признака Раабе (см. также упр. 12).

Положив в признаке сходимости Куммера $a_n = n$, получим признак сходимости Раабе.

Признак сходимости Раабе. *Если* $u_n > 0$ *и, кроме того,*

$$n(u_n/u_{n+1} - 1) \geqslant P > 1 \tag{5.41}$$

при любых $n \geqslant N$, *где* N *— положительное целое число, которое не зависит от* n, *то ряд* $\sum_i u_i$ *сходится. Если*

$$n(u_n/u_{n+1} - 1) \leqslant 1, \tag{5.42}$$

то ряд $\sum_i u_i$ *расходится.*

Этот признак можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} n(u_n/u_{n+1} - 1) = P. \tag{5.43}$$

При $P > 1$ ряд сходится, при $P < 1$ — расходится, а при $P = 1$, так же как и в предыдущем случае, возникает неопределенность. Именно этот случай рассмотрен в упр. 13, где приводится как сходящийся, так и расходящийся ряд, причем для обоих рядов P из равенства (5.43) равно единице.

Признак Раабе более чувствителен по сравнению с признаком Даламбера, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ расходится гораздо медленнее ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Мы получим еще более тонкий признак (Гаусса) (и еще менее удобный для практического использования), если выберем $a_n = n \ln n$.

Признак сходимости Гаусса. *Если* $u_n > 0$ *для всех конечных* n *и*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}, \tag{5.44}$$

где $B(n)$ *— функция, ограниченная при* $n \to \infty$, *то ряд* $\sum_i u_i$ *сходится для* $h > 1$ *и расходится для* $h \leqslant 1$.

При значениях $h > 1$ или $h < 1$ доказательство следует непосредственно из признака сходимости Раабе:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{n}{h} + \frac{B(n)}{n^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty}\left[h + \frac{B(n)}{n}\right]. \tag{5.45}$$

При $h = 1$ признак Раабе нарушается. Однако если возвратиться к признаку Куммера и положить $a_n = n$,

то из условия (5.31) получим

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\ln n\left[1+\frac{1}{n}+\frac{B(n)}{n^2}\right]-(n+1)\ln(n+1)\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\ln n\cdot\frac{n+1}{n}-(n+1)\ln(n+1)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left[\ln n-\ln n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (5.46)$$

Воспользуемся результатами разд. 5.6 (которые получены независимо от признака сходимости Гаусса)

$$\lim_{n\to\infty}\left[-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-(n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\cdots\right)\right]=-1<0 \qquad (5.47)$$

т. е. при $h=1$ ряд расходится. Приведенное доказательство служит примером успешного применения признака Куммера в том случае, когда признак Раабе не работает.

Пример 4. Рекуррентная формула, которая помогает найти решение уравнения Лежандра в виде ряда (см. разд. 8.6), записывается в форме отношения

$$\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}}=\frac{2j(2j+1)-n(n+1)}{(2j+1)(2j+2)}. \qquad (5.48)$$

Это эквивалентно отношению u_{2j+2}/u_{2j} при $x=+1$. Для $j\gg n$

$$\frac{u_{2j}}{u_{2j+2}}\to\frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1)}=\frac{2j+2}{2j}=1+\frac{1}{j}. \qquad (5.49)$$

Учитывая условие (5.44), замечаем, что ряд расходится. В дальнейшем мы потребуем, чтобы ряд по полиномам Лежандра был конечным при $x=1$.

В этом разделе мы изучали сходимость как чисто математическое свойство. На практике же очень часто большое значение имеет скорость сходимости. Мы можем, например, попытаться оценить предел сходимости. Для улучшения сходимости ряда Куммер разработал специальный метод. Если имеется (медленно сходящийся) ряд S и известный ряд S', то можно записать

$$S=S'+(S-S').$$

Смысл этого несложного преобразования состоит в том,

что после подбора S' новый ряд $(S - S')$ может сходиться быстрее заданного ряда S.

Пример 5. Дан ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$. Рассмотрим

$$S' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = \frac{1}{4} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3 - n} \right) = \frac{5}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 (n^2 - 1)}, \quad (5.50)$$

сходится как n^{-5}, т. е. быстрее, чем заданный ряд, скорость сходимости которого пропорциональна n^{-3}.

Метод Куммера может оказаться очень полезным при численных оценках рядов.

Упражнения

1. Доказать, что при $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n \to A < \infty$, где $p > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = A > 0$ расходится. Этот признак сходимости не действует при $A = 0$.

Приведенный признак может оказаться удобным для исследования сходимости ряда. Привлекая ряд $\sum n^{-q}$, $1 \leqslant q < n$, его можно рассматривать как сравнительный признак.

2. Исследовать сходимость рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)]^{-1/2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}.$$

3. При каких значениях p и q сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^p}$?

Ответ:

$$\text{сходится при } \begin{cases} p>1, \text{ любые } q, \\ p=1,\ q>1; \end{cases}$$

$$\text{расходится при } \begin{cases} p<1, \text{ любые } q, \\ p=1,\ q\leqslant 1. \end{cases}$$

4. Определить область сходимости гипергеометрического ряда Гаусса

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

Замечание. Признак сходимости Гаусса был разработан им специально для исследования сходимости этого ряда. *Ответ*: сходится для $1->x<1$ и при $x=1$, если $\gamma>\alpha+\beta$.

5. Прямое вычисление на счетной машине дает $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-3}=1{,}202007$. Показать, что $1{,}202056\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3}\leqslant 1{,}202057$. *Замечание.* Воспользоваться интегралами для определения верхней и нижней границ суммы $\sum\limits_{n=101}^{\infty} n^{-3}$.

6. Доказать, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m\ln m}-\ln(\ln n)\right]$$

конечен. Выяснить, можно ли приблизительно указать верхнюю и нижнюю границы.

7. Члены ряда Лежандра $\sum\limits_{j\,(\text{четн})} u_j(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $u_{j+2}(x)=\dfrac{j(j+1)-n(n+1)}{(j+1)(j+2)}x^2u_j(x)$, в котором индекс j пробегает четные значения (в данном случае неотрицательные четные числа не рассматриваются), а n есть некоторая постоянная. Определить область изменения x, в которой этот ряд сходится. Особое внимание обратить на граничные точки этой области. *Ответ*: $-1<x<1$.

8. С помощью признака Коши исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 1/(\ln n)^n$.

9. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\,[\ln\ln n]^r}$ сходится при $r>1$ и расходится при $r\leqslant 1$.

10. Показать, что признак Даламбера представляет собой частный случай признака Куммера, если в последнем положить $a_i = 1$. На примере двух рядов показать, что признаком Раабе нельзя пользоваться в случае $P = 1$. Для этого положить $P = 1$ и исследовать расходящийся ряд $u_n = 1/n \ln n$, а также сходящийся $u_n = 1/n (\ln n)^2$.

11. Признак Гаусса часто задают в форме отношения

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n - b_0}.$$

При каких значениях параметров a_1 и b_1 $\sum u_n$ сходится (расходится)?

12. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\right]^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{64} + \frac{25}{256} + \ldots$$

13. Показать, что $\sum b_n$ сходится или расходится в зависимости от сходимости или расходимости $\sum a_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/a_n = K$, где $0 < K < \infty$ (K — постоянная). *Указание.* Рассмотреть ряды с членами $b_n' = b_n/2K$ ($b_n'' = 2b_n/K$) в случае, когда ряд $\sum a_n$ сходится (расходится).

14. Показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$. *Указание.* Показать (методом математической индукции), что $s_n = n/(2n+1)$.

15. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p!}.$$

5.3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим бесконечные ряды со знакопеременными членами. Частичное взаимное уничтожение членов, обусловленное противоположными знаками, улучшает сходимость ряда. Докажем теорему Лейбница, которая устанавливает общее условие сходимости знакопеременных рядов.

Теорема Лейбница. *Знакопеременный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, *в котором* $a_n > 0$, *сходится, если его члены монотонно убывают для достаточно больших* n *и, кроме того,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Для частичных сумм этого ряда

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n}, \\ s_{2n+2} &= s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}). \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

Поскольку $a_{2n+1} > a_{2n+2}$, имеем

$$s_{2n+2} > s_{2n}. \tag{5.52}$$

С другой стороны,

$$s_{2n+2} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - a_{2n+2}. \tag{5.53}$$

Легко видеть, что $a_{2p} - a_{2p+1} > 0$, и поэтому частичная сумма (5.53) остается ограниченной сверху:

$$s_{2n+2} < a_1. \tag{5.54}$$

Из ограниченности четных частичных сумм сверху и снизу $s_{2n} < s_{2n+2} < a_1$ и монотонного стремления a_n к нулю следует сходимость данного знакопеременного ряда.

Образуем теперь разность между суммой ряда S и частичной суммой s_n

$$\begin{aligned} S - s_n &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+5} + \ldots = \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots \end{aligned} \tag{5.55}$$

или

$$S - s_n < a_{n+1}. \tag{5.56}$$

Неравенство (5.56) показывает, что ошибка, вносимая обрезанием знакопеременного ряда на n-м члене, меньше a_{n+1}, т. е. меньше первого следующего члена.

Таким образом мы получили метод оценки ошибки, что очень важно при расчетах.

Абсолютная сходимость. Пусть Σu_n — знакопеременный сходящийся ряд, тогда если ряд $\Sigma \mid u_n \mid$ сходится, то ряд Σu_n сходится *абсолютно*; если ряд Σu_n сходится, а $\Sigma \mid u_n \mid$ расходится, то исходный ряд сходится *условно*, или *неабсолютно*.

Примером условно сходящегося ряда может служить знакопеременный гармонический ряд. На основании теоремы Лейбница ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ldots \tag{5.57}$$

сходится, тогда как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (5.58)$$

расходится.

Отметим еще раз, что все признаки сходимости, полученные в разд. 5.2, предполагали положительность членов ряда, поэтому они гарантируют абсолютную сходимость.

Упражнения

1. Исследовать ряд $\sum_k (-1)^k k^{\alpha} e^{k\beta}$ на сходимость (абсолютную или условную) для всех значений параметров α и β.

2. Показать прямым вычислением, что сумма первых десяти членов ряда $\lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}$ отличается от точного значения $\ln 2$ менее чем на величину одиннадцатого члена $\ln 2 = 0{,}6931471806\ldots$

5.4. АЛГЕБРА РЯДОВ

Можно доказать, что абсолютно сходящийся ряд подчиняется обычным, хорошо известным правилам алгебры или арифметики, поэтому для любого заданного ряда важно выяснить, является ли он абсолютно сходящимся или нет.

Имеют место следующие теоремы.

1. Если бесконечный ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от последовательности сложения членов ряда.

2. Ряд можно умножить на другой абсолютно сходящийся ряд. Сумма ряда, получившегося в результате перемножения, равна произведению сумм двух исходных рядов, а сам ряд, называемый двойным, также сходится абсолютно.

Этого нельзя утверждать для условно сходящихся рядов. Рассмотрим знакопеременный гармонический ряд. Сгруппируем его члены следующим образом:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots \qquad (5.59)$$

Очевидно, что сумма этого ряда удовлетворяет неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}<1. \tag{5.60}$$

Теперь перегруппируем члены ряда так:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{25}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{35}\right)-\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots \tag{5.61}$$

Считая, что члены, сгруппированные в отдельных скобках, образуют некоторые новые члены, имеем частичные суммы $s_1 = 1{,}5333$; $s_2 = 1{,}0333$; $s_3 = 1{,}5218$; $s_4 = 1{,}2718$; $s_5 = 1{,}5143$; $s_6 = 1{,}3476$; $s_7 = 1{,}5103$; $s_8 = 1{,}3853$; $s_9 = 1{,}5078$.

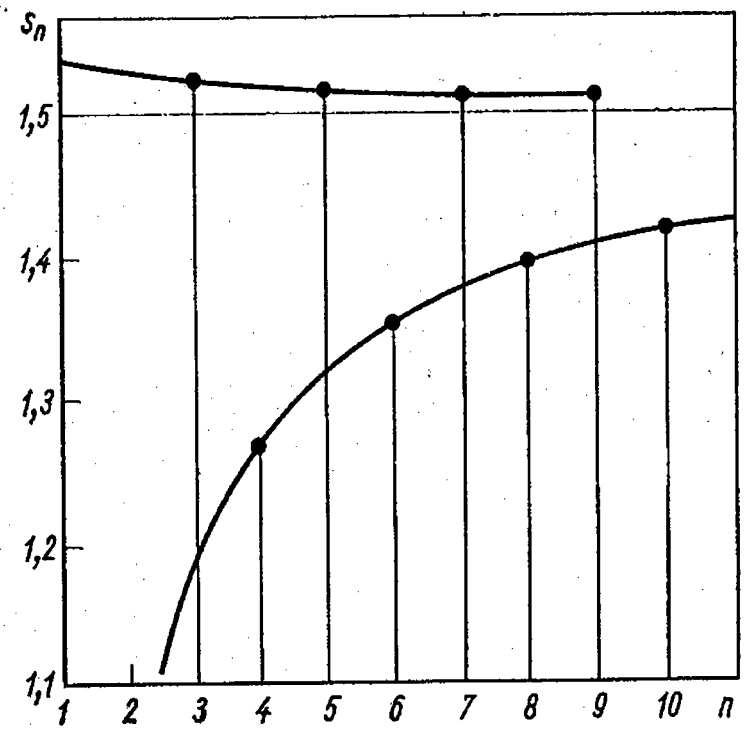


Рис. 5.2. Сходимость перегруппированного знакопеременного гармонического ряда к 1,5.

Графики зависимости значения s_n от числа членов n (рис. 5.2) ясно показывают, что ряд сходится к 1,5. Как видим, члены перегруппированы так, что сумма положительных членов равна или превосходит 1,5, последующее добавление отрицательного члена делает следующую частичную сумму меньше 1,5 и т. д. Поскольку ряд бесконечен, все его члены при такой операции окажутся

просуммированными, но частичные суммы перегруппированного знакопеременного гармонического ряда будут стремиться к 1,5.

Таким образом, *члены условно сходящегося ряда можно перегруппировать так, чтобы ряд сходился к любому требуемому пределу* (*или даже расходился*). Это утверждение называют *теоремой Римана*. Очевидно, операции с условно сходящимися рядами требуют осторожности.

В двойных рядах мы встречаемся с другими свойствами, которые являются следствием перестановки членов $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$. Введем новые индексы: $n=q\geqslant 0$, $m=p-q\geqslant 0$, $q\leqslant p$. Это приводит к тождеству

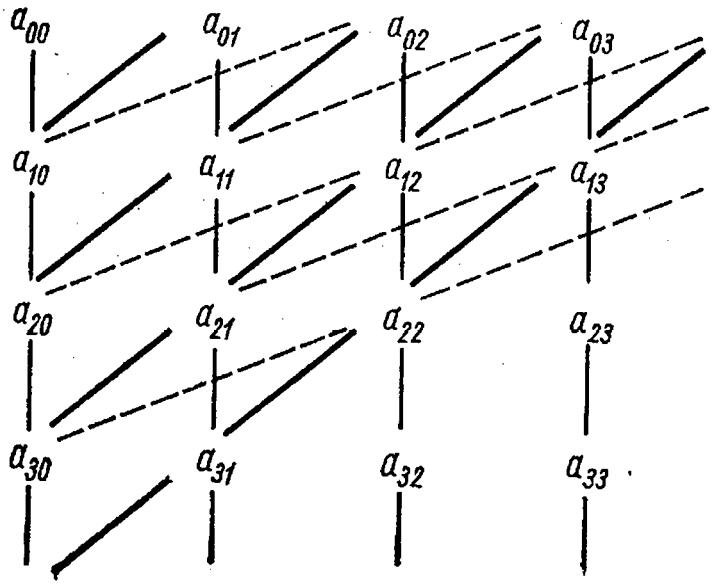
$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} a_{q,\,p-q}. \tag{5.62а}$$

Подстановка $n=s\geqslant 0$, $m=r-2s\geqslant 0$ $(s\leqslant r/2)$ приводит к

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,\,r-2s}, \tag{5.62б}$$

где $[r/2]$ равно $r/2$ для четных r и $(r-1)/2$ для нечетных. Эти ряды получены перестановкой членов исходного ряда $a_{m,n}$, а сама перестановка возможна только при абсолютной сходимости.

Иллюстрировать суммирование двойного ряда можно следующим образом:



Здесь вертикальные линии означают суммирование по n; первый индекс у коэффициентов относится к ряду по n, второй — к ряду по m.

Комбинация рядов (5.62а) и (5.62в) использована в разд. 12.1 при определении полиномов Лежандра.

Упражнение

Дан ряд $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots$ Показать, что

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots,\quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Последним рядом пользуются для получения второго решения дифференциального уравнения Лежандра (см. разд. 12.9).

5.5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Обобщим понятие бесконечного ряда и будем полагать, что каждый его член u_n может быть представлен функцией некоторой переменной $u_n = u_n(x)$. В этом случае ряд $\sum u_n(x)$ называют функциональным, а его частичные суммы в этом случае являются функциями переменной x

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x) \qquad (5.63)$$

так же, как и сумма всего ряда, которая определяется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=S(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x). \qquad (5.64)$$

Для функциональных рядов надо исследовать их поведение в зависимости от x. Главный вопрос при этом связан с *равномерной* сходимостью ряда.

Равномерная сходимость. *Если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует N, не зависящее от x на отрезке $[a, b]$, такое, что условие*

$$|S(x)-s_n(x)|<\varepsilon \qquad (5.65)$$

выполняется для всех $n \geqslant N$, то ряд называется равномерно сходящимся на отрезке $[a, b]$. Если такого N указать

нельзя, то ряд $\sum u_n(x)$ *не сходится равномерно на отрезке* $[a, b]$.

Условие (5.65), с помощью которого определена равномерная сходимость, проиллюстрировано на рис. 5.3.

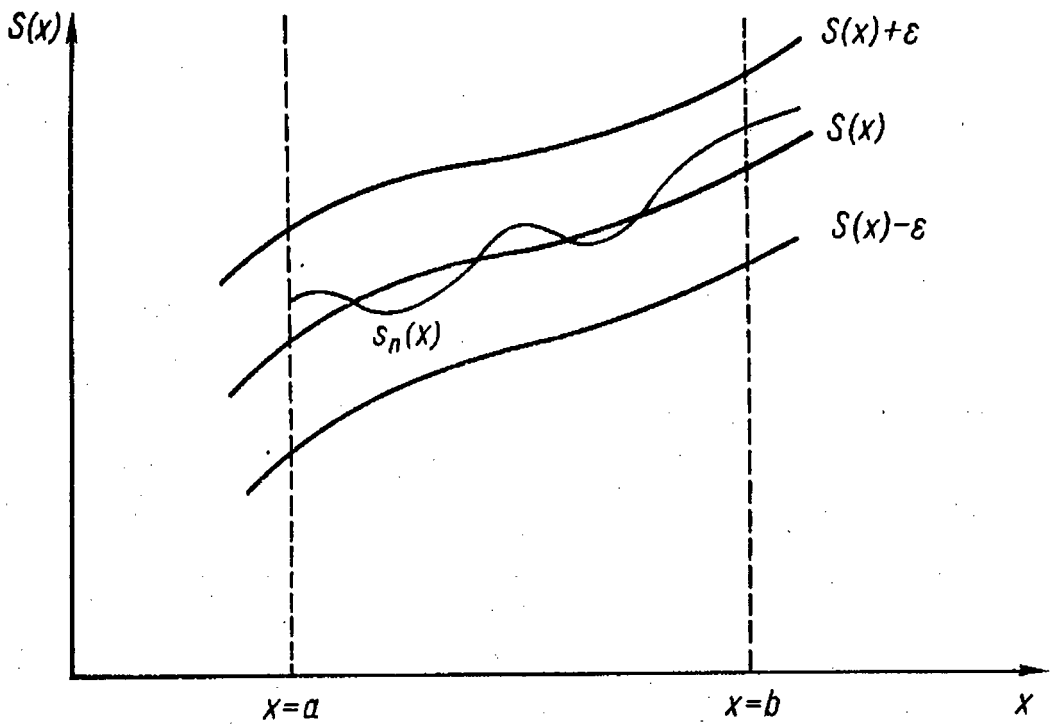


Рис. 5.3. Равномерная сходимость.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]}. \qquad (5.66)$$

Установим методом математической индукции, что его частичные суммы равны $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$. Действительно, $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$ при $n=1, 2$. Предположим, что оно справедливо для n-го члена. Покажем теперь, что для $(n+1)$-го члена оно также справедливо:

$$s_{n+1}(x) = s_n(x) + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} =$$

$$= \frac{nx}{[nx+1]} + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} = \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1}. \qquad (5.67)$$

Итак, $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$. Устремим n к бесконечности, тогда

$$S(0) = \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0, \quad S(x \neq 0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x \neq 0) = 1. \qquad (5.68)$$

В точке $x=0$ функция $S(x)$ имеет разрыв. Однако $s_n(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ есть непрерывная функция x при любых конечных n. При достаточно малом ε условие (5.65) нарушается для всех конечных n. Следовательно, наш ряд не является равномерно сходящимся.

Признак сходимости Вейерштрасса. Это наиболее общий признак равномерной сходимости, который формулируется следующим образом: *если члены функционального ряда при любых x из отрезка $[a, b]$ удовлетворяют неравенству $M_i \geqslant |u_i(x)|$, где M_i — члены некоторого сходящегося ряда $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится на $[a, b]$ равномерно.*

Доказательство признака Вейерштрасса несложно. В силу сходимости ряда $\sum_i M_i$ обязательно найдется такое N, что при $n+1 \geqslant N$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \varepsilon. \tag{5.69}$$

Последнее следует из определения сходимости. Поскольку из условия теоремы $|u_i(x)| \leqslant M_i$, для всех x из $[a, b]$, имеем

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \varepsilon, \tag{5.70}$$

откуда

$$|S(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)\right| < \varepsilon, \tag{5.71}$$

следовательно, по определению, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. При доказательстве признака Вейерштрасса мы пользовались абсолютными значениями, поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится еще и абсолютно.

Читатель должен четко представлять, что равномерная сходимость и абсолютная сходимость — независимые свойства; из существования одного не следует существование другого. В двух специальных случаях

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad -\infty < x < \infty \tag{5.72}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{5.73}$$

ряды сходятся равномерно (указаны интервалы сходимости), но эти ряды не сходятся абсолютно. Однако ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)\,x^n=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0\leqslant x<1,\\ 0 & \text{при}\quad x=1\end{cases} \tag{5.74}$$

сходится абсолютно, но не сходится равномерно в замкнутом отрезке.

Из определения равномерной сходимости следует, что любой ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{5.75}$$

не может сходиться равномерно в интервале, на котором функция $f(x)$ имеет разрывы.

Признак Вейерштрасса устанавливает как равномерную, так и абсолютную сходимость, поэтому он всегда нарушается в случае равномерно, но условно сходящегося ряда.

Более тонкий признак равномерной сходимости — признак Абеля: *если* $u_n(x)=a_nf_n(x)$ *и ряд* $\sum a_n=A$ *сходится, а функции* $f_n(x)$ *монотонны и ограниченны* $0\leqslant f_n(x)\leqslant M$ *для всех* x *на* $[a, b]$, *то ряд* $\sum u_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$.

Этот признак применяется при анализе степенных рядов. (Подробное доказательство признака Абеля и других признаков равномерной сходимости см. в специальной литературе, рекомендованной к этой главе).

Полезно обратить внимание на следующие свойства равномерно сходящихся рядов:

1) *если отдельные члены ряда* $u_n(x)$ *непрерывны, то сумма ряда*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{5.76}$$

также непрерывна;

2) *если отдельные члены ряда* $u_n(x)$ *непрерывны, то ряд можно интегрировать почленно, причем сумма интегралов равна интегралу от суммы:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx; \tag{5.77}$$

если $u_n(x)$ и $\frac{du_n(x)}{dx}$ *непрерывны на* $[a, b]$ *и, кроме того,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$, *то производная суммы ряда* $f(x)$ *равна сумме производных каждого члена в отдельности:*

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x). \tag{5.78}$$

Почленное интегрирование ряда предполагает только равномерную сходимость и непрерывность всех его членов. Как правило, в различных физических приложениях эти условия почти всегда выполняются. Почленное дифференцирование ряда зачастую нельзя производить из-за более жестких условий, которые должны при этом выполняться (см., например, гл. 14).

Упражнения

1. Определить область равномерной сходимости рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^x$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$. *Ответ*: $1 \leqslant x < \infty$ и $1 < s \leqslant x < \infty$.

2. Можно убедиться, что два ряда Фурье

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \text{и} \quad -2 \ln\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

равномерно сходятся в области $s \leqslant x \leqslant 2\pi - s$, где $s > 0$.

Можно ли почленно дифференцировать и интегрировать эти ряды?

3. Для каких x геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится равномерно? *Ответ*: $-1 < -s \leqslant x \leqslant s < 1$.

4. Для каких $x>0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1+x^n)$ сходится, сходится равномерно?

5. Ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся абсолютно. Доказать, что ряд Фурье $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ равномерно сходится в области $-\infty < x < \infty$.

5.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕЙЛОРА

Разложение Тейлора представляет собой разложение функции в бесконечный ряд либо в ряд с конечным числом членов, к которому добавляется остаточный член. Коэффициенты членов ряда содержат производные этой функции, порядок которых равен порядковому номеру соответствующего члена. Мы уже пользовались разложением Тейлора при выяснении физического смысла дивергенции (см. разд. 1.7) и в других разделах гл. 1 и 2. Теперь получим само разложение.

Будем предполагать, что заданная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную n-го порядка * на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Проинтегрируем n-ю производную n раз

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^x f^{(n)}(x)\,dx = f^{(n-1)}(x)\Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a), \\ &\int_a^x \left(\int_a^x f^{(n)}(x)\,dx\right) dx = \int_a^x [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)]\,dx = \\ &\quad = f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a) f^{(n-1)}(a), \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

$$\int\int_a^x\int f^{(n)}(x)\,(dx)^3 =$$

$$= f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - (x-a) f^{(n-2)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2} f^{(n-1)}(a). \tag{5.80}$$

---

* Разложение Тейлора можно получить при несколько менее жестких условиях (см. Jeffreys H. S., Jeffreys B. S. Methods of Mathematical Physics. Cambridge, Cambridge University Press, 1950).

Наконец, после n-кратного интегрирования

$$\int_a^x \dots \int f^{(n)}(x)\,(dx)^n = f(x) - f(a) - (x-a)\,f'(a) - \\ - \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(a). \qquad (5.81)$$

Заметим, что это выражение *точное*. Оно содержит все члены, и при его получении не делалось никаких предположений. Разрешая (5.81) относительно $f(x)$, получаем

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \\ + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(a) + R_n. \qquad (5.82)$$

Остаточный член R_n задан в форме n-кратного интеграла

$$R_n = \int_a^x \dots \int f^{(n)}(x)\,(dx)^n. \qquad (5.83)$$

Привлекая из дифференциального исчисления теорему о среднем значении, его можно представить в более удобной форме

$$\int_a^x g(x)\,dx = (x-a)\,g(\xi), \qquad (5.84)$$

где $a \leqslant \xi \leqslant x$. После n-кратного интегрирования имеем остаточный член *в форме Лагранжа*

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(\xi). \qquad (5.85)$$

В разложении Тейлора в форме (5.82) не возникало вопроса о сходимости бесконечного ряда, так как он конечен. Задача заключается только в выяснении величины остаточного члена. Если $f(x)$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0, \qquad (5.86)$$

то разложение (5.82) переходит в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \\ + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a)^*. \qquad (5.87)$$

---

* По определению, $0! = 1$ (см. разд. 10.1).

Ряд Маклорена. Если функция разложена в начале координат ($a=0$), то ряд (5.87) сводится к ряду Маклорена:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \quad (5.88)$$

Непосредственное применение ряда Маклорена (или ряда Тейлора) связано с разложением различных трансцендентных функций в бесконечный ряд.

Пр'имер 1. Пусть $f(x)=e^x$, тогда

$$f^{(n)}(0)=1, \quad n=1, 2, \ldots. \quad (5.89)$$

Из уравнения (5.88) получаем известное разложение экспоненциальной функции

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \quad (5.90)$$

Иногда рядом (5.90) пользуются для определения экспоненты.

Очевидно, этот ряд сходится для любых x, однако необходимо все же проверить остаточный член R_n. Из (5.85) имеем

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi)=\frac{x^n}{n!}e^{\xi}, \quad 0\leqslant\xi\leqslant x, \quad (5.91)$$

поэтому

$$R_n\leqslant x^n e^x/n! \quad (5.92)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0 \quad (5.93)$$

для всех конечных значений x, откуда следует, что разложение Маклорена для функции e^x справедливо во всей области $-\infty<x<\infty$.

Пример 2. Пусть $f(x)=\ln(1+x)$. Дифференцируя, получаем

$$f'(x)=(1+x)^{-1}, \ldots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}. \quad (5.94)$$

Разлагаем в ряд Маклорена

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+R_n=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{(x)^p}{p}+R_n. \quad (5.95)$$

В этом случае остаточный член записывается как

$$R_n \begin{cases} = \dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), & 0 \leqslant \xi \leqslant x, \\ \leqslant \dfrac{x^n}{n}, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.96}$$

Остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$ *, поэтому бесконечный ряд

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{5.97}$$

сходится для $-1 < x \leqslant 1$. Сходимость в области $-1 < x < 1$ легко проверяется с помощью признака Даламбера (см. разд. 5.2). Сходимость ряда в точке $x = 1$ вытекает из теоремы Лейбница (см. разд. 5.3). В частности, при $x = 1$ мы имеем условно сходящийся знакопеременный гармонический ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}. \tag{5.98}$$

Биномиальный ряд. Второе чрезвычайно важное применение разложений Тейлора и Маклорена связано с биномиальным рядом для отрицательных и (или) нецелых степеней.

Пусть $f(x) = (1+x)^m$, где m — любое вещественное число, отличное от нуля и от всех натуральных чисел. Из уравнения (5.88) имеем

$$(1+x)^m = 1 + mx - \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + R_n, \tag{5.99}$$

где остаточный член

$$R_n = \frac{x^n}{n!} (1+\xi)^{m-n} m(m-1) \ldots (m-n+1), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x. \tag{5.100}$$

Для $n > m$ величина $(1+\xi)^{m-n}$ максимальна при $\xi = 0$, поэтому

$$R_n \leqslant \frac{x^n}{n!} m(m-1) \ldots (m-n+1). \tag{5.101}$$

Заметим, что множители, зависящие от m, не обращаются в нуль, так как m — нецелое отрицательное число; R_n — стремится к нулю при $n \to \infty$ для $0 \leqslant x < 1$.

---

* Эту область легко расширить до $-1 < x \leqslant 1$, точка $x = -1$ исключается.

Таким образом, биномиальный ряд имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^2 + \ldots . \tag{5.102}$$

Несмотря на то что остаточный член исчезает для $0 \leqslant x \leqslant 1$, в действительности можно показать, что ряд (5.102) сходится в интервале $-1 < x < 1$.

Пример 3. Полная энергия релятивистской частицы равна

$$E = mc^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \tag{5.103}$$

Сравним ее с классическим выражением для кинетической энергии $mv^2/2$.

Положим в формуле (5.103) $x = -v^2/c^2$, а $m = -1/2$ и воспользуемся биномиальным рядом (5.102), тогда

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \ldots\right], \tag{5.104}$$

или

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{16}mv^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \ldots . \tag{5.105}$$

Первый член mc^2 соответствует энергии массы покоя, тогда

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}mv^2\left[1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{5.106}$$

При $v \ll c$ выражение в квадратных скобках стремится к единице, откуда следует, что кинетическая часть полной энергии в релятивистском приближении совпадает с классическим выражением для кинетической энергии.

Биномиальное разложение обобщается на случай полиномов

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_m^{n_m},$$

где суммирование проводится по всем различным комбинациям $n_1, n_2, \ldots, n_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, где n_i и n — все целые числа. Этот ряд широко используется в статистической механике.

Если f зависит он нескольких переменных, например $f=f(x, y)$, то разложение Тейлора приобретает вид

$$f(x, y)=f(a, b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]+\frac{1}{3!}\left[(x-a)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\right.$$
$$+3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}+3(x-a)(y-b)\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}+$$
$$\left.+(y-b)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right]+\ldots \qquad (5.107)$$

В этом выражении все производные взяты в точке (a, b). Обозначив $\alpha_j t=x_j-x_{j0}$, можно записать разложение Тейлора для функции m независимых переменных в символической форме:

$$f(x_j)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(x_k)\Big|_{x_k=x_{k0}} \qquad (5.108)$$

Упражнения

1. Показать, что разложение Тейлора в окрестности точки $\theta=\pi/2$ записывается как $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\cos\theta$.

2. Показать, что при $n>1$

$$\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)<0 \text{ и } \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0.$$

Воспользоваться этими неравенствами для доказательства ограниченности постоянной Эйлера.

3. Используя биномиальное разложение, сравнить три формулы эффекта Допплера: а) $\nu'=\nu\left(1\mp\frac{v}{c}\right)^{-1}$ — движущийся источник; б) $\nu'=\nu\left(1\pm\frac{v}{c}\right)$ — движущийся наблюдатель; в) $\nu'=\nu\left(1\pm\frac{v}{c}\right)\times$ $\times\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ — релятивистская формула.

Заметим, что релятивистская формула совпадает с классической, если пренебречь членами порядка v^2/c^2.

4. Сумма двух скоростей w в релятивистском приближении дается формулой

$$\frac{w}{c}=\frac{u/c+v/c}{1+uv/c^2}.$$

Разложить w/c по степеням α до члена α^3, если $v/c=u/c=1-\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

5. Смещение x для частицы с массой покоя m_0 под действием постоянной силы $m_0 g$, действующей вдоль оси x, с учетом релятивистских эффектов равно $x=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\left(g\frac{t}{c}\right)^2\right]^{1/2}-1\right\}$.

Разложить x по степеням t. Сравнить с классической формулой $x=gt^2/2$.

6. Показать, что признак Раабе нельзя применять к ряду $\sum (n\ln n)^{-1}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}-1\right]=1$.

7. Разлагая в ряд, доказать, что $\ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}=\operatorname{arccth}\eta_0$. Этим тождеством пользуются при получении второго решения уравнения Лежандра (см. разд. 12.9).

8. Известно, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

Разложим подынтегральную функцию в ряд и почленно проинтегрируем. В результате получим формулу Лейбница для π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

Сравнить сходимость в точке $x=1$ ряда для подынтегральной функции и ряда, полученного почленным интегрированием.

Сходимость ряда в формуле Лейбница настолько плоха, что делает эту формулу совершенно непригодной для вычислений. Значение π до 100 000 десятичных знаков вычислялось по формулам *

$$\pi=24\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+8\operatorname{arctg}\frac{1}{57}+4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

$$\pi=48\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+32\operatorname{arctg}\frac{1}{57}-20\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

9. Разложить неполную факториальную функцию $\int\limits_0^x e^{-t}t^n\,dt$ в ряд

* См. Shanks D., Wrench J. W. J. Mathematics of Computation, 16, 76 (1962).

по степеням x для малых значений x. Какова область сходимости этого ряда? Почему переменная должна быть малой?

Ответ: $\int_0^x e^{-t} t^n\, dt =$

$$= x^{n+1}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{x}{(n+2)} + \frac{x^2}{2!\,(n+3)} - \ldots \frac{(-1)^p x^p}{p!\,(n+p+1)} + \ldots\right].$$

10. Формула тонкой структуры в релятивистском приближении Дирака имеет вид

$$E = mc^2\left[1 + \frac{\gamma^2}{(s+n-|k|)^2}\right]^{-1/2},$$

где $s = (|k|^2 - \gamma^2)^{1/2}$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Разложить эту формулу по степеням γ^2 до члена порядка γ^4 ($\gamma^2 = Ze^2/\hbar c$, Z — заряд ядра). С помощью полученного разложения обычно сравнивают выводы теории электрона Дирака с выводами релятивистской теории электрона Шредингера. Экспериментальные результаты говорят в пользу теории Дирака.

11. Показать, что для $0 \leqslant k < 1$ ряд

$$(1 - k^2 \sin\varphi)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4 \sin^4\varphi + \ldots$$

равномерно сходится при всех (вещественных) значениях угла φ.

12. Период маятника с угловой амплитудой α и длиной l равен $T = 4\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2}}$, где $k^2 = \sin^2(\alpha/2)$. Разложить T по степеням k^2. (Интеграл относится к типу эллиптических интегралов первого рода.) *Указание.* $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} =$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \ldots\right)$.

13. Разложить $(1 - 2tz + t^2)^{-1/2}$ в ряд по степеням t. Считая, что t мало, получить коэффициенты при t^0, t^1 и t^2.

Ответ: $a_0 = P_0(z) = 1$, $a_1 = P_1(z) = z$,

$$a_2 = P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \ldots,$$

$a_n = P_n(z)$ — n-й полином Лежандра.

14. Доказать, что

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

15. Перемножая ряды для $\sin x$ и $\cos x$ показать, что

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

16. Определить верхнюю и нижнюю границы суммы $\sum_{n=1}^{1\,000\,000} n^{-1}$, предполагая, что: 1) постоянная Эйлера известна; 2) постоянная Эйлера неизвестна.

Ответ: $14{,}392726 < \sum_{n=1}^{1\,000\,000} n^{-1} < 14{,}392727$.

17. Известно, что $\sum_{n=1}^{1000} n^{-1} = 7{,}485480$. Найти верхнюю и нижнюю границы постоянной Эйлера.

Ответ: $0{,}5767 < C < 0{,}5778$.

18. В общей теории относительности существуют несколько выражений, которые связывают скорость расширения Галактики с красным смещением δ. Модель Милна (кинематическая модель) дает

$$v_1 = c\delta\left(1+\frac{1}{2}\delta\right), \quad v_2 = c\delta\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)(1+\delta)^{-2},$$

$$1+\delta = \left[\frac{1+v_3/c}{1-v_3/c}\right]^{1/2}.$$

Показать, что при $\delta \ll 1$ ($v_3/c \ll 1$) все три формулы сводятся к $v = c\delta$. Сравнить все три скорости с учетом членов порядка δ^2.

19. Нейтроны генерируются внутри полой сферы радиусом R. Родившиеся нейтроны равномерно распределены в сферическом объеме. Предполагая, что все направления равновероятны, определить среднее расстояние $\bar{r}$, которое пройдет нейтрон прежде, чем достигнет поверхности сферы. Движение предполагается прямолинейным, столкновения отсутствуют.

Показать, что

$$\bar{r} = \frac{3}{2} R \int_0^1 \int_0^{\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, k^2\, dk \sin\theta\, d\theta.$$

Разложив подынтегральную функцию в ряд и проинтегрировав его, получить

$$\bar{r} = R\left[1 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right].$$

Показать, что сумма этого бесконечного ряда равна $1/12$, а $\bar{r} = 3R/4$. *Указание.* Путем индукции получить частичную сумму $s_n = 1/12 - [4(2n+1)(2n+3)]^{-1}$, а затем сделать предельный переход $n \to \infty$.

20. Пусть x с некоторой погрешностью Δx является корнем $f(x)$. Получить, пренебрегая членами порядка $(\Delta x)^2$, формулу Ньютона для отыскания корней: $\Delta x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

21. С помощью представления $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = a_1 f(-1) + a_0 f(0) + a_1 f(1)$, получить формулу интегрирования Симпсона

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(+1)].$$

Указание. Разложить обе части уравнения в ряд Тейлора (Маклорена).

5.7. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенным рядом называется бесконечный ряд вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.109)$$

в котором коэффициенты a_n — постоянные, не зависящие от x *.

Сходимость. Сходимость ряда (5.109) можно исследовать с помощью признака Коши или признака Даламбера (см. разд. 5.2). Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R^{-1}, \quad (5.110)$$

то ряд сходится для $-R < x < R$. Величина R называется *радиусом сходимости*. Оба признака перестают работать, если $R = 1$, поэтому концы интервала требуют дополнительного исследования. Пусть, например, $a_n = n^{-1}$, тогда $R = 1$, и (см. разд. 5.1 — 5.3) ряд сходится при $x = -1$, но расходится при $x = +1$. Если же $a_n = n!$, тогда $R = 0$ и ряд расходится для всех $x \neq 0$.

Равномерная и абсолютная сходимость. Предположим, сходимость ряда (5.109) установлена для интервала $-R < x < R$; в этом случае ряд будет сходиться равномерно и абсолютно в любом *внутреннем* интервале — $S \leqslant x \leqslant S$, где $0 < S < R$.

---

* Соотношение (5.109) можно переписать, заменяя x на $z = x + iy$. Ниже исследуется равномерная сходимость, интегрируемость и дифференцируемость на комплексной плоскости.

Это утверждение можно доказать непосредственно с помощью признака Вейерштрасса, положив $M_i = |a_i|$.

Непрерывность. Поскольку каждый член $u_n(x) = a_n x^n$ — непрерывная функция x и $f(x) = \sum a_n x^n$ равномерно сходится в интервале $-S \leqslant x \leqslant S$, функция $f(x)$ должна быть непрерывной в интервале равномерной сходимости.

Дифференцируемость и интегрируемость. Если $u_n(x)$ — непрерывные функции и $\sum a_n x^n$ равномерно сходится, то этот ряд можно дифференцировать и интегрировать, причем полученный ряд также будет степенным с непрерывными членами, кроме того, он будет равномерно сходиться в том же интервале, что и первоначальный. Само по себе дифференцирование или интегрирование не нарушает признаков сходимости. Поэтому степенной ряд можно дифференцировать и интегрировать в интервале равномерной сходимости (см. упр. 9).

В связи с различными ограничениями, налагаемыми на дифференцируемый ряд (см. разд. 5.5), последний вывод представляется довольно неожиданным и весьма ценным.

Теорема единственности. Выше, воспользовавшись рядом Маклорена, мы разложили e^x и $\ln(1+x)$ в бесконечный ряд. В дальнейшем мы часто будем иметь дело с функциями, представленными бесконечными рядами, или будем отыскивать ту или иную функцию в виде ряда. Докажем, что *представление в виде степенного ряда единственно*. Предположим, что

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, & -R_a < x < R_a \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, & -R_b < x < R_b \end{cases} \tag{5.111}$$

внутри перекрывающихся интервалов сходимости, включающих начало координат. Докажем, что для всех n

$$a_n = b_n. \tag{5.112}$$

Из (5.111) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -R < x < R, \tag{5.113}$$

где R меньше R_a и R_b. Полагая $x=0$, получаем

$$a_0=b_0. \tag{5.114}$$

Далее воспользуемся дифференцируемостью степенного ряда и продифференцируем уравнение (5.113):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1}. \tag{5.115}$$

Опять, полагая $x=0$, найдем

$$a_1=b_1. \tag{5.116}$$

Повторив эту операцию n раз, убедимся, что

$$a_n=b_n. \tag{5.117}$$

Этим доказывается совпадение двух заданных рядов. Следовательно, представление степенным рядом единственно.

Представление функции степенным рядом часто оказывается полезным при раскрытии неопределенностей, особенно в тех случаях, когда неудобно пользоваться правилом Лопиталя (упр. 1).

Пример. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}. \tag{5.118}$$

Разложим $\cos x$ в ряд Маклорена

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-(1-x^2/2!+x^4/4!-\ldots)}{x^2}=$$

$$=\frac{x^2/2!-x^4/4!+\ldots}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\ldots, \tag{5.119}$$

тогда ясно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}. \tag{5.120}$$

Инверсия степенного ряда. Предположим,

$$y-y_0=a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{5.121}$$

однако часто требуется выразить $x-x_0$ через $y-y_0$. Мы можем разрешить уравнение (5.121) относительно $x-x_0$,

делая инверсию заданного ряда. Допустим, что

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \qquad (5.122)$$

с коэффициентами b_n, определенными через известные a_n. Очевидный подход к отысканию коэффициентов, связанный, однако, с большой затратой сил и времени, состоит в подстановке выражения (5.121) в (5.122). Учитывая, что после такой подстановки уравнение (5.122) становится тождеством, и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях, имеем:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{a_1^5}(2a_2^2 - a_1 a_3), \\ b_4 &= \frac{1}{a_1^7}(5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3), \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (5.123)$$

Однако такой метод определения коэффициентов b_n пригоден только для вычисления первых нескольких коэффициентов. Несколько больше коэффициентов приведено в книге Двайта *. В разд. 7.3 предложен более общий и изящный метод, основанный на использовании комплексных переменных.

Упражнения

1. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{x^7} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} x^{-n} j_n(x) \quad \text{для} \quad n = 3,$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя (см. разд. 11.6), определяемая формулой

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{30}$ и $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} \to \frac{1}{150}$ для $n = 3$.

2. Классическая теория парамагнетизма Ланжевена приводит к следующему выражению для магнитной поляризации:

$$P(x) = C\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}\right).$$

* Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., «Наука», 1966.— *Прим. перев.*

Разложить $P(x)$ в степенной ряд для малых x (слабые поля, высокая температура).

3. При исследовании дифракции от круглого отверстия встречается интеграл $I=\int_0^{2\pi}\cos(c\cos\varphi)\,d\varphi$. Разложить подынтегральную функцию в ряд и проинтегрировать, используя формулы

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)}2\pi,\qquad \int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi=0.$$

Интеграл I равен удвоенной функции Бесселя $J_0(x)$.

4. Согласно теории переноса нейтронов, для обратной длины диффузии k имеем $\frac{a-b}{k}\operatorname{arcth}\frac{k}{a}=1$. Представить k^2 в виде ряда по степеням b/a. Привести первые два члена ряда.

Ответ: $k^2=3ab\left(1-\frac{4b}{5a}\right)$.

5. Получить разложение $\operatorname{arcsh} x$ по степеням x, разлагая в ряд Маклорена и производя инверсию ряда для $\operatorname{sh} y$.

6. Найти первые три члена ряда, в виде которого отыскивается решение ξ ($\xi\approx r$) уравнения

$$(\alpha\xi+1)(\xi^2-r^2)=r\xi^4,$$

возникающего при вычислении силы, действующей на точечный заряд со стороны проводящей заряженной сферы.

Ответ: $\xi=r\left(1+\frac{1}{2\alpha^{1/2}}+\ldots\right)$.

7. Коэффициент деполяризации L для сплющенного эллипсоида в однородном электрическом поле, параллельном оси вращения (см. разд. 12.10), равен

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(1+\zeta_0^2)(1-\zeta_0\operatorname{arcctg}\zeta_0),$$

где параметр ζ_0 определяет сплющенный эллипсоид в системе координат сплющенного сфероида ξ, ζ, φ. Показать, что для сферы $\lim\limits_{\zeta_0\to 0}L=1/3\varepsilon_0$, для тонкой пластины $\lim\limits_{\zeta_0\to 0}L=1/\varepsilon_0$.

8. Соответствующий коэффициент деполяризации (предыдущее упражнение) для вытянутого эллипсоида равен

$$L=\frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2-1)\left(\frac{1}{2}\eta_0\ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}-1\right).$$

Показать, что для сферы $\lim\limits_{\eta_0\to\infty}L=1/3\varepsilon_0$, для длинной нити $\lim\limits_{\eta_0\to 0}L=0$.

9. Степенной ряд $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в интервале $-R<x<R$. Показать, что ряды, полученные дифференцированием и интегрированием этого ряда, имеют тот же самый интервал сходимости (концы интервала $x=\pm R$ исключаются).

10. Сечение фотоионизации водорода в состоянии $1S$ содержит функцию

$$f(x)=2\pi x^{-1/2}\frac{e^{-4\xi \operatorname{arcctg}\xi}}{1-e^{-2\pi\xi}},$$

где $\xi=(x-1)^{-1/2}$, а $x=\dfrac{\text{Энергия фотона}}{\text{Пороговая энергия}}$. Разложим функцию $f(x)$ по отрицательным степеням $x^{1/2}$ (фотоны высокой энергии) и по положительным степеням $(x-1)=\xi^{-2}$ (энергия близка к пороговой). Получить только первые три члена разложения.

Ответ: $f(x)=1-\pi x^{-1/2}+\left(\frac{7}{2}+\frac{\pi^2}{3}\right)x^{-1}+\ldots.$

$$f(x)=2\pi e^{-4}x^{-1/2}\left[1+\frac{4}{3}(x-1)+\frac{4}{45}(x-1)^2+\ldots\right],$$

$$f(x)=2\pi e^{-4}x^{5/6}\left(1-\frac{2}{15}(x-1)^2+\ldots\right).$$

5.8. ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

Числа Бернулли определяются несколькими эквивалентными способами, причем различные авторы определяют их по-разному. Один из сравнительно простых способов определения чисел Бернулли связан с разложением в ряд функции

$$\frac{x}{e^x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}. \tag{5.124}$$

Дифференцируя этот степенной ряд и полагая затем $x=0$, получаем

$$B_n=\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]_{x=0}, \tag{5.125}$$

в частности

$$B_1=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{e^x-1}-\frac{xe^x}{(e^x-1)}\Big|_{x=0}=-\frac{1}{2}. \tag{5.126}$$

Этот результат получается после разложения в ряд знаменателя. Производные неудобны для вычислений, поэтому

преобразуем (5.124):

$$\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(B_0+B_1x+B_2\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)=1. \tag{5.127}$$

Воспользовавшись теоремой единственности и положив коэффициент $B_0=1$, а коэффициенты при x^n равными нулю, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2!}B_0+B_1=0, && B_1=-\frac{1}{2},\\ &\frac{1}{3!}B_0+\frac{1}{2!}B_1+\frac{B_2}{2!}=0, && B_2=\frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{5.128}$$

Продолжим эту процедуру:

$$\left.\begin{aligned} &B_4=-\frac{1}{30}, \quad B_6=\frac{1}{42}, \quad B_8=-\frac{1}{30},\\ &B_{10}=\frac{5}{66}, \quad B_{12}=-\frac{691}{2730}, \ldots,\\ &B_{2n+1}=0 \qquad n=1;\ 2,\ 3,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.129}$$

Другое (эквивалентное) определение B_{2n} задается выражением

$$x\operatorname{ctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad -\pi<x<\pi. \tag{5.130}$$

Используя теорию вычетов или представление $\sin x$ в виде бесконечного произведения (см. разд. 5.9), получаем представление чисел Бернулли, найденное Эйлером:

$$B_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{p=1}^{\infty}p^{-2n}, n=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{5.131}$$

Из (5.131) очевидно, что $|B_{2n}|$ неограниченно возрастают при $n\to\infty$. Чтобы проиллюстрировать расходимость чисел Бернулли, приведем значения

$$B_{20}=5{,}291\cdot10^2, \quad B_{200}=3{,}647\cdot10^{215}. \tag{5.132}$$

Некоторые авторы предпочитают определять числа Бернулли в такой форме:

$$B_n=\frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{p=1}^{\infty}p^{-2n}. \tag{5.133}$$

Здесь индекс числа в два раза меньше и все знаки положительны. Вновь обращаем внимание читателя на то, что при работе с литературой нужно знать, каким образом определены числа Бернулли.

Числа Бернулли часто встречаются в теории чисел. Теорема Штандта — Клаузена утверждает, что

$$B_{2n} = A_n - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \ldots - \frac{1}{p_k}, \qquad (5.134)$$

где A_n — некоторое целое число, а $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа, такие, что $p - 1$ является делителем $2n$. Легко проверить, что это выполняется для

$$B_6\,(A_3 = 1,\ p = 2,\ 3,\ 7),\quad B_8\,(A_4 = 1,\ p = 1,\ 3,\ 5),$$
$$B_{10}\,(A_5 = 1,\ p = 2,\ 3,\ 11),\ \ldots \qquad (5.135)$$

Числа Бернулли возникают также при суммировании целых степеней натуральных чисел $\sum_{j=1}^{N} j^p$, p — целое, а также, в разложениях трансцендентных функций $\operatorname{tg} x$, $\ln|\cos x|$, $\operatorname{ctg} x$, $\ln|\operatorname{tg} x|$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{th} x$, $\ln|\sin x|$, $\operatorname{cth} x$, $\operatorname{csh} x$.

В разд. 10.3 мы вновь встретимся с числами Бернулли при представлении гамма-функции асимптотическим рядом. Числа Бернулли возникают в таких разложениях благодаря определяющим уравнениям (5.124) и (5.130), а также благодаря их связи с дзета-функцией Римана

$$\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}. \qquad (5.136)$$

Дзета-функция Римана. Ряд $\sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}$ мы уже использовали в сравнительном признаке сходимости (см. разд. 5.2), а также в уравнении (5.131) для определения чисел Бернулли. Этим же рядом задается и дзета-функция Римана

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad s > 1. \qquad (5.137)$$

На рис. 5.4. представлена зависимость $\zeta(s) - 1$ от s. Интегральное представление дзета-функции Римана рассмотрено в разд. 10.2 как часть общей теории гамма-функции.

Другое интересное представление дзета-функции Римана можно получить так:

$$\zeta(s)\cdot(1-2^{-s}) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \ldots\right). \quad (5.138)$$

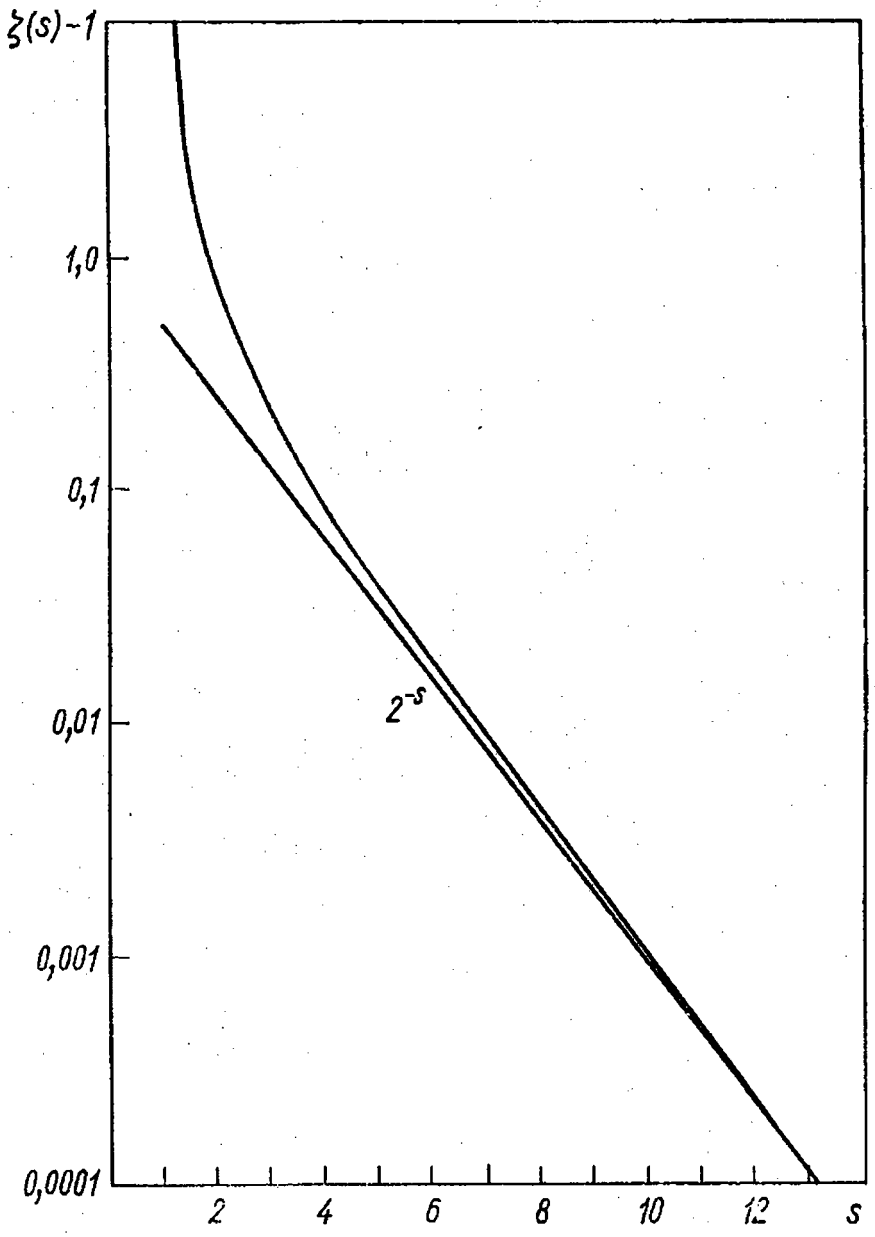


Рис. 5.4. Дзета-функция Римана.

Здесь со знаком минус взяты все n^{-s}, в которых n умножено на 2. Далее,

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots - \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \ldots\right), \quad (5.139)$$

здесь вычитаются все члены, в которых n умножено на 3. Продолжим эту операцию и образуем произведение $\zeta(s)\times$ $\times(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})\ldots(1-P^{-s})$, где P — простое число; все члены n, в которых n умножено на любое целое число, меньше или равное P, взаимно уничтожаются. При $P\to\infty$

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\ldots(1-P^{-s})=$$

$$=\zeta(s)\prod_{P=2}^{\infty}(1-P^{-s})=1, \tag{5.140}$$

где P — простое число, откуда

$$\zeta(s)=\Big[\prod_{P=2}^{\infty}(1-P^{-s})\Big]^{-1}. \tag{5.141}$$

Полученная формула определяет функцию $\zeta(s)$ в виде бесконечного произведения по всем простым числам.

Таблица значений дзета-функции Римана приведена в разд. 10.2.

Упражнения

1. Показать, что

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\zeta(2),\quad \lim_{a\to1}\int_0^a\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx=\zeta(2).$$

Как следует из упр. 2, $\zeta(2)=\pi^2/6$. Заметим, что подынтегральная функция во втором интеграле расходится при $a=1$, однако проинтегрированный ряд сходится.

2. Для «малых» значений x

$$\ln(x!)=-Cx+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}x^n,$$

где C — постоянная Эйлера, а ζ — дзета-функция Римана. При каких значениях x этот ряд сходится? (*Ответ*: $-1<x\leqslant1$.) Заметим, что при $x=1$ с помощью этого ряда определяется постоянная Эйлера $C=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)/n$.

3. Показать, что ряд для функции $\ln(x!)$ (см. упр. 2) можно записать в виде

$$\ln(x!)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi x}{\sin\pi x}\right)-Cx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}x^{2n+1},$$

$$\ln(x!)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi x}{\sin\pi x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+(1-C)\,x-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}[\zeta(2n+1)-1]\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Определить область сходимости этих рядов.

4. Интеграл $\int_0^1 [\ln(1-x)]^2\,\frac{dx}{x}$ встречается в поправке четвертого порядка к магнитному моменту электрона. Показать, что интеграл равен $2\zeta(3)$. *Указание.* Положить $1-x=e^{-t}$.

5. Закон излучения черного тела Планка содержит интеграл $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1}$. Показать, что он равен $6\zeta(4)$.

6. Показать, что уравнение (5.124) (из обеих частей которого вычли B_1) совместно с (5.130). Исходя из уравнения $B_{2n}=(-1)\times\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$, показать, что

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\,,\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}\,,\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}\,,$$

$$\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}\,,\quad \zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555}\,.$$

7. Доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz=4\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots\right).$$

Интегрированием по контуру (гл. 7) можно убедиться, что этот интеграл равен $\pi^3/8$.

8. В приближении Блоха—Грунайссена сопротивление одновалентного металла равно

$$\rho=C\,\frac{T^5}{\Theta^6}\int_0^{\Theta/T}\frac{x^5\,dx}{(e^x-1)(1-e^{-x})}\,,$$

где Θ — характеристическая температура Дебая для данного металла. Показать, что $\rho\approx\frac{C}{4}\cdot\frac{T}{\Theta^2}$ при $T\to\infty$ и $\rho\approx 5\zeta(5)\,C\,\frac{T^5}{\Theta^6}$ при $T\to 0$.

5.9. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрим последовательность положительных множителей $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \ldots f_n$, $(f_i > 0)$. Использовав для обозначения произведения знак Π, запишем

$$f_1 f_2 f_3 \ldots f_n = \prod_{i=1}^{n} f_i. \tag{5.142}$$

По аналогии с частичной суммой s_n введем частичное произведение p_n:

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} f_i \tag{5.143}$$

и затем исследуем предел

$$\lim_{n\to\infty} p_n = P. \tag{5.144}$$

Если P конечно (но не равно нулю), мы можем сказать, что бесконечное произведение сходится. Если P бесконечно или равно нулю, то бесконечное произведение называют расходящимся.

Произведение стремится к бесконечности, если

$$\lim_{n=\infty} f_n > 1, \tag{5.145}$$

или к нулю, если

$$\lim_{n=\infty} f_n < 1 \text{ (и больше нуля)}, \tag{5.146}$$

поэтому удобно записать бесконечное произведение как $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$, причем условие $a_n \to 0 \to$ необходимое (но не достаточное) условие сходимости.

Логарифмируя бесконечное произведение, можно установить его связь с бесконечным рядом:

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln (1+a_n). \tag{5.147}$$

Сходимость бесконечного произведения. *Бесконечные произведения* $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ *и* $\prod_{n=1}^{\infty} (1-a_n)$ *при* $0 \leqslant a < 1$ *схо-*

дятся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *и расходятся, если этот ряд расходится.*

Выделим множитель $(1+a_n)$. Учитывая (5.90), можно записать, что

$$(1+a_n) \leqslant e^{a_n}. \tag{5.148}$$

Следовательно, частичное произведение p_n

$$p_n \leqslant e^{s_n}. \tag{5.149}$$

При $n \to \infty$ получим

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) \leqslant \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.150}$$

Этим установлена верхняя граница для бесконечного произведения.

Для выяснения нижней границы заметим, что

$$p_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j + \ldots > s_n, \tag{5.151}$$

так как $a_i \geqslant 0$. Отсюда

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.152}$$

Если сумма бесконечного ряда остается конечной, то бесконечное произведение тоже будет конечным. Если же ряд расходится, то произведение тоже расходящееся.

Произведение $\prod (1-a_n)$ усложнено наличием отрицательных знаков, однако теорема доказывается и в этом случае, если учесть, что для $a_n < 1/2$ (вспомним, что сходимость требует условия $a_n \to 0$)

$$(1+2a_n)^{-1} \leqslant (1-a_n) \leqslant (1+a_n)^{-1}. \tag{5.153}$$

В дальнейшем читатель узнает, что полином $P_n(x)$ n-го порядка с n вещественными корнями записывается в виде произведения n множителей

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x-x_i). \tag{5.154}$$

Представление sin x, cos x и гамма-функции бесконечным произведением. В большинстве случаев можно ожи-

дать, что функция, которая имеет бесконечное число корней, представима бесконечным произведением, где каждому корню соответствует один множитель. Действительно, это утверждение выполняется для тригонометрических функций. Существует два очень полезных представления в виде бесконечных произведений

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \tag{5.155а}$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x}{(2n-1)^2\pi^2}\right]. \tag{5.155б}$$

Наиболее простой и, вероятно, самый изящный вывод этих формул связан с использованием комплексных переменных (см. разд. 7.3). Согласно теореме сходимости, бесконечные произведения (5.155) сходятся для всех конечных значений x. Например, для произведения (5.155а), полагая $a_n = x^2/n^2\pi^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{x^2}{\pi^2}\zeta(2) = \frac{x^2}{6}, \tag{5.156}$$

откуда следует, что произведение (5.155а) сходится. Ряд, соответствующий (5.155б), ведет себя аналогично.

Из формулы (5.155а) следуют два интересных результата. Во-первых, если положить $x = \pi/2$, то

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n)^2}\right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right], \tag{5.157}$$

откуда получается известная формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right]. \tag{5.158}$$

Второй результат связан с гамма-функцией (см. гл. 10). Одна из форм записи этой функции имеет вид

$$\Gamma(x) = \left[xe^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r}\right]^{-1}, \tag{5.159}$$

где C — постоянная Эйлера (см. разд. 5.2). Образуем произведение двух функций $\Gamma(x)$ и $\Gamma(-x)$, тогда

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\left[xe^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{r}\right)e^{-x/r}xe^{-Cx}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{r}\right)e^{x/r}\right]^{-1} = -\left[x^2\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\right]^{-1}. \quad (5.160)$$

Воспользуемся уравнением (5.155а), в котором сделана замена $x = \pi x$. Тогда

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\sin\pi x}. \quad (5.161)$$

Используем рекуррентное соотношение $-x\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$, полученное в разд. 10.1. Окончательно будем иметь

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}. \quad (5.162)$$

Эта формула полезна при рассмотрении гамма-функции.

Упражнения

1. С помощью тождества $\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1\pm a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1\pm a_n)$ и разложения Маклорена функции $\ln(1\pm a_n)$ показать, что бесконечное произведение сходится или расходится в зависимости от сходимости или расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Показать, что представление $\sin x$ и $\cos x$ в виде (5.155а) и (5.155б) не противоречит тождеству $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

3. Определить предел, к которому сходится произведение

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

4. Показать, что $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}$.

5. Используя представление (5.155а), показать, что $x \operatorname{ctg} x = 1 - 2 \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m}$, и найти из этого соотношения числа Бернулли

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta\,(2n),$$

где $\zeta\,(2n)$ — дзета-функция Римана. *Указание.* Записать бесконечный ряд для $\ln \sin x$ и затем продифференцировать его.

6. Задан интеграл

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n} \pi \quad (n \text{ — четное}).$$

Что произойдет с бесконечным произведением $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n}$, когда $n \longrightarrow \infty$?

Обосновать ответ, используя: а) теорему сходимости бесконечного произведения или ряда; б) заданный интеграл.

7. Можно доказать, что интеграл

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{1/2} x^{2p}\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2p+2)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Выразить это отношение, используя символ произведения $\prod$, и исследовать его поведение при $p \longrightarrow \infty$. Полученный результат объяснить, рассматривая подынтегральную функцию на отрезке $[0, 1]$ при $p \longrightarrow \infty$. *Замечание.* Этот интеграл применяется при построении полиномов Чебышева (см. разд. 9.3).

8. Основываясь на представлении (5.155а), показать, что

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta\,(2n),$$

это совпадает с уравнением (5.131); B_{2n} — числа Бернулли, а $\zeta\,(2n)$ — дзета-функция Римана. *Указание.* $\frac{d}{dx} \ln (\sin x) = \operatorname{ctg} x$.

9. Убедиться в справедливости тождества Эйлера

$$\prod_{p=1}^{\infty} (1 + z^p) = \prod_{q=1}^{\infty} (1 - z^{2q-1})^{-1}, \quad |z| > 1.$$

5.10. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ИЛИ ПОЛУСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Неполная гамма-функция. Природа асимптотических рядов хорошо иллюстрируется следующим примером. Пусть задана интегральная показательная функция *

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\,du, \tag{5.163}$$

или

$$-\mathrm{Ei}\,(-x) = \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = E_1(x), \tag{5.164}$$

значение которой необходимо вычислить для больших x. Наряду с этим рассмотрим обобщение неполной гамма-функции (см. разд. 10.5):

$$I(x, p) = \int_{x}^{\infty} e^{-u}u^{-p}du, \tag{5.165}$$

где x и p положительны. Вновь оценим ее для больших значений x. Интегрируя по частям, получаем

$$I(x, p) = \frac{e^{-x}}{x^p} - p\int_{x}^{\infty} e^{-u}u^{-p-1}du =$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1)\int_{x}^{\infty} e^{-u}u^{-p-2}du. \tag{5.166}$$

Продолжая последовательное интегрирование по частям, имеем

$$I(x, p) = e^{-x}\left(\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p-1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \ldots\right) +$$

$$+ (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}\int_{x}^{\infty} e^{-u}u^{-p-u}du. \tag{5.167}$$

---

* Эта функция часто встречается в астрофизике, когда рассматривается газ с энергетическим распределением по Максвеллу — Больцману.

Этот ряд замечателен тем, что, исследуя его сходимость по признаку Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+n)!}{(p+n-1)!}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{p+n}{x}=\infty \quad (5.168)$$

для всех конечных значений x. Следовательно, ряд, если его рассматривать как сумму бесконечного числа членов, расходится всюду! Однако не будем торопиться с выводами и считать уравнение (5.167) бесполезным. Выясним прежде, насколько точно данная частичная сумма описывает неполную гамма-функцию

$$I(x,\ p)-s_n(x,\ p)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-n-1}du. \quad (5.169)$$

По абсолютной величине

$$|I(x,\ p)-s_n(x,\ p)|\leqslant\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty u^{-p-n-1}du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}\cdot\frac{1}{x^{p+n}}. \quad (5.170)$$

Это означает, что при достаточно большом x частичная сумма со сколь угодно хорошим приближением описывает функцию $I(x,\ p)$. Следовательно, расходящийся ряд (5.167) очень удобен для вычислений. По этой причине его иногда называют полусходящимся рядом. Остаточный член $R_n(x,\ p)$ является знакопеременным, поэтому последовательностью частичных сумм задаются попеременно верхняя и нижняя границы для $I(x,\ p)$. Для $p=1$ имеем

$$e^xE_1(x)=e^x\int_x^\infty\frac{e^{-u}}{u}du=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\ldots \quad (5.171)$$

Оценим эту функцию при $x=5$. Для данного значения x последовательные верхняя и нижняя границы, определяемые частичными суммами, сначала стремятся к некоторому пределу, а затем начинают расходиться (рис. 5.5). Оптимальное значение $e^x E_1(x)$ получается при наибольшем сближении верхней и нижней границ, т. е. для $x=5$ оно лежит между $s_4=s_6=0{,}1664$ и $s_5=0{,}1741$. Следовательно, $0{,}1664\leqslant e^xE_1(x)\,|_{x=5}\leqslant 0{,}1741$. Действительно, табличное

значение $e^x E_1(x)\,|_{x=5} = 0{,}1704$ заключено в пределах, установленных асимптотическим разложением. Учет дополнительных членов в разложении сверх установленного оптимума снижает точность представления. По мере увеличения x разброс между наименьшим и наибольшим

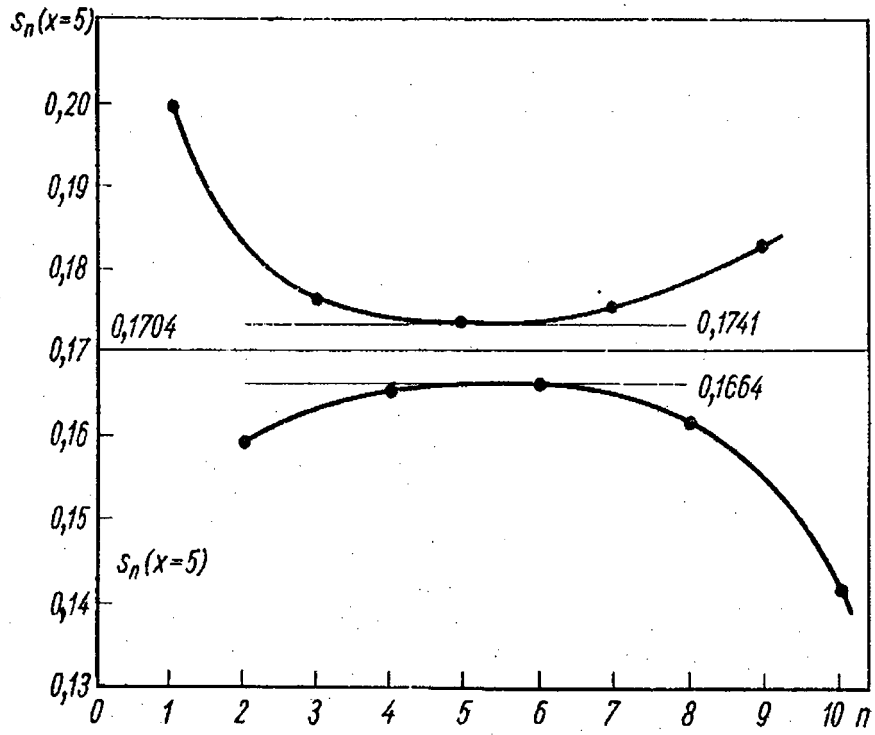


Рис. 5.5. Поведение частичных сумм $e^x E_1(x)\,|_{x=5}$.

значениями соответственно верхней и нижней границ уменьшается. Поэтому при достаточно больших x функция $e^x E_1(x)$ может быть вычислена с любой требуемой точностью.

Следуя Пуанкаре, запишем

$$x^n R_n(x) = x^n [f(x) - s_n(x)], \tag{5.172}$$

где

$$s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}. \tag{5.173}$$

Асимптотическое разложение $f(x)$ обладает свойствами

$$\lim_{x\to\infty} x^n R_n(x) = 0 \text{ при фиксированном } n, \tag{5.174}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n R_n(x) = \infty \text{ при фиксированном } x^*. \tag{5.175}$$

* Здесь исключены сходящиеся ряды по обратным степеням. Некоторые авторы считают это ограничение искусственным и не необходимым.

При выполнении (5.174) и (5.175) можно записать

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}. \tag{5.176}$$

Подчеркнем, что здесь использован знак приблизительного равенства вместо знака точного равенства. Функция $f(x)$ равна ряду только в предельном случае $x \to \infty$.

Асимптотические разложения двух функций можно перемножать, в результате чего получается асимптотическое разложение произведения этих функций.

Асимптотическое разложение функции $f(x)$ можно интегрировать почленно (точно так же, как и равномерно сходящийся функциональный ряд) в пределах $x \leqslant t < \infty$; результат такого интегрирования будет представлять собой асимптотическое разложение интеграла $\int_x^{\infty} f(t)\,dt$.

Почленное дифференцирование асимптотического ряда можно проводить только при выполнении очень специфических условий.

Функция может и не иметь асимптотического разложения, например, e^x. Однако если такое разложение существует, то оно единственно, хотя многие функции могут иметь одно и то же асимптотическое представление.

В заключение отметим, что в гл. 7 мы разработаем один из наиболее распространенных и плодотворных методов асимптотического разложения — метод перевала. Вывод формулы Стирлинга в теории гамма-функции (см. разд. 10.3) и асимптотические формулы различных функций Бесселя (см. разд. 11.5) также основаны на асимптотических разложениях.

Упражнения

1. Формула Стирлинга для $\ln(x!)$ имеет вид

$$\ln(x!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x - \sum_{n=1} \frac{B_{2n}}{(2n)(2n+1)}\, x^{1-2n},$$

где B_{2n} — числа Бернулли (см. разд. 5.8). Показать, что эта формула представляет собой асимптотическое разложение.

2. Интегрируя по частям, получить асимптотическое представление интегралов Френеля

$$C(x)=\int_0^x \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du \quad \text{и} \quad S(x)=\int_0^x \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du.$$

Эти интегралы встречаются в теории дифракции.

3. Получить асимптотическое разложение интеграла ошибок Гаусса

$$\operatorname{Er} f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6}+\ldots\right).$$

Эта функция играет важную роль в теории вероятности. *Указание.*

$$\operatorname{Er} f(x)=\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt-\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

4. Излучение абсолютно черного тела в интервале частот $0\leqslant\nu\leqslant\nu_0$ описывается формулой

$$f(x_0)=\int_0^{x_0}\frac{x^3\,dx}{e^x-1}\Big/\int_0^\infty\frac{x^3\,dx}{e^x-1},$$

где $x_0=h\nu_0/kT$. Показать, что

$$f(x_0)=1-\frac{e^{-x}}{6}(x_0^3+3x_0^2+6x_0+6).$$

Является ли это разложение асимптотическим?

ГЛАВА 6

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО I

(аналитические свойства, конформное отображение)

6.1. УСЛОВИЯ КОШИ—РИМАНА

Комплексное число представляет собой упорядоченную пару двух обычных чисел (a, b), или $a + ib$, где $i = \sqrt{-1}$, а комплексная переменная — пару двух вещественных переменных, расположенных в определенном порядке:

$$z = (x, y) = x + iy. \tag{6.1}$$

Из дальнейшего станет ясно, что в данном случае важен порядок записи и, вообще говоря, $a + ib$ не равно $b + ia$, а $x + iy$ не равно $y + ix$.

Довольно часто комплексную переменную представляют в графическом виде. Приняв в качестве абсциссы переменную x, реальную часть z (обозначается $\mathrm{Re}\, z$), а в качестве ординаты — переменную y, мнимую часть z ($\mathrm{Im}\, z$), мы получим комплексную плоскость (рис. 6.1). Если теперь задать определенные значения x и y, то z будет соответствовать точке (x, y) на этой плоскости. Из приведенной диаграммы становится ясным замечание относительно порядка написания комплексного числа, так как точка (x, y), вообще говоря, не совпадает с точкой (y, x).

Из рис. 6.1 очевидно, что

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{6.2}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{6.3}$$

Используя результат, полученный в разд. 5.6 *, перейдем к часто встречающемуся полярному представлению ком-

---

* Строго говоря, содержание гл. 5 ограничено вещественными переменными. Однако и для комплексного z можно определить e^z как $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Разложение комплексных функций в ряд рассматривается в разд. 6.4.

плексного числа

$$z = r\,e^{i\theta}, \tag{6.4}$$

где r — модуль комплексного числа z, а угол θ — аргумент или фаза z. Следует отметить большую аналогию между комплексными числами и двумерными векторами (см. гл. 1), которые тоже можно определять заданием точки (x, y). Это сходство использовано в разд. 6.2 в интегральной теореме Коши.

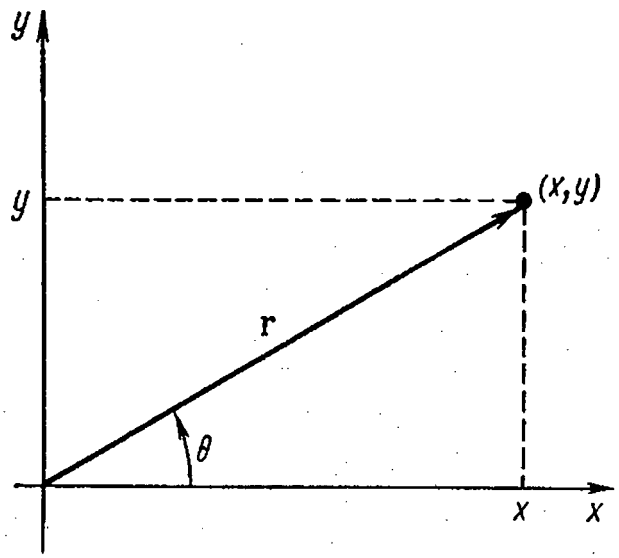


Рис. 6.1. Комплексная плоскость.

По аналогии с комплексной переменной записываются комплексные функции $f(z)$ или $w(z)$. Эти функции тоже можно разбить на реальную и мнимую части

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{6.5}$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — функции действительных аргументов. Например, если $f(z) = z^2$, то

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy.$$

Для всех введенных понятий (комплексное число, переменная, функция) операция замены i на $-i$ называется *комплексным сопряжением*. Величина, полученная комплексным сопряжением z, обозначается как z^*, где

$$z^* = x - iy. \tag{6.6}$$

Комплексно-сопряженная z^* является зеркальным отражением относительно оси x комплексной переменной z или инверсией координаты y (рис. 6.2). Произведение

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = r^2,$$

отсюда $\sqrt{zz^*} = |z|$.

Определим теперь операцию дифференцирования. По аналогии с обычными функциями производная функции $f(z)$

определяется как

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{z+\delta z-z}=\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f(z)}{\delta z}=\frac{df}{dz}\text{ или }f'(z) \qquad (6.7)$$

при условии, что предел не зависит от способа приближения к точке z.

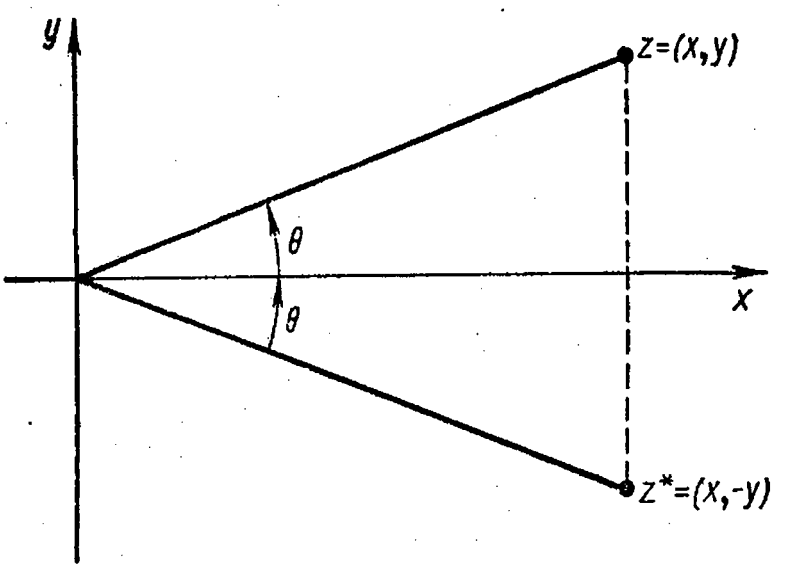


Рис. 6.2. Комплексно-сопряженные точки.

Рассмотрим приращения δx и δy переменных x и y, тогда

$$\delta z=\delta x+i\delta y, \qquad (6.8)$$

кроме того,

$$\delta f=\delta u+i\delta v, \qquad (6.9)$$

так что

$$\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{\delta u+i\delta v}{\delta x+i\delta y}. \qquad (6.10)$$

Предельный переход, указанный в (6.7), можно осуществить двумя различными способами. Во-первых, при фиксированном $\delta y=0$ берется предел $\delta x\to 0$, тогда уравнение (6.7) имеет вид

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f}{\delta z}=\lim_{\delta x=0}\left(\frac{\delta u}{\delta x}+i\,\frac{\delta v}{\delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (6.11)$$

Здесь предполагается существование частных производных. Во вторых, положим $\delta x=0$, а $\delta y\to 0$, тогда

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f}{\delta z}=\lim_{\delta y\to 0}\left(-i\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta y}\right)=-i\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (6.12)$$

Чтобы производная df/dz была определена, нужно потребовать тождественность уравнений (6.11) и (6.12). Приравняв соответственно реальные и мнимые части (подобно компонентам векторов), получим условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.13}$$

Эти условия были сформулированы Коши и широко использовались Риманом в теории аналитических функций. Условия Коши — Римана являются необходимыми для существования производной функции $f(z)$, т. е. если df/dz существует, то условия Коши — Римана выполняются.

Обратно, если условия Коши — Римана выполнены и частные производные непрерывны, то производная существует. Докажем это. Пусть

$$\delta f=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y. \tag{6.14}$$

Образуем теперь отношение $\delta f/\delta z$ и поделим числитель и знаменатель на ∂x:

$$\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{\partial u/\partial x+i\,(\partial v/\partial x)}{1+i\,(\delta y/\delta x)}\left[1+\frac{\partial y}{\delta x}\left(\frac{\partial v/\partial y-i\,(\partial u/\partial y)}{\partial u/\partial x+i\,(\partial v/\partial x)}\right)\right]. \tag{6.15}$$

В силу условий Коши — Римана (6.13)

$$\frac{\partial v/\partial y-i\,(\partial u/\partial y)}{\partial u/\partial x+i\,(\partial v/\partial x)}=1 \tag{6.16}$$

и

$$\frac{\delta f}{\delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{6.17}$$

откуда видно, что $\lim\limits_{\delta z\to 0}\partial f/\partial z$ не зависит от пути перемещения в комплексной плоскости, если частные производные непрерывны.

Условия Коши — Римана обеспечивают ортогональность семейства кривых $u=c_1$ и $v=c_2$ (см. разд. 2.1). Этот вывод имеет фундаментальное значение в теории потенциала. Если, например, $u=c_1$ — линия электрического поля, то $v=c_2$ представляет собой эквипотенциальную линию (поверхность), и наоборот. В упр. 3 приведен пример на дальнейшее развитие этой концепции в теории потенциала.

Аналитические функции. Функция $f(z)$, дифференцируемая в точке $z = z_0$ и в некоторой малой окрестности этой точки, называется аналитической в точке $z = z_0$. В современной физике понятие аналитичности встречается очень часто, например в дисперсионной теории элементарных частиц. Значение этого понятия очень велико. Если $f(z)$ не имеет производной в точке $z = z_0$, то z_0 называется особой точкой (см. разд. 7.1).

Для иллюстрации условий Коши — Римана рассмотрим два очень простых примера.

Пример 1. Пусть $f(z) = z^2$. Тогда $u(x, y) = x^2 - y^2$, а $v(x, y) = 2xy$. Из условий Коши — Римана

$$\partial u/\partial x = 2x = \partial v/\partial y, \quad \partial u/\partial y = -2y = -\partial v/\partial x.$$

Очевидно, $f(z) = z^2$ удовлетворяет условиям Коши — Римана всюду на комплексной плоскости. Из непрерывности частных производных вытекает аналитичность функции $f(z) = z^2$.

Пример 2. Пусть $f(z) = z^*$. Теперь $u = x$, а $v = -y$, откуда $\partial u/\partial x = 1 \neq \partial v/\partial y$, т. е. условия Коши — Римана не выполнены, и поэтому $f(z) = z^*$ не является аналитической функцией.

Упражнения

1. Используя выражение $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)\, e^{i\Theta(r, \theta)}$, где $R(r, \theta)$ и $\Theta(r, \theta)$ — вещественные функции, показать, что условия Коши — Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial R}{r\,\partial \theta} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial r}.$$

2. Пусть $A = \partial^2 w/\partial x^2$, $B = \partial^2 w/\partial x\, \partial y$, $C = \partial^2 w/\partial y^2$. Как известно, функция двух переменных $w(x, y)$ имеет седловую точку, если $B^2 - 4AC > 0$. С помощью условий Коши — Римана показать, что ни $u(x, y)$, ни $v(x, y)$ не имеют экстремума в любой ограниченной области комплексной плоскости, причем $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

3. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ представляют соответственно реальную и мнимую части аналитической функции $w(z)$. Предполагая существование нужных производных, показать, что

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Дать геометрическую интерпретацию.

4. Убедившись сначала, что реальная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ аналитической функции $w(z)$ каждая в отдельности удовлетворяет уравнению Лапласа, показать, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не могут иметь ни максимума, ни минимума внутри любой области аналитичности функции $w(z)$ (но могут иметь седловые точки).

5. Записать в явном виде аналитическую функцию $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, для которой $u(x, y)=x^3-3xy^2$, $v(x, y)=e^{-y}\sin x$.

6. Выделить реальную и мнимую части функций z^2+2z+1, $1/z$, $(z-1)/(z+1)$.

7. Показать, что комплексные числа имеют квадратные корни, расположенные на комплексной плоскости.

8. Функции $w_1=u(x, y)+iv(x, y)$ и $w_2=w_1^*=u(x, y)-iv(x, y)$ имеют некоторую общую область аналитичности. Показать, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ постоянны.

9. Взяв за основу полярное представление комплексных величин, вывести формулу Муавра $(\cos 0+i\sin 0)^n=\cos n0+i\sin n0$, n — целое.

10. Пусть тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента определены с помощью степенных рядов

$$\sin z=\sum_{n=1,\ \text{нечет}}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}\frac{z^n}{n!},\quad \cos z=\sum_{n=0,\ \text{чет}}^{\infty}(-1)^{n/2}\frac{z^n}{n!},$$

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=1,\ \text{нечет}}\frac{z^n}{n!},\quad \operatorname{ch} z=\sum_{n=0,\ \text{чет}}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Доказать, что $i\sin z=\operatorname{sh} iz$, $\sin iz=i\operatorname{sh} z$, $\cos z=\operatorname{ch} iz$, $\cos iz=\operatorname{ch} z$.

Убедиться, что в комплексной плоскости имеют место известные функциональные зависимости

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1.$$

11. Тождества $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, можно получить сравнением степенных рядов. Показать, что

$$\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y,$$
$$\cos(x+iy)=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y,$$
$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y,\quad |\cos z|^2=\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y.$$

12. Определить нули функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

13. Показать, что

$$\arcsin z=i\ln\left(iz\pm\sqrt{1-z^2}\right),\quad \operatorname{Arsh} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$
$$\arccos z=-i\ln\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right),\quad \operatorname{Arch} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$
$$\operatorname{arctg} z=\frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right),\quad \operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Указание. Выразить тригонометрические и гиперболические функции через показательную, а затем решить алгебраическое уравнение относительно этой функции.

14. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \frac{\sin N(x/2)}{\sin \frac{x}{2}} \cos (N-1)\frac{x}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin nx = \frac{\sin N(x/2)}{\sin \frac{x}{2}} \sin (N-1)\frac{x}{2}.$$

Эти ряды встречаются в анализе многощелевой дифракции.

15. При условии $-1 < p < 1$ доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sin nx = \frac{p\sin x}{1-2p\cos x+p^2}.$$

Эти ряды возникают в теории интерферометра Фабри—Пьеро.

16. Комплексные величины $a=u+iv$ и $b=x+iy$ можно представить в виде двумерных векторов $\mathbf{a}=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y$. Показать, что $a^*b=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+i|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

17. Записать в явном виде аналитическую функцию $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, если $u(x, y)=\ln(x^2+y^2)^{1/2}$.

18. Доказать тождество, которое встречается в квантовой теории фотоионизации:

$$\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right)^{ib} = e^{-2b\,\mathrm{arcctg}\,a}.$$

19. Доказать, что $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$. Объяснить этот результат, используя правила сложения векторов.

6.2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

Это первая из двух основных теорем в теории функций комплексного переменного. Мы докажем ее при сравнительно грубых допущениях, которые не совсем корректны с точки зрения строгой математической теории, но которые, как правило, сопутствуют различным физическим задачам.

*Если функция $f(z)$ аналитична (следовательно, однозначна) в некоторой односвязной * области R* (рис. 6.3)

* Область называется *односвязной*, если любой замкнутый контур в этой области содержит внутри себя только точки, принадлежащие этой области. В противном случае область называется многосвязной. Примером многосвязной области может служить плоскость z, из которой исключен круг единичного радиуса.

и имеет в ней непрерывные частные производные, то для всех замкнутых кривых C в R линейный интеграл, взятый

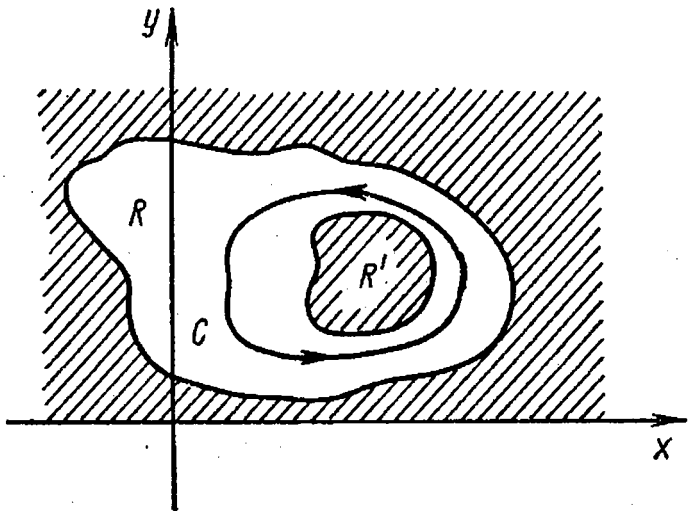


Рис. 6.3. Замкнутый контур C внутри односвязной области.

от функции $f(z)$ по кривой C, равен нулю:

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0.\ ^* \qquad (6.18)$$

В такой форме интегральную теорему Коши можно доказать с помощью теоремы Стокса. Представим $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, тогда

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u + iv)(dx + i dy) =$$

$$= \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i \oint_C (v\,dx + u\,dy). \qquad (6.19)$$

По теореме Стокса два последних линейных интеграла можно свести к поверхностным, если частные производные непрерывны внутри контура C. Обозначив $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y$, запишем

$$\oint_C (V_x\,dx + V_y\,dy) = \int \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

В первом интеграле из правой части уравнения (6.19) положим $V_x = u$, $V_y = -v$, а во втором интеграле $V_x = v$,

* Символ $\oint$ подчеркивает, что интегрирование ведется по замкнутому контуру.

$V_y = u$. Тогда на основании условий Коши — Римана, которые в данном случае выполнены, поскольку $f(z)$ аналитична, имеем

$$\oint f(z)\,dz = -\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + \\ +i\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = 0. \qquad (6.20)$$

Интегральная теорема Коши доказана. Однако с теоретической точки зрения оно проведено несколько некорректно из-за требования непрерывности первых частных производных. На самом деле это требование не является обязательным. Разбивая всю область, ограниченную контуром C, на бесконечно малые прямоугольники и рассматривая линейные интегралы по их границам, Гурса показал, что теорема Коши выполняется и в том случае, когда функция $f(z)$ просто аналитична внутри этой области, причем

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \qquad (6.21)$$

Строгое доказательство этой теоремы в более общей форме можно найти в других книгах, рекомендованных к этой главе. Фактически теорему Коши можно доказать для функции, аналитической внутри контура C и непрерывной на нем.

Из теоремы Коши следует, что линейный интеграл от аналитической функции определяется только концевыми точками контура интегрирования

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz. \qquad (6.22)$$

Одно из исходных условий доказанной теоремы состояло в требовании односвязности области. Это ограничение можно легко снять, сделав соответствующий разрез на плоскости z. Рассмотрим многосвязную область R (рис. 6.4), о которой известно, что $f(z)$ не определена внутри R'. Интегральная теорема Коши уже не выполняется для контура C; однако можно задать такой контур интегрирования C', для которого теорема окажется справедливой. Соединим разрезом внутреннюю область R' с областью,

лежащей за пределами контура C, и затем выберем новый контур интегрирования C', как показано на рис. 6.5.

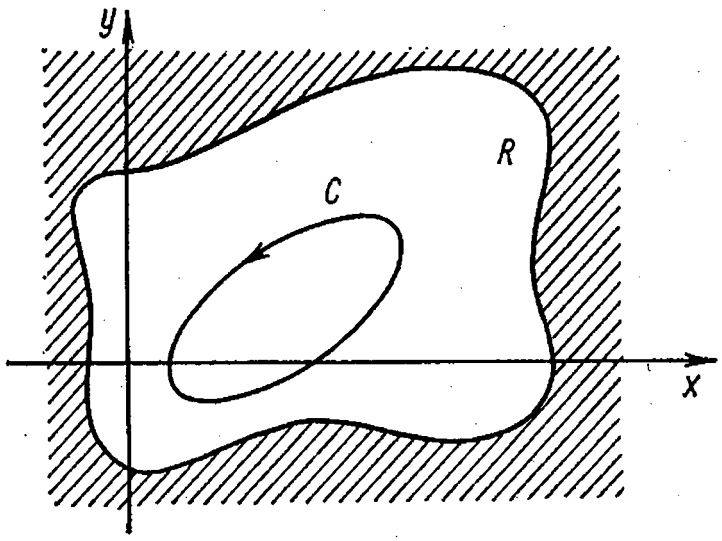


Рис. 6.4. Замкнутый контур C внутри многосвязной области.

Новый контур C' ($ABDEFGA$) нигде не пересекает линию разреза, который делает область R односвязной. Анало-

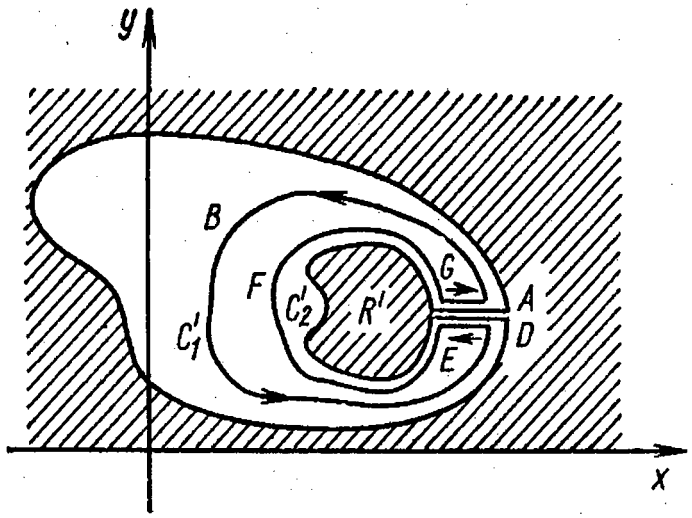


Рис. 6.5. Превращение многосвязной области в односвязную.

гичная процедура использована в разд. 1.14 для доказательства трехмерного закона Гаусса. Сближая отрезки интегрирования на основании (6.22), получаем

$$\int_G^A f(A)\,dz = -\int_E^D f(z)\,dz. \qquad (6.23)$$

Тогда с учетом интегральной теоремы Коши, примененной теперь уже к односвязной области R, мы вправе записать

$$\oint_{C'} f(z)\,dz = \int_{ABD} f(z)\,dz + \int_{EFG} f(z)\,dz. \qquad (6.24)$$

Обратимся вновь к уравнению (6.22), в котором положим $ABD \to C_1'$ и $EFG \to -C_2'$. Тогда

$$\oint_{C_1'} f(z)\,dz = \int_{C_2'} f(z)\,dz. \qquad (6.25)$$

Здесь обход контуров C_1' и C_2' совершается в одинаковом (против часовой стрелки) направлении.

Упражнения

1. Используя одни лишь условия Коши—Римана (без ссылок на интегральную теорему Коши), показать, что для окружности C единичного радиуса

$$\oint_C (z+2)^{-1}\,dz = 0.$$

2. Показать, что $\oint \frac{dz}{z^2+z} = 0$.

Контур C — окружность, заданная условием $|z| = R > 1$. В разд. 7.2 показывается, что при $R < 1$ этот интеграл равен $2\pi i$.

3. Проверить, что интеграл $\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} z^*\,dz$ имеет разные значения для двух контуров интегрирования, показанных на рис. 6.6. Напомним, что $f(z) = z^*$ не является аналитической функцией, поэтому интегральная теорема Коши в данном случае неприменима.

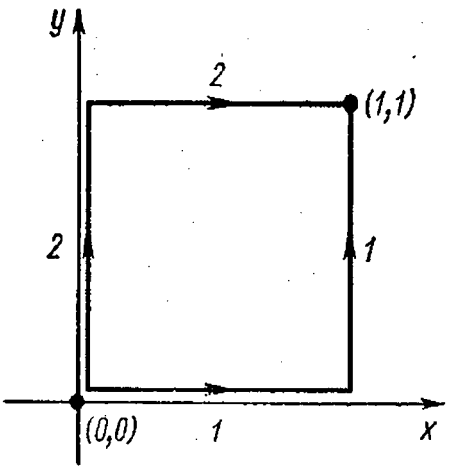


Рис. 6.6. Два контура интегрирования.

6.3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Пусть функция $f(z)$, аналитическая как на самом замкнутом контуре C, так и внутри области, ограниченной этим контуром, тогда

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0), \qquad (6.26)$$

где z_0 — некоторая точка, лежащая внутри контура C.

Это вторая из двух основных теорем, о которых говорилось в разд. 6.2. Докажем ее. Хотя $f(z)$ предполагается аналитической, сама подынтегральная функция, которая имеет вид $f(z)/(z-z_0)$, неаналитична в точке $z=z_0$. Если выбрать контур интегрирования так, как показано

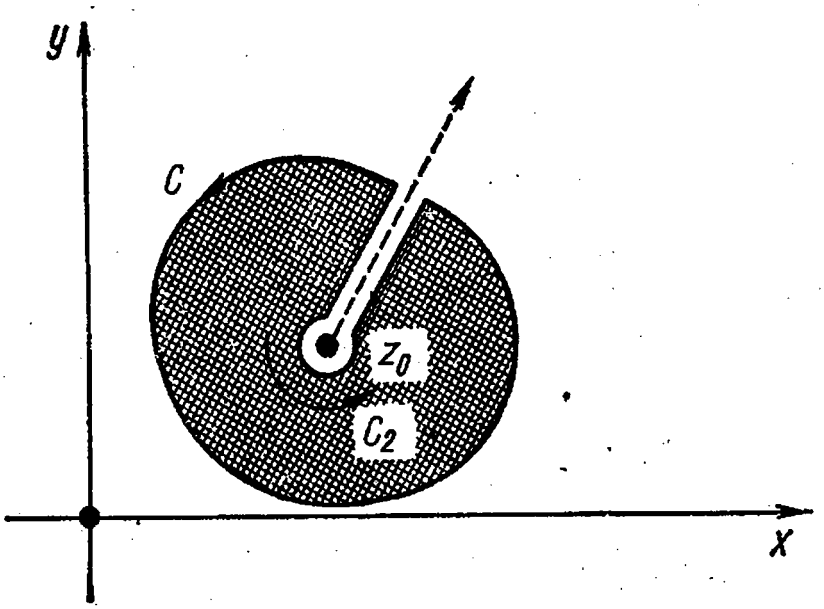


Рис. 6.7. Исключение особой точки.

на рис. 6.7 (или на рис. 6.5), то можно воспользоваться интегральной теоремой Коши. С учетом (6.25)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz, \tag{6.27}$$

где C — первоначальный наружный контур, а C_2 — окружность малого радиуса с центром в точке z_0, по которой совершается обход против часовой стрелки. Учитывая, что интегрирование ведется по окружности, положим $z = z_0 + re^{i\theta}$ и воспользуемся представлением комплексного числа в полярных координатах. Здесь r мало и в дальнейшем произвольным образом будет устремлено к нулю. Тогда

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{C_2} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\,rie^{i\theta}\,d\theta.$$

Полагая $r \to 0$, имеем

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = if(z_0)\oint_{C_2} d\theta = 2\pi i f(z_0), \tag{6.28}$$

поскольку $f(z)$ аналитична и, следовательно, непрерывна в точке $z = z_0$. Это и доказывает интегральную формулу Коши.

Мы получили замечательный результат. Действительно, определив функцию $f(z)$ на границе области C, можно затем найти ее значение для любой внутренней точки $z = z_0$ из этой области. В этом отношении отмечается большое сходство с двумерным законом Гаусса (см. разд. 1.14), где величина линейного заряда определяется интегралом по цилиндрической поверхности от электрического поля **E**.

Исходя из интегральной формулы Коши, можно получить выражение для производной $f(z)$. Если $f(z)$ аналитична, то из (6.26) следует

$$\frac{f(z_0+\delta z)-f(z_0)}{\delta z} = \frac{1}{2\pi i \delta z}\left(\oint \frac{f(z)}{z-z_0-\delta z}\,dz - \oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right).$$

Тогда, по определению производной (6.7),

$$f'(z_0) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i \delta z} \oint \frac{\delta z f(z)}{(z-z_0-\delta z)(z-z_0)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz. \qquad (6.29)$$

При внимательном чтении можно заметить, что этот результат получается прямым дифференцированием (6.26) под знаком интеграла по z_0. Такой формальный подход вполне оправдан, и его доказательство содержится в приведенных выкладках. Продолжая процесс дифференцирования, в конечном итоге получаем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \qquad (6.30)$$

Следовательно, требование аналитичности функции $f(z)$ гарантирует существование не только первой производной, но и производной любого порядка, иными словами, из аналитичности функции $f(z)$ автоматически следует аналитичность ее производных. Необходимо обратить внимание читателя на то, что это утверждение основано на трактовке Гурса интегральной теоремы Коши.

Теорема Морера. Применим интегральную теорему Коши для доказательства теоремы Морера, обратной теореме Коши. Теорема Морера утверждает следующее: *если*

функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области R и интеграл $\oint_C f(z)\,dz = 0$ для любого замкнутого контура C из этой области, то $f(z)$ аналитична в R.

Проинтегрируем $f(z)$ от z_1 до z_2. Поскольку $\oint_C f(z) = 0$ для любого замкнутого C, его значение не зависит от пути и определяется только начальной и конечной точками интегрирования. Обозначая результат интегрирования $F(z)$, имеем

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz. \tag{6.31}$$

Образуем тождество

$$\frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1} - f(z_1) = \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t)-f(z_1)]\,dt}{z_2-z_1}, \tag{6.32}$$

где t — новая переменная интегрирования. Перейдем к пределу $z_2 \to z_1$. Тогда в силу непрерывности $f(t)$ *

$$\lim_{z_2\to z_1} \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t)-f(z_1)]\,dt}{z_2-z_1} = 0. \tag{6.33}$$

Следовательно, по определению производной (6.7),

$$\lim_{z_2\to z_1} \frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1} = F'(z)\big|_{z=z_1} = f(z_1). \tag{6.34}$$

Мы доказали, что $F'(z)$ существует в точке $z = z_1$ и равна в ней $f(z_1)$, а поскольку z_1 — произвольная точка из области R, то $F(z)$ аналитична в R. Следовательно, на основании интегральной формулы Коши (6.30) можно утверждать, что $F'(z) = f(z)$ также аналитична в R. Теорема Морера доказана.

Обращаясь еще раз к электростатике, можно воспользоваться функцией $f(z)$ для описания электростатического

* Здесь можно сослаться на теорему о среднем значении из математического анализа.

поля E. Если суммарный заряд внутри любой замкнутой области из R равен нулю, то плотность заряда всюду в R также равна нулю. С другой стороны, рассматривая $f(z)$ в смысле разд. 1.13, мы можем считать ее консервативной силой, откуда сразу же вытекает, что она всегда выражается через производную потенциальной функции $F(z)$.

Проверка обратного преобразования Фурье. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в некоторой области, причем

$$f_a(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{izw} g(w)\, dw. \tag{6.35}$$

В гл. 15 функция $f(z)$ названа фурье-образом функции $g(w)$ *.

Используя интегральную формулу Коши, докажем, что

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} f_a(z)\, dz. \tag{6.36}$$

Во-первых, поскольку $g(w)$ — аналитическая, контур интегрирования можно деформировать. На рис. 6.8 пока-

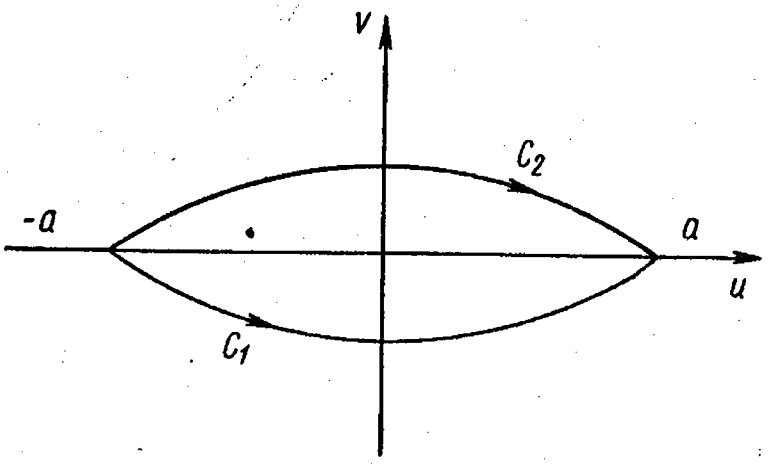


Рис. 6.8. Деформированные контуры интегрирования на w-плоскости.

заны два возможных варианта деформированного контура. Подставим теперь $f_a(z)$ в (6.36) и оценим полученное выражение (обозначим его I):

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt}\, dz \int_{a}^{-a} e^{izw} g(w)\, dw.$$

* Следует в формуле (6.35) положить $a \to \infty$.

Интеграл по z разобьем на два и изменим порядок интегрирования:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a\,(C_1)}^{a} g(w)\,dw \int\limits_{-\infty}^{0} e^{iz(w-t)}\,dz + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a\,(C_2)}^{a} g(w)\,dw \int\limits_{0}^{\infty} e^{iz(w-t)}\,dz. \qquad (6.37)$$

В круглых скобках под знаком интеграла мы показываем, по какому контуру ведется интегрирование. Интегрируя сначала по z (поскольку это можно сделать), получаем

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} g(w)\,dw \left| \frac{e^{iz(w-t)}}{w-t} \right|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} g(w)\,dw \left| \frac{e^{iz(w-t)}}{w-t} \right|_{0}^{\infty}. \qquad (6.38)$$

Экспоненциальный множитель можно записать как $e^{-zv}e^{iz(u-t)}$, где сделана замена $w = u + iv$. Далее, благодаря выбору контура интегрирования в w-плоскости $\mathrm{Im}\,w = v$ отрицательна на C_1 и положительна на C_2. Выбор такого контура интегрирования обеспечивает стремление множителя $e^{iz(w-t)}$ к нулю, как $e^{-\infty}$, при $z \to \pm\infty$. Уравнение (6.38) переходит в

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{C_1} \frac{g(w)}{w-t}\,dw - \int\limits_{C_2} \frac{g(w)}{-t}\,dw\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{g(w)}{w-t}\,dw.$$

Применив интегральную формулу Коши при условии $-a < t < a$ (t лежит внутри замкнутого контура), получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} f_a(z)\,dz = g(w). \qquad (6.39)$$

Этот результат (при $a \to \infty$) доказывает обратное преобразование Фурье.

Упражнения

1. Доказать, что

$$\oint\limits_{C} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1, \\ 0 & n \neq -1, \end{cases}$$

где контур C — окружность с центром в точке $z=z_0$, обход контура совершается в положительном направлении (против часовой стрелки), n — целое.

2. Доказать, что $|f^n(z_0)| \leqslant Mn!/R^n$, где R — радиус окружности с центром в точке $z=z_0$, а $M=\max|f(z)|$ на этой окружности. Предполагается, что $f(z)$ аналитична внутри круга и на его границе.

3. Доказать, что $f(z)$ должна быть постоянной при любых z, если она аналитична и ограничена $[f(z) \leqslant M]$ (теорема Лиувилля).

4. Рассмотреть упр. 2 к разд. 6.2, разбив подынтегральную функцию на части и применив затем интегральную теорему Коши к многосвязной области.

5. Вычислить интеграл $\oint \frac{\sin z}{z} dz$ при положительном обходе любого контура C, включающего начало координат.

6. Предполагая, что $f(z)$ — аналитическая внутри замкнутого контура C, а точка z_0 лежит также внутри этого контура, показать, что

$$\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

7. Показать, что для всех точек, лежащих внутри замкнутого контура C, $|f(z)|>M$, если $f(z)$ аналитична и отлична от нуля в этой области (и непрерывна на C), и, кроме того, $|f(z)| \geqslant M$ на контуре C. *Указание.* Рассмотреть $w(z)=1/f(z)$. Показать, что для $f(z)=0$ всюду внутри области это утверждение теряет силу. Приведите конкретный пример аналитической функции, которая ведет себя подобным образом.

8. Доказать, что символ Кронекера δ_{mn} представляется интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1} dz, \quad m \text{ и } n \text{ — целые.}$$

Обход контура интегрирования, внутри которого содержится начало координат, совершается против часовой стрелки.

6.4. РЯД ЛОРАНА

Ряд Тейлора. Интегральная формула Коши, полученная в разд. 6.3, дает возможность для нового подхода к рядам Тейлора (см. разд. 5.6), однако в этом случае исследуемые функции должны зависеть уже от комплексных переменных. Попытаемся разложить функцию $f(z)$ в окрестности точки $z=z_0$, причем известно, что $z=z_1$ — ближайшая точка на комплексной плоскости, в которой $f(z)$ неаналитична (рис. 6.9). Проведем окружность C с центром в точке $z=z_0$ радиусом $|z'-z_0|<|z_1-z_0|$. Поскольку по условию z_1 есть ближайшая точка, в которой функция

$f(z)$ неаналитична, $f(z)$ должна быть аналитической внутри C. Из интегральной формулы Коши (6.26) следует:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{z'-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)\,[1-(z-z_0)/(z'-z_0)]}, \qquad (6.40)$$

где z' — точка, лежащая на контуре C, а z — любая точка внутри C. Поскольку биномиальная теорема для комплексного переменного еще не доказана, с ее помощью нельзя разложить знаменатель подынтегрального выражения в соотношении (6.40). Вместо этого воспользуемся тождеством

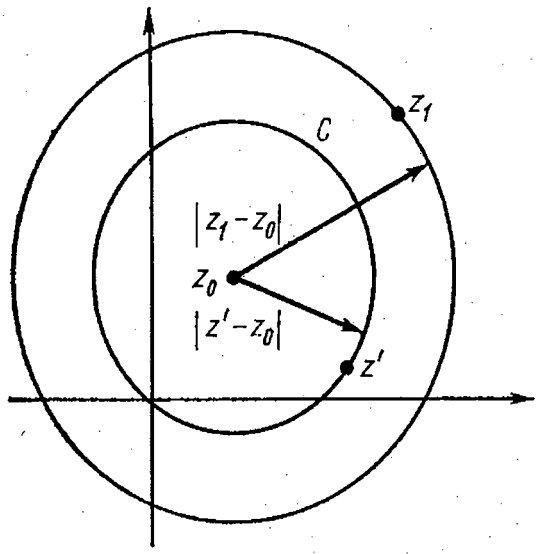


Рис. 6.9. Область аналитичности функции $f(z)$: $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+$$

$$+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} t^n, \qquad (6.41)$$

которое легко проверяется умножением обеих его частей на $1-t$. Очевидно (см. разд. 5.2), что этот бесконечный ряд сходится при $|t|<1$.

Для точки z, лежащей внутри контура C, $|z-z_0|<|z'-z_0|$, поэтому с учетом (6.41) выражение (6.40) принимает вид

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}. \qquad (6.42)$$

Изменив порядок интегрирования и суммирования (это можно сделать, так как ряд (6.41) равномерно сходится при $|t|<1$), получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}. \qquad (6.43)$$

Учитывая (6.30), исключаем интеграл из последнего выражения:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^n(z_0)}{n!}. \qquad (6.44)$$

Это и есть искомое разложение в ряд Тейлора. Отметим, что оно получено только в предположении аналитичности $f(z)$ в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Как и в случае степенного ряда для функции вещественной переменной (см. разд. 5.7), полученное разложение единственно в данной точке z_0.

Аналитическое продолжение. В предыдущем изложении предполагалось, что функция $f(z)$ имеет изолированную точку $z = z_1$, в которой она неаналитична или сингулярна. (см. рис. 6.9). Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad (6.45)$$

которая обращается в бесконечность в точке $z = -1$. Следовательно, $f(z)$ неаналитична в точке $z_1 = -1$ или, иными словами, $z_1 = -1$ есть особая точка функции $f(z)$. Воспользовавшись разложением (6.44) или биномиальной теоремой для комплексных функций, которая вытекает непосредственно из этого разложения, получим ряд

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad (6.46)$$

сходящийся в круге $|z| < 1$ (рис. 6.10). Обозначим границу этого круга сходимости C_1, тогда функция $f(z)$ представима рядом (6.46) в области, которая ограничена C_1 и которую мы обозначим S_1. Функцию $f(z)$ можно разложить в ряд в окрестности начала координат только в области S_1 (и на границе C_1, исключая точку $z_1 = -1$), однако из самого вида $f(z)$ ясно, что она определена и аналитична на всей комплексной плоскости вне области S_1. *Аналитическое продолжение функции заключается в расширении области, в которой эта функция представима рядом* (6.46). Например, мы разложили $f(z)$ в окрестности точки $z = i$:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{1+i}\left(1 + \frac{z-i}{1+i}\right)^{-1}. \qquad (6.47)$$

С помощью формулы (6.44) находим ряд

$$f(x)=\frac{1}{1+i}\left[1-\frac{z-i}{1+i}+\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^2-\ldots\right], \quad (6.48)$$

сходящийся в области $|z-i|<|1+i|=|\sqrt{2}|$. Обозначим границу круга сходимости C_2, а область внутри нее

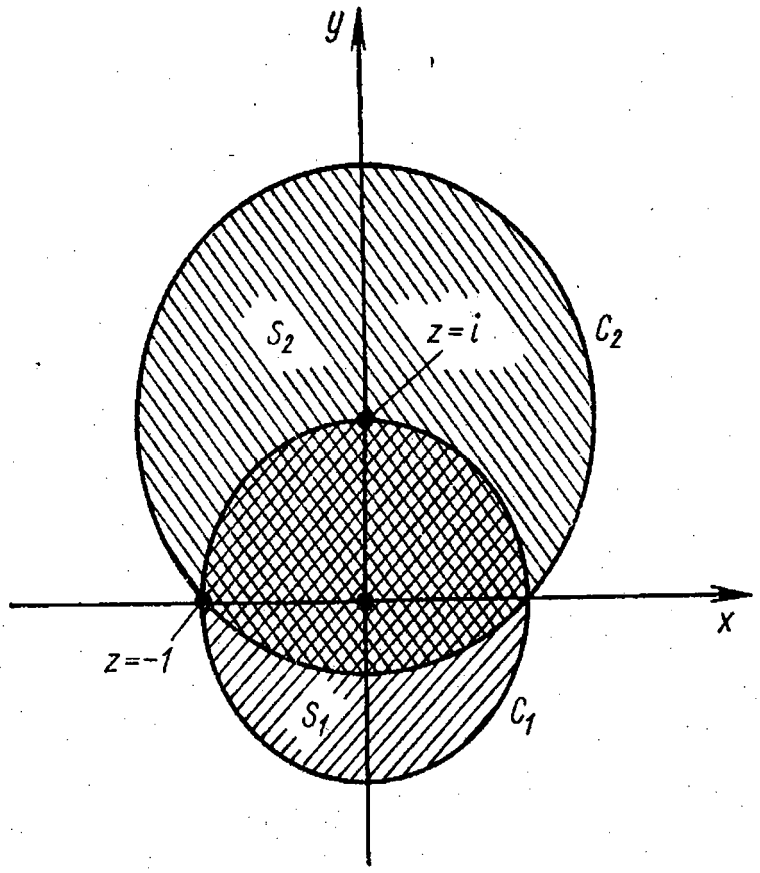


Рис. 6.10. Аналитическое продолжение.

S_2. Функция $f(z)$ задана рядом (6.48) в области S_2, которая перекрывается с S_1, поэтому $f(z)$ может быть продолжена в комплексной плоскости *. В этом и заключается смысл

* Один из наиболее важных результатов теории функций комплексного переменного состоит в том, что две аналитические функции, совпадающие в некоторой области, например в области перекрывания S_1 и S_2 или на некотором отрезке прямой, представляют собой одну и ту же функцию в том смысле, что они будут совпадать всюду в областях определения этих функций. В этом случае соответствие разложений (6.46) и (6.48) в области перекрывания S_1 и S_2 говорит о тождественности функций, которые представлены этими разложениями. Следовательно, выражение (6.48) будет аналитическим продолжением функции $f(z)$ в той области, которая не охватывается разложением (6.46), поэтому можно утверждать, что функция $f(z)=1/(1+z)$ есть аналитическое продолжение рядов (6.46) и (6.48).

аналитического продолжения, причем, если функция имеет только изолированные особые точки, это продолжение может быть бесконечным. Например, в гл. 10 мы воспользуемся рекуррентным соотношением для аналитического продолжения гамма-функции в окрестности изолированных особых точек $z = -n$, $n = 1, 2, 3\ldots$.

Все элементарные функции, e^z, $\sin z$ и т. д., могут быть разложены в комплексной плоскости (см. разд. 6.1, упр. 10). Например, для экспоненциальной функции это разложение имеет вид степенного ряда

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \qquad (6.49)$$

Такое задание этой функции совпадает с ее определением на вещественной оси x для случая вещественной переменной и поэтому является аналитическим продолжением экспоненты в комплексной плоскости.

Ряд Лорана. Часто приходится иметь дело с функциями, аналитическими в кольце $r < |z - z_0| < R$ (рис. 6.11).

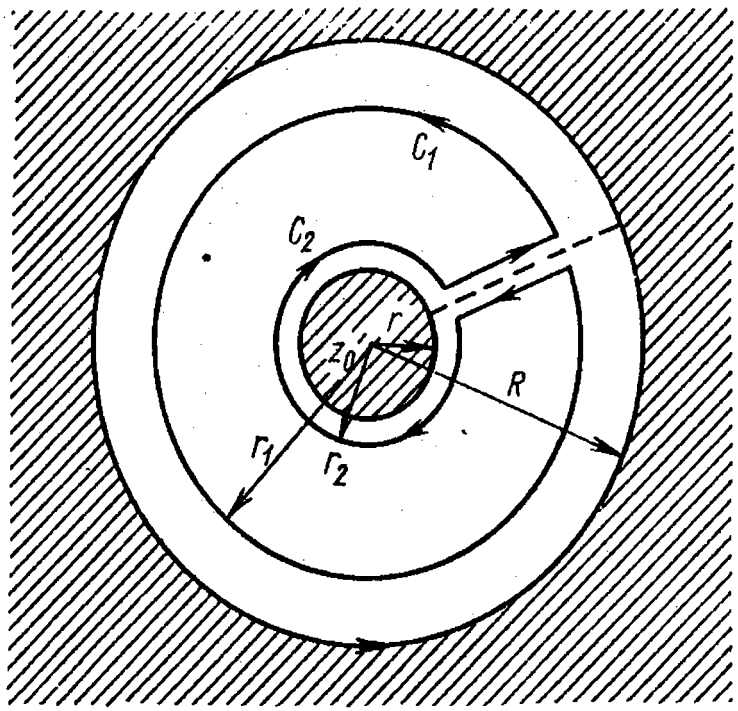


Рис. 6.11. Область аналитичности $f(z)$ на z-плоскости $r < |z - z_0| < R$.

С помощью воображаемого разреза превратим кольцо в односвязную область, а затем применим интегральную

формулу Коши к двум окружностям C_2 и C_1 с центром в точке $z = z_0$ и с радиусами соответственно r_2 и r_1, причем $r < r_2 < r_1 < R$ *:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z')\,dz'}{z'-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z')\,dz'}{z'-z}. \qquad (6.50)$$

Важно подчеркнуть, что знак минус, введенный в уравнение (6.50), выбран из соображений положительного (против часовой стрелки) обхода контура C_2 (и C_1). Применим к уравнению (6.50) ту же процедуру, какой мы пользовались раньше, когда из выражения (6.40) получали разложение Тейлора. Запишем каждый из знаменателей в подынтегральных функциях в виде $(z' - z_0) - (z - z_0)$ и с помощью биномиальной теоремы для комплексного переменного, вытекающей из формулы (6.44), произведем разложение

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_1}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\oint_{C_2}(z'-z_0)^{n-1}f(z')\,dz'. \qquad (6.51)$$

Знак минус в уравнении (6.50) исчез после подстановки биномиального разложения. Обозначим первый ряд из этого уравнения S_1, а второй S_2:

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_1}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}. \qquad (6.52)$$

Ряд S_1 представляет собой обыкновенное разложение Тейлора, сходящееся при $|z-z_0| < |z'-z_0| = r_1$, т. е. для всех точек z, которые лежат внутри большого круга C_1.

Второй ряд из уравнения (6.51)

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\oint_{C_2}(z'-z_0)^{n-1}f(z')\,dz' \qquad (6.53)$$

---

* Мы можем взять r_2 как угодно близко к r, а r_1 как угодно близко к R, увеличив максимально область между C_1 и C_2.

сходится при $|z-z_0|>|z'-z_0|=r_2$, т. е. для всех точек z, которые лежат вне малого круга C_2. Полученные ряды можно объединить в один (ряд Лорана)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{6.54}$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}. \tag{6.55}$$

Здесь C — произвольный контур из кольца $r<|z-z_0|<R$, обход контура C с точкой z_0 внутри него совершается против часовой стрелки. Если предположить существование такого кольца сходимости, то выражение (6.54) будет представлять собой ряд или разложение Лорана для функции $f(z)$.

Многочисленные примеры рядов Лорана приводятся в гл. 7. Здесь же ограничимся только одним примером, который поможет проиллюстрировать соотношение (6.54).

Пример. Пусть $f(z)=[z(z-1)]^{-1}$. Если положить $z_0=0$, то $r=0$, а $R=1$; функция $f(z)$ расходится в точке $z=1$. Из уравнений (6.55) и (6.41) имеем

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz'}{(z')^{n+2}(z'-1)}=-\frac{1}{2\pi i}\oint \sum_{m=0}^{\infty}(z')^m\frac{dz'}{(z')^{n+2}}. \tag{6.56}$$

Вновь изменим порядок суммирования и интегрирования (ряд сходится равномерно)

$$a_n=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\oint \frac{dz'}{(z')^{n+2-m}}. \tag{6.57}$$

Если перейти к полярной форме записи комплексных чисел, как это сделано в (6.30), то

$$a_n=-\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{rie^{i\theta}\,d\theta}{r^{n+2-m}e^{i(n+2-m)\theta}}=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\sum_{m=0}^{\infty}\delta_{n+2-m,1} \tag{6.58}$$

или

$$a_n=\begin{cases} -1 \text{ для } n\geqslant -1, \\ 0 \text{ для } n< 1. \end{cases} \tag{6.59}$$

С учетом (6.59) ряд Лорана приобретает вид

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \ldots = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n. \qquad (6.60)$$

Разложение Лорана для этой простой функции можно, конечно, получить непосредственно из биномиального разложения.

Ряд Лорана отличается от ряда Тейлора наличием членов с отрицательной степенью $(z - z_0)$. Поэтому он будет всегда расходиться, по крайней мере, в точке $z = z_0$ и, возможно, в некоторой окрестности этой точки радиуса r (см. рис. 6.11).

Упражнения

1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$ в окрестности точки $z = 1$ при малых и больших значениях модуля $|z-1|$. Определить точно область, для которой справедливо такое разложение, имеющее смысл аналитического продолжения функции (6.60).

2. Функция $f(z)$ аналитична внутри единичного круга и на его границе. Кроме того, $|f(z)| \leqslant 1$ для $|z| \leqslant 1$ и $f(0) = 0$. Показать, что $|f(z)| \leqslant |z|$ для $|z| \leqslant 1$.

3. Разложить функцию $\ln(1+z)$ в ряд Тейлора.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n$.

4. Доказать единственность разложения Лорана некоторой функции в окрестности данной точки. *Указание*. Воспользоваться интегральной формулой Коши.

5. Разложить $\operatorname{ctg} z$ и $(e^z - 1)^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности начала координат. Записать первые три ненулевых коэффициента.

6. Получить биномиальное разложение

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \ldots$$

для любого вещественного m.

7. Функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана в окрестности начала координат, причем коэффициенты такого разложения вещественны. Показать, что

$$f^*(z) = f(z^*).$$

Проверить это для функций $f(z) = z^n$, n — целое; $f(z) = \sin z$. Показать, что утверждение теряет силу, если $f(z) = iz$ $(a_1 = i)$.

8. Задана вещественная функция комплексного переменного $f(z)$, причем в разложении Лорана $f(z) = \sum a_n z^n$ в окрестности начала все коэффициенты $a_n = 0$ для $n < -N$. Доказать, что все коэффициенты a_n вещественны.

6.5. ОТОБРАЖЕНИЕ

Обратимся теперь к геометрическим свойствам функций комплексного переменного, которые позволят более отчетливо уяснить смысл интегральных операций из гл. 7 и, кроме того, представляют интерес для решения уравнения Лапласа в двумерном случае.

В обычной аналитической геометрии можно задать функцию $y = f(x)$, а затем начертить график $y(x)$. В данном случае проблема оказывается более сложной, поскольку z зависит от двух переменных — x и y. В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{6.61}$$

Теперь точке на z-плоскости (заданной значениями x и y) могут соответствовать определенные значения $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые зафиксируют некоторую точку на w-плоскости. Поскольку точки на z-плоскости преобразуются или отображаются в точки на w-плоскости, то линии или области, лежащие в плоскости z, будут отображаться в линии или области, расположенные в w-плоскости. Наша цель состоит в том, чтобы выяснить, каким образом с помощью элементарных функций линии или области на z-плоскости преобразуются в линии или области на w-плоскости.

Параллельный перенос. Функция w равна сумме переменной z и некоторой постоянной $z_0 = x_0 + iy_0$:

$$w = z + z_0. \tag{6.62}$$

Из уравнений (6.1) и (6.61) следует, что

$$u = x + x_0, \quad v = y + y_0. \tag{6.63}$$

Эти формулы преобразования характеризуют простой сдвиг координатных осей (рис. 6.12).

Поворот.

$$w = zz_0. \tag{6.64}$$

В полярном представлении

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad z = re^{i\theta}, \quad z_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \tag{6.65}$$

откуда

$$\rho e^{i\varphi} = rr_0 e^{i(\theta+\theta_0)} \tag{6.66}$$

или

$$\rho = rr_0, \quad \varphi = \theta + \theta_0. \tag{6.67}$$

Анализируя последние формулы, можно высказать следующие соображения. Во-первых, модуль комплексного

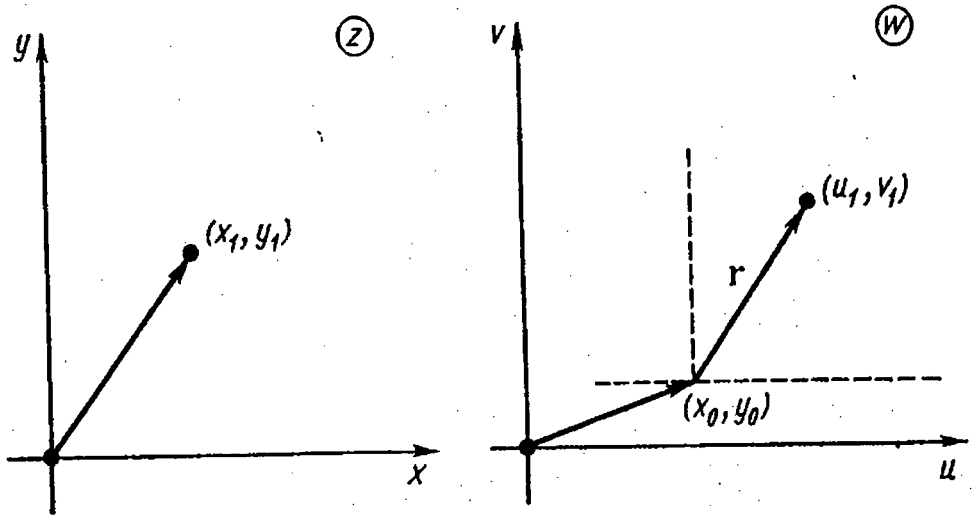


Рис. 6.12. Параллельный перенос.

числа r либо растягивается, либо сжимается в зависимости от множителя r_0. Во-вторых, аргумент числа увеличивается на дополнительную постоянную θ_0 (рис. 6.13).

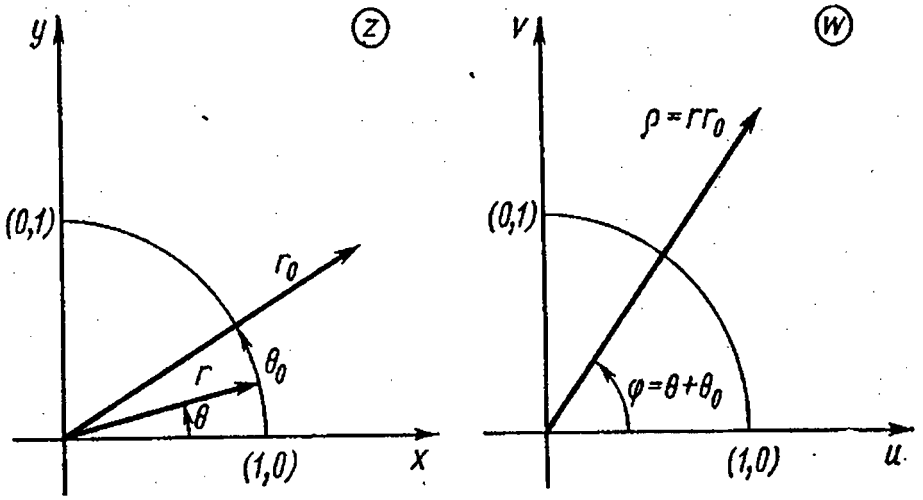


Рис. 6.13. Поворот.

Это означает поворот комплексной переменной на угол θ_0. В случае $z_0 = i$ мы имеем чистое вращение на угол $\pi/2$.

Инверсия.

$$w = \frac{1}{z}. \tag{6.68}$$

Снова воспользуемся полярной формой записи

$$\rho e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}, \tag{6.69}$$

откуда

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \varphi = -\theta. \tag{6.70}$$

Первое из полученных соотношений описывает чистую инверсию. Внутренность единичного круга отображается во

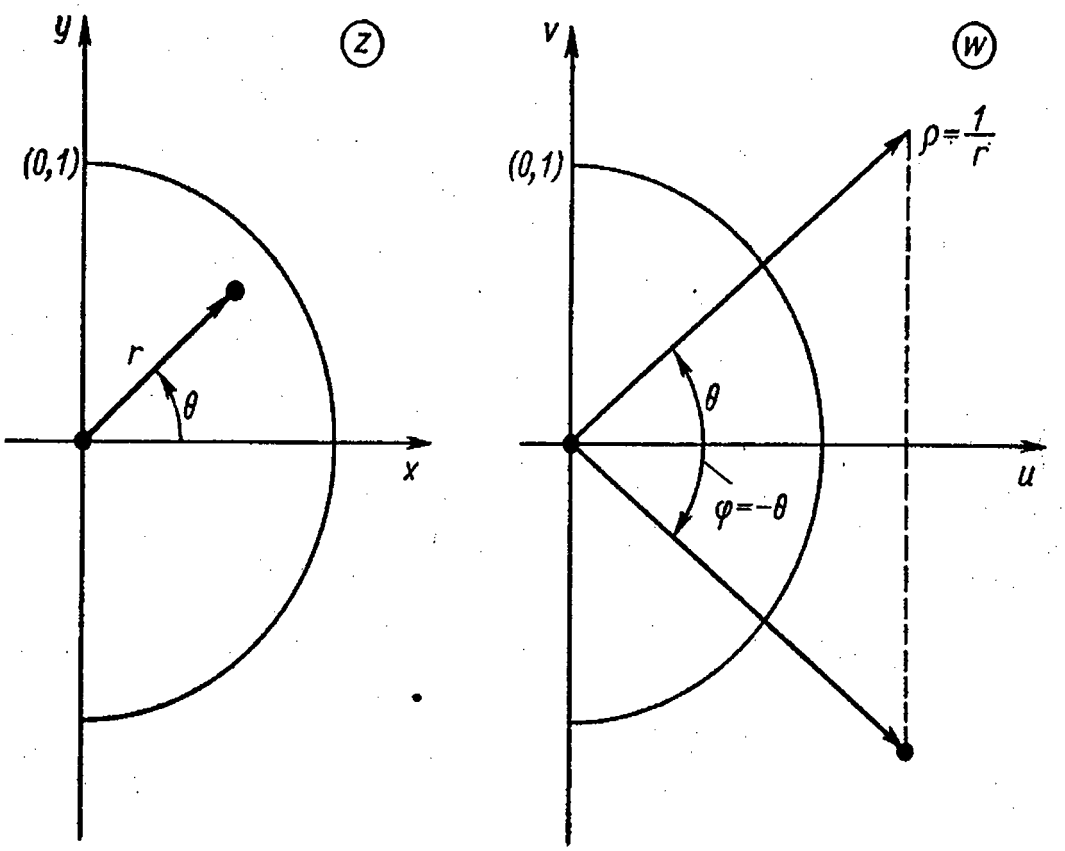


Рис. 6.14. Инверсия.

внешнюю область, и наоборот. Второе соотношение показывает, что полярный угол меняет знак. Следовательно, преобразование (6.68) содержит в себе отражение оси y, какое имеет место при комплексном сопряжении (рис. 6.14).

Чтобы выяснить, как линии на z-плоскости отражаются на w-плоскость, удобно использовать запись комплексного числа в декартовых координатах:

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}. \tag{6.71}$$

Умножим числитель и знаменатель в первой части последнего равенства на z^* и затем приравняем реальные и мнимые части

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}; \\ x &= \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

Как известно, окружность на z-плоскости с центром в начале координат описывается уравнением

$$x^2+y^2=r^2, \tag{6.73}$$

которое с помощью (6.72) приводится к виду

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}=r^2. \tag{6.74}$$

Упростим это соотношение:

$$u^2+v^2=\frac{1}{r^2}=\rho^2. \tag{6.75}$$

Последнее уравнение описывает на w-плоскости круг, центр которого тоже совпадает с началом координат.

Горизонтальная линия $y=c_1$ трансформируется в

$$\frac{v}{u^2+v^2}=c_1 \tag{6.76}$$

или

$$u^2+v^2+\frac{v}{c_1}+\frac{1}{(2c_1)^2}=\frac{1}{(2c_1)^2}. \tag{6.77}$$

Уравнение (6.77) описывает окружность в w-плоскости радиусом $1/2\ c_1$ и с координатами центра $u=0$, $v=-{}^1/_2c_1$ (рис. 6.15). Читателю предлагается самостоятельно рассмотреть три других варианта.

Вообще говоря, любая прямая линия или окружность в z-плоскости преобразуется в окружность в w-плоскости (см. упр. 2).

Все три рассмотренных преобразования дают взаимно однозначное отображение точек z-плоскости на точки w-плоскости. Однако возможны и другие преобразования.

Остановимся сначала на двузначном преобразовании

$$w=z^2, \tag{6.78}$$

которое приводит к

$$\rho=r^2, \quad \varphi=2\theta. \tag{6.79}$$

Очевидно, это преобразование нелинейно, так как модули связаны квадратичной зависимостью, но существенная особенность выражения (6.79) состоит в том, что фазовый угол, или аргумент, удваивается. Это означает, что имеется следующее отображение:

первый квадрант z-плоскости $(0 \leqslant \theta < \pi/2) \rightarrow$ верхняя w-полуплоскость $(0 \leqslant \varphi < \pi)$;

верхняя z-полуплоскость $(0 \leqslant \theta < \pi) \rightarrow$ вся w-плоскость $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

Нижняя полуплоскость z также отображена на всю плоскость w, т. е. отображение оказалось наложенным

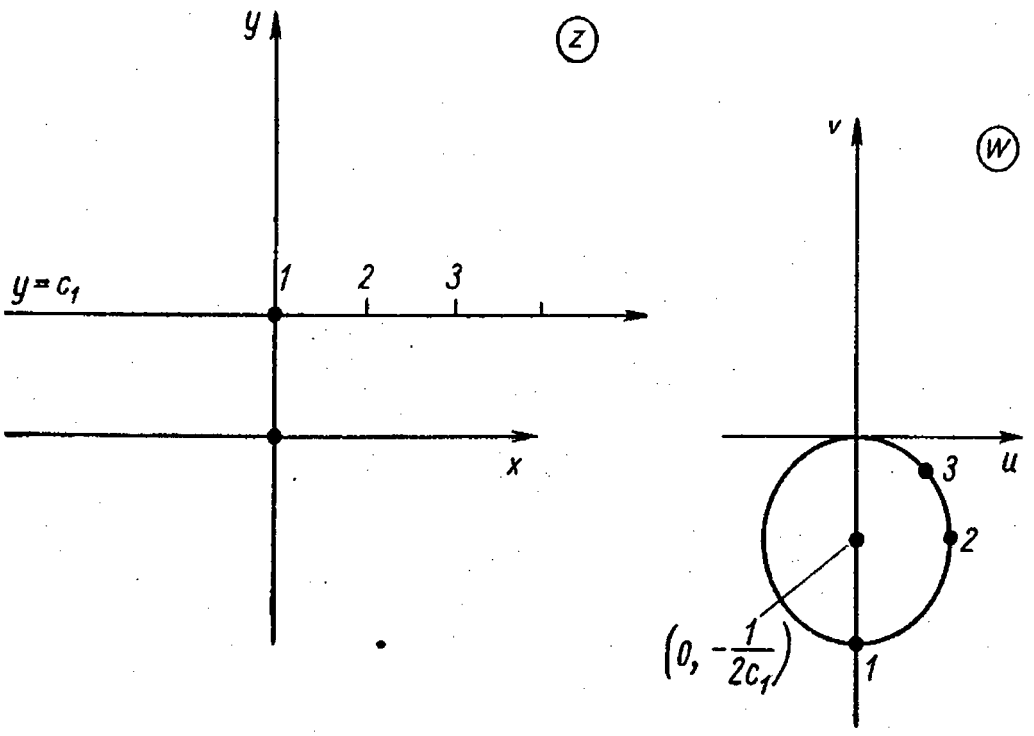


Рис. 6.15. Инверсия, прямая линия $\leftrightarrow$ круг. Цифрами *1*, *2*, *3* отмечены точки, соответствующие друг другу на z- и w-плоскостях.

на плоскость w дважды. Таким образом, возникло двузначное соответствие, при котором две противолежащие точки z_0 и $z_0 e^{i\pi} = -z_0$ в плоскости z соответствуют одной точке $w = z_0^2$.

В декартовом представлении

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \qquad (6.80)$$

откуда

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \qquad (6.81)$$

Следовательно, прямые $u = c_1$ и $v = c_2$ в w-плоскости соответствуют равнобочным (и ортогональным) гиперболам

$x^2 - y^2 = c_1$, $2xy = c_2$ на z-плоскости (рис. 6.16). Каждой точке гиперболы $x^2 - y^2 = c_1$ в правой полуплоскости $x > 0$ соответствуют одна точка на прямой $u = c_1$, и наоборот. Однако любой точке на прямой $u = c_1$ соответствует, кроме того, точка на гиперболе $x^2 - y^2 = c_1$ из левой полуплоскости $x < 0$.

В разд. 6.6 покажем, что ортогональные линии на w-плоскости отображаются в ортогональные линии на z-плоскости. Прямые $u = c_1$ и $v = c_2$ взаимно перпендикулярны, поэтому соответствующие гиперболы в z-плоскости

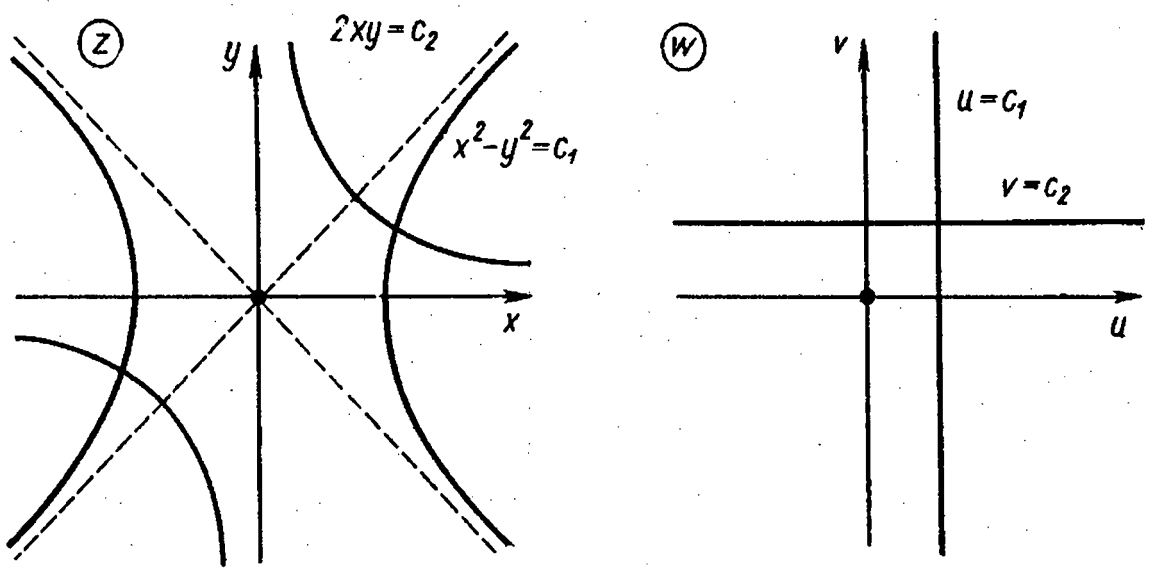


Рис. 6.16. Отображение, гиперболические координаты.

ортогональны. Таким образом, мы построим новую ортогональную систему гиперболических кривых (или поверхностей, если взять дополнительно ось, перпендикулярную к x и y). В упр. 4 к разд. 2.1 эта система уже рассматривалась.

Преобразование

$$w = e^z \tag{6.82}$$

приводит к

$$\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} \tag{6.83}$$

или

$$\rho = e^x, \quad \varphi = y. \tag{6.84}$$

Если y изменяется в пределах $0 \leqslant y < 2\pi$ (или $-\pi \leqslant y < \pi$), то φ перекрывает ту же область. Но это есть вся w-плоскость. Иными словами, горизонтальная полоса в z-плоскости шириной 2π отображается на всю w-плоскость. Более того, все точки $x + i(y + 2n\pi)$, где n — целое, отображаются на одну и ту же точку [по закону (6.84)]

на w-плоскости. Следовательно, здесь мы имеем многозначное (бесконечнозначное) соответствие.

Преобразование, обратное преобразованию (6.78), имеет вид

$$w \quad z^{1/2}, \tag{6.85}$$

откуда

$$\rho e^{i\varphi} = r^{1/2} e^{i\theta/2}, \tag{6.86}$$

$$2\varphi = \theta, \tag{6.87}$$

т. е. две точки в w-плоскости с аргументами φ и $\varphi + \pi$ соответствуют одной точке в z-плоскости (исключением является точка $z = 0$). Или, иначе, θ и $\theta + 2\pi$ соответствуют φ и $\varphi + \pi$ — двум различным точкам в w-плоскости. Здесь мы столкнулись с ситуацией, аналогичной для уравнения $y^2 = x$, в котором одному вещественному значению x соответствуют два вещественных значения y (со знаком плюс и минус).

Отметим одно важное обстоятельство: двузначную функцию w из уравнения (6.85) можно сделать однозначной, если ограничить θ областью $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Это достигается с помощью разреза плоскости вдоль линии $\theta = 0$. Конечная точка разреза (здесь $z = 0$) для многозначных функций называется *точкой ветвления*. Это и есть один из видов особых точек (см. разд. 7.1), функция $f(z)$ неаналитична в точке $z = 0$.

Разрез можно сделать и по любой другой бесконечной линии, которая проходит через точку $z = 0$. Разрез нужен для того, чтобы ограничить аргумент z. Точки z_0 и $z_0 e^{2\pi i}$ совпадают в z-плоскости, но соответствуют двум различным точкам w и $we^{i\pi} = -w$ в w-плоскости, поэтому если разрез не делать, то функция $w = z^{1/2}$ будет неопределенной.

В заключение остановимся на преобразовании, обратном преобразованию (6.82):

$$w = \ln z. \tag{6.88}$$

Запишем его иначе:

$$u + iv = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta. \tag{6.89}$$

Для данной точки z_0, расположенной в z-плоскости, аргумент θ определен с точностью до значений, кратных 2π, т. е.

$$v = \theta + 2n\pi, \tag{6.90}$$

и, следовательно, как и в случае экспоненциального отображения, получаем бесконечнозначное соответствие.

Преобразование (6.88) имеет наглядную интерпретацию. Если перемещаться в z-плоскости вдоль единичной окружности, то на основании (6.89) $u = \ln r = 0$, но $v = \theta$, причем θ монотонно возрастает сначала до 2π, а затем продолжает непрерывно расти и сверх этой величины. При последовательном перемещении по окружности в z-плоскости получается движение, аналогичное движению вращающегося винта или движению по спирали (рис. 6.17).

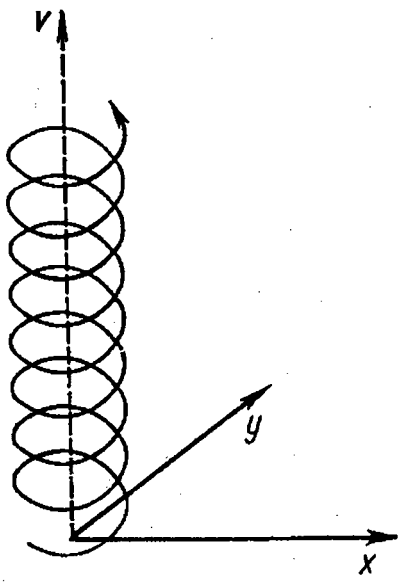


Рис. 6.17. Многозначность функции $\ln z$.

Вследствие многозначности $\ln z$ интеграл $\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$. Внутри контура интегрирования содержится начало координат. Этот результат уже встречался в разд. 6.3 (упр. 1 и 8), в гл. 7 он используется для вычисления вычетов.

Упражнения *

1. Показать, что отрицательные числа имеют логарифмы в комплексной плоскости. В частности, убедиться, что $\ln(-1) = i\pi$.

2. Во что отображаются окружности с центром в начале координат z-плоскости преобразованиями

$$w_1(z) = z + \frac{1}{z}, \quad w_2(z) = z - \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0).$$

Рассмотреть случай $|z| \to 1$.

3. Рассмотреть преобразования

$$w(z) = \sin z, \quad w(z) = \operatorname{sh} z, \quad w(z) = \cos z, \quad w(z) = \operatorname{ch} z.$$

Найти отображение прямых $x = c_1$, $y = c_2$ на w-плоскость (отметим, что последние три преобразования получаются из первого переносом или вращением).

4. Почему функции $w(z) = z^{1/2}$ и $w(z) = \ln z$ не могут быть разложены в ряд Лорана в окрестности начала координат?

5. Показать, что функция $w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ аналитична, если разрезать плоскость вдоль линий $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$y = 0 \text{ или } -\infty < x \leqslant -1 \text{ и } 1 \leqslant x < \infty, \ y = 0.$$

---

* Дополнительные примеры на отображение приведены в гл. 11—13.

6. Какая часть z-плоскости соответствует внутренности единичного круга в w-плоскости, если

$$w=\frac{z-1}{z+1}, \quad w=\frac{z-i}{z+i}?$$

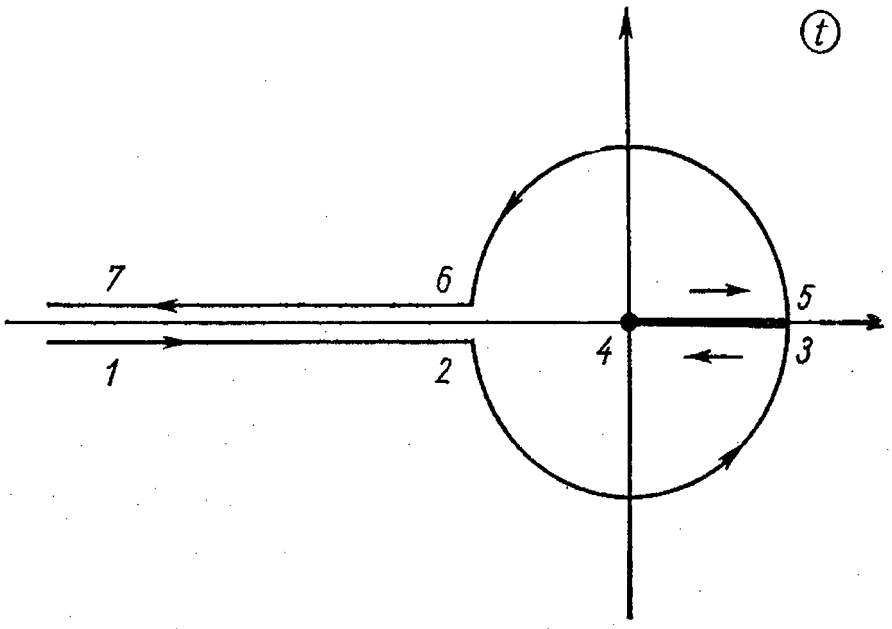


Рис. 6.18. Контур интегрирования в интегральном представлении функции Бесселя.

7. Интеграл, представляющий функцию Бесселя, берется по контуру (рис. 6.18) в t-плоскости. Отобразить этот контур на θ-плоскость, если $t=e^{\theta}$.

6.6. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

В разд. 6.5 мы установили, что гиперболы отображаются в прямые линии, а прямые линии — в окружности. Однако все эти преобразования были аналитические. В силу аналитичности $w = f(z)$ имеем

$$\frac{df}{dz}=\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{6.91}$$

Применяя полярную форму записи этого уравнения, приравняем отдельно друг другу модули и аргументы *, напри-

* В дальнейшем аргумент функции f будем обозначать $\arg f$.

мер для аргумента (при условии $df/dz \neq 0$)

$$\arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \arg \frac{df}{dz} = \alpha, \qquad (6.92)$$

где аргумент производной, α может зависеть от z, но при фиксированном z он постоянен и не зависит от способа приближения Δz к нулю. Чтобы убедиться в важности последнего замечания, рассмотрим две кривые, C_z в z-плоскости

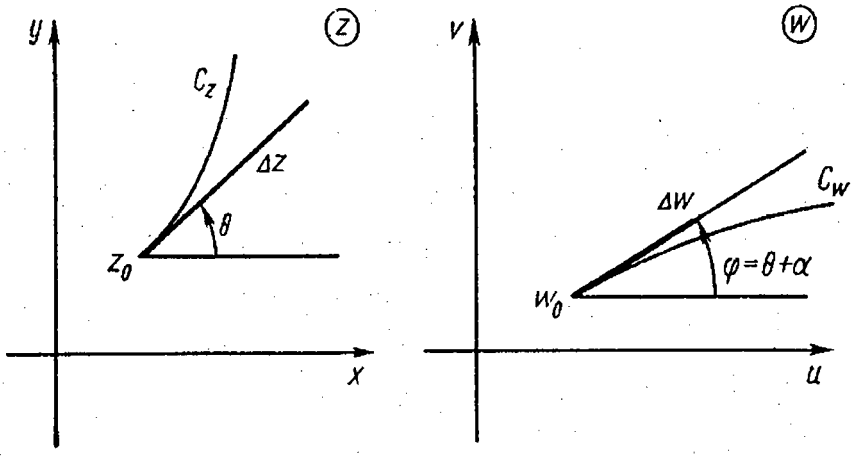


Рис. 6.19. Конформное отображение. Свойство сохранения углов.

и C_w в w-плоскости (рис. 6.19). На этом рисунке приращение Δz расположено под углом θ к вещественной оси x, а соответствующее ему приращение Δw образует угол φ с вещественной осью u. Из уравнения (6.92) следует, что

$$\varphi = \theta + \alpha, \qquad (6.93)$$

т. е. любая линия в z-плоскости поворачивается на угол α в w-плоскости, если только преобразование аналитично и производная отлична от нуля *. Этот результат справедлив для любой линии, проведенной через z_0, поэтому его можно применить и к двум линиям, тогда угол между ними равен

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\theta_2 + \alpha) - (\theta_1 + \alpha) = \theta_2 - \theta_1, \qquad (6.94)$$

* Если производная $df/dz = 0$, то ее аргумент является неопределенной величиной и преобразование (аналитическое) может не сохранять углов.

откуда видно, что аналитическое преобразование не меняет угла. Преобразования, которые не изменяют углов, называются *конформными*. Угол поворота α, вообще говоря, зависит от z. Кроме того, $|f'(z)|$ — также функция z. Следовательно, хотя углы и сохраняются, сами координатные линии могут деформироваться. Именно это свойство положено в основу введения новых координатных систем.

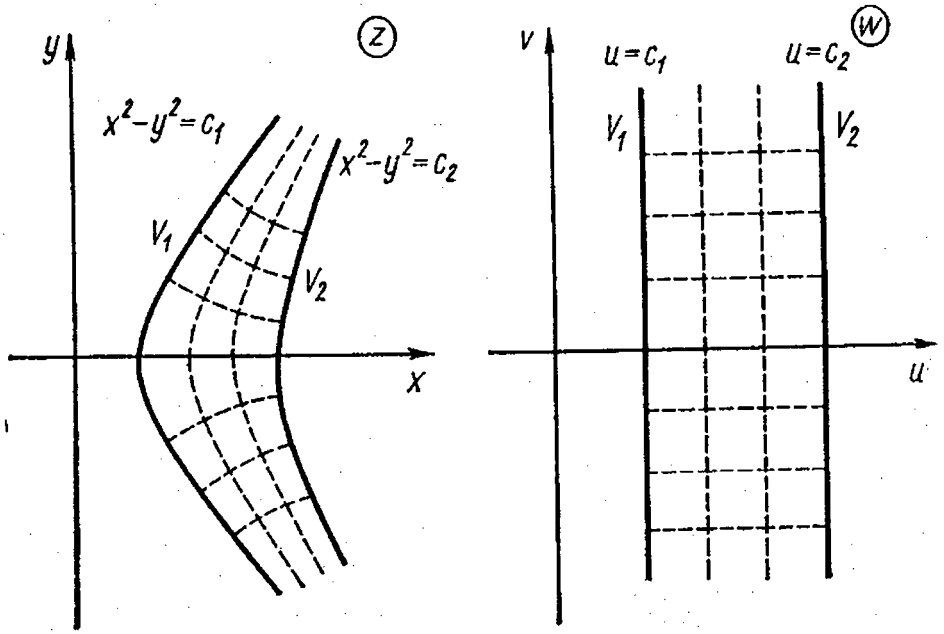


Рис. 6.20. Конформное отображение, гиперболические координаты.

В связи с широким применением конформных отображений при решении уравнения Лапласа в задачах электростатики, гидродинамики, теплопередачи и т. д. указанные преобразования имеют исключительно важное значение в науке и технике. Предположим, что мы решаем физически абсурдную, но математически простую задачу определения линий электрического поля и эквипотенциальных линий (поверхностей) между двумя гиперболическими поверхностями, сечения которых заданы в виде: $x^2 - y^2 = c_1$ с потенциалом V_1 и $x^2 - y^2 = c_2$ с потенциалом V_2 * (рис. 6.20). Известно, что эквипотенциали и линии электрического поля взаимно перпендикулярны (см. рис. 6.20), но при таких необычных

* Комплексное исчисление связано с плоскостью, т. е. является двумерным. Электростатические силы трехмерны. Мы ликвидируем это несоответствие, рассмотрев поперечный разрез цилиндрической системы, т. е. условившись, что в направлении третьего измерения t, перпендикулярного к x и y, картина не меняется.

граничных условиях нельзя определить конкретные аналитические выражения для эквипотенциалей и линий электрического поля. Данное утверждение означает, что нам неизвестно решение уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = 0$, удовлетворяющее этим граничным условиям.

С помощью преобразования $w = z^2$ перейдем на w-плоскость [см. уравнение (6.78) и т. д.], тогда эквипотенциали V_1 и V_2 окажутся в этой плоскости вертикальными линиями $u = c_1$ и $u = c_2$. Проверкой можно убедиться, что в новой комплексной w-плоскости в качестве решения уравнения Лапласа для эквипотенциалей можно взять систему прямых $u = c_i$, а для линий электрического поля — систему прямых $v = c_j$, причем прямые линии этих двух систем взаимно перпендикулярны. Делая обратное преобразование на z-плоскость, убеждаемся, что все прямые углы сохраняются, поскольку преобразование $z = w^{1/2}$ аналитично (за исключением точки $w = 0$). Запишем полученный результат в явном виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 = c_i \text{ — эквипотенциали,} \\ v &= 2xy = c_j \text{ — линии электрического поля.} \end{aligned}\right\} \qquad (6.95)$$

Итак, задача, которую было трудно решить на z-плоскости, с помощью отображения на w-плоскости легко решается благодаря специально выбранной системе координат. Наконец, полученное решение обратным преобразованием было перенесено на первоначальную плоскость [см. выражение (6.95)].

Рискуя проиграть в наглядности, докажем, что решение уравнения Лапласа $\Psi(u, v)$ в w-плоскости после обратного отображения на z-плоскость остается решением этого уравнения, если только функция $w = f(z)$ аналитична. Вместе с тем на конкретном примере еще раз убедимся, насколько важны условия Коши — Римана. На z-плоскости с координатами x, y и на w-плоскости с координатами u, v введем обозначения

$$\psi = \psi(x, y), \quad \Psi = \Psi(u, v), \qquad (6.96)$$

причем кривая $\Psi(u, v) = a$ на w-плоскости соответствует кривой $\psi(x, y) = a$ на z-плоскости, т. е.

$$\Psi(u, v) = \Psi[u(x, y), v(x, y)] = \psi(x, y). \qquad (6.97)$$

Дифференцируя $\Psi(u, v)$ по x, получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \\ &+ 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}.\end{aligned}\right\} \quad (6.98)$$

Аналогично для $\partial^2\Psi/\partial y^2$. Теперь

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Psi(u, v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(u, v)}{\partial y^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial u} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \\ &+ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u\,\partial v} + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}. \quad (6.99)\end{aligned}$$

В правой части уравнения (6.99) первые два члена равны нулю, так как u и v удовлетворяют уравнению Лапласа, если w аналитична (см. упр. 3 к разд. 6.1). Остальные члены исчезают в силу условий Коши — Римана. В результате получаем

$$\nabla\Psi(x, y) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\nabla^2\Psi(u, v) = 0, \quad (6.100)$$

в котором учтено, что $\Psi(u, v)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в w-плоскости. Отсюда следует, что функция, которая является решением уравнения Лапласа, после аналитического преобразования также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим задачу о проводящем круглом цилиндре, параллельном бесконечной металлической пластине (рис. 6.21). Читатель может проверить *, что переменные z

* Проверить эту формулу несложно, но вот как «догадаться», каким должно быть преобразование? Некоторые из преобразований можно получить в виде комбинации элементарных функций. Выражение (6.101) из комбинации экспоненциальных и тригонометрических функций получить сравнительно трудно. Обычно о той или иной нужной формуле отображения «догадываются» с помощью специальных справочников. Из числа наиболее полных справочников можно указать книги: Nehari Z. Conformal Mapping. N.Y., McGraw-Hill, 1952; Kober H. Dictionary of Conformal Representations. N.Y., Dover, 1952.

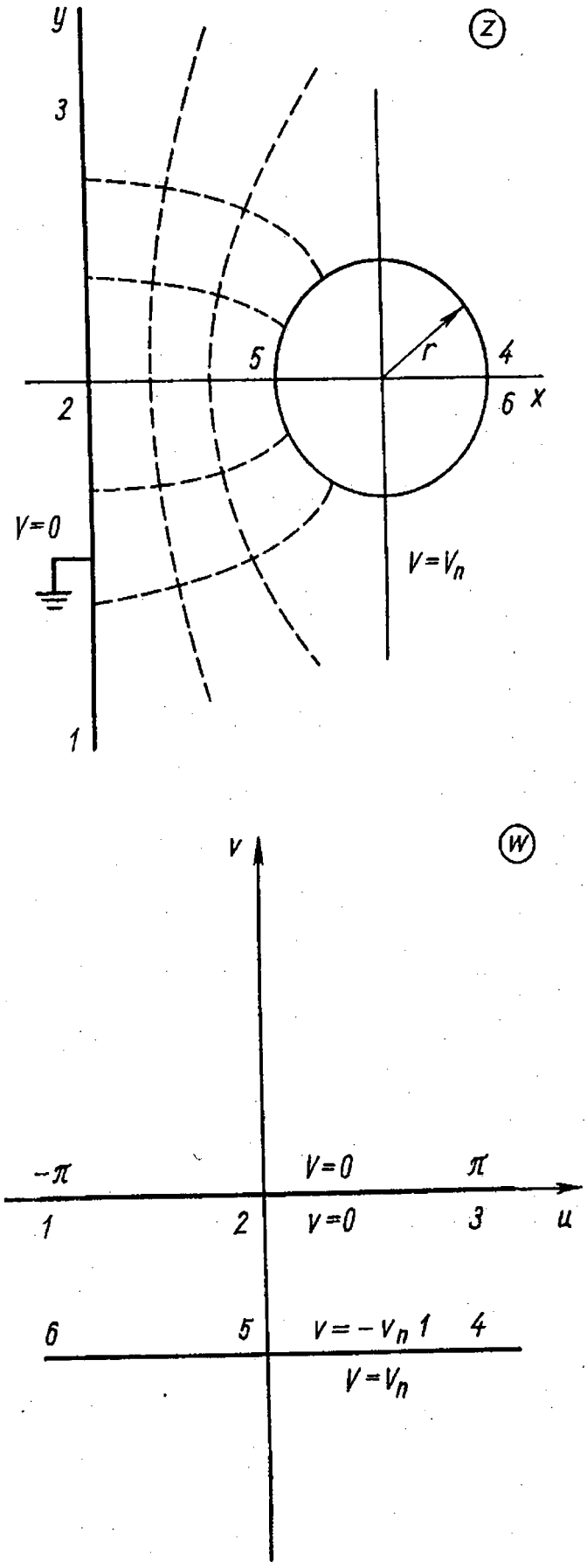


Рис. 6.21. Бесконечный цилиндр, параллельный пластине.

и w связаны в этом случае следующим преобразованием:

$$\left.\begin{aligned} z &= ia\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right) = -a\,\mathrm{th}\left(\frac{w}{2}\right), \\ x &= -a\frac{\mathrm{sh}\,v}{\mathrm{ch}\,v-\cos u}, \quad y = a\frac{\sin u}{\mathrm{ch}\,v-\cos u}. \end{aligned}\right\} \tag{6.101}$$

Исключив u, получим круг с центром в точке $x = d = -a\,\mathrm{cth}\,v_n$, $y = 0$ и радиусом $r = -a\,\mathrm{csh}\,v_n$. Это значит, что $v_n = \mathrm{Arch}\,(d/r)$ (взят знак минус, поскольку v_n отрицательно). Можно убедиться *, что электростатический потенциал в w-плоскости равен

$$V = +V_n\frac{v}{v_n} = \frac{-vV_n}{\mathrm{Arch}\,(d/r)}, \quad -|v_n| \leqslant v \leqslant 0. \tag{6.102}$$

Далее, из уравнения (6.101) выразим v через z, для этого запишем $w = -2\,\mathrm{arctg}\,(-iz/a)$, откуда

$$v = \mathrm{Im}\left[2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{iz}{a}\right)\right] = -\mathrm{Re}\left[2\,\mathrm{Arth}\left(\frac{r}{a}\right)\right]. \tag{6.103}$$

Подставляя полученное выражение в (6.102), имеем потенциал в правой полуплоскости $z\,(x \geqslant 0)$

$$V = +\,\mathrm{Re}\left\{\frac{[2\,\mathrm{Arth}\,(z/a)]\,V_n}{\mathrm{Arch}\,(d/a)}\right\}, \tag{6.104}$$

поскольку отрицательные знаки взаимно уничтожаются. К этой задаче можно подойти иначе и записать полученные выражения в более компактной форме. Обратившись к результатам разд. 2.9 и сравнив их с уравнением (6.101), легко установить, что оно задает биполярную систему координат. В этом случае эквипотенциали выражаются как

$$(x + a\,\mathrm{cth}\,v)^2 + y^2 = a\,\mathrm{csh}^2\,v. \tag{6.105}$$

На этом завершается первая часть задачи, однако можно пойти дальше. Рассмотрим электростатическую емкость между двумя эквипотенциальными поверхностями (на единицу длины в направлении нормали к плоскости xy). Мы имеем

$$w\,(z) = u\,(x, y) + iv\,(x, y), \tag{6.106}$$

* Все граничные линии (поверхности) в плоскости w ограничены, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$. Однако точкам $u = \pm\pi$, $v = v'$ в плоскости z соответствует одна и та же точка, так что краевые эффекты отсутствуют. Координата u определена только на отрезке $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$.

где $u(x, y)$ описывает эквипотенциали, а функция $v(x,y)$ — линии электростатического поля или наоборот. Этот выбор произволен, но он согласуется с выражением (6.103), которое представляет собой специальную форму уравнения (6.106); пусть $v(x, y)$ описывает эквипотенциали, а комплексно-сопряженная функция относится к линиям поля.

Электростатическая емкость на единицу длины, по определению, равна

$$C = \frac{\text{Заряд на единицу длины}}{\text{Разность потенциалов}} = \frac{q}{v_2 - v_1}. \qquad (6.107)$$

Определим заряд на единицу длины (на один проводник), исходя из закона Гаусса:

$$q = \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\varepsilon_0 \int \nabla v \cdot d\mathbf{s}. \qquad (6.108)$$

Из условий Коши—Римана находим:

$$\nabla v = \mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial y} = -\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (6.109)$$

Если записать элемент поверхности $d\mathbf{s}$ через

$$d\mathbf{s} = -\mathbf{k} \times d\boldsymbol{\lambda}, \qquad (6.110)$$

где $d\boldsymbol{\lambda}$ совпадает с направлением увеличения u (рис. 6.22) а $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, то

$$q = \varepsilon_0 \int_{u_1}^{u_2} \left(-\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{k} \times d\boldsymbol{\lambda} =$$

$$= \varepsilon_0 \int_{u_1}^{u_2} \left(\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \varepsilon_0 (u_2 - u_1). \qquad (6.111)$$

Подставляя полученное выражение для заряда на единицу длины (между u_1 и u_2) в формулу (6.107), получаем

$$C = \varepsilon_0 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}. \qquad (6.112)$$

Применим соотношение (6.112) к задаче с плоскостью и проводящим цилиндром, тогда электростатическая емкость

на единицу длины окажется равной

$$C = \varepsilon_0 \frac{2\pi}{(-)\, v_n} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{Arch}(d/r)}. \qquad (6.113)$$

Рассмотрим теперь такую задачу. Между двумя полукруглыми в сечении поверхностями (рис. 6.23) существует

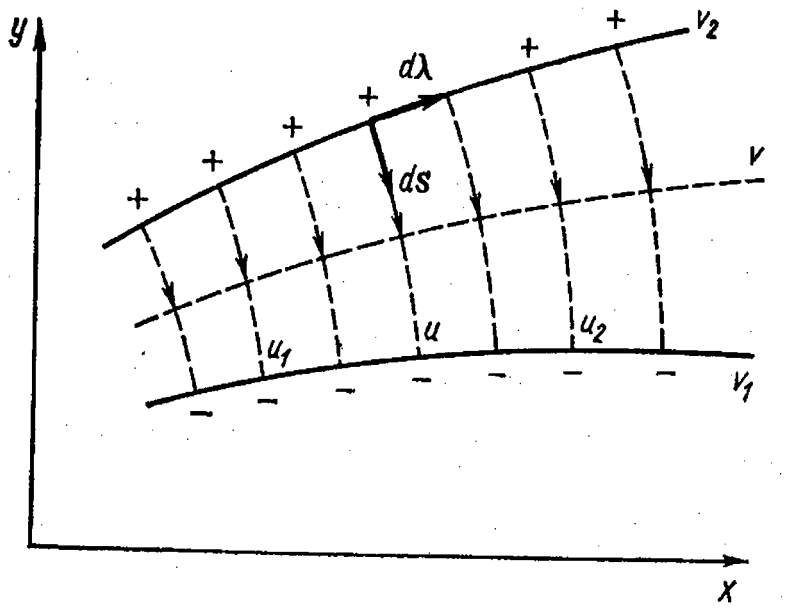


Рис. 6.22. Электростатическая емкость.

разность потенциалов $2V_0$. Необходимо определить потенциал в любой точке между этими поверхностями.

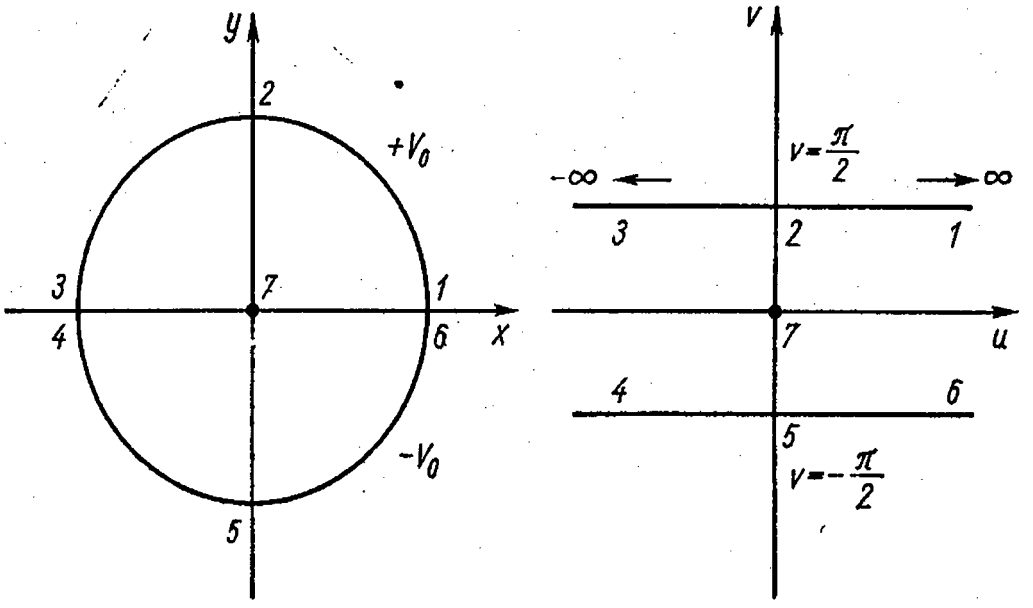


Рис. 6.23. Заряженные проводящие полукруглые цилиндры.

Полуокружности, лежащие в z-плоскости ($x^2+y^2=1$, единичный радиус), могут быть отображены на параллель-

ные прямые линии в w-плоскости, причем

$$w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right). \tag{6.114}$$

Мы имеем

$$u + iv = \ln\frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \ln\frac{1-x^2-y^2+2iy}{1-2x+x^2+y^2}. \tag{6.115}$$

Заменим $(1-x^2-y^2+2xyi)/(1-2x+x^2+y^2)$ на $Re^{i\alpha}$:

$$u + iv = \ln R + i\alpha, \tag{6.116}$$

где

$$v = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}. \tag{6.117}$$

Отображение верхней и нижней полуокружностей происходит в соответствии со следующими соотношениями (см. рис. 6.23):

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ y>0}} \operatorname{arctg}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ y<0}} \operatorname{arctg}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} = -\frac{\pi}{2}. \tag{6.118}$$

Потенциал оказывается равным

$$V = \frac{2V_0}{\pi}v = \frac{2V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right] =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1. \tag{6.119}$$

Эта задача легко решается методом разделения переменных в цилиндрических координатах. Искомый потенциал получается в виде бесконечного ряда. Преимущество метода конформного отображения заключается в том, что решение в этом случае отыскивается в замкнутой форме.

Читатель может убедиться, что переменная u изменяется в пределах $-\infty < u < \infty$, а это означает, что электростатическая емкость бесконечна.

Упражнения

1. Показать, что преобразование $w = e^z + z$ отображает бесконечные прямые $y = \pm\pi$ на полубесконечные прямые $u \leqslant u_0$, $v = \pm\pi$. Это эквивалентно преобразованию бесконечного или ограниченного плоскопараллельного конденсатора (в z-плоскости) в плоскопараллельный конденсатор (в w-плоскости). Нарисовать расположение эквипотенциалей вблизи краев пластин конденсатора.

Определить линии электрического поля как функции u в плоскости, нейтральной по отношению к пластинам конденсатора (при $v_0 = 0$).

2. Каким образом преобразование $e^z = (a - w)/(a + w)$ трансформирует координатные оси комплексной z-плоскости? Какая координатная система из гл. 2 вводится таким преобразованием?

3. В электростатике эквипотенциали задают уравнениями $u(x, y) = c_i$, причем $u = \operatorname{Re} w(z)$. Показать, что электрическое поле $\mathbf{E}$ определяется как $|\mathbf{E}| = |dw(z)/dz|$.

4. Функция $w(z)$ аналитична и имеет отличную от нуля производную в точке $w_0 = w(z_0)$. Доказать, что существует функция $z = z(w)$, обладающая свойствами

$$z_0 = z(w_0), \quad \frac{dz}{dw} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-1},$$

$$w = w[z(w)], \quad z = z[w(z)].$$

5. Проводящий цилиндр единичного радиуса помещен в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Ось цилиндра перпендикулярна к направлению поля. Используя преобразование $w = z + 1/z$, определить возмущенный электростатический потенциал. Как изменится закон преобразования, если радиус цилиндра $r_0 \neq 1$?

6. Тонкая, плоская проводящая полоса шириной $2a$ имеет потенциал относительно земли V_0. Определить линии постоянного потенциала, линии электрического поля, распределение электрического заряда в зависимости от расстояния до осевой линии проводника.

6.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШВАРЦА—КРИСТОФФЕЛЯ

Преобразование Шварца — Кристоффеля реализует отображение вещественной оси w-плоскости на любой требуемый многоугольник в z-плоскости, причем верхняя полуплоскость w ($v > 0$) отображается на внутренность этого многоугольника. Обратное преобразование в этом случае отображает многоугольник из плоскости z на верхнюю полуплоскость w. С помощью этого преобразования обычно производится конформное отображение многоугольных фигур, включая различные вырожденные случаи.

Чтобы получить преобразование Шварца — Кристоффеля, рассмотрим функцию

$$\frac{dz}{dw} = A\,(w - w_1)^{-k_1}, \tag{6.120}$$

где A — некоторая комплексная постоянная; k_1 — вещественная постоянная; w_1 — некоторая точка на вещественной оси u. Аргумент производной определяется так:

$$\arg\frac{dz}{dw} = \begin{cases} \arg A - k_1\pi, & w < w_1, \\ \arg A, & w > w_1 \end{cases} \tag{6.121}$$

при перемещении w вдоль вещественной оси; $\arg(w - w_1) = \pi$ для $w < w_1$ и $\arg(w - w_1) = 0$ для $w > w_1$, т. е. при

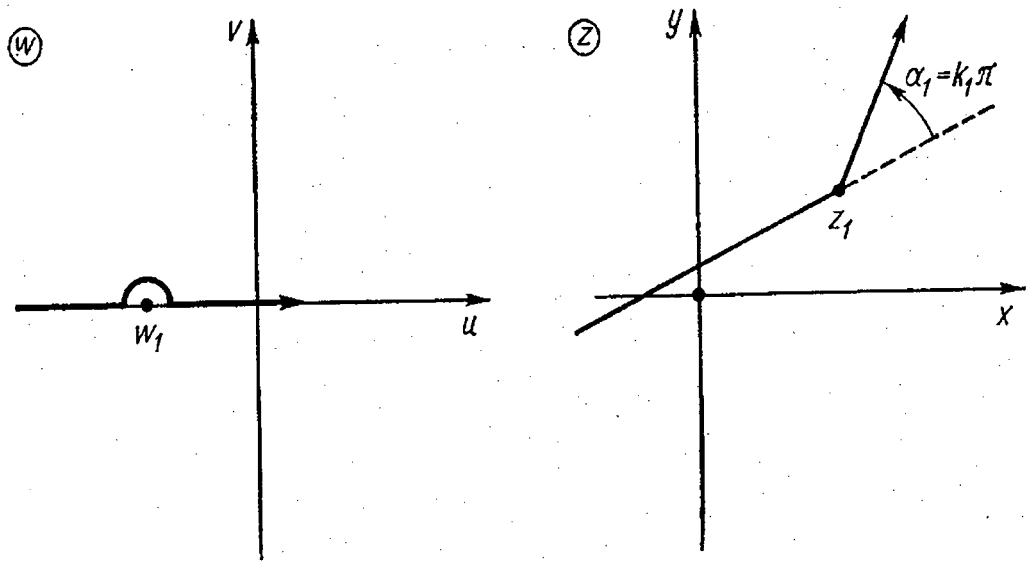
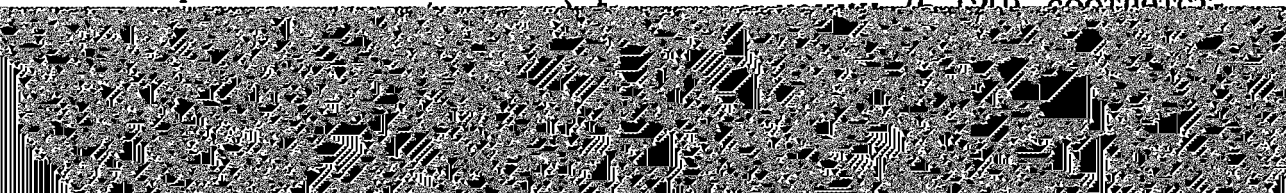


Рис. 6.24. Преобразование Шварца — Кристоффеля.

перемещении w вдоль оси u в положительном направлении аргумент dz/dw скачком переходит через величину $k_1\pi$ (рис. 6.24), когда w проходит точку w_1. Вспоминая результаты разд. 6.6, в частности рис. 6.19, мы замечаем, что $\arg \Delta w = 0$. Следовательно,

$$\arg \Delta z = \begin{cases} \arg A - k_1\pi, & w < w_1, \\ \arg A, & w > w_1. \end{cases} \tag{6.122}$$

Поскольку A постоянно, $\arg A$ — также постоянная величина. Поэтому в z-плоскости получаем два прямолинейных отрезка, которые образуют внешний угол $\alpha_1 = k_1\pi$.



такой формы, можно построить n-угольник:

$$\frac{dz}{dw} = A(w-w_1)^{-k_1}(w-w_2)^{-k_2}\ldots(w-w_n)^{-k_n} \quad (6.123)$$

при ограничивающем условии

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 2, \quad (6.124)$$

благодаря которому сумма внешних углов оказывается равной 2π. Интегрируя уравнение (6.123), получаем

$$z = A\int^{w}(w-w_1)^{-k_1}(w-w_2)^{-k_2}\ldots(w-w_n)^{-k_n}\,dw + B. \quad (6.125)$$

Комплексная постоянная A позволяет поворачивать и ориентировать требуемым образом многоугольник в z плоскости, а комплексная постоянная интегрирования B обеспечивает необходимый сдвиг в этой плоскости. Многоугольник в плоскости z можно определить заданием n его вершин, что означает задание $2n$ фиксированных постоянных. Однако уравнение (6.125) имеет $2n+4$ параметра: n для w_i, n для k_i, $4/(2n+4)$ для A и B. Благодаря условию (6.124) число параметров уменьшается на единицу, так что остается $2n+3$ параметра. Следовательно, три особые точки w_i можно выбрать произвольно, тогда остальные параметры оказываются однозначно определенными. Обычно три произвольные w_i выбирают таким образом, чтобы упростить вычисление интеграла (6.125).

На рис. 6.25 проиллюстрировано отображение вещественной оси в w-плоскости на «треугольник». Из этого рисунка очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \to \frac{\pi}{2}, \quad k_1 \to \frac{1}{2};\\ &\alpha_2 \to \frac{\pi}{2}, \quad k_2 \to \frac{1}{2};\\ &\alpha_3 \to \pi, \quad\;\; k_3 \to 1. \end{aligned}\right\} \quad (6.126)$$

Для удобства положим $w_1 = -1$, $w_2 = +1$ и $w_3 \to \infty$, постоянную A выберем такой, чтобы скомпенсировать w_3. В этом случае интеграл Шварца — Кристоффеля

(6.125) примет вид

$$z = A\int^{w}(w+1)^{-1/2}(w-1)^{-1/2}\,dw + B =$$

$$= A\int^{w}(w^2-1)^{-1/2}\,dw + B. \qquad (6.127)$$

Проинтегрируем

$$z = A\,\mathrm{Arch}\,w + B, \quad w = \mathrm{ch}\left(\frac{z-B}{A}\right)A. \qquad (6.128)$$

Постоянные A и B вычисляются после подстановки значений $w=-1$, $z=ia$ и $w=+1$, $z=0$. Последнее условие

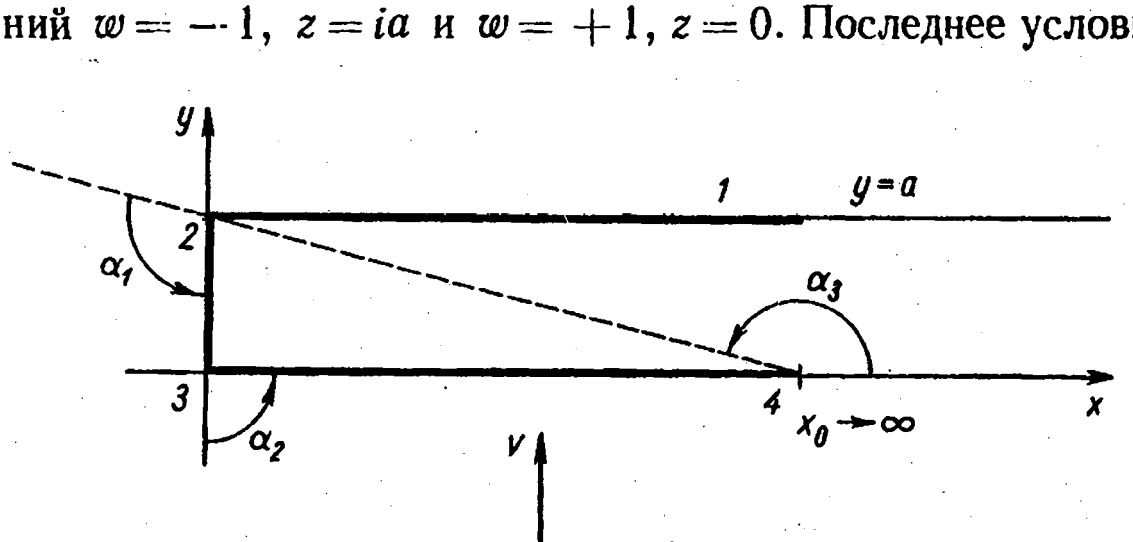


Рис. 6.25. Отображение вырожденного треугольника с помощью преобразования Шварца — Кристоффеля.

означает, что $B=0$, поэтому

$$\mathrm{ch}\,\frac{ia}{A} = \cos\frac{a}{A} = -1, \qquad (6.129)$$

откуда следует, что $A=a/\pi$. Окончательно

$$w = \mathrm{ch}\,\frac{\pi z}{a}. \qquad (6.130)$$

Верхняя полуплоскость w отображена на внутренность полубесконечной полосы.

На рис. 6.26 показано отображение вещественной оси в w-плоскости на «треугольник». Снова с помощью рисунка

задаем параметры

$$\alpha_1 \to \pi, \quad k_1 \to 1; \quad \alpha_3 \to \pi, \quad k_3 \to 1, \qquad (6.131)$$

и, кроме того, поскольку $\alpha_2 \to 0$, $k_2 \to 0$, один множитель в интеграле (6.125) полагаем равным 1. Учитывая это и по-

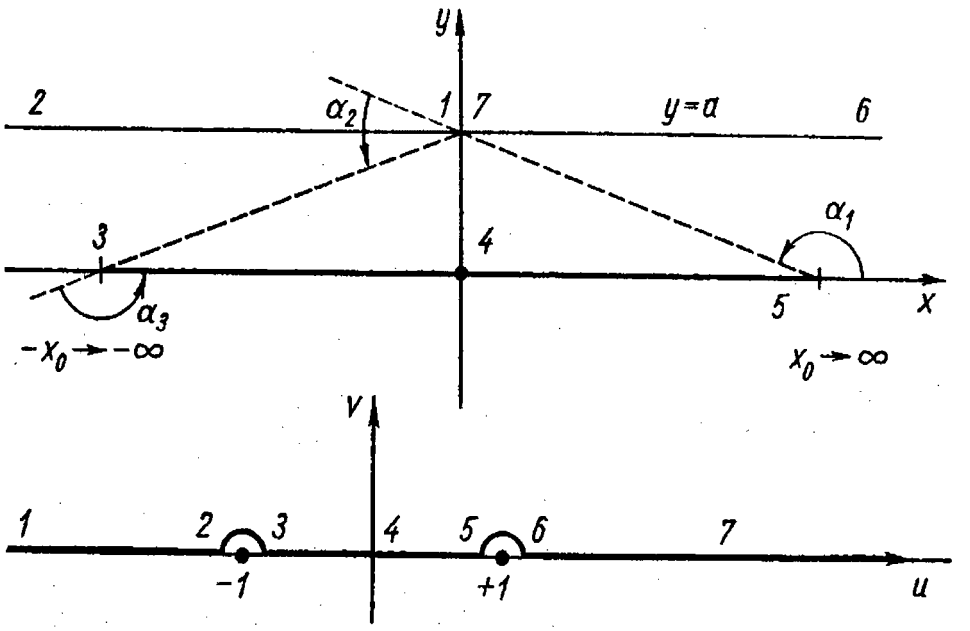


Рис. 6.26. Отображение дважды вырожденного треугольника с помощью преобразования Шварца — Кристоффеля.

лагая, как и в предыдущем примере, $w_1 = -1$, а $w_3 = +1$, получаем

$$z = A \int^{w} (w-1)^{-1} (w+1)^{-1} dw + B = \frac{A}{2} \ln \frac{w-1}{w+1} + B. \qquad (6.132)$$

Постоянные A и B вычисляются при условии $w = 0$, которое соответствует $z = 0$, или

$$\frac{A}{2} \ln(-1) + B = \frac{i\pi A}{2} + B = 0. \qquad (6.133)$$

Таким образом, $z = ia$ при $w \to \infty$, откуда

$$ia = \frac{A}{2} \ln 1 + B = B. \qquad (6.134)$$

Следовательно,

$$z = -\frac{a}{\pi} \ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right) + ia. \qquad (6.135)$$

Отметим, что выбор особых точек ($w_3 = -1$, $w_1 = +1$) приводит к такому соответствию:

$$-1 < u < 1,\ v = 0 \text{ и } -\infty < x < \infty,\ y = 0;$$
$$-\infty < u < -1,\ v = 0 \text{ и } -\infty < x < 0,\ y = a;$$
$$1 < u < \infty,\ v = 0 \text{ и } 0 < x < \infty,\ y = a.$$

Другое задание особых точек дает другое преобразование и другое соответствие. В некоторых задачах можно воспользоваться соотношением (6.135) и применить преобразование Шварца — Кристоффеля для отображения многоугольника на две параллельные бесконечные линии. Этот способ пригоден для решения уравнения Лапласа.

Упражнения

1. Получить преобразование $w = e^z + z$ для плоскопараллельного конденсатора (см. упр. 1 к разд. 6.6), используя преобразование Шварца — Кристоффеля.

2. Используя преобразование Шварца — Кристоффеля, отобразить «многоугольник», ограниченный тремя линиями $x = -a$, $y = 0$, $x = +a$, на u-ось (w-плоскость) с особенностями в точках $u = \pm 1$, $v = 0$.

3. В z-плоскости на вещественную ось между точками $y = -a$, $y = +a$ подан потенциал 100 *в*. Остальная часть оси заземлена. Определить потенциал в любой точке $y = 0$. Какова электрическая емкость (на единицу длины) этой системы?

4. С помощью преобразования Шварца — Кристоффеля получить преобразование $w = z^2$, которое реализует отображение первого квадранта плоскости z на верхнюю полуплоскость w.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО II

(теория вычетов)

7.1. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Разложение Лорана обобщает разложение Тейлора на случай существования особых точек. Условимся называть точку z_0 *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует некоторая окрестность этой точки (с исключенной точкой z_0), в которой $f(z)$ аналитична.

Полюс. Если в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{7.1}$$

$a_n = 0$ для $n < -m < 0$, а $a_{-m} \neq 0$, то точка z_0 называется *полюсом порядка* m. Например, если $m = 1$, т. е. если $a_{-1}/(z - z_0)$ есть первый неисчезающий член в разложении Лорана, то в точке z_0 мы имеем полюс первого порядка, который часто называют простым полюсом. Если же суммирование производится до $n = -\infty$, то точка z_0 является полюсом бесконечного порядка и называется *существенно особой точкой.*

Эти точки обладают многими отличительными свойствами, характерными только для них. Например, можно показать, что в произвольной малой окрестности существенно особой точки функции $f(z)$ эта функция может быть сделана как угодно близкой любому наперед заданному комплексному числу w_0. Короче говоря, вся w-плоскость отображается на окрестность точки z_0. Одно из фундаментальных различий между полюсом конечного порядка и существенно особой точкой заключается в том, что полюс порядка m можно устранить, умножив функцию $f(z)$ на $(z - z_0)^m$. Очевидно, этого нельзя сделать в случае существенно особой точки.

Вместо поведения функции $f(z)$ при $z \to \infty$ можно изучать поведение $f(1/t)$ при $t \to 0$. Рассмотрим функцию

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7.2}$$

Сделаем замену $z = 1/t$:

$$\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, t^{2n+1}}. \tag{7.3}$$

Из (7.2) ясно, что $\sin z$ имеет существенно особую точку на бесконечности. Такой вывод следует и из разд. 6.1 (упр. 10), поскольку при $x = 0$ $\sin z = \sin iy = i \operatorname{sh} y$, т. е. функция $\sin z$ стремится экспоненциально к бесконечности при $y \to \infty$.

Точки ветвления. Существует еще один важный тип особенности, который подробно освещается в последующих разделах этой главы. Рассмотрим функцию $f(z) = z^a$, где a — нецелое *. При перемещении вдоль границы единичного круга (от e^0 до $e^{2\pi i}$) и нецелом a оказывается, что

$$f(z) \to e^{2\pi a i} \neq e^{0i}.$$

Как и в разд. 6.5, мы здесь имеем дело с точкой ветвления. Точки e^{0i} и $e^{2\pi i}$ в z-плоскости совпадают, но эти совпадающие точки приводят к разным значениям функции $f(z)$, т. е. эта функция многозначна. Задача решается построением такого разреза, чтобы функция $f(t)$ была однозначно определена для данной точки z-плоскости. Важно подчеркнуть, что функция, имеющая точку ветвления, не будет непрерывной на линии разреза. Отсюда линейный интеграл вдоль одной стороны линии разреза, вообще говоря, отличается от интеграла, взятого вдоль другой стороны.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(z) = (z^2-1)^{1/2} = (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}.$$

Множители $(z+1)^{1/2}$ и $(z-1)^{1/2}$ имеют точки ветвления соответственно при $z=-1$ и $z=+1$. Сделаем разрез вдоль отрезка, соединяющего точки $z=+1$ и $z=-1$, и исследуем аргументы этих двух

* Точка $z = 0$ есть специальная особая точка для функции z^a, которая имеет только конечное число производных, аналитическая же функция подразумевает существование производной любого порядка (см. разд. 6.3).

множителей при перемещении по контуру, который показан на рис. 7.1. В точке *1* аргументы функций $(z+1)$ и $(z-1)$ равны нулю. При перемещении от *1* к *2* аргумент множителя $(z-1)$ возрастает до π,

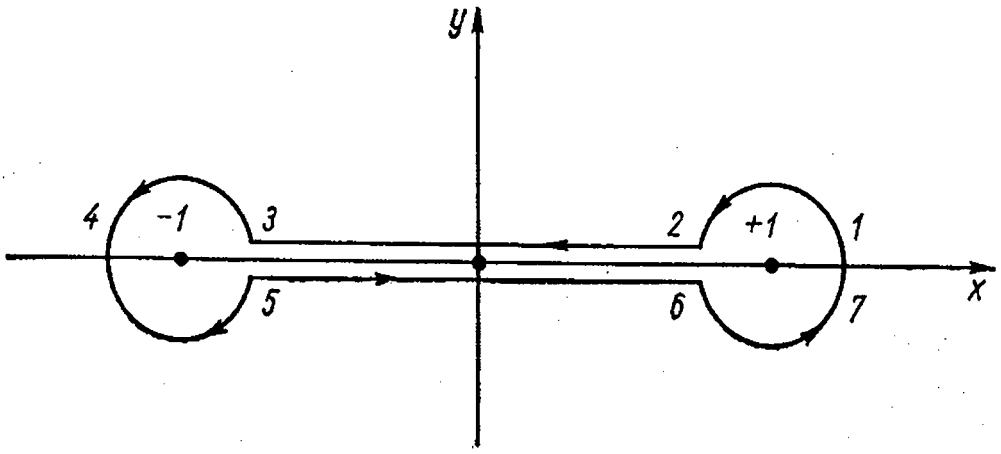


Рис. 7.1. Контур в z-плоскости.

т. е. $(z-1)$ становится отрицательным. Затем аргумент множителя $(z-1)$ остается постоянным вплоть до точки *6*, начиная от которой и до полного замыкания круга в точке *7* аргумент изменяется еще на π. Аргумент множителя $(z+1)$ изменится аналогичным образом,

Таблица 7.1

Положение на контуре	Значения аргумента		
	$z+1$	$z-1$	$(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}$
1	0	0	0
2	0	π	$\pi/2$
3	0	π	$\pi/2$
4	π	π	π
5	2π	π	$3\pi/2$
6	2π	π	$3\pi/2$
7	2π	2π	2π

увеличиваясь на 2π при движении от точки *3* к точке *5*. Значения аргументов для $(z-1)$, $(z+1)$ и функции $f(z)=(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}$ приведены в табл. 7.1. Заметим, что

$$\arg f(z)=[\arg(z-1)+\arg(z+1)]/2.$$

Из табл. 7.1 видно, что: 1) аргумент в точках *5* и *6* не совпадает с аргументами функции в точках *2* и *3* (такое поведение функции на линии разреза можно было ожидать заранее); 2) аргумент в точке *7* превышает аргумент в точке *1* на 2π, и, следовательно,

функция $f(z)=(z^2-1)^{1/2}$ однозначна на контуре, вдоль которого производится обход обеих точек ветвления.

Таким образом, если разрезать z-плоскость вдоль оси x от точки -1 до точки $+1$, функция $f(z)$ окажется однозначной.

Заканчивая рассмотрение особых точек, приведем теорему Лиувилля (см. разд. 6.3, упр. 3): *если функция — аналитическая во всей плоскости и ограниченная, то она постоянна.* Эту теорему легко доказать с помощью интегральной формулы Коши. В то же время любое отклонение аналитической функции от постоянного значения означает, что во всей плоскости изменения комплексного переменного имеется по крайней мере одна особая точка. Оставляя в стороне тривиальные постоянные функции, заметим, что особые точки встречаются во многих задачах. Мы используем их для разработки теории вычетов.

Упражнения

1. Функция $f(z)$, разложенная в ряд Лорана, в точке $z=z_0$ имеет полюс m-го порядка. Показать, что коэффициент при множителе $(z-z_0)^{-1}$ определяется по формуле

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]_{z=z_0},$$

причем в случае простого ($m-1$-го полюса) $a_{-1}=[(z-z_0)f(z)]_{z=z_0}$.

2. Функция $f(z)=f_1(z)/f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические функции, а $f_2(z)=0$ в точке $z=z_0$. С другой стороны, известно, что $f_1(z)\neq 0$ и $f_2'(z_0)=0$. Показать, что коэффициент a_{-1} в разложении Лорана функции $f(z)$ в точке $z=z_0$ равен $a_{-1}=f_1(z_0)/f_2'(z_0)$.

7.2. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

Проинтегрировав почленно функцию, разложенную в ряд Лорана, по замкнутому контуру, охватывающему одну изолированную особую точку z_0, против часовой стрелки, получим

$$a_n\oint(z-z_0)^n\,dz=a_n\frac{(z-z_0)^{n-1}}{n+1}\Bigg|_{z_1}^{z_1}=0 \qquad (7.4)$$

для $n\neq -1$. Однако если $n=-1$, то

$$a_{-1}\oint(z-z_0)^{-1}dz=a_{-1}\oint\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta=2\pi i a_{-1}. \qquad (7.5)$$

Сложим уравнения (7.4) и (7.5):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,dz = a_{-1}. \tag{7.6}$$

Постоянная a_{-1}, которая служит коэффициентом в разложении Лорана при члене $(z - z_0)^{-1}$, называется *вычетом* функции $f(z)$ в точке $z = z_0$.

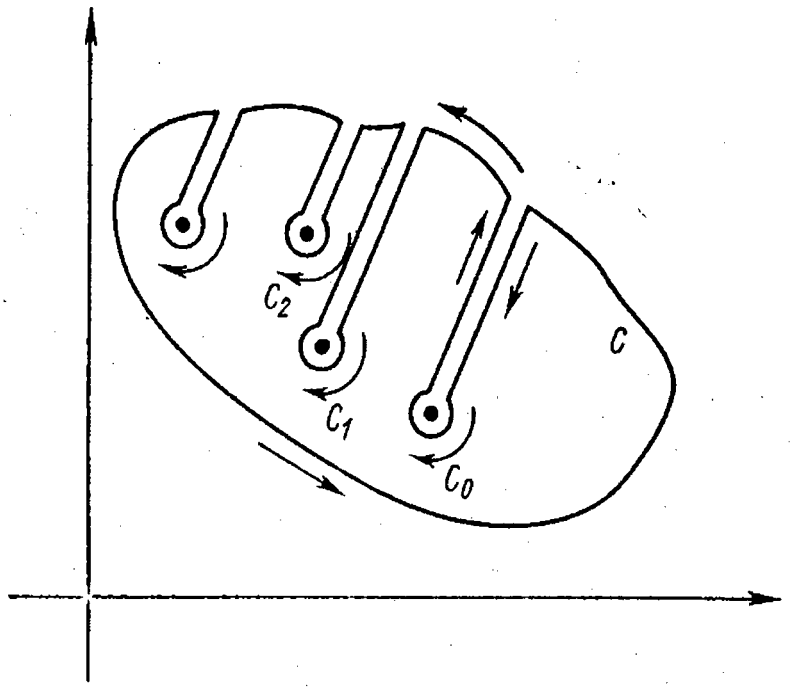


Рис. 7.2. Исключение изолированных особых точек.

Для функции с несколькими изолированными особыми точками контур следует деформировать, как показано на рис. 7.2. Учитывая интегральную теорему Коши (см. разд. 6.2), получаем

$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_0} f(z) + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots = 0. \tag{7.7}$$

Значение криволинейного интеграла, взятого по малой окружности вокруг любой из изолированных особых точек, дается выражением (7.6)

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -2\pi i a_{-1}\big|_{z=z_i}, \tag{7.8}$$

где предполагается, что функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана в окрестности особой точки $z = z_i$. Отрицательный

знак в последнем выражении возникает при интегрировании по часовой стрелке (см. рис. 7.2). Комбинируя уравнения (7.7) и (7.8), получаем важную теорему о вычетах

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_{-1z_0} + a_{-1z_1} + a_{-1z_2} + \ldots) = \\ = 2\pi i \cdot (\text{сумма вычетов}). \qquad (7.9)$$

Изолированные полюсы первого порядка могут иногда располагаться непосредственно на контуре интегрирования. В этом случае контур можно деформировать так, чтобы включить или исключить данную особенность, делая обход

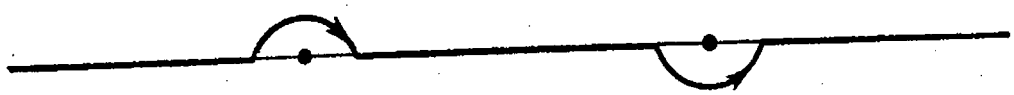


Рис. 7.3. Обход особых точек, лежащих на контуре.

по полуокружности бесконечно малого радиуса (рис. 7.3). Интегрирование по полуокружностям дает $\pi i a_{-1}$ при обходе против часовой стрелки и $-\pi i a_{-1}$ при обходе по часовой стрелке. Полученный дополнительный вклад со знаком плюс или минус нужно приписать к левой части уравнения (7.9). При обходе по часовой стрелке вычет не учитывается и в правой части уравнения (7.9) отсутствует соответствующий член. Однако при обходе против часовой стрелки особая точка попадает внутрь контура C, поэтому в правой части уравнения (7.9) появляется член $2\pi i a_{-1}$. Во всех случаях, как при обходе по часовой стрелке, так и против, простой полюс, расположенный на контуре, приводит к дополнительному члену в уравнении, причем вклад этого члена равен половине того, который мог бы быть, если бы этот полюс располагался внутри контура.

Другой способ решения заключается в том, что полюс смещают с контура интегрирования, а затем переходят к пределу, при котором он возвращается в старое положение. Этот способ использован при вычислении интеграла (7.27).

Вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,. \qquad (7.10)$$

В комплексной плоскости

$$I = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \frac{dz}{1+z^2}. \tag{7.11}$$

В данном примере и во всех примерах аналогичного характера необходимо ответить на два вопроса: 1) где находятся полюсы подынтегральной функции и 2) как выбирать контур интегрирования.

Для определения полюсов запишем

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i}. \tag{7.12}$$

Как видно, в точках $z = i$ и $z = -i$ подынтегральная функция имеет простой полюс (первого порядка). Наличие простого полюса в точке $z = z_0$ определяет форму разложения Лорана

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \tag{7.12а}$$

Вычет a_{-1} легко определить, умножив $f(z)$ на $(z-z_0)$:

$$a_{-1} = (z-z_0) f(z)|_{z=z_0}. \tag{7.12б}$$

Воспользовавшись этим соотношением, можно установить, что вычет в точке $z = i$ равен $1/2i$, а вычет в точке $z = -i$ равен $-1/2i$.

Замкнутый контур интегрирования выберем так, чтобы дополнительный линейный интеграл давал либо известный вклад, либо, что еще лучше, оказался равным нулю. Как известно, замкнутость контура есть необходимое условие для выполнения теоремы о вычетах. Для интеграла (7.11) контур можно замкнуть с помощью полуокружности радиусом R в верхней или нижней полуплоскости (рис. 7.4). Тогда

$$\oint \frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{1+R^2 e^{2i\theta}}. \tag{7.13}$$

Здесь выбрана верхняя полуокружность. Перейдем затем к пределу при $R \to \infty$, тогда второй член справа, равный криволинейному интегралу по полуокружности бесконеч-

ного радиуса, обратится в нуль, поскольку подынтегральная функция стремится к нулю.

Применяя теорему о вычетах (7.9), получаем

$$\oint \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \qquad (7.14)$$

Здесь мы воспользовались тем, что вычет в точке $z = i$, которая оказалась внутри контура интегрирования, равен

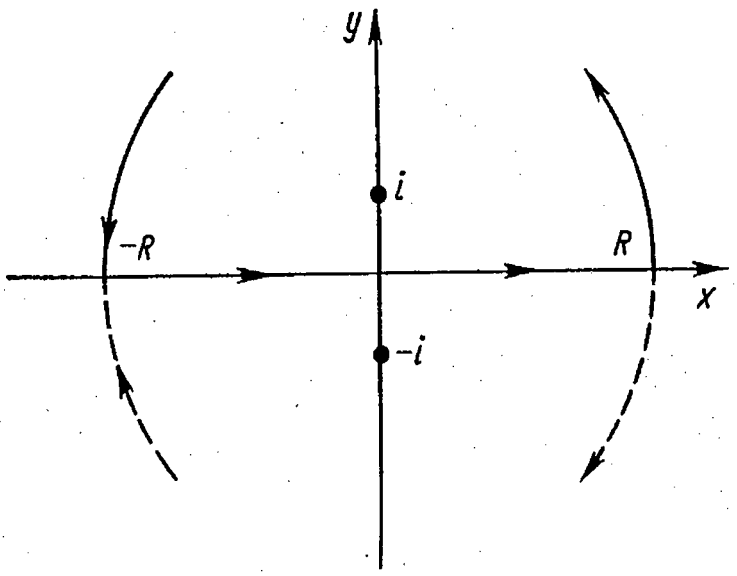


Рис. 7.4. Замыкание контура полуокружностью бесконечным радиусом.

$a_{-1} = 1/2i$. Читатель может самостоятельно убедиться, что при замыкании контура в нижней полуплоскости интеграл по-прежнему равен π.

Рассмотрим более сложный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \qquad (7.15)$$

Указанный интеграл равен половине мнимой* части интеграла

$$I_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}\, dz}{z}. \qquad (7.16)$$

* Можно взять и интеграл $\int [(e^{iz} - e^{-iz})/2iz]\, dz$, но тогда для двух разных экспонент нужно будет использовать два различных контура, как это сделано при вычислении интеграла (7.27).

Подынтегральная функция имеет только один простой полюс в точке $z = 0$, вычет в которой в соответствии с (7.12б) равен $a_{-1} = 1$. В качестве контура интегрирования выберем контур, показанный на рис. 7.5. Такой контур позволяет изолировать особую точку, кроме того, в контур входит вещественная ось, по которой производится интегрирование в искомом интеграле (7.15), и, наконец, подынтегральная

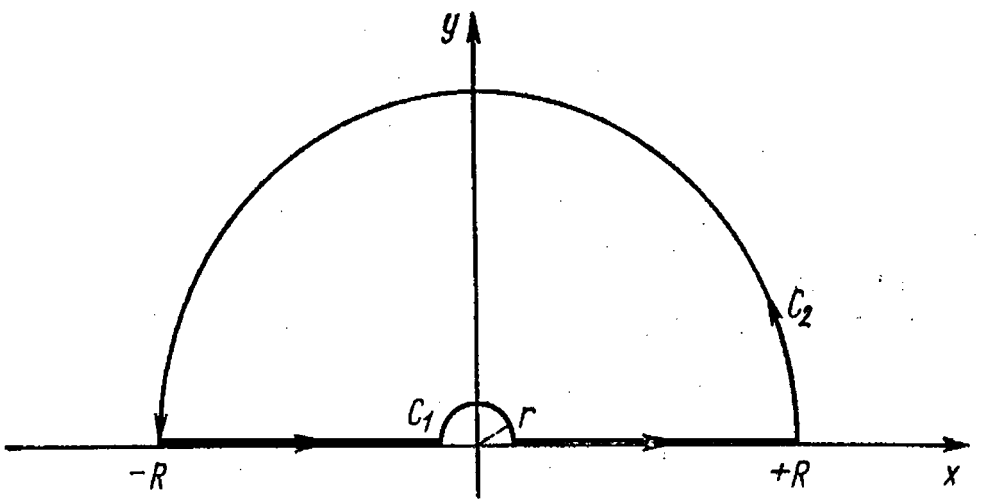


Рис. 7.5. Контур интегрирования при вычислении интеграла (7.15).

функция становится исчезающе малой для $z = iy$ при $y \to \infty$. Отметим, что в этом примере замыкание контура в нижней полуплоскости не приведет к нужному результату. Интеграл по контуру на основании теоремы о вычетах равен нулю

$$\oint \frac{e^{iz}\,dz}{z} = \int\limits_{-R}^{-r} e^{ix}\frac{dx}{x} + \int\limits_{C_1} \frac{e^{iz}\,dz}{z} + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{x} + \int\limits_{C_2} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = 0. \quad (7.17)$$

В пределе при $r \to 0$ и $R \to \infty$ получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x} = \int\limits_{0}^{\pi} i\,d\theta - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} \frac{iRe^{i\theta}\,d\theta}{Re^{i\theta}}. \quad (7.18)$$

В последнем интеграле подынтегральная функция стремится к нулю при $R \to \infty$ в открытом промежутке $0 < \theta < \pi$ (концы интервала, 0 и π исключаются). Поскольку подынтегральная функция только в бесконечно малой области достигает своего максимального значения, равного единице, этот интеграл равен нулю. Выделим в выражении

(7.18) мнимую часть, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi, \quad \text{или} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (7.19)$$

Отметим, что процедура с предельными переходами вновь понимается в смысле вычисления главного значения. В частности, можно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0. \qquad (7.20)$$

Контур, изображенный на рис. 7.5, не единственный. В упр. 11 к этому разделу для вычисления интеграла (7.15) использован другой контур.

Вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx, \quad 0 < a < 1. \qquad (7.21)$$

Ограничение параметра a необходимо (и достаточно) для сходимости интеграла при $x \to \pm\infty$. Этот интеграл можно

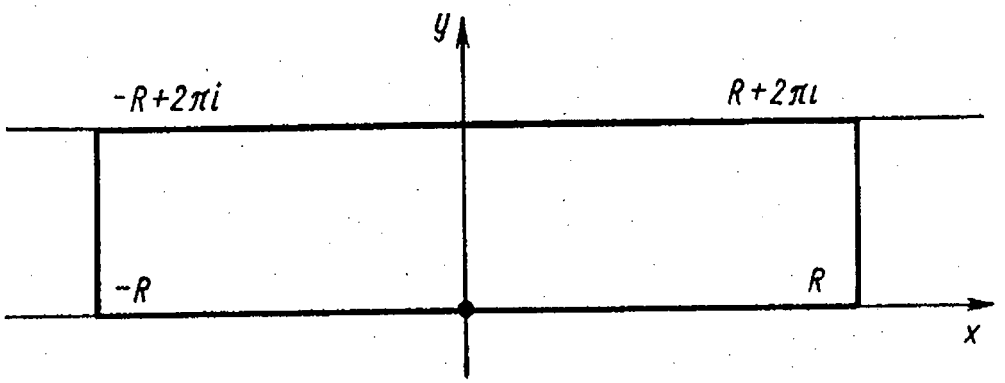


Рис. 7.6. Контур интегрирования при вычислении интеграла (7.21).

вычислить, заменяя вещественную переменную x комплексной z и затем интегрируя по контуру, показанному на рис. 7.6. Предельный переход $R \to \infty$ вдоль вещественной оси даст требуемый интеграл. Обратный путь вдоль линии $\lambda = 2\pi$ выбран с таким расчетом, чтобы знаменатель подынтегральной функции остался неизменным, а в числителе появился постоянный множитель $e^{i2\pi a}$. В комплексной

плоскости .

$$\oint \frac{e^{az}}{1+e^z}dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx - e^{i2\pi a}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx\right) =$$

$$= (1-e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx. \qquad (7.22)$$

Кроме того, имеется еще два вертикальных отрезка пути ($0 \leqslant y \leqslant 2\pi$), интеграл по которым исчезает (экспоненциально) при $R \to \infty$.

Определим полюсы подынтегральной функции и вычеты в них:

$$e^z = e^x e^{iy} = -1. \qquad (7.23)$$

Это уравнение удовлетворяется при $z = 0 + i\pi$. Разложив затем функцию в ряд Лорана по степеням $(z - i\pi)$, убеждаемся, что особая точка должна быть простым полюсом с вычетом $-e^{i\pi a}$ в ней. Тогда, применив теорему о вычетах, получим

$$(1-e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = 2\pi i\,(-e^{i\pi a}). \qquad (7.24)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0<a<1. \qquad (7.25)$$

Используя бета-функцию (см. разд. 10.4), можно показать, что интеграл (7.25) равен произведению $(a-1)!\,(-a)!$ Это приводит к интересному и полезному соотношению из теории гамма-функции:

$$a!\,(-a)! = \frac{\pi a}{\sin \pi a}. \qquad (7.26)$$

Результат (7.25) справедлив для вещественного a из области $0<a<1$, однако с помощью аналитического продолжения соотношение (7.26) можно распространить на любые a, вещественные и комплексные, за исключением целых вещественных значений.

В квантовой теории рассеяния встречается функция

$$I(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-\sigma^2}, \tag{7.27}$$

где σ — вещественное и положительное. Из физических условий следует, что функция $I(\sigma)$ должна иметь форму $e^{i\sigma}$, так как это — расходящаяся рассеянная волна. Воспользуемся соотношением

$$\sin z=\frac{1}{i}\operatorname{sh} iz=\frac{1}{2i}e^{iz}-\frac{1}{2i}e^{-iz} \tag{7.28}$$

и перепишем интеграл (7.27) в комплексной плоскости в виде

$$I(\sigma)=I_1+I_2, \tag{7.29}$$

где

$$I_1=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iz}}{z^2-\sigma^2}dz;\quad I_2=-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{-iz}}{z^2-\sigma^2}dz. \tag{7.30}$$

Интеграл I_1 аналогичен интегралу (7.15). Для I_1 дополним контур интегрирования полуокружностью бесконечного радиуса в верхней полуплоскости. Подынтегральная функция в I_2 содержит отрицательную экспоненту, поэтому мы замкнем контур интегрирования полуокружностью в нижней полуплоскости (рис. 7.7). Как и в случае интеграла (7.15), интегрирование по этим полуокружностям не вносит никакого вклада в интеграл.

Подынтегральная функция имеет полюсы в точках $z=+\sigma$ и $z=-\sigma$, которые лежат непосредственно на контуре интегрирования. Вычеты в этих точках для I_1 равны соответственно $e^{i\sigma}/2$ и $e^{-i\sigma}/2$, а для I_2 равны $e^{-i\sigma}/2$ и $e^{i\sigma}/2$. Совершая обход особых точек, как показано на рис. 7.7 (снизу или сверху — несущественно), и пользуясь теоремой о вычетах, получаем

$$I_1-\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{-i\sigma}}{2}+\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2}=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2}, \tag{7.31}$$

причем особенность в точке $z=\sigma$ при обходе попала внутрь контура, а особенность в точке $z=\sigma$ оказалась исключен-

ной. Аналогичным образом, но учитывая, что обход контура совершается по часовой стрелке, запишем для интеграла I_2:

$$I_2 - \pi i \left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2} + \pi i \left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{-i\sigma}}{2} = -2\pi i \left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2}. \quad (7.32)$$

Сложим уравнения (7.31) и (7.32) и окончательно получим

$$I(\sigma) = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}) = \pi \operatorname{ch} i\sigma = \pi \cos \sigma. \quad (7.33)$$

В математическом смысле мы получили точное выражение для интеграла (7.27), однако косинусоидальная зависимость

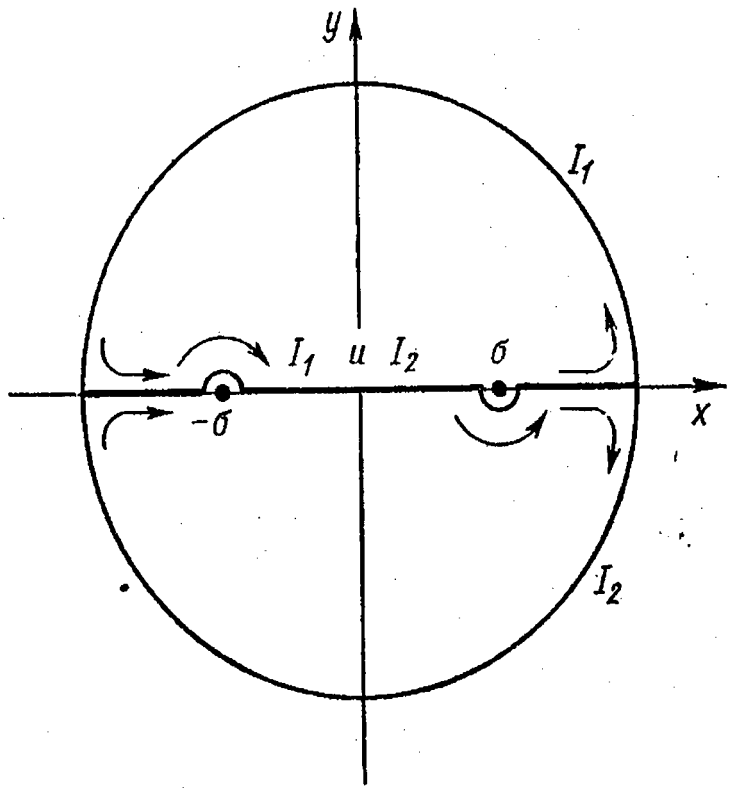


Рис. 7.7. Контур интегрирования при вычислении интеграла (7.27).

соответствует стоячей волне, тогда как нам необходимо выделить в решении расходящуюся рассеянную волну.

Попытаемся получить решение требуемой формы, которое удовлетворяло бы физическим условиям задачи. Вместо обхода особых точек сместим их с вещественной оси. В частности, если заменить $\sigma \to \sigma + i\gamma$, $-\sigma \to -\sigma - i\gamma$, где положительный параметр γ мал по величине и в конечном результате полагается равным нулю, т. е.

$$I(\sigma) = \lim_{\gamma \to 0} I(\sigma + i\gamma), \quad (7.34)$$

то после указанной замены и применения теоремы о вычетах получим для первого интеграла

$$I_1(\sigma+i\gamma)=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2}, \tag{7.35}$$

аналогично

$$I_2(\sigma+i\gamma)=-2\pi i\left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2}. \tag{7.36}$$

Сложим (7.35) и (7.36) и перейдем к пределу

$$I(\sigma)=\lim_{\gamma\to 0}[I_1(\sigma+i\gamma)+I_2(\sigma+i\gamma)]=$$
$$=\lim_{\gamma\to 0}\pi e^{i(\sigma+i\gamma)}=\pi e^{i\sigma}. \tag{7.37}$$

Этот результат соответствует граничным условиям задачи о рассеянии.

Интересно проследить, каким образом подстановка $\sigma\to\sigma-i\gamma$ приводит к значению интеграла

$$I(\sigma)=\pi e^{-i\sigma}, \tag{7.38}$$

которое соответствует падающей волне. Очевидно, результат (7.33) представляет собой среднее арифметическое уравнений (7.37) и (7.38), которое является главным значением интеграла. Отметим, что различные возможности (7.33), (7.37) и (7.38) возникли как следствие того, что заданный интеграл — несобственный. Он не может быть однозначно определен до тех пор, пока не введены дополнительные ограничивающие условия (или не проведено усреднение).

Рассмотрим теперь числа Бернулли (см. разд. 5.8):

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n. \tag{7.39}$$

Заменив x на z, получим ряд Тейлора, в котором

$$B_n=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{z}{e^z-1}\cdot\frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{7.40}$$

Здесь внутри контура интегрирования C_0 находится начало координат, причем $|z|<2\pi$.

При $n=0$ в точке $z=0$ имеется простой полюс с вычетом $+1$. Отсюда из уравнения (7.9)

$$B_0=\frac{0!}{2\pi i}2\pi i\,(1)=1. \tag{7.41}$$

При $n = 1$ особенность в точке $z = 0$ является полюсом второго порядка. Разлагая показательную функцию в ряд, можно показать, что вычет в этом случае равен $-1/2$. Следовательно,

$$B_1 = \frac{1!}{2\pi i} 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \qquad (7.42)$$

При $n \geqslant 2$ эта процедура становится значительно более громоздкой, поэтому разумнее прибегнуть к другим методам вычисления интеграла (7.40). Деформируем контур,

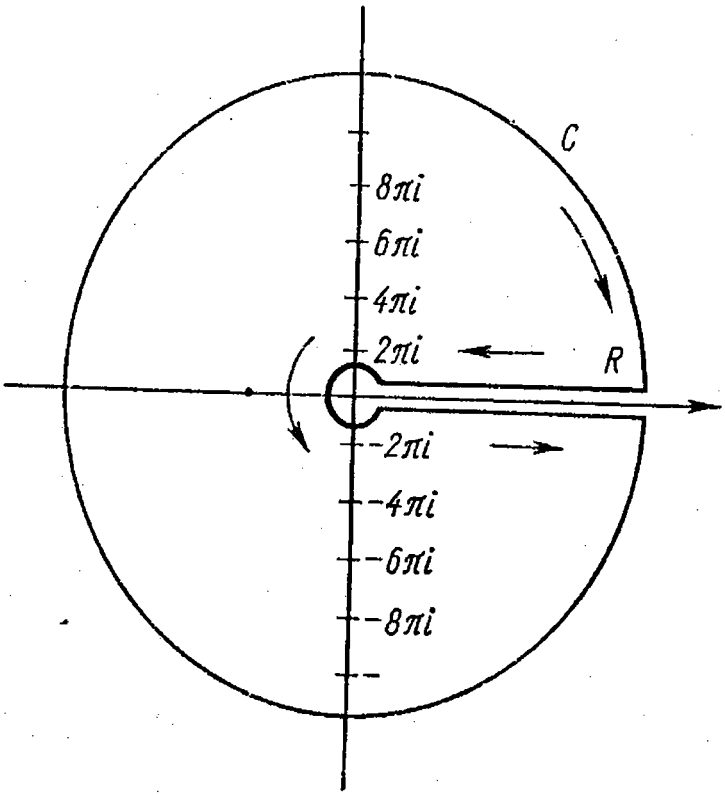


Рис. 7.8. Контур интегрирования при вычислении чисел Бернулли.

как показано на рис. 7.8. Новый контур C, так же как и контур C_0, содержит внутри себя начало, но, кроме того, внутри контура C имеется бесконечное множество особых точек, расположенных вдоль мнимой оси в точках $z = \pm p2\pi i$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ Интегралы вдоль оси x, взятые в противоположных направлениях, взаимно уничтожаются, а интеграл по окружности бесконечного радиуса ($R \to \infty$) оказывается равным нулю (напомним, что $n \geqslant 2$). Следовательно,

$$\oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \cdot \frac{dz}{z^{n+1}} = -2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \text{вычеты } (z = \pm p2\pi i). \qquad (7.43)$$

В точке $z = p2\pi i$ функция имеет простой полюс с вычетом $(p2\pi i)^{-n}$. При нечетном n вычет в точке $z = p2\pi i$ равен с противоположным знаком вычету в точке $z = -p2\pi i$, поэтому $B_n = 0$, $n = 3, 5, 7$ и т. д. При четном n вычеты складываются, поэтому

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i}(-2\pi i)\,2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^n(2\pi i)^n} =$$

$$= -\frac{(-1)^{n/2}2n!}{(2\pi)^n}\sum_{p=1}^{\infty}p^{-n} = -\frac{(-1)^{n/2}2n!}{(2\pi)^n}\zeta(n), \qquad (7.44)$$

где $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана (см. разд. 5.8). Последнее выражение соответствует уравнению (5.131) в разд. 5.8.

Упражнения

1. Определить тип особых точек и найти вычет для каждой из следующих функций ($a > 0$):

$$\frac{1}{z^2+a^2},\quad \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2},\quad \frac{ze^{+iz}}{z^2+a^2},\quad \frac{e^{+iz}}{z^2-a^2},$$

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^2},\quad \frac{\sin(1/z)}{z^2+a^2},\quad \frac{ze^{+iz}}{z^2-a^2},\quad \frac{z^{-k}}{z+1}\quad (0<k<1).$$

2. Применяя теорему о вычетах, найти значения следующих несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

Ответ: $\pi/2a^3$, $\pi/2a$, $\pi/8a^3$, $\pi/\sqrt{2}a^3$, $\pi/2$

3. Показать, что $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{-a}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, $0<a<1$. Этот интеграл позволяет иначе определить соотношение (7.26). *Указание.* Поскольку есть точка ветвления, необходимо сделать разрез. Напомним, что функция $z^{-a} = w$ в полярных координатах записывается в виде $[re^{i(\theta+2\pi n)}]^{-a} = \rho e^{i\varphi}$, откуда следует, что $-a\theta - 2an\pi = \varphi$. Нужно ограничиться нулевым значением n (или любым другим целым n), тогда φ определяется единственным образом. Контур интегрирования показан на рис. 7.9, *а*.

4. В квантовой теории атомных столкновений встречается интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}e^{ipt}\,dt$, в котором p — вещественное. Показать, что $I=0$ для $|p|>1$, и $I=\pi$ для $|p|<1$. Чему равен интеграл, когда $p=\pm 1$?

5. Показать, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum$ вычеты $(y>0)$, если $f(z)$ аналитична при $y\geqslant 0$, за исключением изолированных полюсов при $y>0$ и $\lim\limits_{|z|\to\infty}zf(z)=0$, причем $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$. Этот вывод непосредственно применим ко всем интегралам из упр. 2.

6. Показать, что при $a>0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx=\pi e^{-a},\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx=\pi e^{-a}.$$

Как изменится значение этих интегралов, если сделать замену

$$\cos x=\cos kx,\quad \text{а}\quad \sin x=\sin kx?$$

7. Используя теорему о вычетах, показать, что

$$\int\limits_{0}^{\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},\quad n=0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

8. С помощью теоремы о вычетах убедиться, что

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad 0\leqslant\varepsilon<1.$$

9. Доказать, что при $R\longrightarrow\infty$

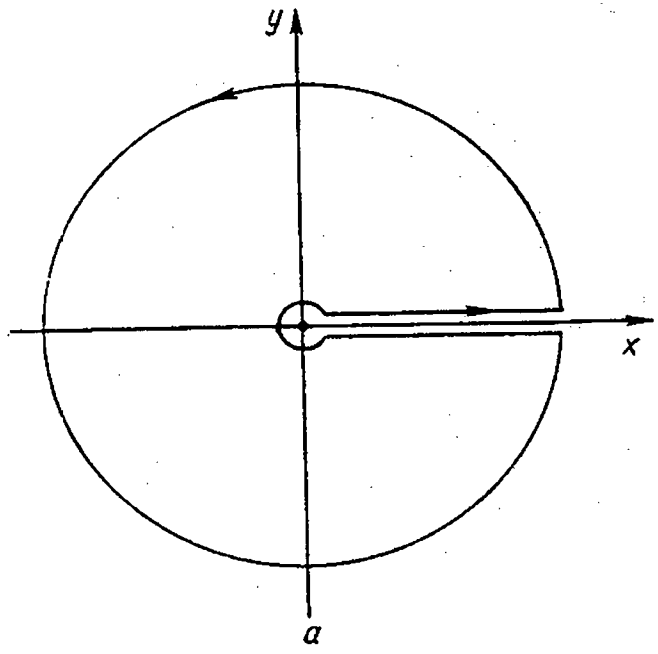
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi.$$

Контур интегрирования показан на рис. 7.9, *б*.

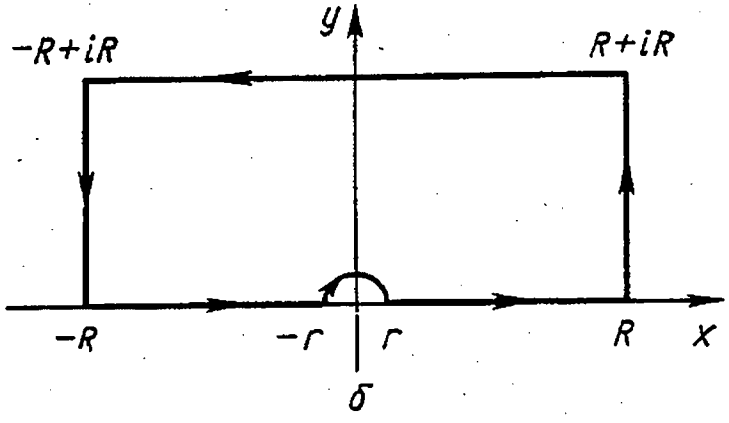
10. Показать, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^a}{(x+1)^2}\,dx=\frac{\pi a}{\sin\pi a},\quad -1<a<1.$$

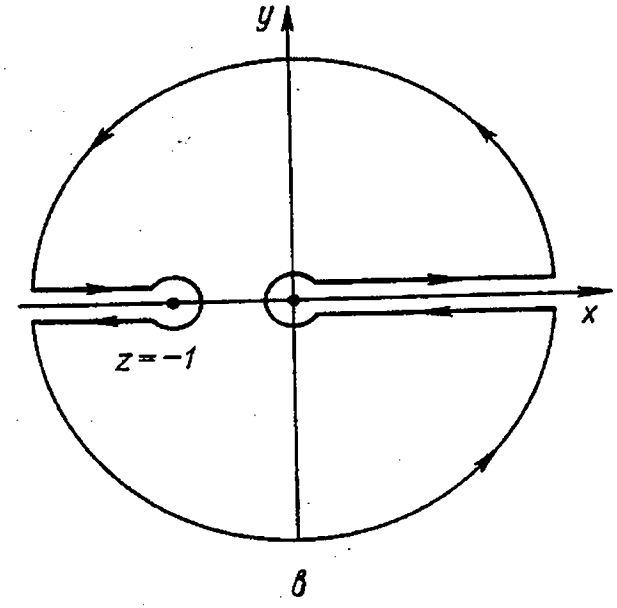
Здесь приведен еще один способ вывода соотношения (7.26). *Указание.* Воспользоваться контуром, который изображен на рис. 7.9, *в*, имея в виду, что точка $z=0$ является точкой ветвления и разрез сделан вдоль оси x.



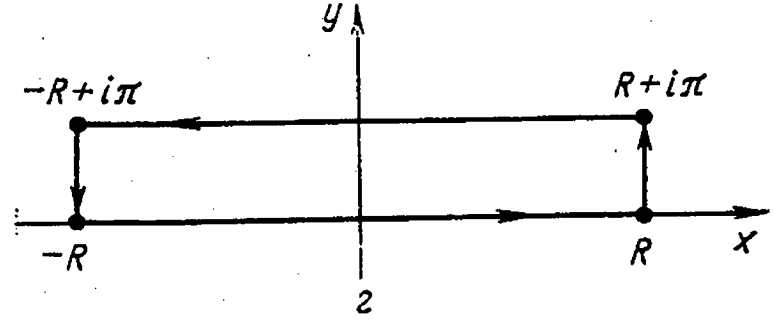
а



б



в



г

Рис. 7.9. Контуры интегрирования при вычислении интегралов:

а — из упр. 4; *б* — из упр. 11; *в* — из упр. 12; *г* — из упр. 14.

11. Вычислить интеграл $\oint e^{-z^2}\,dz$ по контуру, который ограничивает сектор $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ с радиусом $R \to \infty$. Показать, что

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Здесь представлены известные интегралы Френеля. *Указание.* Показать что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7.3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

Инверсия степенного ряда. В разр. 5.7 рассматривалась задача, каким образом из известного ряда

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{7.45}$$

получить новый ряд вида

$$z = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \ldots. \tag{7.46}$$

Прямой подстановкой было выражено несколько первых коэффициентов b_i через известные коэффициенты a_i. Определим эти коэффициенты более простым и изящным методом. Запишем равенство

$$z(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t\,(dw/dt)}{w(t) - w(z)}\,dt, \tag{7.47}$$

где t — комплексная переменная интегрирования. Для проверки (7.47) вычислим вычет в точке $t = z$. Воспользовавшись результатом, полученным в разд. 7.1 (упр. 1), положив в нем $m = 1$ и разложив функцию $w(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = z$, найдем, что вычет подынтегральной функции равен

$$a_{-1} = \lim_{t\to z} \frac{(t-z)\,t\,(dw/dt)}{w(t) - w(z)} =$$

$$= \lim_{t\to z} \frac{(t-z)\,z\,(dw/dt)}{w(z) + (t-z)(dw/dt) + [(t-z)^2/2!](d^2w/dt^2) + \cdots - w(z)}. \tag{7.48}$$

В пределе при $t \to z$, получим $a_{-1} = z$, что и доказывает справедливость формулы (7.47).

Контур интегрирования C в интеграле (7.47) выбирается таким, чтобы $w \neq 0$ внутри и на самом контуре, за исключением нулевого значения $w(t)$ в начале координат. Тогда на всем контуре z ограничено условием $|w(z)| < |w(t)|$. При таком ограничении подынтегральную функцию можно разложить в ряд

$$z(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t\,(dw/dt)}{w(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{w(z)}{w(t)}\right]^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [w(z)]^n \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t\,(dw/dt)}{[w(t)]^{n+1}}\, dt. \qquad (7.49)$$

Из выражений (7.46) и (7.49) получим

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t\,(dw/dt)}{[w(t)]^{n+1}}\, dt. \qquad (7.50)$$

Теперь вопрос сводится к вычислению последнего интеграла. Учитывая (7.45), его подынтегральную функцию можно записать так:

$$I = \frac{t\,(a_1 + 2a_2 t + \cdots)}{t^{n+1}\,(a_1 + a_2 t + \cdots)^{n+1}}. \qquad (7.51)$$

В точке $t = 0$ эта функция имеет полюс n-го порядка. Поскольку точка $t = 0$ является единственным нулем функции $w(t)$ в замкнутой области, ограниченной контуром C, можно воспользоваться результатом упр. 1 к разд. 7.1, откуда

$$b_n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[\frac{t^{n+1}\,(dw/dt)}{[w(t)]^{n+1}}\right]_{t=0}. \qquad (7.52)$$

Можно поступить иначе и проинтегрировать выражение (7.50) по частям:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t\,(dw/dt)}{w^{n+1}}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n i} \oint t \frac{d}{dt} [w^{-n}]\, dt = \frac{1}{2\pi n i} \oint \frac{dt}{w^n}. \qquad (7.53)$$

Здесь отсутствует проинтегрированная часть, поскольку однозначную функцию интегрировали по замкнутому контуру. Применяя далее теорему о вычетах, получим

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t}{w(t)}\right)^n\right]_{t=0}. \qquad (7.54)$$

Этот метод инверсии ряда особенно удобен, когда функция представима в замкнутой форме, так что уравнения (7.52) и (7.54) можно продифференцировать непосредственно. Определенные таким образом коэффициенты b_i можно выразить через известные коэффициенты a_i. Выпишем несколько первых коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = a_1^{-1}, \quad b_2 = -a_2 a_1^{-3}, \quad b_3 = a_1^{-3}(2a_2^2 a_1^{-2} - a_3 a_1^{-1}), \\ &b_4 = a_1^{-4}(-5a_2^3 a_1^{-3} + 5a_2 a_3 a_1^{-2} - a_4 a_1^{-1}), \end{aligned}\right\} \quad (7.55$$

что согласуется с результатом, полученным в разд. 5.7.

Бесконечные произведения. На основании интегральной формулы Коши и теоремы о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-1}(z = z_k). \qquad (7.56)$$

Здесь $f(z)$ — функция, аналитическая всюду, за исключением изолированных (первого порядка) полюсов $z = z_k$,

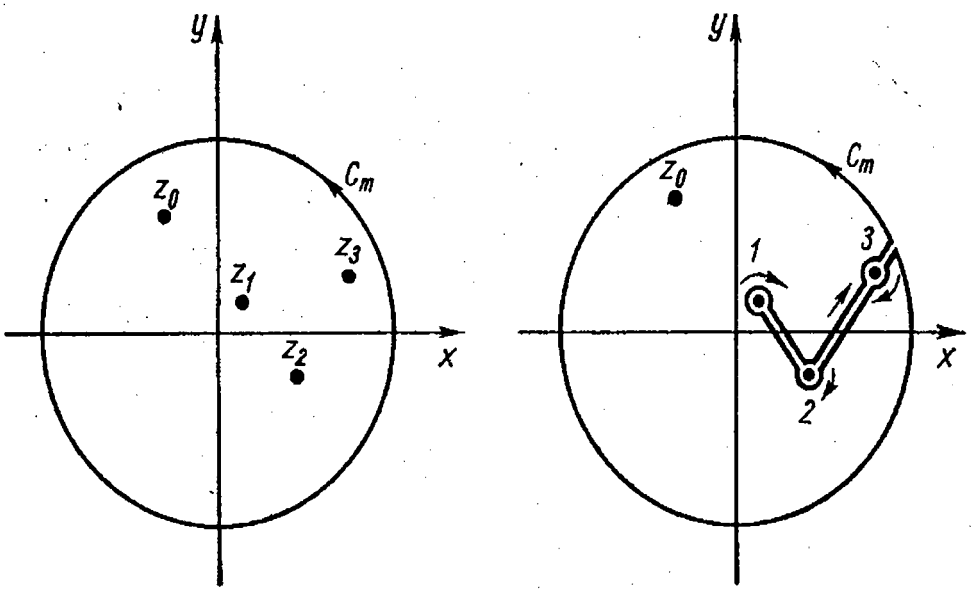


Рис. 7.10. Исключение изолированных особых точек.

$k = 1, 2, 3, \ldots, m$. Индекс k выбран так, что $|z|_1 \leqslant \leqslant |z_2| \leqslant |z_3| \leqslant \ldots$ Контур C_m представляет собой окружность с центром в начале, причем все полюсы $z = = z_1, z_2, z_3$ попадают внутрь контура. Формула (7.56) получается после интегрирования по деформированному контуру, который показан на рис. 7.10. Вычет функции

$f(z)/(z-z_0)$ в точке $z=z_k$ равен

$$a_{-1}=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)f(z)}{z-z_0}=\frac{b_{-1}(z=z_k)}{z_k-z_0}, \qquad (7.57)$$

где b_{-1} — вычет функции $f(z)$ в точке $z=z_k$. С помощью (7.57) формулу (7.56) можно записать так:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_{-1}(z=z_k)}{z_0-z_k}. \qquad (7.58)$$

Для исходного интеграла справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(z)\,dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{z_0 f(z)\,dz}{z(z-z_0)}. \qquad (7.59)$$

Подставляя (7.58) в первый интеграл в правой части (7.59) и полагая $z_0=0$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{f(z)}{z}dz=f(0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_{-1}(z=z_k)}{z_k}. \qquad (7.60)$$

Далее, если при $|z|\to\infty$ $f(z)/z^2$ спадает быстрее, чем z^{-1}, то второй интеграл в правой части уравнения (7.59) будет стремиться к нулю по мере бесконечного увеличения радиуса контура C_m $(m\to\infty)$. Затем, подставляя (7.60) в уравнение (7.59), а полученный результат — в уравнение (7.58), будем иметь

$$f(z_0)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}b_{-1}\left(\frac{1}{z_0-z_k}+\frac{1}{z_k}\right). \qquad (7.61)$$

Следующий шаг состоит в замене $f(z)$ функцией, более удобной для вычислений. Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая всюду в комплексной плоскости, с простыми нулями в изолированных точках $z=z_k$. Построим функцию

$$f(z)=\frac{dg(z)/dz}{g(z)}=\frac{g'}{g}. \qquad (7.62)$$

Эта функция будет удовлетворять условиям, при которых справедливо уравнение (7.56). Вычеты b_{-1} функции g'/g равны единице во всех полюсах z_k, поэтому уравнение (7.61)

переходит в

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g'(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right). \tag{7.63}$$

Нулевой индекс при z_0 здесь опущен, поскольку в нем уже нет необходимости. Проинтегрируем (7.63) от 0 до z:

$$\ln g(z) = \ln g(0) + \frac{g'(0)}{g(0)} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) + \frac{z}{z_k} \right]. \tag{7.64}$$

Переходя к экспоненциальной форме, запишем

$$g(z) = g(0) \exp \left\{ \frac{g'(0)}{g(0)} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) + \frac{z}{z_k} \right] \right\} =$$

$$= g(0) \exp \left(\frac{g'(0)}{g(0)} z \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{z/z_k} \right], \tag{7.65}$$

где $g(z)$ выражена в виде бесконечного произведения.

Этот окончательный результат иногда называют бесконечным произведением Вейерштрасса. При использовании этой формулы следует помнить, что функция $g(z)$ должна быть аналитической во всей комплексной плоскости и иметь простые корни в точках $z = z_k$. Кроме того, отношение $g'(z)/zg(z)$ должно стремиться к нулю при $|z| \to \infty$.

Пример. Представим функцию

$$\frac{\sin z}{z} \tag{7.66}$$

в виде бесконечного произведения. Предварительно заметим, что $g(z) = \sin z/z$ не имеет особенностей в любой конечной области комплексной плоскости, простые корни этой функции равны $z = \pm k\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, $z_k = \pm k\pi$. Поскольку $g(0) = 1$ и $g'(0) = 0$, уравнение (7.65) приобретает вид

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi} \right) e^{z/k\pi} \left(1 + \frac{z}{k\pi} \right) e^{-z/k\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2\pi^2} \right). \tag{7.67}$$

Это более общая запись уравнения (5.155).

Устойчивость усилительного контура. На рис. 7.11 схематически показан усилитель с обратной связью. Входной и выходной сигналы равны соответственно E_s и E_0. Некоторая часть выходного сигнала βE_0 (β может быть

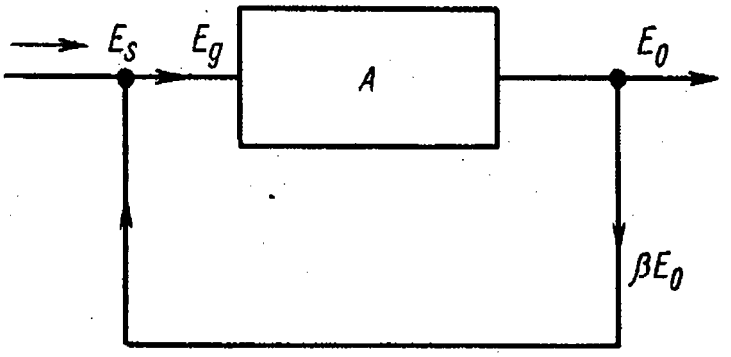


Рис. 7.11. Усилитель с обратной связью.

комплексной величиной) подается опять на вход, где складывается с входным сигналом E_s. Сумма E_g представляет собой действительный входной сигнал, подаваемый на усилитель,

$$E_g = E_s + \beta E_0. \tag{7.68}$$

Кроме того,

$$E_0 = AE_g, \tag{7.69}$$

где A — коэффициент усиления. Так же как и β, A может быть комплексным. И A, и β могут зависеть от круговой частоты ω входного и выходного сигналов. Подставим в (7.69) конкретное значение E_g из (7.68):

$$E_0 = AE_s + A\beta E_0. \tag{7.70}$$

Неустойчивость работы контура (колебания и т. д.) характеризуется наличием некоторого сигнала на выходе без подачи какого-либо сигнала на вход, т. е. $E_s = 0$, а $E_0 \neq 0$. Из уравнения (7.70) условие неустойчивости запишется так:

$$1 - A(\omega)\,\beta(\omega) = 0. \tag{7.71}$$

Здесь в соответствии с условием задачи $\operatorname{Re}\omega > 0$.

Если корень уравнения $f(z) = 1 - A(z)\,\beta(z) = 0$ расположен на положительной части вещественной оси, мы имеем экспоненциально возрастающую неустойчивость. Если это уравнение имеет комплексное решение, расположенное в правой полуплоскости, неустойчивость будет осциллляторной.

Разность между полным числом нулей N и полюсов P функции, повторенных столько раз, какова кратность нуля или полюса, дается интегралом *

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P, \tag{7.72}$$

где N и P — нули и полюсы внутри контура C. Для доказательства (7.72) рассмотрим нуль n-го порядка функции $f(z)$ в точке $z = z_1$. Тогда

$$f(z) = (z - z_1)^n g(z). \tag{7.73}$$

Продифференцируем это равенство

$$f'(z) = n(z - z_1)^{n-1} g(z) + (z - z_1)^n g'(z), \tag{7.74}$$

после чего подынтегральную функцию из (7.72) запишем в виде

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_1} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{7.75}$$

Интегрируя по контуру C_1 вокруг точки z_1, получим кратность нуля в этой точке:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n. \tag{7.76}$$

Для полюса порядка m в точке $z = z_2$

$$f(z) = (z - z_2)^{-m} h(z). \tag{7.77}$$

Подынтегральная функция аналогична выражению (7.75)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_2} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \tag{7.78}$$

а интеграл по контуру C_2 с точкой z_2 внутри него равен числу полюсов с отрицательным знаком:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -m. \tag{7.79}$$

Комбинируя (7.76) и (7.79), получаем интеграл (7.72).

В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(z) = 1 - A\beta$ не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$.

* Здесь приведен специальный случай более общего интеграла, называемого иногда интегралом Коши.

Тогда, если проинтегрировать $f'(z)/f(z)$ в правой части комплексной полуплоскости, уравнение (7.72) укажет на наличие нулей. Если при этом

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0, \tag{7.80}$$

то $N=0$, а исследуемая система устойчива. В качестве контура C взята мнимая ось и полуокружность (бесконечного радиуса), замыкающая контур в правой полуплоскости.

Для вычисления интеграла (7.72), т. е. для проверки (7.80), положим

$$f(z) = re^{i\theta}, \quad \ln f(z) = \ln r + i\theta, \tag{7.81}$$

тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\ln f(z) = \frac{1}{r}\frac{dr}{dz} + i\,\frac{d\theta}{dz}. \tag{7.82}$$

Подставив это в (7.72), получим

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \oint \frac{dr}{r} + i\oint d\theta. \tag{7.83}$$

Поскольку контур C замкнут, первый интеграл справа исчезает. Второй интеграл дает 2π или нуль в зависимости от того, содержится внутри контура интегрирования начало координат или нет. Следовательно, можно утверждать, что устойчивость усилителя определяется тем, попадает ли начало координат внутрь графика функции $f(z) = 1 - A(z)\,\beta(z)$, когда переменная z пробегает значения от $-i\infty$ до $+i\infty$ *. Если внутри кривой не содержится начало, то

$$\oint d\theta = 0, \tag{7.84}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N = 0 \tag{7.85}$$

и в правой полуплоскости нули отсутствуют. Следовательно, усилитель устойчив. Полученное условие называется критерием устойчивости Найквиста.

---

* При $w \to \infty$ $A \to 0$, поэтому полуокружность бесконечного радиуса отображается на точку $f(z) = 1$.

Упражнения

1. В квантовой теории фотоионизации атома водорода встречается контурный интеграл

$$J=\oint\left(z+\frac{1}{2}\right)^{-in-2}\left(z-\frac{1}{2}\right)^{in-2}\left(z-\frac{in}{2}\right)^{-2}dz,$$

где n вещественное, нецелое число. Внутри контура интегрирования (рис. 7.12) имеются две точки ветвления $z=\pm 1/2$. Обосновать

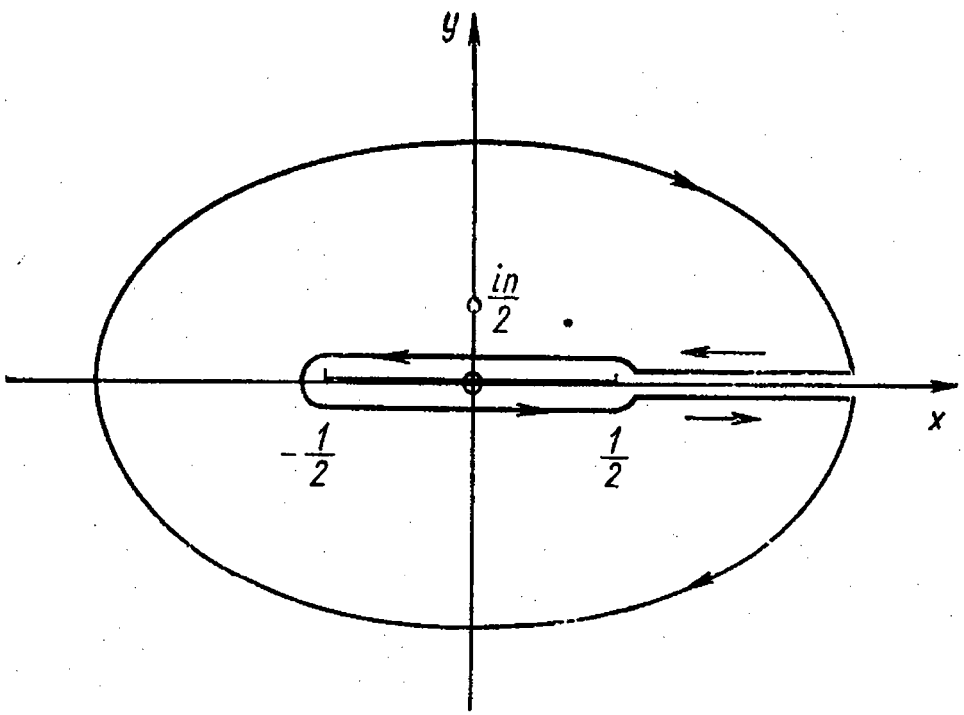


Рис. 7.12. Контур интегрирования.

выбор удлиненного контура. Использовав этот контур, вычислить интеграл J.

Ответ: $a_{-1}=\dfrac{i64n}{(n^2+1)^3}\left(\dfrac{in-1}{in+1}\right)^{in}$, $J=\dfrac{128n\pi}{(n^2+1)^3}\,e^{-2n\operatorname{arcctg} n}$.

2. Дзета-функция Римана имеет интегральное представление

$$\zeta(s)=\frac{1}{(s-1)!}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx,\quad \operatorname{Re} s>1.$$

Рассмотрев контурный интеграл

$$\int_C\frac{(-z)^{s-1}e^{-z}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

показать, что

$$\zeta(s)=-\frac{(-s)!}{2\pi i}\int_C\frac{(-z)^{s-1}e^{-z}}{1-e^{-z}}dz$$

выполняется для любых s из комплексной плоскости s, кроме $s=1, 2, 3, \ldots$ Контур C показан на рис. 7.13. Интеграл представляет аналитическое продолжение функции $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость.

3. Показать, что $\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$.

4. Произведение $z\Gamma(z)$ имеет простые полюса в точках $z=-1$, -2, -3, ..., $-n$. Получить представление обратной гамма-функции в виде бесконечного произведения.

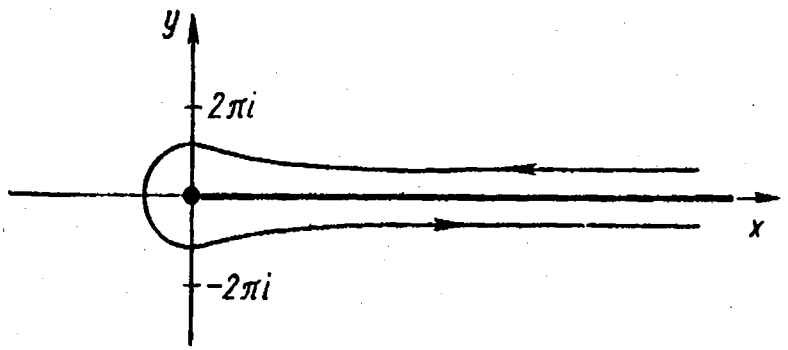


Рис. 7.13. Контур интегрирования для получения дзета-функции Римана.

5. Функция $g(z)$ — аналитическая в ограниченной области комплексной плоскости и имеет простые нули в точках $z=z_k$. Кроме того, $g'(z)/zg(x)$ обращается в нуль при $|z|\longrightarrow\infty$. Показать, что $g(z)=g(0)\prod_{k=1}^{\infty}(1-z^2/z_k^2)$, если $g(z)$ — четная функция. В бесконечное произведение входит только одна из двух точек z_i и $-z_i$.

Показать, что

$$g''(0)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2},\quad g^{(4)}(0)=3[g''(0)]^2-12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^4},$$

если $g(0)=1$.

6. Привлекая результаты упр. 5, получить формулы из разд. 5.8:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}=\frac{\pi^2}{6},\quad\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

7.4. МЕТОД ПЕРЕВАЛА

В математической физике часто необходимо знать поведение функции при больших значениях переменной, т. е. ее асимптотическое поведение. Метод перевала представляет собой один из способов определения асимптотического поведения функций, которые могут быть записаны в виде

$$I(s) = \oint_C g(z)\, e^{sf(z)}\, dz. \tag{7.86}$$

Для определенности условимся считать здесь параметр s вещественным. Контур интегрирования выбирается тогда так, чтобы $\mathrm{Re}\, f(z) \to \infty$ на обоих его концах, в результате чего подынтегральная функция обращается в нуль; иногда контур берут замкнутым. Предположим также, что множитель $g(z)$ в подынтегральном выражении мажорируется в интересующей нас области экспонентой.

При больших значениях положительного параметра s величина подынтегрального выражения увеличивается, когда $\mathrm{Re}\, f(z)$ возрастает, и уменьшается, когда реальная часть мала или отрицательна. В частности, поскольку величина s может быть как угодно большой (что приводит к асимптотической зависимости), основной вклад в интеграл вносит область, близкая к той, где $\mathrm{Re}\, f(z)$ достигает положительного максимального значения. Вдали от этой области подынтегральная функция сравнительно мала. В этом легко убедиться, если представить

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{7.87}$$

Тогда интеграл запишется иначе:

$$I(s) = \int_C g(z)\, e^{su(x, y)} e^{isv(x, y)}\, dz. \tag{7.88}$$

Кроме того, ограничимся случаем, когда мнимая часть показателя экспоненты $iv(x, y)$ постоянна в области, в которой реальная часть принимает максимальное значение, т. е. $v(x, y) = v(x_0, y_0) = v_0$, в этих предположениях интеграл аппроксимируется выражением

$$I(s) \approx e^{isv_0} \int_C g(z)\, e^{su(x, y)}\, dz. \tag{7.89}$$

Вдали от максимума реальной части мнимая часть может изменяться как угодно, поскольку это почти не влияет на значение интеграла (изменение фазового множителя в данном случае не играет никакой роли).

Реальная часть произведения $sf(z)$ достигает максимального значения при заданном s, когда максимально значение $\mathrm{Re}\, f(z)$. Это означает, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{7.90}$$

и, следовательно, с учетом условий Коши — Римана можно записать

$$\frac{df(z)}{dz} = 0. \tag{7.91}$$

Обратимся теперь к исследованию этих нулей производной. Заметим, что максимальное значение $u(x, y)$ достигается только на заданном контуре. В ограниченной области ни реальная, ни мнимая части аналитической функции не имеют абсолютного максимума. В этом можно убедиться, если вспомнить, что u и v удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7.92}$$

Поэтому если $d^2u/dx^2 > 0$, то $d^2u/dy^2 < 0$, следовательно, ни u, ни v не может достигать абсолютного максимума или минимума. По условию $f(z)$ — аналитическая функция, следовательно, особые точки исключаются. Тогда условие (7.91) означает, что мы имеем седловую точку, в которой $u(x, y)$ может принимать максимальное значение на одном контуре и минимальное на другом.

При выборе контура интегрирования необходимо выполнить условия: 1) на линии интегрирования $u(x, y)$ имеет максимум в седловой точке; 2) $u(x, y)$ проходит через седловую точку так, чтобы $\mathrm{Im}\, v(x, y)$ оставалась постоянной *. Второе условие приводит к тому, что путь интегрирования совпадает с линией скорейшего спуска **. Из

* Линия скорейшего подъема также характеризуется постоянным v, поэтому седловая точка нуждается в дополнительном исследовании, чтобы отличить линию скорейшего спуска от линии скорейшего подъема. Этот вопрос обсуждается дальше в двух примерах.

** Метод перевала называют также методом скорейшего спуска или методом седловых точек.— *Прим. перев.*

разд. 6.1 (см. упр. 3) и 6.6 известно, что кривые, соответствующие $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, образуют ортогональную систему. Это означает, что кривые $v = C_i$ всюду касательны к градиенту u. Следовательно, кривая $v = \text{const}$ дает линию скорейшего спуска в седловой точке (рис. 7.14).

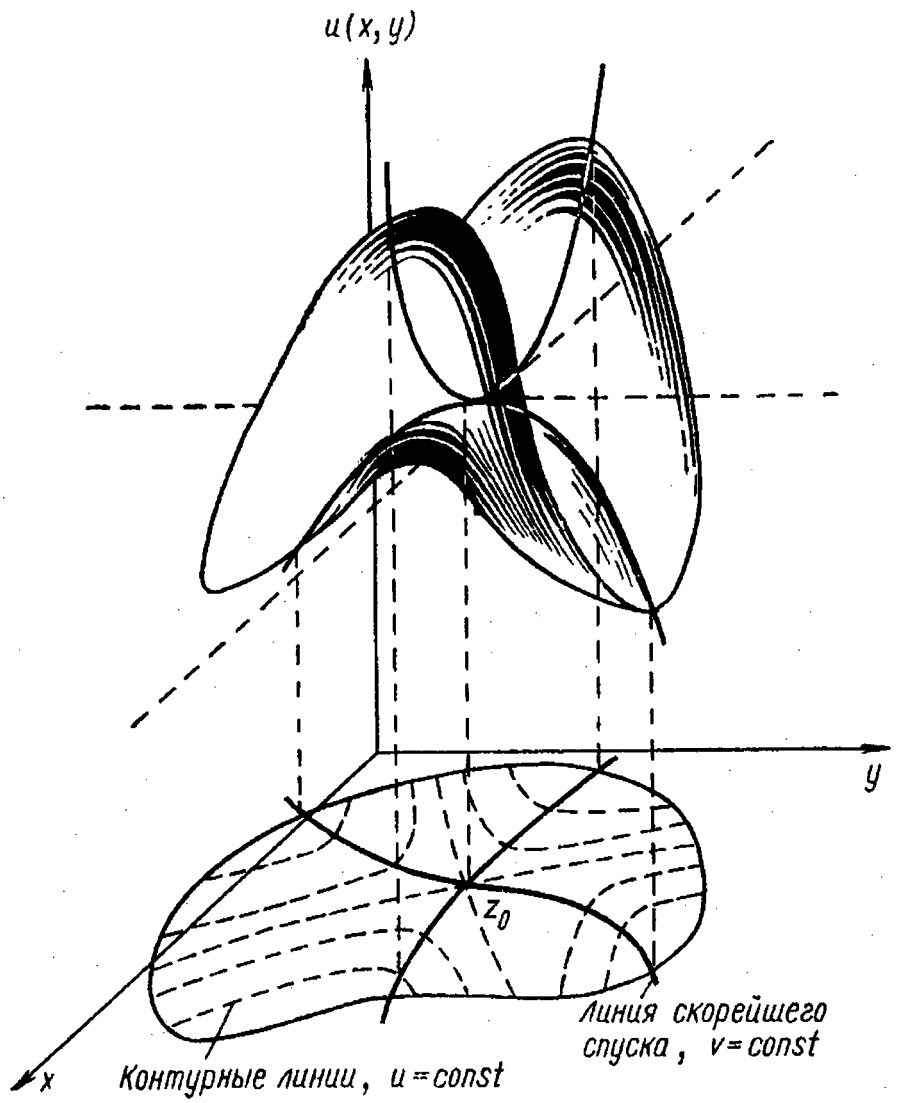


Рис. 7.14. Седловая точка.

В седловой точке $f(z)$ может быть разложена в ряд Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) \ldots \qquad (7.93)$$

В силу условия (7.91) здесь отсутствует первая производная. Первый поправочный член $(z - z_0)^2 f''(z_0)/2$ представляет собой вещественное отрицательное число. Последнее следует из того, что в соответствии с выбором контура мнимая часть сохраняет на нем постоянное значение,

а поскольку мы движемся по контуру вниз от седловой точки, то поправка отрицательна. Тогда, предполагая, что $f''(z_0) \neq 0$, получаем соотношение

$$f(z) - f(z_0) \approx \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) = -\frac{1}{2s} t^2, \qquad (7.94)$$

которое можно рассматривать как определение новой функции t. Если далее записать $z - z_0$ в полярной форме

$$z - z_0 = \delta e^{i\alpha} \qquad (7.95)$$

(где аргумент α остается постоянным), получаем

$$t^2 = -sf''(z_0)\,\delta^2 e^{2i\alpha}. \qquad (7.96)$$

Поскольку t вещественное*, можно записать

$$t = \pm\delta\,|sf''(z_0)|^{1/2}. \qquad (7.97)$$

Подставим (7.97) в уравнение (7.86):

$$I(s) \approx g(z_0)\, e^{sf(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \frac{dz}{dt}\, dt. \qquad (7.98)$$

Учитывая далее, что

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dt}{dz}\right)^{-1} = \left(\frac{dt}{d\delta}\frac{d\delta}{dz}\right)^{-1} = |sf''(z_0)|^{-1/2} e^{i\alpha}, \qquad (7.99)$$

приведем уравнение (7.98) к виду

$$I(s) \approx \frac{g(z_0)\, e^{sf(z_0)}\, e^{i\alpha}}{|sf''(z_0)|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt. \qquad (7.100)$$

Обратим внимание, что интегрирование здесь ведется от $-\infty$ до $+\infty$. Это вполне допустимо, так как подынтегральная функция по существу равна нулю при достаточно больших t. Полученный интеграл есть интеграл ошибок Гаусса. Окончательно,

$$I(s) \approx \frac{\sqrt{2\pi}\, g(z_0)\, e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{|sf''(z_0)|^{1/2}}. \qquad (7.101)$$

Аргумент α в уравнении (7.95) введен как аргумент контура, проходящего через седловую точку. Он выбран таким, чтобы

---

* Аргумент контура α в седловой точке выбирается из условия $\mathrm{Im}\,[f(z) - f(z_0)] = 0$, т. е. $(z - z_0)^2 f''(z_0)/2$ вещественно.

α было постоянно и $\mathrm{Re}\, f(z)$ — максимальна. Иногда контур последовательно проходит через две или более седловые точки. В этом случае необходимо учитывать дополнительный вклад от каждой седловой точки в общий интеграл.

Напомним о предположении, что существенный вклад в интеграл вносит только область, расположенная в непосредственной близости от седловой точки $z = z_0$, т. е. $\mathrm{Re}\,[f(z)] = u(x, y) \ll u(x_0 y_0)$ вдоль всего контура вдали

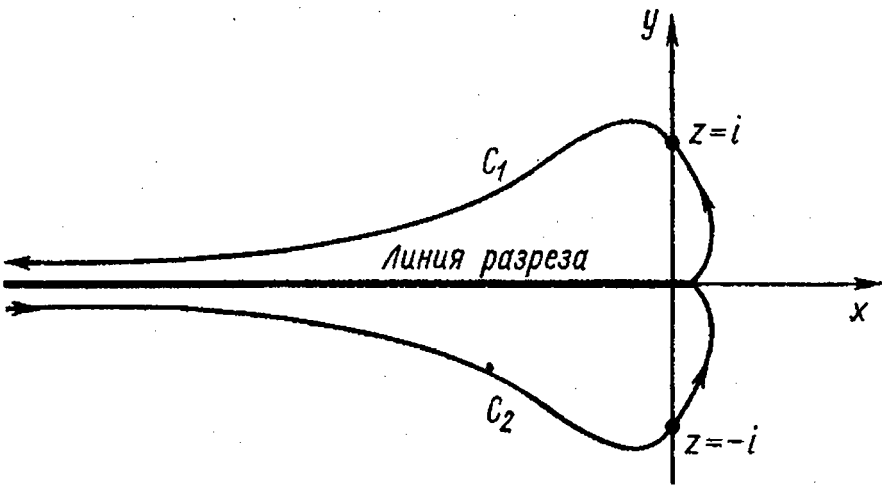


Рис. 7.15. Контуры интегрирования для функции Ханкеля.

от точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Это условие нужно проверять для каждой конкретной задачи.

В разд. 11.3 показывается, что функции Ханкеля, которые удовлетворяют уравнению Бесселя, можно представить интегралами

$$H_\nu^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{-\infty} e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \quad \text{по } C_1, \qquad (7.102а)$$

$$H_\nu^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{0} e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \quad \text{по } C_2, \qquad (7.102б)$$

контуры C_1 и C_2 представлены кривыми в верхней и нижней полуплоскостях (рис. 7.15). Применим метод перевала к первой из функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(s)$, которую удобно представить в форме интеграла (7.86), если

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right). \qquad (7.103)$$

Возьмем первую производную от $f(z)$:

$$f'(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2z^2}. \tag{7.104}$$

В соответствии с уравнением (7.91) из условия $f'(z)=0$ находим

$$z=i,\ -i. \tag{7.105}$$

Следовательно, седловые точки совпадают с точками $z=+i$ и $z=-i$. Интеграл (7.102 а) выбран так, что контур интегрирования выходит из начала координат по касательной в направлении положительной полуоси x, затем поворачивает в обратном направлении и, пройдя через седловую точку, асимптотически приближается к отрицательной вещественной полуоси. Можно выбрать линию интегрирования, проходящую через седловую точку $z=+i$, так, чтобы $\operatorname{Re}(z-1/z)$ была максимальной, а аргумент в окрестности седловой точки оставался постоянным. Вблизи седловой точки $z_0=+i$ можно записать

$$z-i=\delta e^{i\alpha}, \tag{7.106}$$

где δ — малое число. Тогда

$$2f(z)=z-\frac{1}{z}=\delta e^{i\alpha}+i-\frac{1}{\delta e^{i\alpha}+i}=$$

$$=\delta\cos\alpha+i(\delta\sin\alpha+1)-\frac{1}{\delta\cos\alpha+i(\delta\sin\alpha+1)}=$$

$$=\delta\cos\alpha+i(\delta\sin\alpha+1)-\frac{\delta\cos\alpha-i(\delta\sin\alpha+1)}{1+2\delta\sin\alpha+\delta^2}, \tag{7.107}$$

откуда

$$\operatorname{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\delta\cos\alpha-\delta\cos\alpha(1+2\delta\sin\alpha+\delta^2)^{-1}. \tag{7.108}$$

Учитывая, что δ мало, разложим с помощью биномиальной теоремы это выражение и отбросим в нем члены более высокого порядка, чем δ^3:

$$\operatorname{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right)=2\delta^2\cos\alpha\sin\alpha+O(\delta^3)\approx\delta^2\sin 2\alpha. \tag{7.109}$$

Мы замечаем, что $\operatorname{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ принимает экстремальное значение в экстремумах $\sin 2\alpha$, т. е. когда 2α равно $\pi/2$ или $3\pi/2$. Следовательно, аргумент α нужно брать равным $\pi/4$ или $3\pi/4$. О дна из этих возможностей даст путь самого

крутого подъема, который нужно отбросить. Чтобы различить эти возможные варианты, подставим указанные значения α в (7.109). Для $\alpha = \pi/4$

$$\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \delta^2, \tag{7.110}$$

тогда как для $\alpha = 3\pi/4$

$$\operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\delta^2. \tag{7.111}$$

Очевидно, первый вариант приводит к минимальному значению реальной части в седловой точке ($\delta = 0$), а второй — к максимальному. Следовательно, значение аргумента $\alpha = 3\pi/4$ определяет контур, проходящий через седловую точку и являющийся линией скорейшего спуска.

Непосредственная подстановка в формулу (7.101) дает явное выражение для искомой функции

$$H_\nu^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\, i^{-\nu-1} e^{(s/2)(i-1/i)} e^{i3\pi/4}}{|(s/2)(-2/i^3)|^{1/2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{(i\pi/2)(-\nu-2)} e^{is} e^{i3\pi/4}. \tag{7.112}$$

Комбинируя члены, окончательно получаем главную часть асимптотического разложения функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(s)$:

$$H_\nu^{(1)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{i\left(s - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{7.113}$$

В случае необходимости сюда могут быть добавлены дополнительные члены, которые определяются с помощью метода Стокса, рассмотренного в разд. 11.5.

Во многих физических задачах требуется приближенное значение факториала при очень больших аргументах. Факториал можно представить (см. разд. 10.1) интегралом

$$s! = \int_0^\infty \rho^s e^{-\rho}\, d\rho = s^{(s+1)} \int_0^\infty e^{s(\ln z - z)}\, dz. \tag{7.114}$$

В комплексной плоскости интеграл берется по контуру C. Для представления этого интеграла в форме, требуемой уравнением (7.86), сделаем в нем замену $\rho = zs$. Как и раньше, будем считать s вещественным и положительным, откуда сразу же следует, что подынтегральное выражение обращается в нуль на нижнем и верхнем пределах интегриро-

вания при 0 и ∞. Продифференцируем по z:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z - z) = \frac{1}{z} - 1. \tag{7.115}$$

Из этого соотношения следует, что $z = 1$ — седловая точка. Положим

$$z - 1 = \delta e^{i\alpha}, \tag{7.116}$$

где δ необходимо взять малым, как это требуется для определения контура вблизи седловой точки. Подставим это в $f(z)$ и разложим в ряд:

$$f(z) = \ln(1 + \delta e^{i\alpha}) - (1 + \delta e^{i\alpha}) =$$

$$= \delta e^{i\alpha} - \frac{1}{2}\delta^2 e^{2i\alpha} + \ldots - 1 - \delta e^{i\alpha} = -1 - \frac{1}{2}\delta^2 e^{2i\alpha}. \tag{7.117}$$

Из последнего выражения видно, что подынтегральная функция достигает максимума, равного e^{-s}, в седловой точке, если только в качестве контура C выбрать вещественную ось.

Непосредственная подстановка (7.117) в формулу (7.101) с $\alpha = 0$ дает

$$s! \approx \frac{\sqrt{2\pi}\, s^{s+1} e^{-s}}{|s(-1^{-2})|^{1/2}}. \tag{7.118}$$

Таким образом, первый член в асимптотическом разложении факториала имеет вид

$$s! \approx \sqrt{2\pi s}\, s^s e^{-s}. \tag{7.119}$$

Дополнительные члены асимптотического ряда рассмотрены в разд. 10.3. Формула (7.119) называется формулой Стирлинга. Здесь мы предполагали, что s вещественное. Однако это условие не является необходимым. Читатель может убедиться (см. упр. 4), что формула (7.119) верна и при замене s комплексной величиной w, при условии только, что $\mathrm{Re}\, w$ должна быть большой и положительной.

Упражнения

1. С помощью метода перевала оценить вторую функцию Ханкеля (7.102б).

Ответ: $H_\nu^{(2)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-i\left(s - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)}$.

2. Определить асимптотический вид функции Бесселя мнимого аргумента первого рода

$$I_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

Контур интегрирования начинается и заканчивается в точке $t=-\infty$, обходит в положительном направлении начало координат и проходит через две седловые точки.

Ответ: $I_\nu(x)\approx e^x/\sqrt{2\pi x}$.

3. Определить асимптотический вид функции Бесселя мнимого аргумента второго рода

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\frac{ds}{s^{1-\nu}}.$$

Ответ: $K_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$.

4. Доказать, что формула Стирлинга (7.119) справедлива и для комплексных s (при условии, что $\operatorname{Re} s$ велика и положительна). *Указание.* Для этого необходимо рассмотреть аргумент s, а затем потребовать, чтобы $\operatorname{Im} sf(z)$ оставалась постоянной вблизи седловой точки.

5. Показать, что $\operatorname{Re}[f(z)]<\operatorname{Re}[f(z_0)]=0$ для точки z, лежащей на контуре C_1 (см. рис. 7.19), но далекой от точки $z=z_0=i$.

Показать, что $f(z)\geqslant 0$ для $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant r\leqslant 1$, $\pi\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2$.

ГЛАВА 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

8.1. ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения широко используются в физике, причем в большинстве случаев — это дифференциальные уравнения в частных производных. Перечислим те из них, которые встречаются наиболее часто.

1. *Уравнение Лапласа* $\nabla^2\psi = 0$. Это общее и очень важное уравнение возникает при изучении электромагнитных явлений, гидродинамики (безвихревое течение идеальной жидкости), термодинамики и гравитации.

2. *Уравнение Пуассона* $\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0$.

3. *Волновое уравнение (уравнение Гельмгольца) и стационарное уравнение диффузии* $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$.

4. *Нестационарное уравнение диффузии* $\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}$

и соответствующие четырехмерные формы этого уравнения, содержащие даламбертиан, четырехмерный аналог лапласиана в пространстве Минковского:

$$\Box^2 = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{(ic)^2\,\partial t^2}\,.$$

5. *Нестационарное волновое уравнение* $\Box^2\psi = 0$.

6. *Уравнение скалярного потенциала* $\Box^2\psi = -\rho/\varepsilon_0$.

7. *Уравнение Клейна — Гордона* $\Box^2\psi = \mu^2\psi$ и соответствующие векторные уравнения, в которых скалярная функция ψ заменена векторной.

8. *Волновое уравнение Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

и модификация этого уравнения для стационарного случая

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi.$$

9. *Уравнения для упругих волн, вязких жидкостей и телеграфное уравнение.*

10. *Уравнения Максвелла и уравнение Дирака* для волновых функций релятивистского электрона. Их можно записать в форме

$$H\psi = F,$$

где $H\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, x, y, z\right)$ — дифференциальный оператор; F — известная функция; ψ — искомая скалярная векторная функция.

Перечисленные уравнения характеризуются двумя особенно важными свойствами.

1. Они линейны * относительно неизвестной функции ψ. Наиболее легкие физические и математические задачи имеют аналитическое решение. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений обычно привлекают численные методы, на которых мы не будем останавливаться.

2. Они относятся к типу дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения Максвелла и Дирака — уравнения первого порядка, но они содержат по две неизвестные функции. Замена одной функции другой приводит к дифференциальному уравнению второго порядка (см. разд. 1.9).

В теоретической физике встречаются уравнения более высокого порядка. В теории медленного движения вязкой жидкости и теории твердого тела возникает уравнение

$$(\nabla^2)^2 \psi = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\psi = 0.$$

Однако уравнения, подобные этому, встречаются сравнительно редко.

Перечислим теперь некоторые общие методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Разделение переменных. Этим методом мы пользовались уже в разд. 2.5. Его дальнейшее развитие дано в разд. 8.2. Метод разделения применим не во всех случаях, однако там, где им можно воспользоваться, он почти всегда является простейшим методом решения.

2. Метод функции Грина. Основные характерные особенности его приведены в разд. 8.6. Более детальное обсуждение этого метода дано в гл. 16.

* Определение линейности см. в разд. 2.5.

3. Другие аналитические методы решения, использующие, например, интегральные преобразования. Некоторые из методов этого типа рассмотрены в гл. 15.

4. Численные методы.

8.2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все уравнения математической физики, перечисленные в разд. 8.1, относятся к типу дифференциальных уравнений в частных производных. Первый метод решения таких уравнений, на котором мы остановимся, заключается в расщеплении дифференциального уравнения в частных производных от n переменных на n обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждая такая процедура разделения вносит произвольную константу разделения. Если первоначально имелось n переменных, то число таких постоянных будет равно $n - 1$, все они определяются из физических условий решаемой задачи.

Метод разделения переменных проиллюстрирован в разд. 2.5 на примере волнового уравнения, записанного в декартовых и сферических координатах. В сферической системе координат волновое уравнение

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{8.1}$$

приводит к уравнению с зависимостью от азимутального угла

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0, \tag{8.2}$$

в котором m^2 — постоянная разделения. Чтобы выяснить ограничения, которые наложены на эту постоянную, будем исходить из того, что φ — азимутальный угол в сферической системе координат. Если рассматривается классическая задача, мы потребуем, чтобы решение, зависящее от азимутального угла, было однозначным, т. е.

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{8.3}$$

Это эквивалентно требованию периодичности решения с периодом 2π (или кратным 2π) *. Следовательно, m — це-

* Это применимо и к большинству задач квантовой механики, однако в этом случае доказательство гораздо сложнее.

лое. Конкретный вид целых величин зависит от особенностей задачи. Эта проблема обсуждается в гл. 9.

Все координатные системы (см. гл. 2) допускают разделение волнового уравнения и уравнения Гельмгольца на обыкновенные дифференциальные уравнения. * Рассматривая поочередно каждую из этих четырнадцати систем, можно заметить, что во всех них разделенные обыкновенные дифференциальные уравнения в значительной мере дублированы. В любой из этих систем зависимость от координаты, соответствующей оси сдвига, или от азимутального угла в разделенных уравнениях всегда для азимутального угла выражается в форме

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi)$$

и для переменной z

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \pm a^2 Z(z), \tag{8.4}$$

соответствующей оси сдвига в одной из цилиндрических систем координат. Решения последнего уравнения имеют форму $\sin az$ и $\cos az$ для отрицательной правой части и $\operatorname{sh} az$ и $\operatorname{ch} az$ для положительной.

Часто приходится иметь дело с уравнением Лежандра

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta=0,\\ (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dx}{dy}+l(l+1)y=0\end{gathered} \tag{8.5}$$

и присоединенным уравнением Лежандра

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta=0,\\ (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y-\frac{m^2}{1-x^2}y=0\ **.\end{gathered} \tag{8.6}$$

Эти уравнения получаются после записи ∇^2 в сферических координатах (см. разд. 2.5). Координаты сплющенного

---

* Система биполярных координат и системы тороидальных и бисферических координат являются исключением. Они рассматривались только для того, чтобы показать, как специальные системы координат можно использовать при решении некоторых задач.

** Здесь мы имеем две эквивалентные алгебраические формы, в которых $x = \cos\theta$.

и вытянутого сфероидов также приводят к уравнениям Лежандра.

Третье очень распространенное уравнение называется уравнением Бесселя

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)\,y=0. \tag{8.7}$$

В разд. 2.5 и 2.6 мы убедились, что использование сферической и круговой цилиндрической систем координат приводит к различным формам уравнения Бесселя. Разделяя переменные в уравнении Лапласа в параболических координатах, мы также придем к уравнению Бесселя. Необходимо заметить, что существует множество разновидностей этого уравнения *.

Другой тип обыкновенных дифференциальных уравнений, к которому относится уравнение Лагерра и присоединенное уравнение Лагерра, связан с исключительно важной в квантовой механике проблемой атома водорода:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0, \tag{8.8}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+k-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0. \tag{8.9}$$

В квантовой теории линейного осциллятора получается уравнение Эрмита

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2\alpha y=0. \tag{8.10}$$

Наконец, довольно часто приходится сталкиваться с дифференциальным уравнением Чебышева

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0. \tag{8.11}$$

Перечисленные обыкновенные дифференциальные уравнения и два более общих типа, включающих эти уравнения, исследованы и систематизированы в следующем разделе. Общие свойства, вытекающие из формы дифференциальных уравнений, обсуждаются в гл. 10.

---

* Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Изд. 3. М., Физматгиз, 1959.

Упражнения

1. Убедиться, что после разделения переменных в уравнении Лапласа в системе координат вытянутого сфероида (см. разд. 2.10) зависимость от u и v описывается уравнением Лежандра; после разделения переменных в системе координат сплющенного сфероида (разд. 2.11) зависимость от переменной v описывается уравнением Лежандра, а от переменной u — уравнением Лежандра мнимого аргумента (*замечание*: $\operatorname{ch} ix = i\cos x$, $\operatorname{sh} ix = i\sin x$); после разделения переменных в параболических координатах (см. разд. 2.12) зависимость от переменной ξ описывается уравнением Бесселя, а от переменной η — уравнением Бесселя мнимого аргумента. (Уравнение по переменной η идентично уравнению из разд. 11.4 для функций Бесселя мнимого аргумента.)

2. Одномерное волновое уравнение Шредингера для частицы в потенциальном поле $V = kx^2/2$ имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi(x).$$

Делая подстановку $\xi = ax$, показать, что

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2}+(\lambda-\xi^2)\psi(\xi) = 0,$$

где $a=\left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}$; $\lambda=\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$. Подставив искомую функцию в виде $\psi(\xi) = y(\xi)\,e^{-\xi^2/2}$, показать, что $y(\xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Эрмита.

3. Показать, что уравнение Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ в полярных координатах имеет решение

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\rho^n + b_n\rho^{-n})\,e^{\pm in\varphi},$$

где a_n и b_n — некоторые постоянные.

4. Показать, что одномерное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}$$

имеет решение

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos(nx+\varphi_n)\,e^{-a^2n^2t},$$

где c_n и φ_n — некоторые постоянные.

8.3. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Введем понятие *особой точки*, или *особенности* (применительно к дифференциальному уравнению). Значение, которое придается особым точкам, связано с классификацией

дифференциальных уравнений и с исследованием возможности получить решение уравнения в виде ряда (разд. 8.4).

Во всех обыкновенных дифференциальных уравнениях, перечисленных в разд. 8.2, можно выделить член d^2y/dx^2. Обозначая $d^2y/dx^2 = y''$, можно записать

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (8.12)$$

Теперь, если в уравнении (8.12) y и y' могут принимать любые конечные значения при $x = x_0$, а вторая производная y'' остается конечной, точка $x = x_0$ называется обыкновенной. Если же y'' становится бесконечной при любых конечных y и y', точка $x = x_0$ называется *особой* точкой.

Определить особую точку можно иначе. Запишем дифференциальное уравнение в форме

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0. \qquad (8.13)$$

Теперь, если функции $P(x)$ и $Q(x)$ остаются конечными в точке $x = x_0$, то она называется *обыкновенной*. Однако если либо $P(x)$, либо $Q(x)$ (или обе вместе) расходятся, когда $x \to x_0$, то точка x_0 называется *особой*.

Запись дифференциального уравнения в форме (8.13) позволяет различать два типа особых точек.

1. Если $P(x)$ или $Q(x)$ расходятся при $x \to x_0$, но произведения $(x - x_0)\, P(x)$ и $(x - x_0)^2 Q(x)$ остаются при этом конечными, то точка $x = x_0$ называется *регулярной особой* точкой или *несущественной особенностью*.

2. Если $P(x)$ расходится быстрее, чем $1/(x - x_0)$, так что произведение $(x - x_0)\, P(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, либо $Q(x)$ расходится быстрее, чем $1/(x - x_0)^2$, так что $(x - x_0)^2 Q(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то точка $x = x_0$ называется *нерегулярной особой* точкой или *существенной особенностью*.

Эти определения справедливы для любых конечных x_0. Анализ точки $x \to \infty$ подобен исследованию функции комплексного переменного (см. разд. 6.5). Нужно положить $x = 1/z$, подставить в дифференциальное уравнение, а затем сделать предельный переход $z \to 0$. Делая замену независимой переменной и производных, получаем

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy(z^{-1})}{dz} = -z^2 \frac{dy(z^{-1})}{dz}, \qquad (8.14)$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]\frac{dz}{dx} = (-z)^2\left[-2z\frac{dy(z^{-1})}{dz} - z^2\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}\right] =$$

$$= 2z^3\frac{dy(z^{-1})}{dz} + z^4\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}. \qquad (8.15)$$

С помощью этих результатов преобразуем уравнение (8.13)

$$z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + [2z^3 - z^2P(z^{-1})] \frac{dy}{dz} + Q(z^{-1})\, y = 0. \quad (8.16)$$

Поведение в точке $x = \infty$ $(z = 0)$ зависит теперь от новых коэффициентов $\frac{2z^3 - z^2P(z^{-1})}{z^4}$ и $\frac{Q(z^{-1})}{z^4}$ при $z \to 0$. Если обе эти величины остаются конечными, то точка $x = \infty$ называется обыкновенной. Если они расходятся, но не быстрее чем $1/z$ и $1/z^2$ соответственно, то точка $x = \infty$ является регулярной особой точкой, в противном случае она будет нерегулярной особой точкой (существенная особенность).

Пример. Запишем уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0. \quad (8.17)$$

Сравнивая его с уравнением (8.13), видим, что $P(x) = 1/x$, $Q(x) = 1 - n^2/x^2$, т. е. точка $x = 0$ — регулярная особая точка. Проверкой можно убедиться, что других особенностей в ограниченной области нет. При $x \to \infty$ $(z \to 0)$ нужно исследовать поведение коэффициентов уравнения (8.16) $\frac{2z^3 - z^2 \cdot z}{z^4}$ и $\frac{1 - n^2z^2}{z^4}$. Последнее выражение расходится, как $1/z^4$, поэтому в точке $x = \infty$ имеется существенная особенность.

Особые точки некоторых наиболее важных обыкновенных дифференциальных уравнений приведены в табл. 8.1. Как видно, первые три уравнения — гипергеометрическое, Лежандра и Чебышева — имеют три регулярные особые точки. Гипергеометрическое уравнение с особенностями в точках 0,1 и ∞ может рассматриваться как основное, оно называется каноническим уравнением. Решения двух других в таком случае выражаются через гипергеометрические функции, которые являются решением первого уравнения (см. гл. 13).

Точно так же вырожденное гипергеометрическое уравнение можно считать канонической формой линейного дифференциального уравнения второго порядка с одной регулярной и одной нерегулярной особой точками. Вообще говоря, вырожденное гипергеометрическое уравнение можно рас-

Таблица 8.1

Уравнение	Регулярная особенность	Нерегулярная особенность
Гипергеометрическое $x(x-1)y''+[(1+a+b)x-c]y'+aby=0$	$0, 1, \infty$	—
Лежандра * $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$	$-1, 1, \infty$	—
Чебышева $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$	$-1, 1, \infty$	—
Вырожденное гипергеометрическое $xy''+(c-x)y'-ay=0$	0	∞
Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$	0	∞
Лагерра * $xy''+(1-x)y'+ay=0$	0	∞
Гармонического осциллятора $y''+\omega^2y=0$	—	∞
Эрмита $y''-2xy'+2\alpha y=0$	—	∞

* Присоединенные уравнения имеют те же самые особые точки.

сматривать как частный случай гипергеометрического:

$$x(x-1)y''+[(1+a+b)x-c]y'+aby=0. \quad (8.18)$$

Полагая $bx=z$, получаем

$$\frac{z}{b}\left(\frac{z}{b}-1\right)b^2\frac{d^2y}{dz^2}+\left[(1+a+b)\frac{z}{b}-c\right]b\frac{dy}{dz}+aby=0.$$

Поделим это уравнение на b, тогда

$$z\left(\frac{z}{b}-1\right)\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\frac{(1+a)z}{b}+z-c\right]\frac{dy}{dz}+ay=0.$$

Если же перейти к пределу $b\to\infty$, то

$$-z^2\frac{d^2y}{dz^2}-(c-z)\frac{dy}{dz}+ay=0, \quad (8.19)$$

что с точностью до множителя -1 совпадает с вырожденным гипергеометрическим уравнением. Проведенное преобразование приводит к слиянию (вырождению) двух регулярных особенностей в точках $x=0$ и 1 и возникновению одной особенности в точке $z=0$ и превращению регулярной особенности на бесконечности в нерегулярную.

Упражнения

1. Показать, что уравнение Лежандра имеет регулярные особенности в точках $x = -1$, 1 и ∞.

2. Показать, что аналогично уравнению Бесселя уравнение Лагерра имеет регулярную особенность в точке $x = 0$ и нерегулярную в точке $x = \infty$.

3. Показать, что подстановка $x \to (1-x)/2$, $a = -l$, $b = l+1$, $c = 1$ сводит гипергеометрическое уравнение к уравнению Лежандра.

4. Оператор момента количества движения в квантовой механике задается в виде $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$. Показать, что операция $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}\psi = l(l+1)\psi$ приводит к присоединенному уравнению Лежандра.

8.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ РЯДА. МЕТОД ФРОБЕНИУСА

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в форме

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x), \tag{8.20}$$

где $F(x)$ описывает источник (например, электростатический заряд) или вынуждающую силу (в случае осциллятора, который совершает колебания под действием некоторой силы). При $F(x) \neq 0$ уравнение (8.20) называют неоднородным. Решение неоднородных уравнений рассмотрено в разд. 8.6, 15.10 и в гл. 16. Здесь же будем предполагать, что дифференциальное уравнение однородное, т. е. $F(x) = 0$.

Попытаемся получить решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами. Кроме того, в качестве параметра зададим показатель степени низшего нулевого члена этого ряда. Применим указанный метод к двум важным дифференциальным уравнениям. Для линейного осцилляторного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \tag{8.21}$$

решения известны: они имеют вид $y = \sin \omega x$, $\cos \omega x$. Положим,

$$y(x) = x^k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}, \quad a_0 \neq 0, \tag{8.22}$$

где показатель степени k и все коэффициенты a_λ пока неизвестны. Дифференцируя дважды, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2}.$$

Подставим полученные производные в уравнение (8.21):

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \omega^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \quad (8.23)$$

На основании единственности степенного ряда (см. гл. 5) коэффициенты при каждой степени x в левой части уравнения (8.23) должны каждый в отдельности равняться нулю. Член с низшей степенью x в уравнении (8.23) возникает в первой сумме; если положить $\lambda = 0$, этот член содержит x^{k-2}. Итак, $a_0 k(k-1) = 0$. Постоянная a_0 выбрана в качестве коэффициента при первом неисчезающем члене с низшей степенью x в уравнении (8.22); таким образом, по определению, $a_0 \neq 0$. Поэтому

$$k(k-1) = 0. \quad (8.24)$$

Это уравнение, полученное с помощью коэффициента при низшей степени x, мы назовем определяющим. Определяющее уравнение и его корни имеют решающее значение для всего дальнейшего анализа. Очевидно, в данном примере нужно потребовать, чтобы $k = 0$ или $k = 1$.

Прежде чем рассмотреть возможные значения k, возвратимся к уравнению (8.23) и потребуем, чтобы оставшиеся коэффициенты, скажем коэффициенты при x^{k+j} $(j \geqslant 0)$, обращались в нуль. Положим, $\lambda = j+2$ в первой сумме и $\lambda = j+1$ во второй. (Суммирование в них производится независимо, а λ есть немой индекс.) В результате получим $a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1) + \omega^2 a_j = 0$ или

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)}. \quad (8.25)$$

Это соотношение отражает рекуррентную связь между двумя коэффициентами. По заданному a_j можно определить a_{j+2},

а затем a_{j+4}, a_{j+6} и т. д. до требуемого коэффициента. Читатель, конечно, обратил внимание, что для этого примера, если только начать с коэффициента a_0, уравнение (8.25) позволяет определить коэффициенты только с четными индексами a_2, a_4 и т. д., тогда как коэффициенты a_1, a_3, a_5 остаются неопределенными. Поскольку можно по своему усмотрению распорядиться произвольным коэффициентом a_1, положим его равным нулю, откуда с помощью (8.25) получим $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$, т. е. все коэффициенты при нечетных степенях исчезают. Однако это не должно вызывать беспокойства, поскольку мы должны получить решение, а не возможно большее число коэффициентов.

Возвращаясь к исходному уравнению (8.24), мы сначала остановимся на одном из значений $k = 0$. Для этого случая рекуррентное соотношение (8.25) примет вид

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)}, \tag{8.26}$$

откуда $a_2 = -\frac{\omega^2}{2!} a_0$, $a_4 = \frac{\omega^4}{4!} a_0$, ... Методом математической индукции получим

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0. \tag{8.27}$$

Теперь решение имеет вид

$$y(x)_{k=0} = a_0 \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \ldots\right] = a_0 \cos \omega x. \tag{8.28}$$

Если в качестве корня, определяющего уравнения, выбрать значение $k = 1$, то рекуррентная формула запишется иначе:

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)}. \tag{8.29}$$

Подставляя сюда последовательно $j = 0, 2, 4$, получаем

$$a_3 = -\frac{\omega^2}{3!} a_0, \quad a_4 = \frac{\omega^4}{5!} a_0, \quad \ldots,$$

откуда снова можем записать, что

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0. \tag{8.30}$$

При таком выборе k получаем

$$y(x)_{k=1} = a_0 x\left[1 - \frac{(\omega x)^2}{3!} + \frac{(\omega x)^4}{5!} - \frac{(\omega x)^6}{7!} + \dots\right] =$$

$$= \frac{a_0}{\omega}\left[(\omega x) - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \dots\right] = \frac{a_0}{\omega}\sin\omega x. \quad (8.31)$$

Метод подстановки ряда, называемый методом Фробениуса, позволяет получить два решения уравнения линейного осциллятора в виде ряда. Однако в связи с таким представлением решения дифференциального решения следует особенно подчеркнуть следующее:

1. Решение, полученное в виде ряда, нужно всегда проверять подстановкой в уравнение, чтобы не возникало алгебраических и логических ошибок. Если после подстановки уравнение тождественно удовлетворяется, то найденный ряд будет решением.

2. Возможность представления решения рядом зависит от его сходимости (включая асимптотическую сходимость). Указанный метод вполне допускает, что можно получить ряд, который удовлетворяет дифференциальному уравнению, но расходится в интересующей нас области. Примером такого поведения может служить дифференциальное уравнение Лежандра.

Читатель, безусловно, отметит, что мы получили одно симметричное решение $y_1(x) = y_1(-x)$ и одно антисимметричное $y_2(x) = -y_2(-x)$. Это произошло не случайно, а явилось прямым следствием формы дифференциального уравнения. Записав дифференциальное уравнение в общем виде

$$\mathcal{L}(x)\,y(x) = 0, \quad (8.32)$$

где $\mathcal{L}(x)$ — дифференциальный оператор, мы видим, что для линейного осцилляторного уравнения (8.21) оператор $\mathcal{L}(x)$ — четный, т. е.

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x). \quad (8.33)$$

Всякий раз, когда дифференциальный оператор обладает определенной четностью, четной или нечетной, или симметрией, можно поменять местами $+x$ и $-x$, а уравнение (8.32) переписать так:

$$\pm\mathcal{L}(x)\,y(-x) = 0, \quad (8.34)$$

причем берется знак плюс, если оператор $\mathscr{L}(x)$ четный, и знак минус, если нечетный. Очевидно, если $y(x)$ — решение дифференциального уравнения, то и $y(-x)$ тоже будет решением. В таком случае любое решение можно разложить на четную и нечетную части:

$$y(x)=\frac{1}{2}[y(x)+y(-x)]+\frac{1}{2}[y(x)-y(-x)]. \quad (8.35)$$

Здесь первая скобка справа дает четное решение, а вторая — нечетное.

Отметим, что дифференциальные уравнения (или дифференциальные операторы) Лежандра, Чебышева, Бесселя, Эрмита и простого гармонического осциллятора являются четными. Решение каждого из этих уравнений может быть представлено рядом по четным и рядом по нечетным степеням x. Дифференциальный оператор Лагерра не имеет определенной симметрии, поэтому и его решение не будет характеризоваться четными или нечетными свойствами.

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \quad (8.36)$$

где $y'=dy/dx$, а $y''=d^2y/dx^2$. Снова будем искать решение в форме $y(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}$. Продифференцируем и подставим этот ряд в уравнение (8.36):

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda}+$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda+2}-\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda n^2x^{k+\lambda}=0. \quad (8.37)$$

Положим $\lambda=0$, тогда, приравняв нулю коэффициент при низшей степени x^k в левой части уравнения, получим

$$a_0[k(k-1)+k-n^2]=0, \quad (8.38)$$

снова, по определению, $a_0\neq 0$. Следовательно, из последнего выражения получится определяющее уравнение

$$k^2-n^2=0 \quad (8.39)$$

корнями $k=\pm n$.

Исследуем коэффициент при x^{k+1}. В этом случае $a_1 [k(k+1) + k + 1 - n^2] = 0$, или

$$a_1 (k + 1 - n)(k + 1 + n) = 0 \qquad (8.40)$$

при $k = \pm n$ ни $k + 1 - n$, ни $k + 1 + n$ не могут обращаться в нуль, поэтому мы должны потребовать, чтобы $a_1 = 0$ *.

Переходя к коэффициенту при x^{k+j}, где $k = n$, мы положим $\lambda = j$ в первом, втором и четвертом членах уравнения (8.37) и $\lambda = j - 2$ — в третьем члене. Вновь потребуем равенства нулю коэффициента при x^{k+j}:

$$a_j [(n + j)(n + j - 1) + (n + j) - n^2] + a_{j-2} = 0.$$

Сделав замену $j \to j + 2$, получим рекуррентную формулу

$$a_{j+2} = -a_j \frac{1}{(j+2)(2n+j+2)}. \qquad (8.41)$$

Использование этой формулы приводит к следующим значениям коэффициентов:

$$a_2 = -a_0 \frac{1}{2(2n+2)} = -\frac{a_0 n!}{2^2 1!(n+1)!},$$

$$a_4 = -a_2 \frac{1}{4(2n+4)} = +\frac{a_0 n!}{2^4 2!(n+2)!},$$

$$a_6 = -a_4 \frac{1}{6(2n+6)} = -\frac{a_0 n!}{2^6 3!(n+3)!} \text{ и т. д.},$$

и в общем виде

$$a_p = (-1)^{p/2} \frac{a_0 n!}{2^p (p/2)!(n+p/2)!}, \quad p \text{ — четное}. \qquad (8.42)$$

Подставим эти коэффициенты в предполагаемое решение

$$y(x) = a_0 x^n \left[1 - \frac{n!\,x^2}{2^2 1!(n+1)!} + \frac{n!\,x^4}{2^4 2!(n+2)!} - \ldots\right]. \qquad (8.43)$$

Если положить $2j = p$, то решение примет вид:

$$y = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!\,x^{n+2j}}{2^{2j} j!(n+j)!} =$$

$$= a_0 2^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}. \qquad (8.44)$$

* Исключение составляют значения $k = \pm n = -1/2$.

В гл. 11 последняя сумма отождествлена с функцией Бесселя $J_n(x)$. Заметим, что это решение $J_n(x)$ не имеет определенной симметрии *, как это и можно было ожидать из формы уравнения Бесселя.

Когда $k = -n$, а само n — нецелое, мы можем образовать второй специальный ряд, обозначаемый символом $J_{-n}(x)$. Однако при n целом и отрицательном возникают затруднения. Рекуррентное соотношение для коэффициентов a_j по-прежнему задано формулой (8.41), в которой $2n$ заменено $-2n$. Тогда если $j + 2 = 2n$ или $j = 2(n-1)$, то коэффициенты a_{j+2} не определены и нельзя образовать ряда, который был бы решением уравнения. В гл. 11 будет получено соотношение

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \text{ — целое.} \tag{8.45}$$

Второе решение просто повторяет первое. Таким образом, при целом n мы не можем построить второе независимое решение уравнения Бесселя, используя метод Фробениуса.

Но с помощью этого метода удалось получить два решения дифференциального уравнения линейного осциллятора и только одно решение уравнения Бесселя (два, если n — нецелое). Таким образом, этот метод работает не всегда, поскольку представить решение уравнения рядом не всегда возможно. Успех или неудача применения этого метода зависит от корней определяющего уравнения и характера особенностей коэффициентов дифференциального уравнения. Для более ясного представления о том, какое влияние оказывают коэффициенты, рассмотрим четыре простых уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(а)}\ y'' - \frac{6}{x^2}y = 0, \quad \text{(б)}\ y'' - \frac{6}{x^3}y = 0, \\ &\text{(в)}\ y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0, \\ &\text{(г)}\ y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.46}$$

Легко убедиться, что для (8.46а) определяющим уравнением является $k^2 - k - 6 = 0$, откуда $k = 3, -2$. Поскольк-

* Функция $J_n(x)$ четная, если n — четное целое число, и нечетная, если n — нечетное целое. Для нецелых n функция x^n не имеет такой простой симметрии.

ку дифференциальное уравнение однородно по x (d^2/dx^2 рассматривается как x^{-2}), для него нельзя получить рекуррентного соотношения; $a_i = 0$ для $i > 0$. Однако остаются два вполне подходящих решения, x^3 и x^{-2}. Уравнение (8.46б) отличается от уравнения (8.46а) только одной степенью x, но это приводит к определяющему уравнению вида $-6a_0 = 0$, что противоречит исходному предположению, ибо, по предположению, $a_0 \neq 0$. Подстановка ряда была возможна для уравнения (8.46а), которое имеет только регулярную особенность, но для уравнения (8.46б) с нерегулярной особенностью в начале координат она не подходит.

В уравнении (8.46в) добавлен член y'/x. Определяющее уравнение имеет вид $k^2 - a^2 = 0$, но с его помощью снова нельзя получить рекуррентной формулы. Очевидно, оба решения уравнения (8.46в) $y = x^a$, x^{-a} могут рассматриваться как один из членов ряда.

Изменение показателя степени x в коэффициенте при y' в уравнении (8.46г) от -1 до -2 приводит к коренным изменениям в решении. Определяющее уравнение (с вкладом только от члена y') имеет вид $k = 0$, а рекуррентное соотношение записывается так:

$$a_{j+1} = -a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1}.$$

Вообще говоря,

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j\to\infty} \frac{j(j-1)}{j+1} = \lim_{j\to\infty} \frac{j^2}{j} = \infty,$$

следовательно, ряд, который представляет решение исходного уравнения, расходится (только специальным подбором a можно ограничить ряд). Здесь снова метод представления решения в виде ряда (метод Фробениуса) оказался неподходящим, как только особенность уравнения (8.46г) стала нерегулярной.

Теорема Фукса. *В окрестности обыкновенной или, в худшем случае, регулярной особой точки можно получить по крайней мере одно решение, представленное степенным рядом.* Эта теорема отвечает на вопрос, когда метод Фробениуса оказывается успешным. Разложение вблизи нерегулярной или существенно особой точки, как показано в уравнениях (8.46б) и (8.46г), не приводит к нужному

результату. К счастью, большинство важных уравнений математической физики, перечисленных в разд. 8.3, не имеют нерегулярных особенностей в конечной области.

От корней определяющего уравнения зависит, сколько независимых решений можно получить методом Фробениуса.

1. Если два корня определяющего уравнения равны друг другу, то решение, представимое в виде ряда, одно.

2. Если два корня отличаются друг от друга на нецелое число, то можно получить два независимых решения.

3. Если два корня отличаются друг от друга на целое число, то бо́льший из них определяет решение. Получение решения с помощью меньшего корня зависит от поведения коэффициентов. Так, уравнение линейного осциллятора имеет два решения, а уравнение Бесселя — только одно.

Упражнения

При решении упражнений использовать метод Фробениуса.

1. Решить уравнение Лежандра (см. табл. 8.1). Показать, что $k(k-1)=0$ — определяющее уравнение. Получить ряд по четным степеням x ($c=0$, $a_1=0$):

$$y_{\text{чет}}=a_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\ldots\right],$$

где

$$a_{j+2}=\frac{j(j+1)-n(n+1)}{(j+1)(j+2)}a_j;$$

и ряд по нечетным степеням x ($k=1$, $a_1=0$)

$$y_{\text{неч}}=a_0\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\ldots\right]$$

где

$$a_{j+2}=\frac{(j+1)(j+2)-n(n+1)}{(j+2)(j+3)}a_j.$$

Показать, что оба решения расходятся в точках $x=\pm 1$, если в полученных рядах взять бесконечное число членов.

Показать, что при соответствующем выборе один ряд может быть превращен в полином, в результате чего решение нерасходящееся.

2. Получить решение гипергеометрического уравнения (8.18). Исследовать сходимость решения.

3. Получить два независимых решения вырожденного гипергеометрического уравнения (см. табл. 8.1). Исследовать сходимость рядов.

4. Получить два решения дифференциального уравнения Эрмита (см. табл. 8.1).

Ответ: Определяющее уравнение $k(k-1)=0$.

Для $k=0$, $a_{j+2}=2a_j\dfrac{j-\alpha}{(j+1)(j+2)}$ (j — четное)

$$y_{\text{чет}}=a_0\left[1+\frac{2(-\alpha)x^2}{2!}+\frac{2^2(-\alpha)(2-\alpha)x^4}{4!}+\dots\right]$$

Для $k=1$, $a_{j+2}=2a_j\dfrac{j+1-\alpha}{(j+2)(j+3)}$ (j — четное)

$$y_{\text{неч}}=a_0\left[x+\frac{2(1-\alpha)x^3}{3!}+\frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)x^5}{5!}+\dots\right].$$

Показать, что оба ряда сходятся и ведут себя аналогично разложению для функции e^{x^2}. Показать, что соответствующим выбором α найденные решения можно упростить и превратить в полиномы с конечным числом членов. Эти полиномы, нормированные соответствующим образом, называются полиномами Эрмита (разд. 13.1).

5. Квантовый анализ эффекта Штарка (в параболической системе координат) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{du}{d\xi}\right)+\left(\frac{1}{2}E\xi+\alpha-\frac{m^2}{4\xi}-\frac{1}{4}F\xi^2\right)u=0,$$

где α — константа разделения; E — полная энергия; F — постоянная, которая входит в выражение для потенциальной энергии Fz, добавляемой к системе при включении электрического поля.

Используя наибольший из корней определяющего уравнения, получить решение в окрестности точки $\xi=0$ в виде степенного ряда. Выразить первые три коэффициента через a_0.

Ответ: Определяющее уравнение $k^2-m/4=0$,

$$u(\xi)=a_0\xi^{m/2}\left\{1-\frac{\alpha}{m+1}\xi+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)}-\frac{E}{4(m+2)}\right]\xi^2+\dots\right\}.$$

Заметим, что возмущение F никак не проявляется, пока мы не учитываем a_3.

6. В частном случае отсутствия азимутальной зависимости квантовомеханическое рассмотрение молекулярного иона водорода приводит к уравнению (см. разд. 2.10)

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right]+\alpha u+\beta\eta^2u=0.$$

Получить функцию $u(\eta)$ в виде степенного ряда. С помощью a_0 вычислить первые три неисчезающих коэффициента.

Ответ: Определяющее уравнение $k(k-1)=0$,

$$u_{k=1}=a_0\eta\left\{1+\frac{2-\alpha}{6}\eta^2+\left[\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120}-\frac{\beta}{20}\right]\eta^4+\dots\right\}.$$

7. С хорошим приближением взаимодействие двух ядер можно описать потенциалом мезонных сил $V=Ae^{-ax}/x$, притяжению соответствует отрицательное A. Решить волновое уравнение Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+(E-V)\,\psi=0.$$

Получить первые три ненулевых коэффициента.

Ответ: $\psi_{k=1}=a_0\left\{x+\frac{1}{2}A'x^2+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}A'^2-E'-\alpha A'\right]x^3+\ldots\right\}$, где штрих означает умножение на $2m/\hbar^2$.

8. Вблизи ядра сложного атома потенциальная энергия одного электрона записывается как $V=(Ze^2/r)(1+b_1r+b_2r_2)$, где коэффициенты b_1 и b_2 описывают действие экранировки. Показать, что в случае ненулевого момента количества движения первые три члена решения уравнения Шредингера имеют ту же формулу, что и соответствующие члены в упр. 7. С помощью преобразования коэффициентов или параметров записать первые три члена в разложении волновой функции.

9. Решить дифференциальное уравнение

$$(1-x^2)\,U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)\,U_n(x)=0,$$

выбрав такой корень определяющего уравнения, чтобы решение представляло собой ряд по нечетным степеням x. Поскольку ряд будет расходящимся в точке $x=1$, подбором n превратить его в полином.

Ответ: $k(k-1)=0$. При $k=1$ $a_{j+2}=\dfrac{(j+1)(j+3)-n(n+2)}{(j+2)(j+3)}a_j$.

10. Построить решение дифференциального уравнения Лагерра (см. табл. 8.1), а затем подобрать параметр n так, чтобы получить из этого ряда полином.

11. Решить уравнение Чебышева (см. табл. 8.1). Каким условиям должен удовлетворять параметр n, если потребовать, чтобы найденный ряд сходился при $x=+1$?

8.5. ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ

В разд. 8.4 методом Фробениуса мы получили решение однородного дифференциального уравнения второго порядка. Мы установили, что в соответствии с теоремой Фукса такое представление решения возможно в окрестности обыкновенной или несущественно особой точки *. Однако нет гарантии, что этот метод позволит получить оба независимых решения, которые должны существовать в случае дифференциального уравнения второго порядка. Более того, с помощью этого метода мы смогли найти только одно решение уравнения Бесселя (при n целом). Изложим теперь

* Классификация особенностей в разд. 8.3 имеет исключительно важное значение.

два метода получения второго независимого решения: интегральный метод и метод разложения в степенной ряд, содержащий логарифмический член. Однако сначала рассмотрим вопрос о независимости системы функций.

Линейная независимость решений. Пусть задана система функций φ_λ. Будем считать ее *линейно зависимой*, если в соотношении

$$\sum k_\lambda \varphi_\lambda = 0 \tag{8.47}$$

не все k_λ равны нулю. Если соотношение (8.47) имеет место лишь когда k_λ равны нулю, то система функций φ_λ называется *линейно независимой*.

Предположим, что функции φ_λ дифференцируемы нужное число раз. Тогда, продифференцировав соотношение (8.47), получим систему уравнений

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi'_\lambda = 0, \tag{8.48}$$

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi''_\lambda = 0, \quad \ldots \tag{8.49}$$

Таким образом, получилась система однородных линейных уравнений с неизвестными коэффициентами k_λ. Решение этой системы отлично от нуля $k_\lambda \neq 0$ в том, и только том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при k_λ, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \ldots & \varphi'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0. \tag{8.50}$$

Определитель (8.50) называется *определителем Вронского*.

1. Если определитель Вронского не равен нулю, то уравнение (8.47) не имеет иного решения, кроме $k_\lambda = 0$. Следовательно, φ_λ образуют систему независимых функций.

2. Если определитель Вронского обращается в нуль при некоторых изолированных значениях аргумента, то это не обязательно означает линейную зависимость. Однако если он равен нулю в некоторой области изменения переменной, то функции линейно зависимы внутри этой области * (см. упр. 1 с простым примером двух функций).

* Доказательство см. в книге Lass H. Elements of Pure and Applied Mathematics. N.Y., McGraw-Hill, 1957.

Пример 1. Решениями уравнения линейного осциллятора (8.21) являются функции $\varphi_1 = \sin \omega x$, $\varphi_2 = \cos \omega x$. Определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} \sin \omega x & \cos \omega x \\ \omega \cos \omega x & -\omega \sin \omega x \end{vmatrix} = -\omega \neq 0.$$

Следовательно, решения φ_1 и φ_2 линейно независимы. В случае двух функций это означает, что ни одна не может быть получена из другой простым умножением на постоянную.

Пример 2. Для иллюстрации линейной зависимости рассмотрим решение одномерного диффузионного уравнения. Мы имеем $\varphi_1 = e^x$, $\varphi_2 = e^{-x}$, добавим к ним $\varphi_3 = \operatorname{ch} x$, которая также является решением. Определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = 0$$

для всех x, поскольку первая и третья строки совпадают. Следовательно, функции e^x, e^{-x}, $\operatorname{ch} x$ линейно зависимы, и они связаны соотношением вида (8.47):

$$e^x + e^{-x} - 2 \operatorname{ch} x = 0.$$

Обратимся вновь к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка в общей форме:

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0. \tag{8.51}$$

Пусть y_1 и y_2 — два независимых решения. Тогда, по определению, определитель Вронского

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2. \tag{8.52}$$

Продифференцируем его:

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 [-P(x)\, y_2' - Q(x)\, y_2] - \\ - y_2 [-P(x)\, y_1' - Q(x)\, y_1] = -P(x)\,(y_1 y_2' - y_1' y_2). \tag{8.53}$$

Выражение в скобках равно определителю Вронского W, поэтому

$$W' = -P(x)\, W. \tag{8.54}$$

Если $P(x) = 0$, т. е.

$$y'' + Q(x)\, y = 0, \tag{8.55}$$

то определитель Вронского

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \text{const}. \tag{8.56}$$

Исходное дифференциальное уравнение однородно, поэтому его решения y_1 и y_2 можно умножить на любые постоянные,

которые мы выберем так, чтобы определитель Вронского оказался равен единице (или —1). Случай с $P(x) = 0$ встречается гораздо чаще, чем это кажется на первый взгляд. Читатель помнит, что оператор ∇^2 в декартовых координатах не содержит первой производной. Точно так же отсутствует она и в радиальной части $\nabla^2 (r\psi)$ в сферических координатах. Наконец, любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к виду (8.55) (см. упр. 4).

Предположим далее, что уже имеется одно решение уравнения (8.51), которое мы получили, например, методом Фробениуса (или просто угадали его). Получим второе, независимое решение. Для этого перепишем (8.54)

$$\frac{dW}{W} = -P\,dx$$

и проинтегрируем полученное выражение от $x_1 = a$ до $x_1 = x$, тогда

$$W(x) = W(a) \exp\left[-\int_a^x P(x_1)\,dx_1\right]. \tag{8.57}$$

Но

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right). \tag{8.58}$$

Комбинируя уравнения (8.57) и (8.58), получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(a) \frac{\exp\left[-\int_a^x P(x_1)\,dx_1\right]}{y_1^2}. \tag{8.59}$$

Наконец, интегрирование (8.59) от $x_2 = b$ до $x_2 = x$ окончательно дает

$$y_2(x) = y_1(x)\, W(a) \int_b^x \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1)\,dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2}\,dx_2. \tag{8.60}$$

Здесь a и b — произвольные постоянные; член $y_1(x)\, y_2(b)/y_1(b)$ опущен, так как он не дает ничего нового. Поскольку определитель Вронского $W(a)$ равен некоторой постоянной, а решения однородного дифференциаль-

ного уравнения всегда содержат неопределенный нормировочный множитель, положим $W(a) = 1$, тогда

$$y_2(x) = y_1(x) \int^{x} \frac{\exp\left[-\int^{x_2} P(x_1)\,dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2}\,dx_2. \qquad (8.61)$$

Отметим, что здесь опущены нижние пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Если их сохранить, то они приведут просто к возникновению дополнительного постоянного множителя при известном первом решении $y_1(x)$. В частном случае $P(x) = 0$ формула (8.61) сводится к следующей:

$$y_2(x) = y_1(x) \int^{x} \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2}. \qquad (8.62)$$

Это значит, что с помощью (8.61) или (8.62) можно интегрированием одного известного решения получить второе независимое решение уравнения (8.51). Этим методом в разд. 12.9 найдено второе решение дифференциального уравнения Лежандра.

Пример 3. Уравнение (8.21) с $P(x) = 0$ имеет одно решение: $y_1 = \sin x$. После подстановки в формулу (8.62) мы получим второе решение

$$y_2(x) = \sin x \int^{x} \frac{dx_2}{\sin^2 x_2} = \sin x\,(-\operatorname{ctg} x) = -\cos x,$$

которое, очевидно, не зависит (не может быть получено умножением) от $\sin x$.

Второе решение дифференциального уравнения можно получить следующим образом.

1. Запишем коэффициенты уравнения (8.51) $P(x)$ и $Q(x)$ в виде

$$P(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j. \qquad (8.63)$$

Нижние пределы суммирования выбираются исходя из требований теоремы Фукса.

2. Методом Фробениуса получим несколько первых членов этого ряда.

3. Отождествим это решение с y_1 и, затем почленно проинтегрировав с помощью формулы (8.61), получим второе решение y_2, которое также будет некоторым рядом.

Начнем с того, что подставим (8.63) в исходное уравнение

$$y'' + (p_{-1}x^{-1} + p_0 + p_1 x + \ldots)\, y' + \\ + (q_{-2}x^{-2} + q_{-1}x^{-1} + \ldots)\, y = 0. \qquad (8.64)$$

Полученное уравнение в точке $x = 0$ имеет регулярную особенность. Если $p_{-1} = q_{-1} = q_{-2} = 0$, то $x = 0$ — обыкновенная точка. Подставив $y = \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}$, получим

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, a_\lambda x^{k+\lambda-2} + \\ + \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)\, a_\lambda x^{k+\lambda-1} + \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \qquad (8.65)$$

Предположим, что $p_{-1} \neq 0$ и $q_{-2} \neq 0$, и запишем определяющее уравнение

$$k^2 + (p_{-1} - 1)\, k + q_{-2} = 0, \qquad (8.66)$$

корни которого обозначим $k = \alpha$ и $k = \alpha - n$, где n равно нулю или целому положительному числу. (Для нецелых n нетрудно получить оба независимых решения методом Фробениуса.) Тогда

$$(k - \alpha)(k - \alpha + n) = 0. \qquad (8.67)$$

Приравняв коэффициенты при k в уравнениях (8.66) и (8.67), получим

$$p_{-1} - 1 = n - 2\alpha. \qquad (8.68)$$

Решение, соответствующее значению $k = \alpha$, можно записать в виде ряда $y_1 = x^\alpha \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$, подстановка которого в формулу (8.61) дает

$$y_2(x) = y_1(x) \int_a^x \frac{\exp\left(-\int\limits_a^{x_2} \sum\limits_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i\, dx_1\right)}{x_2^{2\alpha} \left(\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2}\, dx_2. \qquad (8.69)$$

Решения y_1 и y_2 нормированы так, что $W(a) = 1$. Представим показатель экспоненты в виде

$$\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^k \, dx_1 = p_{-1} \ln x_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + f(a), \qquad (8.70)$$

откуда

$$\exp\left(-\int_a^{x_2} \sum_i p_i x_1^i \, dx_1\right) =$$

$$= \exp[-f(a)]\, x_2^{-p_{-1}} \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}\right) =$$

$$= \exp[-f(a)]\, x_2^{-p_{-1}} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}\right)^2 + \ldots\right]. \qquad (8.71)$$

Полученное разложение, которое стоит в показателе экспоненты, безусловно, сходится, если коэффициент $P(x)$ представлен сходящимся рядом.

Преобразуем знаменатель выражения (8.69):

$$\left[x_2^{2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2\right]^{-1} = x_2^{-2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^{-2} = x_2^{-2\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x_2^\lambda. \qquad (8.72)$$

Пренебрегая постоянными множителями, которые несущественны благодаря условию $W(a) = 1$, получим

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-p_{-1}-2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x_2^\lambda\right) dx_2. \qquad (8.73)$$

Из условия (8.68)

$$x_2^{-p_{-1}-2\alpha} = x_2^{-n-1}, \qquad (8.74)$$

где в соответствии с предположением n — целое. Следовательно, интегрирование последнего выражения приведет

к такому коэффициенту при $y_1(x)$, который состоит из двух частей: из степенного ряда, начинающегося с члена x^{-n}, и логарифмического члена, который появился после интегрирования x^{-1} (при $\lambda = n$). Вообще говоря, этот член появляется всегда, когда n — целое, если только c_n случайно не окажется равным нулю.

Исходя из сказанного, второе решение $y_2(x)$ уравнения (8.51) можно записать так:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{j=-n}^{\infty} d_j x^{j+\alpha}. \tag{8.75}$$

Это означает, что необходимо искать логарифмический член, когда уравнение имеет только одно решение, представимое рядом.

Наконец, из вида второго решения (8.75) можно определить неизвестные коэффициенты d_λ прямой подстановкой (8.75) в исходное уравнение. Второе решение обычно расходится в нуле вследствие наличия логарифмического множителя и членов ряда с отрицательными степенями x. По этой причине $y_2(x)$ часто относят к нерегулярному решению. Первое решение $y_1(x)$, которое обычно сходится в начале, называют регулярным. Поведение решения в начале координат обсуждается более подробно в гл. 11 и 12.

Упражнения

1. Доказать прямым интегрированием, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы, если определитель Вронского тождественно равен нулю.

2. Дифференцированием и прямой подстановкой показать, что $y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp\left[-\int^s P(t)\,dt\right]}{[y_1(s)]^2}\,ds$ удовлетворяет уравнению (8.51).

3. С помощью определителя Вронского убедиться, что линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка (8.51) не может иметь трех независимых решений. (Допустить существование третьего решения и показать, что определитель Вронского равен нулю при любом x.)

4. С помощью подстановки $y = z \exp\left[-\frac{1}{2}\int^x P(t)\,dt\right]$ преобразовать уравнение (8.51) к виду

$$z'' + q(x)\,z = 0,$$

(где $q(x) = Q(x - P'(x)/2 - P^2(x)/4$.

5. Использовать результат предыдущего упражнения и показать, что замена $\psi(r)$ на $r\psi(r)$ приведет к исчезновению первой производной в операторе Лапласа, записанного в сферических координатах.

6. Известно, что $R=r^m$ — решение уравнения

$$R''+\frac{1}{r}R'-\frac{m^2}{r^2}R=0.$$

Показать, что формула (8.61) дает второе решение $R=r^{-m}$.

7. Воспользоваться первым решением уравнения для линейного осциллятора $y_1(x)=\sum_{n,\ \text{неч}}(-1)^{n+1}(x^n/n!)$ и, применив метод, с помощью которого получено уравнение (8.75), убедиться, что $c_0=0$, т. е. второе решение не содержит в этом случае логарифмического члена.

8. Показать, что при нецелом n второе решение уравнения Бесселя, полученное из (8.61), не содержит логарифмического члена.

9. Первое (или второе) решение дифференциального уравнения Эрмита (см. табл. 8.1) при $\alpha=0$ (или 1) есть $y_1(x)=1$ (или x). С помощью формулы (8.61) найти второе решение. Убедиться, что это решение эквивалентно решению $y_{\text{неч}}$ ($y_{\text{чет}}$) из упр. 4 к разд. 8.4.

10. Показать, что если второе решение записано в виде произведения двух функций $y_2(x)=y_1(x)f(x)$, то подстановка этого решения в исходное уравнение (8.51) в согласии с соотношением (8.61) приводит к выражению

$$f(x)=\int^{x}\frac{\exp\left[-\int^{s}P(t)\,dt\right]}{[y_1(s)]^2}\,ds.$$

11. Дифференциальное уравнение Лежандра (см. табл. 8.1) имеет регулярное решение $P_n(x)$ и нерегулярное решение $Q_n(x)$. Показать, что определитель Вронского равен

$$P_n(x)\,Q_n'(x)-P_n'(x)\,Q_n(x)=A_n/(1-x^2),$$

где A_n не зависит от x.

12. Функция $y_1(x)$ из соотношения (8.61) удовлетворяет уравнению (8.51). Функция $y_2(x)$ — второе линейно независимое решение того же уравнения. Убедиться, что нижние пределы в обоих интегралах не играют существенной роли, т. е. они обеспечивают дополнительный вклад во все множители и умножаются на известное решение.

13. Первое решение дифференциального уравнения Лагерра (см. табл. 8.1) для $n=0$ есть $y_1(x)=1$. С помощью формулы (8.61) получить второе линейно независимое решение. Записать в явном виде логарифмический член.

8.6. ФУНКЦИЯ ГРИНА. АНАЛОГИЯ С ЭЛЕКТРОСТАТИКОЙ

Для более ясного представления существа метода функции Грина, разработанного для решения неоднородного дифференциального уравнения в частных производных,

удобно воспользоваться примером из электростатики. Если заряд отличен от нуля, то электростатический потенциал ψ удовлетворяет неоднородному уравнению Пуассона (см. разд. 1.14)

$$\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0 \quad \text{(единицы МКСА)}, \tag{8.76}$$

если электростатических зарядов нет ($\rho = 0$), он удовлетворяет однородному уравнению Лапласа

$$\nabla^2\psi = 0. \tag{8.77}$$

Пусть заряды q_i — точечные, тогда решение

$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{8.78}$$

является суперпозицией решений, полученных для каждого точечного заряда в предположении кулоновского взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{8.79}$$

Заменив систему дискретных зарядов на непрерывно распределенный заряд с плотностью ρ, запишем решение (8.78) иначе:

$$\psi(\mathbf{r}=0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r})}{r}\,d\mathbf{r}, \tag{8.80}$$

а для потенциала в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, обусловленного зарядом в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$, имеем

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\,d\mathbf{r}_2. \tag{8.81}$$

Дельта-функция Дирака. Формальный вывод и обобщение решения (8.81) можно облегчить, используя δ-функцию Дирака (см. разд. 1.15). Одномерная δ-функция, по определению, имеет следующие свойства:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{для } x \neq 0; \tag{8.82}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1; \tag{8.83}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0). \tag{8.84}$$

Дельта-функция $\delta(x)$ — неаналитическая, но ее можно получить, делая предельный переход, с помощью аналитической непрерывной или кусочно-непрерывной функции. Чаще всего встречаются такие представления δ-функции (рис. 8.1):

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-x^2/a}; \tag{8.85а}$$

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \begin{cases} 0, & x < -\frac{a}{2}, \\ \frac{1}{a}, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \\ 0, & \frac{a}{2} < x; \end{cases} \tag{8.85б}$$

$$\delta(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}; \tag{8.85в}$$

$$\delta(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{\sin ax}{\pi x} = \lim \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{ixt}\, dt. \tag{8.85г}$$

Представления (8.85а) — (8.85в) удобны своей наглядностью. Кроме того, представление (8.85б) определяет интегральные свойства δ-функции (см. упр. 1). Последнее — (8.85г) обычно используют в анализе Фурье и его приложениях в квантовой механике.

Введенная δ-функция Дирака весьма необычна. В действительности она — не функция в общепринятом смысле, а есть лишь точное отражение функциональных свойств (8.82) — (8.84). Следует помнить, что δ-функция Дирака имеет смысл только как часть подынтегрального выражения и не имеет самостоятельного значения.

Перемещая особенность в точку $x = x'$, δ-функцию Дирака можно записать как $\delta(x - x')$. Тогда уравнение (8.84) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x')\, dx = f(x'). \tag{8.86}$$

Для трехмерной δ-функции имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \delta(\mathbf{r})\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z)\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{8.87}$$

Это соответствует особенности (или источнику) в начале координат. Если источник расположен в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$,

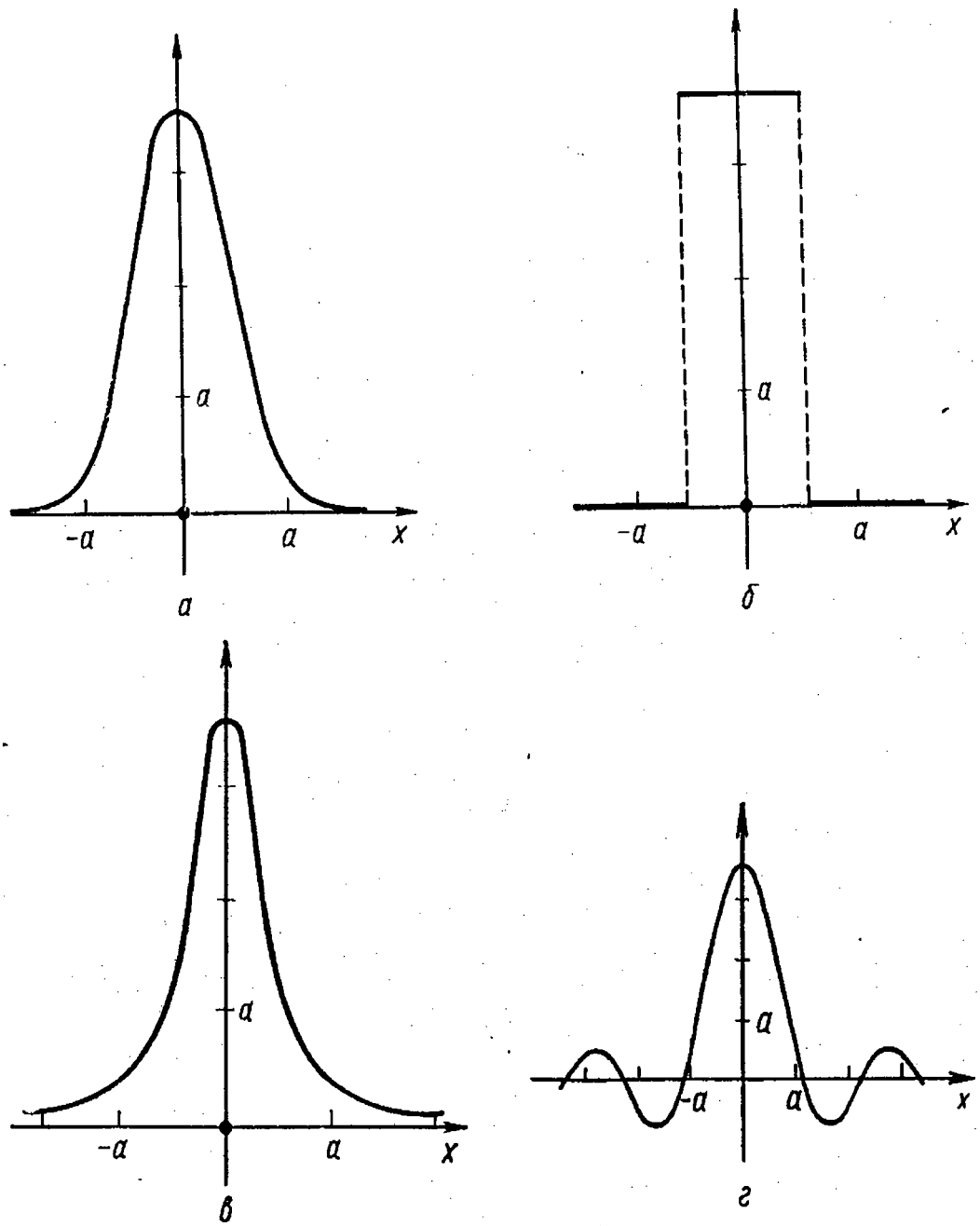


Рис. 8.1. Различные представления δ-функции Дирака:
$а - \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-x^2/a}$; б – по формуле (8.85б); $в - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}$; $г - \frac{\sin ax}{\pi x}$.

уравнение (8.87) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\, r_2^2\, dr_2 \sin\theta_2\, d\theta_2\, d\varphi_2 = 1. \qquad (8.88)$$

Как уже отмечалось,

$$\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \qquad (8.89)$$

Вернемся теперь к электростатике. Пусть ψ — потенциал, соответствующий заданному распределению заряда и удовлетворяющий уравнению Пуассона:

$$\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0. \tag{8.90}$$

Потребуем, чтобы функция φ, которую мы назовем *функцией Грина*, удовлетворяла уравнению Пуассона с точечным источником в точке $\mathbf{r}_2$:

$$\nabla^2\varphi = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{8.91}$$

Физически это означает, что φ — потенциал в точке $\mathbf{r}_1$, соответствующей единичному источнику ε_0, помещенному в точку $\mathbf{r}_2$. На основании теоремы Грина (см. разд. 1.11)

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\, d\tau_2 = \int_S (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot d\sigma. \tag{8.92}$$

Предположив, что подынтегральная функция спадает быстрее, чем r^{-2}, можно упростить задачу, взяв объем настолько большим, что интеграл по поверхности обратится в нуль:

$$\int \psi\nabla^2\varphi\, d\tau_2 = \int \varphi\nabla^2\psi\, d\tau_2, \tag{8.93}$$

или, после подстановки в уравнения (8.90) и (8.91),

$$-\int \psi(\mathbf{r}_2)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, d\tau_2 = -\int \frac{\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\rho(\mathbf{r}_2)}{\varepsilon_0}\, d\tau_2. \tag{8.94}$$

Интегрирование с учетом свойства (8.84) δ-функции Дирака дает

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\rho(\mathbf{r}_1)\, d\tau_2. \tag{8.95}$$

Мы использовали уравнение (8.91) для вычисления $\nabla^2\varphi$, но при этом сама функция пока еще не известна. Закон Гаусса утверждает, что

$$\int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{— начало координат вне объема } V, \\ -4\pi & \text{— начало координат внутри объема } V. \end{cases} \tag{8.96}$$

Этот закон, полученный в разд. 1.13, можно переписать иначе:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r}\right) &= -\delta(\mathbf{r}), \\ \text{или} \\ \nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r_{12}}\right) &= -\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

Второе соотношение соответствует переносу электростатического заряда из начала координат в точку $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2$. Здесь $r_{12}=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$, и поэтому $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ всюду равна нулю, за исключением точки $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$. Сравнивая уравнения (8.91) и (8.97), видим, что функция φ (функция Грина) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \tag{8.98}$$

откуда, в полном согласии с уравнением (8.81), решение уравнения Пуассона записывается как

$$\psi(\mathbf{r}_1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\,d\mathbf{r}_2. \tag{8.99}$$

Отметим, что функцию Грина $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ часто обозначают $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. С ее помощью в интегральной форме записывается решение дифференциального уравнения. В рассмотренном примере, взятом из электростатики, функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ найдена с помощью закона Гаусса путем сравнения уравнений (8.91) и (8.97). Окончательное решение (8.99) позволяет дать физическую интерпретацию функции Грина. Ее можно понимать как *весовую функцию* или *функцию влияния*, которая описывает влияние элемента заряда $\rho(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2$ в точке наблюдения $\mathbf{r}_1$. Функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ описывает потенциал в точке наблюдения $\mathbf{r}_1$, который создает единичный точечный источник, помещенный в точке $\mathbf{r}_2$.

Функция Грина обладает важным свойством симметрии относительно переменных $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{8.100}$$

Это очевидно для только что рассмотренного примера. Данное свойство можно доказать и при более общих условиях. Потребуем, чтобы $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяла уравнению

$$\nabla\cdot[p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)]+\lambda q(\mathbf{r})\,G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tag{8.101}$$

с точечным источником в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$. Здесь $p(\mathbf{r})$ и $q(\mathbf{r})$ — произвольные непрерывные функции $\mathbf{r}$. Функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяет тому же самому уравнению, в котором индекс 1 заменен индексом 2,

$$\nabla \cdot [p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] + \lambda q(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (8.102)$$

Тогда $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ — потенциал в точке $\mathbf{r}$, вызванный точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}_2$. Умножим первое уравнение на $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$, а второе на $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ и вычтем один результат из другого:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \nabla \cdot [p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla \cdot [p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] = \\ = -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (8.103)$$

Применим далее теорему Грина

$$\int_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] \, d\sigma = \\ = -G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (8.104)$$

Члены в правой части этого уравнения появились при интегрировании по объему выражения, содержащего δ-функцию Дирака. Так как обе функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ и $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяют одним и тем же граничным условиям на поверхности S, то поверхностный интеграл исчезает, и мы получаем условие

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (8.105)$$

которое показывает, что функция Грина симметрична. Отметим, что это свойство симметрии справедливо для функции Грина, удовлетворяющей любому уравнению вида (8.101). В гл. 9 уравнения такого типа названы самосопряженными. На свойстве симметрии основаны различные теоремы взаимности: заряд в точке $\mathbf{r}_2$ влияет на потенциал в точке $\mathbf{r}_1$ точно так же, как заряд, помещенный в точку $\mathbf{r}_1$, на потенциал в точке $\mathbf{r}_2$.

Следует указать, что на применении функции Грина основан метод решения многих более сложных проблем математической физики (см. гл. 16).

Упражнения

1. Положим,

$$\delta_a(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{a}{2},\\ \dfrac{1}{a}, & -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2},\\ 0, & \dfrac{a}{2}<x.\end{cases}$$

Доказать, что $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_a(x)\,dx=f(0)$, если $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

2. Показать, что $G(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=e^{ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}/4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ — функция Грина, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$(\nabla_1^2+k^2)\,G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Показать, что $G(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, если $\mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_2$, а для достаточно малого $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ имеет место

$$\int(\nabla^2+k^2)\,G(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1=\begin{cases}0, & \mathbf{r}_2\neq\mathbf{r}_1,\\ -1, & \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1.\end{cases}$$

3. Доказать, что $\delta(f(x))=\left|\dfrac{df(x)}{dx}\right|^{-1}\delta(x-x_0)$, при условии, что $f(x_0)=0$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\delta(f)\,df=\delta(x)\,dx$.

4. Убедиться, что в сферических координатах $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ имеет вид

$$\frac{1}{r_1^2}\,\delta(r_1-r_2)\,\delta(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\,\delta(\varphi_1-\varphi_2).$$

Обобщить это выражение на случай криволинейных координат q_1, q_2, q_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3.

5. Используя представление δ-функции (8.85а), показать, что $x\dfrac{d}{dx}\delta(x)=-\delta(x)$. Этот и другие результаты, относящиеся к δ-функции Дирака, могут быть доказаны более строго, но зато и более сложными методами математической теории распределения.

ГЛАВА 9

ТЕОРИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

9.1. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В гл. 8 мы классифицировали и решали линейные дифференциальные уравнения второго порядка, соответствующие линейным дифференциальным операторам второго порядка общего вида

$$\mathcal{L}u(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p_1(x)\frac{d}{dx}u(x) + p_2(x)u(x). \qquad (9.1)$$

Функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ не следует путать с постоянными p_i из разд. 8.5. Сравнение с уравнением (8.51) показывает, что $P(x) = p_1(x)/p_0(x)$, а $Q(x) = p_2(x)/p_0(x)$.

Коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — вещественные *функции* x и имеют во всей области $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывные производные $(2-i)$-го порядка. Кроме того, $p_0(x)$ нигде не обращается в нуль внутри открытого интервала $a < x < b$. Нули функции $p_0(x)$ являются особыми точками (см. разд. 8.3), поэтому предыдущее утверждение просто означает, что интервал (a, b) выбран так, чтобы внутри него не было особых точек. Однако вполне возможно, и часто так и есть на самом деле, что особые точки совпадают с концами интервала.

В теории дифференциальных уравнений удобно определить *сопряженный** *оператор* $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\bar{\mathcal{L}}u = \frac{d^2}{dx^2}[p_0u] - \frac{d}{dx}[p_1u] + p_2(u) = p_0\frac{d^2u}{dx^2} + \\ + (2p_0' - p_1)\frac{du}{dx} + (p_0'' - p_1' + p_2)u. \qquad (9.2)$$

---

* *Сопряженный* оператор в некотором смысле связан с *сопряженной* матрицей. Смысл такой терминологии уясняется при сравнении *самосопряженного* оператора (с соответствующими граничными условиями) с *самосопряженной* матрицей (подробнее см. разд. 9.2).

Сравнение уравнений (9.1) и (9.2) дает необходимое и достаточное условие того, чтобы $\mathscr{L} = \overline{\mathscr{L}}$:

$$p_0'(x) = \frac{dp_0(x)}{dx} = p_1(x). \tag{9.3}$$

При выполнении условия (9.3)

$$\overline{\mathscr{L}}u = \mathscr{L}u = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x), \tag{9.4}$$

и оператор $\mathscr{L}$ называется *самосопряженным*. Здесь $p_0(x)$ заменено на $p(x)$, а $p_2(x)$ — на $q(x)$.

Из дифференциальных уравнений, которые рассматривались в разд. 8.2, уравнения Лежандра и линейного осциллятора относятся к типу самосопряженных, но другие уравнения, такие, как уравнения Лагерра и Эрмита, не обладают этим свойством. Однако теория линейных самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка носит общий характер, так как всегда можно привести несамосопряженный оператор к самосопряженному виду. Рассмотрим уравнение (9.1) с $p_0' = p_1$. Умножив $\mathscr{L}$ на $\frac{1}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]$, получим уравнение *

$$\frac{1}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]\mathscr{L}u(x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\exp\left[\int_0^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]\frac{du(x)}{dx}\right\} +$$

$$+ \frac{p_2(x)}{p_0(x)}\cdot\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]u, \tag{9.5}$$

которое, очевидно, самосопряженно. Обратим внимание на $p_0(x)$ в знаменателе. Именно поэтому мы потребовали,

---

* Если умножить $\mathscr{L}$ на $f(x)/h_0(x)$, а затем потребовать, чтобы $f'(x) = fp_1/p_0$ (тогда новый оператор будет самосопряженным), то получим $f(x) = \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]$.

чтобы $p_0(x) \neq 0$ на открытом отрезке $a < x < b$. В дальнейшем везде будет предполагаться, что оператор записан в самосопряженном виде.

Собственные функции, собственные значения. Рассмотрим дифференциальное уравнение в форме

$$\mathscr{L} u(x) + \lambda w(x) u(x) = 0. \tag{9.6}$$

Здесь λ — некоторая постоянная, а $w(x)$ — известная функция x, называемая *плотностью* или *весовой функцией*. Значение этих определений будет ясно из дальнейшего. Потребуем, чтобы $w(x) > 0$, исключая, может быть, изолированные точки, в которых $w(x) = 0$. Функция $u_\lambda(x)$, при некотором λ удовлетворяющая уравнению (9.6) с *заданными граничными условиями*, называется *собственной функцией*, которая соответствует *собственному значению* λ. Нельзя заранее утверждать, что собственная функция $u_\lambda(x)$ существует при любом произвольно выбранном собственном значении λ. Более того, требование существования собственной функции часто ограничивает допустимые значения λ дискретным набором этих величин. В этом случае мы имеем дело с математическим отображением процесса квантования в квантовой механике.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{9.7}$$

Из уравнений (9.1) и (9.6)

$$\left.\begin{aligned} &p_0(x) = 1-x^2 = p, \quad w(x) = 1, \\ &p_1(x) = -2x = p', \quad \lambda = n(n+1), \\ &p_2(x) = 0 = q. \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Решения уравнения Лежандра (см. разд. 8.4 и 12.9), записанные в виде рядов, расходятся для нецелых n. Ограничение целыми n называется квантованием собственных значений.

Приведем уравнения, перечисленные в гл. 8, к самосопряженному виду и запишем в табл. 9.1 значения их коэффициентов и параметров.

Сформулировав определение собственной функции, мы подчеркнули, что собственная функция $u_\lambda(x)$ должна удовлетворять *определенным граничным* условиям, которые можно определить тремя способами.

1. Граничные условия Коши. На границе задано значение функции и нормальной производной. В приложении к электростатике это должно соответствовать заданию потенциала и нормальной компоненты электрического поля E_n.

Таблица 9.1

Уравнение	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
Лежандра	$1-x^2$	0	$l(l+1)$	1
Лежандра присоединенное	$1-x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$l(l+1)$	1
Чебышева I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$
Чебышева II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$n(n+2)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Бесселя	x	$-n^2/x$	a^2	x
Лагерра	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Лагерра присоединенное	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha-k$	$x^k e^{-x}$
Эрмита	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
Гармонического осциллятора *	1	0	ω^2	1

* Это уравнение будет отправным в гл. 14 при рассмотрении рядов Фурье.

2. Граничные условия Дирихле. На границе определено значение функции.

3. Граничные условия Неймана. На границе задано значение производной функции по нормали (нормальный градиент). В приложении к электростатике это должно соответствовать заданию E_n и, следовательно, поверхностной плотности заряда σ.

Отметим, что начальные условия — частный случай граничных условий. Например, задание начального положения x_0 и скорости v_0 при решении некоторой динамической проблемы будет соответствовать граничным условиям Коши. При рассмотрении одномерных случаев граничные условия задаются на *обоих* концах интервала изменения переменной.

Обычно граничные условия, поставленные в одной из трех форм на концах интервала (т. е. на его границе),

гарантируют обращение в нуль следующих произведений:

$$p(x)\,u(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=a}=0,\quad p(x)\,u(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=b}=0. \tag{9.9}$$

Здесь $u(x)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения (9.6). Однако можно задать и несколько менее жесткие граничные условия

$$vpu'|_{x=a}=vpu'|_{x=b}, \tag{9.10}$$

в которых $u(x)$ и $v(x)$ — решения дифференциального уравнения, соответствующие одним и тем же или различным собственным значениям.

Предвосхищая результаты квантовой механики, рассмотрим такую возможность, когда уравнение (9.6) может иметь комплексные решения $u(x)$ и $v(x)$. Заменим условие (9.10) граничными условиями для комплексных величин

$$v^*pu'|_{x=a}=v^*pu'|_{x=b}, \tag{9.11}$$

где v^* — комплексно-сопряженная функция $v(x)$. При вещественном $v(x)$, очевидно, $v=v^*$ и условие (9.11) сводится к условию (9.10). Поскольку мы полагаем, что $p_0(x)$ — вещественная величина, можно взять комплексно-сопряженное от граничного условия (9.11):

$$vpu^{*\prime}|_{x=a}=vpu^{*\prime}|_{x=b}. \tag{9.12а}$$

Наконец, так как $u(x)$ и $v(x)$ — два любых решения, u и v можно поменять местами, поэтому

$$v^{*\prime}pu|_{x=a}=v^{*\prime}pu|_{x=b}. \tag{9.12б}$$

Эрмитовы операторы. Докажем теперь важное свойство самосопряженного дифференциального оператора второго порядка [уравнение (9.6)] и решений, удовлетворяющих граничным условиям типа (9.11) и (9.12). Интегрируя на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и используя уравнение (9.4), получаем

$$\int_a^b v^*\mathcal{L}u\,dx=\int_a^b v^*(pu')'\,dx+\int_a^b v^*qu\,dx. \tag{9.13}$$

Проинтегрируем по частям

$$\int_a^b v^*(pu')'\,dx=v^*pu'\Big|_a^b-\int_a^b v^{*\prime}pu'\,dx. \tag{9.14}$$

Согласно граничным условиям (9.11), проинтегрированная часть равна нулю. Снова интегрируя по частям (9.14), имеем

$$-\int_a^b v^{*\prime} p u'\,dx = -v^{*\prime} p u\Big|_a^b + \int_a^b u\,(p v^{*\prime})'\,dx. \qquad (9.15)$$

С учетом граничного условия (9.12) снова первый член в (9.15) равен нулю. Комбинируя уравнения (9.13), (9.14) и (9.15), окончательно получаем

$$\int_a^b v^* \mathscr{L} u\,dx = \int_a^b u \mathscr{L} v^*\,dx. \qquad (9.16)$$

Оператор $\mathscr{L}$, подчиняющийся соотношению (9.16), называется эрмитовым по отношению к функциям $u(x)$ и $v(x)$, которые удовлетворяют граничным условиям (9.11).

Пример 2. Выбор отрезка $[a, b]$. Оператор $\mathscr{L} d^2/dx$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + n^2 y(x) = 0$$

с собственными функциями $u_n = \cos nx$, $v_m = \sin mx$. Граничное условие (9.10) для данного случая: $-n \sin mx \sin nx\,|_a^b = 0$, или $m \cos mx \cos nx\,|_a^b = 0$ (с заменой u_n на v_n). Так как $\sin mx$ и $\cos nx$ — периодические функции с периодом 2π (для целых n и m), уравнение (9.10) выполняется, если $a = x_0$, а $b = x_0 + 2\pi$.

Упражнения

1. Показать, что уравнения Лагерра, Эрмита и Чебышева (тип I) можно привести к самосопряженному виду, умножая их соответственно на e^{-x}, e^{-x^2}, $(1-x^2)^{-1/2}$. Убедиться, что $w(x) = e^{-x}$, e^{-x^2}, $(1-x^2)^{-1/2}$ — соответствующие весовые функции.

2. Показать, что самосопряженное уравнение

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - \frac{n^2 y}{z} + a^2 z y = 0, \quad \text{где} \quad z = \frac{x}{a},$$

можно получить из уравнения Бесселя. Определить весовую функцию. Используя эти результаты, показать, что $\int_a^b Z_m(z)\,Z_n(z)\frac{dz}{z} = 0$ — условие ортогональности для решения уравнения Бесселя Z_n. Функции Z_n — ненормированные. Положить $a = 0$, $b = \infty$

и использовать условие $m+n>0$ (см. гл. 11). Другой пример, в котором интегрирование ведется по промежутку $[0, 1]$, рассмотрен в разд. 11.1.

3. Доказать, что если линейное дифференциальное уравнение второго порядка выражено в самосопряженной форме, то:

а) определитель Вронского равен некоторой постоянной, деленной на коэффициент исходного уравнения $W=C/p$;

б) второе решение уравнения имеет вид

$$y_2(x)=Cy_1(x)\int_0^x\frac{dt}{p\,[y_1(t)]^2}.$$

4. Дано дифференциальное уравнение

$$y''+\left(\frac{1}{x}-2x\right)y'+4ny=0.$$

Привести его к самосопряженному виду; убедиться, что преобразованием $z=x^2$ оно сводится к уравнению Лагерра.

5. Полином Чебышева (тип II) $U_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)\,U_n(x)=0.$$

Выделить особые точки этого уравнения, для чего рассмотреть всю плоскость изменения переменной, за исключением бесконечно удаленной точки. Определить, какие из особенностей регулярны, а какие нерегулярны. Привести уравнение к самосопряженному виду; определить собственные значения; найти весовую функцию и условие ортогональности для $U_n(x)$ и $U_m(x)$ при $n\neq m$.

6. В частном случае, когда $\lambda=0$ и $q(x)=0$, самосопряженное уравнение сводится к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right]=0,$$

которое удовлетворяется при $du/dx=1/p(x)$. Воспользовавшись этим, получить вторые решения уравнений Лежандра (*а*), Лагерра (*б*) и Эрмита (*в*).

Ответ: *а)* $u_2(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; *б)* $u_2(x)-u_2(x_0)=\int_{x_0}^{x}e^t\frac{dt}{t}$; *в)* $u_2(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$. Решения иллюстрируют расходимость, которая обычно характерна для второго решения.

7. Известно, что оператор $\mathscr{L}$ удовлетворяет условию $\mathscr{L}u=0$; $g\mathscr{L}u$ — самосопряженный. Показать, что для сопряженного оператора $\overline{\mathscr{L}}$ справедливо $\overline{\mathscr{L}}(gu)=0$.

9.2. ЭРМИТОВЫ (САМОСОПРЯЖЕННЫЕ) ОПЕРАТОРЫ

Эрмитов, или самосопряженный, оператор характеризуется тремя свойствами, которые весьма существенны в классической и в квантовой физике: 1) его собственные значения вещественны; 2) собственные функции — ортогональны; 3) собственные функции образуют полную систему *.

Докажем первые два из указанных свойств.

Вещественность собственных значений. Пусть

$$\mathscr{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0, \tag{9.17}$$

$$\text{(а)}\ \mathscr{L}u_j + \lambda_j w u_j = 0, \quad \text{(б)}\ \mathscr{L}u_j^* + \lambda_j^* w u_j = 0. \tag{9.18}$$

Здесь $\mathscr{L}$ — вещественный оператор (p и q — вещественные функции x); $w(x)$ — вещественная функция. Предположим, что собственные значения λ_k и собственные функции u_k комплексные. Умножая (9.17) на u_j^*, а (9.18б) на u_i и складывая полученные результаты, имеем

$$u_j^* \mathscr{L}u_i - u_i \mathscr{L}u_j^* = (\lambda_j^* - \lambda_i) w u_i u_j^*. \tag{9.19}$$

Проинтегрируем последнее соотношение на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$:

$$\int_a^b u_j^* \mathscr{L}u_i \, dx - \int_a^b u_i \mathscr{L}u_j^* \, dx = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w \, dx. \tag{9.20}$$

В силу эрмитовости оператора $\mathscr{L}$ левая часть полученного уравнения обращается в нуль [см. уравнение (9.16)], откуда

$$(\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w \, dx = 0. \tag{9.21}$$

При $i = j$ интеграл не может равняться нулю (функция $w(x) > 0$, за исключением изолированных точек), если только мы не рассматриваем тривиальный случай $u_i = 0$. Следовательно,

$$\lambda_i^* = \lambda_i, \tag{9.22}$$

т. е. собственные значения вещественны. Под λ_i понимается любое собственное значение, что и доказывает первое свой-

* Утверждение 3 не универсально. Оно *не выполняется* для линейных дифференциальных самосопряженных операторов второго порядка.

ство, которое является точной аналогией свойства собственных значений вещественных симметричных (и эрмитовых) матриц (см. разд. 4.5).

Вещественность собственных значений эрмитовых операторов играет фундаментальную роль в квантовой механике. В квантовой механике собственные значения соответствуют точно измеряемым величинам, таким, как энергия и момент количества движения. Если сформулировать теорию с помощью эрмитовых операторов, то доказательство вещественности собственных значений гарантирует, что такая теория будет предсказывать вещественные числа для этих измеряемых физических величин.

Ортогональность собственных функций. Пусть $i \neq j$ и при этом $\lambda_i \neq \lambda_j$, тогда интеграл от произведения двух различных собственных функций должен обратиться в нуль:

$$\int_a^b u_i u_j^* w \, dx = 0. \tag{9.23}$$

Это условие называют *условием ортогональности*. Таким образом, собственные функции $u_i(x)$ и $u_j(x)$ ортогональны с весом $w(x)$ на отрезке $[a, b]$. Уравнение (9.23) частично доказывает второе свойство эрмитовых операторов. Здесь также очевидна аналогия ортогональности матриц. В самом деле, можно установить полное соответствие между теорией дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля и аппаратом эрмитовых матриц. Исторически это соответствие сыграло важную роль в доказательстве математической эквивалентности матричной механики Гейзенберга и волновой механики Шредингера. Сейчас эти различные подходы объединены в квантовой механике, а математический аппарат в каждом отдельном случае выбирают из соображений удобства. Действительно, рассмотренные методы еще не ограничили число возможных математических приемов. Интегральные уравнения (см. гл. 16) дают третий подход, который иногда оказывается более удобным или более плодотворным.

Проведенное доказательство ортогональности не является абсолютно полным. В нем содержится неопределенность. Действительно, хотя и выполнено условие $i \neq j$, но тем не менее $\lambda_i = \lambda_j$. Такой случай называется *вырожденным*. Если $\lambda_i = \lambda_j$, интеграл в уравнении (9.21) может и не рав-

няться нулю. Это означает, что линейно независимые собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, не обязательно ортогональны, но в этом вырожденном случае и независимые линейные функции всегда можно сделать ортогональными. Один из методов ортогонализации разработан в следующем разделе.

Из содержания последующих глав станет ясным, что требование ортогональности данной системы функций так же естественно, как и требование иметь ортогональную систему координат. Конечно, можно иметь дело и с неортогональными функциями, но этим мы только усложним задачу.

Третье свойство полноты системы определим и обсудим в разд. 9.4. Формальное доказательство, основанное на вариационном исчислении (см. гл. 17), здесь не приводится *.

Ряд Фурье. Ортогональность. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + n^2 y(x) = 0,$$

которое может описывать либо квантовомеханическую частицу в энергетической яме, либо колебания струны с собственными (вырожденными) функциями: $\cos nx$, $\sin nx$.

При n вещественном (здесь оно еще и целое) условие ортогональности записывается так:

$$\text{а)} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = C_n \delta_{nm}; \quad \text{б)} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = D_n \delta_{nm}; \quad \text{в)} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0.$$

Интегрирование на отрезке 2π в первом и во втором случаях дает δ-символ Кронекера, третий интеграл обращается в нуль, так как он содержит вырожденные собственные функции. Однако проверка убеждает нас, что этот интеграл равен нулю всегда при любых целых m и n.

---

* Более подробно см. Курант Р. и Гильберт Д. «Методы математической физики». Перев. с англ. М. — Л., Гостехиздат, 1951.

Теория Штурма — Лиувилля ничего не говорит о величинах C_n и D_n. Прямое вычисление интегралов приводит к следующим значениям:

$$C_n = \begin{cases} \pi, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0; \end{cases} \quad D_n = \begin{cases} \pi, & n \neq 0, \\ 2\pi, & n = 0. \end{cases}$$

Условия ортогональности а) — в) имеют непосредственное отношение к рядам Фурье (см. гл. 14).

Разложение по ортогональным собственным функциям. Прямоугольная волна. Свойство полноты означает, что определенные классы функций (кусочно-непрерывных) можно представить рядами по ортогональным собственным функциям с любой требуемой степенью точности. Рассмотрим волну прямоугольной формы

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{h}{2}, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Ряд по собственным функциям удобно записать в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Используя условия ортогональности а) — в) (см. выше), определим коэффициенты этого ряда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поскольку $f(x) = \pm h/2$, имеем $a_n = 0$, этого можно ожидать заранее вследствие свойств антисимметрии, кроме того,

$$b_n = \frac{h}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ — четное}, \\ \frac{2h}{n\pi}, & n \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Следовательно, разложение $f(x)$ по собственным функциям (в ряд Фурье) имеет вид: $f(x) = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

Упражнения

1. Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — собственные функции одного и того же эрмитова оператора, соответствующие двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Доказать, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ линейно независимы.

2. Оператор $\mathscr{L}$ не принадлежит к типу самосопряженных, причем $\mathscr{L}u_i+\lambda_i w u_i=0$, $\overline{\mathscr{L}}v_j+\lambda_j w v_j=0$. Показать, что $\int_a^b v_j \mathscr{L}u_i\,dx = \int_a^b u_i \overline{\mathscr{L}}v_j\,dx$, если

$$u_i p_0 v_j'\Big|_a^b = v_j p_0 u'_i\Big|_a^b, \quad u_i(p_1-p_0')v_j\Big|_a^b=0,$$

а условие ортогональности собственных функций u_i, v_j записывается в виде $\int_a^b u_i v_j w\,dx=0$ $(\lambda_i\neq\lambda_j)$.

9.3. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ (МЕТОД ШМИДТА)

С помощью этого метода из системы неортогональных линейно независимых функций * получают систему функций, ортогональных с некоторым весом внутри заданного интервала. Для удобства будем предполагать функции вещественными. Обобщение на комплексный случай не представляет особых трудностей.

До сих пор мы имели дело с ненормированными функциями. Это означает, что $\int_a^b \varphi_i^2 w\,dx = N_i^2$, где N_i — произвольная константа. Поскольку основное уравнение (9.6) линейно и однородно, решение этого уравнения можно умножить на любую постоянную; полученное произведение также будет решением. Теперь каждое решение $\varphi_i(x)$ умножим

* Такая система функций может возникнуть при решении дифференциального уравнения в частных производных, в котором собственное значение не зависит от одной или нескольких констант разделения. Примером служит задача об атоме водорода (см. разд. 13.2). Собственное значение (энергия) не зависит ни от орбитального момента количества движения электрона, ни от его проекции m на ось z.

на N_i^{-1}, тогда новая (нормированная) функция φ_i будет удовлетворять условию

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\, w(x)\, dx = 1 \tag{9.24}$$

или

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, w(x)\, dx = \delta_{ij}. \tag{9.25}$$

Условие (9.24) означает, что функции φ нормированы на единицу. Соотношение (9.25) учитывает еще и ортогональность функций. Функции, удовлетворяющие условию (9.25), называются ортонормированными (т. е. они ортогональны и нормированы на единицу). Возможна и другая нормировка. Действительно, как мы увидим ниже, исторически получилось так, что специальные функции математической физики (см. гл. 12 и 13) нормированы различным образом.

Предположим, что $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют систему линейно независимых, но неортогональных и ненормированных функций. Пусть

$$\varphi_0(x) = u_0(x) \Big/ \left(\int u_0^2 w\, dx \right)^{1/2}, \tag{9.26}$$

т. е. $\varphi_0(x)$ нормирована на единицу.

Определим ненормированную функцию

$$\psi_1(x) = a_{10}\varphi_0(x) + u_1(x), \tag{9.27}$$

где a_{10} — неизвестная постоянная. Потребуем, чтобы $\psi_1(x)$ была: 1) ортогональна функции $\varphi_0(x)$ и 2) нормирована на единицу.

Из требования ортогональности получаем

$$\int \psi_1 \varphi_0 w\, dx = a_{10} \int \varphi_0^2 w\, dx + \int u_1 \varphi_0 w\, dx = 0. \tag{9.28}$$

Далее, поскольку φ_0 нормирована на единицу, имеем

$$a_{10} = -\int u_1 \varphi_0 w\, dx. \tag{9.29}$$

Нормируя функцию $\psi_1(x)$, получим

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\left(\int \psi_1^2 w\, dx \right)^{1/2}}. \tag{9.30}$$

Соотношение (9.30) в общем виде запишется так:

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\left(\int \psi_i^2(x)\, w(x)\, dx\right)^{1/2}}, \tag{9.31}$$

где

$$\psi_i(x) = a_{i0}\varphi_0 + a_{i1}\varphi_1 + \ldots + a_{ii-1}\varphi_{i-1} + u_i; \tag{9.32}$$

$$a_{ij} = -\int u_i \varphi_j w\, dx. \tag{9.33}$$

Заметим, что хотя мы рассмотрели единственно возможный способ построения системы ортогональных или ортонормированных функций, сами функции $\varphi_i(x)$ не являются единственными. Для заданных отрезка и весовой функции существует бесконечное множество возможных систем ортонормированных функций. В качестве иллюстрации рассмотрим два непараллельных вектора **A** и **B** в плоскости xy. Нормируем **A** на единицу и затем образуем вектор, равный $\mathbf{B}' = a\mathbf{B} + \mathbf{A}$, так что $\mathbf{B}'$ будет перпендикулярен **A**. Построение нормированного вектора $\mathbf{B}'$ и есть как раз ортогонализация двух векторов. Однако любые два перпендикулярных вектора, например, такие, как **i** и **j**, можно выбрать в качестве ортонормированной системы. И опять, бесконечное число возможных поворотов векторов **i** и **j** вокруг оси z дает бесконечное число возможных ортонормированных систем.

Пример. Образуем ортогональную систему на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ из набора функций $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ с помощью весовой функции $w(x) = 1$.

В соответствии с методом ортогонализации Шмидта

$$u_0 = 1, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{9.34}$$

тогда

$$\psi_1(x) = \frac{a_{10}}{\sqrt{2}} + x, \tag{9.35}$$

а

$$a_{10} = -\int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{2}} = 0. \tag{9.36}$$

Пронормировав, получим

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x. \tag{9.37}$$

Продолжим этот процесс:

$$\psi_2(x) = a_{20}\frac{1}{\sqrt{2}} + a_{21}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x + x^2. \tag{9.38}$$

Снова с учетом симметрии

$$a_{20} = -\int_{-1}^{1}\frac{x_2}{\sqrt{2}}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad a_{21} = -\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x^3\,dx = 0, \tag{9.39}$$

откуда

$$\psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}. \tag{9.40}$$

После нормировки на единицу

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1). \tag{9.41}$$

Аналогично

$$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x). \tag{9.42}$$

Вообще (см. гл. 12),

$$\varphi_n(x) = \sqrt{(2n+1)/2}\,P_n(x), \tag{9.43}$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра n-го порядка. Таким образом, метод Шмидта позволяет, правда очень громоздким и неудобным способом, получить полиномы Лежандра.

Ортогональные полиномы. Рассмотренный пример хорошо иллюстрирует метод ортогонализации Шмидта. С помощью этого метода можно построить полиномы Лежандра, хотя первоначальные функции не являются решениями уравнения Лежандра и не образуют системы вырожденных собственных функций. Это просто набор функций, которые служат основой для получения системы функций, ортогональных с данным весом в заданном интервале. То, что полученные полиномы оказались полиномами Лежандра, не является неожиданностью, это — прямое следствие выбора интервала и весовой функции. В табл. 9.2 приведены ортогональные полиномы, полученные ортогонализацией функций $u_n(x) = x^n$, для разных интервалов и весовых функций.

Подробное изучение метода ортогонализации позволяет установить два важных момента. Во-первых, прежде чем

Таблица 9.2

Полиномы *	Интервал	Весовая функция $w(x)$	Нормировочная постоянная
Лежандра	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	1	$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$
Чебышева I	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\int_{-1}^{1} [T_n(x)]^2 (1-x^2)^{-1/2}\, dx = \begin{cases} \pi/2, & n \neq 0, \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$
Чебышева II	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$(1-x^2)^{1/2}$	$\int_{-1}^{1} [U_n(x)]^2 (1-x^2)^{1/2}\, dx = \frac{\pi}{2}$
Лагерра	$0 \leqslant x < \infty$	e^{-x}	$\int_{0}^{\infty} [L_n(x)]^2 e^{-x} dx = 1$
Лагерра, присоединенные	$0 \leqslant x < \infty$	$x^k e^{-x}$	$\int_{0}^{\infty} [L_n^k(x)]^2 x^k e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!}$
Эрмита	$-\infty < x < \infty$	e^{-x^2}	$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = 2^n \pi^{1/2} n!$

* В гл. 12 и 13 показано, что эти полиномы являются решениями соответствующих уравнений.

начинать работать с функциями, их необходимо нормировать на единицу. В разобранном примере надо потребовать, чтобы

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}, \tag{9.44}$$

только после этого полученная система функций на самом деле окажется составленной из полиномов Лежандра. Во-вторых, знак φ_n всегда неопределенен. В этом примере мы требовали, чтобы знак члена с наивысшей степенью x в полиноме был положительным. В случае полиномов Лагерра наивысшая степень должна иметь множитель $(-1)^n/n!$

Упражнения

1. С помощью метода Шмидта получить первые три полинома Лагерра, рассматривая набор функций $u_n(x)=x^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ на интервале $0 \leqslant x < \infty$ с весовой функцией $w(x)=e^{-x}$, используя условие нормировки

$$\int_{0}^{\infty} L_m(x)\,L_n(x)\,e^{-x}\,dx = \delta_{mn}. \tag{9.45}$$

Ответ: $L_0=1$, $L_1=1-x$, $L_2=(2-4x+x^2)/2$.

2. Получить первые три полинома Эрмита, рассматривая те же функции на интервале $-\infty < x < \infty$, если $w(x)=e^{-x^2}$, а $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\,H_n(x)\,w(x)\,dx = \delta_{mn}2^m m!\,\pi^{1/2}$ — условие нормировки.

Ответ: $H_0=1$, $H_1=2x$, $H_2=4x^2-2$.

3. Получить первые три полинома Чебышева (типа I и II), если отрезок задан неравенствами: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а условия нормировки имеют вид для полиномов типа I:

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)\,w(x)\,dx = \delta_{mn}\begin{cases}\pi, & m=n=0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\geqslant 1,\end{cases}$$

где $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$.

Ответ: $T_0=1$, $T_1=x$, $T_2=2x^2-1$, $(T_3=4x^3-3x)$.

Для полиномов типа II

$$\int U_n(x)\,U_m(x)\,w(x)\,dx = \delta_{mn}\frac{\pi}{2}, \quad w(x)=(1-x^2)^{1/2}.$$

Указание.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}x^{2n}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{4\cdot6\cdot8\ldots(2n+2)}, & n=1,2,3,\ldots\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=0.\end{cases}$$

Ответ: $U_0=1$, $U_1=2x$, $U_2=4x^2-1$.

4. Получить систему функций, ортогональных в интервале $0\leqslant x<\infty$, используя функции $u_n(x)=e^{-nx}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Весовой множитель $w(x)$ положить равным единице. Функции $u_n(x)$ являются решениями уравнений $u_n''-n^2u_n=0$ и, очевидно, записаны в самосопряженной форме. Почему теория Штурма—Лиувилля не гарантирует ортогональности этих функций?

9.4. ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Третье важное свойство эрмитова оператора заключается в том, что собственные функции этого оператора образуют полную систему *. Это означает, что любая «хорошая» функция $F(x)$ (по крайней мере, кусочно-непрерывная) может быть аппроксимирована рядом

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \tag{9.46}$$

с любой заданной степенью точности **. Точнее, *система* $\varphi_n(x)$ *называется полной* ***, если

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[F(x)-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)\right]^2w(x)\,dx=0. \tag{9.47}$$

Отметим, что эрмитовы операторы являются самосопряженными линейными дифференциальными операторами второго порядка.

---

* Доказательство см., например, Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Перев. с англ. М.— Л., Гостехиздат, 1951.

** Если в системе конечное число функций, то суммирование производится по линейно независимым членам этой системы.

*** Часто такие системы называют замкнутыми.

Умножая соотношение (9.46) на $\varphi_m(x)\, w(x)$ и интегрируя полученный результат, получаем для коэффициентов

$$a_m = \int_a^b F(x)\, \varphi_m(x)\, w(x)\, dx. \tag{9.48}$$

Здесь мы использовали свойство ортогональности собственных функций.

Если набор функций $\varphi_n(x)$ не образует полной системы, может быть, просто из-за того, что в него не включено требуемое бесконечное множество членов, мы придем к неравенству Бесселя. Рассмотрим сначала случай с конечным числом членов. Пусть $\mathbf{A}$ — n-компонентный вектор:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \ldots + \mathbf{e}_n a_n, \tag{9.49}$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичный вектор, а a_i — соответствующая компонента $\mathbf{A}$, т. е.

$$a_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{9.50}$$

Тогда

$$\left(\mathbf{A} - \sum_j \mathbf{e}_i a_i\right)^2 \geqslant 0. \tag{9.51}$$

Неравенство Бесселя. Если суммирование производится по всем компонентам, то, очевидно, результат, согласно (9.49), равен $\mathbf{A}$, и мы имеем равенство. Если, однако, сумма не включает всех компонент, мы придем к неравенству. Раскрывая скобки в соотношении (9.51) и учитывая, что единичные векторы удовлетворяют условию ортогональности

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \tag{9.52}$$

получаем *неравенство Бесселя*

$$A^2 \geqslant \sum_j a_i^2. \tag{9.53}$$

Чтобы распространить это неравенство на функции, рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_i a_i \varphi_i(x)\right]^2 w(x)\, dx \geqslant 0. \tag{9.54}$$

При $w(x) > 0$ подынтегральная функция неотрицательна. В согласии с (9.46) этот интеграл обращается в нуль, если система функций — полная, и, вообще говоря, он положителен. После возведения в квадрат получим

$$\int_a^b |f(x)|^2 w x\, dx - 2\sum_i a_i \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,w(x)\,dx + \sum_i a_i^2 \geqslant 0. \quad (9.55)$$

Воспользуемся равенством (9.48), тогда

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx \geqslant \sum_i a_i^2. \quad (9.56)$$

т. е. сумма квадратов коэффициентов разложения a_i меньше или равна интегралу от взвешенного квадрата функции $|f(x)|^2$, равенство выполняется в том, и только в том случае, если разложение — точное (система функций $\varphi_n(x)$ полная).

Неравенство Шварца. Рассмотрим квадратное уравнение

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = 0. \quad (9.57)$$

Поскольку при вещественном x любой член этого уравнения больше или равен нулю, решение его может быть вещественным только в том случае, если b_i/a_i — постоянное. Если это отношение не равно некоторой постоянной, x может быть комплексным. Возведем в квадрат

$$x^2 \sum_i^n a_i^2 + 2x \sum_i^n a_i b_i + \sum_i^n b_i^2 = 0; \quad (9.58)$$

так как x комплексное (или равно $-b_i/a_i$), то из квадратичной формулы для x^* имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \quad (9.59)$$

---

* Дискриминант комплексный (или равен нулю).

(Равенство выполняется при постоянном b_i/a_i.) При переходе к векторам имеем

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = a^2b^2\cos^2\theta \leqslant a^2b^2, \tag{9.60}$$

где θ — угол, образованный этими векторами.

Неравенство Шварца для функций имеет вид

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx. \tag{9.61}$$

Здесь знак равенства возможен только тогда, когда $g(x) = \alpha f(x)$, где α — постоянная. Неравенство Шварца (9.61) можно получить из уравнения

$$\int |\lambda f(x) + g(x)|^2\,dx = 0 \tag{9.62}$$

так же, как из соотношения (9.57) неравенство для n-компонентного вектора.

Если $g(x)$ — нормированная собственная функция, то из неравенства (9.61) получим

$$a_i^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx, \tag{9.63}$$

результат, который следует из (9.56), здесь $w(x) = 1$.

Дельта-функция Дирака. Система ортонормированных собственных функций $\varphi_n(x)$ обеспечивает еще одно интересное представление δ-функции Дирака. Рассмотрим сумму

$$K(x, t) = K(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(t). \tag{9.64}$$

(Для удобства будем полагать, что $\varphi_n(x)$ переопределена таким образом, что включает в себя множитель $[w(x)]^{1/2}$, если $w(x) \neq 1$.) Записанный ряд (9.64) в общем случае не является равномерно сходящимся, однако его можно использовать в подынтегральном выражении, которое после интегрирования будет сходящимся (см. разд. 5.5).

Запишем интеграл

$$\int F(t)\,K(x, t)\,dt$$

и предположим, что $F(t)$ можно разложить в ряд по собственным функциям $\varphi_p(t)$:

$$\int F(t)\,K(x,t)\,dt = \int \sum_{p=0}^{\infty} a_p\varphi_p(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(t)\,dt =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} a_p\varphi_p(x) = F(x). \tag{9.65}$$

Скалярные произведения $\varphi_p\varphi_n$ $(n \neq p)$ в силу условия ортогональности (9.25) обращаются в нуль. Вспоминая определение δ-функции Дирака (см. разд. 1.15 и 8.6), мы видим, что уравнение (9.65) означает, что

$$K(x,\ t) = \delta(x - t). \tag{9.66}$$

Полагая $F(t) = \varphi_0$, где φ_0 — некоторая постоянная, можно легко показать, что

$$\int K(x,\ t)\,dt = 1. \tag{9.67}$$

Поведение функции $K(x,\ t)$ в точке $x = t$ исследуем с помощью неравенства Бесселя. По определению,

$$K(t,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(t)]^2. \tag{9.68}$$

Воспользовавшись неравенством (9.56), получим

$$\int [K(t,\ t)]^2\,dt \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty. \tag{9.69}$$

Следовательно, как и ожидалось, $K(x,\ t)$ расходится в точке $x = t$.

Функция Грина. Разлагая функцию Грина по собственным функциям соответствующего однородного уравнения, получаем ряд, подобный в некотором смысле тому, который представляет $K(x,\ t)$. Запишем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + k^2\psi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}). \tag{9.70}$$

Запишем также однородное уравнение Гельмгольца, решениями которого являются собственные функции φ_n,

$$\nabla^2\varphi_n(\mathbf{r}) + k_n^2\varphi_n(\mathbf{r}) = 0. \tag{9.71}$$

Как показано в разд. 8.6, функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяет уравнению с точечным источником

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{9.72}$$

Разложим функцию Грина в ряд по собственным функциям однородного уравнения (9.71)

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2)\,\varphi_n(\mathbf{r}_1), \tag{9.73}$$

подставляя это разложение в уравнение (9.72), получаем

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2)\,k_n^2\varphi_n(\mathbf{r}_1) + k^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2)\,\varphi_n(\mathbf{r}_1) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\mathbf{r}_1)\,\varphi_n(\mathbf{r}_2). \tag{9.74}$$

Здесь использовано разложение $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ по собственным функциям [см. уравнения (9.64) и (9.66)]. Чтобы выделить коэффициент a_n, воспользуемся ортогональностью функций $\varphi_n(\mathbf{r}_1)$, а затем подставим полученное выражение для a_n в уравнение (9.73), после чего функция Грина приобретет вид билинейного разложения, симметричного относительно $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$,

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\,\varphi_n(\mathbf{r}_2)}{k_n^2 - k^2}. \tag{9.75}$$

Наконец, искомое решение $\psi(\mathbf{r}_1)$ неоднородного уравнения получается по формуле

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\rho(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2. \tag{9.76}$$

Если записать неоднородное дифференциальное уравнение в общем виде

$$\mathcal{L}\psi + \lambda\psi = -\rho, \tag{9.77}$$

где $\mathscr{L}$ — эрмитов оператор, то

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2)}{\lambda_n - \lambda}. \tag{9.78}$$

Здесь λ_n — собственное значение, а φ_n — соответствующая ортонормированная собственная функция однородного дифференциального уравнения

$$\mathscr{L}\psi + \lambda\psi = 0. \tag{9.79}$$

Более подробно функция Грина будет рассмотрена в разд. 16.5.

Упражнения

1. Вместо представления функции $F(x)$ в виде бесконечного ряда $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ с $a_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)w(x)\,dx$ воспользоваться рядом с *конечным* числом членов

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{m} c_n \varphi_n(x).$$

Показать, что среднеквадратичная ошибка

$$\int_a^b \left[F(x) - \sum_{n=0}^{m} c_n \varphi_n(x)\right]^2 w(x)\,dx$$

минимальна, если $c_n = a_n$.

2. Получить неравенство Шварца из тождества

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 = \int_a^b [f(x)]^2\,dx \int_a^b [g(x)]^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)]^2\,dx\,dy.$$

3. Подставив разложение функции Грина (9.75) по собственным функциям в соотношение (9.76), показать, что этим соотношением действительно определено решение неоднородного уравнения Гельмгольца (9.70).

4. Определенная уравнениями (9.64) и (9.66) δ-функция Дирака имеет вид

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(t).$$

Показать, что в случае системы ортонормированных функций φ_n уравнение (9.46) вытекает из уравнений (9.64) и (9.66). *Указание.* Рассмотреть интеграл $F(x)=\int F(t)\,\delta(x-t)\,dt$.

5. Пусть H — положительно определенный эрмитов оператор, т. е. $\int_a^b f^*Hf\,dx>0$. Доказать обобщенное неравенство Шварца

$$\left|\int_a^b f^*Hg\,dx\right|^2\leqslant\int_a^b f^*Hf\,dx\int_a^b g^*Hg\,dx.$$

ГЛАВА 10

ГАММА-ФУНКЦИЯ (факториальная функция)

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Гамма-функция возникает при нормировке волновой функции и вычислении вероятностей в статистической механике. Однако она в меньшей степени имеет непосредственное физическое приложение и истолкование, чем, скажем, функции Лежандра и Бесселя. Но с ее помощью можно определять другие функции, которые находят непосредственное применение в физических задачах.

Предельная форма Эйлера. Впервые гамма-функция была определена Эйлером в виде предела *

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z. \qquad (10.1)$$

Заменим z на $z+1$:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+z+1)} n^{z+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} n^z = z\Gamma(z). \qquad (10.2)$$

Это основное функциональное соотношение для гамма-функции. Необходимо заметить, что последнее уравнение — уравнение в конечных разностях. Показано, что гамма-функция принадлежит к общему классу функций, которые не удовлетворяют ни одному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами. Из определения гамма-функции имеем

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n(n+1)} n = 1. \qquad (10.3)$$

---

* В этой главе под z будем подразумевать либо вещественное, либо комплексное число.

Далее, из уравнения (10.2) вытекает, что

$$\Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2,\ \ldots,\ \Gamma(n) = (n-1)! \tag{10.4}$$

Интегральное представление Эйлера. Второе определение гамма-функции также связано с именем Эйлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,\ \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{10.5}$$

Ограничение на переменную z необходимо, чтобы интеграл сходился. В различных физических задачах гамма-функция встречается либо именно в этой форме, либо в несколько измененном виде:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1}\, dt,\ \operatorname{Re}(z) > 0, \tag{10.6}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt,\ \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{10.7}$$

При $z = 1/2$ уравнение (10.6) точно совпадает с интегралом ошибок Гаусса и, следовательно,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{10.8}$$

Для доказательства эквивалентности двух определений гамма-функций (10.1) и (10.5) рассмотрим функцию двух переменных

$$F(z,\ n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt,\ \operatorname{Re}(z) > 0, \tag{10.9}$$

где n — целое положительное число*. По определению экспоненты,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}, \tag{10.10}$$

поэтому в согласии с (10.5)

$$\lim_{n\to\infty} F(z,\ n) = F(z,\ \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = \Gamma(z). \tag{10.11}$$

---

* Форма записи $F(z,n)$ предопределена видом бета-функции (10.60).

Рассмотрим вновь $F(z, n)$ и последовательно проинтегрируем по частям. Для удобства положим $u=t/n$, тогда

$$F(z, n)=n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\, du. \tag{10.12}$$

Проинтегрируем по частям

$$\frac{F(z, n)}{n^z}=(1-u)^n \frac{u^z}{z}\Big|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z\, du. \tag{10.13}$$

Повторяя эту процедуру и учитывая, что проинтегрированная часть на обоих пределах интегрирования равна нулю, получаем

$$F(z, n)=n^z \frac{n(n-1)\ldots 1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int_0^1 u^{z+n-1}\, du=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}n^z, \tag{10.14}$$

что идентично правой части уравнения (10.1). Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} F(z, n)=F(z, \infty)\equiv \Gamma(z), \tag{10.15}$$

т. е. утверждение доказано.

Бесконечное произведение Вейерштрасса. Дадим третье определение (Вейерштрасса) гамма-функции, используя бесконечное произведение

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\equiv z e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \tag{10.16}$$

где C — постоянная Эйлера:

$$C=0{,}577216\ldots \tag{10.17}$$

Эта форма записи следует из первого определения (10.1) гамма-функции, которое можно переписать иначе:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{z(z+1)\ldots(z+n)}n^z=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}n^z. \tag{10.18}$$

Воспользуемся тем, что

$$n^{-z}=e^{(-\ln n)z}, \tag{10.19}$$

тогда

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} e^{(-\ln n)z} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right). \qquad (10.20)$$

Умножим и поделим это на

$$\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)z\right] = \prod_{m=1}^{n} e^{z/m}, \qquad (10.21)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left\{\lim_{n\to\infty} \exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z\right]\right\} \times$$

$$\times\left[\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right) e^{-z/m}\right]. \qquad (10.22)$$

Как показано в разд. 5.2, бесконечный ряд в показателе экспоненты сходится к постоянной Эйлера, и мы приходим к равенству (10.16).

В разд. 5.9 мы убедились также, что бесконечное произведение Вейерштрасса, с помощью которого определена гамма-функция, приводит к важному тождеству

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z). \qquad (10.23)$$

Снова полагая $z = 1/2$, получим в согласии с (10.8)

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \qquad (10.24)$$

(взято положительное значение квадратного корня).

Из определения Вейерштрасса сразу же следует, что $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, а функция $[\Gamma(z)]^{-1}$ не имеет полюсов в любой конечной области комплексной плоскости, иными словами, у $\Gamma(z)$ нет нулей. Эти же свойства следуют и из соотношения (10.23), в котором $\pi/(\sin \pi z)$ нигде не обращается в нуль.

Факториальное обозначение. До сих пор гамма-функция рассматривалась с помощью обычных классических обозначений. Однако -1 в показателе $(z-1)$ во втором определении (10.5) сильно мешает, поэтому перепишем (10.5) иначе:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^z\, dt \equiv z!, \quad \operatorname{Re} z > -1, \qquad (10.25)$$

и *определим* тем самым факториальную функцию $z!$ Иногда для $z!$ применяется обозначение Гаусса

$$\Pi(z) = z! \tag{10.26}$$

Символ Γ для обозначения гамма-функции был введен Лежандром. Факториальная функция из уравнения (10.25) связана с гамма-функцией соотношением

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad \text{или} \quad \Gamma(z+1) = z!. \tag{10.27}$$

Если $z = n$, где n — натуральное число, то мы получим обычный факториал

$$z! = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \tag{10.28}$$

Однако необходимо четко представлять, что, поскольку факториальная функция $z!$ определена соотношением (10.25) или эквивалентным ему (10.27), она не ограничивается только целыми положительными значениями аргумента (рис. 10.1, *а*). Конечно-разностное уравнение (10.2) в новых обозначениях принимает вид

$$(z-1)! = z!/z. \tag{10.29}$$

Отсюда немедленно следует, что

$$0! = 1 \tag{10.30}$$

и

$$n! = \pm\infty \text{ для } n \text{ — целого отрицательного} \tag{10.31}$$

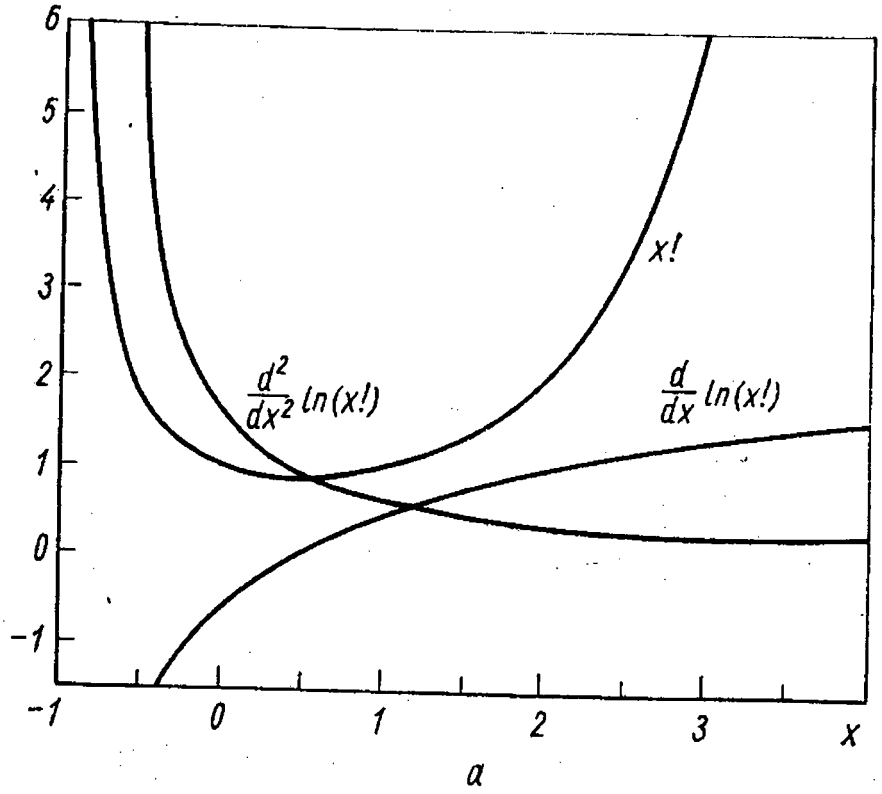
(рис. 10.1,*б*). Соотношение (10.23) также можно записать с помощью факториальной функции

$$z!\,(-z)! = \pi z/\sin \pi z. \tag{10.32}$$

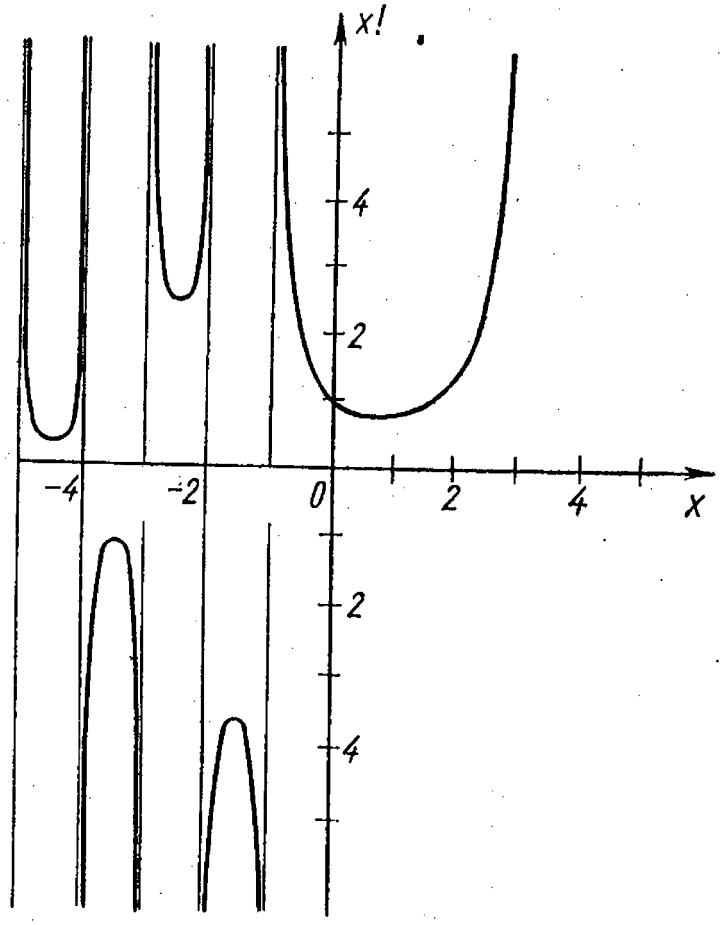
Интегральное представление. Интегральное представление гамма-функции, которым пользуются для асимптотического представления функций Бесселя рядами, имеет вид

$$\int_C e^{-z} z^{\nu}\, dz = (e^{2\pi i \nu} - 1)\, \nu!, \tag{10.33}$$

где контур C показан на рис. 10.2. Представление контурным интегралом обычно применяется, когда ν — нецелое, в этом случае $z = 0$ — точка ветвления. Формула (10.33)



а



б

Рис. 10.1. Графики (*а*) факториальной функции ($|\ln x!| = (0{,}46163\ldots)! = 0{,}88560$) и первых двух производных $\ln(x!)$; факториальная функция отрицательного аргумента (*б*).

легко проверяется для $\nu > -1$ деформированием контура (см. контур C' на рис. 10.2). Интегрирование в направлении от ∞ к началу дает $\nu!$, причем аргумент z равен нулю. Интегрирование в обратном направлении до ∞ (в четвертом квадранте) дает в результате $e^{2\pi i\nu}\nu!$, аргумент в этом случае увеличивается до 2π. В случае $\nu > -1$ обход по малой

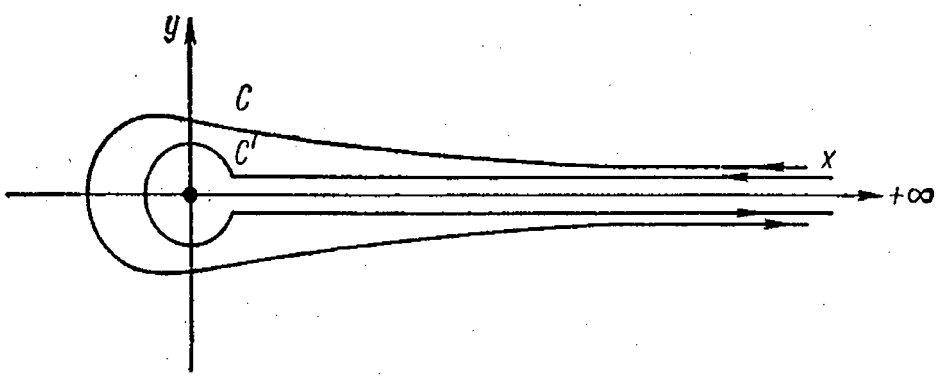


Рис. 10.2. Контур интегрирования C в интегральном представлении гамма-функции; C' — деформированный контур интегрирования (разрез вдоль положительной оси x).

окружности вокруг начала не дает вклада, и мы получаем результат (10.33).

Часто удобно представить этот результат в более симметричной форме

$$\int_C e^{-z}(-z)^\nu\, d\nu = 2i \sin \nu\pi \nu! \qquad (10.34)$$

Это соответствует такому выбору аргумента z в (10.33) когда он изменяется в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Проведенный анализ позволил убедиться в справедливости (10.33) и (10.34) для $\nu > -1$. Сравнительно нетрудно распространить эти результаты на любые нецелые ν. Во-первых, мы замечаем, что интеграл существует для $\nu < -1$, если только начало координат не попадает на контур интегрирования. Во-вторых, интегрирование по частям убеждает нас, что уравнение (10.35) приводит к конечно-разностному уравнению (10.29). Если теперь взять (10.29) за определение факториальной функции при $\nu < -1$, то выражения (10.34) и (10.35) окажутся справедливыми для любых ν (исключая целые отрицательные значения).

Упражнения

1. Используя интегральное представление Эйлера (10.5), получить рекуррентную формулу $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

2. Асимптотическое разложение (см. разд. 5.10) функции ошибок задается как

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{e^{-x^2}}{x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^4}-\ldots(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^nx^{2n}}+\ldots\right). \tag{10.35}$$

Записать этот ряд в виде суммы по n, выразив коэффициент при n-м члене через факториал.

3. Преобразуя интеграл в гамма-функцию, показать, что

$$-\int_0^1 x^k \ln x\,dx=\frac{1}{(k+1)^2},\quad k>-1.$$

4. В статистической физике встречается интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\,dx$.

Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\,dx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\left(\frac{\pi}{a^{2n+1}}\right)^{1/2}.$$

Переписать правую часть этого равенства в общей форме, откуда при $n=0$ мы получим значение $(\pi/a)^{1/2}$.

5. Показать, что гамма-функцию $\Gamma(z)$ можно определить интегралами

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}\,dt,\quad \mathrm{Re}\,(z)>0;$$

$$\Gamma(z)=\int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}\,(z)>0.$$

6. Показать, что $\int_0^\infty e^{-x^4}\,dx=(1/4)\Gamma$

7. Проверить равенства

$$\int_0^\infty e^{-r} \ln r\, dr = -C, \quad \int_0^\infty r e^{-r} \ln r\, dr = 1 - C,$$

$$\int_0^\infty r^n e^{-r} \ln r\, dr = (n-1)! + n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r} \ln r\, dr, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Указание. Проинтегрировать по частям или продифференцировать по n интеграл, с помощью которого задана функция $n!$

8. Найти полюса функции $\Gamma(z)$. Показать, что $\Gamma(z)$ имеет только простые полюса и определить в них вычеты.

9. Показать, что уравнение $x! = k$, $k \neq 0$ имеет бесконечное множество вещественных корней.

10. Показать, что

$$|\Gamma(\alpha + i\beta)| = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{-1/2}.$$

Это соотношение используется в теории β-распада.

11. Во многих задачах электромагнитной теории получаются произведения

$$2n\,(2n-2)\ldots 6\cdot 4\cdot 2 \equiv (2n)!!, \quad (2n+1)\,(2n-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1 \equiv (2n+1)!!.$$

Показать, что $(2n)!! = 2^n n!$, $(2n+1)!! = (2n+1)!/2^n n!$.

12. Представление функций Лежандра второго рода степенным рядом содержит выражение

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots(n+2s-1)\,(n+2s)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots(2s-2)\cdot(2s)\cdot(2s+3)\,(2s+5)\,(2s+7)\ldots(2s+2n+1)},$$

в котором s — натуральное число. Переписать это выражение через факториалы.

10.2. ДИГАММА- И ПОЛИГАММА-ФУНКЦИИ (ПРОИЗВОДНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ)

Дигамма-функция (логарифмическая производная гамма-функции). Из различных определений, с помощью которых ввели гамма-функцию, можно заметить, что они неудобны для непосредственного вычисления производной этой функции. Вместо этого обычно берут натуральный логарифм гамма-функции (10.1), получают вместо произведения сумму и затем дифференцируют, т. е.

$$z! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)\,(z+2)\ldots(z+n)}\, n^z \qquad (10.36)$$

и

$$\ln(z!) = \lim_{n\to\infty} [\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \ldots - \ln(z+n)], \quad (10.37)$$

где логарифм предела равен пределу логарифма. Дифференцируя по z, получаем

$$\frac{d}{dz}\ln(z!) \equiv \mathcal{F}(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right), \quad (10.38)$$

которое определяет дигамма-функцию $\mathcal{F}(z)$. Если вновь воспользоваться постоянной Эйлера (см. разд. 5.2. и 5.6), то (10.38) можно переписать иначе:

$$\mathcal{F}(z) = -C - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right). \quad (10.39)$$

Одно из приложений уравнения (10.39) связано с представлением функции Неймана рядом (см. разд. 11.2). Очевидно, что

$$\mathcal{F}(0) = -C = -0{,}577215664901\ldots * \quad (10.40)$$

Другая, вероятно чаще встречающаяся, форма записи $\mathcal{F}(z)$, приведена в разд. 10.3.

Полигамма-функция. Повторное дифференцирование дигамма-функции приводит к полигамма-функции:

$$\mathcal{F}^{(m)}(z) \equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln(z!) = (-1)^{m+1} m! \times {\times}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \quad (10.41)$$

Графики $\mathcal{F}(x)$ и $\mathcal{F}'(x)$ приведены на рис. 10.1,*а*. Ряд из уравнения (10.41) определяет дзета-функцию Римана **

---

* Постоянная C вычислялась до 1271 знака [Knuth D. E., Math. Comp., **16**, 275 (1962)] и до 3566 знака [Sweeney D. W., Math. Comp., **17**, 170 (1963)]. Интересно, что отношение 228/395 дает эту постоянную с точностью до шестого знака.

** В разд. 5.8 при $z \neq 0$ этот ряд использовался для получения обобщенной дзета-функции.

(с $z=0$)

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}, \tag{10.42}$$

поэтому

$$\mathscr{F}^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1). \tag{10.43}$$

Дзета-функция Римана. В табл. 10.1 приведены значения дзета-функции для различных аргументов. Характер изменения этой функции показан на рис. 5.4.

Таблица 10.1

s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$
2	1,6449340668	7	1,0083492774
3	1,2020569032	8	1,0040773562
4	1,0823232337	9	1,0020083928
5	1,0369277551	10	1,0009945751
6	1,0173430620		

С помощью дзета-функции Римана можно записать разложение Маклорена для $\ln(z!)$

$$\ln(z!) = -Cz + \frac{z^2}{2}\zeta(2) - \frac{z^3}{3}\zeta(3) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n}\zeta(n) + \ldots, \tag{10.44}$$

которое сходится внутри единичного круга $|z| < 1$; при $z = x$ областью сходимости будет отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Записанное разложение позволяет вычислять $z!$ для вещественных или комплексных z, однако для этой цели удобнее пользоваться рядом Стирлинга (см. разд. 10.3) и, кроме того, имеются превосходные таблицы значений гамма-функции комплексного аргумента, составленные с помощью ряда Стирлинга и рекуррентной формулы (10.29) *.

* Table of the Gamma Function for Complex Arguments, National Bureau of Standarts, Applied Mathematics Series, No. 34.

Упражнения

1. Убедиться, что два представления дигамма-функции

$$\mathscr{F}(x)=\sum_{r=1}^{x}\frac{1}{r}-C \quad \text{и} \quad \mathscr{F}(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x}{r(r+x)}-C$$

совпадают, если x — натуральное.

2. Функцию Неймана можно записать как *

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{[\mathscr{F}(r)+\mathscr{F}(n+r)]}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n+r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r},$$

тогда как у Морса и Фешбаха она записана в форме

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[2\ln\left(\frac{x}{2}\right)+C-\psi(n+1)\right]J_n(x)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\sum_{p=1}^{r}[1/p+1/(p+n)]}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}.$$

Здесь $\psi(z)=d(\ln\Gamma(z))/dz$. Используя представление рядом, убедиться в тождественности этих различных представлений функции Неймана.

3. Получить конечно-разностное уравнение для полигамма-функции

$$\mathscr{F}^{(m)}(z+1)=\mathscr{F}^{(m)}(z)+(-1)^m\frac{m!}{(z+1)^{m+1}}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

4. С помощью уравнения (10.39) показать, что

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-C-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{2\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}=2\ln 2.$$

---

* Jeffreys H., Jeffreys B. S. Methods of Mathematical Physics. 2nd Ed, Cambridge University Press, 1950.

Интегрируя вторую формулу, можно иным путем получить формулу удвоения (разд. 10.4).

5. Доказать, что $\frac{d}{dz}\ln(z!)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-(z+1)t}}{1-e^{-t}}\right)dt$ и, следовательно, постоянная Эйлера равна

$$C=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt.$$

6. Показать, что $\Gamma(x-iy)=u-iv$, если $\Gamma(x+iy)=u+iv$.

7. Полная энергия, излучаемая черным телом, равна

$$u=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx.$$

Показать, что интеграл в этом выражении равен $3!\,\zeta(4)$ [$\zeta(4)=\pi^4/90=1{,}0823\ldots$]. Конечный результат представляет собой закон Стефана—Больцмана.

8. Обобщить результат предыдущего упражнения и показать, что

$$\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{e^x-1}=s!\,\zeta(s+1),\quad \mathrm{Re}\,(s)>0. \tag{1}$$

Доказать, что

$$\int_0^\infty\frac{xs\,ds}{e^x+1}=s!\,(1-2^{-s})\,\zeta(s+1),\quad \mathrm{Re}\,(s)>0. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) иллюстрируют интегральное преобразование Меллина (разд. 15.1).

9. Релятивистская волновая функция Дирака для атома водорода содержит множитель $[2(1-\alpha^2Z^2)^{1/2}]!$, где постоянная тонкой структуры $\alpha=1/137$, а Z—атомный номер. Разложить этот множитель в ряд по степеням α^2Z^2.

10. При квантовомеханическом описании частицы в кулоновском поле необходимо знать аргумент комплексной факториальной функции. Определить аргумент $(1+ib)!$ для малых b.

10.3. РЯД СТИРЛИНГА

Для вычисления $\ln(z!)$ при очень больших z (в статистической механике), а также при подсчете этой величины в случае нецелых значений аргумента требуется разложение $\ln(z!)$ в ряд по отрицательным степеням z. Вероятно,

наиболее изящный способ получения такого разложения связан с применением метода перевала (см. разд. 7.4). Рассмотрим метод, который не требует проведения контурного интегрирования и является особенно простым.

Использование формулы Эйлера — Маклорена. Формула Эйлера — Маклорена для вычисления определенного интеграла имеет вид

$$\int_0^n f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+\frac{1}{2}f(n)-$$

$$-b_2[f'(n)-f'(0)]-b_4[f'''(n)-f'''(0)]-\ldots, \quad (10.45)$$

где коэффициенты b_{2n} связаны с числами Бернулли B_{2n} (см. разд. 5.8) соотношением

$$(2n)!\,b_{2n} = B_{2n}, \quad (10.46)$$

причем

$$B_0 = 1,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42,\ B_8 = 1/30,\ \ldots \quad (10.47)$$

Применим формулу (10.45) для вычисления определенного интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(z+x)^2} = \frac{1}{z}. \quad (10.48)$$

Для z, не лежащих на отрицательной вещественной полуоси, имеем

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z^2} + \mathscr{F}'(z) - \frac{2!b_2}{z^3} - \frac{4!b_4}{z^5} - \ldots \quad (10.49)$$

Воспользуемся соотношением (10.46) и разрешим последнее уравнение относительно $\mathscr{F}'(z)$:

$$\mathscr{F}'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{B_2}{z^3} + \frac{B_4}{z^5} + \ldots = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}}. \quad (10.50)$$

В силу исключительно сильной расходимости чисел Бернулли этот ряд не сходится. Он относится к типу асимптотических рядов и, несмотря на его расходимость, используется для практических вычислений (см. разд. 5.10).

Однократное интегрирование последнего выражения дает дигамма-функцию

$$\mathcal{F}(z) = C_1 + \ln z + \frac{1}{2z} - \frac{B_2}{2z^2} - \frac{B_4}{4z^4} - \ldots =$$

$$= C_1 + \ln z + \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}. \qquad (10.51)$$

Если проинтегрировать (10.51) по z от $z-1$ до z и затем устремить z к бесконечности, то постоянная интегрирования C_1 обратится в нуль.

Таким образом, формула (10.51) дает второе выражение для дигамма-функции, используемое столь же часто, как и форма записи (10.38).

Ряд Стирлинга. Неопределенный интеграл от дигамма-функции (10.51) равен

$$\ln(z!) = C_2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{B_2}{2z} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}} + \ldots, \qquad (10.52)$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования. Для определения C_2 удобно воспользоваться формулой удвоения Лежандра (см. разд. 10.4):

$$z!\,(z-1/2)! = 2^{-2z}\pi^{1/2}(2z)! \qquad (10.53)$$

В справедливости этой формулы в случае целых положительных z можно сразу убедиться, записав $(2z)!$ как произведение четных членов на произведение нечетных членов и последующего выделения множителя, равного 2, от каждого члена (см. упр. 4). Подставив (10.53) под знак логарифма в формуле удвоения, мы найдем C_2:

$$C_2 = \frac{1}{2}\ln 2\pi, \qquad (10.54)$$

откуда

$$\ln(z!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z +$$

$$+ \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \ldots \qquad (10.55)$$

Это асимптотическое разложение называют *рядом Стирлинга*. Абсолютное значение ошибки при использовании

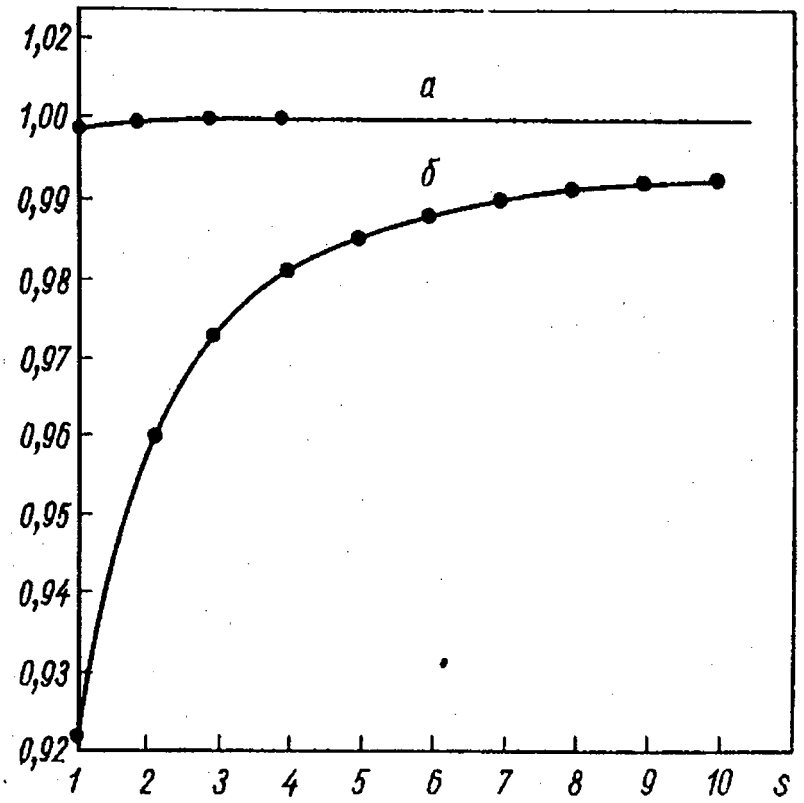


Рис. 10.3. Точность формулы Стирлинга:
$а - \frac{\sqrt{2\pi}s^{s+1/2}e^{-s}(1+1/12s)}{s!}$; $б - \frac{\sqrt{2\pi}s^{s+1/2}e^{-s}}{s!}$.

этого ряда меньше абсолютного значения первого отбрасываемого члена.

s	$\frac{\sqrt{2\pi}s^{s+1/2}e^{-s}}{s!}$	$\frac{\sqrt{2\pi}s^{s+1/2}e^{-s}\left[1+\frac{1}{12s}\right]}{s!}$
1	0,92213	0,99898
2	0,95950	0,99949
3	0,97270	0,99972
4	0,97942	0,99983
5	0,98349	0,99988
6	0,98621	0,99992
7	0,98817	0,99994
8	0,98964	0,99995
9	0,99078	0,99996
10	0,99170	0,99998

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно также определить, сравнивая с первым членом разложения, которое получается по методу перевала (см. разд. 7.4).

Для более ясного представления масштаба ошибки, с которой связано пользование разложением Стирлинга, на рис. 10.3 изображена кривая отношения первого члена в разложении Стирлинга к величине $s!$ В табл. 10.2 приведены отношения одного первого члена и суммы первых двух членов к величине $s!$.

Упражнения

1. Переписать формулу Стирлинга для $z!$

Ответ: $z! = \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^3} - \frac{139}{51840z^5} + \dots\right)$.

2. Определить относительную точность ряда Стирлинга для $\ln(z!)$ при $z = 4$ в случае одного, двух, трех и четырех членов.

3. Интегрируя уравнение (10.51) от $z-1$ до z и затем полагая, что $z \to \infty$, определить постоянную C_1 в асимптотическом представлении дигамма-функции $\mathcal{F}(z)$.

4. Логарифмируя формулу удвоения, показать, что постоянная C_2 в формуле Стирлинга равна $(1/2)\ln 2\pi$.

5. Не используя формулу Стирлинга, показать, что $\ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x\, dx$, $\ln(n!) > \int_1^{n} \ln x\, dx$, n — целое $\geqslant 2$. Отметим, что арифметическое значение этих двух интегралов дает хорошее приближение разложения Стирлинга.

10.4. БЕТА-ФУНКЦИЯ

Используя интегральное определение (10.25), можно представить произведение двух факториалов в виде произведения интегралов. Для упрощения возьмем интегралы в конечных пределах

$$m!n! = \lim_{a^2 \to \infty} \int_0^{a^2} e^{-u} u^m\, du \int_0^{a^2} e^{-v} v^n\, dv, \quad \operatorname{Re} m > -1, \quad \operatorname{Re} n > -1. \tag{10.56}$$

Сделав замену $u = x^2$ и $v = y^2$, получим

$$m!n! = \lim_{a\to\infty} 4 \int_0^a e^{-x^2} x^{2m+1}\, dx \int_0^a e^{-y^2} y^{2n+1}\, dy. \quad (10.57)$$

Запишем соотношение (10.57) в полярных координатах

$$m!n! = \lim_{a\to\infty} 4 \int_0^a e^{-r^2} r^{2m+2n+3}\, dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta\, d\theta =$$

$$= (m+n+1)!\, 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta\, d\theta, \quad (10.58)$$

в котором определенный интеграл вместе с множителем 2 называется бета-функцией:

$$B(m+1,\ n+1) \equiv 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = B(n+1,\ m+1). \quad (10.59)$$

Здесь аргументами выбраны $n+1$ и $m+1$, что связано с традиционными обозначениями.

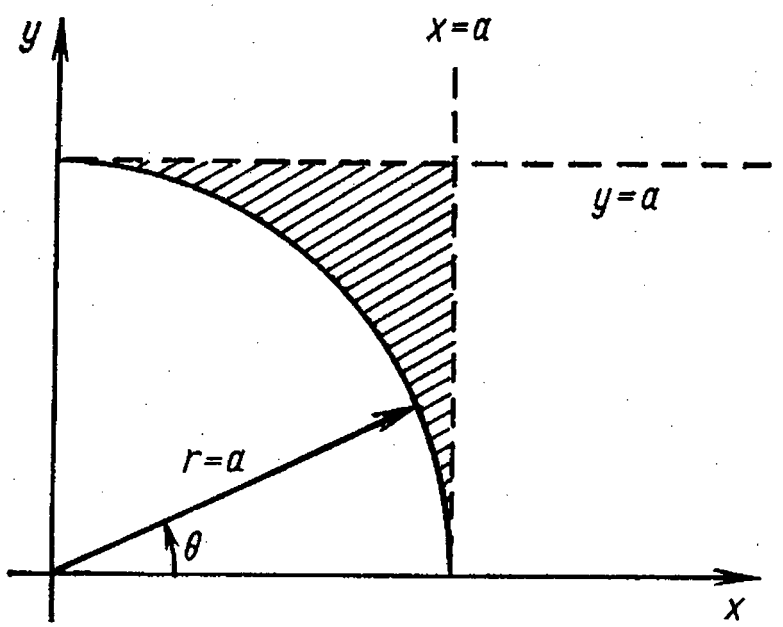


Рис. 10.4. Переход от декартовых координат к полярным.

На переходе от декартовых координат к полярным следует остановиться особо. Как видно из рис. 10.4, затемненная часть площади не учитывается при таком переходе.

Однако максимальное значение функции в этой области равно $e^{a^2} a^{2m+2n+3}$, откуда видно, что при стремлении a к бесконечности интеграл по этой области исчезает, поскольку подынтегральная функция обращается в нуль.

Определенные интегралы, другие формы. Прежде всего бета-функцию используют при вычислении определенных интегралов, которые имеют форму интеграла в (10.59). Подстановка $t = \cos^2\theta$ сводит бета-функцию к интегралу

$$B(m+1,\ n+1) = \int_0^1 t^m (1-t)^n\, dt, \qquad (10.60)$$

который почти аналогичен интегралу из (10.9). Другая подстановка $t = u/(1+u)$ приводит к виду

$$B(m+1,\ n+1) = \int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}}\, du. \qquad (10.61)$$

Если в интеграле (10.61) положить $m = a$, $n = -a$, $-1 < a < 1$, то

$$\int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^2}\, du = a!\,(-a)! \qquad (10.62)$$

Интегрированием по контуру можно показать, что этот интеграл равен $\pi a/\sin \pi a$ (см. гл. 7); таким образом, мы иным путем получили формулу (10.32).

Формула удвоения Лежандра. Представление бета-функции в виде (10.59) позволяет воспользоваться этой функцией при выводе формулы удвоения (см. разд. 10.3). Для $\operatorname{Re} z > -1$

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = \int_0^1 t^z (1-t)^z\, dt. \qquad (10.63)$$

Сделаем замену $t = (1+s)/2$, тогда

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = 2^{-2z-1} \int_{-1}^1 (1-s^2)^z\, ds = 2^{-2z} \int_0^1 (1-s^2)^z\, ds. \qquad (10.64)$$

Изменение пределов интегрирования оказалось возможным благодаря четности подынтегральной функции. Чтобы

вновь привести этот интеграл к виду (10.60), используем замену $u = s^2$:

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = 2^{-2z-1}\int_0^1 (1-u)^z u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2^{-2z-1}\frac{z!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(z+\frac{1}{2}\right)!}. \tag{10.65}$$

Перегруппировывая члены и учитывая, что $(-1/2)! = \pi^{1/2}$, мы немедленно приводим это уравнение к одной из формул удвоения Лежандра

$$z!\,(z+1/2)! = 2^{-2z-1}\pi^{1/2}\,(2z+1)! \tag{10.66}$$

Поделив на $z+1/2$, получим еще одну форму записи этой формулы:

$$z!\,(z-1/2)! = 2^{-2z}\pi^{1/2}\,(2z)! \tag{10.67}$$

Хотя интегралы, которыми мы пользовались при получении формулы удвоения, определены только для области $\operatorname{Re} z > -1$, формулы (10.66) и (10.67) благодаря известному методу аналитического продолжения справедливы для любых z *.

Упражнения

1. Вычислить интегралы (используя бета-функцию)

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg}\theta)^{1/2}\,d\theta, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{4/3}\theta \sin^{5/3}\theta\,d\theta, \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta\,d\theta,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n 0\,d0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\frac{2\left(\frac{1}{6}\right)!\left(\frac{1}{3}\right)!}{3\sqrt{\pi}}$, $\frac{(2\pi)^{3/2}}{16\left[\left(\frac{1}{4}\right)!\right]^2}$, $\frac{\sqrt{\pi}\,[(n-1)/2]!}{2\,(n/2)!}$.

2. Проверить тождества

$$B(a, b) \equiv B(a+1, b)+B(a, b+1), \quad B(a, b) \equiv \frac{a+b}{b}B(a, b+1),$$

$$B(a, b) \equiv \frac{b-1}{a}B(a+1, b-1), \quad B(a, b)\,B(a+b, c) \equiv B(b, c)\,B(a, b+c).$$

* Если $2z$ — целое отрицательное число, получается неопределенность типа $\infty = \infty$.

3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b\,dx$, ответ представить через бета-функцию.

Ответ. $2^{a+b+1}B(a+1,\ b+1)$.

4. Показать, что $B(p,\ p)\,B\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{4p-1}p}$. *Указание.* Воспользоваться формулой удвоения.

5. Показать с помощью бета-функции, что

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},\qquad 0<\alpha<1.$$

Этот результат будет использован в разд. 16.2 для решения обобщенного интегрального уравнения Абеля.)

6. Показать, что интеграл Дирихле равен

$$\int\int x^p y^q\,dA=\frac{p!\,q!}{(p+q+2)!}=\frac{B(p+1,\ q+1)}{p+q+2}.$$

Область интегрирования — треугольник, ограниченный положительными полуосями x и y и линией $x+1=1$.

7. Получить формулу удвоения для факториальной функции, интегрируя равенство $(\sin 2\theta)^{2n+1}=(2\sin\theta\cos\theta)^{2n+1}$ и используя бета-функцию.

8. Указать, каким образом построить таблицу гамма-функции для значений аргумента $x=0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3$ и т. д., используя: 1) известные значения $(0{,}1)!$, $(0{,}2)!$, $(0{,}5)!$; 2) таблицы тригонометрических функций.

9. Из известных равенств

$$J_\nu(z)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!\,(s+\nu)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\nu},$$

$$B(m+1,\ n+1)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}\theta\cos^{2n+1}\theta\,d\theta$$

получить

$$J_\nu(z)=\frac{2}{\pi^{1/2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos(z\cos\theta)\,d\theta,\quad \mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2}.$$

Здесь $J_\nu(z)$ — функция Бесселя.

10.5. НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

Обобщая определение Эйлера гамма-функции (10.5), введем неполную гамма-функцию (пределы интегрирования — переменные):

$$\gamma(a, x)=\int_0^x e^{-t}t^{a-1}\,dt,\ \operatorname{Re}(a)>0 \text{ и } \Gamma(a, x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt. \tag{10.68}$$

Очевидно, эти функции удовлетворяют равенству

$$\gamma(a, x)+\Gamma(a, x)=\Gamma(a). \tag{10.69}$$

Выбор одной из них целиком определяется соображениями удобства. Если a — натуральное число, интегралы (10.68) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\gamma(n, x)&=(n-1)!=\left(1-e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}\right),\\ \Gamma(n, x)&=(n-1)!\,e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x_s}{s!}.\end{aligned}\right\} \tag{10.70}$$

При нецелых a разложение $\gamma(a, x)$ в степенной ряд и асимптотическое разложение $\Gamma(a, x)$ получены в разд. 5.6, 5.10:

$$\left.\begin{aligned}\gamma(a, x)&=x^a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!\,(a+n)},\\ \Gamma(a, x)&=\frac{e^{-x}}{x^{a-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)!}{(a-1-n)!}\cdot\frac{1}{x^n}=\\ &=\frac{e^{-x}}{x^{a-1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-a)!}{(-a)!}\cdot\frac{1}{x^n}.\end{aligned}\right\} \tag{10.71}$$

Неполные гамма-функции могут быть записаны через вырожденные гипергеометрические функции (см. разд. 13.5).

Интегральная показательная функция. Неполная гамма-функция $\Gamma(a, x)$ в ее общей форме (10.68) сравнительно редко встречается в решениях физических задач, тогда как некоторые специальные случаи, соответствующие опре-

деленным частным значениям аргумента, очень распространены и находят широкое применение. Рассмотрим

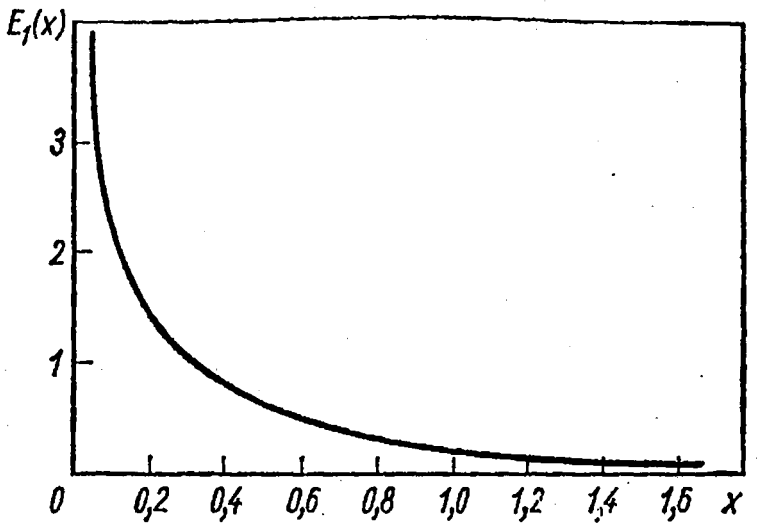


Рис. 10.5. График интегральной показательной функции $E_1(x) = -\mathrm{Ei}(-x)$.

интегральную показательную функцию (рис. 10.5), определенную тождеством *

$$-\mathrm{Ei}(-x) \equiv \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = E_1(x). \qquad (10.72)$$

Тогда

$$E_1(x) = \Gamma(0,\ x) = \lim_{a\to 0}[\Gamma(a) - \gamma(a,\ x)]. \qquad (10.73)$$

Следует помнить, что интеграл (10.72) имеет логарифмическую особенность при $x \to 0$. Выделим эту особенность в отдельный член

$$E_1(x) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{a\Gamma(a) - x^a}{a}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot n!}, \qquad (10.74)$$

а затем, пользуясь правилом Лопиталя и определением дигамма-функции (10.40), получим выражение для $E_1(x)$

$$E_1(x) = -C - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot n!}, \qquad (10.75)$$

справедливое при малых x. Асимптотическое разложение приводится в разд. 5.10.

* Наличие двух знаков минус связано с исторически принятым обозначением.

К другим функциям, которые связаны с интегральной показательной функцией, относятся интегральные синус,

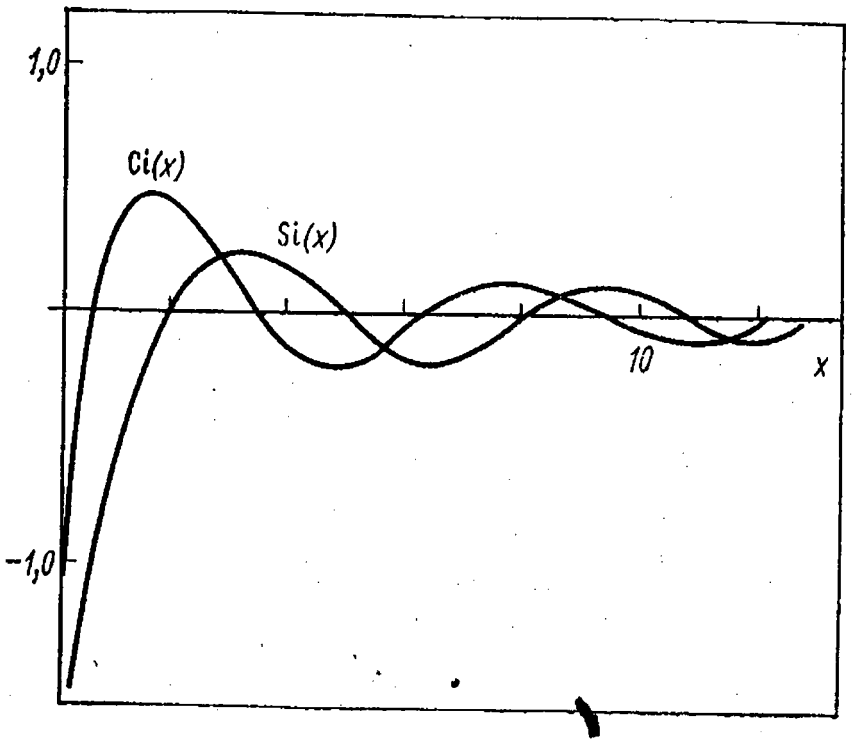


Рис. 10.6. Графики интегрального синуса и косинуса.

косинус (рис. 10.6) и логарифм, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Si}(x) &= -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt;\quad \operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt; \\ \operatorname{li}(x) &= \int_x^x \frac{du}{\ln u} = \operatorname{Ei}(\ln u). \end{aligned}\right\} \tag{10.76}$$

Можно показать, что

$$\operatorname{Si}(x) = \frac{1}{2i}[\operatorname{Ei}(ix) - \operatorname{Ei}(-ix)], \tag{10.77}$$

а

$$\operatorname{Ci}(x) = \frac{1}{2}[\operatorname{Ei}(ix) + \operatorname{Ei}(-ix)]. \tag{10.78}$$

Складывая эти два равенства, получаем

$$\operatorname{Ei}(ix) = \operatorname{Ci}(x) + i\operatorname{Si}(x), \tag{10.79}$$

т. е. связь этих интегральных функций аналогична связи между функциями e^{ix}, $\cos x$ и $\sin x$.

Степенной ряд в окрестности начала, а также асимптотическое разложение для $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$ и $\mathrm{li}(x)$ могут быть получены из соответствующих разложений интегральной экспоненты $-\mathrm{Ei}(-x)$.

Упражнения

1. Доказать, что интегральная экспонента равна $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt =$

$$= -C - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!},$$ C — постоянная Эйлера.

2. Показать, что для неполных гамма-функций $\gamma(a, x)$ и $\Gamma(a, x)$ справедливы соотношения

$$\gamma(a, x) = x^{a/2} \int_0^\infty e^{-t} t^{(a/2-1)} J_a\left[2(xt)^{1/2}\right] dt, \quad \mathrm{Re}(a) > 0,$$

$$\Gamma(a, x) = \frac{2x^{a/2}e^{-x}}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{-a/2} K_a\left[2(xt)^{1/2}\right] dt, \quad \mathrm{Re}(a) < 1.$$

Указание. Воспользоваться степенным рядом для функции $J_a\left[2(xt)^{1/2}\right]$ (см. разд. 11.1). Выразить K_a через I_a и использовать степенное разложение (см. разд. 11.4).

3. Показать, что

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{-a}\gamma(a, x)\right] = (-1)^m x^{-a-m}\gamma(a+m, x),$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[e^x\gamma(a, x)\right] = e^x \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-m)}\gamma(a-m, x).$$

4. Доказать справедливость рекуррентных соотношений для неполных гамма-функций $\gamma(a, x)$ и $\Gamma(a, x)$:

$$\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}, \quad \Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x}.$$

5. Показать, что $\gamma(a, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)!}{(a+n)!} x^{a+n}$.

Сделать это: 1) интегрируя по частям; 2) приводя записанное выражение для $\gamma(a, x)$ к ее определению (10.71).

6. Используя обычную замену переменных, привести функцию

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,dt$$

к интегральной экспоненте (10.72). Показать, что $E_n(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n}e^{-x} - \frac{x}{n}E_n(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ГЛАВА 11

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

11.1. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

Производящая функция. Функции Бесселя интересны в основном как решения дифференциального уравнения. Полезно однако рассмотреть совершенно иной способ определения, используя производящую функцию:

$$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}. \tag{11.1}$$

Этот способ позволяет сконцентрировать все внимание на самой функции, а не на дифференциальном уравнении, которому она удовлетворяет.

Представление рядом. Разложив производящую функцию (11.1) в ряд Лорана (см. разд. 6.4), получим

$$e^{(x/2)(1-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n, \tag{11.2}$$

где $J_n(x)$ — коэффициенты при t^n — функции Бесселя первого рода целого порядка n.

Раскладывая в ряд показательные функции, получаем

$$e^{xt/2} \cdot e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \tag{11.3}$$

При заданном s выделим коэффициент при степени t^n $(n \geqslant 0)$ из члена

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \tag{11.4}$$

Он окажется равным *

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}. \tag{11.5}$$

---

* Из способа получения этого ряда и из его свойств сходимости должно быть ясно, что переменную x в нем можно заменить на z, где z — любая точка комплексной плоскости.

Функция Бесселя для $n \leqslant 0$ определяется рядом

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}, \qquad (11.6)$$

полученным из (11.5) простой заменой n на $-n$. Поскольку здесь n — целое число, $(s-n)! \to \infty$ для $s = 0, \ldots, (n-1)$.

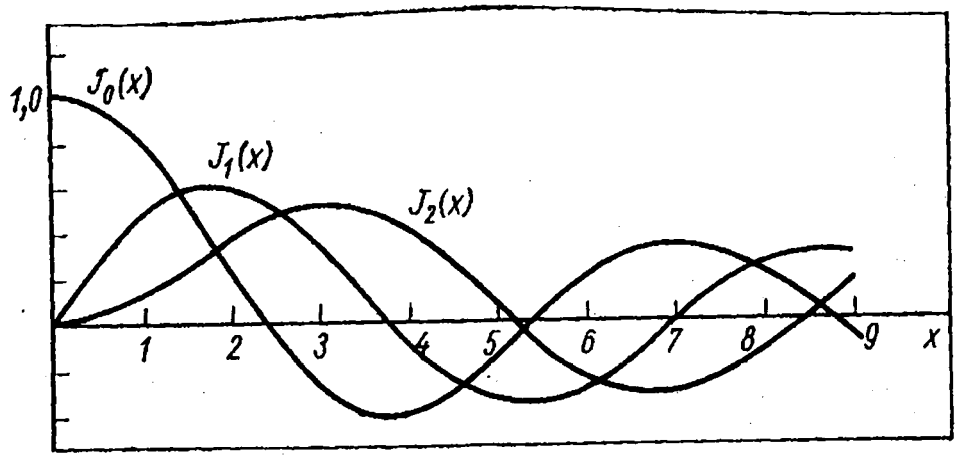


Рис. 11.1. Графики функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$.

Следовательно, можно считать, что ряд начинается с $s = n$. Заменив s на $s+n$, получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \qquad (11.7)$$

откуда немедленно следует, что функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ связаны друг с другом:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \text{ — целое.} \qquad (11.8)$$

Ряды (11.5) и (11.6) можно использовать и при нецелых n для определения соответствующих функций Бесселя $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ (см. упр. 1). На рис. 11.1 показано поведение функции Бесселя.

Рекуррентные соотношения. Рекуррентные соотношения для функции $J_n(x)$ и ее производных можно получить непосредственно из разложения (11.5), но удобнее воспользоваться производящей функцией $g(x, t)$. Дифферен-

цируя (11.1) по t, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}. \tag{11.9}$$

Подставив в соотношение (11.9) разложение экспоненты (11.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t*, имеем рекуррентное соотношение

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \tag{11.10}$$

Теперь, зная, например, J_0 и J_1, можно найти J_2 (или любую функцию J_n целого порядка).

Продифференцируем (11.1) по x:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x) t^n. \tag{11.11}$$

Снова заменив производящую функцию разложением (11.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим еще одно рекуррентное соотношение

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x). \tag{11.12}$$

В частности

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{11.13}$$

Сложим уравнения (11.10) и (11.12), а результат поделим пополам:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x). \tag{11.14}$$

Умножим на x^n и перегруппируем члены:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \tag{11.15}$$

Вычтем уравнение (11.12) из (11.10), а результат поделим пополам; окончательно

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x). \tag{11.16}$$

---

* Это возможно благодаря единственности ряда (см. разд. 5.7 и 6.4).

Умножив на x^{-n} и произведя соответствующую перегруппировку, будем иметь

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x). \qquad (11.17)$$

Дифференциальное уравнение Бесселя. Предположим, что имеется набор функций $Z_\nu(x)$, которые удовлетворяют основным рекуррентным соотношениям (11.10) и (11.12), при этом ν не обязательно заданы в виде ряда (11.5). Уравнение (11.14) можно переписать так ($n \to \nu$):

$$xZ'_\nu(x) = xZ_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x). \qquad (11.18)$$

Продифференцируем его по x:

$$xZ''_\nu + (\nu+1)Z'_\nu - xZ'_{\nu-1} - Z_{\nu-1} = 0. \qquad (11.19)$$

Умножим далее это уравнение на x, а затем вычтем из него уравнение (11.18), умноженное предварительно на ν:

$$x^2Z''_\nu + xZ'_\nu - \nu^2Z_\nu + (\nu-1)xZ_{\nu-1} - x^2Z'_{\nu-1} = 0. \qquad (11.20)$$

Перепишем (11.16), заменив в нем n на $\nu-1$:

$$xZ'_{\nu-1} = (\nu-1)Z_{\nu-1} - xZ_\nu. \qquad (11.21)$$

Используя соотношение (11.21) для нахождения $Z_{\nu-1}$ и $Z'_{\nu-1}$ из (11.20), окончательно получим

$$x^2Z''_\nu + xZ'_\nu + (x^2-\nu^2)Z_\nu = 0. \qquad (11.22)$$

Это и есть уравнение Бесселя. Очевидно, можно утверждать, что любые функции $Z_\nu(x)$, которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям (11.10) и (11.12), (11.14) и (11.16) или (11.15) и (11.17), удовлетворяют уравнению Бесселя, иначе говоря, неизвестные функции Z_ν являются функциями Бесселя. В частности, мы убедились, что функции $J_n(x)$, определенные с помощью производящей функции, также удовлетворяют уравнению Бесселя.

Интегральное представление. Особенно удобно пользоваться функциями Бесселя, если представить их в интегральной форме. Вернемся к производящей функции (11.1) и произведем замену $t = e^{i\theta}$:

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2[J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \ldots] + 2i[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \ldots]. \qquad (11.23)$$

Здесь учтено, что

$$\left.\begin{aligned} J_1(x)\,e^{i\theta} + J_1(x)\,e^{-i\theta} &= 2iJ_1(x)\sin\theta, \\ J_2(x)\,e^{2i\theta} + J_2(x)\,e^{-2i\theta} &= 2J_2(x)\cos 2\theta, \ \ldots \end{aligned}\right\} \quad (11.24)$$

В результате, приравняв соответственно реальную и мнимую части, получим

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sin\theta) &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta), \\ \sin(x\sin\theta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin[(2n-1)\theta]. \end{aligned}\right\} \quad (11.25)$$

Принимая во внимание свойства ортогональности синуса и косинуса*

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}, \quad \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}, \quad (11.26)$$

где n и m — натуральные числа (нуль исключается)**, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ — четное}, \\ 0, & n \text{ — нечетное}, \end{cases} \quad (11.27)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ — четное}, \\ J_n(x), & n \text{ — нечетное}. \end{cases} \quad (11.28)$$

Если сложить эти два уравнения, то

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta]\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \quad (11.29)$$

---

* Они являются собственными функциями самосопряженного уравнения (уравнение линейного осциллятора) и удовлетворяют соответствующим граничным условиям (см. разд. 9.2 и 14.1).

** Условие (11.26) выполняется, когда либо $n = 0$, либо $m = 0$, однако одновременное равенство нулю исключается.

Как частный случай

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta. \qquad (11.30)$$

Интегральное представление (11.29) можно получить, применяя контурное интегрирование (см. ниже упр. 13). Нужно заметить, что наряду с полученным существует

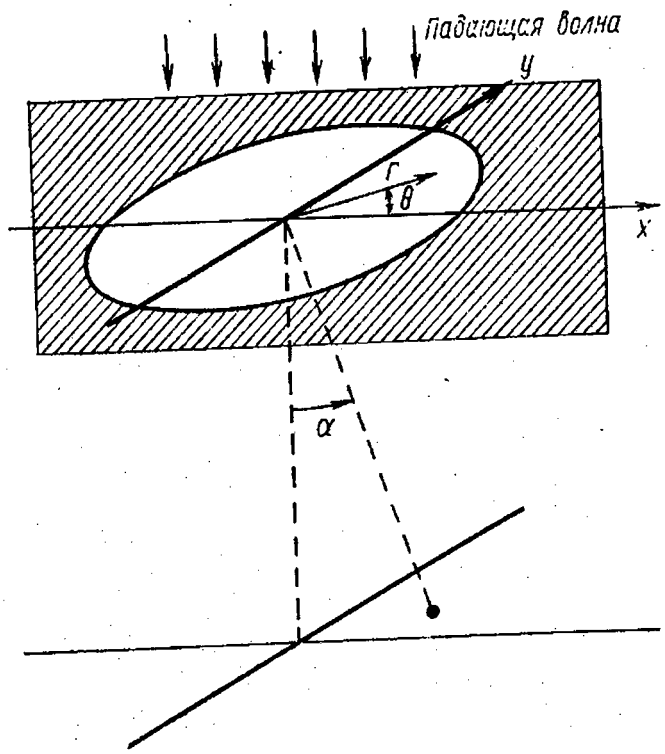


Рис. 11.2. Дифракция Фраунгофера от круглого отверстия.

много других интегральных представлений функции Бесселя (см. ниже упр. 22). Одно из них рассмотрено в разд. 11.5 специально в связи с применением метода перевала для получения асимптотических представлений различных функций Бесселя.

Дифракция Фраунгофера (от круглого отверстия).

В теории дифракции встречается интеграл

$$\Phi \sim \int_0^{a}\int_0^{2\pi} e^{ibr\sin\theta}\,d\theta r\,dr, \qquad (11.31)$$

где Φ — амплитуда дифрагированной волны; θ — азимутальный угол в плоскости отверстия, а α — угол между

прямой, проходящей через точку на экране и центр отверстия, и нормалью к плоскости отверстия. Параметр b определен зависимостью

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\alpha, \tag{11.32}$$

где λ — длина волны падающего пучка (рис. 11.2). Переходя от экспоненциальной к тригонометрической форме записи и воспользовавшись уравнением (11.30), мы получим

$$\Phi \sim 2\pi \int_0^a J_0(br)\, r\, dr. \tag{11.33}$$

Применение формулы (11.15) позволяет здесь немедленно произвести интегрирование

$$\Phi \sim \frac{2\pi ab}{b^2} J_1(ab) \sim \frac{\lambda a}{\sin\alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\alpha\right). \tag{11.34}$$

Интенсивность света на дифракционной картине пропорциональна

$$\Phi^2 \sim \left\{\frac{J_1[(2\pi a/\lambda)\sin\alpha]}{\sin\alpha}\right\}^2. \tag{11.35}$$

Из табл. 11.1 следует, что эта функция имеет нуль в точке

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\alpha = 3{,}8317\ldots \tag{11.36}$$

Таблица 11.1

Корни функций Бесселя			
$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$
2,4048	3,8317	5,1356	6,3802
5,5201	7,0156	8,4172	9,7610
8,6537	10,1735	11,6198	13,0152
11,7915	13,3237	14,7960	16,2235
14,9309	16,4706	17,9598	19,4094
Корни первых производных функций Бесселя			
$J_0'(x)$	$J_1'(x)$	$J_2'(x)$	$J_3'(x)$
3,8317	1,8412	3,0542	4,2012
7,0156	5,3314	6,7061	8,0152
10,1735	8,5363	9,9695	11,3459

или

$$\sin\alpha = 3{,}8317\lambda/2\pi a. \tag{11.37}$$

Для зеленого цвета $\lambda = 5{,}5\cdot10^{-5}$ *см*. Следовательно, если $a = 0{,}5$ *см*, то

$$\alpha \approx \sin\alpha = 6{,}7\cdot10^{-5}\ рад \approx 14''. \tag{11.38}$$

Отсюда видно, что отклонение или размытие светового луча весьма мало. Как известно, этот анализ был проведен в XVII в. и послужил главным доводом в пользу волновой теории света.

В середине двадцатого столетия была получена дифракционная картина при *рассеянии частиц* атомными ядрами, и тем самым были продемонстрированы волновые свойства микрочастиц.

Колебания круглой мембраны. Амплитуда колебаний U круглой мембраны как функция координат r, θ и времени t должна удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \tag{11.39}$$

где v — (фазовая) скорость волны, определяемая коэффициентом упругости мембраны. Это дифференциальное уравнение в частных производных можно решить методом разделения переменных, предположив, что $U = S(r, \theta)\,T(t)$. Тогда

$$T = e^{\pm i\omega t}, \tag{11.40}$$

где ω — частота.

Пространственная часть S амплитуды должна описываться волновым уравнением, не зависящим от времени:

$$\nabla^2 S + k^2 S = 0 \tag{11.41}$$

с

$$k^2 = w^2/v^2. \tag{11.42}$$

Величина k, называемая обычно волновым числом, связана с длиной волны λ и частотой ν следующим образом:

$$k = 2\pi\nu/v = 2\pi/\lambda. \tag{11.43}$$

Предполагая, что

$$S(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta), \tag{11.44}$$

произведем разделение переменных в полярных координатах (см. разд. 2.6 и 8.2):

$$\frac{r^2}{R}\cdot\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\cdot\frac{dR}{dr}+\frac{1}{\Theta}\cdot\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+r^2k^2=0. \qquad (11.45)$$

Положим

$$\frac{1}{\Theta}\cdot\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-m^2. \qquad (11.46)$$

Отсюда очевидно, что

$$\Theta = e^{\pm im\theta}. \qquad (11.47)$$

Константа разделения выбрана отрицательной, поскольку при бесконечном росте θ колебания мембраны не могут неограниченно возрастать; кроме того, потребуем, чтобы постоянная m была целым числом, так как смещение точек мембраны должно быть однозначной функцией θ. Уравнение для радиальной части сводится в этом случае к уравнению Бесселя

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-m^2)R=0 \qquad (11.48)$$

с решением

$$R(r)=J_m(kr). \qquad (11.49)$$

С учетом полученных результатов полное решение уравнения (11.39) запишется в виде *

$$U(r,\theta,t)=J_m(kr)(a_1e^{im\theta}+a_2e^{-im\theta})(b_1e^{i\omega t}+b_2e^{-i\omega t}). \qquad (11.50)$$

Постоянные a_1, a_2, b_1 и b_2 определяются начальными условиями колебаний. С другой стороны, волновое число k входит в уравнение в качестве собственного значения и может принимать только определенные значения в соответствии с требованием

$$U(a,\theta,t)=0, \qquad (11.51)$$

где a — радиус мембраны. Следовательно,

$$J_m(ka)=0 \quad \text{и} \quad ka=2\pi a/\lambda \qquad (11.52)$$

есть корень J_m. Из уравнения (11.43) видно, что частота может принимать лишь определенные значения (квантована).

---

* Кроме функций J_m имеются еще и другие функции Бесселя, однако они все расходятся в точке $r=0$ (см. разд. 11.2). Уравнение (11.6) в неявной форме содержит расходимость.

Ортогональность. Рассмотрим две функции Бесселя первого рода n-го порядка

$$u = J_n(ax), \qquad v = J_n(bx), \tag{11.53}$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$xu'' + u' + x\left(a^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = 0, \tag{11.54а}$$

$$xv'' + v' + x\left(b^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)v = 0, \tag{11.54б}$$

где

$$u' = \frac{d}{dx} J_n(ax) \text{ и т. д.} \tag{11.55}$$

Уравнения (11.54) — самосопряженные, поэтому на основании теории Штурма — Лиувилля [см. гл. 9 ($\lambda^2 = a^2, b^2$; $w = x$)] можно ожидать, что функции u и v будут ортогональными и будут удовлетворять определенным граничным условиям. Следуя общей теории, изложенной в гл. 9, умножим уравнение (11.54а) на v, а (11.54б) на u, проинтегрируем полученные результаты в пределах от 0 до 1, а затем вычтем одно из другого

$$(a^2 - b^2)\int_0^1 uv\,dx = x(uv' - u'v)\Big|_0^1. \tag{11.56}$$

Все функции $J_n(x)$ конечны в нуле *, поэтому правая часть уравнения обращается в нуль при $x = 0$. Правая часть уравнения обратится в нуль и при $x = 1$, если в качестве параметров a и b взять *корни* функции $J_n(x)$,

$$J_n(a) = J_n(b) = 0. \tag{11.57}$$

Тогда для $a \neq b$

$$\int_0^1 J_n(ax)\,J_n(bx)\,x\,dx = 0. \tag{11.58}$$

Обратим внимание на весовой множитель x. Если положить $a = b$, то получится нормировочный интеграл

$$\int_0^1 [J_n(ax)]^2\,x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{d(ax)} J_n(ax)\Big|_{x=1}\right]^2. \tag{11.59}$$

* В этом легко убедиться, обратившись к ряду (11.5).

Предлагаем читателю самостоятельно доказать последнее равенство.

Функции Бесселя нецелого порядка. Читатель, вероятно, заметит, что производящая функция определяет функции Бесселя только целого порядка J_0, J_1, J_2 и т. д. В этом существенная ограниченность определения функций Бесселя через производящую функцию. Однако можно легко определить функцию Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ для нецелых ν, если использовать для этой цели ряд (11.6).

Рекуррентные соотношения проверяются просто подстановкой в них $J_\nu(x)$ в виде ряда (см. ниже упр. 1). Из этих соотношений следует уравнение Бесселя. Действительно, если ν — нецелое, то возможно существенное упрощение. Известно, что функции J_ν и $J_{-\nu}$ независимы, так как они не связаны соотношением вида (11.8). С другой стороны, для целых $\nu = n$ нам необходимо другое независимое решение. Отысканию этого второго решения и исследованию его свойств будет посвящен разд. 11.2.

Упражнения

1. Дифференцируя функцию $J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$, показать, что она удовлетворяет двум рекуррентным соотношениям

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

и дифференциальному уравнению Бесселя

$$x^2 J''_\nu(x) + xJ'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0.$$

2. Рассмотрев произведение двух производящих функций $g(x, t)\, g(-x, t)$, показать, что

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \ldots$$

и, следовательно, $|J_0(x)| \leqslant 1$, а $|J_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. Используя производящую функцию $g(x, t) = g(u+v, t) = g(u, t)\, g(v, t)$, показать, что

$$J_n(u+v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)\, J_{n-s}(v),$$

$$J_0(u+v) = J_0(u)\, J_0(v) + 2\sum_{s=1}^{\infty} J_s(u)\, J_{-s}(v).$$

Эти равенства иллюстрируют теоремы сложения функций Бесселя.

4. Используя одну лишь производящую функцию $e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$ и не применяя представление $J_n(x)$ рядом, показать, что функция $J_n(x)$ четная или нечетная в зависимости от того, четно или нечетно n, т. е. $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$.

5. Получить формулы для производных

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x),$$

умножая функцию Бесселя $J_n(x)$, представленную рядом, на x^n и x^{-n} и затем дифференцируя это произведение.

6. Доказать, что между двумя соседними корнями функции $J_n(x)$ расположен один и только один корень функции $J_{n+1}(x)$. *Указание.* Использовать уравнения (11.15) и (11.17).

7. Вычислить интегралы $\int_0^\infty J_1(x)\, dx$, $\int_0^\infty J_2(x)\, x^{-1}\, dx$, $\int_0^\infty J_{n+1}(x)\, x^{-n}\, dx$, предполагая, что при $x \to \infty$ $J_n(x)$ стремится к нулю, как $x^{-1/2}$.

Ответ: 1, 1/2, $1/2^n n!$.

8. Доказать, что $\int_0^\infty J_n(x)\, dx = \int_0^\infty J_{n+2}(x)\, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

9. Показать, что дифференциальные уравнения

$$y'' + xy = 0, \quad y'' + 2nxy = 0, \quad xy'' + (2n+1)\, y' + xy = 0$$

представляют собой различные формы уравнения Бесселя, и решить их.

10. Доказать, что

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x \cos 0) \cos 0\, d\theta, \quad \frac{1-\cos x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos\theta)\, d\theta.$$

Указание. Воспользоваться определенным интегралом.

11. Показать, что

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}}\, dt.$$

12. Прямым дифференцированием и подстановкой показать, что

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-\nu-1}\, dt \qquad (1)$$

или эквивалентная ей функция

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \oint e^{s - x^2/4s} s^{-\nu-1}\, ds \qquad (2)$$

удовлетворяет уравнению Бесселя. (Контур C охватывает начало координат и всю отрицательную полуось x; обход следует совершать справа налево. Линия разреза совпадает с отрицательной полуосью x.)

Показать, что интеграл (1) можно привести к виду

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta-n\theta)}\,d\theta=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta+n\theta)}\,d\theta. \qquad (3)$$

13. Контур C из упр. 12 деформирован следующим образом: от $-\infty$ до -1, единичный круг от $e^{-i\pi}$ до $e^{i\pi}$ и, наконец, от -1 до $-\infty$. Показать, что

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\theta-x\sin\theta)\,d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\nu\theta-x\operatorname{sh}\theta)}\,d\theta.$$

Это — интеграл Бесселя. *Указание.* При отрицательных значениях переменной интегрирования u использовать замену $u=te^{\pm i\pi}$.

14. Используя тригонометрическую форму записи, убедиться, что

$$J_0(br)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ibr\sin\theta}\,d\theta.$$

15. Показать, что рекуррентное соотношение $J_n'(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$ получается прямым дифференцированием из формулы (11.29).

16. Показать, что $J_0(R)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_1)\,J_n(r_2)\,e^{in\varphi}$, где $R^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\varphi$; φ — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$; β — угол между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}_1$.

Полученный результат можно обобщить:

$$J_m(R)\,e^{im\beta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_1)\,J_{n+m}(r_2)\,e^{in\varphi},$$

$$H_m^{(1)}(R)\,e^{im\beta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_1)\,H_{n+m}^{(1)}(r_2)\,e^{in\varphi},\quad |r_2|>|r_1\cos\varphi|.$$

17. Изменяя верхний предел в интеграле из уравнения (11.56) от 1 до P, показать, что

$$(a^2-b^2)\int_0^P J_n(ax)\,J_n(bx)\,x\,dx=P[bJ_n(aP)\,J_n'(bP)-aJ_n'(aP)\,J_n(bP)],$$

где $J_n'(aP)=\frac{d}{d(ax)}J_n(ax)\,|_{x=P}$.

Сделав замену $b = a + \varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$), показать, что

$$\int_0^P [J_n(ax)]^2 x\,dx = \frac{P^2}{2}\left\{[J_n'(aP)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{a^2P^2}\right)[J_n(aP)]^2\right\}.$$

Эти интегралы обычно называют первым и вторым интегралами Лёммеля.

18. Частица (с массой m), которая находится в круглом цилиндре радиусом R и высотой H, описывается волновой функцией, удовлетворяющей волновому уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\rho, \varphi, z) = E\psi(\rho, \varphi, z),$$

где $\psi = 0$ на поверхности цилиндра. Найти минимальное значение энергии.

Ответ.

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{z_{pq}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right],$$

где z_{pq} есть q-й корень J_p, индекс p определяется азимутальной зависимостью;

$$E_{\text{мин}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right].$$

19. В анализе излучения антенны встречается интеграл $g(u) = \int_0^1 f(r) J_0(ur)\, r\,dr$. Показать, что $g(u) = \frac{2}{u^2} J_2(u)$, если $f(r) = 1 - r^2$.

20. Показать, что

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta, \qquad \nu > -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Указание. Разложить в ряд и почленно проинтегрировать.

Привести интеграл (4) к различным интегральным представлениям функции $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta;$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm ix\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta;$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm ipx}(1-p^2)^{\nu-1/2}\,dp.$$

21. Используя интегралы $J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int t^{-\nu-1} \times$ $\times e^{t-x^2/4t}\,dt$, $J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int t^{-\nu-1} e^{(x/2)(t-1/t)}\,dt$, получить рекуррентные формулы $J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$, $J'_\nu(x) = \frac{1}{2} J_{\nu-1}(x) - \frac{1}{2} J_{\nu+1}(x)$.

22. Получить теорему сложения для функций Бесселя

$$J_0\left(\sqrt{a^2+2ab\cos\theta+b^2}\right) = J_0(a)\,J_0(b) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(a)\,J_n(b)\cos n\theta.$$

23. Вычислить интеграл $\int_0^1 [J_n(ax)]^2\,dx$, где a — корень J_n, т. е. $J_n(a) = 0$.

24. Получить формулу $J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n J_0(x)$.

25. Получить разложение плоской волны в ряд по цилиндрическим волнам (разложение Якоби — Ангера).

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z)\,e^{im\theta}.$$

11.2. ФУНКЦИИ НЕЙМАНА

Из теории дифференциальных уравнений следует, что уравнение Бесселя должно иметь два независимых решения. При нецелом ν они были найдены с помощью бесконечного ряда (11.5). При целом же ν выполняется условие (11.8), и мы получаем лишь одно независимое решение. Второе решение можно найти, привлекая методы, развитые в разд. 8.5, однако полученный вид отличается от стандартного.

Определение. Рассмотрим функцию Неймана как линейную комбинацию $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \qquad (11.60)$$

При ν нецелом $N_\nu(x)$, очевидно, удовлетворяет уравнению Бесселя, поскольку эта функция — линейная комбинация известных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Однако при целом ν, когда вступает в силу условие (11.8), уравнение (11.60)

становится неопределенным. Способ задания функции $N_\nu(x)$ выбран специально с учетом этого обстоятельства. Оценивая $N_n(x)$ по правилу Лопиталя, получаем

$$N_n(x) = \frac{(d/d\nu)\,[\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{(d/d\nu)\sin \nu\pi} =$$

$$= \frac{-\pi \sin n\pi J_n(x) + [\cos n\pi\,(\partial J_\nu/\partial\nu - \partial J_{-\nu}/\partial\nu)]}{\pi \cos n\pi}\Bigg|_{\nu=n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}. \qquad (11.61)$$

Представление рядом. Разложение в ряд * имеет крайне неудобную форму записи

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \times$$

$$\times [\mathcal{F}(r) - \mathcal{F}(n+r)] - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \qquad (11.62)$$

с логарифмической зависимостью, которую следовало ожидать заранее. Полученное выражение доказывает, конечно, независимость J_n и N_n. Здесь $\mathcal{F}(r)$ — дигамма-функция, которая появилась после дифференцирования факториалов в знаменателе $J_\nu(x)$ [см. уравнение (10.39)]. Учитывая свойства дигамма-функции (см. разд. 10.2, упр. 2), преобразуем выражение (11.62) к более удобному виду

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} p^{-1}\right] J_n(x) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(x/2)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\sum_{p=1}^{r}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p+n}\right] -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}. \qquad (11.63)$$

При $n=0$ имеем

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}(\ln x + C - \ln 2) + O(x^2), \qquad (11.64)$$

---

* Для этого применяется формула $\frac{d}{d\nu} x^\nu = x^\nu \ln x$.

а при $\nu > 0$

$$N_\nu(x) = -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^\nu + \ldots * \qquad (11.65)$$

Чтобы убедиться, что функция Неймана $N_\nu(x)$, иначе ее называют функцией Бесселя второго рода, действительно удовлетворяет уравнению Бесселя для целых n, поступим следующим образом. Продифференцируем уравнение Бесселя для функций $J_{\pm\nu}(x)$ по ν:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right) + x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right) + (x^2-\nu^2)\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu} = 2\nu J_{\pm\nu}. \qquad (11.66)$$

Умножая уравнение для $J_{-\nu}$ на $(-1)^\nu$, вычитая затем его из уравнения для J_ν [как это требуется для выражения (11.61)] и переходя, наконец, к пределу $\nu \to n$, получаем

$$x^2\frac{d}{dx^2}N_n + x\frac{d}{dx}N_n + (x^2-n^2)N_n =$$

$$= \frac{2n}{\pi}[J_n - (-1)^n J_{-n}]. \qquad (11.67)$$

При целых $\nu = n$ правая часть равенства (11.67) в силу условия (11.8) равна нулю, и тогда функция $N_n(x)$ — решение уравнения Бесселя. Следовательно, наиболее общее решение для любых ν можно записать как

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x). \qquad (11.68)$$

Из (11.62) видно, что N_n имеет логарифмическую особенность. Поэтому любое граничное условие задачи, требующее ограниченности решения в начале координат (как, например, в случае колебания круглой мембраны), автоматически исключает $N_n(x)$, и наоборот, если такого требования нет, необходимо учитывать $N_n(x)$. На рис. 11.3 показано поведение функций $N_0(x)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Рекуррентные формулы. Подставляя выражение (11.60) для $N_\nu(x)$ (ν — нецелое) или (11.61), если ν — целое, в рекуррентные соотношения (11.10) и (11.12) для $J_n(x)$, мы убеждаемся, что $N_\nu(x)$ удовлетворяет им. Это еще раз подтверждает, что $N_n(x)$ — решение. Причем существенно подчеркнуть, что обратное не обязательно верно. В разд. 11.4 мы рассмотрим пример, доказывающий это.

* Этот результат справедлив как для целых, так и нецелых значений индекса ν.

Определитель Вронского. Определитель Вронского для решений уравнения Бесселя имеет вид (см. разд. 8.5)

$$u_\nu(x)\,v'_\nu(x) - u'_\nu(x)\,v_\nu(x) = A_\nu/x, \qquad (11.69)$$

где A_ν — параметр, постоянный в том смысле, что не зависит от x, определен функциями Бесселя $u_\nu(x)$ и $v_\nu(x)$.

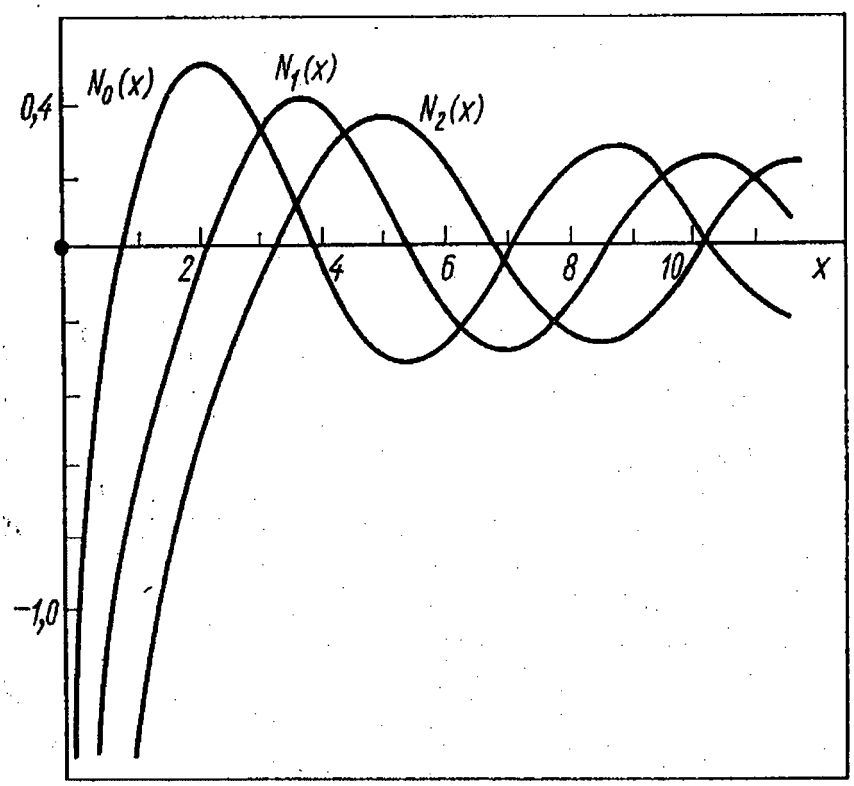


Рис. 11.3. Функции Неймана $N_0(x)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$.

Остановимся на специальном случае

$$u_\nu(x) = J_\nu(x), \quad v_\nu(x) = J_{-\nu}(x), \qquad (11.70)$$

$$J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} = A_\nu/x. \qquad (11.71)$$

Поскольку параметр A_ν не зависит от x, его можно определить в любой удобной точке, например, в точке $x = 0$. Используя первые члены разложений (11.5) и (11.6), получим

$$J_\nu \to \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, \quad J_{-\nu} \to \frac{2^\nu x^{-\nu}}{(-\nu)!}, \quad J'_\nu \to \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \nu!}, \quad J'_{-\nu} \to \frac{-\nu 2^\nu x^{-\nu-1}}{(-\nu)!}. \qquad (11.72)$$

Подставляя (11.72) в (11.69), имеем

$$J_\nu(x)\,J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)\,J_{-\nu}(x) = \frac{-2\nu}{x\nu!\,(-\nu)!} = \frac{2\sin \nu\pi}{\pi x}, \qquad (11.73)$$

что с учетом формулы (10.32) дает $\nu!\,(-\nu)! = \pi\nu/\sin\nu\pi$. Подчеркнем, что параметр A_ν равен нулю, если ν — целое; впрочем, это естественно, поскольку отличие определителя Вронского от нуля есть условие независимости двух решений, а из уравнения (11.73) ясно, что J_n и J_{-n} — линейно зависимые решения.

Используя рекуррентные соотношения, легко получить другие рекуррентные формулы. Приведем некоторые из них:

$$J_\nu J_{-\nu+1} + J_{-\nu} J_{\nu-1} = 2\sin\nu\pi/\pi x, \tag{11.74}$$

$$J_\nu J_{-\nu-1} + J_{-\nu} J_{\nu+1} = -2\sin\nu\pi/\pi x, \tag{11.75}$$

$$J_\nu N'_\nu - J'_\nu N_\nu = 2/\pi x, \tag{11.76}$$

$$J_\nu N_{\nu+1} - J_{\nu+1} N_\nu = -2/\pi x. \tag{11.77}$$

Цилиндрические волноводы. Одно из применений функций Бесселя и Неймана связано с распространением электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, для которых из уравнений Максвелла получаем

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{11.78}$$

Учитывая симметрию, задачу рассмотрим в цилиндрических координатах. Решение будем искать в виде

$$E_z = u(r, \theta)\, e^{j[\omega t - 2\pi z/\lambda_g]}, \quad H_z = 0, \text{ (TM—поперечная магнитная волна).} \tag{11.79}$$

Пусть ось волновода совпадает с осью цилиндрических координат. Параметр λ_g равен эффективной длине волны вдоль волновода, этот параметр учитывает зигзагообразность распространения волны.

Подставим (11.79) в уравнения (11.78)

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + r^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 u = 0, \tag{11.80}$$

где λ_c — другая эффективная длина волны, связанная с длиной волны в свободном пространстве $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ и λ_g соотношением

$$\frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}. \tag{11.81}$$

Для разделения переменных положим

$$u(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta), \tag{11.82}$$

тогда $R(r)$ должна удовлетворять уравнению Бесселя

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2-\frac{n^2}{r^2}\right]R=0. \qquad (11.83)$$

Полное решение уравнения (11.80) запишется в виде

$$u(r,\theta)=J_n\left(\frac{2\pi r}{\lambda_c}\right)(a_1\cos n\theta+b_1\sin n\theta)+$$
$$+N_n\left(\frac{2\pi r}{\lambda_c}\right)(a_2\cos n\theta+b_2\sin n\theta). \qquad (11.84)$$

Синусы и косинусы появились в этом решении благодаря функции $\Theta(\theta)$; из требования однозначности $\Theta(\theta)$ следует, что n — целое.

Исходя из граничного условия для поперечной магнитной волны, потребуем, чтобы $u=E_z$ обращалась в нуль на проводящей поверхности, причем всюду $E_z<\infty$ (в этом случае из решения исключается функция Неймана $N_n(x)$). Тогда

$$E_z(r=r_0)=J_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right)(a_1\cos n\theta+b_1\sin n\theta)=0 \quad \text{для всех } \theta. \qquad (11.85)$$

Это значит, что λ_c должна быть такой, чтобы отношение $2\pi r_0/\lambda_c$ оказалось корнем функции J_n.

Если нас интересует поперечная электрическая волна TE, следует записать

$$E_z=0,\quad H_z=u(r,\theta)\,e^{i[\omega t-2\pi z/\lambda_g]}$$

с граничным условием Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2}=0. \qquad (11.86)$$

Если по центру волновода проходит проводник, функцию Неймана исключать нельзя, и, вообще говоря, она необходима, чтобы удовлетворить граничным условиям как на внутренней ($r=r_1$), так и на наружной поверхности ($r=r_2$). В этом случае имеем для всех θ

$$J_n\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda_c}\right)(a_1\cos n\theta+b_1\sin n\theta)+$$
$$+N_n\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda_c}\right)(a_2\cos n\theta+b_2\sin n\theta)=0, \qquad (11.87)$$

Записанное равенство означает, что можно положить $a_1/b_1 = a_2/b_2$, тогда граничное условие на внутренней поверхности ($r = r_1$) сводится к выражению

$$a_1 J_n(2\pi r_1/\lambda_c) + a_2 N_n(2\pi r_1/\lambda_c) = 0. \qquad (11.88)$$

Аналогично для наружной поверхности ($r = r_2$):

$$a_1 J_n(2\pi r_2/\lambda_c) + a_2 N_n(2\pi r_2/\lambda_c) = 0. \qquad (11.89)$$

Уравнения (11.88) и (11.89) необходимо теперь разрешить относительно λ_c и отношения a_1/a_2.

Заканчивая рассмотрение функции Неймана $N_\nu(x)$, отметим, что: 1) функция Неймана представляет собой второе независимое решение уравнения Бесселя, которое входит составной частью в общее решение; 2) она встречается в специальных физических задачах; 3) эта функция приводит к функции Грина для уравнения Бесселя (см. разд. 11.4); 4) с помощью функции Неймана определяются две функции Ханкеля (см. разд. 11.3).

Упражнения

1. Дифференцированием выражения, которым определена функция Неймана, проверить правильность разложений

$$N_0(x) \to \frac{2}{\pi}(\ln x + C - \ln 2),$$

$$N_\nu(x) \to -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^\nu, \quad \nu > 0, \quad x \ll 1.$$

(Учтены только основные члены.)

2. Показать, что $Y_\nu(x) Z'_\nu(x) - Y'_\nu(x) Z_\nu(x) = A_\nu/x$, где Y и Z — два решения уравнения Бесселя; A_ν может зависеть только от ν и не зависит от x.

3. Проверить формулы для определителей Вронского (11.74)—(11.77).

4. Найти нулевые компоненты электрического и магнитного полей в цилиндрическом волноводе радиусом r_0 или TM_{01} — поперечной магнитной волны ($H_z = H_r = E_\theta = 0$), и TE_{01} — поперечной электрической волны ($E_z = E_r = H_\theta = 0$). Индексы 01 указывают, что продольные компоненты E_z или H_z содержат функцию J_0, а граничное условие удовлетворяется первыми нулями функций J_0 и J'_0.

5. Для данного типа колебания максимальная частота, которая будет пропускаться цилиндрическим волноводом, равна $\lambda_{\text{мин}} = c/\lambda_c$, где λ_c определяется из граничных условий

$$J_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \text{ для } TM_{nm}, \quad J'_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \text{ для } TE_{nm}.$$

Индекс n указывает порядок функции Бесселя, а m — порядковый номер нуля. Определить пороговую длину волны λ_c для трех типов TM и TE, которые характеризуются наибольшим значением пороговой длины волны. Объяснить полученные результаты, исходя из графиков функций J_0, J_1 и J_2 (см. рис. 11.1).

6. Проверить интегральное представление для функции Неймана нулевого порядка

$$N_0(z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(z \operatorname{ch} t)\, dt.$$

7. Показать, что низшая частота колебаний кольцевой мембраны с радиусами r_1 и r_2 $(r_1 > r_2)$ определяется наименьшим корнем уравнения

$$J_0(kr_1) N_0(kr_2) - J_0(kr_2) N_0(kr_1) = 0,$$

где $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ (см. разд. 11.1).

8. Показать, что $N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$.

9. Показать, что

$$\left.\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \frac{\pi}{2} N_0(x), \quad \left.\frac{\partial N_\nu(x)}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = -\frac{\pi}{2} J_0(x).$$

11.3. ФУНКЦИИ ХАНКЕЛЯ

Определения. Используем рассмотренные функции Неймана для определения функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{11.90}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \tag{11.91}$$

Эти соотношения представляют собой точную аналогию формулы

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta. \tag{11.92}$$

Эта аналогия будет заметна еще отчетливее при изучении асимптотических форм (см. разд. 11.5).

Комбинируя уравнения (11.5) и (11.63), можно получить разложение в ряд для функций $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$. Часто представляет интерес только первый член:

$$\left.\begin{aligned} H_0^{(1)}(x) &= i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 + i\frac{2}{\pi}(C - \ln 2) + \ldots, \\ H_\nu^{(1)}(x) &= -i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \ldots, \quad \nu > 0; \end{aligned}\right\} \tag{11.93}$$

$$\left.\begin{aligned} H_0^{(2)}(x) &= -i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 - i\frac{2}{\pi}(C - \ln 2) + \ldots, \\ H_\nu^{(2)}(x) &= i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \ldots, \quad \nu > 0. \end{aligned}\right\} \tag{11.94}$$

Функции Ханкеля можно записать как линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) функций J_ν и N_ν, поэтому они удовлетворяют рекуррентным соотношениям (11.10) и (11.12):

$$H_{\nu-1}(x)+H_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}H_\nu(x), \tag{11.95}$$

$$H_{\nu-1}(x)-H_{\nu+1}(x)=2H'_\nu(x), \tag{11.96}$$

которые выполняются как для $H_\nu^{(1)}(x)$, так и для $H_\nu^{(2)}(x)$.

Можно получить и различные формы определителей Вронского:

$$H_\nu^{(2)}H_{\nu+1}^{(1)}-H_\nu^{(1)}H_{\nu+1}^{(2)}=4/i\pi x, \tag{11.97}$$

$$J_{\nu-1}H_\nu^{(1)}-J_\nu H_{\nu-1}^{(1)}=2/i\pi x, \tag{11.98}$$

$$J_\nu H_{\nu-1}^{(2)}-J_{\nu-1}H_\nu^{(2)}=2/i\pi x. \tag{11.99}$$

Пример. Цилиндрическая бегущая волна. Рассмотрим распространение волн в плоскости, эта задача аналогична колебанию круглой мембраны (см. разд. 11.1). Теперь будем полагать, что волны рождаются в точке $z=0$ и распространяются в разные стороны, причем стоячая волна заменяется на бегущую. Дифференциальное уравнение (11.53) остается тем же самым, но граничные условия изменяются. Потребуем, чтобы решение, описывающее расходящуюся волну на больших расстояниях, имело вид $U=e^{i(kr-\omega t)}$, где k — волновое число. Заданный вид решения предполагает отсутствие азимутальной зависимости, т. е. отсутствие момента количества движения или $m=0$. В разд. 11.5 показано, что функция $H_0^{(1)}(kr)$ асимптотически ведет себя как e^{ikr}. С учетом этого обстоятельства и граничного условия на бесконечности решение записывается как

$$U(r,\ t)=H_0^{(1)}(kr)\,e^{-i\omega t}. \tag{11.100}$$

Оно расходится при $r\longrightarrow 0$, что вполне естественно при наличии источника в начале координат.

Выбор плоской задачи для иллюстрации функций Ханкеля не случаен. Функция Бесселя может возникнуть при решении самых различных задач, например в задаче, решение которой связано с разделением переменных в конических координатах, однако наиболее часто она появляется в радиальной части уравнения Гельмгольца при разделении переменных в цилиндрических или сферических координатах. Если бы решалась задача в сферических координатах (сферические волны), нам пришлось бы иметь дело с индексом $n+1/2$, где n — целое. Этот случай, приводящий к сферическим функциям Бесселя, обсужден в разд. 11.6.

Представление функций Ханкеля контурным интегралом. Интегральное представление (интеграл Шлефли)

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} \qquad (11.101)$$

легко проверяется для целых $\nu = n$ (учитывая, что в числителе стоит производящая функция (11.1), интегрирование ведется с обходом начала координат). При нецелом ν подынтегральная функция становится неоднозначной,

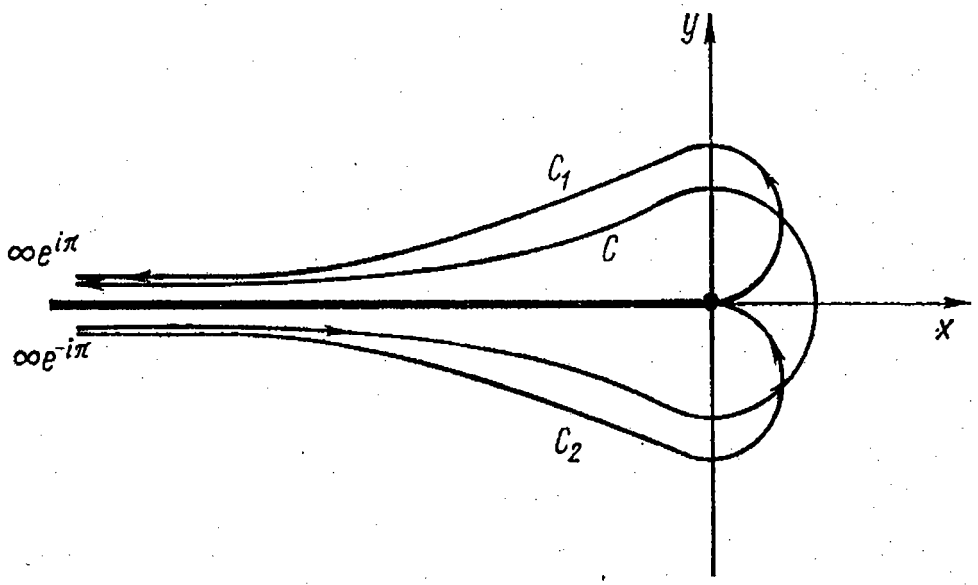


Рис. 11.4. Контуры интегрирования:
для функции Бесселя — C; для функции Ханкеля — C_1 и C_2.

и в комплексной плоскости необходимо сделать разрез. Выбрав линию разреза по отрицательной вещественной полуоси и контур C (рис. 11.4), можно распространить интегральное представление (11.101) и на нецелые ν. Подставим (11.101) в дифференциальное уравнение Бесселя, тогда подынтегральная функция может быть представлена полным дифференциалом, который обращается в нуль при $t \to \infty e^{\pm i\pi}$.

Деформируем теперь контур интегрирования C в контуры C_1 и C_2. Такое изменение контура обеспечит обращение полного дифференциала в нуль при $t \to 0$ за счет множителя $e^{-x/2t}$. Следовательно, каждая раздельная часть, соответствующая пути интегрирдвания от $\infty e^{-i\pi}$ до 0 и от 0 до $\infty e^{i\pi}$, есть решение уравнения Бесселя.

Определим

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}, \qquad (11.102)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\infty e^{-i\pi}}^{0} e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \qquad (11.103)$$

Эти выражения особенно удобны в практических приложениях, поскольку к ним применим метод перевала (см. разд. 7.4). Функция $H_\nu^{(1)}(x)$ имеет седловую точку при $t = +i$, а функция $H_\nu^{(2)}(x)$ при $t = -i$.

Остается теперь связать функции Ханкеля (11.102) и (11.103) с определениями (11.90) и (11.91). Проверкой можно убедиться, что комбинация интегралов (11.101) и (11.102) и (11.103) приводит к

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)], \qquad (11.104)$$

поэтому необходимо только показать, что

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)]. \qquad (11.105)$$

Это можно сделать с помощью подстановки $t = e^{i\pi/s}$ для функции $H^{(1)}$ и $t = e^{-i\pi/s}$ для функции $H^{(2)}$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_{-\nu}^{(1)}(x), \qquad (11.106)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = e^{i\nu\pi} H_{-\nu}^{(2)}(x). \qquad (11.107)$$

Наконец, записав $J_{-\nu}(x)$ через $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, можно выразить правую часть (11.105) через J_ν и $J_{-\nu}$. После этого уравнение (11.105) сведется к (11.60) и, следовательно, получив первоначальное определение функции Неймана, мы тем самым показали, что два контурных интеграла (11.102) и (11.103) действительно представляют функции Ханкеля. Подробности этого доказательства вынесены в упр. 2.

В заключение приводим соображения, которыми мы руководствовались, определив функции Ханкеля: 1) они применяются для описания бегущих волн; 2) позволяют по-новому (с помощью контурного интеграла) определить функции Бесселя действительного и мнимого аргумента K_ν.

Упражнения

1. Проверить следующие формы определителя Вронского:

$$J_\nu(x)\,H_\nu^{(1)\prime}(x)-J_\nu'(x)\,H_\nu^{(1)}(x)=\frac{i2}{\pi x},$$

$$J_\nu(x)\,H_\nu^{(2)\prime}(x)-J_\nu'(x)\,H_\nu^{(2)}(x)=\frac{-i2}{\pi x},$$

$$N_\nu(x)\,H_\nu^{(1)\prime}(x)-N_\nu'(x)\,H_\nu^{(1)}(x)=\frac{-2}{\pi x},$$

$$N_\nu(x)\,H_\nu^{(2)\prime}(x)-N_\nu'(x)\,H_\nu^{(2)}(x)=\frac{-2}{\pi x},$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\,H_\nu^{(2)\prime}(x)-H_\nu^{(1)\prime}(x)\,H_\nu^{(2)}(x)=-\frac{i4}{\pi x},$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\,H_{\nu+1}^{(1)}(x)-H_\nu^{(1)}(x)\,H_{\nu+1}^{(2)}(x)=\frac{4}{i\pi x},$$

$$J_{\nu-1}(x)\,H_\nu^{(1)}(x)-J_\nu(x)\,H_{\nu-1}^{(1)}(x)=\frac{2}{i\pi x}.$$

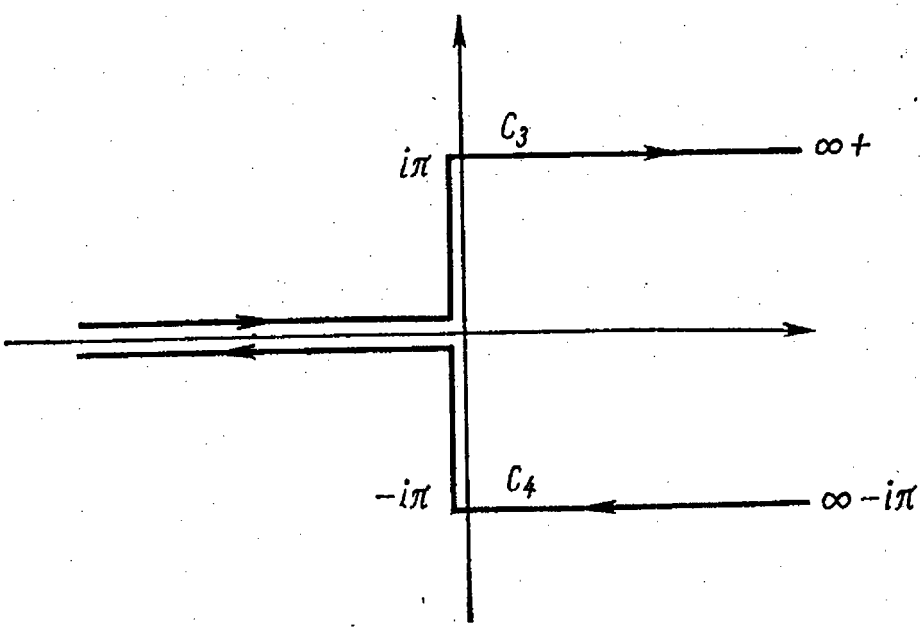


Рис. 11.5. Контуры интегрирования для функции Ханкеля.

2. Показать, что интегральные представления

$$\frac{1}{i\pi}\int_{0C_1}^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}}=H_\nu^{(1)}(x),$$

$$\frac{1}{i\pi}\int_{\infty e^{-i\pi}C_2}^{0} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}}=H_\nu^{(2)}(x)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению Бесселя. Контуры интегрирования C_1 и C_2 показаны на рис. 11.4.

3. Используя эти интегралы, показать что

$$\frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\right]=N_\nu(x).$$

4. Привести их к виду

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_3} e^{x\operatorname{sh}\gamma-\nu\gamma}\,d\gamma,\quad H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_4} e^{x\operatorname{sh}\gamma-\nu\gamma}\,d\gamma,$$

где C_3 и C_4 показаны на рис. 11.5.

11.4. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ МНИМОГО АРГУМЕНТА

В физике часто встречается уравнение

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x)+x\frac{d}{dx}y(x)-(x^2+\nu^2)\,y(x)=0, \qquad (11.108)$$

которое можно привести к уравнению Бесселя, делая замену:

$$x=-it,\ x\frac{d}{dx}\to t\frac{d}{dt},\ x^2\frac{d^2}{dx^2}\to t^2\frac{d^2}{dt^2}.$$

Тогда

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}y(-it)+t\frac{d}{dt}y(-it)+(t^2-\nu^2)\,y(-it)=0, \qquad (11.109)$$

а $y(-it)$ — функция Бесселя. Обычно нормировку выбирают так, чтобы

$$y(x)=I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix). \qquad (11.110)$$

Часто новую функцию записывают в виде

$$I_\nu(x)=e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{i\pi/2}). \qquad (11.111)$$

Представление рядом. Такое представление можно получить, опустив множитель $(-1)^s$ в выражении (11.5) и записывая

$$I_\nu(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!\,(s+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu},$$
$$I_{-\nu}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!\,(s-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu}. \qquad (11.112)$$

Для целых ν

$$I_n(x)=I_{-n}(x). \qquad (11.113)$$

Рекуррентные соотношения. Рекуррентные соотношения для функции $I_\nu(x)$ можно получить, используя представление этой функции рядом, однако легче применить аналогичные соотношения для $J_\nu(x)$. Заменим x на $-ix$ и перепишем уравнение (11.110):

$$J_\nu(x) = i^\nu I_\nu(-ix), \tag{11.114}$$

тогда (11.10) приведется к виду

$$i^{\nu-1} I_{\nu-1}(-ix) + i^{\nu+1} I_{\nu+1}(-ix) = \frac{2\nu}{x} i^\nu I_\nu(-ix).$$

Заменив здесь x на ix, получим рекуррентную формулу для $I_\nu(x)$:

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x). \tag{11.115}$$

Уравнение (11.12) переходит в

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \tag{11.116}$$

Эти рекуррентные формулы уже встречались в разд. 11.1, упр. 10.

Из уравнения (11.113) следует, что для целого ν имеется только одно независимое решение, точно так же, как и в случае функций Бесселя J_ν. Выбор второго независимого решения уравнения (11.108) является исключительно вопросом удобства. Второе решение, которое здесь приводится, найдено из условия асимптотического поведения, этот метод подробно рассматривается в следующем разделе. Многие авторы определяют второе решение через функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$:

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(x)]. \tag{11.117}$$

Воспользовавшись здесь соотношениями (11.60) и (11.110), можно привести функцию $K_\nu(x)$ к виду*

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}, \tag{11.118}$$

который аналогичен записи (11.60) функции $N_\nu(x)$. Выбор выражения (11.117) в качестве определения неудобен потому, что функция $K_\nu(x)$ не удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и $I_\nu(x)$ (см. ниже упр. 4).

* Для целых n делают предельный переход $\nu \to n$.

Чтобы избежать этого, иногда включают дополнительный множитель $\cos n\pi$, в результате чего K_ν удовлетворяет рекуррентным соотношениям для I_ν; однако новое определение имеет некоторый недостаток, связанный с тем, что $K_\nu = 0$ для $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$

Представление функции $K_\nu(x)$ рядом получается непосредственно из разложения $H_\nu^{(1)}(ix)$. С точностью до первых членов

$$K_0(x) = -\ln x - C + \ln 2 + \ldots,$$
$$K_\nu(x) = 2^{\nu-1}(\nu-1)!\, x^{-\nu} + \ldots \qquad (11.119)$$

Функция Бесселя мнимого аргумента I_ν связана с обычной функцией Бесселя J_ν так же, как гиперболический синус с обычным синусом, поэтому I_ν и второе решение K_ν иногда называют гиперболическими функциями Бесселя.

На рис. 11.6 показано поведение функций I_0, I_1, K_0 и K_1.

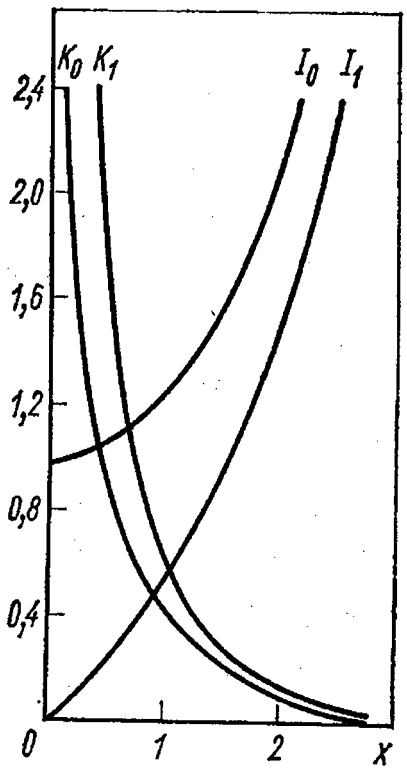


Рис. 11.6. Функции Бесселя мнимого аргумента.

Теория диффузии нейтронов. Рассмотрим теорию диффузии тепловых нейтронов. В стационарном случае уравнение непрерывности имеет вид

$$D\nabla^2\varphi - \Sigma_a\varphi + S = 0, \qquad (11.120)$$

где первый член описывает диффузию; второй — характеризует убыль нейтронов за счет поглощения, а третий — источник. Параметр $D = \lambda_s/3\,(1 - 2/3A)$; λ_s — средняя длина свободного пробега между актами рассеяния; A — атомное число ядра-рассеивателя. Множитель $(1-2/3\,A)$ учитывает анизотропию рассеяния в лабораторной системе координат. Нейтронный поток φ равен произведению плотности нейтронов на их среднюю скорость; Σ_a — макроскопическое сечение поглощения, равное произведению вероятности захвата нейтрона одним атомом σ_a на число атомов в единице объема. Предполагается, что вероятность захвата нейтронов мала по сравнению с вероятностью рассеяния.

Будем также полагать, что имеется линейный источник нейтронов, помещенный в бесконечную среду, в которой происходит диффузия нейтронов. Совместим этот источник с осью z. Если на единицу длины источника в единицу времени рождается S_0 нейтронов, то $S = S_0\delta(\mathbf{r})$, где $\delta(\mathbf{r})$ — δ-функция Дирака. Симметрия задачи предполагает рассмотрение в цилиндрической системе координат. Зависимость от z и θ отсутствует, поэтому уравнение диффузии имеет вид

$$r^2\frac{d^2\varphi}{dr^2}+r\frac{d\varphi}{dr}-r^2\frac{\Sigma_a}{D}\varphi=0 \qquad (11.121)$$

и выполняется всюду, за исключением линии источника ($r\neq 0$). Обозначив $k^2=\Sigma_a/D$, где k^{-1} — длина диффузии, получим

$$\varphi=a_1I_0(kr)+a_2K_0(kr). \qquad (11.122)$$

Коэффициент a_1 необходимо положить равным нулю, так как функция $I_0(kr)$ экспоненциально растет при больших kr [см. разложения (11.112) и разд. 11.5], поэтому $\varphi = a_2K_0(kr)$. Поток нейтронов через поверхность $d\sigma$ равен $D\nabla\varphi\cdot d\sigma$. Постоянная интегрирования a_2 определяется из условия, что величина D, умноженная на интеграл от отрицательного градиента нейтронного потока через поверхность некоторого элемента объема, равна числу нейтронов S_0, родившихся внутри этого объема. Чтобы не учитывать поглощения, возьмем этот объем достаточно малым ($r\to 0$), тогда

$$S_0=\lim_{r\to 0}Da_2\int-\nabla K_0(kr)\cdot\mathbf{r}_0r\,d\theta. \qquad (11.123)$$

Это равенство отражает закон Гаусса в двумерной форме (см. разд. 1.14). Подставив в него разложение функции $K_0(kr)$, получим $S_0=Da_2\lim\limits_{r\to 0}\frac{2\pi r}{r}$ или

$$a_2=S_0/2\pi D. \qquad (11.124)$$

Подставляя полученный результат в уравнение (11.122), имеем

$$\varphi=\frac{S_0}{2\pi D}K_0(kr). \qquad (11.125)$$

Задача о диффузии нейтронов решена.

Функция Грина. Возвращаясь к содержанию разд. 8.6, мы видим, что в предыдущем примере фактически отыскивалась функция Грина для диффузионного уравнения (11.120). В этом легко убедиться, переписав это уравнение для линейного источника единичной мощности (на единицу длины), который расположен по оси z:

$$D\nabla^2 G(kr) - Dk^2 G(kr) = -\delta(\mathbf{r}). \qquad (11.126)$$

Интегрируя по некоторому произвольному малому объему, получаем

$$\int \nabla^2 G(kr)\, dv - k^2 \int G(kr)\, dv = -\frac{1}{D}\int \delta(\mathbf{r})\, dv = -\frac{1}{D}. \qquad (11.127)$$

Второй интеграл слева исчезает при $r \to 0$. Вычисление первого интеграла в левой части этого равенства можно произвести с помощью теоремы Гаусса, и функция Грина $G(kr)$ будет точно совпадать с предыдущим решением

$$G(kr) = \frac{1}{2\pi D} K_0(kr). \qquad (11.128)$$

Обобщим данный результат на случай непрерывно распределенных параллельных линейных источников, которые характеризуются радиальным вектором $\boldsymbol{\rho}$. Функция Грина для них

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi D} K_0(k|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|). \qquad (11.129)$$

Результирующий нейтронный поток равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})\, S(\boldsymbol{\rho})\, d\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2\pi D}\int K_0(k|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|)\, S(\boldsymbol{\rho})\, d\boldsymbol{\rho}. \qquad (11.130)$$

Здесь интегрирование проводится в плоскости, перпендикулярной линии источников, а $S(\boldsymbol{\rho})$ — мощность источника (на единицу длины в одну секунду).

Перечислим характерные особенности функций Бесселя мнимого аргумента, а также соображения, которыми мы руководствовались, введя их в данном разделе: 1) эти функции представляют собой решения часто встречающегося уравнения Бесселя мнимого аргумента; 2) с их помощью решаются специальные физические задачи, одной

из которых является диффузия нейтронов; 3) с помощью $K_\nu(x)$ записывается функция Грина; 4) функция $K_\nu(x)$ позволяет получить удобные асимптотические представления (см. разд. 11.5).

Упражнения

1. Показать, что в параболических координатах уравнение Лапласа распадается на уравнение гармонического осциллятора, уравнение Бесселя и уравнение Бесселя мнимого аргумента.

2. Показать, что $e^{(x/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\, t^n$ — также производящая функция для функции Бесселя мнимого аргумента $I_n(x)$.

3. Показать, что для $\nu > -1/2$ функцию $I_\nu(x)$ можно представить как

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm z\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm zp}(1-p^2)^{\nu-1/2}\, dp =$$

$$= \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta.$$

4. Убедиться, что $K_\nu(x)$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}K_\nu(x),\quad K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x).$$

5. Проверить, что функцию $K_\nu(x)$ можно задать соотношением (11.118), откуда следует, что $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$.

6. Показать, что определитель Вронского для функций $J_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ имеет вид $I_\nu(x)K'_\nu(x) - I'_\nu(x)K_\nu(x) = -1/x$.

7. Показать, что для $\nu > -1/2$ функцию $K_\nu(z)$ можно представить как

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch} t}\operatorname{sh}^{2\nu} t\, dt =$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zp}(p^2-1)^{\nu-1/2}\, dp;\quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

8. Пусть $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. Доказать, что

$$\frac{1}{r}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)\,K_0(yt)\,dt.$$

9. Показать, что функции $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4}{dx^4}y+\frac{2}{x}\cdot\frac{d^3}{dx^3}y-\frac{2\nu^2+1}{x^2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}y+$$
$$+\frac{2\nu^2+1}{x^3}\cdot\frac{d}{dx}y+\left(\frac{\nu^4-4\nu^2}{x^4}-1\right)y=0.$$

10. Показать, что $-N_0(kr)/4$ есть функция Грина для уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах (без осевой или азимутальной зависимости).

11. Функции Грина для источников в виде плоскости, линии и точки, удовлетворяющих уравнению $(\nabla^2-k^2)\,G(\mathbf{r})=-\delta(\mathbf{r})$, имеют вид $G_1(x)=e^{-kx}/2k$, $G_2(\rho)=K_0(k\rho)/2\pi$, $G_3=ke^{-kr}/4\pi kr$.

Интегрируя, перейти от точечного источника к линейному и показать, что

$$\int_\rho^\infty \frac{e^{-kr}}{(r^2-\rho^2)^{1/2}}\,dr=K_0(k\rho)$$

или

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\alpha u}}{(u^2-1)^{1/2}}\,du=\int_0^\infty e^{-\alpha\operatorname{ch} t}\,dt=K_0(\alpha).$$

Таким же образом перейти от линейного источника к источнику в виде плоскости, для которого

$$\int_x^\infty \frac{K_0(k\rho)\,\rho\,d\rho}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}=\frac{\pi e^{-kx}}{2k},$$

или

$$\int_1^\infty \frac{K_0(\alpha u)\,u\,du}{(u^2-1)^{1/2}}=\frac{\pi e^{-\alpha}}{2\alpha}.$$

12. Показать, что

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{z}{2}\right)^r\frac{(n-r-1)!}{r!}=\frac{\pi}{\sin\pi n}I_{-n}(z),$$

$$\left.\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=-K_0(x),\quad \left.\frac{\partial K_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=0}=0.$$

11.5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Метод Стокса. Если $Z_\nu(x)$ — решение уравнения Бесселя заменить $x^{-1/2}y(x)$, то функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$y'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) y = 0. \tag{11.131}$$

Для больших x ($x \gg \nu$) оно имеет вид

$$y_1'' + y_1 = 0, \tag{11.132}$$

решениями которого являются

$$y_1 = a_0 \sin x + b_0 \cos x. \tag{11.133}$$

Можно улучшить точность (для больших x) заменой постоянных a_0 и b_0 разложениями по отрицательным степеням x: $a_0 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$, $b_0 \to \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}$, это означает, что решение можно искать в форме

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} \cos x. \tag{11.134}$$

Подставив выражение (11.134) в уравнение (11.131), получим

$$y(x) = \left[a_0 - \frac{\nu^2 - 1/4}{2x} b_0 - \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)}{2(2x)^2} a_0 + \ldots\right] \sin x + \\ + \left[b_0 + \frac{\nu^2 - 1/4}{2x} a_0 - \frac{(\nu^2 - 1/4)(\nu^2 - 9/4)}{2(2x)^2} b_0 + \ldots\right] \cos x. \tag{11.135}$$

Этот процесс можно продолжить и дальше. Существенно заметить, что эти выражения ограничены и приводят к точному результату для $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots$ Найденные функции представляют собой сферические функции Бесселя (см. разд. 11.6).

Метод Стокса, связанный с отысканием двух постоянных a_0 и b_0, позволяет получить общее решение уравнения Бесселя для больших значений переменной x. Однако применение этого решения ограничено тем, что решение оказывается не связанным с функциями $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$. В частности, ничего нельзя сказать заранее об относительном вкладе $\sin x$ и $\cos x$. Установить связь с обычными решениями $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ или определить фазу можно

с помощью метода перевала (см. разд. 7.4), выделяя главные члены в асимптотических разложениях $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$.

Разложение интегрального представления $K_\nu(x)$. Рассмотрим интегральное представление (см. разд. 11.4)

$$K_\nu(x) = \frac{\pi^{1/2}}{(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx}(x^2-1)^{\nu-1/2}\,dx, \quad \nu > -1/2. \tag{11.136}$$

Для определенности ограничимся вещественными z, хотя можно доказать справедливость соотношения (11.136) и для $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$. Необходимо показать, во-первых, что функция K_ν в записи (11.136) действительно удовлетворяет уравнению Бесселя мнимого аргумента (11.108), и, во-вторых, она имеет правильную нормировку.

1. В том, что функция (11.136) есть решение уравнение Бесселя мнимого аргумента, можно убедиться прямой подстановкой, в результате которой имеем

$$z^{\nu+1}\int_1^\infty \frac{d}{dx}\left[e^{-zx}(x^2-1)^{\nu+1/2}\right]dx = 0;$$

в этом соотношении подынтегральная функция записана в виде производной от функции, которая обращается в нуль на обоих концах отрезка интегрирования. В упр. 1 вынесен вопрос о том, включает ли данное решение функцию I_ν.

2. Нормировка проверяется подстановкой $x = 1 + t/z$:

$$\frac{\pi^{1/2}}{(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx}(x^2-1)^{\nu-1/2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu-1/2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-z}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t^2}{z^2}+\frac{2t}{z}\right)^{\nu-1/2}\frac{dt}{z} =$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu-1/2)!}\cdot\frac{e^{-z}}{2^\nu z^\nu}\int_0^\infty e^{-t}t^{2\nu-1}\left(1+\frac{2z}{t}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{11.137}$$

Эта подстановка приводит к более удобным пределам интегрирования и изолирует отрицательную экспоненциальную зависимость e^{-z}. Последний интеграл в (11.137) при $z = 0$ дает $(2\nu - 1)!$, тогда с помощью формулы удвоения (см.

разд. 10.4)

$$\lim_{z\to 0} K_\nu(z) = (\nu-1)!\,2^{\nu-1}/z^\nu, \quad \nu>0 \qquad (11.138)$$

в согласии со вторым уравнением (11.119), которым определена нормировка функции K_ν *.

Для получения асимптотического разложения функции $K_\nu(z)$ перепишем заново (11.137) (для больших z):

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cdot\frac{e^{-z}}{(\nu-1/2)!}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt.$$

Разложим $(1+t/2z)^{\nu-1/2}$ с помощью биномиальной теоремы, тогда

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cdot\frac{e^{-z}}{(\nu-1/2)!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\nu-1/2)!}{r!\,(\nu-r-1/2)!}(2z)^{-r}\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu+r-1/2}\,dt. \qquad (11.139)$$

Почленное интегрирование (справедливое для асимптотического ряда) приводит к требуемому асимптотическому разложению

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[1+\frac{(4\nu^2-1)^2}{1!\,8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}+\ldots\right]. \qquad (11.140)$$

Интеграл (11.136), в котором интегрирование ведется вдоль вещественной оси, сходится только в области $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$; в выражении (11.140) область сходимости может быть расширена до $-\pi < \arg z < \pi$. Бесконечный ряд (11.140) расходится, однако он является асимптотическим в том смысле, что при достаточно больших z функция $K_\nu(z)$ может быть аппроксимирована этим рядом с любой наперед заданной точностью (определение и свойства асимптотических рядов см. в разд. 5.10).

Опираясь на полученное асимптотическое разложение $K_\nu(z)$, можно получить аналогичные разложения всех других функций Бесселя, в том числе и гиперболических функций Бесселя.

---

* При $\nu = 0$ интеграл расходится логарифмически, что также согласуется с логарифмической расходимостью $K_0(z)$ (см. разд. 11.4).

1. Из формулы

$$\frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = K_\nu(z) \tag{11.141}$$

имеем

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(\pi/2)(\nu+1/2)} e^{iz} \times$$
$$\times \left[1 + i\frac{(4\nu^2-1^2)}{8z} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} - \dots\right],$$
$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \tag{11.142}$$

2. Вторая функция Ханкеля получается комплексным сопряжением первой:

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(\pi/2)(\nu+1/2)} e^{-iz} \times$$
$$\times \left[1 - i\frac{(4\nu^2-1^2)}{8z} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} - \dots\right]. \tag{11.143}$$

В разд. 7.4 в качестве примера использования метода перевала приведен другой способ получения асимптотических представлений функций Ханкеля.

3. Функция $J_\nu(z)$ представляет собой реальную часть $H_\nu^{(1)}(z)$, поэтому

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{\cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \times \right.$$
$$\times \left[1 - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} + \dots\right] +$$
$$\left. + \sin\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\left(-\frac{4\nu^2-1^2}{8z} + \dots\right)\right\}. \tag{11.144}$$

4. Функция Неймана равна мнимой части функции $H_\nu^{(1)}(z)$, поэтому

$$N_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{\sin\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \times \right.$$
$$\times \left[1 - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} + \dots\right] +$$
$$\left. + \cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\left(\frac{4\nu^2-1^2}{8z} - \dots\right)\right\}. \tag{11.145}$$

5. Наконец, регулярная гиперболическая функция или функция Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(z)$, заданная соотношением

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz), \tag{11.146}$$

имеет асимптотический вид

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 - \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!\,(8z)} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} - \ldots\right]. \tag{11.147}$$

На этом мы завершим рассмотрение асимптотических разложений. Однако отметим следующее. Если отвлечься от функции $z^{-1/2}$, то J_ν и N_ν ведут себя соответственно как косинус и синус. Нули этих функций почти равномерно отстоят друг от друга на интервалы, равные π; в пределе при $z \to \infty$ эти интервалы оказываются в точности равными π. Функции Ханкеля ведут себя так же, как мнимая экспонента, а функции Бесселя мнимого аргумента I_ν и K_ν — как положительные и отрицательные экспоненты. Указанное асимптотическое поведение этих функций оказывается достаточным, чтобы сразу же, исходя из физических соображений, исключить одну из них из решения конкретной физической задачи. Как установлено в разд. 11.2, асимптотические формы могут быть использованы для получения определителей Вронского (см. ниже. упр.4).

Упражнения

1. При выборе нормировки интегрального представления $K_\nu(z)$ (11.136) предполагалось, что оно не содержит функции $I_\nu(z)$. Как

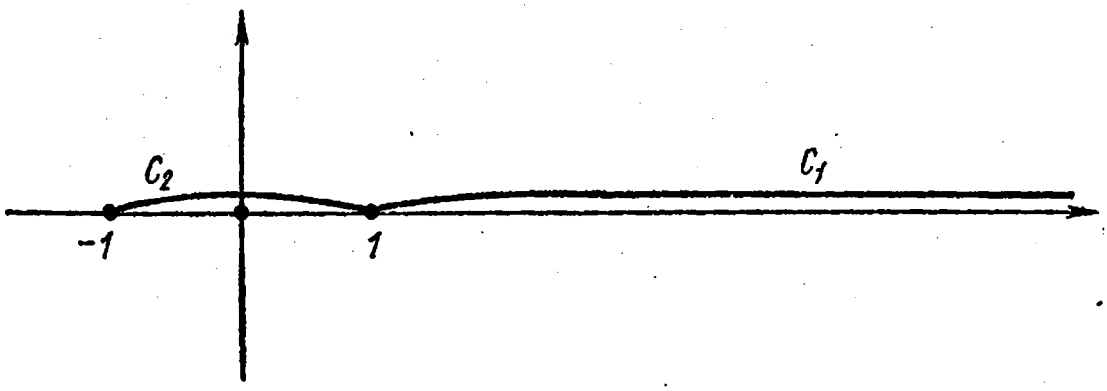


Рис. 11.7. Контуры интегрирования для функции Бесселя мнимого аргумента (в t-плоскости).

убедиться, что это интегральное представление нельзя записать в виде $K_\nu(z) + \varepsilon I_\nu(z)$, где $\varepsilon \neq 0$?

2. Показать, что $y(z) = z^{\nu} \int e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-1/2}\, dt$ удовлетворяет уравнению Бесселя мнимого аргумента, если контур интегрирования выбран таким, что $e^{-zt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ имеет одно и то же значение в начальной и конечной точках контура. Убедиться, что этим требованиям удовлетворяют контуры C_1 и C_2 (рис. 11.7).

3. Использовать асимптотические разложения для проверки определителей Вронского:

$$J_\nu(x) J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x) I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\sin \nu\pi}{\pi x},$$

$$J_\nu(x) N_{\nu+1}(x) - J_{\nu+1} N_\nu(x) = -\frac{2}{\pi x},$$

$$J_\nu(x) H^{(2)}_{\nu-1}(x) - J_{\nu-1}(x) H^{(2)}_\nu(x) = \frac{2}{i\pi x},$$

$$I_\nu(x) K'_\nu(x) - I'_\nu(x) K_\nu(x) = -\frac{1}{x},$$

$$I_\nu(x) K_{\nu+1}(x) + I_{\nu+1}(x) K_\nu(x) = \frac{1}{x}.$$

В последней формуле доказательство того, что постоянная равна единице, не зависит от ν. Означает ли это, что $I_\nu(x) K_{\nu+2}(x) + I_{\nu+2}(x) K_\nu(x) = 1/x$? Проверить, используя асимптотическое представление. В чем здесь ошибка?

11.6. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Если в уравнении Гельмгольца в сферических (или конических) координатах переменные можно разделить, то радиальная часть уравнения приобретает вид

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (11.148)$$

Параметр k входит в исходное уравнение Гельмгольца, а n (целое) — константа разделения, которую часто в физике отождествляют с моментом количества движения. Очевидно, (11.148) не является уравнением Бесселя, но подстановкой $R(kr) = Z(kr)/(kr)^{1/2}$ оно приводится к нему:

$$r^2 \frac{d^2Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left[k^2r^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] Z = 0. \quad (11.149)$$

Здесь Z — функция Бесселя порядка $n + 1/2$ (n — целое). Вследствие важности и распространенности сферических координат комбинация $Z_{n+1/2}(kr)/(kr)^{1/2}$ встречается часто.

Определения. Обычно новые функции называют *сферическими функциями Бесселя* и определяют соотноше-

шиями

$$\left.\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+1/2}(x), \\ n_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n-1/2}(x)^*, \\ h_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x), \\ h_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{n+1/2}^{(2)}(x) = j_n(x) - i n_n(x). \end{aligned}\right\} \quad (11.150)$$

Эти функции (рис. 11.8, *а*) можно представить рядами, аналогичными ряду (11.5) для J_n, заменяя в последнем n на $n+1/2$:

$$J_{n+1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s+n+1/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2}. \quad (11.151)$$

Из формулы удвоения Лежандра

$$z!\left(z+\frac{1}{2}\right)! = 2^{-2z-1}\pi^{1/2}(2z+1)! \quad (11.152)$$

получаем

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s+2n+1}(s+n)!}{\pi^{1/2}(2s+2n+1)!\,s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2} =$$

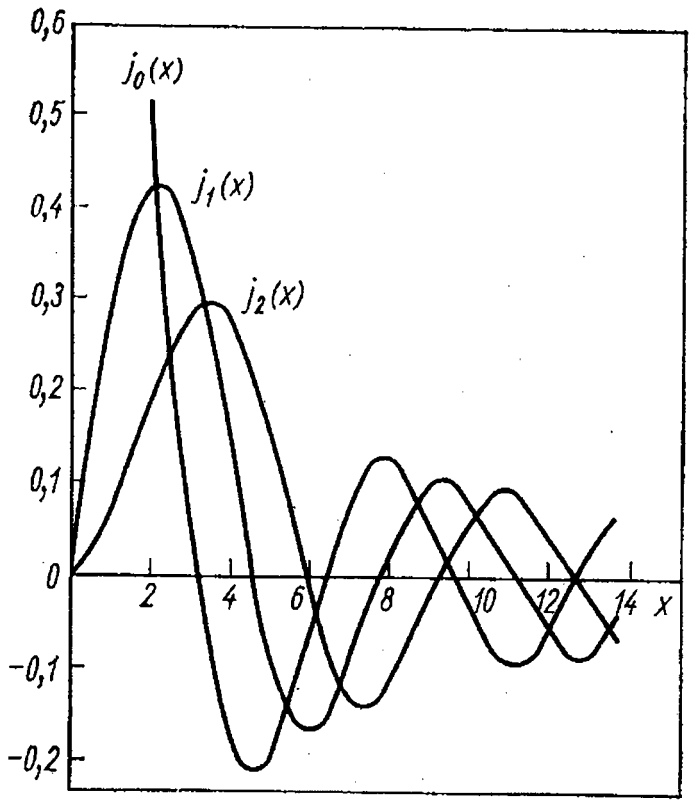
$$= 2^n x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+n)!}{s!\,(2s+2n+1)!}\, x^{2s}. \quad (11.153)$$

Далее, поскольку $N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-1/2}(x)$, из уравнения (11.5) следует:

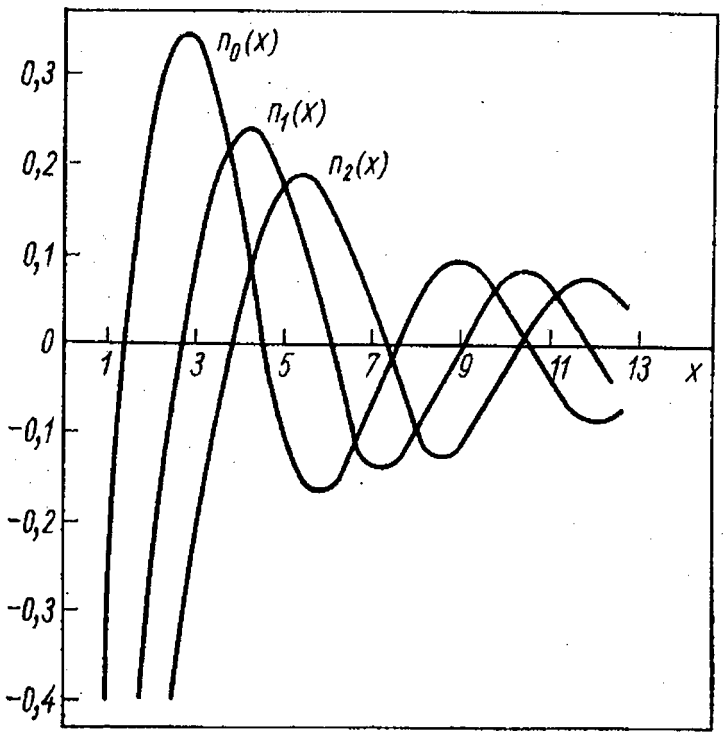
$$J_{-n-1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(s-n-1/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n-1/2}, \quad (11.154)$$

---

* Это возможно, так как $\cos(n+1/2)\pi = 0$.



а



б

Рис. 11.8. Сферические функции Бесселя (*а*) и Неймана (*б*).

отсюда

$$n_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n \pi^{1/2}}{x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \left(s-n-\frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \quad (11.155)$$

Вновь применим формулу удвоения, тогда

$$n_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-n)!}{s!\,(2s-2n)!} x^{2s}. \quad (11.156)$$

Однако эта формула неудобна для вычислений при целом положительном n, так как она содержит факториалы и в числителе, и в знаменателе. Введенные сферические функции Бесселя тесно связаны с тригонометрическими функциями, в чем можно убедиться, рассматривая специальный случай $n = 0$. Мы имеем

$$j_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} x^{2s} = \frac{\sin x}{x}, \quad (11.157)$$

тогда как из уравнения (11.156) получаем

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}. \quad (11.158)$$

По определению сферических функций Ханкеля (11.150)

$$\left.\begin{aligned} h_0^{(1)}(x) &= \frac{1}{x}(\sin x - i\cos x) = \frac{i}{x} e^{ix}, \\ h_0^{(2)}(x) &= \frac{1}{x}(\sin x + i\cos x) = \frac{i}{x} e^{-ix}. \end{aligned}\right\} \quad (11.159)$$

Связь с тригонометрическими функциями, вероятно, легче проследить, рассматривая асимптотические ряды из разд. 11.5. При $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots$ асимптотические ряды оказываются ограниченными и представляют собой просто комбинацию конечного числа тригонометрических функций.

Рекуррентные соотношения. Рассмотрим рекуррентные соотношения, которые позволят получать сферические функции Бесселя более высоких порядков. Их можно ввести с помощью рядов, однако, как и в случае функций Бесселя мнимого аргумента, воспользуемся рекуррентными

соотношениями (11.10) и (11.12):

$$f_{n-1}(x)+f_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}f_n(x), \tag{11.160}$$

$$nf_{n-1}(x)-(n+1)f_{n+1}(x)=(2n+1)f_n'(x). \tag{11.161}$$

Перегруппировав эти соотношения или сделав подстановку в уравнения (11.15) и (11.17), получим

$$\frac{d}{dx}[x^{n+1}f_n(x)]=x^{n+1}f_{n-1}(x), \tag{11.162}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}f_n(x)]=-x^{-n}f_{n+1}(x). \tag{11.163}$$

Здесь под f_n можно понимать j_n, n_n, $h_n^{(2)}$ или $h_n^{(1)}$.

Из уравнения (11.163) сразу получим

$$\left.\begin{aligned} j_1(x)&=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x},\\ j_2(x)&=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{3}{x^2}\cos x;\end{aligned}\right\} \tag{11.164}$$

$$\left.\begin{aligned} n_1(x)&=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x},\\ n_2(x)&=-\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x-\frac{3}{x^2}\sin x \text{ и т. д.}\end{aligned}\right\} \tag{11.165}$$

Методом математической индукции можно установить, что

$$j_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right), \tag{11.166}$$

$$n_n(x)=-(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right). \tag{11.167}$$

Заметим, что сферические функции Бесселя $j_n(x)$ и $n_n(x)$ всегда можно выразить через $\sin x$ и $\cos x$ с коэффициентами, являющимися полиномами с отрицательными степенями x. Для сферических функций Ханкеля имеем

$$h_n^{(1)}(x)=-i(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{e^{ix}}{x}\right), \tag{11.168}$$

$$h_n^{(2)}(x)=i(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{e^{-ix}}{x}\right). \tag{11.169}$$

Ортогональность. Перепишем условия ортогональности (11.58) и (11.59) для обычных функций Бесселя с помощью

δ-функции и соответствующих подстановок для j_n:

$$\int_0^1 j_n(ax)\, j_n(bx)\, x^2\, dx = \frac{1}{2}\delta_{ab}\left\{\frac{d}{dx}\left[x^{1/2} j_n(x)\right]_{x=a}\right\}^2. \quad (11.170)$$

Здесь a и b — корни функции J_n (или j_n).

Мы получили условие ортогональности, связанное с корнями функций Бесселя. Уравнение (11.170) гарантирует ортогональность волновых функций $j_n(r)$ при фиксированном n. (Если n изменяется, то ортогональность будет обеспечиваться сферической функцией.) Другой тип ортогональности — ортогональность по индексам, можно получить следующим образом. Из уравнения (11.148) при $x = kr$ имеем

$$\begin{aligned} x^2 j_n'' + 2x j_n' + [x^2 - n(n+1)]\, j_n = 0, \\ x^2 j_m'' + 2x j_m' + [x^2 - m(m+1)]\, j_m = 0. \end{aligned} \quad (11.171)$$

Умножим первое уравнение на j_m, а второе на j_n и вычтем один результат из другого:

$$\begin{aligned} [n(n+1) - m(m+1)]\, j_n j_m = x^2 (j_n'' j_m - j_n j_m'') + \\ + 2(j_n' j_m - j_n j_m') = \frac{d}{dx}\left[x^2 (j_n' j_m - j_n j_m')\right]. \end{aligned} \quad (11.172)$$

Последнее уравнение представляет собой запись уравнения (11.148) в форме Штурма — Лиувилля (см. разд. 9.1). Проинтегрируем его от нуля до бесконечности:

$$\begin{aligned} [n(n+1) - m(m+1)] \int_0^\infty j_m(x)\, j_n(x)\, dx = \\ = \left| x^2 (j_n' j_m - j_n j_m') \right|_0^\infty. \end{aligned} \quad (11.173)$$

Очевидно, при $x = 0$ правая часть обращается в нуль (предполагается, что n и m — неотрицательные целые числа). При $x \to \infty$ она также исчезает, если $(n-m)$ — четное. В этом можно убедиться, изучив поведение асимптотических форм $j_n(x) \to \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$ и $j_n'(x) \to \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$. Учитывая сказанное, запишем

$$\begin{aligned} x^2 (j_n' j_m - j_n j_m') \to \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(x - \frac{m\pi}{2}\right) - \\ - \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(x - \frac{m\pi}{2}\right) + O(x^{-1}) = \sin\frac{\pi}{2}(n-m) + O(x^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty j_m(x)\, j_n(x)\, dx = \frac{\sin[(n-m)\,\pi/2]}{n(n+1)-m(m+1)}. \qquad (11.174)$$

Правая часть последнего равенства обращается в нуль при четном $(n-m)$. Если $(n-m)$ — нечетное, одна из сферических функций Бесселя, скажем j_m, будет нечетной, тогда как другая будет четной:

$$j_p(x) = (-1)^p\, j_p(-x). \qquad (11.175)$$

Отсюда следует, что при распространении нижнего предела до $-\infty$

$$\int_{-\infty}^\infty j_m(x)\, j_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n,\ m,\ n \geqslant 0; \qquad (11.176)$$

$$\int_{-\infty}^\infty [j_n(x)]^2\, dx = \frac{\pi}{2n+1}, \quad m = n. \qquad (11.177)$$

Частица в сферической яме. Рассмотрим движение квантовомеханической частицы в сфере радиусом a. Волновая функция такой частицы удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \qquad (11.178)$$

с граничными условиями: $\psi(r \leqslant a) < \infty$ и $\psi(a) = 0$. Это соответствует потенциалу $V = 0$ при $r \leqslant a$ и $V = \infty$ при $r > a$. Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π; m — масса частицы и E — ее энергия. Определим минимальное значение энергии, для которого волновое уравнение допускает решение. Уравнение (11.178) есть уравнение Гельмгольца с радиальной частью (см. разд. 2.5):

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2dR}{r\,dr} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0. \qquad (11.179)$$

С учетом (11.148) при $n = 0$ получим

$$R = Aj_0\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r\right) + Bn_0\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r\right). \qquad (11.180)$$

Мы положили индекс $n = 0$, так как в противном случае при любой угловой зависимости энергия будет увеличиваться. Из физических соображений сферическая функция

Неймана должна быть отброшена, поскольку она расходится в начале координат. Чтобы удовлетворить второму граничному условию (при любых углах), потребуем, чтобы $(\sqrt{2mE}/\hbar)\, a = \alpha$, где α — корень j_0, т. е. $j_0(\alpha) = 0$. Последнее условие ограничивает допустимые значения энергии определенным дискретным набором, иными словами, второе граничное условие приводит к квантованию энергии E. Первый корень j_0 при $\alpha = \pi$, поэтому

$$E_{\text{мин}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{h^2}{8ma^2}, \tag{11.181}$$

а это значит, что энергия частицы, находящейся в сферической яме конечного радиуса, имеет минимальное положительное значение либо равна нулю. Этот вывод иллюстрирует принцип неопределенности Гейзенберга.

Упражнения

1. Показать, что одно из дифференциальных уравнений, получившихся после разделения переменных в уравнении Гельмгольца в конических координатах, представляет собой сферическое уравнение Бесселя.

2. Получить рекуррентные соотношения (11.160) и (11.161), в которых $f_n(x)$ обозначают сферические функции $j_n(x)$, $n_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ и $h_n^{(2)}(x)$. Убедиться, что из этих двух соотношений следует дифференциальное уравнение для сферической функции Бесселя $f_n(x)$ $x^2 f_n''(x) + 2x f_n'(x) + [x^2 - n(n+1)]\, f_n(x) = 0$.

3. Методом математической индукции показать, что для произвольных неотрицательных целых n справедливо соотношение (11.166).

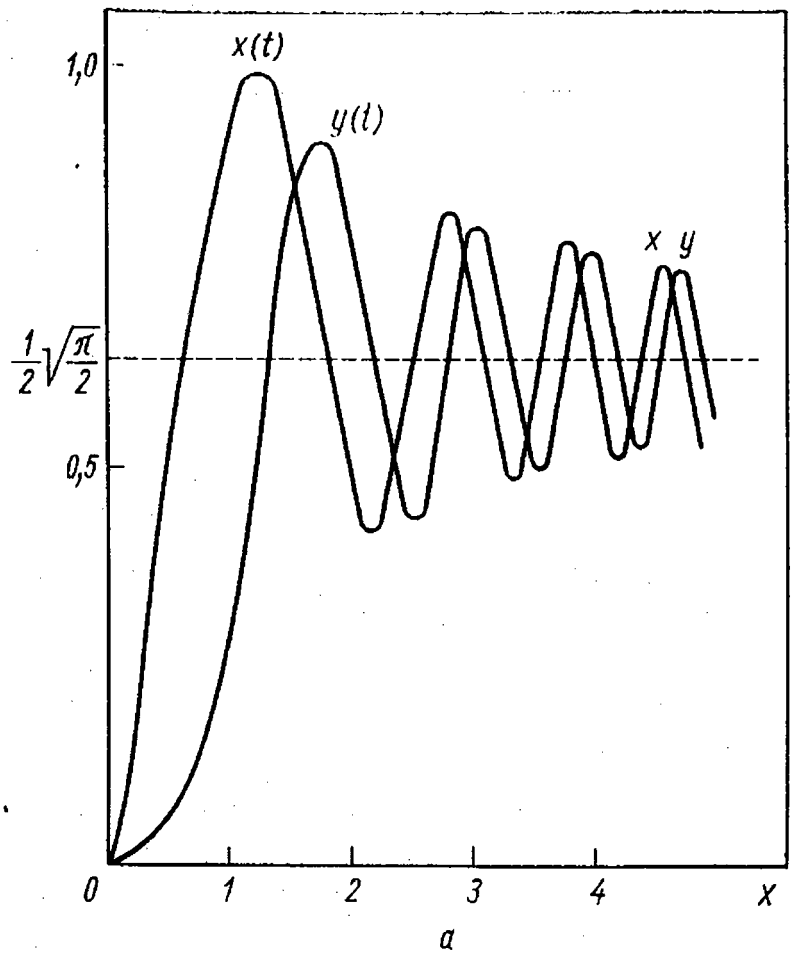
4. В теории дифракции встречаются интегралы Френеля (рис. 11.9, *а*)

$$x(t) = \int_0^t \cos(v^2)\, dv, \quad y(t) = \int_0^t \sin(v^2)\, dv.$$

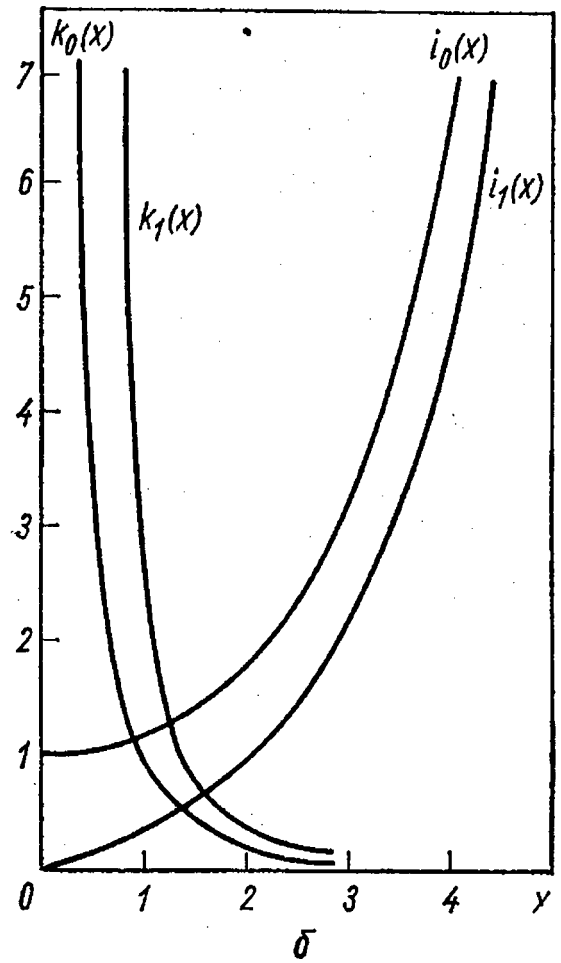
Показать, что эти интегралы можно разложить в ряд по сферическим функциям Бесселя

$$x(s) = \frac{1}{2}\int_0^z j_{-1}(u)\, u^{1/2}\, du = s^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n}(s),$$

$$y(s) = \frac{1}{2}\int_0^s j_0(u)\, u^{1/2}\, du = s^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n+1}(s).$$



а



б

Рис. 11.9. Интегралы Френеля (*а*) и сферические функции Бесселя мнимого аргумента (*б*).

5. Показать, что функция $n_n(x)$ равна $(-1)^{n+1}\sqrt{\pi/2x}\,J_{-n-1/2}(x)$, если $n_n(x)=\sqrt{\pi/2x}\,N_{n+1/2}(x)$.

6. Показать, что определитель Вронского для функций $j_n(x)$ и $n_n(x)$ равен $j_n(x)\,n_n'(x)-j_n'(x)\,n_n(x)=1/x^2$. *Указание.* Воспользоваться свойством ортогональности.

7. Доказать, что из уравнения (11.173) следует условие ортогональности (11.174), и, кроме того, убедиться в справедливости соотношения

$$\int_0^\infty J_\mu(x)\,J_\nu(x)\,\frac{dx}{x}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin[(\mu-\nu)\,\pi/2]}{\mu^2-\nu^2},\quad \mu+\nu>-1.$$

8. Убедиться в справедливости соотношения (11.177).

9. Используя интегральное представление

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}\,(\nu-1/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{1}e^{\pm ixp}\,(1-p^2)^{\nu-1/2}\,dp,$$

показать, что сферические функции Бесселя $j_n(x)$ выражаются через тригонометрические функции следующим образом:

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}.$$

10. Считая, что сферические функции Бесселя мнимого аргумента (рис. 11.9, *б*) равны $i_n(x)=\sqrt{\pi/2x}\,I_{n+1/2}(x)$, $k_n(x)=\sqrt{2/\pi x}\,K_{n+1/2}(x)$, показать, что

$$i_0(x)=\operatorname{sh}x/x,\quad k_0(x)=e^{-x}/x,$$

а определитель Вронского имеет следующий вид:

$$i_n(x)\,k_n'(x)-i_n'(x)\,k_n(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Убедиться, что сферические функции Бесселя мнимого аргумента удовлетворяют соотношениям:

$$i_n(x)=i^{-n}j_n(ix),\quad i_{n+1}(x)=x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}i_n),\quad i_n(x)=x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{\operatorname{sh}x}{x},$$

$$k_n(x)=-i^n h_n^{(1)}(ix),\quad k_{n+1}(x)=-x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}k_n),$$

$$k_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{e^{-x}}{x}.$$

11. Показать, что $i_n(x)$ имеет четность $(-1)^n$, а $k_n(x)$ не имеет определенной четности.

12. Записать интеграл ортогональности для функций $j_L(kr)$ в сфере радиусом R при граничном условии $j_L(kR)=0$. Условие

ортогональности используется при классификации электромагнитного излучения по моменту количества движения.

13. Проверить формулу

$$h_n^{(1)}(x)\,h_n^{(2)\prime}(x)-h_n^{(1)\prime}(x)\,h_n^{(2)}(x)=-\frac{2i}{x^2}.$$

14. Показать, что $x^{-1}\cos\sqrt{x^2-2xt}$ и $x^{-1}\sin\sqrt{x^2+2xt}$ — *производящие функции* для сферических функций Бесселя, т. е.

$$x^{-1}\cos\sqrt{x^2-2xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,j_{n-1}(x)\,t^n,$$

$$x^{-1}\sin\sqrt{x^2+2xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,n_{n-1}(x)\,t^n,\quad |t|<\frac{|x|}{2}.$$

15. Показать, что сферические функции Бесселя $i_n(x)$ можно определить как

$$x^{-1}\mathrm{ch}\sqrt{x^2+2ixt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\,i_{n-1}(x)\,t^n,\quad |t|<\frac{|x|}{2}.$$

16. Проверить, что с точностью до множителя $\pi/2x$ функции j_0, j_1, n_0 и n_1 выражаются через асимптотические представления (11.144) и (11.145) функций J_ν и N_ν при $\nu=1/2,\ 3/2$.

ГЛАВА 12

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

12.1. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

Физическое обоснование. Электростатика. По аналогии с функциями Бесселя полиномы Лежандра удобно ввести через производящую функцию, причем такое определение поддается прямой физической интерпретации. Рассмотрим электрический заряд q, расположенный на оси z в точке $z = a$ (рис. 12.1). Электростатический потенциал заряда q в точке A равен (в единицах МКСА).

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1} . \qquad (12.1)$$

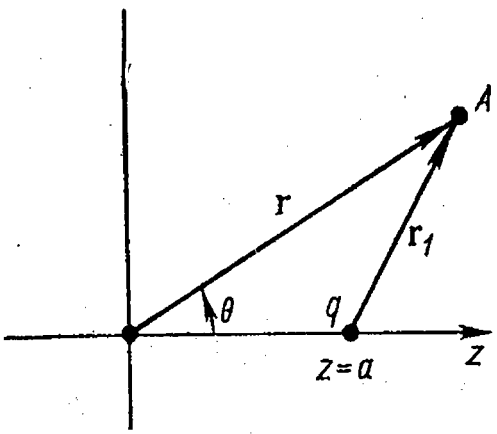


Рис. 12.1. Электростатический потенциал. Заряд q смещен относительно начала координат.

Выразим электростатический потенциал в сферических координатах r и θ (φ отсутствует из-за симметрии задачи относительно оси z). Используя закон косинусов, получаем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} (r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{-1/2}. \qquad (12.2)$$

Полиномы Лежандра. Пусть $r > a$, или, точнее, $r^2 > |a^2 - 2ar\cos\theta|$. Радикал, входящий в (12.2), можно разложить в ряд по степеням a/r:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n , \qquad (12.3)$$

где $P_n(\cos\theta)$ — коэффициенты этого ряда при n-й степени. Функции P_n называются полиномами Лежандра

(рис. 12.2) и могут быть определены из соотношения

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n, \quad |t| < 1, \quad (12.4)$$

где $g(t, x)$ — производящая функция. В следующем разделе будет показано, что $|P_n(\cos\theta)| \leqslant 1$, т. е. ряд (12.4)

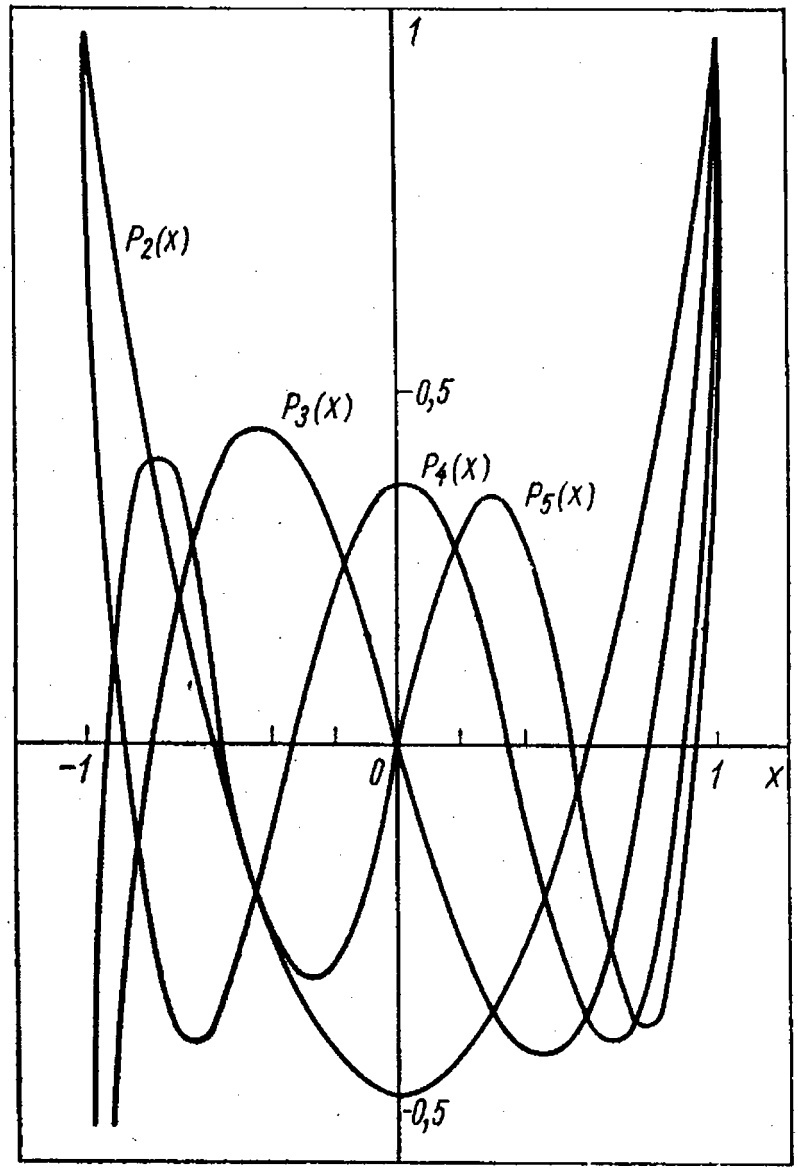


Рис. 12.2. Полиномы Лежандра $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ и $P_5(x)$.

сходится при $|t| < 1$ *. Разложение (12.4) определяет полиномы Лежандра $P_n(x)$, поэтому совсем не обязательно, чтобы этот ряд сходился. Можно получить явное выражение для полиномов в том случае, когда ряд сходится. Однако

* Заметим, что ряд из (12.3) сходится при $r > a$, хотя само биномиальное разложение справедливо только при $r > (a^2 + 2ar)^{1/2}$, $\cos\theta = -1$.

всегда удобно иметь сведения о сходимости ряда с тем, чтобы использовать свойства сходимости степенных рядов (см. разд. 5.7).

Используя биномиальную теорему (см. разд. 5.6), разлагаем производящую функцию:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!}{n!\left(-\frac{1}{2}\right)!}(2xt-t^2)^n. \quad (12.5)$$

Биномиальное разложение множителя $(2xt-t^2)^n$ приводит к двойному ряду

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1/2)!}{n!\,(-1/2)!}t^n\sum_{k=0}^{n}(2x)^{n-k}(-1)^k t^k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1/2)!\,(-1)^k\,(2x)^{n-k}}{(-1/2)!\,(n-k)!\,k!}t^{n+k}. \quad (12.6)$$

Согласно тождеству (5.62в), можно изменить порядок суммирования:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(n-k-1/2)!\,(-1)^k\,(2x)^{n-2k}}{(-1/2)!\,k!\,(n-2k)!}t^n. \quad (12.7)$$

Здесь переменная t не зависит от индекса k. Далее, приравнивая почленно два степенных ряда, имеем

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1/2)!}{(-1/2)!\,k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим теперь систему из двух зарядов (ее называют диполем), поместив один из них $(-q)$ в точку $z=-a$ и q в точку $z=a$ (рис. 12.3). В этом случае потенциал в точке А равен

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \quad (12.9)$$

Вновь используя закон косинуса, получаем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left[1-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2} - \right.$$
$$\left. -\left[1+2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}. \qquad (12.10)$$

Очевидно, второй член в квадратных скобках во всем подобен первому с той только разницей, что в нем сделана замена

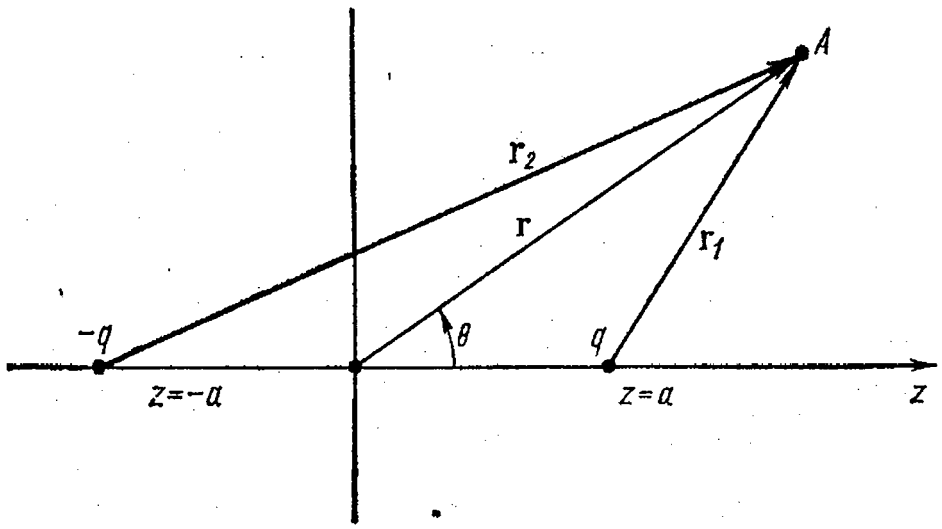


Рис. 12.3. Электрический диполь.

$a = -a$. Тогда с учетом уравнения (12.4)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)(-1)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n\right] =$$
$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)+P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3+\ldots\right]. \qquad (12.11)$$

Первый член (он играет главную роль при $r \gg a$)

$$\varphi = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}, \qquad (12.12)$$

где $2aq$ — момент диполя (см. рис. 12.3), представляет собой потенциал обычного электрического диполя.

Линейные электрические мультиполи. Проведенный анализ можно продолжить, поместив дополнительные заряды на оси z так, чтобы наряду с P_0 из разложения исчез член, содержащий P_1. Например, два заряда q, помещенные в точках $z = a$ и $z = -a$, и заряд $-2q$ в точке $z = 0$

образуют систему, которую называют линейным электрическим квадруполем (рис. 12.4, *а*). Потенциал такого квадруполя описывается выражением, начинающимся с $P_2(\cos\theta)$. Два линейных квадруполя можно скомбинировать так, что из выражения для потенциала такой системы выпадает квадрупольный член, но сохранится октупольный член P_3. Возможны и другие конфигурации,

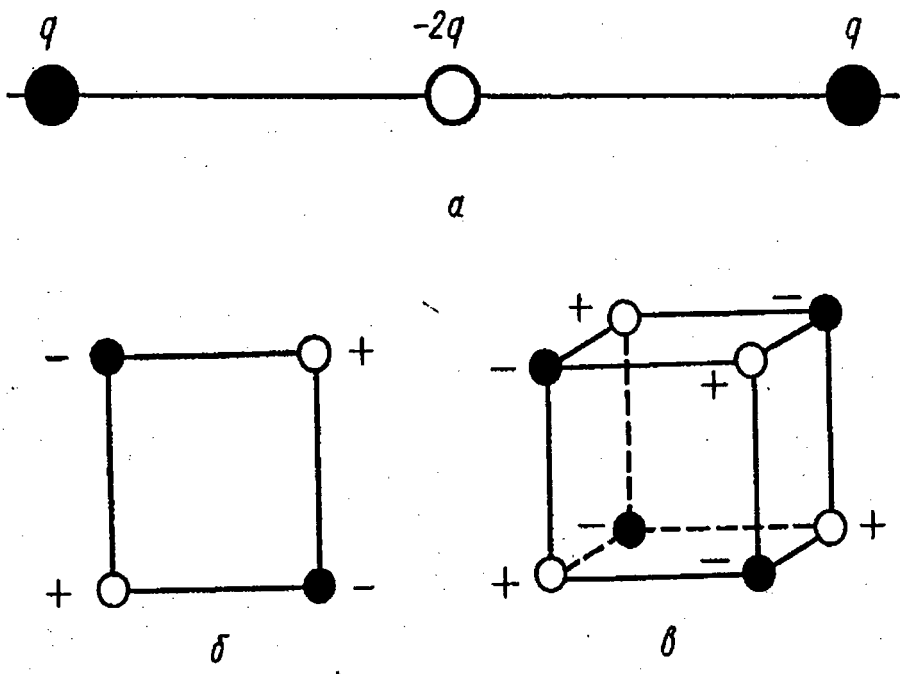


Рис. 12.4. Линейный электрический квадруполь (*а*), квадруполь (*б*) и октуполь (*в*).

например заряды противоположного знака, расположенные в вершинах квадрата (или параллелограмма), образуют квадруполь, а система зарядов разных знаков, помещенных в вершинах куба — октуполь (рис. 12.4,*б* и *в*).

Полиномы Гегенбауэра. Производящая функция (12.4) является частным случаем более общей производящей функции

$$\frac{2^m}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{(m-1/2)!}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^m(x)\,t^n, \qquad (12.13)$$

коэффициенты $T_n^m(x)$ часто называют полиномами Гегенбауэра. При $m = 0$ выражение (12.13) сводится к (12.4), т. е. $T_n^0(x) = P_n(x)$. Случаи, соответствующие $m = \pm 1/2$, рассмотрены в гл. 13.

Заканчивая обсуждение мультиполей, подчеркнем следующее. Во-первых, электрический (или магнитный) мультиполь имеет самостоятельное значение только тогда, когда в разложении потенциала отсутствуют члены более низкого порядка. Например, потенциал одного заряда q, помещенного в точку $z = a$, мы разложили в ряд по полиномам Лежандра. В этом разложении член, содержащий $P_1(\cos\theta)$,— квадрупольный, однако он появился в разложении только вследствие выбора системы координат. В действительности же эта система — монопольная, характеризующаяся полиномом $P_0(\cos\theta)$. Во-вторых, в реальных физических системах обычно имеют дело не с чистыми мультиполями. Например, потенциал диполя конечных размеров (см. рис. 12.3) содержит член с $P_3(\cos\theta)$. Эти члены более высокого порядка можно исключить, стягивая диполь в точку; в этом случае, сохраняя произведение qa ($a \to 0$, $q \to \infty$) постоянным, дипольный момент останется неизменным.

Упражнения

1. Показать, что электростатический потенциал заряда q, помещенного в точку $z = a$, при $r < a$ равен $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)$.

2. Пусть $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Определить компоненты электрического поля, соответствующего (чистому) дипольному потенциалу (12.12).

Ответ. (Предположить, что $r \gg a$.)

$$E_r = \frac{4aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{2aq\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = 0.$$

3. Найти электростатический потенциал линейного электрического квадруполя, изображенного на рис. 12.4, *а*.

4. Построить простую одномерную систему зарядов, потенциал которой описывается выражением, начинающимся с октупольного члена.

5. Точечный электрический диполь мощностью $p^{(1)}$ расположен в точке $z = a$, второй такой же диполь равной, но противоположной по знаку мощности расположен в начале координат. Сохраняя постоянным произведение $p^{(1)}a$, перейти к пределу $a \to 0$. Показать, что такая система является электрическим квадруполем.

6. Доказать, что $P_n(\cos\theta) = (-1)^n \dfrac{r^{n+1}}{n!} \cdot \dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$. *Указание.* Сравнить разложение производящей функции в ряд по полиномам Лежандра с разложением в ряд Тейлора.

7. Используя гипергеометрические функции, можно получить, что $e^{xt} J_0(t\sqrt{1-x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!}$. Проверить правильность этого соотношения для степеней t, начиная с t^2.

12.2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Рекуррентные соотношения. Получим рекуррентные соотношения с помощью производящей функции. Для этого продифференцируем производящую функцию (12.4) по t:

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1}. \qquad (12.14)$$

Подставив сюда значение производящей функции из (12.4), получим

$$(1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1} + (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = 0. \qquad (12.15)$$

Левая часть этого уравнения представлена рядом по степеням t. Поскольку этот степенной ряд при всех t равен нулю, приравняем нулю коэффициенты при любой степени t (см. разд. 5.7). Эту процедуру легко выполнить, раздробив суммирование по каждому отдельному члену и образовав затем новые суммы по различным индексам:

$$\sum_{m=0}^{\infty} mP_m(x)\, t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)\, t^n + \sum_{s=0}^{\infty} sP_s(x)\, t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)\, t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)\, t^n = 0. \qquad (12.16)$$

Положим теперь $m = n+1$ и $s = n-1$, тогда

$$(2n+1)\, xP_n(x) = (n+1)\, P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (12,17)$$

Данное рекуррентное соотношение подобно (но не идентично) рекуррентному соотношению для функций Бесселя. С его помощью можно получить полиномы Лежандра высших порядков. Если положить $n = 1$ и подставить значения полиномов $P_0(x)$ и $P_1(x)$ (см. упр. 7 к разд. 12.1)

в формулу (12.17), то легко определить явный вид $P_2(x)$:

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2. \tag{12.18}$$

Этот процесс можно продолжить. Приведем явные выражения для нескольких первых полиномов Лежандра:

$$\left.\begin{aligned} &P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x^2,\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ &P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ &P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

Дифференциальные уравнения. Дальнейшие свойства полиномов Лежандра можно установить, дифференцируя производящую функцию (12.4) по x:

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\, t^n \tag{12.20}$$

или

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\, t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = 0. \tag{12.21}$$

Как и прежде, коэффициенты при каждой степени t нужно приравнять нулю, откуда

$$P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) = 2xP_n'(x) + P_n(x). \tag{12.22}$$

Более удобное соотношение получается после дифференцирования уравнения (12.17) по x и умножения его на два. К полученному результату затем прибавим уравнение (12.22), предварительно умножив его на $(2n + 1)$, после чего член с P_n' исключается. В результате имеем

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n + 1) P_n(x). \tag{12.23}$$

С помощью уравнений (12.17) и (12.23) можно получить несколько дополнительных соотношений:

$$P_{n+1}'(x) = (n + 1) P_n(x) + xP_n'(x), \tag{12.24}$$

$$P_{n-1}'(x) = -nP_n(x) + xP_n'(x), \tag{12.25}$$

$$(1 - x^2) P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \tag{12.26}$$

$$(1 - x^2) P_n'(x) = (n + 1) xP_n(x) - (n + 1) P_{n+1}(x). \tag{12.27}$$

Продифференцировав соотношение (12.26), исключим с помощью (12.25) член, содержащий $P'_{n-1}(x)$, в результате получим, что $P''_n(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению Лежандра

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (12.28)$$

Итак, полиномы $P_n(x)$, возникшие при разложении в ряд функции $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$, удовлетворяют уравнению Лежандра, поэтому они и названы полиномами Лежандра. В уравнении (12.28) дифференцирование производится по переменной $x = \cos\theta$. Часто уравнение Лежандра записывают в такой форме:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0. \quad (12.29)$$

С помощью производящей функции можно получить дополнительную информацию о полиномах Лежандра. Положим $x = 1$, тогда уравнение (12.4) приведется к виду

$$\frac{1}{(1-2t+t^2)^{1/2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad (12.30)$$

тогда, поскольку

$$\frac{1}{(1-2tx+t^2)^{1/2}\big|_{x=1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\,t^n, \quad (12.31)$$

из сравнения двух рядов следует, что $P_n(1) = 1$. Аналогично можно показать, что

$$P_n(-1) = (-1)^n, \quad (12.32)$$

если положить $x = -1$. Если же взять $x = 0$, то с помощью разложения

$$(1+t^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 - \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!}t^{2n} + \ldots \quad (12.33)$$

получим

$$P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (12.34)$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (12.35)$$

Четность. Некоторые из полученных результатов можно считать прямым следствием свойств четности полиномов Лежандра. Если заменить в производящей функции (12.4) x на $-x$, а t на $-t$, то она не изменится. Следовательно,

$$g(t, x) = g(-t, -x) = [1 - 2(-t)(-x) + (-t)^2]^{-1/2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \qquad (12.36)$$

откуда

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \qquad (12.37)$$

ц. е. полиномы являются четными или нечетными функциями (относительно $x = 0$, $\theta = \pi/2$) в зависимости от четкости или нечетности индекса n. Это свойство четности, которое играет важную роль в квантовой механике. Для ментральных сил индекс n характеризует орбитальный момент количества движения, следовательно, четность оказывается связанной с этим моментом.

Проверить закон четности для полиномов Лежандра можно, используя либо решение, записанное в виде ряда, либо полиномы (12.19). Отметим, что результат (12.37) в какой-то мере следует уже из рекуррентной формулы (12.17). В самом деле, если $P_{n-1}(x)$ и $xP_n(x)$ четны, то и полином $P_{n+1}(x)$ также должен быть четным.

Наконец, производящая функция позволяет установить верхний предел абсолютного значения $|P_n(\cos\theta)|$. Мы имеем

$$(1 - 2t\cos\theta + t^2)^{-1/2} = (1 - te^{i\theta})^{-1/2}(1 - te^{-i\theta})^{-1/2} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} te^{i\theta} + \frac{3}{8} t^2 e^{2i\theta} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2} te^{-i\theta} + \frac{3}{8} t^2 e^{-2i\theta} + \ldots\right). \qquad (12.38)$$

Полином Лежандра $P_n(\cos\theta)$, который служит коэффициентом при t^n, можно теперь записать как сумму членов вида $a_m \cos m\theta$ с *положительными коэффициентами*. Очевидно, сумма этого ряда достигает максимума, когда $\theta = 0$, т. е. $\cos m\theta = 1$. Но при $x = \cos\theta = 1$ $P_n(1) = 1$. Следовательно,

$$|P_n(\cos\theta)| \leqslant P_n(1) = 1. \qquad (12.39)$$

Упражнения

1. Показать, что $P_n(\cos\theta) \geqslant -1$, причем нижняя граница достигается при нечетном n для $\cos\theta = 1$.

2. Из уравнения (12.38) выписать коэффициент $P_2(\cos\theta)$ при t^2, выразив его через $\cos n\theta$, $n \leqslant 2$.

3. Показать, что, дифференцируя производящую функцию $g(t, x)$ по t, затем умножая полученный результат на $2t$ и прибавляя к нему $g(t, x)$, можно вывести соотношение

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) t^n,$$

которое используется при подсчете заряда, индуцируемого на заземленной металлической сфере точечным зарядом q.

4. Считая заданными P_0 и P_1, с помощью рекуррентной зависимости между P_n, P_{n+1} и P_{n-1} показать, что $P_n(\cos\theta) = (-1)^n P_n(-\cos\theta)$.

5. Точечный электрический октуполь можно построить, расположив точечный электрический квадруполь мощностью $p^{(2)}$ в точке $z=a$, а равный ему, но противоположный по знаку электрический квадруполь в точке $z=0$ с последующим переходом к пределу $a \to 0$ при условии $p^{(2)}a = \text{const}$. Определить электростатический потенциал, соответствующий точечному электрическому октуполю. Показать, что по смыслу построения точечного электрического октуполя соответствующий потенциал можно получить дифференцированием потенциала точечного квадруполя.

6. Исходя из равенства

$$P_L(\cos\theta) = \frac{1}{L!} \cdot \frac{d^L}{dt^L} (1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2} \Big|_{t=0},$$

показать, что $P_L(1) = 1$, $P_L(-1) = (-1)^L$.

7. Доказать, что $P_n'(1) = \frac{d}{dx} P_n(x) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} n(n+1)$.

12.3. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Дифференциальное уравнение Лежандра (12.26) можно записать в форме

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2) P_n'(x)] + n(n+1) P_n(x) = 0, \qquad (12.40)$$

откуда ясно видно, что это уравнение самосопряженное. Известно, что в таком случае при условии выполнения определенных граничных условий решения $P_n(x)$ будут ортогональными. Воспользуемся методом теории Штурма —

Лиувилля (см. разд. 9.2). Умножим уравнение (12.40) на $P_m(x)$ и вычтем из него соответствующее уравнение, поменяв в нем местами индексы m и n. Результат проинтегрируем в пределах от -1 до $+1$:

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]-P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)]\right\}dx=$$

$$=[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx. \quad (12.41)$$

Интегрируя по частям и учитывая множитель $(1-x^2)$, получаем

$$[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0, \quad (12.42)$$

тогда для $m\neq n$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0, \quad \int_{0}^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=0, \quad (12.43)$$

откуда следует, что $P_n(x)$ и $P_m(x)$ ортогональны на отрезке $[-1,1]$. Ортогональность полиномов Лежандра просто устанавливается с помощью формулы Родригеса (см. разд. 12.4, упр. 1).

Вычислим интеграл в выражении (12.42), когда $m=n$. Из определения производящей функции

$$(1-2tx+t^2)^{-1}=\Big[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\Big]^2. \quad (12.44)$$

Проинтегрируем обе части этого выражения по x от -1 до $+1$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx. \quad (12.45)$$

Перекрестные члены ряда при интегрировании обращаются в нуль в силу условия (12.43). Сделаем замену переменной

$y = 1 - 2tx + t^2$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right). \quad (12.46)$$

Разложим выражение (12.46) в степенной ряд (см. разд. 5.6 и 5.7):

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}. \quad (12.47)$$

Как известно, разложение в степенной ряд единственно, поэтому

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (12.48)$$

Разложение функций в ряд по полиномам Лежандра. Из теории Штурма — Лиувилля следует, что полиномы Лежандра ортогональны и, кроме того, образуют полную систему. На основании этого предположим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = f(x) \quad (12.49)$$

равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$. Это означает, что функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ на данном отрезке должны быть, по крайней мере, кусочно-непрерывными. Коэффициенты a_n можно определить, умножая ряд на $P_n(x)$, а затем почленно интегрируя этот результат. Учитывая условия ортогональности (12.43) и (12.48), получаем

$$\frac{2}{2m+1} a_m = \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx. \quad (12.50)$$

Теперь функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t) \, dt \, P_n(x). \quad (12.51)$$

Этот ряд обладает теми же свойствами, что и ряд Фурье (см. гл. 14). В частности, для доказательства единственности разложения в ряд можно использовать свойство ортогональности (12.43).

Гравитационное поле Земли. Рассмотрим гравитационный потенциал Земли U (для внешних точек пространства), пренебрегая азимутальными эффектами. Разложим функцию U в ряд по полиномам Лежандра

$$U(r, 0) = \frac{GM}{R}\left[\frac{R}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\right], \quad (12.52)$$

где $R = (6378{,}1 \pm 0{,}1)$ *км* (экваториальный радиус); $GM/R = (62{,}494 \pm 0{,}001)$ *км*^{2}/*сек*^{2}. Изучение движения искусственных спутников Земли позволило установить, что $a_2 = (1{,}08279 \pm 0{,}00015) \times 10^{-3}$, $a_3 = (-2{,}4 \pm 03) \times \times 10^{-6}$, $a_4 = (-1{,}4 \pm 0{,}2) \times 10^{-6}$. В этом сказывается грушевидность Земли. Коэффициенты более высоких порядков в пределах экспериментальной точности равны нулю. Отсутствие члена с полиномом P_1 объясняется тем, что он описывает смещение, а не деформацию.

Проводящая сфера в однородном электрическом поле. Определим теперь возмущенный электростатический потенциал при внесении нейтральной проводящей сферы радиусом r_0 в первоначально однородное электрическое поле. Электростатический потенциал V * подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 V = 0. \quad (12.53)$$

Задача обладает сферической симметрией, поэтому решение будем искать в сферических координатах (это упростит граничные условия). Разделим переменные

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}. \quad (12.54)$$

Вследствие симметрии зависимость от φ отсутствует (центр сферы совпадает с началом координат, а ось z параллельна однородному полю).

---

* Следует подчеркнуть, что задача заключается не в отыскании разложения V в ряд по полиномам Лежандра. Здесь мы вновь обращаемся к задаче о граничных значениях.

Сформулируем теперь граничные условия Дирихле. Невозмущенное электростатическое поле равно E_0, потребуем, чтобы

$$V(r \to \infty) = -E_0(z) = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta). \quad (12.55)$$

Поскольку разложение в ряд по полиномам Лежандра единственно, можно приравнять коэффициенты при $P_n(\cos,\theta)$ в уравнениях (12.54) при $r \to \infty$ и (12.55), после чего

$$a_1 = -E_0,\ a_n = 0\ (n > 1). \quad (12.56)$$

Если для $n > 1$ коэффициенты a_n отличны от нуля, то при больших r эти члены будут доминировать, в результате чего граничное условие (12.55) окажется нарушенным. В качестве поверхности нулевого потенциала можно выбрать поверхность проводящей сферы и плоскость $\theta = \pi/2$, это означает, что

$$V(r = r_0) = a_0 + \frac{b_0}{r_0} + \left(\frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0\right) P_1(\cos\theta) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r_0^{n+1}} = 0. \quad (12.57)$$

Для того чтобы это условие выполнялось при любых θ, коэффициенты при полиномах $P_n(\cos\theta)$ должны равняться нулю*, т. е.

$$a_0 = b_0 = 0^{**},\ b_n = 0\ (n \geqslant 2), \quad (12.58)$$

тогда как

$$b_1 = E_0 r_0^3. \quad (12.59)$$

Окончательно электростатический потенциал (вне сферы) равен

$$V = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \frac{E_0 r_0^3}{r^2} P_1(\cos\theta) = \\ = E_0 r P_1(\cos\theta)\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right). \quad (12.60)$$

---

* Это вновь эквивалентно утверждению, что разложение в ряд по полиномам Лежандра (или по любому другому полному набору ортогональных функций) единственно.

** Коэффициент при P_0 равен $a_0 + b_0/r_0$. Мы положили $b_0 = 0$ (и, следовательно, $a_0 = 0$), так как сфера не имеет собственного заряда. Если сфера несет собственный заряд q, то $b_0 \neq 0$.

Решение уравнения Лапласа, которое удовлетворяет граничным условиям, единственно. Электростатический потенциал V, записанный в форме (12.60), удовлетворяет граничным условиям и, следовательно, представляет собой решение уравнения Лапласа для рассматриваемой задачи.

Можно показать далее, что на поверхности сферы индуцируется поверхностный заряд плотностью

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{12.61}$$

и электрический дипольный момент

$$P = 4\pi r_0^3 \varepsilon_0 E_0. \tag{12.62}$$

Упражнения

1. Заряд q смещен по оси z на расстояние a от центра сферической полости радиусом R. Показать, что электрическое поле, усредненное по объему $a \leqslant r \leqslant R$, равно нулю, а электрическое поле, усредненное по объему $0 \leqslant r \leqslant a$, равно $\mathbf{E} = \mathbf{k}E_z = -\mathbf{k}q/4\pi\varepsilon_0 a^2 = -\mathbf{k}nqa/3\varepsilon_0$ (в единицах МКСА). Здесь n — число смещенных в единице объема зарядов. *Указание.* $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

2. В разд. 9.3 по методу Шмидта получена система функций $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ортогональных на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с весом $w(x) = 1$. Доказать, что u_n пропорциональна $P_n(x)$. *Указание.* Доказательство провести методом математической индукции.

3. Разложить δ-функцию Дирака в ряд по полиномам Лежандра на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

4. Доказать, что $\int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2) P_n'' P_m' \, dx = 0$, если $m \neq n \pm 1$.

12.4. ДРУГИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Формула Родригеса. Представление полиномов Лежандра [рядом (12.8)] можно видоизменить следующим образом:

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} x^{n-2r}. \tag{12.63}$$

Для целого n

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{1}{2^n r!\,(n-r)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n-2r} =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{r!\,(n-r)!} x^{2n-2r}. \tag{12.64}$$

Следует обратить внимание на увеличение верхнего предела суммирования. Внесение дополнительных $(n/2)+1$ членов в сумму не дает никакого вклада. Однако эти члены позволяют просуммировать выражение (12.64), в результате чего имеем формулу Родригеса

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n, \tag{12.65}$$

которая широко применяется для доказательства многих свойств полиномов Лежандра, в частности их ортогональности.

Интеграл Шлефли. Формула Родригеса позволяет получить интегральное представление $P_n(z)$. Используя интегральную формулу Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{12.66}$$

с

$$f(z)=(z^2-1)^n, \tag{12.67}$$

получаем

$$(z^2-1)^n=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{(t^2-1)^n}{t-z}\,dt. \tag{12.68}$$

Дифференцируя последнее выражение n раз по z и умножая результат на $1/2^n n!$, окончательно получаем интеграл Шлефли

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)=\frac{2^{-n}}{2\pi i}\oint \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt, \tag{12.69}$$

где точка $t=z$ лежит внутри контура интегрирования. Маргенау и Мэрфи использовали этот интеграл для вывода рекуррентных соотношений, которые здесь получены из производящей функции. Непосредственной подстановкой легко показать, что интеграл Шлефли удовлетворяет уравнению Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2}-2z\frac{dP_n}{dz}+n(n+1)P_n=$$
$$=\frac{n+1}{2^n 2\pi i}\oint \frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}}\right]dt. \tag{12.70}$$

Для целых n функция $(t^2-1)^{n+1}/(t-z)^{n+2}$ однозначна, поэтому интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

С помощью интеграла Шлефли можно определить $P_\nu(z)$ и для нецелых ν, при этом контур интегрирования должен охватывать точки $t = z$, $t = 1$, но не должен пересекать линию разреза от -1 до $-\infty$ (рис. 12.5). Точно так же внутрь контура интегрирования можно включить точки $t = z$ и $t = -1$, но это не дает ничего нового. Контурное

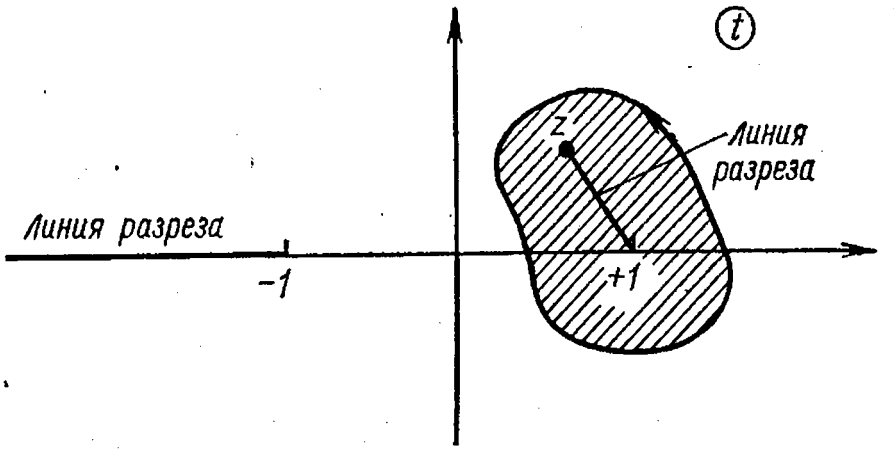


Рис. 12.5. Контур интегрирования для интеграла Шлефли в t-плоскости.

интегрирование вокруг точек $t = +1$ и $t = -1$ приводит ко второму решению $Q_\nu(z)$, о котором пойдет речь в разд. 12.10. Замена переменной

$$t = z + \sqrt{z^2-1}\, e^{i\varphi} \tag{12.71}$$

при условии $\operatorname{Re} z > 0$ включает внутрь контура интегрирования точку $t = +1$, но оставляет вне его точку $t = -1$. В результате получим первое интегральное представление Лапласа:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{2^n (z^2-1)^{n/2} e^{in\varphi} (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n \, i \sqrt{z^2-1}\, e^{i\varphi}}{2^n (\sqrt{z^2-1}\, e^{i\varphi})^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi. \tag{12.72}$$

В качестве контура интегрирования взят круг радиусом $|\sqrt{z^2-1}|$ с центром в точке $t = z$ (рис. 12.6). Заменив n на $-n-1$ (дифференциальное уравнение инвариантно относительно такой замены), получим второе интегральное

представление Лапласа

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^{-n-1} d\varphi. \quad (12.73)$$

В упр. 3 (см. ниже) поясняется, почему в качестве индекса взято n, а не — n — 1. До сих пор, несмотря на непосредственное и важное физическое толкование, производящая функция фактически не вошла ни в какие соотношения. По-видимому, логически это можно сделать только сейчас, не оставляя никаких неясностей. Используем подстановку

$$t = z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi, \quad (12.74)$$

которая приведет интеграл (12.73) к виду

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{t^{-n-1}}{[1-2tz+t^2]^{1/2}}\,dt, \quad n\text{ — целое.} \quad (12.75)$$

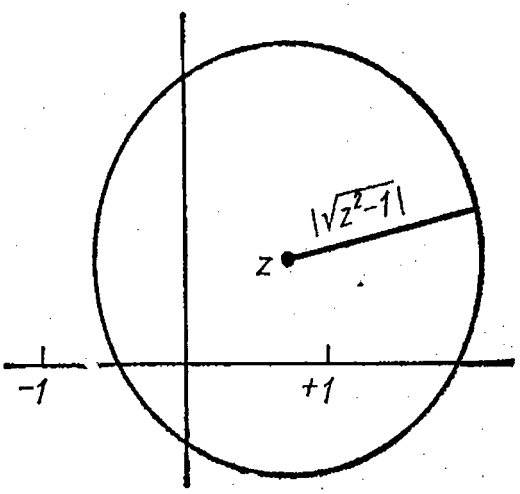


Рис. 12.6. Контур интегрирования для интегрального представления Лапласа.

В этом интеграле внутри контура интегрирования содержится начало координат. При нецелом n точка $t = 0$ оказывается точкой ветвления, а интегрирование будет проводиться вдоль петли вокруг особых точек $t = z \pm \sqrt{z^2-1}$

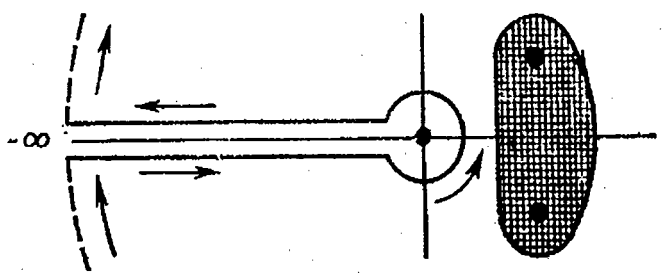


Рис. 12.7. Контур интегрирования для функции $P_\varphi(z)$ при нецелом ν.

по часовой стрелке (рис. 12.7). После нахождения вычетов (см. разд. 7.2) оказывается, что интеграл (12.75) является коэффициентом при t^n в разложении производящей функ-

ции $(1-2tz+t^2)^{-1/2}$, $|t^2-2tz|<1$. Таким образом, взяв за основу интеграл Шлефли (ранее показано, что он удовлетворяет уравнению Лежандра), мы пришли к производящей функции для полиномов Лежандра.

Упражнения

1. С помощью формулы Родригеса показать, что полиномы $P_n(x)$ ортогональны, причем $\int\limits_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx=\dfrac{2}{2n+1}$. Кроме того, при $m<n$ $\int\limits_{-1}^{1}x^mP_n(x)\,dx=0$.

2. Показать, что $\int\limits_{-1}^{1}x^nP_n(x)\,dx=\dfrac{2^{n+1}n!\,n!}{(2n+1)!}$. Вычисляя интеграл Шлефли, убедиться, что $P_n(1)=1$.

3. Используя интегральное представление Лапласа, показать, что $P_n(z)=P_{-n-1}(z)$. *Указание.* Функция $P_{-n-1}(z)$ удовлетворяет уравнению Лежандра, поэтому она должна быть линейной комбинацией двух функций $P_n(z)$ и $Q_n(z)$:

$$P_{-n-1}(z)=a_1P_n(z)+a_2Q_n(z),$$

причем $P_n(z)$ регулярна в точках $z=\pm1$, а $Q_n(z)$ имеет особенность в точках $z=\pm1$. Показать, что $a_2=0$, $a_1=1$.

4. Доказать, что каждый член суммы $\sum\limits_{r=[n/2]+1}^{n}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n\times$ $\times\dfrac{(-1)^r\,n!}{r!\,(n-r)!}\,x^{2n-2r}$ обращается в нуль (r и n — целые).

5. Плоскую волну можно разложить в ряд по сферическим волнам (уравнение Рэлея): $e^{ikr\cos\gamma}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nj_n(kr)\,P_n(\cos\gamma)$. Показать, что $a_n=i^n(2n+1)$. *Указание.* Для определения $a_nj_n(kr)$ использовать ортогональность P_n; продифференцировать n раз по kr и для исключения зависимости по r положить $r=0$; вычислить оставшийся интеграл, используя для этой цели результат упр. 2.

6. Показать, что $j_n(kr)=\dfrac{1}{2i^n}\int\limits_{-1}^{1}e^{ikr\mu}P_n(\mu)\,d\mu$.

12.5. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Дифференциальное уравнение. Присоединенные полиномы Лежандра тесно связаны с обычными полиномами Лежандра и сводятся к последним, когда $m = 0$. Для перехода к присоединенным полиномам Лежандра и дифференциальному уравнению для них возьмем обычное уравнение Лежандра

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \qquad (12.76)$$

и, используя формулу Лейбница, продифференцируем его m раз*, в результате чего имеем

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0, \qquad (12.77)$$

где

$$u \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \qquad (12.78)$$

Введем обозначение

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \qquad (12.79)$$

Разрешим это уравнение относительно u и продифференцируем

$$u' = \left(v' + \frac{mxv}{1-x^2}\right)(1-x^2)^{-m/2}, \qquad (12.80)$$

$$u'' = \left[v'' + \frac{2mxv'}{1-x^2} + \frac{mv}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v}{(1-x^2)^2}\right](1-x^2)^{-m/2}. \qquad (12.81)$$

Подставив найденные производные в уравнение (12.77), получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет новая функция

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0. \qquad (12.82)$$

Это уравнение называется присоединенным уравнением Лежандра и при $m = 0$ совпадает с обычным уравнением Лежандра. Записанное в сферической системе координат

---

* Формула Лейбница для n-й производной от произведения двух функций записывается как

$$\frac{d}{dx^n}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^{n} C_n^s \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x).$$

присоединенное уравнение Лежандра имеет вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dv}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]v=0. \quad (12.83)$$

Присоединенные полиномы Лежандра. Регулярные решения v присоединенного уравнения Лежандра называют присоединенными полиномами Лежандра и обозначают $P_n^m(x)$. Тогда

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \quad (12.84)$$

Из вида выражения (12.84), следует ожидать, что m не может быть отрицательным, поскольку операция дифференцирования отрицательное число раз не определена. Однако если воспользоваться формулой Родригеса, то это ограничение на параметр m можно снять, так что m будет меняться в пределах $-n\leqslant m\leqslant n$.

Уравнение (12.83) часто возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа или Гельмгольца в сферической системе координат, если есть азимутальная зависимость.

По определению присоединенных полиномов Лежандра,

$$P_n^0(x)=P_n(x). \quad (12.85)$$

Приведем значения некоторых из присоединенных полиномов Лежандра:

$$\left.\begin{aligned}
&P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}=\sin\theta,\\
&P_2^1(x)=3(1-x^2)^{1/2}=3\cos\theta\sin\theta,\\
&P_2^2(x)=3(1-x^2)=3\sin^2\theta,\\
&P_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}=\\
&=\frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta,\\
&P_3^2(x)=15(1-x^2)=15\cos\theta\sin^2\theta,\\
&P_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}=15\sin^3\theta,\\
&P_4^1(x)=\frac{5}{2}(7x^2-3x)(1-x^2)^{1/2}=\\
&=\frac{5}{2}(7\cos^3\theta-3\cos\theta)\sin\theta,
\end{aligned}\right\} \quad (12.86)$$

$$\left.\begin{aligned} P_4^2(x) &= \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = \\ &= \frac{15}{2}(7\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta, \\ P_4^3(x) &= 105x(1-x^2)^{3/2} = 105\cos\theta\sin^3\theta, \\ P_4^4(x) &= 105(1-x^2)^2 = 105\sin^4\theta. \end{aligned}\right\} \quad (12.86)$$

Как и обычные полиномы Лежандра, присоединенные полиномы также имеют производящую функцию:

$$\frac{(2m)!\,(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!\,(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x)\,t^s. \quad (12.87)$$

Однако она более сложна по форме и не имеет ясного физического истолкования, поэтому применяется сравнительно редко.

Рекуррентные соотношения. Как и следовало ожидать, присоединенные полиномы Лежандра удовлетворяют рекуррентным соотношениям. Поскольку эти полиномы имеют два индекса вместо одного, число рекуррентных соотношений для них велико, например:

$$P_n^{m+1} - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m + [n(n+1) - m(m-1)]\,P_n^{m-1} = 0; \quad (12.88)$$

$$(2n+1)\,xP_n^m = (n+m)\,P_{n-1}^m + (n-m+1)\,P_{n+1}^m; \quad (12.89)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{1/2}\,P_n^m = P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1} = \\ = (n+m)(n+m-1)\,P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)(n-m+2)\,P_{n+1}^{m-1}; \quad (12.90)$$

$$(1-x^2)^{1/2}\,P_n^{m'} = \frac{1}{2}P_n^{m+1} - \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)\,P_n^{m-1}. \quad (12.91)$$

Эти и другие рекуррентные соотношения можно проверить, используя производящую функцию (12.4), подставляя решения в виде ряда в присоединенное уравнение Лежандра (12.82) или сводя их с помощью зависимости (12.84) к рекуррентным соотношениям для обычных полиномов Лежандра. В качестве примера последнего способа

рассмотрим формулу (12.90). Она аналогична рекуррентному соотношению для обычных полиномов Лежандра (12.23). Продифференцируем соотношение (12.23) m раз, после чего получим

$$(2n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=\frac{d^m}{dx^m}P'_{n+1}(x)-\frac{d^m}{dx^m}P'_{n-1}(x)=$$
$$=\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n+1}(x)-\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n-1}(x). \qquad (12.92)$$

Умножая на $(1-x^2)^{(m+1)/2}$ и используя определение $P_n^m(x)$, получаем рекуррентное соотношение (12.90).

Четность. Закон четности присоединенных полиномов Лежандра можно установить, изучая уравнение (12.84), которое определяет эти полиномы. Известно, что замена $x\to -x$ для обычных полиномов Лежандра $P_n(x)$ приводит к появлению множителя $(-1)^n$. После m-кратного дифференцирования возникает аналогичный множитель $(-1)^m$. Следовательно,

$$P_n^m(-x)=(-1)^{n+m}P_n^m(x). \qquad (12.93)$$

Явный вид полиномов (12.86) подтверждает свойство (12.93). Из определения (12.84) следует, что

$$P_n^m(\pm 1)=0 \text{ для } m>0. \qquad (12.94)$$

Ортогональность. Ортогональность полиномов $P_n^m(x)$ вытекает из дифференциального уравнения, которому они удовлетворяют (как и в случае полиномов $P_n(x)$); член $-m^2/(1-x^2)$ исчезает, если положить m одинаковым в обоих случаях. Весьма поучительно продемонстрировать ортогональность другим способом, с помощью которого можно получить и нормировочный множитель. Для этого обратимся к основному определению присоединенных полиномов Лежандра (12.84) и формуле Родригеса (12.65) для $P_n(x)$. Тогда

$$\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)\,dx=\frac{(-1)^m}{2^{p+q}p!\,q!}\int_{-1}^{1}X^m\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}}X^p\frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}}X^q\,dx, \qquad (12.95)$$

где $X\equiv(x^2-1)$.

Пусть $p \neq q$, причем, для определенности, $p < q$. Отметим, что m одинаков для обоих полиномов (это существенное условие). Далее снова проинтегрируем по частям, все проинтегрированные части равны нулю из-за множителя $X = x^2 - 1$. Проинтегрировав $q + m$ раз, получим

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x) P_q^m(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^m (-1)^{q+m}}{2^{p+q} p!\, q!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) X^q\, dx. \quad (12.96)$$

Подынтегральную функцию из правой части этого равенства раскроем по формуле Лейбница:

$$X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) =$$

$$= X^q \sum_{i=0}^{i=q+m} \frac{(q+m)!}{i!\,(q+m-i)!} \cdot \frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} X^m \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p. \quad (12.97)$$

Поскольку в члене X^m показатель степени x не больше $2m$, имеет место неравенство

$$q + m - i \leqslant 2m, \quad (12.98)$$

т. е. производная равна нулю. Аналогично

$$p + m + i \leqslant 2p. \quad (12.99)$$

Решение этих неравенств относительно индекса i будет ненулевым, если

$$i \geqslant q - m, \quad i \leqslant p - m. \quad (12.100)$$

Но по предположению $p < q$, поэтому решение отсутствует, следовательно, и интеграл равен нулю. Очевидно, такой же результат должен быть и при $p > q$.

Если $p = q$, остается один член, соответствующий $i = q - m$. Подставив результат (12.97) в уравнение (12.96), получим

$$\int_{-1}^{1} [P_q^m(x)]^2\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^{q+2m} (q+m)!}{2^{2q} q!\, q!\, (2m)!\, (q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \right) \left(\frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q \right) dx. \quad (12.101)$$

Поскольку

$$X^m = (x^2 - 1)^m = x^{2m} - mx^{2m-2} + \ldots, \qquad (12.102)$$

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m = (2m)!, \qquad (12.103)$$

уравнение (12.101) сводится к следующему:

$$\int_{-1}^{1} [P_q^m(x)]^2 \, dx = \frac{(-1)^{q+2m} (2q)! \, (q+m)!}{2^{2q} q! \, q! \, (q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q \, dx. \qquad (12.104)$$

Интеграл справа равен

$$(-1)^q \int_0^{\pi} \sin^{2q+1}\theta \, d\theta = \frac{(-1)^q \, 2^{2q+1} q! \, q!}{(2q+1)!} \qquad (12.105)$$

(см. упр. 1 к разд. 10.4). Комбинируя (12.104) и (12.105), можно записать условие ортогональности

$$\int_{-1}^{1} P_q^m(x) \, P_q^m(x) \, dx = \frac{2}{2q+1} \cdot \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}, \qquad (12.106)$$

или в сферической системе координат

$$\int_0^{\pi} P_p^m(\cos\theta) \, P_q^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2q+1} \cdot \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}. \qquad (12.107)$$

Условие ортогональности полиномов Лежандра следует как частный случай из этого результата, если положить $m = 0$, при этом из условия ортогональности (12.106) сразу же вытекают условия (12.43) и (12.48).

Можно сформулировать условие ортогональности для присоединенных полиномов Лежандра, у которых нижние индексы одинаковы, а верхние различны. В этом случае (см. упр. 3)

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) \, P_n^k(x) \, (1-x^2)^{-1} \, dx = \frac{(n+m)!}{m \, (n-m)!} \delta_{mk}. \qquad (12.108)$$

Обратим внимание на появление нового весового множителя $(1 - x^2)^{-1}$.

Магнитное поле замкнутого тока. Как и другие уравнения математической физики, уравнение для присоединенных полиномов Лежандра часто возникает совершенно

неожиданно. В качестве примера рассмотрим магнитное поле **B** и магнитный векторный потенциал **A** в экваториальной плоскости от кругового тока (рис. 12.8).

Из электромагнитной теории известно, что элементу тока $I\,d\lambda$ соответствует магнитный векторный потенциал

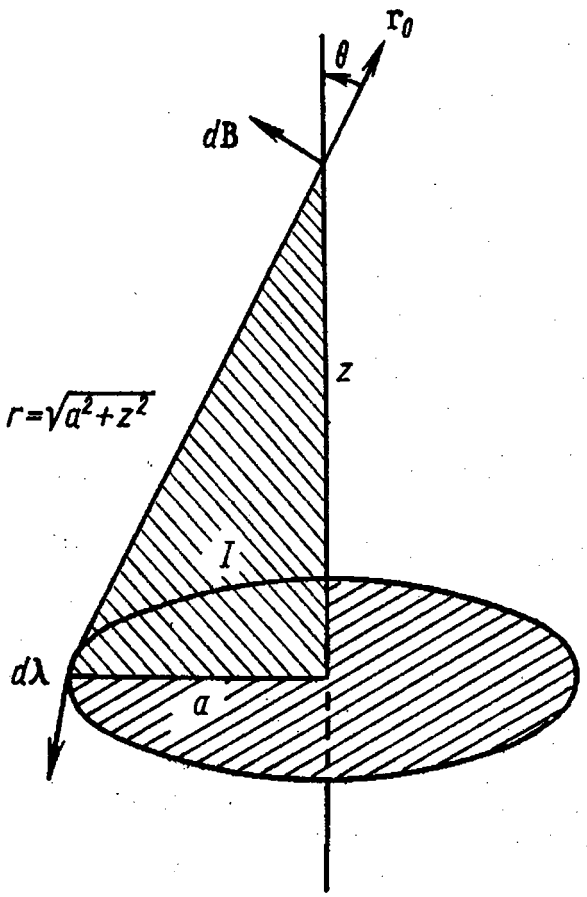


Рис. 12.8. Закон Био — Савара в применении к круговому току.

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\,d\lambda}{r}. \qquad (12.109)$$

Беря за основу эту формулу, а также учитывая симметрию системы, мы замечаем, что **A** имеет только одну φ_0-компоненту, не зависящую от φ:

$$\mathbf{A} = \varphi_0 A_\varphi(r, \theta). \qquad (12.110)$$

Из уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\mathbf{D} = 0, \text{ в единицах МКСА}), \qquad (12.111)$$

где **J** — плотность тока. Поскольку

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad (12.112)$$

имеем

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \qquad (12.113)$$

В этой задаче **J** всюду равна нулю, за исключением проводника, по которому течет ток. Следовательно, вне проводника с учетом равенства (12.110)

$$\nabla \times \nabla \times \varphi_0 A_\varphi(r, \theta) = 0. \qquad (12.114)$$

Расписывая ротор в сферических координатах (см. разд. 2.4), имеем

$$\nabla \times \nabla \times \varphi_0 A_\varphi(r, \theta) =$$

$$= \varphi_0 \left[-\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta A_\varphi \right]. \qquad (12.115)$$

Полагая $A_\varphi(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ и разделяя переменные, получаем

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0, \qquad (12.116)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1)\Theta - \frac{\Theta}{\sin^2\theta} = 0. \qquad (12.117)$$

Второе уравнение есть уравнение для присоединенных полиномов Лежандра (12.83) с $m=1$, поэтому можно сразу записать решение:

$$\Theta(\theta) = P_n^1(\cos\theta). \qquad (12.118)$$

Константа разделения положена равной $n(n+1)$ с тем, чтобы обеспечить требуемое поведение решения.

Возьмем $R(r) = r^\alpha$, тогда $\alpha = n$, $-n-1$. Первое значение α следует отбросить, так как решение должно исчезать при $r \to \infty$, поэтому

$$A_{\varphi n} = \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n^1(\cos\theta) = c_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^1(\cos\theta) \qquad (12.119)$$

и

$$A_\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^1(\cos\theta), \quad (r > a). \qquad (12.120)$$

Вследствие симметрии задачи A_φ должна быть инвариантной относительно отражения в экваториальной плоскости

$$A_\varphi(r, \cos\theta) = A_\varphi(r, -\cos\theta), \qquad (12.121)$$

поэтому, учитывая условие (12.93) о четности функции $P_n^m(\cos\theta)$, следует, что $c_n = 0$ для четных n.

Для полного определения постоянных можно взять формулу (12.109), вычислить компоненту B_z [$B_z = B_r(r, \theta = 0)$] и сравнить ее с выражением, полученным из закона Био—Савара:

$$B_r = \nabla \times \mathbf{A}|_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)\right] = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} A_\varphi + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}. \qquad (12.122)$$

Используя соотношение

$$\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = -\frac{1}{2}P_n^2 + \frac{n(n+1)}{2}P_n^0 \quad (12.123)$$

и рекуррентную формулу (12.88) с $m=1$

$$P_n^2(\cos\theta) - \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}P_n^1(\cos\theta) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0, \quad (12.124)$$

получаем (для любых θ):

$$B_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1)\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}P_n(\cos\theta), \quad r > a. \quad (12.125)$$

В частности, при $\theta = 0$

$$B_r(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1)\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}. \quad (12.126)$$

С другой стороны, можно также записать

$$B_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}P_n^1(\cos\theta) \quad r > a. \quad (12.127)$$

Закон Био—Савара утверждает, что в единицах МКСА

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (12.128)$$

Проинтегрируем теперь по периметру проводника (радиус a); магнитное поле вдоль оси z равно $\mathbf{k}B_z$, причем

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}a^2(a^2+z^2)^{-3/2} = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{a^2}{z^3}\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{-3/2}. \quad (12.129)$$

На основании биномиальной теоремы

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{a^2}{z^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{a}{z}\right)^4-\ldots\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{z^3}\sum_{n=1,\text{ неч}}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}\frac{(n/2)!}{[(n-1)/2]!\,(1/2)!}\left(\frac{a}{z}\right)^{n-1}, \quad z > a. \quad (12.130)$$

Приравнивая почленно уравнения (12.126) и (12.130) (с $r=z$)*, получаем

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mu_0 I}{4}, \quad c_3 = -\frac{\mu_0 I}{16}, \quad \ldots, \\ c_n &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{\mu_0 I}{2n(n+1)} \frac{(n/2)!}{[(n-1)/2]!\left(\frac{1}{2}\right)!}, \\ & n \text{ — нечетное} \end{aligned}\right\} \quad (12.131)$$

или

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{\mu_0 I}{2^{2n+2}} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}. \quad (12.132)$$

Итак,

$$A_\varphi(r, \theta) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos\theta), \quad (12.133)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{a^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(2n+1)(2n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}(\cos\theta), \quad (12.134)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{a^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(2n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos\theta). \quad (12.135)$$

Искомые поля могут быть описаны в замкнутой форме с помощью эллиптических интегралов. Третья возможность связана с прямым интегрированием формулы (12.109) после разложения множителя $1/r$, считая его производящей функцией для полиномов Лежандра. Эти методы имеют то преимущество, что позволяют непосредственно вычислить коэффициент c_n.

Интересно сравнить поле магнитного диполя кругового тока с полем электрического диполя конечного размера (см. рис. 12.3). Для магнитного диполя только что проведенный анализ дает

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{r^3} \left[P_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3 + \ldots\right], \quad (12.136)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{4} \cdot \frac{a^2}{r^3} \left[P_1^1 - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3^1 + \ldots\right]. \quad (12.137)$$

* Ряд по нисходящим степеням также обладает свойством единственности.

В разд. 12.1 получено для поля электрического диполя

$$E_r(r, \theta) = \frac{qa}{\pi\varepsilon_0 r^3}\left[P_1 + 2P_3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots\right], \quad (12.138)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\left[P_1^1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3^1 + \ldots\right]. \quad (12.139)$$

Эти поля с точностью до главных членов сходны по своей записи, что и послужило основанием назвать их полями диполя.

Упражнения

1. Доказать тождества для присоединенных полиномов Лежандра

$$(L-M+1)^2 (P_L^{M-1})^2 + (P_L^M)^2 = (L+M-1)^2 (P_{L-1}^{M-1})^2 + (P_{L-1}^M)^2,$$

$$(L-M+1)(L+M)(P_L^{M-1})^2 - (P_L^M)^2 =$$

$$= (L+M-1)(L-M+2) P_{L-1}^{M-1} P_{L+1}^{M-1} - P_{L-1}^M P_{L+1}^M.$$

Они встречаются при изучении углового распределения электронов внутренней конверсии.

2. Присоединенный полином Лежандра $P_n^m(x)$ удовлетворяет самосопряженному дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) P_n^{m''}(x) - 2x P_n^{m'}(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_n^m(x) = 0.$$

Исходя из дифференциальных уравнений для $P_n^m(x)$ и $P_n^k(x)$, показать, что $\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^k(x) \frac{dx}{1-x^2} = 0$, $k \neq m$.

3. Доказать условие ортогональности

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1} P_n^m(x) P_n^k(x)\, dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\, \delta_{mk}.$$

4. Записать $P_L^{|M|} = (\cos\theta)\, e^{iM\varphi}$ в декартовых координатах для $L = 0, 1, 2$, $-L \leqslant M \leqslant L$.

Ответ:

$$P_0(\cos\theta)\, e^{0i\varphi} = 1, \quad P_1^{\pm 1}(\cos\theta)\, e^{\pm i\varphi} = \sin\theta(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(x \pm iy),$$

$$P_1(\cos\theta)\, e^{0i\varphi} = \cos\theta = \frac{z}{r},$$

$$P_2(\cos\theta)\, e^{0i\varphi} = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2r^2}(2z^2 - x^2 - y^2),$$

$$P_2^{\pm 1}(\cos\theta)\, e^{\pm i\varphi} = 3\cos\theta\sin\theta(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = \frac{3}{r^2} z(x \pm iy),$$

$$P_2^{\pm 2}(\cos\theta)\, e^{\pm 2i\varphi} = 3\sin^2\theta(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^2 = \frac{3(x \pm iy)^2}{r^2}.$$

5. Доказать, что $P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)$, где $P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$. *Указание.* Применить формулу Лейбница к произведению $(x+1)^n (x-1)^n$.

6. Показать, что

$$\int_0^\pi \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \cdot \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + \frac{m^2 P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2\theta} \right) \sin\theta\, d\theta = \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \delta_{nn'},$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_n^1}{\sin\theta} \cdot \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} + \frac{P_{n'}^1}{\sin\theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} \right) \sin\theta\, d\theta = 0.$$

Эти интегралы встречаются в теории рассеяния электромагнитных волн сферой.

7. Показать, что $P_n'(0) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}\, n!}{\{[(n-1)/2]!\, 2^{(n-1)/2}\}^2}$, если n — нечетное, и равно нулю, если n — четное; использовать сначала рекуррентные соотношения или разложение производящей функции.

8. Дифференцируя производящую функцию полиномов Лежандра, получить формулу (12.86), с помощью которой была определена производящая функция.

9. Вывести рекуррентное соотношение для присоединенных полиномов Лежандра

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m(x) + [n(n+1) - m(m-1)] P_n^{m-1}(x) = 0. \tag{12.140}$$

10. Показать, что $\sin\theta P_n'(\cos\theta) = P_n^1(\cos\theta)$.

12.6. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Ортогональность. При разделении переменных в уравнениях Лапласа, Гельмгольца или пространственной части классического волнового уравнения и волнового уравнения Шредингера для центральных сил угловая зависимость, которая целиком обусловлена оператором Лапласа, описы-

вается уравнением

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+n(n+1)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=0. \tag{12.141}$$

Разделяя переменные в уравнении (12.141), получаем, что $\Theta(\theta)$ удовлетворяет присоединенному уравнению Лежандра (12.83) [поэтому $\Theta(\theta)=P_n^m(\cos\theta)$], а $\Phi(\varphi)$ — уравнению

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\cdot\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-m^2, \tag{12.142}$$

решения которого имеют вид

$$\Phi(\varphi)=e^{im\varphi} \tag{12.143}$$

и, как легко видеть, удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^{2\pi}e^{-im_1\varphi}e^{im_2\varphi}d\varphi=2\pi\delta_{m_1,\,m_2}, \tag{12.144}$$

причем, если положить Φ_m равным $e^{im\varphi}/2\pi$, то решения будут ортонормированы. Отметим, что этот интеграл записывают также в виде произведения $\Phi^*_{m_1}(\varphi)\,\Phi_{m_2}(\varphi)$, где звездочкой отмечена операция комплексного сопряжения. Решение вида (12.143) часто используется в квантовой механике. В качестве решений можно также взять функции

$$\Phi=\sin m\varphi,\quad \cos m\varphi \tag{12.145}$$

и записать для них условие ортогональности, которое играет существенную роль в теории рядов Фурье (см. гл. 14).

В электростатике и большинстве других физических проблем параметр m должен принимать только целые значения, в результате чего $\Phi(\varphi)$ оказывается однозначной функцией φ. В квантовой механике вопрос гораздо сложнее, поскольку требуется однозначность величины $\Phi^*\Phi$. Однако можно показать, что, по-прежнему, следует брать целые m, иначе для токов получаются бессмысленные выражения.

Уравнения (12.142) и (12.83) инвариантны относительно замены $m\to -m$, однако мы еще не определили присое-

диненные полиномы Лежандра $P_n^m(\cos\theta)$ для отрицательных m. Чтобы определить эти полиномы для отрицательных m, можно просто положить

$$P_n^m(\cos\theta) = P_n^{|m|}(\cos\theta), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12.146}$$

Можно также использовать определение присоединенных полиномов Лежандра (12.84), в котором P_n заменяется по формуле (12.65), в результате чего имеем

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n, \quad -n \leqslant m \leqslant n. \tag{12.147}$$

Теперь уже m может принимать отрицательные значения вплоть до $-n$. Далее, очевидно, что $P_n^m(\cos\theta) = 0$ при $m > n$. Следовательно, как и указано, индекс m должен изменяться в пределах $-n \leqslant m < n$. Такое определение присоединенных полиномов Лежандра для отрицательных m позволяет использовать одни и те же соотношения как для $m \geqslant 0$, так и для $m < 0$.

Пронормировав присоединенный полином Лежандра с учетом равенства (12.106), получим ортонормированную функцию

$$\mathcal{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}}\,P_n^m(\cos\theta), \quad -n \leqslant m \leqslant n. \tag{12.148}$$

Можно показать (см. упр. 5 к разд. 12.5), что

$$P_n^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta), \tag{12.149}$$

поэтому уравнение (12.148) выполняется как для положительных, так и для отрицательных m.

Функция $\Phi_m(\varphi)$ ортонормирована относительно азимутального угла φ, в то время как функция $\mathcal{P}_n^m(\cos\theta)$ ортонормирована относительно полярного угла θ. Рассмотрим произведение этих двух функций

$$Y_n^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}. \tag{12.150}$$

Функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$, зависящие от θ и φ и от двух индексов, ортонормированы на сферической поверхности; их назы-

вают сферическими функциями. Полное условие ортогональности приобретает вид

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\theta, \varphi)\, Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{n_1, n_2}\delta_{m_1, m_2}. \tag{12.151}$$

Приведем явный вид нескольких функций $Y_n^m(\theta)$:

$$\left.\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\\
Y_1^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\\
Y_1^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\\
Y_1^{-1}(\theta, \varphi) &= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi},\\
Y_2^2(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}\,3\sin^2\theta e^{2i\varphi},\\
Y_2^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}\,3\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi},\\
Y_2^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right),\\
Y_2^{-1}(\theta, \varphi) &= +\sqrt{\frac{5}{24\pi}}\,3\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi},\\
Y_2^{-2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}\,3\sin^2\theta e^{-2i\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.152}$$

Заметим, что в соответствии с уравнением (12.149) функции Y_n^{-m} и Y_n^m отличаются друг от друга множителем $(-1)^m$. Иногда, в квантовой механике, например в квантовой теории момента количества движения, множитель $(-1)^m$ связывают с *положительной* сферической функцией. Этот множитель называется фазой Кондона — Шортли. [Очень часто этот фазовый множитель опускают и определяют функцию Y_n^{-m} с отрицательным m с помощью уравнения (12.150), полагая, что $Y_n^{-m} = Y_n^{m*}$].

Ряд Лапласа, основная теорема разложения. Сферические функции обладают свойством полноты, что является

следствием записи уравнения Лапласа в форме Штурма — Лиувилля. Благодаря свойству полноты любую функцию $f(\theta, \varphi)$ (если она обладает нужными свойствами непрерывности), заданную на поверхности сферы, можно разложить в равномерно сходящийся двойной ряд по сферическим функциям * (ряд Лапласа):

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m, n} a_{mn} Y_n^m(\theta, \varphi). \qquad (12.153)$$

Если функция $f(\theta, \varphi)$ известна, то, воспользовавшись свойством ортогональности, можно немедленно определить коэффициенты этого разложения.

Упражнения

1. Доказать, что $Y_L^M(0, \varphi) = \left(\frac{2L+1}{4\pi}\right)^{1/2} \delta_{M0}$.

2. В теории кулоновского возбуждения ядер встречается функция $Y_L^M(\pi/2, 0)$. Показать, что

$$Y_L^M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{2L+1}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{[(L-M)!\,(L+M)!]^{1/2}}{(L-M)!!\,(L+M)!!} (-1)^{(L+M)/2}$$

для четных $L+M$

$$= 0 \quad \text{для нечетных } L+M,$$

где $(2n)!! = 2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4\cdot 2$, $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$

3. Выразить элементы тензора квадрупольного момента $x_i x_j$ в виде линейной комбинации сферических функций Y_2^M (и Y_0).

4. Уравнения Максвелла в сферических координатах имеют решения

$$E_r = \frac{\psi}{r}, \quad E_\theta = \frac{1}{L(L+1)} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\psi),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{L(L+1)} \cdot \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\psi);$$

$$B_r = 0, \quad B_\theta = \frac{i\omega}{L(L+1)c^2} \cdot \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}(\psi r),$$

$$B_\varphi = \frac{-i\omega}{L(L+1)c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(r\psi),$$

---

* Доказательство этой фундаментальной теоремы см. в книге Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, N.Y., Chelsea, 1955, Ch. VII.

где $\psi(r, \theta, \varphi, t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)\,e^{i\omega t}$, а функции R, Θ и Φ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{L(L+1)}{r^2}\right)R=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[L(L+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0.$$

Показать, что при $L=1$ и $m=0$

$$E_r = ke^{i(\omega t-kr)}\cos\theta\left[-\frac{1}{(kr)^2}+\frac{i}{(kr)^3}\right],$$

$$E_\theta = \frac{k}{2}\,e^{i(\omega t-kr)}\sin\theta\left[-\frac{i}{kr}-\frac{1}{(kr)^2}+\frac{i}{(kr)^3}\right],$$

$$B_\varphi = \frac{k}{2c}\,e^{i(\omega t-kr)}\sin\theta\left[-\frac{i}{kr}-\frac{1}{(kr)^2}\right].$$

12.7. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Тригонометрическое тождество. В последующем изложении (θ_1, φ_1) и (θ_2, φ_2) определяют два разных направления в сферической системе координат, угол между которыми равен γ. Эти углы связаны тригонометрическим тождеством

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2), \quad (12.154)$$

которое наиболее просто доказывается с привлечением методов векторного анализа (см. гл. 1).

Теорема сложения утверждает, что

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}(-1)^m Y_n^m(\theta_1,\varphi_1)\,Y_n^{-m}(\theta_2,\varphi_2), \quad (12.155)$$

или, что то же самое

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}Y_n^m(\theta_1,\varphi_1)\,Y_n^{m*}(\theta_2,\varphi_2). \quad (12.156)$$

Теорему сложения можно записать и через присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta_1)\,P_n(\cos\theta_2) + \\ + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_1)\,P_n^m(\cos\theta_2)\cos m(\varphi_1-\varphi_2). \quad (12.157)$$

Доказательство теоремы сложения. Продифференцируем уравнение (12.156). Пусть $g(\theta, \varphi)$ — функция, которую можно

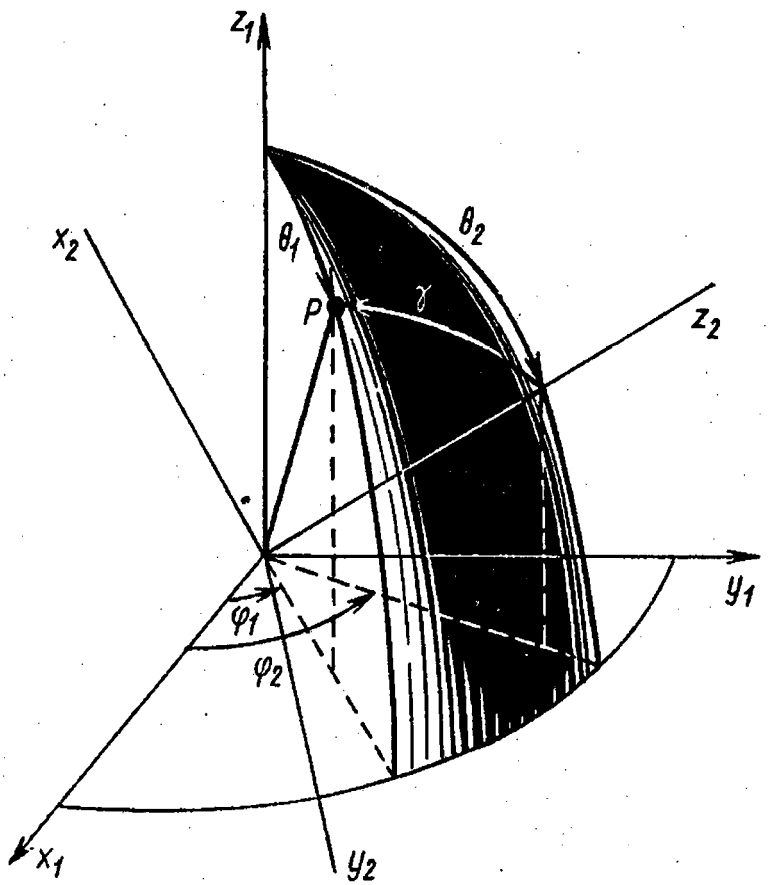


Рис. 12.9. Иллюстрация к теореме сложения.

разложить в ряд Лапласа. Выберем две системы: x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 (рис. 12.9). Тогда

$$\left.\begin{aligned} g(\theta_1, \varphi_1) &= Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) \text{ в системе } x_1,\ y_1,\ z_1, \\ &= \sum_{m=-n}^{n} a_{mn} Y_n^m(\gamma, \psi) \text{ в системе } x_2,\ y_2,\ z_2. \end{aligned}\right\} \quad (12.158)$$

В самом деле, выбор нуля азимутального угла ψ в данном случае не играет роли. При $\gamma = 0$ имеем

$$g(\theta_1, \varphi_1)\big|_{\gamma=0} = a_{n0}\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad (12.159)$$

так как $P_n(1)=1$, тогда как $P_n^m(1)=0\,(m\neq 0)$. Умножив уравнение (12.158) на $Y_n^{0*}(\gamma, \psi)$ и проинтегрировав по сфере, получим

$$\int g(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^{0*}(\gamma, \psi)\, d\Omega_{\gamma, \psi} = a_{n0}. \qquad (12.160)$$

Учитывая (12.158), перепишем полученный результат

$$\int Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^{0*}(\gamma, \psi)\, d\Omega = a_{n0}. \qquad (12.161)$$

Вновь предположим, что $P_n(\cos\gamma)$ можно представить рядом

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=-n}^{n} b_{mn} Y_n^m(\theta_1, \varphi_1), \qquad (12.162)$$

в котором коэффициенты b_{nm} — функции θ_2 и φ_2, т. е. определяются ориентацией оси z_2. Умножим это разложение на $Y(\varphi_1, \theta_1)$ и проинтегрируем по переменным θ_1 и φ_1 по поверхности сферы:

$$\int P_n(\cos\gamma)\, Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, d\Omega_{\theta_1, \varphi_1} = b_{nm}. \qquad (12.163)$$

С помощью сферических функций выражение (12.163) можно привести к виду

$$\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{1/2} \int Y_n^0(\gamma, \psi)\, Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, d\Omega = b_{nm}. \qquad (12.164)$$

Индексы у элемента телесного угла $d\Omega$ опущены. Интеграл берется по всем телесным углам, поэтому выбор полярной оси не имеет существенного значения. Сравнивая уравнения (12.161) и (12.164), получаем

$$\left.\begin{aligned} b_{nm}^* = a_{n0}\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{1/2} &= \frac{4\pi}{2n+1} g(\theta_1, \varphi_1)\big|_{\gamma=0} \\ &\text{из уравнения (12.159),} \\ &= \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) \\ &\text{из уравнения (12.158).} \end{aligned}\right\} \qquad (12.165)$$

Здесь произведена замена индексов $\theta_1 \to \theta_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$ для $\gamma \to 0$. Подставим теперь (12.165) в уравнение (12.162), после чего получается формула (12.156), что и доказывает теорему сложения.

На основе теории групп формулу (12.156) можно доказать более изящным способом (используя группы вращения *).

Теоремой сложения пользуются при построении функции Грина для трехмерного уравнения Лапласа в сферической системе координат. Если точечный источник расположен на полярной оси ($r = 0$, $\theta = \varphi$, $\varphi = 0$), то на основании уравнения (12.4) получим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{k}a|} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\,\dfrac{a^n}{r^{n+1}} & \text{для } r > a, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\,\dfrac{r^n}{a^{n+1}} & \text{для } r < a. \end{cases} \tag{12.166}$$

После поворота системы координат источник переместится в точку (a, θ_2, φ_2), а точка наблюдения — в точку (r, θ_1, φ_1). Тогда

$$\left.\begin{aligned} &G(r, \theta_1, \varphi_1; a, \theta_2, \varphi_2) = \frac{1}{R} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)\, \frac{a^n}{r^{n+1}}, \\ &\qquad r > a; \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)\, \frac{r^n}{a^{n+1}}, \\ &\qquad r < a. \end{aligned}\right\} \tag{12.167}$$

Упражнения

1. При доказательстве теоремы сложения предполагалось, что $Y_n^k(\theta_1, \varphi_1)$ можно разложить в ряд по функциям $Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)$, в котором m изменяется от $-n$ до $+n$, а n остается фиксированным. Как обосновать суммирование только по положительным значениям индекса n? *Указание.* Исследовать однородность функции Y_n^m, т. е. возможность выразить Y_n^m через $\cos^{n-p}\theta \cdot \sin^p\theta$ или $x^{n-p-s}y^p z^s/r^n$,

* См. например, Rose M. E. Elementary Theory of Angular Momentum. N.Y., Wiley, 1957.

или исследовать поведение уравнения Лежандра $[\nabla^2 + n(n+1)/r^2] \times \times P_n(\cos\theta) = 0$ при повороте системы координат.

2. Электрон в атоме, характеризующийся моментом количества движения L и магнитным квантовым числом M, описывается волновой функцией $\psi(r, \theta, \varphi) = f(r)\, Y_L^M(\theta, \varphi)$. Показать, что плотность вероятности в полностью заполненной электронной оболочке сферически симметрична, т. е. величина $\sum_{M=-L}^{L} \psi^*(r, \theta, \varphi)\, \psi(r, \theta, \varphi)$ не зависит от θ и φ.

3. Потенциал электрона (находится в точке $\mathbf{r}_e$) в поле Z протонов, расположенных в точках $\mathbf{r}_p$, равен $\varphi = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{p=1}^{Z} \dfrac{1}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|}$.

Показать, что этот потенциал можно записать иначе:

$$\varphi = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} \sum_{p=1}^{Z} \sum_{L,\, M} \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^L \frac{4\pi}{2L+1}\, Y_L^{M*}(\theta_p, \varphi_p)\, Y_L^{M*}(\theta_e, \varphi_e),$$

где $r_e > r_p$. Как запишется φ при $r_e < r_p$?

4. Каждый из двух $1s$-электронов в атоме гелия можно описать волновой функцией атома водорода $\psi(\mathbf{r}) = \left(\dfrac{Z^3}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} e^{-Zr/a_0}$ в отсутствие другого электрона. Здесь $Z = 2$, $a_0 = \hbar^2/me^2$ — радиус Бора. Найти потенциальную энергию взаимодействия двух электронов, которая определяется интегралом

$$\int \psi^*(\mathbf{r}_1)\, \psi^*(\mathbf{r}_2)\, \frac{e^2}{r_{12}}\, \psi(\mathbf{r}_1)\, \psi(\mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2.$$

Ответ: $5e^2Z/8a_0$.

Замечание. $d\mathbf{r}_1 = r_1^2\, dr_1 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1$, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

5. Распределение заряда на $2p$-оболочке в атоме водорода характеризуется выражением $\rho = \dfrac{1}{64\pi a_0^5}\, r^2 e^{-r/a_0} \sin^2\theta$, где a_0 — радиус Бора. Определить электростатический потенциал, соответствующий этому распределению заряда.

6. Плотность электрического тока, создаваемого $2p$-электроном в атоме водорода, равна $\mathbf{J} = \varphi_0 \dfrac{\hbar}{32ma_0^5}\, e^{-r/a_0}\, r \sin\theta$. Используя выражение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\, d\mathbf{r}_2,$$

найти магнитный векторный потенциал, создаваемый этим электроном. *Указание.* Воспользоваться теоремой сложения для оценки γ, угла между радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Интегрированием по $d\mathbf{r}_2$ по сфере определить полную кулоновскую энергию.

12.8. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРЕХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В квантовой механике часто встречаются интегралы вида $\int Y_{L_1}^{M_1*} Y_{L_2}^{M_2} Y_{L_3}^{M_3} d\Omega$ или $\int Y_{L_1}^{M*} P_{L_2} Y_{L_3}^{M_3} d\Omega$, в которых интегрирование производится по всему телесному углу. Первый и третий сомножители в подынтегральном выражении представляют собой волновую функцию конечного и начального состояния соответственно, а средний сомножитель — оператор, матричный элемент которого необходимо вычислить. С помощью методов теории групп можно найти выражение, общее для таких интегралов. Эти методы приводят к появлению коэффициентов векторного сложения или, как их называют иначе, коэффициентов Клебша — Гордана, для которых составлены специальные таблицы *. На интегралы наложены три ограничивающих условия общего характера. Во-первых, интеграл обращается в нуль, если *векторная* сумма орбитальных моментов L отлична от нуля $|L_1 - L_3| \leqslant L_2 \leqslant L_1 + L_3$. Во-вторых, интеграл также равен нулю, если не выполнено условие $M_2 + M_3 = M_1$. Это положение служит теоретическим обоснованием векторной модели атомной спектроскопии. Наконец, в-третьих, интеграл исчезает, если произведение $Y_{L_1}^{M_1*} Y_{L_2}^{M_2} Y_{L_3}^{M_3}$ нечетное, т. е. если сумма $M_1 + M_2 + M_3 + L_1 + L_2 + L_3$ не равна целому четному числу. Последнее условие отражает закон сохранения четности.

Для вычисления многих интегралов, родственных записанным выше, уже имеются разработанные приемы. Интегрирование по азимутальному углу проводится с учетом соотношения

$$\int_0^{2\pi} e^{-iM_1\varphi} e^{iM_2\varphi} e^{iM_3\varphi}\, d\varphi = 2\pi\delta_{M_2+M_3-M_1,\,0}. \qquad (12.168)$$

Физически это соответствует сохранению z-компоненты момента количества движения.

Применение рекуррентных соотношений. Рассматривая выражения (12.152), легко убедиться, что зависимость $Y_{L_2}^{M_2}$, а значит, и $P_{L_2}^{M_2}(\theta)$ от угла θ можно выразить через

* Кондон Е. и Шортли Г. Теория атомных спектров, Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

$\cos\theta$ и $\sin\theta$. Однако с помощью рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра можно рассматривать не просто $\cos\theta$ или $\sin\theta$, а комбинацию этих функций с $Y_{L_3}^{M_3}$. Например, из уравнений (12.88) и (12.89) имеем

$$\cos\theta Y_L^M = \left[\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^M + \left[\frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^M, \tag{12.169}$$

$$\sin\theta Y_L^M = \left\{\left[\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^{M+1} - \left[\frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^{M+1}\right\} e^{-i\varphi}, \tag{12.170}$$

$$\sin\theta Y_L^M = -\left\{\left[\frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^{M-1} + \left[\frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^{M-1}\right\} e^{i\varphi}. \tag{12.171}$$

В зависимости от нормировки эти соотношения могут содержать множитель $(-1)^M$.

Воспользовавшись этими уравнениями, получим

$$\int Y_{L_1}^{M_1 *} \cos\theta Y_L^M \, d\Omega = \left[\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} \delta_{M_1, M}\delta_{L_1, L+1} + \left[\frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} \delta_{M_1, M}\delta_{L_1, L-1}, \tag{12.172}$$

где появился δ-символ Кронекера с индексами L, $L \pm 1$ вследствие закона сохранения орбитального момента количества движения. Интеграл (12.172) встречается в теории электромагнитного излучения (при описании электрического диполя). Из него вытекает известное правило отбора, в соответствии с которым переход на уровень с орбитальным квантовым числом L_1 может происходить только из состояний с орбитальными квантовыми числами $L_1 - 1$ или $L_1 + 1$. Применение рекуррентных соотношений к интегралам типа $\int Y_L^{M*} P_2(\cos\theta) Y_L^M d\Omega$ (описывает квадрупольный момент) требует больших усилий, однако не вызывает никаких принципиальных трудностей.

Коэффициенты Слетера. Интегралы от произведения трех сферических функций возникают также при вычислении энергии взаимодействия между двумя атомными электронами, например интеграл вида $\int \psi_\alpha^*(1)\,\psi_\alpha(1)\,\frac{1}{r_{12}}\,\psi_\beta^*(2)\,\psi_\beta(2)\,d\tau_1\,d\tau_2$, в котором можно разложить расстояние $r_{12}=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ с помощью производящей функции, в результате чего появятся полиномы Лежандра $P_k(\cos\gamma)$. Если к ним применить теорему сложения и предположить, что угловая зависимость волновых функций $\psi(1)$ и $\psi(2)$ имеет вид соответственно $Y_{L_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1)$ и $Y_{L_2}^{m_2}(\theta_2, \varphi_2)$, то первоначальный интеграл распадается на интеграл от радиальной части и два других интеграла вида

$$a_k'(L_1, m_1) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \int Y_{L_1}^{m_1 *} Y_k^0 Y_{L_1}^{m_1}\, d\Omega. \quad (12.173)$$

Заменяя в полной волновой функции $\psi_\alpha(1) \to \psi_\alpha(2)$, $\psi_\beta(2) \to \psi_\beta(1)$, приходим к интегралам вида

$$b_k'(L_1, m_1, L_2, m_2) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \int Y_{L_2}^{m_2 *} Y_k^{m_2 - m_1} Y_{L_1}^{m_1}\, d\Omega. \quad (12.174)$$

Атомные волновые функции вычисляются с помощью соотношений

$$a_k(L_1, m_1, L_2, m_2) = a_k'(L_1, m_1)\, a_k'(L_2, m_2), \quad (12.175)$$

$$b_k(L_1, m_1, L_2, m_2) = [b_k'(L_1, m_1, L_2, m_2)]^2 \quad (12.176)$$

Коэффициенты a_k и b_k часто называют коэффициентами Слетера *.

Упражнения

1. Вычислить интеграл $\int P_{L+1}^{M+1}(\cos\theta)\sin\theta P_L^M(\cos\theta)\, d\Omega$.

2. Показать, что

$$a_0'(L, m) = 1,\ a_1' = (1, m) = 0,\ a_2'(0, 0) = 0,\ a_2' = (1, 0) = \frac{2}{5},$$

$$a_2'(1, \pm 1) = -\frac{1}{5}.$$

* Протабулированные значения коэффициентов Слетера см. в книге Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

3. Проверить, что

$$\int Y_L^M Y_0^0 Y_L^{M*}\, d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \int Y_L^M Y_1^0 Y_{L+1}^{M*}\, d\Omega =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L+M+1)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+3)}},$$

$$\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L+1}^{M+1*}\, d\Omega = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}},$$

$$\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L-1}^{M+1*}\, d\Omega = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}}.$$

С помощью этих интегралов исследуют угловую корреляцию электронов внутренней конверсии.

4. Доказать соотношение, которое встречается в теории ядерных квадрупольных моментов:

$$\int Y_L^{M*}(\theta, \varphi) \cos^2\theta Y_L^M(\theta, \varphi)\, d\Omega = \frac{1}{2L+3}\left[\frac{2(L-M)(L+M)}{2L-1}+1\right].$$

5. В квантовой механике операторы момента количества движения задаются в виде

$$L_x + iL_y = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_x - iL_y = -e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Показать, что

$$(L_x + iL_y) Y_{LM}(\theta, \varphi) = -\sqrt{(L-M)(L+M+1)}\, Y_{L, M+1}(\theta, \varphi),$$

$$(L_x - iL_y) Y_{LM}(\theta, \varphi) = -\sqrt{(L+M)(L-M+1)}\, Y_{L, M-1}(\theta, \varphi).$$

Используя фазовый множитель Кондона—Шортли, проверить знак минус перед квадратными корнями.

12.9. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА ВТОРОГО РОДА

Решение уравнения Лежандра в виде ряда. Чтобы решить уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0, \qquad (12.177)$$

положим (см. гл. 8)

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} *, \qquad (12.178)$$

* Заметим, что x можно заменить комплексной переменной z.

откуда

$$y' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)\, a_\lambda x^{k+\lambda-1}, \tag{12.179}$$

$$y'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, a_\lambda x^{k+\lambda-2}. \tag{12.180}$$

Подставим эти разложения в исходное дифференциальное уравнение

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1)\, a_\lambda x^{k+\lambda-2} +$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\infty} [n(n+1) - 2(k+\lambda) - (k+\lambda)(k+\lambda-1)]\, a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \tag{12.181}$$

Определяющее уравнение

$$k(k-1) = 0 \tag{12.182}$$

имеет решения $k = 0,\ 1$. Пусть $k = 0$. Попытаемся получить решение, положив $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Тогда для коэффициентов ряда имеем рекуррентное соотношение

$$(\lambda+2)(\lambda+1)\, a_{\lambda+2} + [n(n+1) - 2\lambda - \lambda(\lambda-1)]\, a_\lambda = 0, \tag{12.183}$$

из которого следует, что

$$a_{\lambda+2} = -\frac{(n+\lambda+1)(n-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\, a_\lambda. \tag{12.184}$$

Обозначим ряд с коэффициентами (12.184) p_n, тогда

$$p_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}\, x^2 + \frac{(n-2)\, n(n+1)(n+3)}{4!}\, x^4 + \ldots \tag{12.185}$$

Пусть теперь $k = 1$ и $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, тогда рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$a_{\lambda+2} = -\frac{(n+\lambda+2)(n-\lambda-1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)}\, a_\lambda. \tag{12.186}$$

Обозначив новый ряд q_n, получим

$$q_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}\, x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}\, x^5 - \ldots \tag{12.187}$$

Таким образом, общее решение уравнения (12.177) запишется в виде

$$y_n(x) = A_n p_n(x) + B_n q_n(x), \tag{12.188}$$

при условии, что ряды, которые определяют это решение, сходятся.

При целом положительном четном (или нулевом) n ряд p_n ограничен и, введя надлежащий нормирующий множитель, его можно переписать так:

$$P_n(x) = (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n [(n/2)!]^2} p_n(x) =$$

$$= (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} p_{2s}(x) = (-1)^s \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} p_{2s}(x)$$

$$\text{для } n = 2s. \qquad (12.189)$$

Если n — целое положительное нечетное число, ряд p_n обрывается после некоторого конечного числа членов, и

$$P_n(x) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{n!}{2^{n-1}\{[(n-1)/2]!\}^2} q_n(x) =$$

$$= (-1)^s \frac{(2s+1)!}{2^{2s}(s!)^2} q_{2s+1}(x) = (-1)^s \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!} q_{2s+1}(x)$$

$$\text{для } n = 2s+1. \qquad (12.190)$$

Заметим, что эти выражения справедливы не только для всех вещественных x, но и для любых комплексных значений, за исключением бесконечно удаленной точки. Постоянные множители в (12.189) и (12.190) выбраны с таким расчетом, чтобы функция P_n соответствовала полиномам Лежандра, определенным производящей функцией.

Иногда удобно изменить порядок членов в этих рядах на обратный. Это достигается подстановкой $s = n/2 - \lambda$ в (12.189), $s = (n-1)/2 - \lambda$ в (12.190), после чего уравнения (12.189) и (12.190) сводятся к одному:

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!\,(n-s)!\,(n-2s)!} x^{n-2s}, \qquad (12.191)$$

в котором верхний предел суммирования равен $n/2$ при четном n или $(n-1)/2$ при нечетном n. Выражение (12.191) в точности повторяет (12.8), полученное прямо из производящей функции. Именно из соображения совпадения (12.191) с (12.8) и были выбраны нормировочные множители в уравнениях (12.189) и (12.190). Очевидно, что для очень больших x

$$P_n(x) \longrightarrow \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n. \qquad (12.192)$$

В разд. 12.10 нам понадобится функция P_n чисто мнимого аргумента. Для этого в уравнении (12.191) сделаем замену $x = i\zeta$, тогда

$$P_n(i\zeta) = (-1)^{n/2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(2n-2s)!}{2^n s!\,(n-s)!\,(n-2s)!}\,\zeta^{n-2s}. \qquad (12.193)$$

Функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$. Подчеркнем, что мы использовали p_n только для четных n, а q_n — только для нечетных n. Теперь определим второе решение уравнения Лежандра:

$$Q_n(x) = (-1)^{n/2}\,\frac{[(n/2)!]^2\,2^n}{n!}\,q_n(x) =$$

$$= (-1)^s\,\frac{(2s)!!}{(2s-1)!!}\,q_{2s}(x) \quad \text{для} \quad n = 2s, \qquad (12.194)$$

$$Q_n(x) = (-1)^{(n+1)/2}\,\frac{\{[(n-1)/2]!\}^2\,2^{n-1}}{n!}\,p_n(x) =$$

$$= (-1)^{s+1}\,\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\,p_{2s+1}(x) \quad \text{для} \quad n = 2s+1. \qquad (12.195)$$

Нормировочные множители выбраны здесь таким образом, чтобы функции Q_n удовлетворяли тем же самым рекуррентным соотношениям, что и P_n. В этом можно убедиться, если подставить выражения (12.194) и (12.195) в формулы (12.17) и (12.26). Применяя признак сходимости Коши к коэффициентам ряда (12.184) и (12.186), получаем, что $Q_n(x)$ *сходится* при $|x| < 1$ и *расходится* при $|x| \geqslant 1$.

Чтобы получить второе решение для области $x^2 > 1$, будем искать решение уравнения (12.177) в форме ряда по *нисходящим* степеням. Пусть

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{-\lambda} x^{k-\lambda}, \qquad (12.196)$$

тогда

$$y' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k-\lambda)\,b_{-\lambda} x^{k-\lambda-1}, \qquad (12.197)$$

$$y'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k-\lambda)(k-\lambda-1)\,b_{-\lambda} x^{k-\lambda-2}. \qquad (12.198)$$

Подставим эти выражения в уравнение (12.177):

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k-\lambda)(k-\lambda-1)\,b_{-\lambda}(x)^{k-\lambda-2}+$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\infty}[n(n+1)-2(k-\lambda)-(k-\lambda)(k-\lambda-1)]\,b_{-\lambda}x^{k-\lambda}=0. \tag{12.199}$$

Из требования обращения в нуль коэффициентов при степени x^k получим определяющее уравнение

$$k(k+1)-n(n+1)=0 \tag{12.200}$$

с решениями

$$k=n,\quad -n-1. \tag{12.201}$$

При целом n решение $k=n$ (поскольку $n\geqslant 0$) приводит к уже знакомым полиномам Лежандра $P_n(x)$. Из второго решения $k=-n-1$ возникает ряд, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$b_{-\lambda}(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)+$$
$$+[n(n+1)-(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)]\,b_{-\lambda-2}=0 \tag{12.202}$$

или

$$b_{-\lambda-2}=\frac{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}{(\lambda+2)(2n+\lambda+3)}\,b_{-\lambda}. \tag{12.203}$$

Это дает

$$y(x)=b_0x^{-n-1}\left[1+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\,x^{-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\,x^{-4}+\ldots\right], \tag{12.204}$$

причем

$$b_{-2s}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2s)}{2\cdot 4\ldots(2s)(2n+3)\ldots(2n+s)\ldots(2n+2s+1)}\,b_0. \tag{12.205}$$

Полученное решение можно также записать так:

$$y(x)=b_0x^{-n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,(n+2s)!\,(2n+1)!}{s!\,(n!)^2\,(2n+2s+1)!}\,x^{-2s}. \tag{12.206}$$

Одна из обычных форм записи второго решения получается, если выбрать

$$b_0 = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}, \tag{12.207}$$

откуда следует, что

$$Q_n(x) = 2^n x^{-n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!\,(n+2s)!}{s!\,(2n+2s+1)!} x^{-2s}, \quad x^2 > 1. \tag{12.208}$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что $Q_n(x)$ для $x^2 > 1$ удовлетворяет тем же самым рекуррентным соотношениям, что и $P_n(x)$. На рис. 12.10 показано поведение функций $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Решение в замкнутой форме. Часто требуется представить второе решение $Q_n(z)$ в замкнутой форме. Это можно сделать с помощью метода, рассмотренного в разд. 8.5. Запишем

$$Q_n(z) = P_n(z) \left\{ A_n + B_n \int^z \frac{dx}{(1-x^2)\,[P_n(x)]^2} \right\}, \tag{12.209}$$

где постоянная A_n включает в себя значение интеграла на произвольном нижнем пределе. Обе постоянные, A_n и B_n, могут быть определены для некоторых специальных случаев.

Для $n = 0$ уравнение (12.209) принимает вид с учетом разложения Маклорена для логарифма

$$Q_0(z) = P_0(z) \left\{ A_0 + B_0 \int^z \frac{dx}{(1-x^2)\,[P_0(x)]^2} \right\} =$$

$$= A_0 + B_0 \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} =$$

$$= A_0 + B_0 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + \frac{z^{2s+1}}{2s+1} + \ldots \right). \tag{12.210}$$

Сравнивая его с решением, записанным в виде ряда (12.187), получаем

$$Q_0(z) = q_0(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + \frac{z^{2s+1}}{2s+1} + \ldots, \tag{12.211}$$

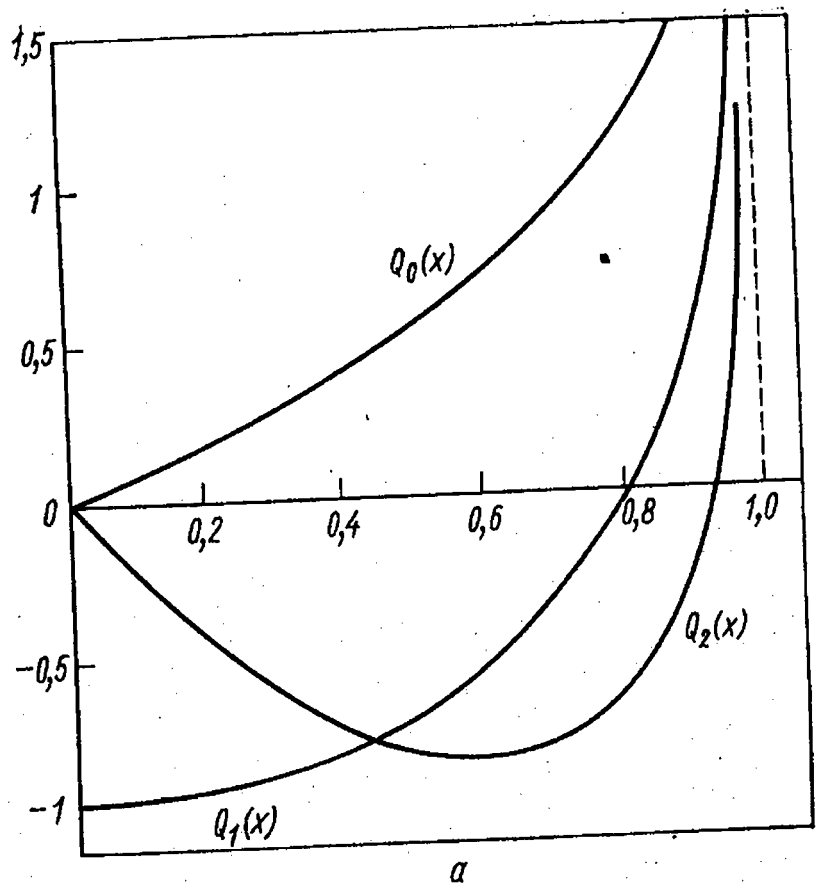


Рис. 12.10. Функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$ при $0 \leqslant x < 1$ (*а*) и при $x > 1$ (*б*).

следовательно, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. Проделаем аналогичную процедуру для $n = 1$. Тогда

$$Q_1(z) = z\left[A_1 + B_1 \int^z \frac{dx}{(1-x^2)\,x^2}\right] =$$

$$= A_1 z + B_1 z\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{z}\right), \qquad (12.212)$$

разлагая его в степенной ряд и сравнивая с $Q_1(z) = -p_1(z)$, получаем, что $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. Следовательно,

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}, \quad Q_1(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} - 1, \quad |z| < 1. \qquad (12.213)$$

По-видимому, наилучший способ получения функций $Q_n(z)$ более высокого порядка состоит в применении рекуррентного соотношения (12.17), которое можно проверить как для $x^2 < 1$, так и для $x^2 > 1$, подставляя в него решения в виде рядов.

Так можно получить

$$Q_2(z) = \frac{1}{2}P_2(z)\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{3}{2}P_1(z). \qquad (12.214)$$

Последовательное применение рекуррентной формулы дает

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{1+z}{1-z} -$$

$$-\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(z) - \frac{2n-5}{3\,(n-1)}P_{n-3}(z) - \ldots \qquad (12.215)$$

Множитель $\ln|(1+z)/(1-z)|$ говорит о том, что при вещественном z записанные выше выражения справедливы для $|x| < 1$. Если необходимо записать решение в замкнутой форме вне этого промежутка, то для этого нужно только заменить B_n на $B_n \ln(-1)$. В этом случае

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}, \qquad (12.216)$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2}z\ln\frac{z+1}{z-1} - 1, \quad |z| > 1 \text{ и т. д.} \qquad (12.217)$$

В самом деле, эти выражения справедливы во всей комплексной плоскости, если ее разрезать вдоль вещественной оси на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. В комплексной плоскости, где

логарифм — многозначная функция, нужно проявлять особую осторожность. Например,

$$\ln(-1) = \ln e^{i\pi + 2n\pi i} = i\pi + 2n\pi i, \qquad (12.218)$$

где n — любое целое число. Читатель может проверить сам, что уравнения (12.216) и (12.217) согласуются с (12.208). Именно из этих соображений и был выбран коэффициент b_0.

В следующем разделе нам понадобится функция $Q_n(y)$ чисто мнимого аргумента. Взяв за основу выражение для этой функции в виде ряда для $|z| > 1$, можно записать

$$Q_n(iy) = (-i)^{n+1} 2^n y^{-n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!\,(n+2s)!\,(-i)^{2s}}{s!\,(2n+2s+1)!}\, y^{-2s}, \qquad (12.219)$$

где y заменено на iy. Для этой же функции, но записанной в замкнутой форме, удобно представить логарифм в виде

$$\ln\frac{iy+1}{iy-1} = 2i\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{5y^5} + \ldots\right) = -2i\,\mathrm{arctg}\,y. \qquad (12.220)$$

Подставим формулу (12.220) в уравнение (12.215), после чего получим

$$Q_n(iy) = \frac{1}{2} P_n(iy)(-2i)\,\mathrm{arcctg}\,y - \frac{2n-1}{n} P_{n-1}(iy) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(iy) - \ldots, \qquad (12.221)$$

в частности,

$$Q_0(iy) = -i\,\mathrm{arcctg}\,y, \qquad (12.222)$$

$$Q_1(iy) = y\,\mathrm{arcctg}\,y - 1. \qquad (12.223)$$

Эти функции имеют разрыв в точке $y = 0$, поэтому выражение (12.221) определяет функцию $Q_n(iy)$ для всех вещественных y, заключенных в промежутке $0 < y < \infty$.

Для удобства приведем некоторые специальные значения $Q_n(z)$: так, $Q_n(1) = \infty$ вследствие наличия логарифмического члена в выражении (12.215); $Q_n(\infty) = 0$, как это следует из представления рядом (12.208). Из представления функции $Q_n(z)$ в виде ряда можно получить соотношение

$$Q_n(-z) = (-1)^{n+1} Q_n(z),$$

откуда вытекает, что $Q_n(0) = 0$ для четных n. Кроме того,

из уравнения (12.195), так как $p_n(0)=1$, следует

$$Q_n(0)=(-1)^{(n+1)/2}\frac{\{[(n-1)/2]!\}^2}{n!}2^{n-1}=(-1)^{s+1}\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}$$

для нечетных $n=2s+1$.

Для функций $Q_n(z)$, так же как и для функций Бесселя, можно записать определитель Вронского*:

$$(1-z^2)\,[P_n(z)\,Q_n'(z)-P_n'(z)\,Q_n(z)]=1, \qquad (12.224)$$

где $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ Если воспользоваться уравнением (12.26) для вычисления производных P_n' и Q_n', то написанное выше соотношение сведется к

$$P_n(z)\,Q_{n-1}(z)-P_{n-1}(z)\,Q_n(z)=\frac{1}{n}. \qquad (12.225)$$

Присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_n^m(x)$ можно определить по аналогии с присоединенными полиномами Лежандра, как это было сделано в разд. 12.5. Аналогично уравнению (12.84) можно записать

$$Q_n^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x), \qquad (12.226)$$

$$Q_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}Q_n^m(x), \quad -1<x<1, \quad m\geqslant 0. \qquad (12.227)$$

Некоторые авторы опускают множитель $(-1)^m$. Используя эти определения, легко получить

$$Q_1^1(x)=-(1-x^2)^{1/2}\left(\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right), \quad Q_1^{-1}(x)=-\frac{1}{2}Q_1^1(x). \qquad (12.228)$$

Множитель $\ln[(1+x)/(1-x)]$ характерен для присоединенных функций $Q_n^m(x)$ как при $m\neq 0$, так и при $m=0$. Для больших x $(x^2>1)$ или для всей комплексной плоскости с линией разреза $-1<x<1$ имеем

$$Q_n^m(z)=(z^2-1)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z), \quad m\geqslant 0 \qquad (12.229)$$

и соотношение (12.227) с отрицательным верхним индексом.

* Эта формула использовалась для получения $Q_n(z)$ в форме (12.209).

Интегральные представления. Из анализа интеграла Шлефли (см. разд. 12.4) запишем второе независимое решение уравнения Лежандра в виде интеграла:

$$\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt.$$

Интегрирование ведется по «восьмерке» (рис. 12.11, *а*), внутри которой подынтегральная функция однозначна, кроме

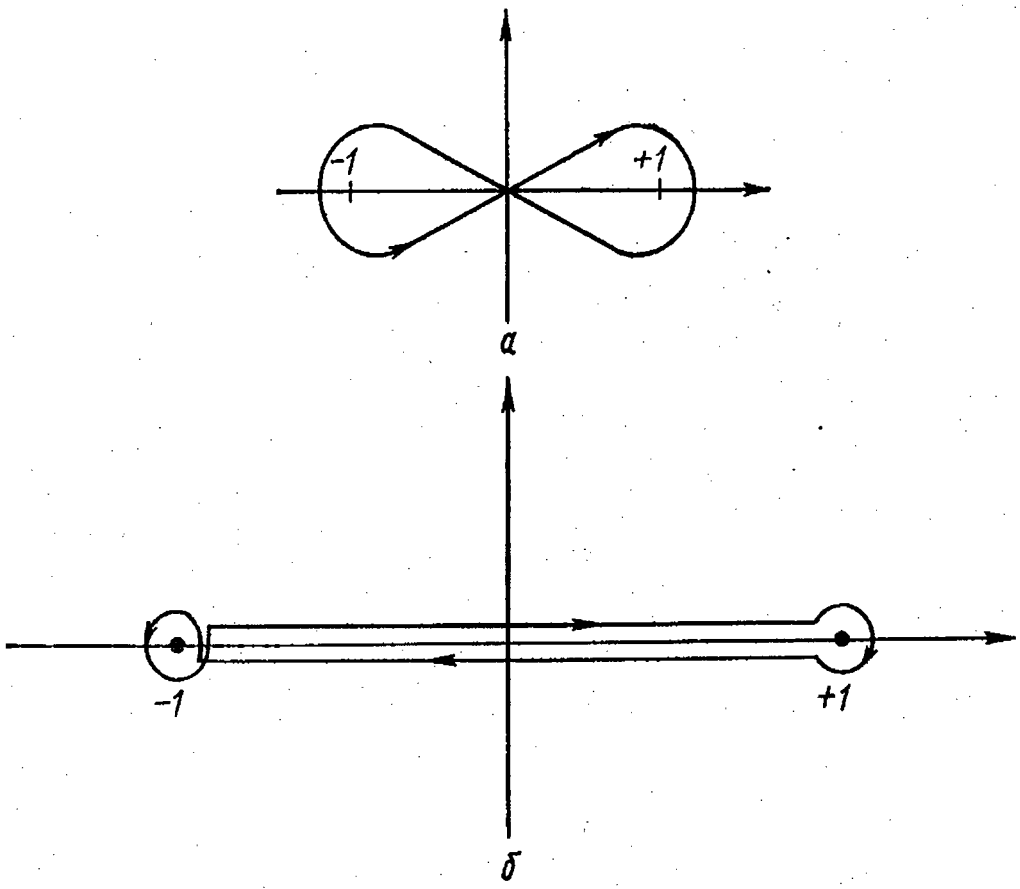


Рис. 12.11. Контур в виде «восьмерки» (*а*) и деформированный контур (*б*) для $Q_\nu(x)$.

того, такой контур позволяет получить решение, отличное от $P_\nu(z)$. Введя нормировочный множитель, запишем

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{4i\sin\pi\nu}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt.$$

Деформируем контур, как показано на рис. 12.11, *б*, тогда

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt,\quad \nu>-1. \qquad (12.230)$$

Доказательство тождественности этого интеграла функции $Q_\nu(x)$ вынесено в упр. 6 (см. ниже).

Подстановка $\gamma=(e^\varphi\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1})/(e^\varphi\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1})$ после довольно громоздких выкладок сводит интеграл (12.230) к новому

$$Q_\nu(z)=\int_0^\infty \frac{d\varphi}{[z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}\varphi]^{\nu+1}} \quad \text{для } \nu>-1, \qquad (12.231)$$

аналогичному (12.73), с помощью которого представлены полиномы Лежандра $P_n(z)$. Для аналитичности и однозначности функции $Q_\nu(z)$ в плоскости делается разрез от $+1$ до $-\infty$.

Упражнения

1. Записать соотношение четности для функции $Q_n(x)$.

2. Убедиться, что функции Лежандра второго рода $Q_n(x)$ удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и полиномы Лежандра $P_n(x)$, как для $|x|<1$, так и для $|x|>1$

$$(2n+1)\,xQ_n(x)=(n+1)\,Q_{n+1}(x)+nQ_{n-1}(x),$$
$$(2n+1)\,Q_n(x)=Q'_{n+1}(x)-Q'_{n-1}(x).$$

3. Используя рекуррентные формулы, показать (не прибегая к определителю Вронского), что

$$n\,[P_n(x)\,Q_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)\,Q_n(x)]=P_1(x)\,Q_0(x)-P_0(x)\,Q_1(x).$$

Непосредственной подстановкой доказать, что правая часть этого уравнения равна единице.

4. Доказать, что $P_{n+1}(x)\,Q_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)\,Q_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,x$.

5. Доказать, что $Q_n(\cos\theta)=(-1)^n\dfrac{r^{n+1}}{n!}\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\dfrac{1}{2r}\ln\left(\dfrac{r-z}{r+z}\right)\right]$.

6. В предположении, что интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt$ удовлетворяет уравнению Лежандра ($\nu>-1$), показать, что вследствие четности из него не могут получаться любые $P_\nu(z)$. Кроме того, доказать, что он равен $2^{\nu+1}Q_\nu(z)$. *Указание.* Разложить знаменатель по степеням t/z (для $|z|>t$) и проинтегрировать с помощью бета-функции (см. разд. 10.4).

12.10. СФЕРОИДАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Рассмотрим физические задачи о диэлектрическом и проводящем сфероидах, помещенных в однородное электрическое поле. Для упрощения ось симметрии сфероида выберем параллельной направлению первоначального

электрического поля. Это позволяет исключить азимутальную зависимость и делает задачу аксиально симметричной.

Координаты сплющенного сфероида. Если сфероид имеет сплющенную форму, систему координат удобно выбрать

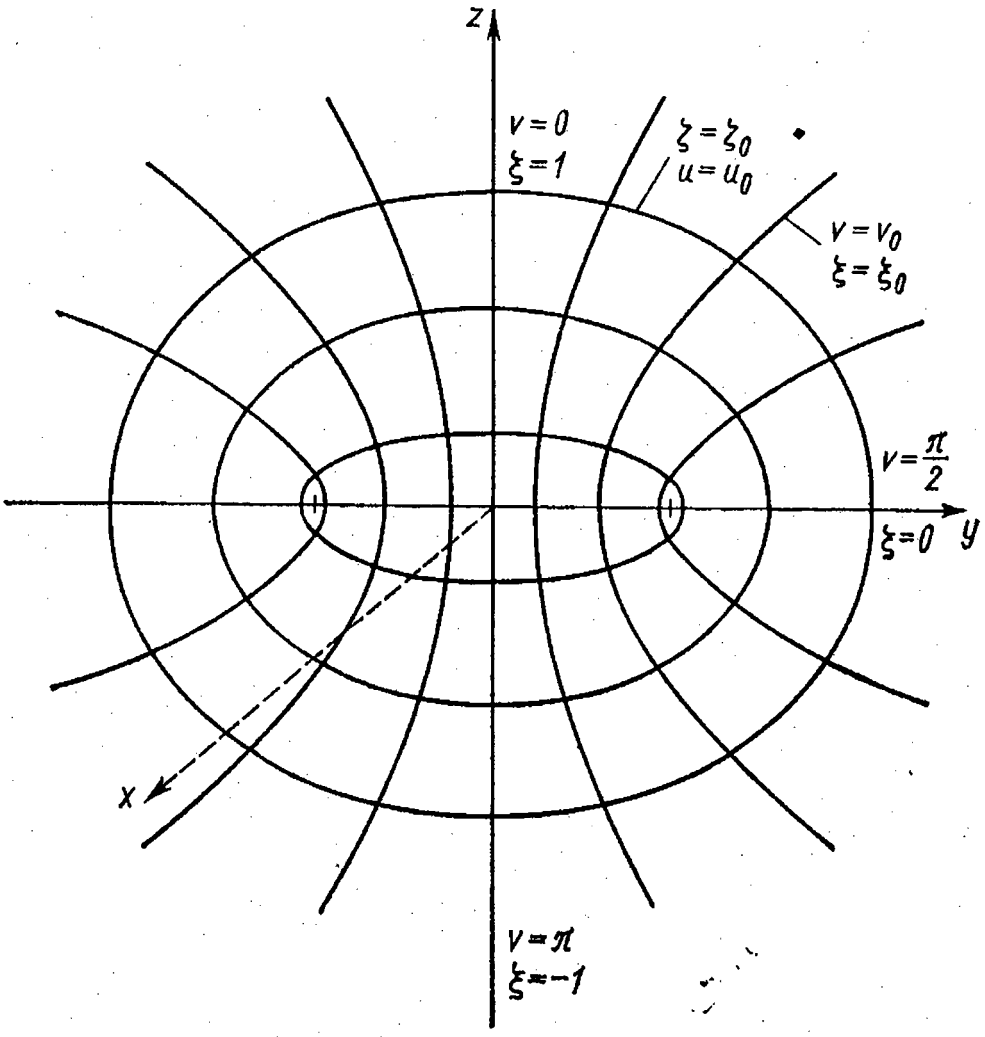


Рис. 12.12. Координаты сплющенного сфероида.

так, чтобы координатные поверхности также представляли собой сплющенный сфероид. Можно задать систему координат с помощью уравнений *

$$x = a \operatorname{ch} u \sin v \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v \sin \varphi, \quad z = a \operatorname{sh} u \cos v, \tag{12.232}$$

поверхность $u = u_0$ — это сплющенный сфероид, уравнение $v = v_0$ описывает однополостный гиперболоид, а уравнение $\varphi = \varphi_0$ — полуплоскость, проходящую через ось z (рис. 12.12). Удобнее заменить здесь переменные u, v, φ

* Эта система называется системой координат сплющенного сфероида, см. разд. 2.11.

новыми ξ, ζ, φ, которые связаны друг с другом следующим образом:

$$\xi = \cos v, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1; \quad \zeta = \operatorname{sh} u, \quad 0 \leqslant \zeta < \infty. \quad (12.233)$$

В новой системе координат поверхность $\zeta = 0$ представляет собой круг, тогда как $\zeta = \zeta_0 > 0$ — эллипсоид вращения (сплющенный сфероид). Уравнение $\xi = 0$ определяет плоскость с круглым отверстием, а $\xi = 1$ задает линию, которая перпендикулярна к этому отверстию и кругу $\zeta = 0$ и проходит через их общий центр. После новой замены уравнения (12.232) приобретут вид

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = a\xi\zeta, \quad (12.234)$$

где

$$\rho = a\left[(1-\xi^2)(1+\zeta^2)\right]^{1/2}. \quad (12.235)$$

Координаты ξ, ζ, φ образуют правую систему, причем $\xi_0 \times \zeta_0 = \varphi_0$.

Будем искать решение уравнения Лапласа, которое в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial V}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[(1+\zeta^2)\frac{\partial V}{a\zeta}\right] + \frac{\xi^2+\zeta^2}{(1-\xi^2)(1+\zeta^2)} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (12.236)$$

Здесь мы воспользовались коэффициентами Ламе

$$h_\xi = a\left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1-\xi^2}\right)^{1/2}, \quad h_\zeta = a\left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1+\xi^2}\right)^{1/2},$$

$$h_\varphi = a\left[(1-\xi^2)(1+\zeta^2)\right]^{1/2} = \rho. \quad (12.237)$$

Пусть решение уравнения (12.236) можно представить в виде $X(\xi)Z(\zeta)\Phi(\varphi)$. Затем, разделив переменные (см. разд. 2.5), можно убедиться, что $X(\xi)$ и $Z(\zeta)$ удовлетворяют присоединенному уравнению Лежандра и присоединенному уравнению Лежандра чисто мнимого аргумента соответственно, а $\Phi(\varphi)$ подчиняется обычному уравнению гармонического осциллятора. Потенциал V запишем в виде ряда

$$V(\xi, \zeta, \varphi) = \sum_{m,\, n} X_{mn}(\xi) Z_{mn}(\zeta) \Phi_m(\varphi), \quad (12.238)$$

где

$$\left.\begin{aligned} X_{mn}(\xi) &= AP_n^m(\xi) + BQ_n^m(\xi); \\ Z_{mn}(\zeta) &= A'P_n^m(i\zeta) + B'Q_n^m(i\zeta); \\ \Phi(\varphi) &= C\cos m\varphi + D\sin m\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (12.239)$$

Учитывая аксиальную симметрию задачи, нужно положить $m = 0$, что будет означать исключение из рассмотрения всех присоединенных функций Лежандра. Однако остается еще определить функции P_n и Q_n вещественного и мнимого аргументов.

Запишем граничные условия для самого простого случая *проводящего* сплющенного сфероида: $V = 0$ на поверхности сфероида: $\zeta = \zeta_0$, $V \to -E_0 a\xi\zeta$ для $\zeta \to \infty$, где E_0 — первоначальное невозмущенное электрическое поле. Чтобы получить зависимость от переменной ξ, нужно положить $n = 1$, а $B = 0$ (если $B \neq 0$, то при $\xi = 1$, $Q_n(1) = \infty$), поэтому

$$V(\xi, \zeta) = P_1(\xi)[A'P_1(i\zeta) + B'Q_1(i\zeta)] = \\ = \xi[A'i\zeta + B'(\zeta \operatorname{arcctg}\zeta - 1)]. \qquad (12.240)$$

Поскольку $\zeta \to \infty$, функция $Q_1(i\zeta) \to 0$. Из второго граничного условия

$$A' = iE_0 a, \qquad (12.241)$$

после чего получим

$$V(\xi, \zeta) = \xi[-E_0 a\zeta + B'(\zeta \operatorname{arcctg}\zeta - 1)]. \qquad (12.242)$$

Первое граничное условие говорит о том, что потенциал V обращается в нуль на поверхности сфероида $\zeta = \zeta_0$ или

$$0 = \xi[-E_0 a\zeta_0 + B'(\zeta_0 \operatorname{arcctg}\zeta_0 - 1)], \qquad (12.243)$$

откуда

$$B' = \frac{E_0 a\zeta_0}{\zeta_0 \operatorname{arcctg}\zeta_0 - 1}. \qquad (12.244)$$

Окончательно

$$V(\xi, \zeta) = -E_0 a\xi\zeta_0 \left(\frac{\zeta}{\zeta_0} - \frac{\zeta \operatorname{arcctg}\zeta - 1}{\zeta_0 \operatorname{arcctg}\zeta_0 - 1}\right), \quad \zeta \geqslant \zeta_0. \qquad (12.245)$$

Таким образом, для получения искомого потенциала мы просуммировали решения уравнения Лапласа. Произвольны

постоянные определялись из условия соответствия решения граничным условиям. В результате мы получили выражение (12.245). Наконец, известно, что решение единственно (см. разд. 1.15).

Аналогичная задача, но уже со сферой (см. разд. 12.3) представляет собой частный случай рассмотренной. Предельный переход $\zeta_0 \to \infty$, $a \to 0$ при $a\xi_0 = r_0$ сводит систему координат сплющенного сфероида к обычной сферической.

Если сплющенный сфероид изготовлен из *диэлектрика* с диэлектрической постоянной ε, первое граничное условие запишется иначе:

$$V \text{ и } D_n = -\frac{\varepsilon}{h_\zeta}\cdot\frac{\partial V}{\partial \zeta} \text{ непрерывны в точке } \zeta = \zeta_0{}^*. \quad (12.246)$$

Предположим, что электрическое поле внутри диэлектрика постоянно по величине и параллельно оси симметрии z **. Наша задача как раз заключается в проверке этого предположения. Воспользуемся граничными условиями на бесконечности

$$V_{\text{внеш}} = \xi\,[-E_0 a\zeta + B'(\zeta\,\mathrm{arcctg}\,\zeta - 1)],$$
$$V_{\text{внутр}} = -E_{\text{внутр}} a\xi\zeta. \quad (12.247)$$

В точке $\zeta = \zeta_0$ условие (12.246) дает

$$-E_{\text{внутр}} a\zeta_0 = -E_0 a\zeta_0 + B'(\zeta_0\,\mathrm{arcctg}\,\zeta_0 - 1), \quad (12.248)$$

$$\varepsilon E_{\text{внутр}} a = \varepsilon_0 E_0 a - \varepsilon_0 B'\left(\mathrm{arcctg}\,\zeta_0 - \frac{\zeta_0}{1+\zeta_0^2}\right), \quad (12.249)$$

множитель h_ζ сократился. Исключая из этих уравнений B', находим, что отношение первоначального электрического поля E_0 к полю внутри диэлектрика $E_{\text{вн}}$ равно

$$\frac{E_0}{E_{\text{внутр}}} = 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)(1+\zeta_0^2)(1 - \zeta_0\,\mathrm{arcctg}\,\zeta_0). \quad (12.250)$$

Определим коэффициент деполяризации L соотношением

$$E_{\text{внутр}} = E_0 - LP, \quad (12.251)$$

---

* Это эквивалентно требованию непрерывности тангенциальной компоненты **E**.

** Другая возможность заключается в представлении потенциала внутри сфероида в виде суммы решений уравнения Лапласа аналогично (12.238).

где поляризация $P = E_{\text{внутр}}(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Решая это уравнение относительно L, получаем

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0}(1 + \zeta_0^2)(1 - \zeta_0 \operatorname{arcctg} \zeta_0) \qquad (12.252)$$

как функцию геометрии сплющенного сфероида.

В пределе при $\zeta_0 \to \infty$ получим величину, соответствующую диэлектрической сфере,

$$\lim_{\zeta \to \infty} L = 1/3\varepsilon_0, \qquad (12.253)$$

а при $\zeta_0 \to 0$ — величину для тонкой пластины диэлектрика, перпендикулярной к однородному электрическому полю:

$$\lim_{\zeta_0 \to 0} L = 1/\varepsilon_0. \qquad (12.254)$$

Координаты вытянутого сфероида. Задача о вытянутом диэлектрическом сфероиде, помещенном в однородное электрическое поле, решается аналогично предыдущей, но в системе координат вытянутого сфероида. Используем формулы преобразования *

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = a\xi\eta, \qquad (12.255)$$

$$\eta = \operatorname{ch} u, \quad 1 \leqslant \eta < \infty; \quad \xi = \cos v, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1;$$

$$\rho = a[(1 - \zeta^2)(\eta^2 - 1)]^{1/2}. \qquad (12.256)$$

Если записать лапласиан в переменных ξ, η, φ [см. уравнение (2.105)], переменные можно разделить. По переменным ξ и η возникает присоединенное уравнение Лежандра. Зависимость от переменной φ выражается уравнением гармонического осциллятора. Следовательно, $V(\xi, \eta, \varphi)$ имеет ту же самую форму, что и $V(\xi, \zeta, \varphi)$ [выражения (12.238) и (12.239)], но аргумент $i\zeta$ заменен на вещественную величину η. Положим, $m = 0$ и воспользуемся свойством азимутальной симметрии и граничными условиями, тогда потенциал вне сфероида выразится как

$$V_{\text{внеш}} = \xi\left[A'\eta + B'\left(\frac{1}{2}\eta \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - 1\right)\right]. \qquad (12.257)$$

Предоставив читателю самому проследить промежуточные этапы по аналогии с предыдущей задачей, которая решалась в системе координат сплющенного сфероида, мы,

* Здесь мы в точности следуем разд. 2.10.

наконец, получим коэффициент деполяризации L:

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2 - 1)\left(\frac{1}{2}\eta_0 \ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1} - 1\right), \qquad (12.258)$$

где поверхность $\eta = \eta_0$ представляет собой вытянутый сфероид. В пределе при $\eta_0 \to 1$ вытянутый сфероид переходит в бесконечно длинную тонкую нить. Как и следует ожидать,

$$\lim_{\eta_0 \to 1} L = 0. \qquad (12.259)$$

С другой стороны, при

$$\lim_{\eta_0 \to \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \qquad (12.260)$$

мы снова получаем сферический случай.

Целесообразно отметить, что рассмотренные задачи электростатики на практике встречаются не очень часто, тогда как соответствующие проблемы с магнитным полем гораздо важнее и имеют большее распространение. Изучение пара- и диамагнитных сфероидов в однородном магнитном поле проводится совершенно аналогично. И та и другая задача основана на решении уравнения Лапласа.

Упражнения

1. Показать, что коэффициент деполяризации в системе координат вытянутого сфероида ($\eta = \eta_0$) в однородном магнитном поле равен $L = \frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2 - 1)\left(\frac{1}{2}\eta_0 \ln\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1} - 1\right)$.

2. Заряженная проводящая изолированная оболочка в форме вытянутого сфероида $\eta = \eta_0$ имеет потенциал V_0. Показать, что электростатический потенциал снаружи оболочки равен

$$V = V_0 \frac{Q_0(\eta)}{Q_0(\eta_0)} = V_0 \frac{\ln[(\eta+1)/(\eta-1)]}{\ln[(\eta_0+1)/(\eta_0-1)]}.$$

Какова емкость сфероида? *Указание.* Исследовать поведение этого потенциала на далеких расстояниях от оболочки.

3. Заряженная изолированная оболочка в форме сплющенного сфероида $\zeta = \zeta_0$ имеет потенциал $V = V_0$. Показать, что электростатический потенциал снаружи оболочки равен

$$V = V_0 \frac{Q_0(i\zeta)}{Q_0(i\zeta_0)} = V_0 \frac{\operatorname{arcctg}\zeta}{\operatorname{arcctg}\zeta_0}.$$

В пределе при $\zeta_0 \to 0$ мы получим диск радиусом a. Определить потенциал диска на больших расстояниях от него и найти его полный заряд. Используя этот результат, показать, что емкость диска в единицах МКСА равна $C = 8\varepsilon_0 a$.

12.11. ВЕКТОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Магнитное поле замкнутого тока. Обсудим уравнение для магнитного векторного потенциала

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \qquad (12.261)$$

Предположим, что граничные условия сформулированы применительно к сферическим координатам. Для замкнутого электрического контура (см. разд. 12.5) уравнение (12.261) поддавалось решению, поскольку на $\mathbf{A}$ накладывались различные ограничения. Вообще, это уравнение распадается на три скалярных уравнения, каждое из которых содержит все три компоненты $\mathbf{A}$: A_r, A_θ и A_φ. Такие связанные друг с другом дифференциальные уравнения в принципе можно решить, но при этом возникают громадные трудности.

Полагая $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, можно привести исходное уравнение к векторному лапласиану $\nabla^2 \mathbf{A}$. В декартовых координатах он распадается на отдельные уравнения, по одному на каждую компоненту. К сожалению, граничные условия заданы в сферических координатах. Чтобы удовлетворить этим условиям, мы должны перепутать отдельные компоненты A_x, A_y и A_z, что опять приводит к большим затруднениям.

Чтобы облегчить решение уравнения (12.261), а также и других уравнений (таких, например, как векторное уравнение Гельмгольца и векторное волновое уравнение), применяют различные комбинации (скалярных) сферических функций, с помощью которых строят векторы в сферических координатах. Одна такая комбинация, встречающаяся в квантовой механике, описана Хиллом *. Три ее векторные сферические функции имеют вид

$$\mathbf{V}_{LM} = \mathbf{r}_0 \left[-\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} Y_L^M \right] +$$

$$+ \boldsymbol{\theta}_0 \left\{ \frac{1}{[(L+1)(2L+1)]^{1/2}} \cdot \frac{\partial Y_L^M}{\partial \theta} \right\} +$$

$$+ \boldsymbol{\varphi}_0 \left\{ \frac{iM}{[(L+1)(2L+1)]^{1/2} \sin\theta} Y_L^M \right\}, \qquad (12.262)$$

* Hill E. H. Amer. J. Phys., 22, 211 (1954); см. также Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.

$$\mathbf{W}_{LM} = \mathbf{r}_0\left[\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} Y_L^M\right] + \boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{1}{[L(2L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\} + \\ + \boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{iM}{[L(2L+1)]^{1/2}\sin\theta} Y_L^M\right\}, \qquad (12.263)$$

$$\mathbf{X}_{LM} = \boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{-M}{[L(L+1)]^{1/2}\sin\theta} Y_L^M\right\} + \boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{-i}{[L(L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\}. \qquad (12.264)$$

Эти функции удовлетворяют общему условию ортогональности

$$\int \mathbf{A}_{LM}\cdot\mathbf{B}^*_{L'M'}\,d\Omega = \delta_{AB}\delta_{LL'}\delta_{MM'}, \qquad (12.265)$$

где величины **A** и **B** могут заменяться на **V**, **X** или **W**. Ортогональность проверяется подстановкой явных выражений для **V**, **X** и **W** и сведением интеграла к обычному интегралу от ортонормированных сферических функций $Y_L^M(\theta, \varphi)$.

При операциях, связанных с изменением четности (инверсия координат), векторные сферические функции преобразуются по закону

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_{LM}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L+1}\mathbf{V}_{LM}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{W}_{LM}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L+1}\mathbf{W}_{LM}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{X}_{LM}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L}\mathbf{X}_{LM}(\varphi, \theta), \end{aligned}\right\} \qquad (12.266)$$

где

$$\theta' = \pi - \theta; \quad \varphi' = \pi + \varphi. \qquad (12.267)$$

При проверке этих соотношений следует помнить, что в сферических координатах единичные векторы $\mathbf{r}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ — нечетные, а $\boldsymbol{\theta}_0$ — четный. Эти свойства векторов $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ можно установить, если выразить их через единичные векторы декартовой системы координат **i**, **j** и **k**.

Чтобы продемонстрировать использование векторных сферических функций, вернемся снова к уравнению (12.261). Воспользуемся таблицей Хилла для дифференциальных соотношений:

$$\nabla\cdot[F(r)\,\mathbf{V}_{LM}(\theta, \varphi)] = -\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr} + \frac{L+2}{r}F\right] Y_L^M(\theta, \varphi), \qquad (12.268)$$

$$\nabla \cdot [F(r)\,\mathbf{W}_{LM}(\theta, \varphi)] = \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} - \frac{L-1}{r} F\right] Y_L^M(\theta, \varphi), \tag{12.269}$$

$$\nabla \cdot [F(r)\,\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)] = 0. \tag{12.270}$$

Условие

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{12.271}$$

исключает функции $\mathbf{V}_{LM}$ и $\mathbf{W}_{LM}$, оставляя только $\mathbf{X}_{LM}$. В отсутствие тока $\mathbf{J} = 0$ (иными словами, вне замкнутого контура) уравнение (12.261) при выполнении условия (12.271) сводится к новому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0. \tag{12.272}$$

Используя другое дифференциальное соотношение с $\mathbf{A}_{LM} = R(r)\,\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)$, получаем

$$\nabla^2 [R(r)\,\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)] = \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{L(L+1)}{r^2} R\right] \mathbf{X}_{LM} = 0. \tag{12.273}$$

В согласии с уравнением (12.116) мы имеем

$$\mathbf{A}_{LM} = a_{LM} r^{-L-1} \mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi). \tag{12.274}$$

Кроме того, очевидно, что в силу симметрии замкнутого контура можно исключить азимутальную зависимость ($M = 0$), поэтому решение принимает следующий вид:

$$\mathbf{A}_L = a_L r^{-L-1} \left\{\frac{-i}{[L(L+1)]^{1/2}} \cdot \frac{\partial Y_L^0}{\partial 0}\right\} \varphi_0. \tag{12.275}$$

Полученное уравнение эквивалентно (12.119). Постоянные a_L определяются из граничных условий, как это было сделано в разд. 12.5 для коэффициентов c_n. Магнитное поле можно определить из уравнения

$$\nabla \times [F(r)\,\mathbf{X}_{LM}] = i\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} - \frac{L}{r} F\right] \mathbf{V}_{LM} + i\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} + \frac{(L+1)}{r} F\right] \mathbf{W}_{LM}, \tag{12.276}$$

которое соответствует уравнению (12.122). Здесь $F(r) = ar^{-L-1}$.

Векторные функции введены в этой главе применительно к требованиям математического аппарата квантовой механики, в которой момент количества движения играет важную роль. Морс и Фешбах описывают другой набор векторных сферических функций **B**, **C** и **P**, в котором радиальная зависимость целиком сосредоточена в **P**, а угловая — в **B** и **C**. Эта система сферических векторных функций с успехом применяется при рассмотрении волновых функций, когда мы хотим отделить продольную и поперечную составляющие волны.

Упражнения

1. В книге Джексона «Классическая электродинамика» функции $\mathbf{X}_{LM}$ заданы уравнением

$$\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \mathbf{L} Y_L^M(\theta, \varphi),$$

в котором оператор момента количества движения $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$. Показать, что это определение не противоречит уравнению (12.264).

2. Проверить, что четности функций $\mathbf{V}_{LM}$, $\mathbf{X}_{LM}$ и $\mathbf{W}_{LM}$ равны соответственно $(-1)^{L+1}$, $(-1)^L$ и $(-1)^{L+1}$. Почему на четность не влияет индекс M? *Указание.* Единичные векторы $\mathbf{r}_0$ и φ_0 — нечетные, а θ_0 — четный.

3. Доказать, что векторные сферические функции $\mathbf{V}_{LM}$, $\mathbf{X}_{LM}$ и $\mathbf{W}_{LM}$ ортонормированы.

ГЛАВА 13

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

13.1. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

Производящая функция. Полиномы Эрмита $H_n(x)$ можно определить с помощью производящей функции

$$g(x, t) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \qquad (13.1)$$

Рекуррентные соотношения. Обратим внимание на отсутствие верхнего индекса в обозначении полиномов Эрмита, что отличает обозначение вновь введенных полиномов от обозначений функций Ханкеля, которые не имеют к ним никакого отношения. Исходя из производящей функции, можно установить, что полиномы Эрмита удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad (13.2)$$

$$H_n' = 2nH_{n-1}(x). \qquad (13.3)$$

Формула (13.2) может быть получена дифференцированием производящей функции по t; дифференцирование по x приводит к формуле (13.3). Прямое разложение производящей функции позволяет найти значения первых двух полиномов: $H_0(x) = 1$ и $H_1(x) = 2x$. С помощью этих двух полиномов и формулы (13.2) легко получить любой требуемый полином $H_n(x)$, n — целое. Приведем явный вид нескольких первых полиномов Эрмита (графики первых трех полиномов изображены на рис: 13.1):

$$\left.\begin{aligned} &H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\\ &H_3(x) = 8x^3 - 12x,\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,\\ &H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,\\ &H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120. \end{aligned}\right\} \qquad (13.4)$$

Производящая функция позволяет получить полиномы Эрмита для некоторых частных случаев

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0. \tag{13.5}$$

Кроме того, из ее свойств вытекает важное соотношение четности

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x). \tag{13.6}$$

Другие представления полиномов Эрмита. Продифференцируем производящую функцию* n раз по переменной t, а затем положим t равным нулю:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{13.7}$$

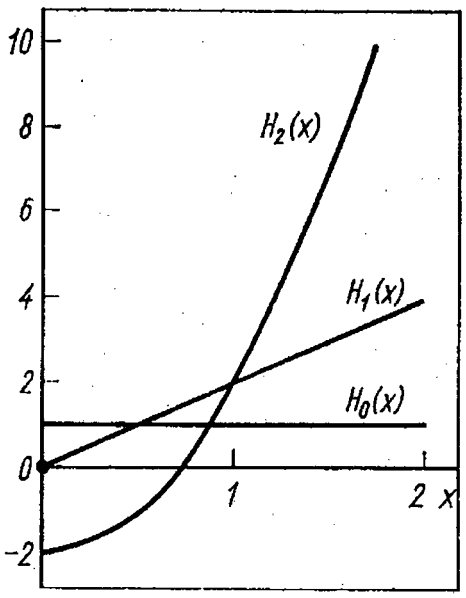


Рис. 13.1. Полиномы Эрмита.

Эта форма записи полиномов $H_n(x)$ известна как представление Родригеса. Второе представление можно получить, используя теорию вычетов (см. гл. 7). Если умножить формулу (13.7) на t^{-m-1}, а результат затем проинтегрировать по замкнутому контуру вокруг начала координат, то в результате такого интегрирования сохранится только один член с $H_m(x)$:

$$H_m(x) = \frac{m!}{2\pi i} \oint t^{-m-1} e^{-t^2+2tx}\, dt. \tag{13.8}$$

Исходя из соотношения (13.1), полином Эрмита $H_n(x)$ можно записать в форме ряда

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{2n!}{(n-2)!\,2!}(2x)^{n-2} + \frac{4n!}{(n-4)!\,4!}(2x)^{n-4}\,1\cdot 3 + \ldots =$$

$$= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-2)^s (2x)^{n-2s} C_n^{2s} \cdot 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2s-1) =$$

$$= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{(n-2s)!\,s!}. \tag{13.9}$$

* Перепишем производящую функцию так: $g(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2}$. Заметим, что $\frac{d}{dt} e^{-(t-x)^2} = -\frac{d}{dx} e^{-(t-x)^2}$.

При целом n ряд имеет ограниченное число членов, а его сумма равна полиному Эрмита.

Ортогональность. Из рекуррентных соотношений (13.2) и (13.3) получается дифференциальное уравнение второго порядка

$$H_n''(x) - 2xH_n' + 2nH_n(x) = 0, \qquad (13.10)$$

которое, очевидно, не является самосопряженным. Для изучения свойств ортогональности полиномов Эрмита удобно ввести набор (ненормированных) функций φ_n:

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x). \qquad (13.11)$$

Подставляя (13.11) в уравнение (13.10), получаем дифференциальное уравнение для функций $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\,\varphi_n(x) = 0, \qquad (13.12)$$

которое описывает простой гармонический осциллятор в квантовой механике. Оно служит наиболее важным примером практического использования полиномов Эрмита. Уравнение (13.12) — самосопряженное, а его решения $\varphi_n(x)$ ортогональны в интервале $-\infty < x < \infty$.

Нам осталось еще нормировать эти функции. Как и в разд. 12.3, возведем уравнение (13.1) в квадрат, а результат умножим на e^{-x^2}. В результате имеем

$$e^{-x^2} e^{-s^2+2sx} e^{-t^2+2tx} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x) \frac{s^m t^n}{m!n!}. \qquad (13.13)$$

После интегрирования по x от $-\infty$ до $+\infty$ перекрестные члены в двойной сумме обратятся в нуль в силу ортогональности *

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{n!n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-s^2+2sx-t^2+2tx}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s-t)^2} e^{2st}\, dx = \pi^{1/2} e^{2st} = \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (st)^n}{n!}. \qquad (13.14)$$

---

* Если потребуется, можно сохранить и перекрестные члены ($m \neq n$). Затем из равенства коэффициентов при $s^\alpha t^\beta$ доказывается ортогональность.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях st, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n \pi^{1/2} n!. \qquad (13.15)$$

Как отмечалось, полиномы Эрмита используются в квантовомеханическом анализе простого гармонического осцил-

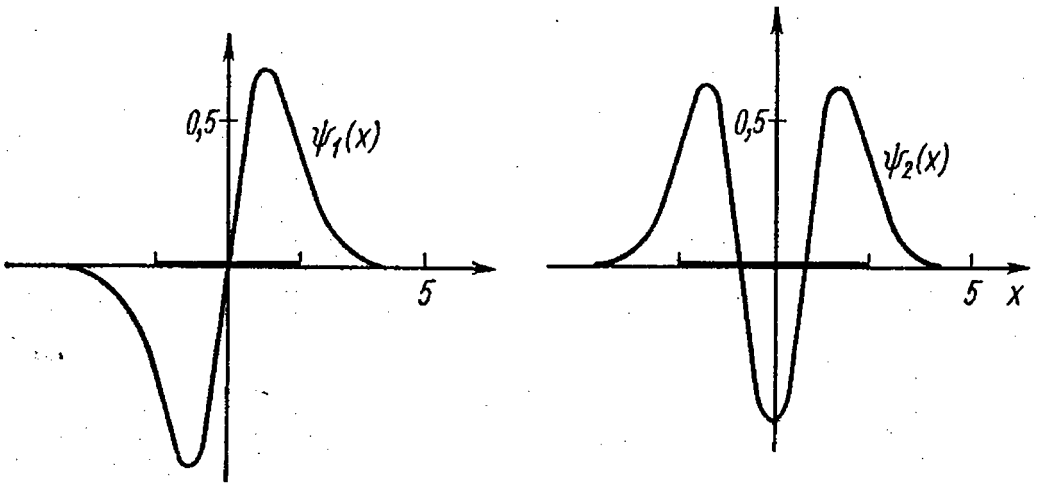


Рис. 13.2. Волновые функции осциллятора.

лятора. Для потенциальной энергии $V = Kz^2/2$ (сила $F = -\nabla V = -Kz$) уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(z) + \frac{1}{2}Kz^2\Psi(z) = E\Psi(z), \qquad (13.16)$$

где E — полная энергия осциллирующей частицы с массой m. Введем обозначения

$$x = \alpha z,\ \alpha^4 = \frac{mK}{\hbar^2},\ \lambda\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{K}\right)^{1/2} = \frac{2E}{\hbar\omega}, \qquad (13.17)$$

в которых ω — угловая частота соответствующего классического осциллятора. Тогда с учетом того, что $\Psi(z) = \Psi(x/\alpha) = \psi(x)$, волновое уравнение перепишется в более компактной форме:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\lambda - x^2)\psi(x) = 0, \qquad (13.18)$$

которая совпадает с уравнением (13.12), если положить $\lambda = 2n + 1$. Следовательно, нормированные функции имеют вид:

$$\psi_n(x) = 2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x). \qquad (13.19)$$

На рис. 13.2 изображены функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$. Граничные условия квантовой системы требуют, чтобы n

было целым:

$$\lim_{z\to\pm\infty} \Psi(z) = 0.$$

В частном случае, когда $n \to \nu$ и не равно целому числу, решение уравнения (13.10), если его представить рядом, показывает, что при x больших $H_n(x)$ ведет себя, как $x^\nu e^{x^2}$, поэтому функции $\psi_\nu(x)$ и $\Psi_\nu(z)$ возрастают на бесконечности, а саму функцию $\Psi_\nu(z)$ не удастся нормировать. С учетом ограничения на n энергия E окажется равной

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{13.20}$$

Поскольку n пробегает целые значения, энергия квантована, а ее минимальное значение равно

$$E_{\text{мин}} = \frac{1}{2}\hbar\omega, \tag{13.21}$$

что является следствием принципа неопределенности.

В различных задачах квантовой механики, особенно в молекулярной спектроскопии иногда необходимо рассматривать интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx$. Потенциал осциллятора широко применяется в расчетах структуры ядра (оболочечная модель ядра).

Уравнение (13.10) имеет второе независимое решение. Это — функция Эрмита второго рода, которая имеет форму бесконечного ряда (см. разд. 8.4 и 8.5) и не представляет физического интереса.

Упражнения *

1. С помощью производящей функции показать, что $H_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n-2s)!\, s!} (2x)^{n-2s}$.

2. Используя интегральную теорему Коши, получить интегральное представление $H_n(x)$, основанное на определении (13.1), если контур интегрирования содержит точку $z = -x$.

Ответ: $H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} e^{x^2} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z+x)^{n+1}}\, dz$.

---

* Большое количество примеров рассмотрено в книге Wilson E. et al. Molecular Vibrations. N.Y., McGraw-Hill, 1955.

Прямой подстановкой убедиться, что этот результат удовлетворяет уравнению Эрмита.

3. Вероятность перехода между двумя состояниями осциллятора, которые характеризуются квантовыми числами m и n, определяется интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx$. Доказать, что этот интеграл равен $\pi^{1/2}2^{n-1}n!\delta_{m,n-1}+\pi^{1/2}2^n(n+1)!\,\delta_{m,n+1}$, т. е. такой переход возможен только между соседними энергетическими уровнями $m=n\pm 1$. *Указание.* Возвести производящую функцию в квадрат, воспользовавшись при этом двумя различными парами переменных (x, s) и (x, t).

4. Показать, что интеграл, встречающийся при подсчете среднего квадрата смещения квантового осциллятора,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x)\,dx=\pi^{1/2}2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Указание. Воспользоваться соотношением (13.2) и свойством ортогональности.

5. Показать, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2} {}_n(x)\,dx=0$ для m целого, $0\leqslant m\leqslant n-1$.

6. Проверить равенство, связывающее полиномы Эрмита с полиномами Лежандра:

$$P_n(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}n!}\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt)\,dt.$$

Указание. Воспользоваться представлением полинома $H_n(x)$ рядом и почленно проинтегрировать.

7. С помощью производящей функции получить рекуррентные соотношения (13.2) и (13.3).

13.2. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Дифференциальное уравнение Лагерра. Полиномы Лагерра. Рассмотрим дифференциальное уравнение Лагерра

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+ny(x)=0. \qquad (13.22)$$

Попытаемся представить y, или, вернее, y_n, поскольку y зависит от n, контурным интегралом

$$y_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}\,dz. \qquad (13.23)$$

Контур интегрирования (рис. 13.3) охватывает начало координат, однако точка $z=1$ остается вне контура. Учитывая результаты разд. 6.3, имеем

$$y_n'(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^2z^n}\,dz,\quad y_n''(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^3z^{n-1}}\,dz. \tag{13.24}$$

Подставляя эти производные в левую часть уравнения (13.22), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{x}{(1-z)^3z^{n-1}}-\frac{1-x}{(1-z)^2z^n}+\frac{n}{(1-z)\,z^{n+1}}\right]e^{-xz/(1-z)}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)\,z^n}\right]dz. \tag{13.25}$$

Если проинтегрировать полный дифференциал по выбранному контуру так, что конечное значение будет равно начальному, интеграл обратится в нуль и тем самым будет доказано, что функция $y_n(x)$ в форме (13.23) — решение уравнения Лагерра.

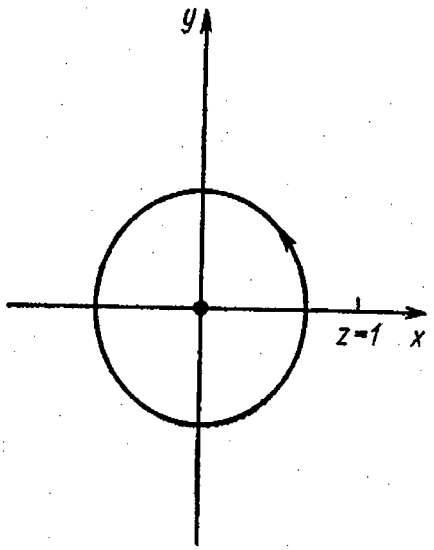


Рис. 13.3. Контур интегрирования для полиномов Лагерра.

Таким образом, полиномы Лагерра $L_n(x)$ обычно определяют с помощью соотношения

$$L_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)\,z^{n+1}}\,dz. \tag{13.26}$$

Это в точности соответствует тому, что мы должны получить, исходя из ряда

$$g(x,z)=\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\,z^n,\quad |z|<1, \tag{13.27}$$

если умножим его на z^{-n-1} и проинтегрируем по контуру вокруг начала координат. Как и при исчислении вычетов (см. разд. 7.3), в данном случае сохранится только член z^{-1}, поэтому функцию $g(x, z)$ можно отождествить с производящей функцией для полиномов Лагерра.

Введем преобразования

$$\frac{xz}{1-z}=s-x, \quad z=\frac{s-x}{s}, \tag{13.28}$$

тогда

$$L_n(x)=\frac{e^x}{2\pi i}\oint\frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}}\,ds, \tag{13.29}$$

где новый контур интегрирования из комплексной плоскости s содержит внутри себя точку $s=x$. На основании

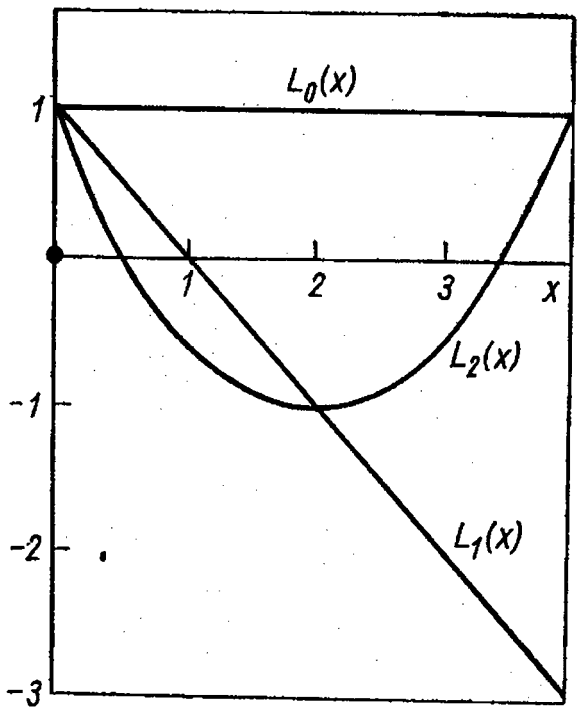


Рис. 13.4. Полиномы Лагерра.

интегральной теоремы Коши (для производных)

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad n-\text{целое}. \tag{13.30}$$

Мы пришли к формуле Родригеса для полиномов Лагерра. Эти представления функции $L_n(x)$ позволяют выразить ее в виде ряда (для целых n)

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n n!\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!\,m!\,m!}x^m=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{n!\,x^{n-s}}{(n-s)!\,(n-s)!\,s!}. \tag{13.31}$$

Приведем несколько полиномов Лагерра (на рис. 13.4 показан вид функций $L_0(x)$, $L_1(x)$ и $L_2(x)$), вычисленных

с помощью этого ряда:

$$\left.\begin{aligned} &L_0(x)=1,\ L_1(x)=-x+1,\ 2!L_2(x)=x^2-4x+2,\\ &3!L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6,\ 4!L_4(x)=\\ &\quad=x^4-16x^3+72x^2-96x+24,\\ &5!L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120,\\ &6!L_6(x)=x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-\\ &\quad-4320x+720. \end{aligned}\right\} \quad (13.32)$$

Дифференцируя производящую функцию (13.27) по x и z, получаем рекуррентные соотношения

$$(n+1)\,L_{n+1}(x)=(2n+1-x)\,L_n(x)-nL_{n-1}(x), \quad (13.33)$$

$$xL_n'(x)=nL_n(x)-nL_{n-1}(x). \quad (13.34)$$

С помощью той же функции (13.27) находится значение полиномов для частного случая $x=0$

$$L_n(0)=1. \quad (13.35)$$

Из формы производящей функции или вида дифференциального уравнения Лагерра следует, что полиномы Лагерра не имеют определенной четности; это же ясно видно и из уравнений (13.32).

Дифференциальное уравнение Лагерра не относится к типу самосопряженных, поэтому полиномы Лагерра $L_n(x)$ сами по себе не образуют ортогонального набора функций. Однако связанные с ними функции * $\varphi_n(x)=$ $=e^{-x/2}L_n(x)$ ортонормированы в интервале $0\leqslant x<\infty$, т. е

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)\,L_n(x)\,dx=\delta_{m,n}. \quad (13.36)$$

Новые ортонормированные функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x\varphi_n''(x)+\varphi_n'(x)+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)\varphi_n(x)=0, \quad (13.37)$$

которое, очевидно, записано в форме Штурма — Лиувилля, т. е. является самосопряженным. Заметим, что именно

* Весовой множитель $e^{-x/2}$ определяется с помощью методов, рассмотренных в разд. 9.1.

граничные условия теории Штурма — Лиувилля фиксируют интервал изменения переменной $0 \leqslant x < \infty$, внутри которого функции φ_n ортогональны. Условие (13.36) проверяется подстановкой в него производящей функции (13.27).

Присоединенные полиномы Лагерра. Во многих задачах, особенно в квантовой теории, встречаются присоединенные полиномы Лагерра, определяемые как *

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[L_{n+k}(x)]. \tag{13.38}$$

Запись полиномов Лагерра в форме ряда дает

$$L_0^k(x) = 1, \quad L_1^k(x) = -x + k + 1, \tag{13.39}$$

$$L_2^k(x) = \frac{x^2}{2} - (k+2)\,x + \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \tag{13.40}$$

И вообще,

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!\,(k+m)!m!} x^m \quad (k > -1). \tag{13.41}$$

Продифференцировав производящую функцию для полиномов Лагерра k раз, можно получить соответствующую производящую функцию для присоединенных полиномов. Изменив индекс у L_{n+k}, запишем

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)\, z^n, \quad |z| < 1, \tag{13.42}$$

откуда

$$L_n^k(0) = (n+k)!/n!k! \tag{13.43}$$

Рекуррентные соотношения, которым подчиняются присоединенные полиномы Лагерра, легко получаются либо непосредственно с помощью производящей функции, либо дифференцированием рекуррентных соотношений для полиномов Лагерра. Приведем два из них:

$$(n+1)\,L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)\,L_n^k(x) - (n+k)\,L_{n-1}^k(x), \tag{13.44}$$

$$xL_n^{k\prime}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)\,L_{n-1}^k(x). \tag{13.45}$$

* Некоторые авторы пользуются обозначением $\mathscr{L}_{n+k}^k(x) = (d^k/dx^k)\,[L_{n+k}(x)]$. Отсюда $L_n^k(x) = (-1)^k\,\mathscr{L}_{n+k}^k(x)$.

Эти формулы или k-кратное дифференцирование уравнения Лагерра позволяют получить уравнение для присоединенных полиномов Лагерра

$$L_n^{k''}(x)+(k+1-x)\,L_n^{k'}(x)+nL_n^k(x)=0. \quad (13.46)$$

Присоединенные полиномы Лагерра, выраженные через формулу Родригеса, записываются так:

$$L_n^k(x)=\frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k}). \quad (13.47)$$

Читатель может заметить, что все приведенные здесь формулы для $L_n^k(x)$ при $k=0$ сводятся к соответствующим выражениям для $L_n(x)$.

Присоединенное уравнение Лагерра (13.46) не является самосопряженным, однако умножая его на весовую функцию (см. разд. 9.1) $e^{-x}x^k$, мы приведем его к самосопряженному виду:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)\,L_m^k(x)\,dx=\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{m,n}. \quad (13.48)$$

Функция $\psi_n^k(x)=e^{-x/2}x^{k/2}L_n^k(x)$ удовлетворяет самосопряженному уравнению

$$x\psi_n^{k''}(x)+\psi_n^{k'}(x)+\left(-\frac{x}{4}+\frac{2n+k+1}{2}-\frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k(x)=0. \quad (13.49)$$

Наряду с указанной находит применение еще одна функция *:

$$\Phi_n^k(x)=e^{-x/2}x^{(k+1)/2}L_k^n(x). \quad (13.50)$$

Подстановка ее в присоединенное уравнение Лежандра приводит к дифференциальному уравнению для этой функции

$$\Phi_n^{k''}(x)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2n+k+1}{2x}-\frac{k^2-1}{4x^2}\right)\Phi_n^k(x)=0. \quad (13.51)$$

Соответствующее условие нормировки запишется как

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}L_n^k(x)\,L_n^k(x)\,dx=\frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1). \quad (13.52)$$

* Она соответствует видоизмененной функции ψ из уравнения (13.49) (см. упр. 4 к разд. 8.5).

Читатель может проверить, что функции $\Phi_n^k(x)$ *не образуют* ортогонального набора (без множителя x^{-1} в качестве весовой функции), так как множитель x^{-1} записывается в виде $(2n + k + 1)/2x$.

Одним из наиболее важных приложений полиномов Лагерра служит решение волнового уравнения Шредингера для атома водорода:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{Ze^2}{r}\psi = E\psi. \qquad (13.53)$$

Здесь $Z=1$ для водорода, $Z=2$ для однократно ионизованного атома гелия и т. д. Разделив переменные, убедимся, что зависимость ψ от углов выражается функцией $Y_L^M(\theta, \varphi)$. Радиальная часть $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{Ze^2}{r}R + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{L(L+1)}{r^2}R = ER. \qquad (13.54)$$

Введем обозначения

$$\rho = \alpha r,\ \alpha^2 = -\frac{8mE}{\hbar^2}\ (E<0),\ \lambda = \frac{2mZe^2}{\alpha\hbar^2}, \qquad (13.55)$$

после чего уравнение (13.54) приобретает вид

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{d\Phi(\rho)}{d\rho}\right) + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}\right)\Phi(\rho) = 0, \qquad (13.56)$$

где $\Phi(\rho) = R(\rho/\alpha)$. Сравнение с уравнением (13.51) для функции $\Phi_n^k(x)$ показывает, что уравнение (13.56) имеет решение

$$\rho\Phi(\rho) = e^{-\rho/2}\rho^{L+1}L_{\lambda-L-1}^{2L+1}(\rho), \qquad (13.57)$$

в котором k заменено на $2L+1$, а n на $n+L$.

Можно наложить ограничение на параметр λ и потребовать, чтобы он пробегал целый ряд значений n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *. Это необходимо сделать, так как функции Лагерра при нецелом n будут расходиться как $\rho^n e^\rho$, что противоречит физическому смыслу рассматриваемой задачи, для которой $\lim_{r\to\infty} R(r) = 0$. Введенное ограничение на параметр λ

* Это принятое обозначение для λ; оно не имеет ничего общего с индексом n у функции $\Phi_n^k(x)$.

(фактически оно возникло из граничного условия) приводит к квантованию энергии

$$E_n = -\frac{Z^2 me^4}{2n^2\hbar^2}. \tag{13.58}$$

Знак минус возник здесь потому, что мы имеем дело со связанными состояниями ($E = 0$ соответствует такому состоянию, когда электрон удален на бесконечность). С учетом результата для E_n величина

$$\rho = \frac{2Z}{na_0} r, \tag{13.59}$$

где $a_0 = \hbar^2/me^2$ — радиус Бора. Окончательно нормированная волновая функция атома водорода имеет вид

$$\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi) = \left[\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!}\right]^{1/2} e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L \times \\ \times L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r)\, Y_L^M(\theta, \varphi). \tag{13.60}$$

Упражнения

1. Показать с помощью формулы Лейбница, что разложение функции $L_n(x)$ в ряд (13.32) следует из формулы Родригеса (13.31).

2. Из записи волновой функции в форме (13.60) следует, что нормированная радиальная часть волновой функции атома водорода имеет вид

$$R_{nL}(r) = \left[\alpha^3 \frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!}\right]^{1/2} e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r),$$

где $\alpha = 2Z/na_0 = 2Zme^2/n\hbar^2$.

Определить

$$\bar{r} = \int_0^\infty r R_{nL}(\alpha r) R_{nL}(\alpha r) r^2 dr, \quad \overline{r^{-1}} = \int_0^\infty r^{-1} R_{nL}(\alpha r) R_{nL}(\alpha r) r^2 dr,$$

где $\bar{r}$ — среднее расстояние между электроном и ядром, а $\overline{r^{-1}}$ — среднее значение обратной величины.

Ответ: $\bar{r} = \frac{a_0}{2}[3n^2 - L(L+1)]$; $\overline{r^{-1}} = \frac{1}{n^2 a_0}$.

3. С помощью производящей функции вывести формулу Родригеса

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+k}).$$

4. Вычислить обобщенный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+a}L_n^k(x)\,L_n^k(x)\,dx=\frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1)^a$$

и показать, что необходимо требовать, чтобы $a>-k-1$.

Указание. Отметим, что для целого a справедливо

$$xL_n^k=(2n+k+1)\,L_n^k-(n+k)\,L_{n-1}^k-(n-1)\,L_{n+1}^k.$$

5. Переписать волновое уравнение Шредингера для атома водорода в параболических координатах. Разделить переменные и показать, что ненормированные решения имеют вид

$$e^{iM\varphi},\quad e^{-\alpha\xi/2}\xi^{M/2}L_{n_1}^M(\alpha\xi),\quad e^{-\alpha\eta/2}\eta^{M/2}L_{n_2}^M(\alpha\eta)\qquad (M\geqslant 0),$$

где n_1 и n_2 — неотрицательные целые числа, а $\alpha=\dfrac{Z}{a_0(n_1+n_2+M+1)}$

Убедиться в правильном написании нормированной волновой функции

$$\psi_{n_1n_2M}(\xi,\eta,\varphi)=\left[\frac{\alpha^3 n_1!n_2!}{\pi(n_1+M)!\,(n_2+M)!\,(n_1+n_2+M+1)}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\alpha^M(\xi\eta)^{M/2}e^{-\alpha(\xi+\eta)/2}L_{n_1}^M(\alpha\xi)\,L_{n_2}^M(\alpha\eta)\,e^{iM\varphi}.$$

Выбор системы координат не может влиять на поведение физической системы, поэтому должно быть соответствие между $\psi(r,\theta,\varphi)$ в сферических и $\psi(\xi,\eta,\varphi)$ в параболических координатах. Показать, что

$$\psi_{nLM}(r,\theta,\varphi)=\psi_{100}(r,\theta,\varphi)=\psi_{000}(\xi,\eta,\varphi)=\psi_{n_1n_2M}(\xi,\eta,\varphi),$$

$$\psi_{200}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{010}(\xi,\eta,\varphi)+\psi_{100}(\xi,\eta,\varphi)],$$

$$\psi_{210}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{010}(\xi,\eta,\varphi)-\psi_{100}(\xi,\eta,\varphi)].$$

Указание. Между квантовыми числами существует общая зависимость

$$n=n_1+n_2+M+1,\quad M=M.$$

Слева в уравнениях квантовые числа в сферических координатах, а справа в параболических. Квантовое число n требуется для определения радиальной экспоненциальной зависимости, а M — для азимутальной.

6. Волновое уравнение трехмерного гармонического осциллятора записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+\frac{1}{2}kr^2\psi=E\psi.$$

Показать, что радиальная часть ψ может быть записана через полиномы Лагерра с аргументом $\sqrt{m/k}\,r^2$.

7. Используя точную форму записи (13.31), показать, что $L_n'(0) = -n$, $L_n''(0) = n(n-1)/2$. Проверить это с помощью других методов.

8. Радиальная часть решения уравнения Шредингера для атома водорода в связанных состояниях записывается с помощью полиномов Лагерра $L_\lambda = \frac{e^\rho}{\lambda!} \cdot \frac{d^\lambda}{d\rho^\lambda}(e^{-\rho}\rho^\lambda)$, где $\lambda = n + l$ — целое положительное

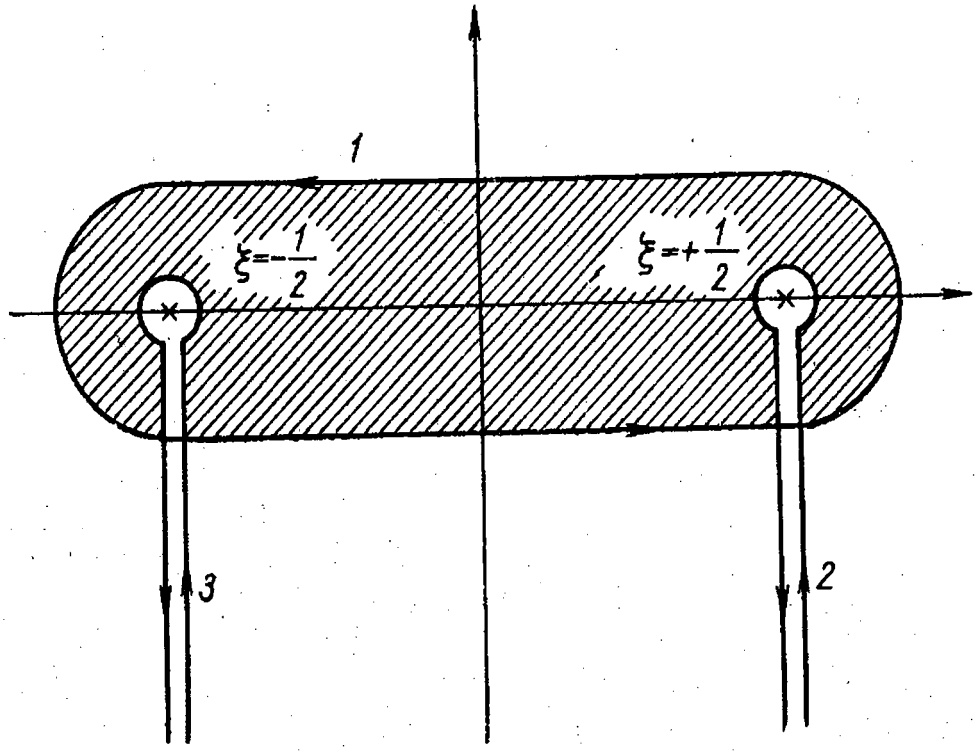


Рис. 13.5. Контуры интегрирования *1*, *2* и *3* в ξ-плоскости.

число, а $\rho = 2\sqrt{-2E}\, r = 2Zr/n$ с $E < 0$ для связанных состояний. Для свободных состояний $E > 0$ и $\rho \to i\rho$. Изменение знака энергии означает также, что $n \to -iZ/\sqrt{2E} = -in'$, где n' — вещественная, а n — чисто мнимая величина. Показать, что дифференциальное представление L_λ можно распространить на все λ (вещественные или комплексные), используя интегральную формулу Коши, в результате чего получится

$$L_\lambda(\rho) = \frac{2}{2\pi i} e^\rho \int \frac{e^{-s} s^\lambda}{(s-\rho)^{\lambda+1}} dx = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-t} (t+\rho)^\lambda t^{-\lambda-1} dt.$$

Контур интегрирования в s-плоскости охватывает точку $s = \rho$, а в t-плоскости — начало координат.

9. Радиальная собственная функция в задаче об атоме водорода задается через присоединенные полиномы Лагерра

$$R = c_1 e^{-\rho/2} \rho^L L^\mu_{\lambda-\mu}(\rho) = c_1 e^{-\rho/2} \rho^L \frac{d^\mu}{d\rho^\mu} L_\lambda(\rho),$$

в которых $\lambda = n + L$, $\mu = 2L + 1$. Здесь c_1 — постоянная, куда входят энергия и момент количества движения электрона.

Имея в виду результат упр. 8, показать, что

$$R=c_2(-i\rho)^L e^{-\rho/2}\frac{1}{2\pi i}\int e^{-t}(t+\rho)^{n-L+1}t^{n-L-1}dt=$$

$$=c^2\frac{(i\rho)^{-L-1}}{2\pi}\int e^{-\rho\xi}\left(\xi+\frac{1}{2}\right)^{-in'-L+1}\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^{in'-L-1}d\xi.$$

Показать, что R вещественно, если ρ и n — чисто мнимые величины.

Существует три контура для представления радиальной волновой функции контурным интегралом в комплексной ξ-плоскости (рис. 13.6). Показать, что контуры *1*, *2* и *3* служат для описания соответственно стационарного состояния, асимптотической падающей волны и асимптотической расходящейся волны.

13.3. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

Производящая функция. В гл. 12 упоминалась производящая функция ультрасферических многочленов, или полиномов Гегенбауэра *

$$\frac{2^\beta}{(1-2xt+t^2)^{\beta+1/2}}=\frac{\pi^{1/2}}{\cdot\left(\beta-\frac{1}{2}\right)!}\sum_{n=0}^{\infty}T_n^\beta(x)t^n,\quad |t|<1,\quad (13.61)$$

которые при $\beta=0$ переходят в полиномы Лежандра. В этой главе мы рассмотрим две системы полиномов, возникающие при $\beta=\pm 1/2$, они называются полиномами Чебышева.

Полиномы Чебышева второго рода. Пусть $\beta=1/2$, тогда уравнение (13.61) переходит в

$$\frac{2^{1/2}}{(1-2xt+t^2)}=\pi^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}T_n^{1/2}(x)t^n.\quad (13.62)$$

Для дальнейшего удобно изменить обозначение и положить

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}T_n^{1/2}(x)\equiv U_n(x).\quad (13.63)$$

---

* Полиномы Гегенбауэра обозначаются $C_n^{(\alpha)}(x)$:

$$C_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\pi^{1/2}}{2^{\alpha-1/2}(\alpha-1)!}T_n^{\alpha-1/2}(x),\quad C_n^{(1)}(x)=U_n(x).$$

Это дает

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, t^n. \tag{13.64}$$

Функции $U_n(x)$, входящие в разложение $(1-2xt+t^2)^{-1}$, называются полиномами Чебышева второго рода.

Полиномы Чебышева первого рода. При $\beta = -1/2$ возникает затруднение: в левой части уравнения (13.61) исчезает зависимость от переменных t и x. Чтобы преодолеть эту трудность, продифференцируем (13.61) по t, а затем положим $\beta = -1/2$, тогда

$$\frac{x-t}{1-2xt+t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} nT_n^{-1/2}(x)\, t^{n-1}. \tag{13.65}$$

Умножая уравнение (13.65) на $2t$ и прибавляя единицу получаем

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} 2nT_n^{-1/2}(x)\, t^n. \tag{13.66}$$

Для $n > 0$ определим $T_n(x)$ так:

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, nT_n^{-1/2}(x), \tag{13.67}$$

тогда

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\, t^n. \tag{13.68}$$

При $n = 0$ для сохранения рекуррентной зависимости (13.70) положим $T_0(x) = 1$. Функции $T_n(x)$ называют *полиномами Чебышева первого рода*. (Обозначение этих функций различно.)

В полиномах Чебышева первого рода сочетаются характерные признаки рядов Фурье и ортогональных полиномов. Эти полиномы широко применяются в численных расчетах. Например, приближение наименьших квадратов дает минимальную среднеквадратичную ошибку. Вычисления с помощью полиномов Чебышева дают более высокое значение среднеквадратичной ошибки, зато снижают значение максимальной ошибки.

Из производящих функций (13.64) и (13.68) вытекают рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) &= 0, \\ U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (13.69)$$

Пользуясь производящими функциями для нескольких первых значений n и этими рекуррентными зависимостями, которые позволяют получить полиномы более высокого порядка, найдем явное выражение для первых полиномов Чебышева первого и второго рода:

$$\left.\begin{aligned} &T_0 = 1,\ T_1 = x,\ T_2 = 2x^2 - 1, \\ &T_3 = 4x^3 - 3x,\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ &T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x,\ T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1; \end{aligned}\right\} \quad (13.70)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &U_0 = 1,\ U_1 = 2x,\ U_2 = 4x^2 - 1, \\ &U_3 = 8x^3 - 4x,\ U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ &U_5 = 32x^5 - 32x^3 + 6x,\ U_6 = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1. \end{aligned}\right\} \quad (13.71)$$

Поведение полиномов Чебышева первого и второго рода видно из рис. 13.6.

Некоторые частные значения полиномов Чебышева получаются непосредственно из производящей функции:

$$T_n(1) = 1,\ T_n(-1) = (-1)^n,\ T_{2n}(0) = (-1)^n,$$
$$T_{2n+1}(0) = 0; \quad (13.72)$$

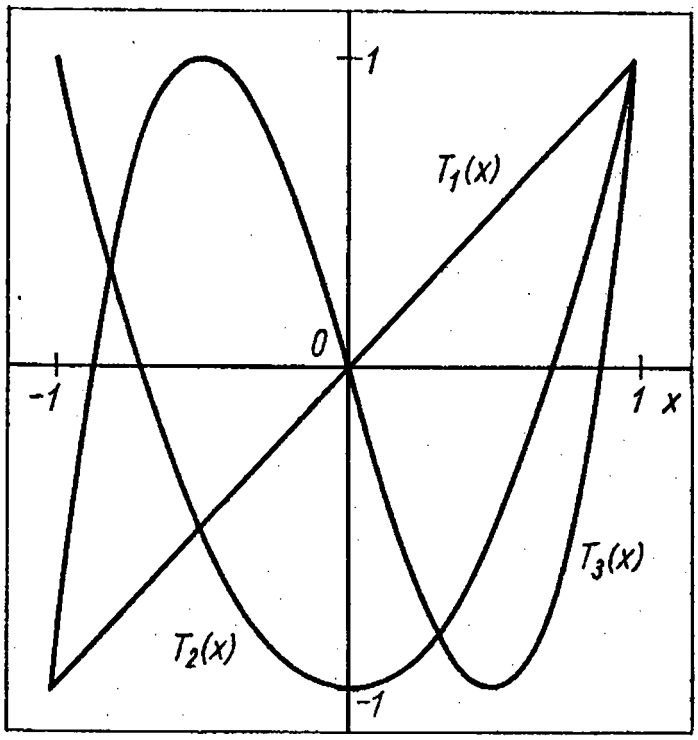
$$U_n(1) = n + 1,\ U_n(-1) = (-1)^n (n+1),$$
$$U_{2n}(0) = (-1)^n,\ U_{2n+1}(0) = 0. \quad (13.73)$$

Четность полиномов Чебышева T_n и U_n характеризуется соотношениями

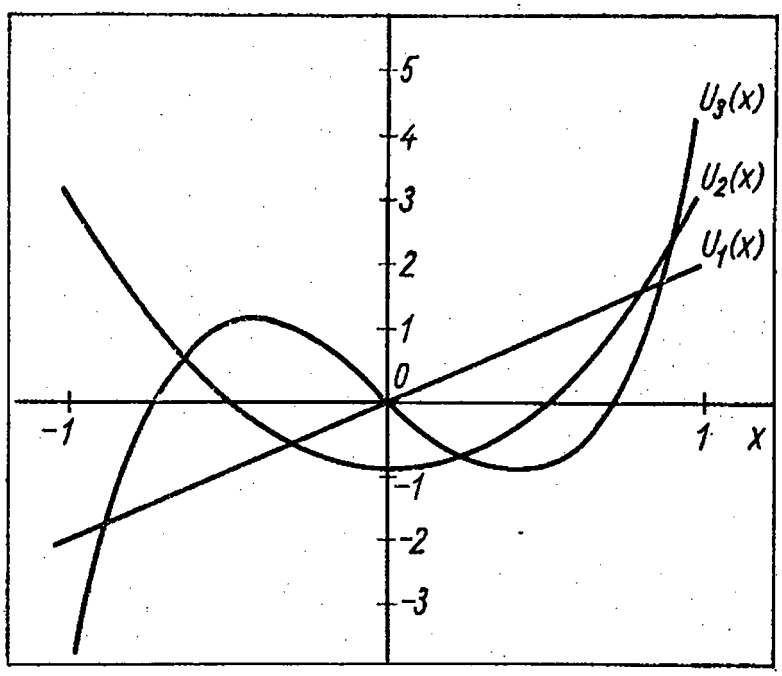
$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x),\ U_n(x) = (-1)^n U_n(-1). \quad (13.74)$$

Для этих полиномов существуют представления в виде формул Родригеса

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2} (1-x^2)^{1/2}}{2^n \left(n - \frac{1}{2}\right)!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}] \quad (13.75)$$



а



б

Рис. 13.6. Полиномы Чебышева первого (*а*) и второго (*б*) рода $T_n(x)$ и $U_n(x)$.

и

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n(n+1)\pi^{1/2}}{2^{n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,(1-x^2)^{1/2}}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+1/2}]. \quad (13.76)$$

Рекуррентные соотношения. С помощью производящих функций для $T_n(x)$ и $U_n(x)$ можно вывести различные рекуррентные соотношения, содержащие производные. К числу наиболее распространенных относятся

$$(1-x^2)T_n'(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x), \quad (13.77)$$

$$(1-x^2)U_n'(x)=-nxU_n(x)+(n+1)U_{n-1}(x). \quad (13.78)$$

Комбинируя уравнения (13.69), (13.77) и (13.78), убеждаемся, что полиномы Чебышева первого и второго рода $T_n(x)$ и $U(n)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0, \quad (13.79)$$

$$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0. \quad (13.80)$$

Уравнение Гегенбауэра

$$(1-x^2)y''-2(1+\beta)xy'+n(n+2\beta+1)y=0 \quad (13.81)$$

является обобщением этих уравнений и сводится к (13.79), если $\beta=-1/2$, и к (13.80), если $\beta=+1/2$; если $\beta=0$, то получается уравнение Лежандра.

Иногда вводят новую функцию $V_n(x)$, записав ее через полиномы Чебышева второго рода:

$$V_{n+1}(x)=\sqrt{1-x^2}\,U_n(x). \quad (13.82)$$

Заметим, что индекс повысился здесь с n до $n+1$. Можно показать, что $V_n(x)$ удовлетворяет уравнению (13.79).

Производящие функции или дифференциальные уравнения могут служить основой для получения рядов, которыми представимы полиномы $T_n(x)$ и $U_n(x)$:

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}=$$

$$=x^n-C_n^2x^{n-2}(1-x^2)+C_n^4x^{n-4}(1-x^2)^2-\ldots, \quad (13.83)$$

$$U_n(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{(n-m)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}. \quad (13.84)$$

Из уравнения (13.82) имеем

$$V_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,[C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3}(1-x^2) + C_n^5 x^{n-5}(1-x^2)^2 - \ldots]. \tag{13.85}$$

Комбинируя уравнения (13.83) и (13.85), получаем

$$T_n(x) + iV_n(x) = [x + i(1-x^2)^{1/2}]^n, \quad |x| \leqslant 1. \tag{13.86}$$

Ортогональность. После записи уравнения (13.79) в самосопряженной форме (см. разд. 9.1), возникает весовая функция $w = (1-x^2)^{-1/2}$. Для уравнения (13.80) соответствующая весовая функция равна $(1-x^2)^{1/2}$. Окончательный вид интегралов, характеризующих свойства ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0; \end{cases} \tag{13.87}$$

$$\int_{-1}^{1} V_m(x)\,V_n(x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0; \end{cases} \tag{13.88}$$

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)\,U_n(x)\,(1-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{m,n}. \tag{13.89}$$

Величину $\pi/2$ можно получить прямо из производящей функции (по аналогии с разд. 12.3). Отметим изменение величины интеграла для случая $m = n = 0$.

Упражнения

1. Воспользовавшись зависимостью

$$T_n(x) + iV_n(x) = [x + i(1-x^2)^{1/2}]^n$$

и обозначив $x = \cos\theta$, убедиться, что

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n \arccos x), \quad V_n(x) = \sin n\theta = \sin(n \arccos x),$$

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$$

Первый результат показывает, что разложение четной функции в ряд по полиномам $T_n(x)$ эквивалентно представлению Фурье через косинусы (см. разд. 14.1).

2. Получить формулы

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x) \text{ и } T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x)=2T_m(x)\,T_n(x)$$

из «соответствующих» тождеств для косинуса.

3. Имея в виду, что $x=\cos\theta$, а $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$, разложить функцию $x^k=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^k$ и показать, что

$$x^k=\frac{1}{2^{k-1}}[T_k(x)+C_k^1T_{k-2}(x)+C_k^2T_{k-4}(x)+\ldots];$$

ряд в квадратных скобках обрывается на $C_k^mT_1(x)$ для $k=2m+1$ или $C_k^mT_0/2$ для $k=2m$.

4. Дано

$$(1-x^2)\,U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)\,U_n(x)=0.$$

Показать, что функция $V_n(x)$ подчиняется уравнению Чебышева

$$(1-x^2)\,V_n''(x)-xV_n'(x)+n^2V_n(x)=0.$$

5. Показать, что определитель Вронского для полиномов $T_n(x)$ и $V_n(x)$ имеет вид

$$T_n(x)\,V_n'(x)-T_n'(x)\,V_n(x)=-n/(1-x^2)^{1/2}.$$

Этим подтверждается, что T_n и V_n $(n\neq 0)$ — независимые решения уравнения (13.79).

6. Производящую функцию Чебышева можно записать иначе:

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(x)\,t^n, \quad |t|<1.$$

Как полиномы $W_n(x)$ связаны с $T_n(x)$ и $U_n(x)$?

7. Доказать, что $V_n(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (13.69) для $T_n(x)$.

8. Проверить, что представленные рядами (13.83) и (13.84) функции $T_n(x)$ и $U_n(x)$ являются решениями соответствующих уравнений.

9. Несколько уравнений связывают между собой два типа полиномов Чебышева. Рассмотреть и доказать справедливость двух уравнений

$$T_n(x)=U_n(x)-xU_{n-1}(x), \quad (1-x^2)\,U_n(x)=2T_{n+1}(x)-T_{n+2}(x).$$

10. Показать, что

$$\cos xy = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)\,T_{2n}(y),$$

$$\sin xy = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)\,T_{2n+1}(y),$$

$$e^{xy} = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\,T_n(y).$$

Здесь $J_n(x)$ — обычная функция Бесселя, а $I_n(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

11. Проверить интегральные представления

$$T_n(z) = \frac{1}{4\pi i}\oint \frac{(1-t^2)\,dt}{(1-2zt+t^2)\,t^{n+1}},$$

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{(1-2zt+t^2)\,t^{n+1}}.$$

В обоих случаях контуры интегрирования охватывают начало координат в положительном направлении, причем нули функции $1-2zt+t^2$ лежат вне контуров.

12. Кривые, представленные на рис. 13.6, *а*, показывают, что $|T_n(x)| \leqslant 1$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Доказать это.

13. Используя тригонометрические формы V_n и T_n либо формулу Родригеса, доказать, что

$$\frac{dV_n(x)}{dx} = -n\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13.4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В гл. 8 мы ввели гипергеометрическое уравнение *

$$x(1-x)\,y''(x) + [c-(a+b+1)\,x]\,y'(x) - aby(x) = 0 \quad (13.90)$$

как каноническую форму линейного дифференциального уравнения второго порядка с регулярными особенностями на бесконечности и в точках $x = 0,\ 1$. Одно из решений этого уравнения имеет вид

$$y(x) = {}_2F_1(a, b, c; x) =$$

$$= 1 + \frac{ab}{c}\cdot\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots, \quad (13.91)$$

---

* Иногда это уравнение называют дифференциальным уравнением Гаусса, а его решения функциями Гаусса.

где $c \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$. Его называют гипергеометрической функцией или гипергеометрическим рядом. В часто используемых обозначениях Рохгаммера

$$(a_0) = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \tag{13.92}$$

гипергеометрическая функция записывается так:

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{x^n}{n!}. \tag{13.93}$$

Смысл индексов вполне очевиден: индексы 1 и 2 указывают на то, что в числителе символов Рохгаммера два, а в знаменателе — один. Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$ рассматривается в разд. 13.5.

Из представления (13.91) видно, что параметр c не может быть нулем или целым отрицательным числом. С другой стороны, если a или b равны нулю или целому отрицательному числу, гипергеометрический ряд обрывается и становится простым полиномом.

Многие элементарные функции могут быть выражены через гипергеометрическую *. Мы находим

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = x\,{}_2F_1(1, 1, 2; -x). \tag{13.94}$$

Для полных эллиптических интегралов K и E

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\theta)^{-1/2}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right), \tag{13.95}$$

$$E = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2\theta)^{1/2}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; k^2\right). \tag{13.96}$$

Гипергеометрическое уравнение как линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет второе независимое решение. Его обычная форма

$$y(x) = x^{1-c}\,{}_2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; x), \quad c \neq 2, 3, 4, \ldots \tag{13.97}$$

---

* Три параметра a, b и c позволяют получить представление почти любой функции.

Читатель может проверить, что если c — целое, то либо оба решения совпадают, либо одно из решений расходится. В таком случае нужно ожидать, что второе решение содержит логарифмический член.

Гипергеометрическое уравнение имеет и другие формы:

$$(1-z^2)\,y''\left(\frac{1-z}{2}\right)-$$

$$-[(a+b+1)\,z-(a+b+1-2c)]\,y'\left(\frac{1-z}{2}\right)-aby\left(\frac{1-z}{2}\right)=0, \tag{13.98}$$

$$(1-z^2)\,y''(z^2)-\left[(2a+2b+1)\,z+\frac{1-2c}{z}\right]y'(z^2)-$$

$$-4aby(z^2)=0. \tag{13.99}$$

Параметры a, b и c появляются в гипергеометрической функции совершенно аналогично параметру n в функциях Бесселя, Лежандра и других специальных функциях. По примеру этих функций можно ожидать, что указанные параметры войдут в рекуррентные соотношения, отличаясь на единицу. Гипергеометрические функции, в которых один параметр изменен на $+1$ или -1, обычно называют смежными функциями. Обобщая это понятие на случай, когда на единицу изменяется более чем один параметр, найдем 26 функций, смежных по отношению к ${}_2F_1(a, b, c; x)$. Если теперь одновременно брать по две из них, можно получить 325 громоздких уравнений, которым удовлетворяют смежные функции, например:

$$(a-b)\{c(a+b-1)+1-a^2-b^2+[(a-b)^2-1](1-x)\}\times$$

$$\times\,{}_2F_1(a, b, c; x)=(c-a)(a-b+1)\,b\,{}_2F_1(a-1, b+1, c; x)+$$

$$+(c-b)(a-b-1)\,a\,{}_2F_1(a+1, b-1, c; x). \tag{13.100}$$

Уравнение Гегенбауэра (13.61) есть частный случай уравнения (13.90), поэтому функции Гегенбауэра (а также полиномы Лежандра и Чебышева) можно выразить через гипергеометрические функции. Для функции Гегенбауэра имеем

$$T_n^{\beta}(x)=\frac{(n+2\beta)!}{2^{\beta}n!\,\beta!}\,{}_2F_1\left(-n,\ n+2\beta+1,\ 1+\beta;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{13.101}$$

Для обычных и присоединенных полиномов Лежандра

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n,\ n+1,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right), \qquad (13.102)$$

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!}\times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(m-n,\ m+n+1,\ m+1;\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (13.103)$$

или

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!\, n!}\, {}_2F_1\left(-n,\ n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\right), \qquad (13.104)$$

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!\, n!}\, x\, {}_2F_1\left(-n,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ x^2\right). \qquad (13.105)$$

Полиномы Чебышева через гипергеометрические функции записываются так:

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n,\ n,\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right), \qquad (13.106)$$

$$U_n(x) = (n+1)\, {}_2F_1\left(-n,\ n+2,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-x}{2}\right), \qquad (13.107)$$

$$V_n(x)\sqrt{1-x^2} = n\, {}_2F_1\left(-n+1,\ n+1,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-x}{2}\right). \qquad (13.108)$$

В приведенных формулах перед гипергеометрической функцией появились некоторые множители, они определяются прямым сравнением степенных рядов, т. е. сравнением коэффициентов при определенных степенях переменной или оценкой значения ряда в точках $x = 0$ или 1 и т. д.

Упражнения

1. Если c — целое, а a и b — нецелые, показать, что

$${}_2F_1(a,\ b,\ c;\ x) \text{ и } x^{1-c}\, {}_2F_1(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c;\ x)$$

дают только одно решение гипергеометрического уравнения. Что произойдет, если и a будет целым, скажем $a = -1$, а $c = -2$?

2. Найти рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и полиномов Чебышева первого и второго рода, которые соответствовали бы уравнению (13.100) для смежных гипергеометрических функций.

3. Доказать, что

$${}_2F_1(a,\ b,\ c;\ x) = (1-x)^{-a}\, {}_2F_1\left(a,\ c-b,\ c;\ \frac{-x}{1-x}\right).$$

4. Проверить равенство ${}_2F_1(-n, b, c; 1)=(c-b)_n/(c)_n$. *Указание.* Здесь представляется возможность применить соотношение для смежных функций

$$[2a-c+(b-a)x]F(a, b, c\ x)=$$
$$=a(1-x)F(a+1, b, c; x)-(c-a)F(a-1, b, c; x)$$

и математическую индукцию.

13.5. ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вырожденное гипергеометрическое уравнение *

$$xy''(x)+(c-x)y'(x)-ay(x)=0 \qquad (13.109)$$

может быть получено из гипергеометрического, если положить в нем, что две его особые точки слились, так что уравнение имеет регулярную особенность в точке $x=0$ и нерегулярную в точке $x=\infty$. Одно решение вырожденного гипергеометрического уравнения определяется функцией

$$y(x)={}_1F_1(a, c; x)=M(a, c; x)=$$
$$=1+\frac{a}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots, \qquad (13.110)$$

где $c\neq 0, -1, -2, \ldots$, или в символах Рохгаммера:

$$M(a, c; x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_n)}{(c)_n}\cdot\frac{x^n}{n!}. \qquad (13.111)$$

Очевидно, функция $M(a, c; x)$ превратится в полином, если параметр a станет равным нулю или целому отрицательному числу. Через вырожденную гипергеометрическую функцию выражаются многие функции, например функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\pi^{1/2}}xM\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right) \qquad (13.112)$$

и неполная гамма-функция

$$\gamma(a, x)=\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt=a^{-1}x^aM(a, a+1; -x), \quad \operatorname{Re}a>0. \qquad (13.113)$$

* Его часто называют уравнением Куммера, а его решения соответственно функциями Куммера.

Второе решение уравнения (13.109)

$$y(x) = x^{1-c}M(a+1-c, 2-c; x), \quad c \neq 2, 3, 4, \ldots \quad (13.114)$$

Стандартная форма второго решения уравнения (13.109) есть линейная комбинация функций (13.110) и (13.114)

$$U(a, c, x) = \frac{\pi}{\sin \pi c}\left[\frac{M(a, c; x)}{(a-c)!\,(c-1)!} - \frac{x^{1-c}M(a+1-c, 2-c; x)}{(a-1)!\,(1-c)!}\right]. \quad (13.115)$$

Другая форма вырожденного гипергеометрического уравнения, которая встретится в дальнейшем, получается заменой независимой переменной x на x^2:

$$y''(x^2) + \left[\frac{2c-1}{x} - 2x\right] y'(x^2) - 4ay(x^2) = 0. \quad (13.116)$$

Как и в случае гипергеометрических функций, существуют вырожденные функции, в которых параметры a и c отличаются на ± 1. Допуская одновременное изменение сразу двух параметров *, можно получить восемь различных вариантов. Разнообразные комбинации исходной функции и пары смежных дают в общей сложности 28 уравнений **.

Функции Бесселя вещественного и мнимого аргументов. Формула Куммера

$$M(a, c; x) = e^x M(c-a, c; -x) \quad (13.117)$$

дает возможность получить новые представления функций Бесселя вещественного и мнимого аргументов. Эта формула проверяется обычным сравнением рядов (см. упр. 2).

Из самого вида вырожденного гипергеометрического уравнения и характера особенностей можно ожидать, что вырожденные гипергеометрические функции будут входить в представления многих специальных функций математической физики. Для функций Бесселя:

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1; 2ix\right), \quad (13.118)$$

для функций Бесселя мнимого аргумента первого рода

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu+1; 2x\right). \quad (13.119)$$

* Слетер называет эти функции присоединенными.

** Рекуррентные соотношения, связывающие функции Бесселя, полиномы Эрмита и Лагерра, являются частными случаями этих уравнений.

Полиномы Эрмита. Полиномы Эрмита удовлетворяют соотношениям

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right), \quad (13.120)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} xM\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right), \quad (13.121)$$

которые следуют из уравнения (13.116).

Сравнивая дифференциальное уравнение Лагерра с уравнением для вырожденной гипергеометрической функции, получаем

$$L_n(x) = M(-n, 1; x). \quad (13.122)$$

Параметр c с учетом результата (13.35) для $x = 0$ положен равным единице. Для присоединенных полиномов Лагерра справедливо равенство

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x) = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} M(-n, m+1; x), \quad (13.123)$$

которое также проверяется сравнением со степенным рядом (13.41). Заметим, что в приведенной гипергеометрической форме параметры n и m обязательно должны быть целыми числами; если они нецелые, то функция $L_n^m(x)$ перестает быть полиномом.

Смешанные случаи. Иногда специальные функции удобно выразить через гипергеометрические, обычную и вырожденную. Если известно общее поведение последних, то специальные функции исследуются как частные случаи. Такой метод подходит для изучения асимптотики или вычисления нормирующих интегралов. Существенно также и то, что гипергеометрические функции помогают лучше понять различные соотношения, которыми связаны специальные функции. Например, анализ уравнений (13.120), (13.121) и (13.123) вскрывает связь между полиномами Лагерра и Эрмита (см. ниже упр. 4).

Очевидно, вырожденное гипергеометрическое уравнение (13.109) не является самосопряженным. В силу этого и по ряду других причин удобно ввести новую функцию

$$M_{k\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\mu+1/2} M\left(\mu - k + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; x\right). \quad (13.124)$$

Новая функция M_{kn} (функция Уиттекера) удовлетворяет самосопряженному уравнению

$$M''_{k\mu}(x)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{1/4-\mu^2}{x^2}\right)M_{k\mu}(x)=0. \quad (13.125)$$

Это уравнение имеет второе решение

$$W_{k\mu}(x)=e^{-x/2}x^{\mu+1/2}U\left(\mu-k+\frac{1}{2},\ 2\mu+1;\ x\right). \quad (13.126)$$

Упражнения

1. Показать, что определитель Вронского двух вырожденных гипергеометрических функций $M(a, c; x)$ и $U(a, c; x)$ записывается в виде

$$MU'-M'U=-\frac{(c-1)!\,e^x}{(a-1)!\,x^c}.$$

Что произойдет, если a равно нулю или отрицательному целому числу?

2. Проверить преобразования Куммера

$M(a, c; x)=e^xM(c-a, c;-x)$ и $U(a, c; x)=x^{1-c}U(a-c+1, 2-c; x)$.

3. Проверить интегральные представления

$$M(a, c; x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt,$$

$$U(a, c; x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt.$$

4. Вырожденная гипергеометрическая функция помогает сформулировать некоторые соотношения для специальных случаев. В качестве примера доказать, что

$H_{2n}(x)=(-1)^n2^{2n}n!\,L_n^{-1/2}(x^2)$, $H_{2n+1}(x)=(-1)^n2^{2n+1}n!\,xL_n^{1/2}(x^2)$.

5. Показать, что функция Бесселя мнимого аргумента второго рода $K_\nu(x)$ представляется в виде

$$K_\nu(x)=\pi^{1/2}e^{-x}(2x)^\nu U\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1;\ 2x\right).$$

6. Показать, что уравнение для смежных вырожденных гипергеометрических функций

$$(c-a)M(a-1, c; x)+(2a-c+x)M(a, c; x)-aM(a+1, c; x)=0$$

приводит к рекуррентной формуле (13.44) для присоединенных полиномов Лагерра.

7. Прямым дифференцированием и подстановкой проверить, что функция $y=ax^{-a}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{a-1}\,dt$ удовлетворяет уравнению

$$xy''+(a+1+x)\,y'+ay=0.$$

8. Проверить представление полинома Эрмита $H_{2n+1}(x)$ (13.121) через вырожденную гипергеометрическую функцию, показав, что: 1) $H_{2n+1}(x)/x$ удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению, в котором $a=-n$, $c=3/2$, а аргументом служит x^2; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H_{2n+1}(x)}{x}=(-1)^n\dfrac{2\,(2n+1)!}{n!}$.

ГЛАВА 14

РЯДЫ ФУРЬЕ

14.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Ряд Фурье. Ряд Фурье можно определить как представление функции рядом по синусу и косинусу:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (14.1)$$

Чтобы такое разложение было возможным, функция должна иметь лишь конечное число разрывов, конечное число экстремумов — максимумов и минимумов, и должна быть ограниченной *. Функцию, удовлетворяющую этим условиям (они называются условиями Дирихле), можно назвать *кусочно-регулярной*. Существуют, правда, функции, которые не удовлетворяют условиям Дирихле. Однако в подавляющем числе физических задач, где приходится иметь дело с рядами Фурье, эти требования обычно выполняются.

Запишем $\cos nx$ и $\sin nx$ в экспоненциальной форме, тогда разложение (14.1) приобретает новую форму:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (14.2)$$

где

$$c_0=\frac{1}{2}a_0,\ c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n),\quad n>0. \qquad (14.3)$$

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана (см. разд. 6.4) (предполагая, что $f(z)$ — аналитическая функция):

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z_n. \qquad (14.4)$$

---

* Эти условия *необходимы*, но *не достаточны*.

На единичной окружности $z = e^{i\theta}$, поэтому

$$f(z) = f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta}. \tag{14.5}$$

Полнота. Ряд Лорана. Разложение Лорана (14.5) в единичном круге имеет тот же вид, что и ряд Фурье для комплексной переменной, поэтому можно говорить об их эквивалентности. Ряд Лорана, являясь степенным, обладает свойством полноты, следовательно, можно утверждать, что функции Фурье e^{inx} образуют полную систему; иными словами, функции, кусочно-регулярные в области $(0, 2\pi)$, представимы рядами (14.1) и (14.2). Эта область и связанный с ней вопрос периодичности обсуждаются в следующем разделе.

Разложение в ряд Фурье и свойство полноты можно было ожидать заранее, поскольку функции $\sin x$, $\cos nx$, e^{inx} являются собственными для самосопряженного линейного дифференциального уравнения

$$y'' + n^2 y = 0. \tag{14.6}$$

Получим ортогональные собственные функции, соответствующие собственным значениям n, взяв отрезок $[0, p\pi]$, где p — целое, с тем, чтобы удовлетворить граничным условиям теории Штурма — Лиувилля. Если положить $p = 2$, то различные собственные функции для одного и того же собственного значения могут быть ортогональными. Имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi\delta_{m,n}, & m \neq 0, \\ 0, & m = 0; \end{cases} \tag{14.7}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi\delta_{m,n}, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0; \end{cases} \tag{14.8}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0. \tag{14.9}$$

Здесь n, m — целые числа. Отметим, что любой отрезок $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi$ удовлетворяет поставленным требованиям. Чтобы получить отрезок $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, мы часто будем полагать $x_0 = -\pi$. В случае комплексных собствен-

ных функций $e^{\pm inx}$ ортогональность обычно подразумевает комплексное сопряжение одной из функций

$$\int_0^{2\pi} (e^{imx})^* e^{inx}\, dx = 2\pi\delta_{m,n}, \tag{14.10}$$

что согласуется с трактовкой сферических функций.

Теория Штурма — Лиувилля. Теория Штурма — Лиувилля гарантирует выполнение (14.1) (для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле) и с учетом ортогональности позволяет определить коэффициенты разложения

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt, \tag{14.11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt. \tag{14.12}$$

При этом, конечно, подразумевается существование интегралов. Это условие выполнено, если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна. Подставим интегралы (14.11) и (14.12) в (14.1), тогда разложение Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos nx\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt + \sin nx\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-x)\, dt. \tag{14.13}$$

Первый (постоянный) член представляет собой среднее значение $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Пилообразная функция. Рассматривая разложение функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ x - 2\pi, & \pi < x \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{14.14}$$

в ряд Фурье, можно получить представление о его сходимости и об ошибке этого приближения, если число членов

ряда конечное. Для удобства рассмотрим отрезок $[-\pi, \pi]$, на котором $f(x) = x$. С учетом (14.11) и (14.12) легко убе-

с $x = x_0$, то сумма ряда приводит к

$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)], \qquad (14.16)$$

т. е. к среднему значению, найденному по величине функции справа и слева от $x = x_0$.

Выброс, или своеобразный дефект сходимости, которым характеризуется приближенное значение суммы ряда при подходе к точке $x = \pi$, называется явлением Гиббса (см. разд. 14.5).

Упражнение

Функция $f(x)$ (квадратично интегрируемая) должна быть разложена в ряд Фурье с ограниченным числом членов. Удобно оценивать точность такого представления, интегрируя квадрат отклонения:

$$\Delta_p = \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right]^2 dx.$$

Показать, что условие минимальности Δ_p

$$\frac{\partial \Delta_p}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_p}{\partial b_n} = 0$$

для всех n приводит к выбору коэффициентов a_n и b_n именно в виде

деленные интегралом (14.11), равны нулю, если же $f(x)$ четная функция, то исчезают коэффициенты b_n*, т. е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ если } f(x) — \text{четная;} \quad (14.17)$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ если } f(x) — \text{нечетная.} \quad (14.18)$$

Часто эти свойства оказываются полезными при разложении заданной функции.

Следует отметить, что ряд Фурье обладает свойством периодичности. Это обстоятельство существенно для выяснения вопроса, имеет ли силу разложение (14.1) вне заданного отрезка. Предположим, что задано только следующее:

$$f(x)=x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad (14.19)$$

и необходимо представить $f(x)$ рядом. Остановимся только на трех из бесконечного числа возможных разложений:

1) ряд Тейлора

$$f(x)=x, \quad (14.20)$$

т. е. от всего ряда сохранился только один член, и этот ряд (из одного члена) определен для всех конечных x;

2) ряд Фурье по косинусу

$$f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi; \end{cases} \quad (14.21)$$

3) ряд Фурье по синусу

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \leqslant 0, \\ x-2\pi, & \pi < x < 2\pi. \end{cases} \quad (14.22)$$

Указанные три разложения, ряд Тейлора и ряды Фурье по косинусу и синусу, абсолютно справедливы на заданном отрезке $[0, \pi]$. Однако вне этого отрезка их поведение совершенно различно (рис. 14.2). Какому ряду отдать предпочтение? На этот вопрос нельзя ответить до тех пор, пока мы не получим дополнительную информацию о $f(x)$. Вполне допустимо, что можно выбрать любой из трех,

* Интегрирование в (14.11) и (14.12) в данном случае ведется от $-\pi$ до $+\pi$.

но и не исключено, что нельзя пользоваться ни одним из полученных представлений. Фурье-разложение выполняется для основного интервала. До тех пор пока мы не знаем является ли $f(x)$ периодической функцией с периодом, равным заданному интервалу, или интервал ее периодичности равен $1/n$ части от заданного, нет никакой уверенности, что можно получить любое значение функции вне основного интервала.

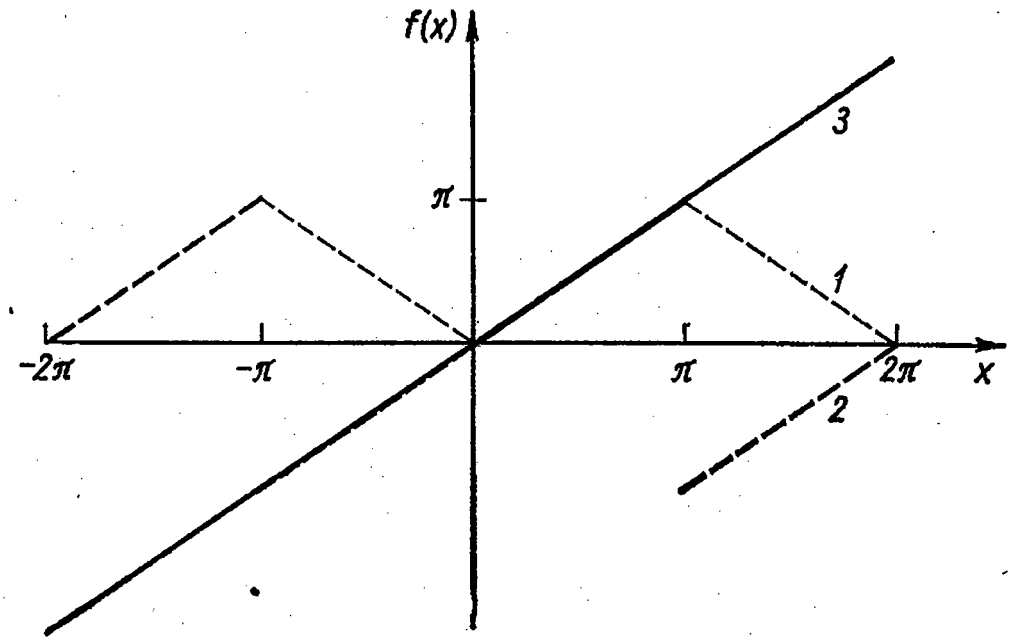


Рис. 14.2. Сравнение рядов Фурье по косинусам (*1*), синусам (*2*) и ряда Тейлора (*3*).

Предположим теперь, что мы решаем уравнение движения частицы, совершающей колебания под действием вынуждающей силы. В этом случае разложение силы в ряд Фурье представляет собой сумму главного члена и ряда по гармоникам. Дифференциальное уравнение (линейное) может быть отдельно решено для каждой из этих гармоник. Такой путь может оказаться значительно легче, чем попытка отыскивать решение сразу для всей заданной силы. Следовательно, пока мы имеем дело с линейным дифференциальным уравнением, для получения конечного решения можно просуммировать все его отдельные решения, соответствующие каждому члену разложения *. В этом заключается очень плодотворный математический прием. Он соответ-

* Одна из отрицательных характерных особенностей нелинейных дифференциальных операторов заключается в том, что принцип суперпозиции для них не выполняется.

ствует определению ответной реакции системы на основную частоту и на каждую вспомогательную частоту в отдельности.

Иногда возникает вопрос: существуют ли все эти частоты на самом деле или они возникают как следствие анализа Фурье? В качестве возможного ответа можно сравнить разложение функции на гармоники с разложением вектора на прямоугольные составляющие. Отдельные компоненты существуют в том смысле, что их можно выделить и каким-то образом охарактеризовать, однако само разложение отнюдь не единственно. Следовательно, многое говорит о том, что гармоники возникают только в результате выбора разложения. Другое разложение по иной системе ортогональных функций должно давать другие результаты *.

Изменение интервала. До сих пор мы ограничивались интервалом длиной 2π. Однако если $f(x)$ — периодическая функция с периодом $2L$, мы можем записать

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (14.23)$$

где

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} \, dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad (14.24)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad (14.25)$$

переменная x из уравнения (14.1) заменена на $\pi x/L$, а t из уравнений (14.11) и (14.12) — на $\pi t/L$. (Для удобства выбран отрезок $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.)

Прямоугольная волна. Высокая частота. Простой пример использования ряда Фурье дает анализ «прямоугольной» волны, которую необходимо выразить через фурье-компоненты. Эти волны могут встретиться в электронных схемах, предназначенных для работы с импульсами, характеризующимися крутым подъемом. Предположим, что вол-

* См. Robinson B. L. Amer. J. Phys., 21, 391 (1953); Nan Name F. W. Amer. J. Phys., 22, 94 (1954).

на задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ h, & 0<x<\pi.\end{cases} \tag{14.26}$$

С помощью уравнений (14.11) и (14.12) находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,dx=h, \tag{14.27}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\cos nx\,dx=0, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{14.28}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin nx\,dx=\frac{h}{n\pi}(1-\cos n\pi), \tag{14.29}$$

причем

$$b_n=2h/n\pi, \quad n\text{ — нечетное}, \tag{14.30}$$

$$b_n=0, \quad n\text{ — четное}. \tag{14.31}$$

Окончательно разложение исходной функции в ряд Фурье запишется так:

$$f(x)=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right). \tag{14.32}$$

За исключением первого члена, который равен среднему значению функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, все члены, содержащие $\cos nx$, исчезли. Поскольку функция $f(x)$ — $-h/2$—нечетная, мы получили разложение Фурье по синусам. Несмотря на то что такой ряд содержит одни нечетные члены, величина их спадает только как n^{-1}. Таким образом, свойства сходимости (или отсутствия сходимости) этого ряда такие же, как и у гармонического ряда. Физически это означает, что волна прямоугольной формы содержит очень большое количество высокочастотных компонент. Если электронная аппаратура пропускает эти компоненты, то входящая волна, которая имеет прямоугольную форму, на выходе окажется более или менее скругленной, а возможно, будет представлять собой бесформенный всплеск.

Двухполупериодный выпрямитель. Рассмотрим, каким образом переменный ток преобразуется двухполупериодным выпрямителем в почти постоянный ток. Через выпря-

митель могут проходить положительные пики начальной синусоидальной волны и ее инвертированные отрицательные пики:

$$f(t)=\begin{cases}\sin\omega t, & 0<\omega t<\pi,\\ -\sin\omega t, & -\pi<\omega t<0.\end{cases} \tag{14.33}$$

Из-за четности $f(t)$ нельзя получить ни одного члена вида $\sin n\omega t$. Из уравнений (14.11) и (14.12) имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin\omega t\;d(\omega t)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\omega t\;d(\omega t)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\omega t\;d(\omega t)=\frac{4}{\pi}, \tag{14.34}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\omega t\cos n\omega t\,d(\omega t)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2-1}, & n\text{—четное},\\ 0, & n\text{—нечетное}.\end{cases} \tag{14.35}$$

Важно отметить, что отрезок $[0, \pi]$ не является отрезком ортогональности, поэтому мы не получим нуля даже для четных n. Окончательно ряд запишется в виде

$$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{\cos n\omega t}{n^2-1}. \tag{14.36}$$

Основная частота ω не входит в это разложение. Самая низкая частота равна 2ω. Все высокочастотные компоненты стремятся к нулю, как n^{-2}, поэтому двухполупериодный выпрямитель очень хорош для получения постоянного тока. Степень спрямления тока определяется конкретными требованиями в каждом отдельном случае. Если оставшиеся высокочастотные компоненты все же нежелательны, их можно ликвидировать специальным фильтром.

Рассмотренные задачи иллюстрируют две особенности разложения Фурье.

1. Если функция $f(x)$ разрывна [прямоугольная волна (14.26)], можно ожидать, что n-й коэффициент ряда пропорционален $1/n$ (сравнительно медленная сходимость).

2. Если функция $f(x)$ непрерывна (хотя возможны разрывы производных, как, например, в случае с двух-

полупериодным выпрямителем, можно ожидать, что n-й коэффициент спадает, как $1/n^2$.

Бесконечный ряд. Дзета-функция Римана. Рассмотрим теперь чисто математическую задачу разложения x^2. Пусть

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi. \tag{14.37}$$

Вследствие симметрии все $b_n = 0$. Для коэффициентов a_n имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}, \tag{14.38}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \tag{14.39}$$

Отсюда следует, что

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}. \tag{14.40}$$

Очевидно, само по себе это разложение не особенно важно, однако если положить* $x = \pi$ и учесть, что

$$\cos n\pi = (-1)^n, \tag{14.41}$$

то из уравнения (14.40) получаем

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{14.42}$$

или

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2). \tag{14.43}$$

Разложение позволяет, таким образом, получить дзета-функцию Римана $\zeta(2)$ в замкнутой форме. С помощью полученного разложения функции x^2, а также разложений других степеней x можно вычислять большое количество других бесконечных рядов. Несколько таких примеров приведено в конце главы.

---

* Заметим, что функция непрерывна в точке $x = \pi$.

Упражнения

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(t)=\begin{cases} 0, & -\pi \leqslant \omega t \leqslant 0, \\ \sin \omega t, & 0 \leqslant \omega t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Сигнал такого вида формируется на выходе полупериодного выпрямителя. Кроме того, эта функция приблизительно описывает солнечный тепловой эффект, вызванный «приливами» в атмосфере.

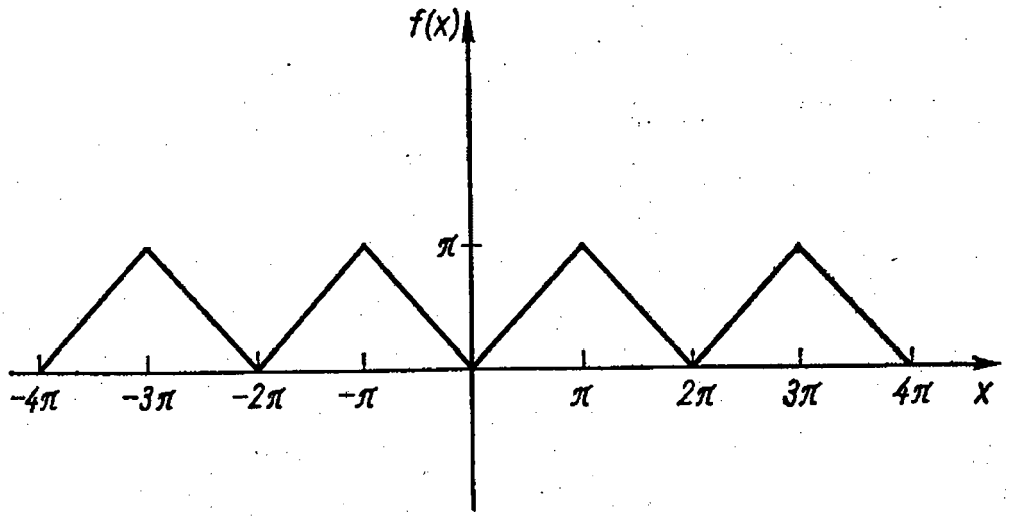


Рис. 14.3. Треугольная волна.

Ответ: $f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin \omega t-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2,\,4,\,6,\,\ldots}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^2-1}$.

2. Пилообразная функция задается условием $f(x)=x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Показать, что $f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

3. Функция, график которой имеет вид треугольника (рис. 14.3), задается так:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Разложить $f(x)$ в ряд Фурье.

Ответ: $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1,\,3,\,5,\,\ldots}\frac{\cos nx}{n^2}$.

4. Получить фурье-разложение δ-функции Дирака на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Какое значение имеет постоянный член? В какой области справедливо такое представление?

5. а. Используя функцию $f(x)=x^2$, заданную на интервале $|x|<\pi$, показать, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

б. Используя ряд Фурье, в который была разложена функция из упр. 3, показать, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

в. Разлагая функцию $f(x)=x^4$, заданную на интервале $|x|<\pi$, показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}=\zeta(4),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}.$$

г. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} x(\pi-x), & 0<x<\pi,\\ -x(\pi+x), & -\pi<x<0\end{cases}$$

получить разложение $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin nx}{n^3}$ и показать, что

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}n^{-3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^2}{32}.$$

д. Используя фурье-разложение прямоугольной функции показать, что

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{(n-1)2}n^{-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

14.3. СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ

Сходимость. Во-первых, отметим, что нельзя заранее ожидать равномерной сходимости ряда Фурье, если этим рядом представлена разрывная функция. Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций ($\sin nx$, $\cos nx$) всегда непрерывен (см. разд. 5.5). Однако если $f(x)$ непрерывна на отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, причем $f(-\pi)=f(+\pi)$ и, кроме того, производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна, то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится равномерно. Эти условия не требуют, чтобы $f(x)$ была периодической функцией,

но они автоматически выполнены для непрерывных дифференцируемых периодических (с периодом 2π) функций *.

Интегрируемость. Почленное интегрирование ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \qquad (14.44)$$

дает

$$\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx=\frac{a_0 n}{2}\Big|_{x_0}^{x}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nx\Big|_{x_0}^{x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos nx\Big|_{x_0}^{x}. \qquad (14.45)$$

В результате интегрирования в знаменателе каждого коэффициента появляется дополнительный множитель n, который улучшает сходимость полученного ряда по сравнению с исходным. Следовательно, сходящийся ряд Фурье всегда можно интегрировать почленно, возникший в результате такого интегрирования ряд равномерно сходится к интегралу от первоначальной функции. Более того, почленно интегрировать можно даже в том случае, когда исходный ряд (14.44) сам по себе не является сходящимся! Обсуждение этого свойства можно найти в специальной литературе, посвященной рядам Фурье.

Строго говоря, разложение (14.45) может и не быть рядом Фурье, т. е. в случае $a_0\neq 0$ ряд все же будет содержать член $a_0x/2$. Однако разность

$$\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx-\frac{1}{2}a_0x \qquad (14.46)$$

будет рядом Фурье.

Дифференцируемость. В вопросе дифференцируемости рядов Фурье картина совершенно иная. Здесь уместно сразу же высказать некоторые *предостережения*. Рассмотрим ряд для функции

$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi. \qquad (14.47)$$

* Доказательство равномерной сходимости см., например, в книгах Churchill R. V. Fourier Series and Boundary Value Problems. N.Y., McGraw-Hill, 1941. (Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.-Л., Гостехтеориздат, 1949.—*Прим. перев.*)

Этой функции соответствует ряд Фурье

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi. \tag{14.48}$$

Дифференцируя почленно, получаем ряд

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos nx, \tag{14.49}$$

который не будет сходиться.

В случае волны треугольной формы (см. рис. 14.3), для которой ряд Фурье сходится быстрее (и равномерно),

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,\,3,\,\ldots}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}. \tag{14.50}$$

После почленного дифференцирования этого ряда возникает новый ряд Фурье

$$f'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,\,3,\,\ldots}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \tag{14.51}$$

который представляет собой разложение прямоугольной волны:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases} \tag{14.52}$$

Изучение графика функции, представленной на рис. 14.3, убеждает нас, что $f'(x)$ действительно ее производная.

Операция дифференцирования, обратная интегрированию, добавляет дополнительный множитель n в числителе каждого члена. Это ухудшает сходимость ряда и может, как мы уже в этом убедились в самом начале, сделать продифференцированный ряд расходящимся. Вообще, почленное дифференцирование допустимо при тех же условиях, какие требуются для равномерной сходимости.

Множители сходимости. Дифференцирование опасно еще и в другом отношении. Во-первых, следует заметить, что использование *бесконечного* числа членов в ряде Фурье часто не представляется возможным. Вместо этого положим

$$f(x) = f_m(x) + \eta_m(x), \tag{14.53}$$

где функции

$$f_m(x) = \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} c_n e^{inx} \qquad (14.54)$$

придана экспоненциальная форма, что обеспечивает сходимость, а под η_m понимается остаточный член, который в явном виде записывается следующим образом:

$$\eta_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = e^{imx} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} e^{inx} +$$

$$+ e^{-imx} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m-n} e^{-inx} = e^{imx} \rho_m(x) + e^{-imx} \rho_{-m}(x). \qquad (14.55)$$

В радиотехнике функцию $\eta_m(x)$ называют модулированной несущей волной с несущей высокой частотой e^{imx} и модуляцией $\rho_m(x)$. Продифференцируем остаточный член

$$\frac{d\eta_m(x)}{dx} = ime^{imx} \rho_m(x) + e^{imx} \frac{d\rho_m(x)}{dx} + \ldots \qquad (14.56)$$

В результате дифференцирования в правой части появился крайне нежелательный первый член, который расходится при $m \to \infty$. Он соответствует дифференцированию несущей частоты e^{imx}. Фактически же мы хотим продифференцировать модуляцию $\rho_m(x)$, а эта часть обладает хорошими свойствами.

Попытаемся преодолеть трудность, связанную с возникшей расходимостью, для чего введем новый дифференциальный оператор $\mathscr{D}_m$

$$\mathscr{D}_m f(x) = \frac{f(x+\pi/m) - f(x-\pi/m)}{2\pi/m}, \qquad (14.57)$$

представляющий собой некоторую среднюю производную. Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{D}_m = \frac{d}{dx}. \qquad (14.58)$$

Подействуем оператором $\mathscr{D}_m$ на остаточный член:

$$\mathscr{D}_m \eta_m(x) = \frac{e^{im(x+\pi/m)} \rho_m(x+\pi/m) - e^{im(x-\pi/m)} \rho_m(x-\pi/m)}{2\pi/m} +$$

$$+ \frac{e^{-im(x+\pi/m)} \rho_{-m}(x+\pi/m) - e^{-im(x-\pi/m)} \rho_{-m}(x-\pi/m)}{2\pi/m},$$

$$\mathscr{D}_m \eta_m(x) = -e^{imx} \mathscr{D}_m \rho_m(x) - e^{-imx} \mathscr{D}_m \rho_{-m}(x). \qquad (14.59)$$

Отсюда ясно, что оператор $\mathscr{D}_m$ действует только на модуляцию ρ_m и не действует на несущую частоту e^{imx}. Расходящийся член вида $im\,e^{imx}\,\rho_m(x)$ при этом исчезает. (В последнем соотношении отрицательные знаки возникли из-за наличия точек $x \pm \pi/m$, которые сдвигают один полуцикл e^{imx}.)

Подействуем оператором $\mathscr{D}_m$ на ряд Фурье, записанный в комплексной форме:

$$\mathscr{D}_m e^{inx} = \frac{e^{in(x+\pi/m)} - e^{+in(x-\pi/m)}}{2\pi/m} = ine^{inx}\,\frac{\sin(n\pi/m)}{n\pi/m}, \quad (14.60)$$

отсюда

$$\mathscr{D}_m e^{inx} = \left[\frac{\sin(n\pi/m)}{n\pi/m}\right]\frac{d}{dx}\,e^{inx}. \quad (14.61)$$

Дополнительный множитель $\sin(n\pi/m)/(\pi n/m)$ называется коэффициентом сглаживания или множителем сходимости σ_n

$$\sigma_n = \frac{\sin(n\pi/m)}{n\pi/m}. \quad (14.62)$$

Включение коэффициента σ_n в дифференцируемый ряд иногда улучшает сходимость. Ряд Фурье, в котором суммируется конечное число членов

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (14.63)$$

можно записать теперь иначе:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{\sin(n\pi/m)}{n\pi/m}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (14.64)$$

Как будет ясно из дальнейшего (см. разд. 14.5), коэффициент σ_n почти целиком уничтожает явление Гиббса.

Упражнения

1. Показать, что в результате интегрирования Фурье-разложения функции $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$ получается

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

2. Предполагая, что функция $f(x)$ представлена равномерно сходящимся рядом Фурье, доказать тождество Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Применив тождество Парсеваля, получить в замкнутом виде дзета-функцию Римана ζ (4) из разложения

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}.$$

14.4. ЯВЛЕНИЕ ГИББСА

Явление Гиббса представляет собой специфическое свойство ряда Фурье и связано с особенностями его поведения в окрестности простого разрыва (см. рис. 14.1). Рассмотрим поведение фурье-разложения периодической прямоугольной волны

$$f(x)=\begin{cases} h/2, & 0<x<\pi,\\ -h/2, & -\pi<x<0,\end{cases} \tag{14.65}$$

которое имеет вид (см. разд. 14.2):

$$f(x)=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right). \tag{14.66}$$

Суммирование ряда *. На рис. 14.1 показан график суммы нескольких первых членов ряда Фурье для пилообразной функции. Разработаем теперь аналитический метод суммирования первых r членов ряда (14.66).

Из уравнения (14.13)

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-x)\,dt. \tag{14.67}$$

Тогда r-я частичная сумма окажется равной

$$s_r(x)=\sum_{n=0}^{r}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{r}e^{-i(t-x)n}\right]dt. \tag{14.68}$$

* Любопытно, что этот ряд встречается в анализе дифракционной решетки (r щелей).

Просуммировав ряд с конечным числом экспоненциальных членов (геометрическая прогрессия), получим

$$s_r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt. \qquad (14.69)$$

Этот интеграл сходится всюду, исключая точку $t=x$.

Прямоугольная волна. Попытаемся теперь воспользоваться полученным результатом и применим его к прямоугольной волне (14.66); сумма первых r членов (член $a_0/2$) в данном случае обращается в нуль) равна

$$s_r(x)=\frac{h}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt-$$

$$-\frac{h}{4\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)}\,dt=\frac{h}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt-$$

$$-\frac{h}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t+x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)}\,dt. \qquad (14.70)$$

Последний результат получается после замены во втором интеграле $t=-t$. В первом члене заменим $t-x$ на s, а во втором $t+x$ на s:

$$s_r(x)=\frac{h}{4\pi}\int_{-x}^{\pi-x}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{1}{2}s}\,ds-\frac{h}{4\pi}\int_{x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{1}{2}s}\,ds=$$

$$=\frac{h}{4\pi}\int_{-x}^{x}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{1}{2}s}\,ds-\frac{h}{4\pi}\int_{\pi-x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{1}{2}s}\,ds. \qquad (14.71)$$

При $x\to 0$ второй интеграл становится пренебрежимо малым, поэтому можно связать первый интеграл с разрывом в точке $x=0$. Произведя замену $r+1/2=p$ и $ps=\xi$,

получаем

$$s_r(x) = \frac{h}{2\pi} \int_0^{px} \frac{\sin \xi}{\sin(\xi/2p)} \cdot \frac{d\xi}{p}. \qquad (14.72)$$

Частичная сумма $s_r(x)$ начинается с нуля, когда $x = 0$ [в согласии с уравнением (14.16)], затем она возрастает, пока не выполнится условие $px = \pi$, в этой точке числитель $\sin \xi$, становится отрицательным. Для большого r и, следовательно, большого p знаменатель остается положительным.

Максимальное значение частичной суммы равно

$$s_r(x)_{\text{макс}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi \, d\xi}{\sin(\xi/2p)\, p} \approx \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi. \qquad (14.73)$$

Очевидно, интеграл превосходит $\pi/2$, ибо его можно разбить на части:

$$\left(\int_0^{\infty} - \int_{\pi}^{3\pi} - \int_{3\pi}^{5\pi} - \ldots \right) \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi. \qquad (14.74)$$

Вычисление всплеска. Первый интеграл в левой части соотношения (14.74), взятый в пределах от 0 до ∞, равен $\pi/2$ (см. разд. 7.2). Из этого интеграла вычитается ряд из отрицательных членов. Разлагая в степенной ряд и почленно интегрируя, получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = 1{,}1789798\ldots \qquad (14.75)$$

Это означает, что график суммы ряда Фурье имеет некоторый положительный выброс, примерно равный 18%, а вслед за ним, наоборот, впадину почти такой же величины (рис. 14.4). Учет большего числа членов (увеличение r) не уменьшает величины горба, а только приближает его к точке разрыва. Превышение частичной суммы ряда Фурье над точным значением называют явлением Гиббса, по этой причине представление рядом Фурье может быть очень ненадежным для точных вычислений, особенно в окрестности точки разрыва.

В разд. 14.4 мы показали, что явление Гиббса удается в значительной мере подавить, если воспользоваться мно-

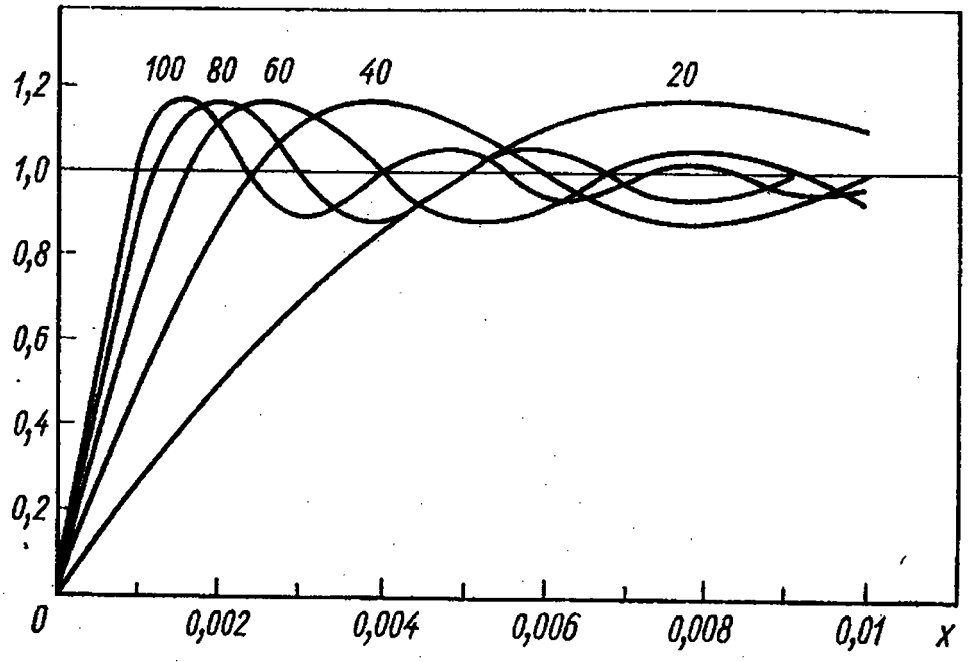


Рис. 14.4. Явление Гиббса для прямоугольной волны (числа означают количество просуммированных членов).

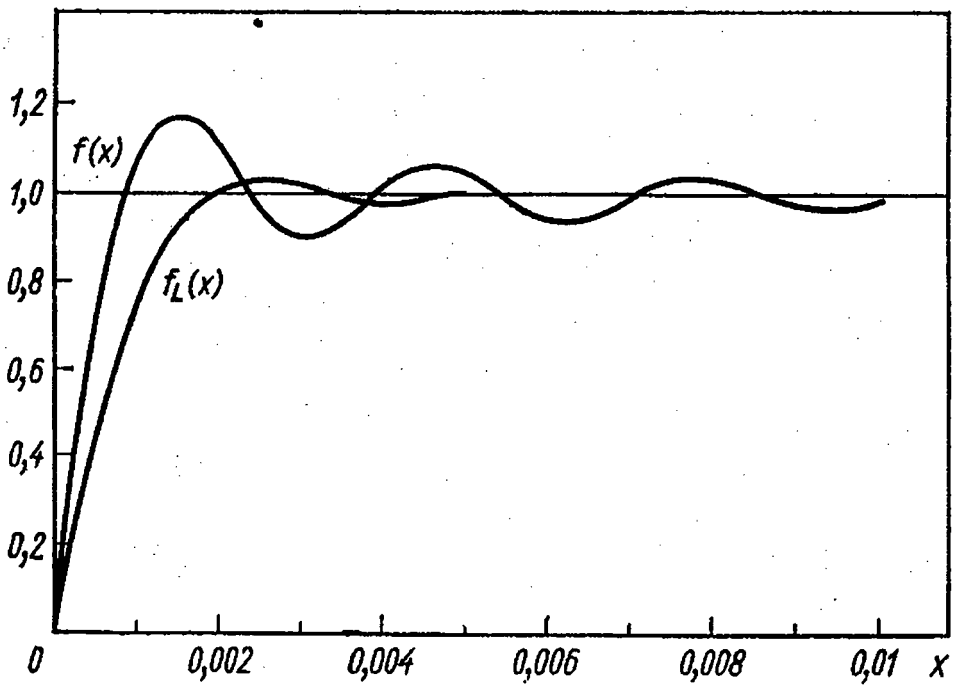


Рис. 14.5. Улучшение сходимости для представления прямоугольной волны:

$f(x)$ — суммирование 100 членов обычного ряда; $f_L(x)$ — суммирование 100 членов ряда при наличии множителя сходимости.

жителем сходимости. Рассматриваемая здесь волна прямоугольной формы в математическом смысле является, очевид-

но, производной треугольной волны. Вновь запишем уравнение (14.66), положив в нем

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin\{[(2n-1)\pi]/2m\}}{[(2n-1)\pi]/2m} \cdot \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. \quad (14.76)$$

График суммы этого ряда до $m = 100$ показан на рис. 14.5. Всплеск, величина которого раньше достигала 18%, значительно снизился, но зато скорость нарастания фронта волны упала почти наполовину.

ГЛАВА 15

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

15.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В математической физике мы часто имеем дело с парой функций, связанных выражением вида

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)\, K(\alpha, t)\, dt. \tag{15.1}$$

Функция $g(\alpha)$ называется интегральным преобразованием функции $f(t)$, а $K(\alpha, t)$—ядром этого преобразования.

Преобразование Фурье. Одним из наиболее распространенных среди бесчисленного множества возможных преобразований является преобразование Фурье, определяемое соотношением

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt. \tag{15.2}$$

В разд. 15.3 получены две модификации этой формы, которые называются косинус- и синус-преобразованиями Фурье:

$$g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt, \tag{15.3}$$

$$g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt. \tag{15.4}$$

Ядром преобразования Фурье служит функция $e^{i\alpha t}$, реальная и мнимая части которой дают отдельно $\cos \alpha t$ и $\sin \alpha t$. Кроме того, полезны три ядра $e^{-\alpha t}$, $tJ_n(\alpha t)$, $t^{\alpha-1}$.

Преобразования Лапласа, Меллина и Ханкеля. Эти преобразования определяются следующими формулами:

$$\text{преобразование Лапласа } g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-\alpha t}\, dt, \tag{15.5}$$

преобразование Ханкеля (Фурье — Бесселя)

$$g(\alpha) \int_0^\infty f(t)\, tJ_n(\alpha t)\, dt, \tag{15.6}$$

преобразование Меллина $g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)\, t^{\alpha-1}\, dt.$ (15.7)

Очевидно, интегральные преобразования могут иметь самую различную форму. Приведенные преобразования используются в математическом анализе и в физических приложениях. Мы уже сталкивались с преобразованием Меллина, не подчеркивая при этом его названия: $g(\alpha) = (\alpha - 1)!$ есть преобразование Меллина функции $f(t) = e^{-t}$. Точно так же $g(\alpha) = n!/\alpha^{n+1}$ — преобразование Лапласа функции $f(t) = t^n$. Из всех трех названных преобразований чаще всего пользуются преобразованием Лапласа. На нем мы подробно остановимся в разд. 15.7—15.11. Преобразование Ханкеля, которое фактически является преобразованием Фурье для функции Бесселя, представленной рядом, есть частный случай ряда Фурье — Бесселя.

Линейность. Все упомянутые интегральные преобразования линейны, т. е.

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\, K(\alpha, t)\, dt =$$

$$= \int_a^b c_1 f_1(t)\, K(\alpha, t)\, dt + \int_a^b c_2 f_2(t)\, K(\alpha, t)\, dt, \tag{15.8}$$

$$\int_a^b cf(t)\, K(\alpha, t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, K(\alpha, t)\, dt, \tag{15.9}$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — функции, которые подвергаются преобразованию.

Перепишем линейное преобразование в операторной форме, для чего определим оператор $\mathcal{L}$, тогда

$$g(\alpha) = \mathcal{L} f(t). \tag{15.10}$$

Будем предполагать существование обратного оператора $\mathcal{L}^{-1}$, такого, что

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} g(\alpha). \tag{15.11}$$

Оператор $\mathscr{L}^{-1}$ последнего из трех преобразований Фурье приведен в разд. 15.3. Вообще, отыскание обратного преобразования составляет главную проблему интегральных преобразований. Обратное преобразование Лапласа рассмотрено в разд. 15.11.

Упражнения

1. Преобразование Фурье функции двух переменных определяется формулами

$$F(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y)\, e^{i(ux+vy)}\, dx\, dy,$$

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(u, v)\, e^{-i(ux+vy)}\, du\, dv.$$

Пусть $f(x, y)=f([x^2+y^2]^{1/2})$. Показать, что преобразования Ханкеля *нулевого* порядка

$$F(\rho)=\int_0^{\infty} rf(r) J_0(\rho r)\, dr, \qquad f(r)=\int_0^{\infty} \rho F(\rho)\, J_0(\rho r)\, d\rho$$

являются частными случаями преобразования Фурье.

2. Проверить преобразования Меллина:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\sin(kx)\, dx=k^{-\alpha}(\alpha-1)!\sin\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad -1<\alpha<\frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\cos(kx)\, dx=k^{-\alpha}(\alpha-1)!\cos\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

15.2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

В гл. 14 показано, что ряд Фурье применяется для представления некоторой заданной функции либо на ограниченном промежутке $[0, 2\pi]$, $[-L, L]$ и т. д., либо на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, если функция *периодическая*. Теперь рассмотрим представление непериодической функции рядом Фурье на бесконечном интервале. Физически это означает разложение одного импульса или волнового пакета по синусоидальным волнам.

Для промежутка $[-L, L]$ коэффициенты a_n и b_n можно записать так (см. разд. 14.2):

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt, \tag{15.12}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{15.13}$$

С учетом этих коэффициентов ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt + \\ + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt, \tag{15.14}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)\,dt. \tag{15.15}$$

Устремим теперь L к бесконечности, трансформируя конечный промежуток $[-L, L]$ в интервал бесконечной длины $(-\infty, \infty)$. Положим $n\pi/L = \omega$, $\pi/L = \Delta\omega$, $L \to \infty$. Тогда

$$f(x) \to \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt, \tag{15.16}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \tag{15.17}$$

Здесь мы заменили бесконечную сумму интегралом по ω. Первый член (соответствующий a_0) обратился в нуль, поскольку предполагается, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ существует.

Следует подчеркнуть, что интеграл (15.17) введен чисто формально. Проведенный анализ нельзя считать строгим, однако этот же результат можно получить и совершенно

корректно *. Заметим только, что в разд. 6.3 мы уже проделали эту процедуру, причем совершенно другим способом, воспользовавшись контурным интегрированием и интегральной формулой Коши. В дальнейшем мы будем называть интеграл (15.17) интегралом Коши. Функция $f(x)$ из этого интеграла удовлетворяет условиям Дирихле (гл. 14), и, кроме того, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ сходится.

Интеграл Фурье допускает и другую форму записи, в которой вместо тригонометрической функции фигурирует экспоненциальная. Действительно,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt, \qquad (15.18)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)\,dt=0 \qquad (15.19)$$

в силу четности $\cos\omega(t-x)$ и нечетности $\sin\omega(t-x)$ (по переменной ω). К интегралу (15.18) прибавим интеграл (15.19), умноженный на i, тогда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt. \qquad (15.20)$$

Параметр ω — произвольная математическая переменная. Во многих физических задачах под ней понимается угловая частота ω, поэтому представление функции $f(x)$ интегралами (15.18) или (15.20) можно интерпретировать как набор бесконечно длинных синусоидальных волн с угловой частотой ω, которая изменяется в этом наборе *непрерывно*.

15.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразованием Фурье функции $f(t)$ будем называть функцию $g(\omega)$, определенную формулой

$$g(\omega)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt. \qquad (15.21)$$

* См. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.

Из (15.20) и (15.21) легко получить обратное *экспоненциальное* преобразование

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{15.22}$$

Интересно, что выражения (15.21) и (15.22) почти симметричны и отличаются только знаком при i.

В зависимости от того, является ли $f(x)$ четной или нечетной, ее преобразование Фурье записывается в различной форме. Остановимся сначала на случае, когда $f(x)$ — четная, т. е. $f(x)=f(-x)$. Перепишем экспоненциальный множитель из формулы (15.21) в тригонометрическом виде:

$$g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(\omega)\cos\omega t\,dt. \tag{15.23}$$

При интегрировании в симметричных пределах $(-\infty, \infty)$ член, содержащий $\sin\omega t$, обратился в нуль. Аналогично выражение (15.22) преобразуется в

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g(\omega)\cos\omega x\,d\omega. \tag{15.24}$$

Интегралы (15.23) и (15.24) известны как *косинус-преобразования Фурье*.

Аналогичная пара *синус-преобразований Фурье* получается в предположении, что функция $f(x)$ — нечетная, т. е. $f(x)=-f(-x)$,

$$g(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\,^{*}, \tag{15.25}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{15.26}$$

Последняя форма записи $f(x)$ дает возможность рассматривать эту функцию как континуум синусоидальных волн.

* Множитель — i включен в функцию $g(\omega)$.

Амплитуда $\sin \omega t$ равняется $\sqrt{2/\pi} g(\omega)$, где $g(\omega)$ — синус-преобразование Фурье функции $f(x)$. Отметим, что выражение (15.26) представляет собой интегральный аналог суммы (14.18). То же самое можно сказать и о косинус-преобразовании.

Если условимся называть формулы (15.21), (15.23) и (15.25) прямыми интегральными преобразованиями, которые в уравнении (15.10) обозначались оператором $\mathscr{L}$, то соответствующие обратные преобразования, обозначаемые $\mathscr{L}^{-1}$, задаются формулами (15.22), (15.24) и (15.26), которые называются формулами обращения.

Волновой пакет конечной длины. Важное приложение преобразования Фурье связано с разложением конечного импульса синусоидальных волн. Предположим, что бесконечная синусоидальная волна обрезана с помощью затвора Керра таким образом, что

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, & |t| < N\pi/\omega_0, \\ 0, & |t| > N\pi/\omega_0. \end{cases} \tag{15.27}$$

Это соответствует N циклам, выделенным из первоначальной волны (рис. 15.1, *а*). Поскольку $f(t)$ — нечетная, воспользуемся синус-преобразованием Фурье (15.25):

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega t \, dt. \tag{15.28}$$

Интегрируя, найдем амплитудную функцию

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin [(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin [(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right]. \tag{15.29}$$

Интересно проследить зависимость $g(\omega)$ от частоты. Если ω_0 велико и $\omega \approx \omega_0$, то основное значение имеет только первый член (см. рис. 15.1, *б*, на котором представлена амплитудная кривая, соответствующая дифракционной картине от одной щели). Нули функции совпадают с точками

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{N}, \quad \pm \frac{2}{N}, \quad \ldots \tag{15.30}$$

Поскольку вклад периферийных частей невелик, можно положить

$$\Delta\omega = \omega_0/N. \tag{15.31}$$

Используя (15.31), можно с хорошей точностью измерять разброс по частоте в волновом пакете. Очевидно, при

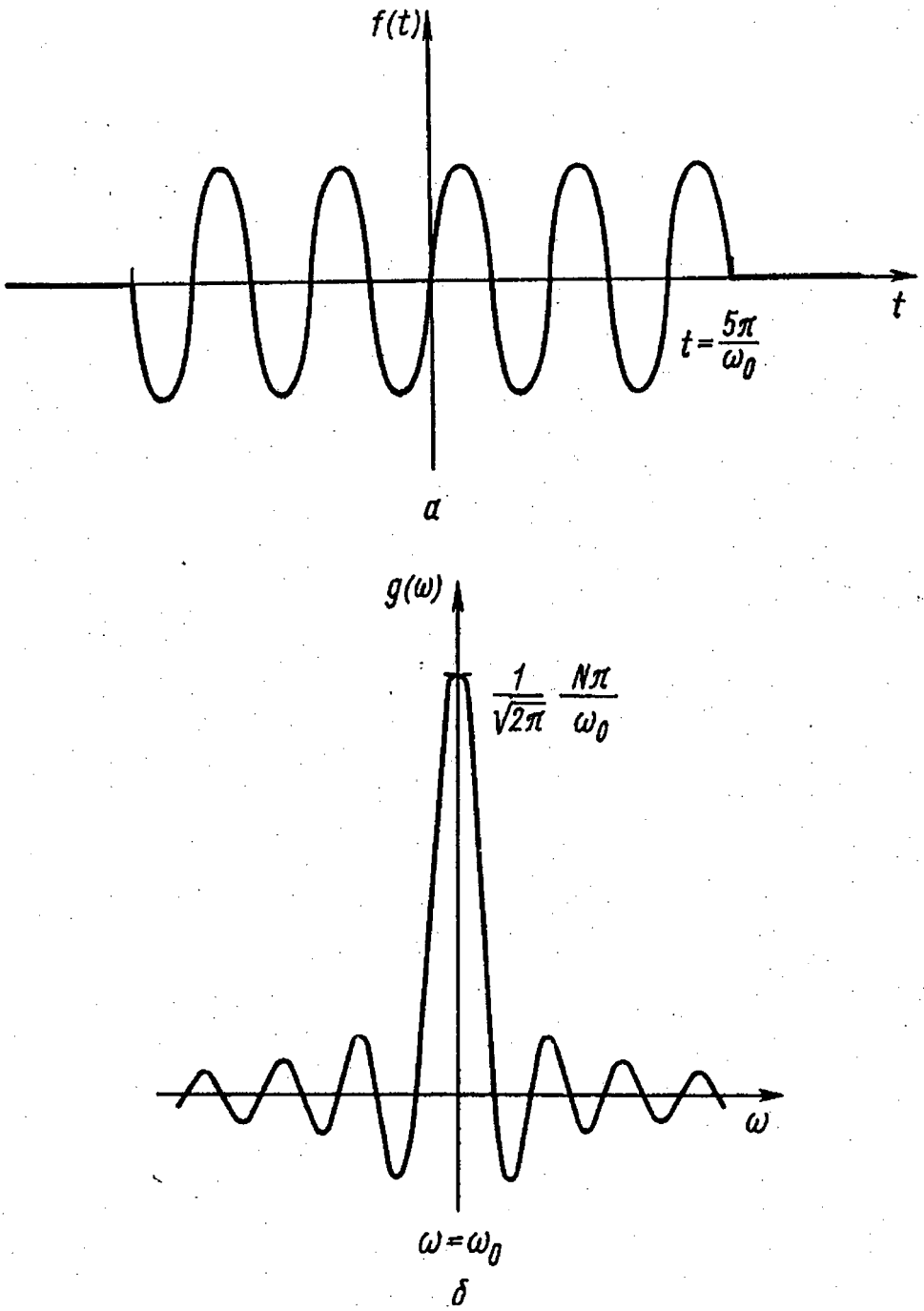


Рис. 15.1. Конечный волновой пакет (*а*) и его фурье-преобразование (*б*).

большом N (длительный импульс) разброс по частоте невелик. С другой стороны, если из общей синусоидальной

волны выделена короткая часть, т. е. N невелико, разброс по частотам будет значительным.

Соотношение неопределенности. Существует классический аналог известного принципа неопределенности из квантовой механики. Пусть имеется электромагнитная волна, причем $h\omega/2\pi = E$ — энергия (волнового пакета или фотона), тогда

$$h\Delta\omega/2\pi = \Delta E, \tag{15.32}$$

где h — постоянная Планка, которая характеризует неопределенность в энергии одного фотона. Кроме того, имеется неопределенность во времени; для прохождения N циклов волны требуется $2N\pi/\omega_0$ секунд. Обозначим

$$\Delta t = 2N\pi/\omega_0 \tag{15.33}$$

и возьмем произведение двух величин

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h\Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h\,\frac{\omega_0}{2\pi N} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h. \tag{15.34}$$

В соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant h/2\pi. \tag{15.35}$$

Очевидно, результат (15.34) не противоречит этому принципу.

Упражнения

Убедиться, что следующие функции являются фурье-преобразованиями друг друга:

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$ и $J_0(ay)$,

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a, \\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, & |x| > a, \end{cases}$ и $N_0(a|y|)$,

3. $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, и $K_0(a|y|)$.

Как объяснить, что сюда не включена функция $I_0(ay)$? *Указание.* Функции J_0, N_0 и K_0 легко преобразуются с помощью преобразования Фурье (15.21), изменения порядка интегрирования и экспоненциального представления δ-функции Дирака (см. разд. 15.6).

15.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Запишем экспоненциальное преобразование Фурье функции $f(x)$

$$g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx \tag{15.36}$$

и ее производной $df(x)/dx$

$$g_1(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}e^{i\omega x}\,dx. \tag{15.37}$$

Интегрируя (15.37) по частям, получаем

$$q_1(\omega)=\frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\omega x}\,dx. \tag{15.38}$$

Если $f(x)$ обращается в нуль при $x\to\pm\infty$, то

$$g_1(\omega)=-i\omega g(\omega), \tag{15.39}$$

т. е. преобразование производной равно преобразованию исходной функции, умноженному на $(-i\omega)$. Этот результат легко обобщается на производную n-го порядка

$$g_n(\omega)=(-i\omega)^n g(\omega), \tag{15.40}$$

поскольку $f(x)=0$ при $x\to\pm\infty$.

Волновое уравнение. Рассмотрим колебание свободной бесконечно длинной струны. Амплитуда (малых) колебаний y удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{15.41}$$

Будем полагать, что в момент времени $t=0$

$$y=f(x). \tag{15.42}$$

Применим преобразование Фурье, которое означает умножение на $e^{i\alpha x}$ и последующее интегрирование по x:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}e^{i\alpha x}\,dx=\frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}e^{i\alpha x}\,dx \tag{15.43}$$

или

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 Y(\alpha, t)}{\partial t^2}, \qquad (15.44)$$

где

$$Y(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t)\, e^{i\alpha x}\, dx. \qquad (15.45)$$

Здесь мы использовали уравнение (15.40). Проинтегрированная часть уравнения (15.38) обратилась в нуль, поскольку волна не успела еще распространиться на бесконечность. В уравнении (15.44) нет никаких производных по α, поэтому оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, в данном случае — уравнение линейного осциллятора. Рассмотренное преобразование, в результате которого дифференциальное уравнение в частных производных свелось к обыкновенному дифференциальному уравнению, существенно упрощает задачу. Теперь остается решить уравнение (15.44) при соответствующих начальных условиях. Распространим на функцию (15.45) условие (15.42), соответствующее моменту $t = 0$, тогда

$$Y(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = F(\alpha). \qquad (15.46)$$

Общее решение уравнения (15.44), записанное через экспоненту, имеет вид

$$Y(\alpha, t) = F(\alpha)\, e^{\pm iv\alpha t}. \qquad (15.47)$$

Применим теперь формулу обращения (15.22)

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha \qquad (15.48)$$

и с учетом (15.47) окончательно получим

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{-i\alpha(x \mp vt)}\, d\alpha. \qquad (15.49)$$

Поскольку $f(x)$ является обратным преобразованием Фурье функции $F(\alpha)$, то

$$y(x, t) = f(x \mp vt), \qquad (15.50)$$

что соответствует волнам, распространяющимся соответственно в $+x$- и $-x$-направлениях.

В том случае, когда граничное условие соответствует условию (15.42), а также задано в виде ограничения, наложенного на производную dy/dt, решение представляет собой особую линейную комбинацию волн.

Упражнения

1. Одномерное уравнение возраста Ферми (оно описывает диффузию нейтронов, замедляющихся в некоторой среде, например графите) имеет вид $\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau}$, где q — число нейтронов, которые при своем замедлении попадают в область энергии, лежащую ниже заданного значения (за одну секунду в единице объема); τ — возраст Ферми, характеризующий потерю энергии. Получить решение этого уравнения, полагая, что $q(x, 0) = S\delta(x)$ соответствует плоскому источнику в точке $x=0$, который испускает в одну секунду S нейтронов с единицы поверхности. *Указание.* Вместо $q(x, \tau)$ рассмотреть новую функцию

$$p(k, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, \tau)\, e^{ikx}\, dx.$$

Эта задача аналогична задаче о распространении тепла в бесконечной среде.

Ответ: $q = S \frac{e^{-x^2/4\pi\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}$

2. Ортогональные функции Эрмита $\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (см. разд. 13.1)

$$\varphi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\, \varphi_n(x) = 0.$$

С помощью этого уравнения получить фурье-преобразование для функции $\varphi_n(x)$.

15.5. ТЕОРЕМА СВЕРТКИ

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $g(x)$, фурье-преобразованиями которых служат соответственно $F(t)$ и $G(t)$. Назовем операцию

$$f * g \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x - y)\, dy \qquad (15.51)$$

сверткой двух функций f и g в интервале $(-\infty, \infty)$. Для $f(y) = e^{-y}$ графики самой функции $f(y)$ и $f(x - y)$ пред-

ставлены на рис. 15.2. Очевидно, эти графики являются зеркальным отражением друг друга относительно вертикальной линии $y = x/2$, т. е. мы можем получить $f(x-y)$,

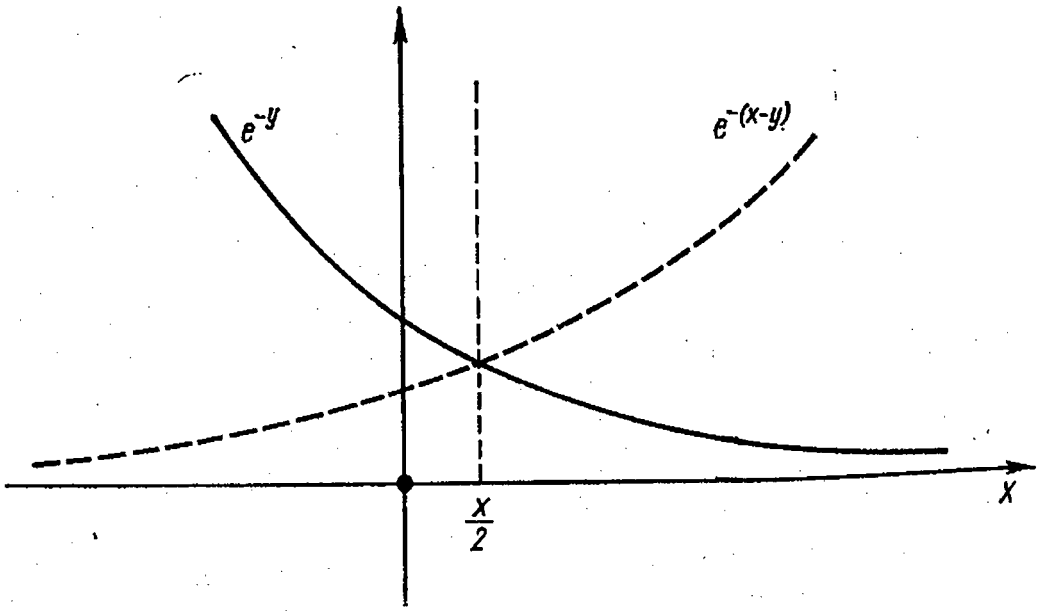


Рис. 15.2. Свертка функций f и g.

«свернув» $f(y)$ по линии $y = x/2$. Видоизменим теперь интеграл (15.51), введя в него преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-it(x-y)}\,dt\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-itx}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{ity}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, G(t)\, e^{-itx}\,dt.) \tag{15.52}$$

Здесь мы изменили порядок интегрирования и воспользовались преобразованием функции $g(y)$. Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы: если $F(t)$ и $G(t)$ — преобразования Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$, то обратным преобразованием Фурье *произведения* $F \cdot G$ является свертка первоначальных функций $f * g$.

Если $x = 0$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, G(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\, g(y)\,dy. \tag{15.53}$$

Соотношение Парсеваля. Аналогичные результаты получаются для синус- и косинус-преобразований Фурье (см.

ниже упр. 1 и 2). Формула (15.53) и соответствующие синус- и косинус-свертки по аналогии с теоремой Парсеваля (см. упр. 2 к разд. 14.3) часто называются соотношениями Парсеваля.

Соотношения Парсеваля можно получить и независимо от обратного преобразования Фурье, а затем использовать их для строгого определения формулы обращения *.

Упражнения

1. Получить уравнение свертки, соответствующее уравнение (15.52), для синус- и косинус-преобразований Фурье.

Ответ:

$$\int_0^\infty g(y)\, f(x-y)\, dy = -\int_0^\infty F_s(s)\, G_s(s) \sin sx\, ds,$$

$$\int_0^\infty g(y)\, f(x-y)\, dy = \int_0^\infty F_c(s)\, G_c(s) \cos sx\, ds.$$

2. Показать, что как для синус-, так и для косинус-преобразования Фурье соотношение Парсеваля имеет форму

$$\int_0^\infty F(t)\, G(t)\, dt = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx.$$

3. Функция $g(y)$ равна единице в интервале $0 \leqslant y \leqslant \alpha$ и нулю для всех остальных значений y. С помощью этой функции и соотношения Парсеваля (15.53) получить формулу обращения Фурье (15.22). *Указание*. Продифференцировать по α.

15.6. МЕТОД МОМЕНТОВ

В квантовой механике одинаково часто встречаются понятия импульса и координаты. Сначала рассмотрим обычное пространственное распределение, а затем перейдем к соответствующему распределению импульсов. В одномерном случае волновая функция $\psi(x)$, представляющая собой решение уравнения Шредингера, обладает следующими свойствами:

* Подробнее см. Морс П. М., Фешбах Х. Методы теоретической физики. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит. 1958.

1. Произведение $\psi^*(x)\psi(x)\,dx$ определяет вероятность нахождения частицы в интервале $(x,\ x+dx)$.

2. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)\,dx=1 \tag{15.54}$$

характеризует полную вероятность обнаружить частицу в любом месте оси x.

3. Кроме того, *среднее* значение координаты частицы на оси x равно *

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,x\psi(x)\,dx. \tag{15.55}$$

Определим функцию $g(p)$, которая будет давать аналогичную информацию об импульсе частицы.

1′. Произведение $g^*(p)g(p)\,dp$ определяет вероятность того, что импульс частицы лежит в интервале $(p,\ p+dp)$.

2′.
$$\int_{-\infty}^{\infty}g^*(p)g(p)\,dp=1. \tag{15.56}$$

3′.
$$\bar{p}=\int_{\infty}^{\infty}g^*(p)\,pg(p)\,dp. \tag{15.57}$$

Ниже будет показано, что такая функция определяется преобразованием Фурье пространственной функции $\psi(x)$:

$$g(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,e^{-ipx/\hbar}\,dx, \tag{15.58}$$

$$g^*(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\,e^{ipx/\hbar}\,dx. \tag{15.59}$$

Для проверки рассмотрим конкретно свойства 2′ и 3′. Запишем подробно условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}g^*(p)g(p)\,dp=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ip(x-x')/\hbar}\,dp\right)\times$$
$$\times\psi^*(x')\psi(x)\,dx'\,dx. \tag{15.60}$$

* Эта величина часто называется *ожиданием* и обозначается $\langle x\rangle$.

Выражение в круглых скобках — фурье-преобразование δ-функции Дирака (см. ниже упр. 1 и 2), поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)\, g(p)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\, \psi^*(x')\, \psi(x)\, dx'\, dx. \quad (15.61)$$

Интегрированием по x' доказывается свойство 2. Последний интеграл соответствует соотношениям Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, G^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g^*(y)\, dy, \quad (15.62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2\, dy. \quad (15.63)$$

Для проверки свойства 3′ необходимо доказать, что

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)\, pg(p)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \frac{\hbar}{i}\cdot\frac{d}{dx}\psi(x)\, dx, \quad (15.64)$$

где $(\hbar/i)(d/dx)$ — оператор импульса в пространственном представлении. Заменим функции импульса, после чего первый интеграл приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int p e^{-ip(x-x')/\hbar}\, \psi^*(x')\, \psi(x)\, dp\, dx'\, dx. \quad (15.65)$$

Далее,

$$p e^{-ip(x-x')/\hbar} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{\hbar}{i} e^{-ip(x-x')/\hbar}\right]. \quad (15.66)$$

Подставляя выражение (15.66) в (15.65) и произведя при постоянных x' и p интегрирование по частям, получаем

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \left[\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-x')/\hbar}\, dp\right] \psi^*(x')\, \frac{\hbar}{i}\cdot\frac{d}{dx}\psi(x)\, dx'\, dx. \quad (15.67)$$

Последний результат получен из условия обращения волновой функции в нуль при $x \to \pm\infty$. Вновь воспользуемся δ-функцией Дирака (см. упр. 1 к разд. 15.6), после чего

выражение (15.67) сводится к (15.64) и импульсное представление доказано.

Атом водорода. Атом водорода в основном состоянии описывается волновой функцией

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} e^{-r/a_0}, \tag{15.68}$$

где $a_0 = \hbar^2/me^2$ — радиус Бора. Для трехмерного случая преобразование, соответствующее (15.58), имеет вид

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\, d\mathbf{r}. \tag{15.69}$$

Подставим функцию (15.68) в последний интеграл и с учетом того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ar+i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r} = \frac{8\pi a}{(a^2+b^2)^2}, \tag{15.70}$$

получим волновую функцию водородного атома в импульсном представлении:

$$g(\mathbf{p}) = \pi^{-5/2} \frac{a_0^{3/2}\hbar^{5/2}}{(a_0^2p^2+\hbar^2)^2}. \tag{15.71}$$

Аналогичная функция в импульсном представлении получается в задаче о комптоновском рассеянии на атомных электронах; распределение рассеянного излучения по длинам волн определяется импульсами электронов, на которых происходит рассеяние.

Связь между пространственным и импульсным представлениями легко проследить, если обратиться к основным соотношениям коммутации квантовой механики. Можно начать с классического гамильтониана и получить затем волновое уравнение Шредингера, для чего достаточно потребовать, чтобы имело место коммутационное соотношение:

$$[p,x] = (px - xp) = -i\hbar, \tag{15.72}$$

где p — импульс, x — координата. Для многомерного пространства это уравнение запишется так:

$$[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}. \tag{15.73}$$

Представление Шредингера (пространственное, x-представление) получается, если $x_j \to x_j$, $p_i \to -i\hbar\partial/\partial x_i$. Здесь

импульс заменяется производной по координате. Легко проверить, что

$$[p,x]\,\psi(x) = -i\hbar\psi(x). \tag{15.74}$$

Однако условие (15.72) тоже окажется выполненным, если

$$x_j \to i\hbar\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad p_i \to p_i.$$

В этом случае получаем импульсное p-представление, для которого

$$[p, x]\,g(p) = -i\hbar g(p). \tag{15.75}$$

Следовательно, x-представление не единственно, возможно еще и p-представление.

Вообще, из x-представления волновое уравнение получается более естественным путем, так как потенциальная энергия V обычно записывается как функция координат $V(x, y, z)$. p-Представление обычно приводит к интегральному уравнению (см. гл. 16), для его иллюстрации рассмотрим гармонический осциллятор.

Гармонический осциллятор. Запишем классический гамильтониан

$$H(p, x) = p^2/2m + kx^2/2 = E. \tag{15.76}$$

В x-представлении мы получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x). \tag{15.77}$$

Для полной энергии E, равной $\sqrt{(k/m)}\,\hbar/2$, это уравнение имеет решение

$$\psi(x) = e^{-(\sqrt{mk}/2\hbar)x^2}. \tag{15.78}$$

p-Представление дает

$$\frac{p^2}{2m}g(p) - \frac{\hbar^2 k}{2}\cdot\frac{d^2g(p)}{dp^2} = Eg(p). \tag{15.79}$$

Снова для

$$E = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{\hbar}{2} \tag{15.80}$$

волновое уравнение (15.79), записанное в p-представлении, имеет решение

$$g(p) = e^{-p^2/(2\hbar\sqrt{mk})}. \tag{15.81}$$

В зависимости от удобства решения данной конкретной задачи можно прибегать к любому представлению, пространственному или импульсному (и вообще к бесконечному числу других возможных представлений). В упр. 5 (см. ниже) волновая функция в p-представлении $g(p)$ представляет собой обратное фурье-преобразование функции (15.78).

Упражнения

1. Найти фурье-преобразование δ-функции Дирака, а затем, используя обратное преобразование, получить интегральное представление

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dk.$$

2. Используя соотношения $\delta(x)=\lim_{a\to\infty}\delta(x,a)$, $\delta(x,\ a)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2x^2}$ в качестве определения δ-функции Дирака, показать, что

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,dk.$$

3. В квантовой механике бесконечная плоская волна представляется функцией $\psi(x)=e^{ip'x/\hbar}$. Найти соответствующее p-представление этой функции. Отметим, что $\psi(x)$ не нормирована.

4. Частица, находящаяся в одномерной потенциальной яме $0\leqslant x\leqslant a$, описывается волновой функцией $\psi(x)=\sin(n\pi x/a)$, где n — целое. Определить соответствующую волновую функцию в p-представлении и дать ее физическую интерпретацию. *Указание.* Не учитывать граничные условия отражения частицы от стенок ямы и считать, что волновая функция отыскивается во всем пространстве.

5. Волновая функция линейного квантового осциллятора имеет вид $\psi(x)=a^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-x^2/2a^2}$. Показать, что соответствующая функция в p-представлении равна $g(p)=a^{1/2}\pi^{-1/4}\hbar^{-1/2}e^{-a^2p^2/2\hbar^2}$.

6. Пусть

$$\delta(x,\ \varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon^{-1}, & 0<x<\varepsilon,\\ 0, & x<0,\ x>\varepsilon.\end{cases}$$

Выразить $\delta(x,\ \varepsilon)$ через интеграл Фурье и показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(x,\ \varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dk.$$

7. Используя результаты упр. 1, 2 или 6, получить представление $\delta(x) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \dfrac{\sin \alpha x}{\pi x}$. Это выражение служило отправной точкой при строгом разложении в ряд Фурье.

15.7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа $f(s)$ или в символической записи $\mathscr{L}$ функции $F(t)$ определяется формулой *

$$f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st} F(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt. \quad (15.82)$$

Необходимо сделать некоторые замечания о существовании интеграла. Для выполнения (15.82) совсем *не обязательно*, чтобы существовал неопределенный интеграл $\int\limits_0^\infty F(t)\, dt$. Например, сама функция $F(t)$ может расходиться экспоненциально при больших t. Однако если существует некоторая *постоянная* s_0, называемая показателем роста, такая, что для достаточно больших $t > t_0$ выполняется неравенство

$$|e^{-s_0 t} F(t)| \leqslant M, \quad (15.83)$$

где $M > 0$, то преобразование Лапласа существует для любых $s > s_0$; отсюда следует, что $F(t)$ может возрастать не быстрее показательной функции. Например, $F(t) = e^{t^2}$ не удовлетворяет условию (15.83), т. е. она в указанном смысле не относится к классу функций экспоненциального типа, поэтому $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$ *не существует*.

Преобразование Лапласа может не существовать и для функций, имеющих достаточно сильную особенность в нуле;

---

* Иногда его называют односторонним преобразованием Лапласа, в таком случае интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ будет называться двусторонним преобразованием. Некоторые авторы вводят дополнительный множитель s. Обычно берут s вещественным и положительным, хотя s может быть и комплексным при условии, что $\operatorname{Re} s > 0$. (Сама $f(s)$ часто называется изображением функции $F(t)$, которую, в свою очередь, называют оригиналом. В дальнейшем мы будем придерживаться этой общепринятой терминологии.— *Прим. перев.*)

например, интеграл $\int_0^\infty e^{-st}t^n dt$ расходится в нуле для $n \leqslant -1$, поэтому преобразование Лапласа $\mathcal{L}(t^n)$ не существует для $n \leqslant -1$.

Поскольку для двух функций $F(t)$ и $G(t)$, для которых существуют интегралы, выполняется равенство

$$\mathcal{L}\{aF(t)+bG(t)\}=a\mathcal{L}\{F(t)\}+b\mathcal{L}\{G(t)\}, \quad (15.84)$$

преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ *линейно*.

Рассмотрим преобразование Лапласа некоторых элементарных функций. Во всех случаях будем предполагать, что $F(t)=0$ для $t<0$. Пусть $F(t)=1$ для $t>0$, тогда

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}, \quad s>0. \quad (15.85)$$

Для показательной функции $F(t)=e^{kt}$ при $t>0$ преобразованием Лапласа будет

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}\,dt=\frac{1}{s-k}, \quad s>k. \quad (15.86)$$

Используя этот результат, легко получить преобразование Лапласа и других функций. Поскольку $\operatorname{ch} kt=\frac{1}{2}(e^{kt}+e^{-kt})$, $\operatorname{sh} kt=\frac{1}{2}(e^{kt}-e^{-kt})$, имеем для $s>k$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch} kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2}, \quad (15.87)$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh} kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right)=\frac{k}{s^2-k^2}. \quad (15.88)$$

Рассмотрим функцию $\cos kt=\operatorname{ch} ikt$, $\sin kt=-i\operatorname{sh} ikt$, для которых преобразования Лапласа имеют вид

$$\mathcal{L}\{\cos kt\}=\frac{s}{s^2+k^2}, \quad (15.89)$$

$$\mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2}. \quad (15.90)$$

Здесь необходимо выполнение условия $s>0$. (По-другому получены преобразования Лапласа этих функций

в разд. 15.8.) Наконец, для $F(t)=t^n$ имеем $\mathscr{L}\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}t^m\,dt$, что совпадает с факториальной функцией. Следовательно,

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}},\quad s>0. \tag{15.91}$$

Рассмотренные операции сами по себе не имеют смысла до тех пор, пока мы не произведем обратного преобразования, т. е. если $\mathscr{L}\{F(t)\}=f(s)$, то

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t). \tag{15.92}$$

Вообще говоря, обратное преобразование не единственно, т. е. две функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ могут иметь одно и то же изображение $f(s)$. Однако в этом случае $F_1(t)-F_2(t)=N(t)$, где $N(t)$ — нулевая функция, такая, что $\int_0^{t_0} N(t)\,dt=0$ для любого $t_0>0$. Этот результат известен как теорема Лерча, поэтому на практике во всех физических и инженерных приложениях $N(t)$ может быть почти всегда положена равной нулю, после чего операция обращения становится единственной. На рис. 15.3 приведен пример нулевой функции.

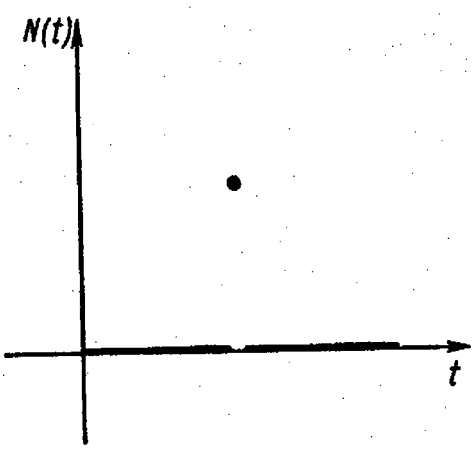


Рис. 15.3. Возможная нулевая функция.

Обратное преобразование можно получить двумя путями. Во-первых, в разд. 15.11 развит общий метод определения $\mathscr{L}^{-1}$, основанный на применении теории вычетов. Во-вторых, можно построить и использовать для практических вычислений таблицы оригиналов и соответствующих им изображений точно так же, как, например, пользуются таблицами логарифмов и антилогарифмов. Использование такой таблицы, в которой собраны оригиналы и изображения функций, облегчается разложением $f(s)$ на отдельные *части*.

Часто изображение $f(s)$ задают в форме $g(s)/h(s)$, где функции $g(s)$ и $h(s)$ — полиномы, которые не содержат общего множителя, причем показатель степени полинома у $g(s)$ ниже, чем у $h(s)$. Если $h(s)$ может быть представлена в виде произведения линейных и различных множителей, то из теории элементарных дробей следует, что

$$f(s)=\frac{c_1}{s-a_1}+\frac{c_2}{s-a_2}+\ldots+\frac{c_n}{s-a_n}, \qquad (15.93)$$

где коэффициенты c_i не зависят от s. Если один из корней, скажем a_1, кратный (т. е. встречается m раз), то $f(s)$ приобретает форму

$$f(s)=\frac{c_{1,m}}{(s-a_1)^m}+\frac{c_{1,m-1}}{(s-a_1)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{1,1}}{s-a_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{c_i}{s-a_i}. \qquad (15.94)$$

Наконец, если один из сомножителей имеет квадратичную форму (т. е. s^2+ps+q), то числитель не просто равен постоянной, но содержит еще и переменную s, а весь член в целом следует записать в виде $(as+b)/(s^2+ps+q)$. Постоянные величины, входящие в числитель простых дробей, можно определить различными способами. Например, умножим разложение (15.93) на $(s-a_i)$, тогда

$$c_i=\lim_{s\to a_i}(s-a_i)f(s). \qquad (15.95)$$

В элементарных случаях часто гораздо проще прибегнуть к прямому решению.

Пример 1. Имеется изображение

$$f(s)=\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}=\frac{c}{s}+\frac{as+b}{s^2+k^2}. \qquad (15.96)$$

Приведем правую часть (15.96) к общему знаменателю, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s в числителе:

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}=\frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}. \qquad (15.97)$$

Имеем $c+a=0$ (при s^2), $b=0$ (при s^1) и $ck^2=k^2$ (при s^0). При $s\neq 0$ получим $c=1$, $b=0$, $a=-1$, откуда

$$f(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+k^2}, \qquad (15.98)$$

и, наконец, воспользовавшись результатами (15.85) и (15.90), окончательно

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}=1-\cos kt. \qquad (15.99)$$

Пример 2. В качестве примера практического использования преобразования Лапласа вычислим интеграл

$$F(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx. \tag{15.100}$$

Применим к этому несобственному интегралу преобразование Лапласа

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin tx}{x}dx\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx\,dt. \tag{15.101}$$

Изменим порядок интегрирования, в результате чего

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty e^{-st}\sin tx\,dt\right]dx=\int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}, \tag{15.102}$$

поскольку выражение в квадратных скобках представляет собой преобразование Лапласа $\sin xt$. С помощью таблиц интегралов находим, что

$$\int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{s}\right)\Big|_0^\infty=$$

$$=\frac{\pi}{2s}=f(s). \tag{15.103}$$

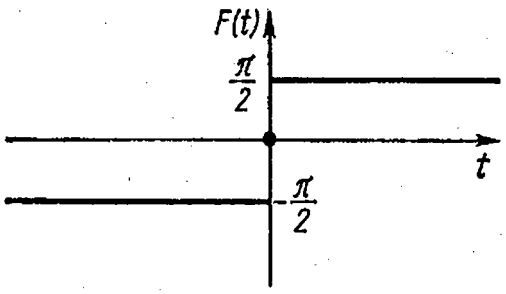


Рис. 15.4. Функция включения

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx.$$

Вновь обратимся к выражению (15.85), и окончательно

$$F(t)=\frac{\pi}{2},\quad t>0, \tag{15.104}$$

в согласии с ранее проделанным вычислением, выполненным на основе теории вычетов (см. разд. 7.2). Предполагалось, что аргумент $F(t)$ удовлетворяет условию $t>0$. Для $F(-t)$ заметим только, что $\sin(-tx)=-\sin tx$, поэтому $F(-t)=-F(t)$. Наконец, очевидно, что при $t=0$ $F(0)=0$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & t<0.\end{cases} \tag{15.105}$$

Интересно, что интеграл $\int_0^\infty (\sin tx/x)\,dx$, если понимать его как функцию t, представляет собой ступенчатую функцию (функцию включения) со скачком в точке $t=0$, величина скачка равна π (рис. 15.4).

Упражнения

1. Доказать, что $\lim\limits_{s\to 0} sf(s) = \lim\limits_{t\to +0} F(t)$. *Указание.* Предположить, что $F(t)$ может быть представлена рядом $F(t) = \sum a_n t^n$.

2. Показать, что $\frac{1}{\pi}\lim\limits_{s\to 0} \mathscr{L}\{\cos xt\} = \delta(x)$.

15.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ПРОИЗВОДНОЙ

Вероятно, самое важное приложение преобразований Лапласа — это приведение дифференциальных уравнений к более простым формам, которые позволяют легко находить их решения. Например, система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Преобразуем первую производную оригинала $F(t)$

$$\mathscr{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{dF(t)}{dt}\,dt = e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty +$$

$$+ s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = s\mathscr{L}\{F(t)\} - F(0). \qquad (15.106)$$

Строго говоря, $F(0) = F(+0)$ *, а производная dF/dt должна быть, по крайней мере, кусочно-непрерывной в интервале $0 \leqslant t < \infty$. Естественно, необходимо, чтобы и оригинал $F(t)$, и его производная были интегрируемы. Формулу (15.106) можно получить и другим способом (см. упр. 1 к разд. 15.7). Аналогично

$$\mathscr{L}\{F^{(2)}(t)\} = s^2\mathscr{L}\{F(t)\} - sF(+0) - F'(+0), \qquad (15.107)$$

$$\mathscr{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(+0) -$$

$$- s^{n-2}F'(+0) - \ldots - F^{(n-1)}(+0). \qquad (15.108)$$

Любопытно, что начальные условия $F(+0)$, $F'(+0)$ и т. д. вошли составной частью в формулы преобразования. Формула (15.107) позволяет получить изображение $\sin kt$. Будем

* Означает приближение к нулю со стороны положительных значений аргумента.

исходить из тождества

$$-k^2 \sin kt = \frac{d^2}{dt^2} \sin kt, \tag{15.109}$$

к обеим частям которого применим преобразование Лапласа:

$$-k^2 \mathcal{L}\{\sin kt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} \sin kt\right\} =$$

$$= s^2 \mathcal{L}\{\sin kt\} - s \sin(0) - \frac{d}{dt} \sin kt \Big|_{t=0}. \tag{15.110}$$

Поскольку $\sin 0 = 0$, а $\frac{d}{dt} \sin kt|_{t=0} = k$,

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \tag{15.111}$$

и мы вновь приходим к формуле преобразования (15.90).

Простой гармонический осциллятор. Рассмотрим массу m, осциллирующую под действием идеальной пружины с коэффициентом упругости k. Трение не будем учитывать, в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m \frac{d^2X(t)}{dt^2} + kX(t) = 0 \tag{15.112}$$

при начальных условиях $X(0) = X_0$, $X'(0) = 0$. Подействовав преобразованием Лапласа, получим

$$m\mathcal{L}\left\{\frac{d^2X}{dt^2}\right\} + k\mathcal{L}\{X(t)\} = 0; \tag{15.113}$$

учтем далее уравнение (15.107), тогда

$$ms^2x(s) - msX_0 + kx(s) = 0, \tag{15.114}$$

$$x(s) = X_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}. \tag{15.115}$$

С учетом результата (15.90) полученная функция — изображение $\cos \omega t$, следовательно, как и можно было ожидать,

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t. \tag{15.116}$$

Нутация Земли. Несколько более сложный пример дает рассмотрение нутации полюсов Земли. Будем считать Землю правильным (сжатым у полюсов) сфероидом, тогда

уравнения движения Эйлера запишутся так:

$$\frac{dX}{dt} = -aY, \quad \frac{dY}{dt} = +aX, \tag{15.117}$$

где $a \equiv [(I_z - I_x)/I_z]\,\omega_z$; $X = \omega_x$, $Y = \omega_y$ — компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$; I_z — момент инерции относительно оси z, а $I_y = I_x$ (моменты инерции относительно осей x и y). Ось z совпадает с осью симметрии Земли и не совпадает с осью суточного вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$, причем измеренное на полюсе это отклонение составляет около 15 *м*. Преобразуем систему дифференциальных уравнений (15.117)

$$sx(s) - X(0) = -ay(s),\ sy(s) - Y(0) = ax(s). \tag{15.118}$$

Исключим из уравнений (15.118) функцию $y(s)$

$$s^2 x(s) - sX(0) + aY(0) = -a^2 x(s)$$

или

$$x(s) = X(0)\frac{s}{s^2+a^2} - Y(0)\frac{a}{s^2+a^2}, \tag{15.119}$$

отсюда

$$X(t) = X(0)\cos at - Y(0)\sin at. \tag{15.120}$$

Аналогично

$$Y(t) = X(0)\sin at + Y(0)\cos at. \tag{15.121}$$

Мы получили вращение вектора с компонентами X и Y против часовой стрелки (для $a > 0$) вокруг оси z под углом $\theta = at$ относительно этой оси с угловой скоростью a. Непосредственную интерпретацию этого эффекта можно дать, если положить $Y(0) = 0$. Тогда уравнения

$$X(t) = X(0)\cos at,\ Y(t) = X(0)\sin at \tag{15.122}$$

определят в параметрической форме вектор, конец которого вращается против часовой стрелки по круговой орбите радиусом $X(0)$ с угловой скоростью a.

Для Земли величина $X(0)$ составляет примерно 15 *м*, а определенная здесь угловая скорость a соответствует периоду $(2\pi/a)$, равному около 300 суток. В действительности же наблюдается отклонение от формы идеального

сфероида, для которого и были записаны уравнения Эйлера, поэтому на самом деле период оказывается равным 427 суткам.

Если в уравнениях (15.117) положить $X(t) = L_x$, $Y(t) = L_y$ (здесь L_x и L_y — x- и y-компоненты момента количества движения; $a = -g_L B_z$, g_L — гиромагнитное отношение, B_z — магнитное поле вдоль оси z), то уравнения (15.117) будут описывать прецессию Лармора заряженного тела, которое помещено в однородное магнитное поле B_z.

Дельта-функция Дирака. При решении дифференциальных уравнений часто используется изображение δ-функции Дирака:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0},\quad t_0 > 0 \qquad (15.123)$$

и

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,\quad t_0 = 0. \qquad (15.124)$$

Здесь мы исходили из представления δ-функции в виде

$$\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1,\quad \delta(t) = 0 \text{ для } t > 0. \qquad (15.125)$$

В качестве альтернативного метода рассмотрим $\delta(t)$ как предел при $\varepsilon \to \infty$ функции $F(t)$, где

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon^{-1}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases} \qquad (15.126)$$

Прямым вычислением получим

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \qquad (15.127)$$

Перейдем к пределу уже в конечном результате (а не под знаком интеграла), тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\{F(t)\} = 1$ или $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Рассмотренную функцию часто называют импульсной, поскольку она описывает импульсные силы, т. е. силы, действующие очень короткое время.

Импульсная сила. Запишем второй закон Ньютона, сформулированный для короткого действующего импульса

силы, приложенной к массе m:

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=P\delta(t), \tag{15.128}$$

где P — постоянная. Применим к уравнению (15.128) преобразование Лапласа

$$ms^2x(s)-msX(0)-mX'(0)=P. \tag{15.129}$$

Для частицы, которая в начальный момент покоилась, $X'(0)=0$ *. Кроме того, будем полагать, что $X(0)=0$, тогда

$$x(s)=P/ms^2, \tag{15.130}$$

$$X(t)=(P/m)t, \tag{15.131}$$

$$\frac{dX(t)}{dt}=\frac{P}{m}=\text{const}. \tag{15.132}$$

Эффект импульсного воздействия силы $P\delta(t)$ состоит в мгновенной передаче частице импульса величиной P.

Аналогичным образом рассматривается работа баллистического гальванометра. Вращающий момент гальванометра задается исходной величиной kj, где j — импульс тока, а k — коэффициент пропорциональности. Поскольку электрический ток j проходит за очень короткое время, можно обозначить $kj=kq\delta(t)$, где q — общий заряд. Тогда, если обозначить момент инерции I,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=kq\delta(t), \tag{15.133}$$

а затем преобразовать это уравнение, то получим, что воздействие короткого импульсного тока на гальванометр заключается в передаче ему вращательного момента величиной kq.

Упражнения

1. Используя формулу преобразования Лапласа для второй производной, получить формулу преобразования функции $\cos kt$.

2. Если оригинал $F(t)$ может быть разложен в степенной ряд (Тейлора или Лорана), т. е. если $F(t)=\sum_n a_nt^n$ и интеграл

* Под этим нужно понимать $X'(+0)$. Влияние самого импульса учтем таким образом, как будто он включился в момент $t=\varepsilon$, а затем перейдем к пределу $\varepsilon\to 0$.

$\int_0^\infty e^{-st} \sum_m a_n t^n\, dt$, или $\sum_n a_n \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt$, существует, то изображение $f(s)$ не содержит степеней s, превосходящих s^{-1}. Доказать это утверждение. Проверить его, взяв преобразование $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$, и объяснить отрицательный результат.

3. Радиоактивные ядра распадаются в соответствии с законом $dN/dt = -\lambda N$. Здесь N — концентрация данных ядер, λ — постоянная радиоактивного распада. Это уравнение показывает, что скорость распада пропорциональна числу радиоактивных ядер.

Распад радиоактивного ряда, состоящего из n сортов различных ядер, описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dN_n}{dt} = \lambda_{n-1} N_{n-1}, \text{ стабильный изотоп.}$$

Определить для трех сортов ядер функции $N_1(t)$, $N_2(t)$ и $N_3(t)$, удовлетворяющие начальным условиям $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = N_3(0) = 0$.

Ответ: $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$, $N_2(t) = N_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$, $N_3 = N_0\left(1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right)$.

Для малых t найти приближенное значение N_2 и N_3 при условии, что $\lambda_1 \approx \lambda_2$.

Ответ: $N_2 \approx N_0 \lambda_1 t$, $N_3 \approx \dfrac{N_0}{2} \lambda_1 \lambda_2 t^2$.

Для больших t найти приближенное значение N_2 и N_3, когда $\lambda_1 \gg \lambda_2$ и $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Ответ:

$$\lambda_1 t \gg 1: \begin{cases} N_2 \approx N_0 e^{-\lambda_2 t}, \\ N_3 \approx N_0 (1 - e^{-\lambda_2 t}), \end{cases} \qquad \lambda_2 t \gg 1: \begin{cases} N_2 \approx N_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}, \\ N_3 \approx N_0 (1 - e^{-\lambda_1 t}). \end{cases}$$

4. Найти изображение функции ошибок Гаусса $\Phi(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\, dx$.

Ответ: $\mathcal{L}\{\Phi(t)\} = \dfrac{1}{s} e^{s^2/4}\left[1 - \Phi\left(\dfrac{s}{2}\right)\right]$.

15.9. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Теорема смещения. Если в преобразовании Лапласа (15.82) сделать замену $s \to s - a$, то

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} F(t)\, dt = \mathcal{L}\{e^{at} F(t)\}. \tag{15.134}$$

Следовательно, смещение изображения на a равносильно умножению оригинала $F(t)$ на e^{at}, и наоборот. Этот результат оказывается очень полезным для пополнения таблиц преобразований. Из уравнения (15.90) немедленно следует, что

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}, \tag{15.135}$$

а также

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos kt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}, \quad s > 0. \tag{15.136}$$

Затухающее колебание. Полученные формулы соответствия применяются в теории колебания частицы, которая тормозится силой, пропорциональной скорости. В этом случае уравнение (15.112) дополняется членом, который соответствует торможению:

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = 0, \tag{15.137}$$

где b — коэффициент пропорциональности. Предположим, что первоначально частица покоилась, т. е. $X(0) = X_0$ и $X'(0) = 0$. Преобразование Лапласа данного уравнения приводит к

$$m[sx(s) - sX_0] + b[sx(s) - X_0] + kx(s) = 0, \tag{15.138}$$

откуда

$$x(s) = X_0 \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k}. \tag{15.139}$$

Дополним далее знаменатель до полного квадрата:

$$s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right). \tag{15.140}$$

Если торможение невелико, $b^2 < 4km$, последний член имеет знак плюс и может быть заменен выражением

$$x(s) = X_0 \frac{s + b/m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} =$$

$$= X_0 \frac{s + b/2m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} + X_0 \frac{(b/2m\omega_1)\,\omega_1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}. \quad (15.141)$$

С помощью формулы (15.135) и (15.136) определяем, что

$$X(t) = X_0 e^{-(b/2m)t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1} \sin \omega_1 t \right) =$$

$$= X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \cos(\omega_1 t - \varphi), \quad (15.142)$$

где $\operatorname{tg} \varphi = b/2m\omega_1$; $\omega_0^2 = k/m$. Очевидно, когда $b \to 0$, полученное решение переходит в решение для гармонического осциллятора (см. разд. 15.8).

Электрические колебания в замкнутом RLC-контуре аналогичны затухающим колебаниям осциллятора (сопротивление R, индуктивность L, емкость C, последовательное включение R, L, и C). Как известно, согласно закону сохранения энергии Кирхгофа, суммарная разность потенциалов по всей цепи в любой момент времени должна равняться нулю, поэтому

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int^t I\,dt = 0. \quad (15.143)$$

Для исключения из этого уравнения операции интегрирования продифференцируем ток I по времени, тогда

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (15.144)$$

Если мы теперь произведем замену $I(t) \to X(t)$, $R \to b$, $L \to m$, $C^{-1} \to k$, то получим уравнение, идентичное уравнению (15.137). Этот пример интересен тем, что он иллюстрирует тесную математическую связь различных разделов физики *.

---

* Подробнее см. Olsen H. F. Dynamical Analogics. N.Y., Van Nostrand, 1943.

Теорема запаздывания. Умножим изображение $f(s)$ на e^{-bs}, $b>0$

$$e^{-bs}f(s)=e^{-bs}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-s(t+b)}F(t)\,dt \qquad (15.145)$$

и положим $t+b=\tau$, тогда

$$e^{-bs}f(s)=\int_b^\infty e^{-s\tau}F(\tau-b)\,d\tau. \qquad (15.146)$$

Поскольку по предположению $F(t)=0$ для $t<0$, функция $F(\tau-b)=0$ для $0\leqslant\tau<b$. Поэтому, не меняя

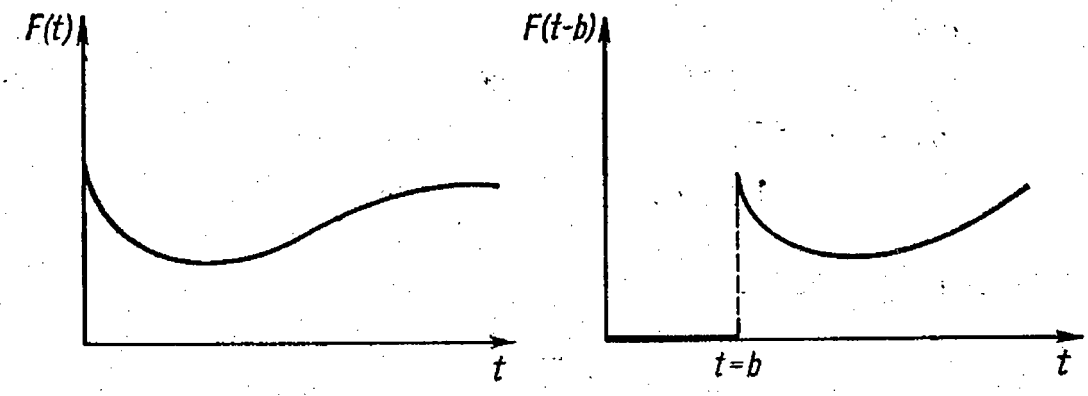


Рис. 15.5. Сдвиг.

значения интеграла, можно его нижний предел сдвинуть до нуля (рис. 15.5). Затем, имея в виду, что τ — переменная интегрирования, запишем

$$e^{-bs}f(s)=\mathcal{L}\{F(t-b)\}. \qquad (15.147)$$

Электромагнитные волны. Поперечная электромагнитная волна с $E=E_y$ или E_z, распространяющаяся вдоль оси x, описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2E(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2E(x,t)}{\partial t^2}=0. \qquad (15.148)$$

Преобразуем это уравнение по переменной t

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\}-\frac{s^2}{v^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\}+$$

$$+\frac{s}{v^2}E(x,0)+\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \qquad (15.149)$$

Если задать начальные условия в виде

$$E(x, 0)=0, \quad \left.\frac{\partial E(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

то уравнение (*обыкновенное* дифференциальное)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{L}\{E(x, t)\}=\frac{s^2}{v^2}\mathscr{L}\{E(x, t)\} \qquad (15.150)$$

имеет решение

$$\mathscr{L}\{E(x, t)\}=c_1 e^{-(s/v)x}+c_2 e^{+(s/v)x}. \qquad (15.151)$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются с помощью дополнительных граничных условий. Из условия ограниченности электромагнитной волны при $x \to \infty$ следует, что изображение тоже должно оставаться конечным, поэтому $c_2 = 0$. Если значение волны в начале координат $E(0, t)$ обозначить $F(t)$, то $c_1 = f(s)$ и

$$\mathscr{L}\{E(x, t)\}=e^{-(s/v)x} f(s). \qquad (15.152)$$

Имея в виду результат (15.147), находим

$$E(x, t)=\begin{cases} F(t-x/b), & t \geqslant x/v, \\ 0, & t<x/v. \end{cases} \qquad (15.153)$$

Дифференцируя $E(x, t)$ и подставляя полученный результат в уравнение (15.148), убеждаемся, что это решение — правильное. Оно представляет собой волну (или импульс), движущуюся в положительном направлении x со скоростью v. Обратим внимание, что область, соответствующая $x > vt$, отвечает невозмущенному состоянию. За время t волна еще не дошла до указанной области. Если нас интересует случай, когда сигнал распространяется в отрицательном направлении оси x, постоянную c_1 необходимо положить равной нулю, и тогда

$$E(x, t)=\begin{cases} F(t+x/v), & t \geqslant -x/v, \\ 0, & t<-x/v \end{cases} \qquad (15.154)$$

будет описывать волну, бегущую в отрицательном направлении.

Дифференцирование изображения. Выберем параметр s таким, чтобы произведение функции e^{-st} на оригинал $F(t)$,

который должен быть, по крайней мере, кусочно-непрерывным, экспоненциально исчезало при большом s, а интеграл $\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$ равномерно сходился. В этом случае подынтегральную функцию можно продифференцировать под знаком интеграла по s, тогда

$$f'(s)=\int_0^\infty(-t)\,e^{-st}F(t)\,dt=\mathcal{L}\{-tF(t)\}. \quad (15.155)$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$f^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^nF(t)\}. \quad (15.156)$$

Все такие интегралы равномерно сходятся в силу экспоненциального спада подынтегральной функции $e^{-st}F(t)$.

В качестве примера применения рассмотренного свойства отметим, что с его помощью можно получить формулы преобразования Лапласа некоторых новых функций. Действительно,

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}\,dt=\frac{1}{s-k},\quad s>k. \quad (15.157)$$

Дифференцируя по s (или по k), получаем

$$\mathcal{L}\{te^{kt}\}=\frac{1}{(s-k)^2},\quad s>k. \quad (15.158)$$

Уравнение Бесселя. Используя дифференцирование преобразования Лапласа, будем решать уравнение Бесселя с $n=0$, которое можно записать так (см. гл. 11):

$$x^2y''(x)+xy'(x)+x^2y(x)=0. \quad (15.159)$$

Разделим это уравнение на x и для приведения его в согласие с принятыми обозначениями положим $t=x$ и $F(t)=y(x)$. После этого уравнения Бесселя приобретет вид:

$$tF''(t)+F'(t)+tF(t)=0. \quad (15.160)$$

Будем искать регулярное решение этого уравнения при условии $F(0)=1$. Кроме того, предположим существование изображения и искомого оригинала $F(t)$. Применим

преобразование Лапласа к этому уравнению и учтем (15.107) и (15.155), тогда

$$-\frac{d}{ds}[s^2 f(s) - s] + sf(s) - 1 - \frac{d}{ds} f(s) = 0. \quad (15.161)$$

Поскольку $F(0)$ ограниченна, из уравнения (15.160) следует, что $F'(0) = 0$. Перегруппируем члены в уравнении (15.161)

$$(s^2 + 1) f'(s) + sf(s) = 0 \quad (15.162)$$

или

$$\frac{df}{f} = -\frac{s\,ds}{s^2+1}. \quad (15.163)$$

Интегрирование последнего выражения дает

$$\ln f(s) = -(1/2)\ln(s^2 + 1) + \ln C, \quad (15.164)$$

откуда следует, что

$$f(s) = C/\sqrt{s^2 + 1}. \quad (15.165)$$

Для того чтобы иметь возможность применить формулу (15.91), разложим изображение $f(s)$ в ряд по отрицательным степеням s, который сходится для $s > 1$:

$$f(s) = \frac{C}{s}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{C}{s}\left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1\cdot 3}{(2^2\cdot 2!)^2 s^4} - \ldots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2 s^{2n}} + \ldots\right]. \quad (15.166)$$

Теперь по заданному изображению перейдем к оригиналу

$$F(t) = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}. \quad (15.167)$$

Из условия $F(0) = 1$ постоянную C нужно положить равной 1, но в таком случае $F(t)$ совпадает с уже известной функцией Бесселя нулевого порядка $J_0(t)$. Следовательно,

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}. \quad (15.168)$$

Напомним, что это справедливо при условии $s > 1$. Случай $s > 0$ нуждается в дополнительном исследовании.

Рассмотренное применение преобразования Лапласа оказалось сравнительно легким, вероятно, только потому, что в уравнении Бесселя n было положено равным нулю. Это позволило исключить одну степень x (или t). Если же этого не сделать, то из-за членов вида $t^2F(t)$ появится вторая производная изображения $f(s)$. Решение окончательного уравнения при этом усложнится.

Если мы не захотим ограничиваться линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то по-прежнему сможем пользоваться преобразованием Лапласа, однако это не гарантирует получение решения.

С приложением разработанного метода к уравнению Бесселя с $n \neq 0$ можно подробно ознакомиться в литературе по преобразованию Лапласа. С другой стороны, разлагая $J_n(t)$ в бесконечный ряд и затем почленно применяя преобразование Лапласа, можно показать (см. ниже упр. 5), что

$$\mathscr{L}\{J_n(at)\} = \frac{a^{-n}\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}. \qquad (15.169)$$

Интегрирование изображения. Если $F(t)$ кусочно-непрерывна, а x достаточно велико, так что функция $e^{-xt}F(t)$ экспоненциально убывает (когда $x \to \infty$), то интеграл

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt \qquad (15.170)$$

равномерно сходится по x, поэтому можно изменить порядок интегрирования в следующем выражении:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_s^b \int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt\,dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\left(e^{-st}-e^{-bt}\right)dt. \qquad (15.171)$$

Значение нижнего предела интегрирования s выбрано достаточно большим с тем, чтобы $f(s)$ попадала внутрь интервала равномерной сходимости. Теперь перейдем к пределу $b \to \infty$, тогда

$$\int_s^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}e^{-st}\,dt = \mathscr{L}^1\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}. \qquad (15.172)$$

Из приведенного рассуждения следует, что функция $F(t)/t$ в точке $t=0$ конечна или расходится не быстрее, чем t^{-1} (таким образом, $\mathcal{L}\{F(t)/t\}$ будет существовать).

Упражнения

1. Решить уравнение для затухающих колебаний (15.137) при начальных условиях $X(0)=X_0$, $X'(0)=0$ для двух случаев: 1) $b^2=4km$ (граница затухания, критическая точка); 2) $b^2>4km$ (сильное затухание).

Ответ: $X(t)=X_0 e^{-(b/2m)t}\left(1+\frac{b}{2m}t\right)$.

2. Решить уравнение (15.137) при начальных условиях $X(0)=0$, $X'(0)=v_0$ для трех случаев: 1) $b^2<4km$ (слабое затухание); 2) $b^2=4km$ (граница затухания, критическая точка); 3) $b^2>4km$ (сильное затухание).

Ответ: 1) $X(t)=\frac{v_0}{\omega_1}e^{-(b/2m)t}\sin\omega t$; 2) $X(t)=v_0 t e^{-(b/2m)t}$.

3. «Звенящий» контур. Некоторый контур составлен из параллельно включенных сопротивления, индуктивности и емкости (рис. 15.6).

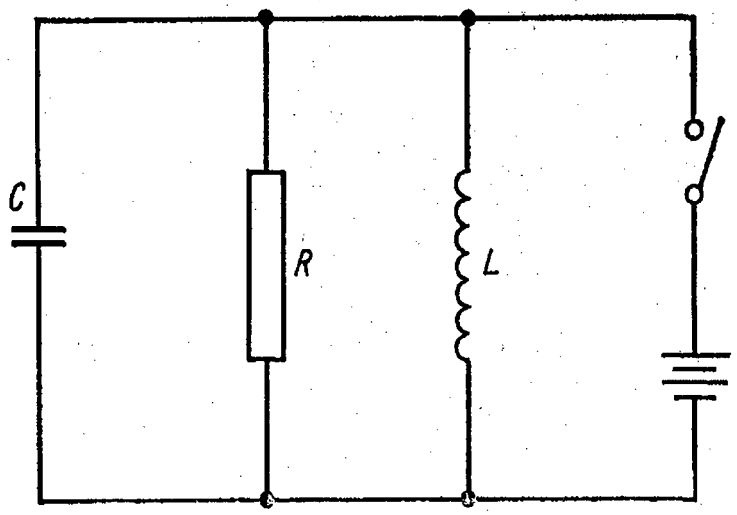


Рис. 15.6. «Звенящий» контур.

Параллельно включенный в контур источник поддерживает постоянное напряжение на всех его элементах и заряжает конденсатор. В момент $t=0$ контур отключается от источника напряжения. Найти напряжение на всех элементах контура в зависимости от времени. Предположить, что сопротивление велико. В соответствии с законом Кирхгофа

$$I_R+I_C+I_L=0 \quad \text{и} \quad E_R=E_C=E_L,$$

где

$$E_R=I_R R;\quad E_C=\frac{q_0}{C}+\frac{1}{C}\int_0^t I_C\,dt;\quad E_L=L\frac{dI_L}{dt};$$

q_0 — начальный заряд на обкладках конденсатора.

4. Движение свободно падающего тела в некоторой тормозящей среде можно описать уравнением

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}=mg-b\frac{dX(t)}{dt},$$

где сила сопротивления пропорциональна скорости. Определить $X(t)$ и $dX(t)/dt$ при начальных условиях $X(0)=dX/dt\,|_{t=0}=0$.

5. Доказать, что для ν, равного 1 и 2,

$$\mathscr{L}\{J_\nu(at)\}=\frac{a^\nu(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

(разложением J_ν в ряд). Какие ограничения наложены на s и ν?

Ответ: $s>1$, $\nu>-1$.

6. Воспользоваться представлением $J_0(t)$ в виде контурного интеграла, применить преобразование Лапласа, изменить порядок интегрирования и показать, что

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\}=(s^2+1)^{-1/2},\qquad s>0.$$

7. С помощью рекуррентных формул для функций Бесселя получить из $\mathscr{L}\{J_0(t)\}$ преобразование Лапласа функции $J_n(t)$.

8. Показать, что $\mathscr{L}\{I_0(at)\}=(s^2-a^2)^{-1/2}$, $s>a$.

9. Проверить соотношения:

$$\mathscr{L}\{J_{1/2}(at)\}=\frac{[(a^2+s^2)^{1/2}-s]^{1/2}}{a^{1/2}(a^2+s^2)^{1/2}},\quad \mathscr{L}\{N_{1/2}(at)\}=$$

$$=\frac{[(a^2+s^2)^{1/2}+s]^{1/2}}{a^{1/2}(a^2+s^2)^{1/2}},$$

$$\mathscr{L}\{I_{1/2}(at)\}=\frac{[s-(s^2-a^2)^{1/2}]^{1/2}}{a^{1/2}(s^2-a^2)^{1/2}},\quad \mathscr{L}\{K_{1/2}(at)\}=\frac{\pi}{(2a)^{1/2}(s+a)^{1/2}},$$

$$\mathscr{L}\{j_0(at)\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\}=\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\left(\frac{s}{a}\right),$$

$\mathscr{L}\{n_0(at)\}$ — не существует,

$$\mathscr{L}\{i_0(at)\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{sh} at}{at}\right\}=\frac{1}{2a}\ln\frac{s+a}{s-a}=\frac{1}{a}\operatorname{arccth}\left(\frac{s}{a}\right).$$

10. Если функция зависит от аргумента $\sqrt{t}$, получаются несколько необычные изображения этих функций. Показать, что

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\left(2\sqrt{kt}\right)\right\}=\frac{1}{s^{1/2}}e^{-k/s},$$

$$\mathscr{L}\left\{J_0\left(2\sqrt{kt}\right)\right\}=\frac{1}{s}e^{-k/s},\quad \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\operatorname{sh}\left(2\sqrt{kt}\right)\right\}=\frac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}.$$

11. Получить изображение решения уравнения Лагерра

$$tF''(t)+(1-t)F'(t)+nF(t)=0.$$

(Следует продифференцировать изображение и применить преобразование Лапласа к производной. В конечном результате положить $n=0$.)

12. Показать, что изображение полинома Лагерра $L_n(at)$ имеет вид:

$$\mathscr{L}\{L_n(at)\}=\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}},\qquad s>0.$$

13. Показать, что

$$\mathscr{L}\{E_1(t)\}=\frac{1}{s}\ln(s+1),\qquad s>0,$$

где $E_1(t)$ — интегральная экспонента: $E_1(t)=\int\limits_t^\infty\frac{e^{-\tau}\,d\tau}{\tau}=\int\limits^\infty\frac{e^{-xt}}{x}\,dx.$

14. Показать, что $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin kt}{t}\right\}=\operatorname{arcctg}\left(\frac{s}{k}\right).$

Положив в этом соотношении $k=0$, доказать, что

$$\mathscr{L}\{\mathrm{Si}(t)\}=-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}s.$$

15. Если $F(t)$ периодична с периодом a, так что $F(t+a)=F(t)$ для всех $t\geqslant 0$, то

$$\mathscr{L}\{F(t)\}=\frac{\int\limits_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-as}},$$

где интеграл берется только по *первому периоду* оригинала $F(t)$. Доказать эту формулу.

15.10. ТЕОРЕМА СВЕРТКИ

Теорема свертки * — одно из важнейших свойств преобразования Лапласа. Возьмем два изображения

$$f_1(s)=\mathscr{L}\{F_1(t)\}\ \text{и}\ f_2(s)=\mathscr{L}\{F_2(t)\}\qquad(15.173)$$

* Эта же теорема доказывается с помощью интеграла Бромвича (см. упр. 7 к разд. 15.11).

и умножим их друг на друга. Для простоты положим верхние пределы конечными

$$f_1(s)\cdot f_2(s)=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-sx}F_1(x)\,dx\int_0^{a-x}e^{-sy}F_2(y)\,dy. \qquad (15.174)$$

Верхние пределы в этих интегралах выбраны так, чтобы область интегрирования (рис. 15.7, *а*) представляла собой треугольник (но не квадрат). Такое изменение оказывается возможным благодаря экспоненциальному спаду двух

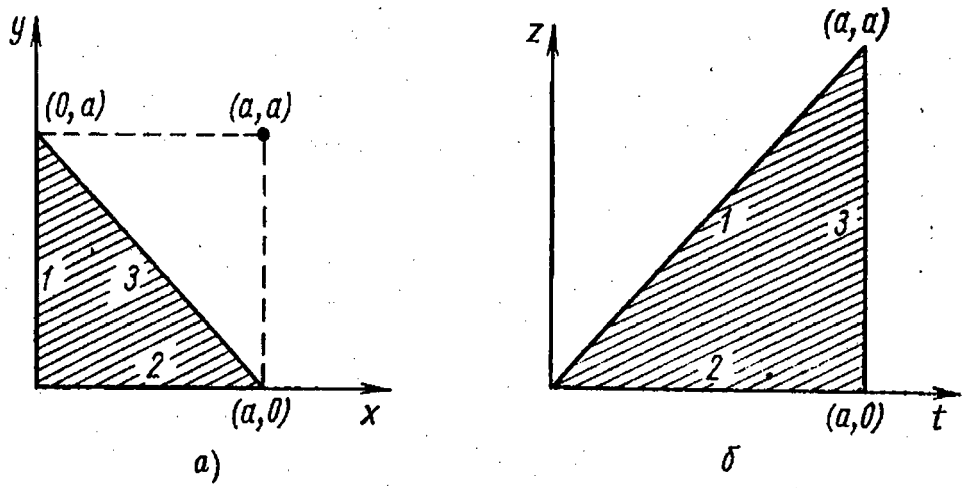


Рис. 15.7. Замена переменной:
а — плоскость *xy*; *б* — плоскость *zt*.

подынтегральных функций. В пределе при $a\to\infty$ интегрирование по светлому треугольнику не будет давать никакого вклада. Заменой переменных $x=t-z$, $y=z$ область интегрирования отображается на треугольник (рис. 15.7, *б*). С помощью якобиана преобразуем элемент поверхности

$$dx\,dy=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}dt\,dz=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}dt\,dz \qquad (15.175)$$

или $dx\,dy=dt\,dz$. С учетом этого уравнение (15.174) приобретет вид

$$f_1(s)\cdot f_2(s)=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}\int_0^t F_1(t-z)\,F_2(z)\,dz\,dt=$$

$$=\mathscr{L}\left\{\int_0^t F_1(t-z)\,F_2(z)\,dz\right\}. \qquad (15.176)$$

Для удобства обозначим этот интеграл символом

$$\int_0^t F_1(t-z)\,F_2(z)\,dz \equiv F_1 * F_2 \qquad (15.177)$$

и назовем его *сверткой* по аналогии со сверткой из теории преобразования Фурье (см. разд. 15.5). Если сделать замену $w = t - z$, то окажется, что

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1, \qquad (15.178)$$

здесь очевидна симметричность соотношения. Выполнив обратное преобразование, найдем также

$$\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\cdot f_2(s)\} = \int_0^t F_1(t-z)\,F_2(z)\,dz. \qquad (15.179)$$

Это выражение пригодно для получения новых формул преобразования. Одно из его приложений связано с решением интегральных уравнений (гл. 16).

Вынужденные колебания с затуханием. Рассмотрим частицу массой m, которая закреплена на пружине и совершает затухающие колебания при одновременном действии вынуждающей силы $F(t)$, тогда уравнение движения (15.112) примет вид

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = F(t). \qquad (15.180)$$

Начальные условия для упрощения решения возьмем в форме $X(0) = X'(0) = 0$, а затем преобразуем уравнение

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s) \qquad (15.181)$$

или

$$x(s) = \frac{f(s)}{m}\cdot\frac{1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}, \qquad (15.182)$$

где, как и прежде, $\omega_1^2 \equiv k/m - b^2/4m^2$.

На основании теоремы о свертке (15.176)

$$X(t) = \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(t-z)\,e^{-(b/2m)z}\sin\omega_1 z\,dz. \qquad (15.183)$$

Если сила имеет вид $F(t) = P\delta(t)$ *, то

$$X(t) = \frac{P}{m\omega_1} e^{-(b/2m)t} \sin \omega_1 t, \qquad (15.184)$$

где P — передаваемый импульс, а постоянная P/m — начальная скорость $X'(0)$.

Если $F(t) = F_0 \sin\omega t$, снова можно воспользоваться уравнением (15.183), однако, вероятно, целесообразнее прибегнуть к разложению на простые дроби. При $\tilde{f}(s) = F_0\omega/(s^2 + \omega^2)$ уравнение (15.182) перепишется иначе:

$$x(s) = \frac{F_0\omega}{m} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{1}{(s + b/2m)^2+\omega_1^2} =$$

$$= \frac{F_0\omega}{m}\left[\frac{a's+b'}{s^2+\omega^2} + \frac{c's+d'}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}\right]. \qquad (15.185)$$

Коэффициенты a', b', d' и c' не зависят от s. Прямые вычисления дают

$$a' = \frac{b}{m}\omega^2 + \frac{m}{b}(\omega_0^2 - \omega^2)^2,$$

$$b' = -\frac{m}{b}(\omega_0^2 - \omega^2)\left[\frac{b}{m}\omega^2 + \frac{m}{b}(\omega_0^2 - \omega^2)^2\right].$$

к оэффициенты C' и d' приводят к экспоненциальному росту членов, поэтому их следует положить равными нулю. Выполняя операцию обратного преобразования, придем к установившемуся решению

$$X(t) = \frac{F_0}{[b^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \varphi), \qquad (15.186)$$

где $\operatorname{tg}\varphi = b\omega/m(\omega_0^2 - \omega^2)$.

Условие максимальности амплитуды (резонанса) находится после дифференцирования знаменателя:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2} = \omega_1^2 - \frac{b^2}{4m^2}. \qquad (15.187)$$

В резонансе амплитуда становится равной $F_0/b\omega_0$, откуда очевидно, что масса m начинает совершать колебания, размах которых неограниченно возрастает, если торможение невелико ($b = 0$). Заметим, что мы получили три различные характеристические частоты:

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}, \quad \omega_1^2 = \omega_2^2 - \frac{b^2}{4m^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

* Заметим, что $\delta(t)$ лежит *вне* отрезка $[0, t]$.

Первое соотношение — условие резонанса при вынужденном колебании и наличии торможения; второе — условие резонанса свободного осциллятора при наличии торможения и третье — условие для свободного осциллятора в отсутствие торможения. Частоты совпадают *только* в том случае, если торможение отсутствует.

Таутохрона. Рассмотрим задачу о таутохроне, которая связана с проблемой брахистохроны (см. разд. 17.2). Она заключается в отыскании криволинейного пути, по которому частица, свободно скользя (без трения), *независимо* от начальной точки своего движения за один и тот же отрезок времени попадает в начало координат. В начальный момент частица покоится.

На основании закона сохранения энергии приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = mg\,(y_0 - y), \quad \frac{d\lambda}{dt} < 0, \tag{15.188}$$

где λ — расстояние вдоль кривой от начала координат, m — масса частицы; g — ускорение силы тяжести. Тогда

$$-d\lambda/\sqrt{y_0 - y} = \sqrt{2g}\,dt. \tag{15.189}$$

Интегрируя вдоль всего пути движения частицы (от момента $t = 0$ до момента $t = T$), получаем

$$\sqrt{2g}\,T = -\int\limits_{y=y_0}^{y=0} \frac{d\lambda}{\sqrt{y_0 - y}} = \int\limits_{y=0}^{y=y_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{y_0 - y}}. \tag{15.190}$$

По условию задачи время спуска постоянно и не должно зависеть от y_0. Что же касается длины пути λ, то она является функцией высоты, скажем $\lambda = F(y)$, и

$$\frac{d\lambda}{dy} = F'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{15.191}$$

Отсюда, по определению свертки,

$$\sqrt{2g}\,T = \int\limits_0^{y_0} (y_0 - y)^{-1/2} F'(y)\,dy = y^{-1/2} * F'(y). \tag{15.192}$$

Изображение свертки двух функций равно произведению изображений, поэтому с учетом соотношения (15.91)

$$\sqrt{2g}\,\frac{T}{s}=\mathcal{L}\{F'(y)\}\cdot\mathcal{L}\{y^{-1/2}\}=\mathcal{L}\{F'(y)\}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,. \tag{15.193}$$

Как известно, $(-1/2)!=\sqrt{\pi}$. Отсюда

$$\mathcal{L}\{F'(y)\}=\frac{\sqrt{2g}\,T}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,. \tag{15.194}$$

Обратное преобразование дает

$$F'(y)=\frac{\sqrt{2g}\,T}{\pi}\,y^{-1/2}. \tag{15.195}$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{c}{y}\,, \tag{15.196}$$

где $c=2gT^2/\pi^2$. Разделение переменных приводит к уравнению

$$dx=\sqrt{\frac{c-y}{y}}\,dy, \tag{15.197}$$

которое выполняется, если

$$x=\frac{c}{2}(\theta+\sin\theta),\quad y=\frac{c}{2}(1-\cos\theta). \tag{15.198}$$

Эти функции в параметрическом виде определяют таутохрону-циклоиду, проходящую через начало координат (рис. 15.8).

На основе проведенного анализа можно сделать вывод, что частица, скользящая без трения вдоль кривой вниз

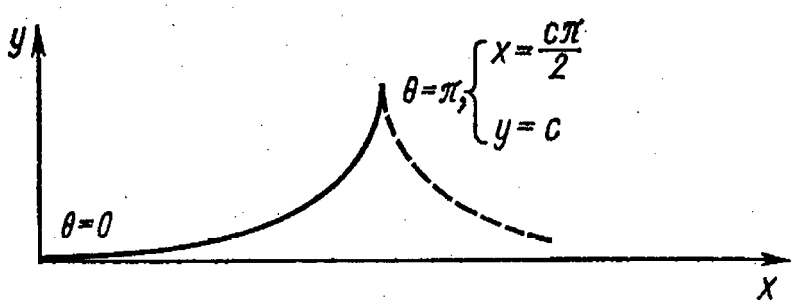


Рис. 15.8. Таутохрона, движение по циклоиде.

в первом квадранте (вверх по отраженной кривой во втором квадранте), совершает возвратное поступательное дви-

жение с периодом, не зависящим от ее амплитуды. Этим же свойством характеризуется и маятник с ограничителем, выполненным в форме циклоиды.

Упражнения

1. С помощью теоремы свертки доказать, что $\frac{1}{s} f(s) = \mathscr{L}\left\{\int_0^t F(x)\,dx\right\}$, где $f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\}$.

2. Заданы функции $F(t) = t^a$ и $G(t) = t^b$.

Показать, что свертка $F * G = t^{a+b+1} \int_0^1 y^a (1-y)^b\,dy$.

С помощью теоремы свертки доказать, что

$$\int_0^1 y^a (1-y)^b\,dy = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Если заменим a на $(a-1)$ и b на $(b-1)$, то получим формулу Эйлера для бета-функции (см. гл. 10).

3. На незатухающий осциллятор действует вынуждающая сила $F_0 \sin \omega t$. Найти смещение как функцию времени. Решением будет линейная комбинация двух гармонических колебаний: одного с частотой вынуждающей силы, а другого с частотой свободного осциллятора ω_0 (предполагается, что $X(0) = X'(0) = 0$).

Ответ: $X(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\sin \omega_0 t - \sin \omega t\right)$.

15.11. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Выведем формулу, определяющую функцию-оригинал по ее изображению, иначе говоря, осуществляющую обратное преобразование Лапласа:

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}. \qquad (15.199)$$

Для получения этой формулы можно использовать преобразование Фурье, для которого уже известно обратное преобразование. Однако здесь имеется некоторая трудность. Мы требовали, чтобы условием применимости преобразования Фурье к функции служило подчинение этой

функции условиям Дирихле. В частности, должно выполняться

$$\lim_{\omega\to\infty} G(\omega) = 0. \qquad (15.200)$$

Однако, вообще говоря, функция $F(t)$ может даже расходиться экспоненциально. Чтобы преодолеть это затруднение, выделим экспоненциальный множитель $e^{\gamma t}$ из (возможно) расходящейся функции и запишем ее в виде

$$F(t) = e^{\gamma t} G(t). \qquad (15.201)$$

Если $F(t)$ расходится как $e^{\alpha t}$, то надо потребовать, чтобы параметр γ превосходил α так, чтобы функция $G(t)$ *сходилась*. Далее, при $G(t) = 0$ для $t < 0$ и других соответствующих условиях, которые позволят представить эту функцию интегралом Фурье (15.20), запишем

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, du \int_{0}^{\infty} G(v)\, e^{-iuv}\, dv. \qquad (15.202)$$

Перепишем последний интеграл с учетом (15.201):

$$F(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, du \int_{0}^{\infty} F(v)\, e^{-\gamma v} e^{-iuv}\, dv. \qquad (15.203)$$

После замены переменной

$$s = \gamma + iu \qquad (15.204)$$

интеграл по переменной v приобретет форму преобразования Лапласа

$$\int_{0}^{\infty} F(v)\, e^{-sv}\, dv = f(s); \qquad (15.205)$$

здесь s — комплексная переменная, причем условие $\mathrm{Re}\, s \geqslant \gamma$ гарантирует существование интеграла. Заметим, что интеграл Лапласа (15.205) определяет изображение функции в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant \gamma$.

При постоянном γ $ds = idu$. Подставляя (15.205) в формулу (15.203), получаем обратное преобразование

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s)\, ds. \qquad (15.206)$$

Выражение (12.206) называется обратным преобразованием Лапласа. Замена $ds = idu$ вызывает поворот линии инте-

грирования на 90°. В окончательном виде путь интегрирования представляет собой вертикальную прямую линию в комплексной плоскости, постоянная γ выбрана так, чтобы все особенности функции $f(s)$ были слева от нее (рис. 15.9).

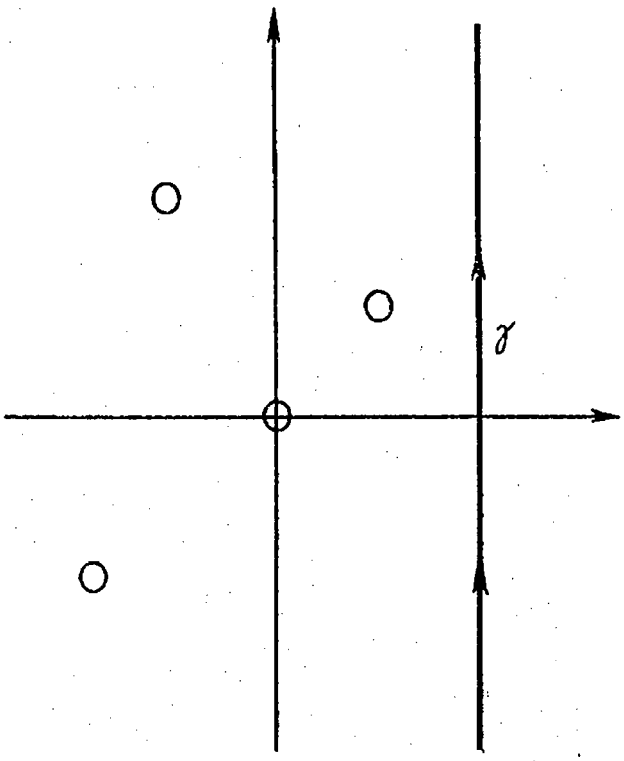


Рис. 15.9. Особенности функции $e^{st} f(s)$ (обозначены светлыми кружками) в s-плоскости.

Интеграл Бромвича. Интеграл (15.206), определяющий обратное преобразование, известен как интеграл Бромвича, хотя иногда его рассматривают в качестве математической формулировки теоремы Фурье—Меллина или интеграла Фурье — Меллина. Этот интеграл вычисляется обычными методами контурного интегрирования (см. гл. 7). Если $t > 0$, то можно замкнуть контур полукругом бесконечного радиуса в левой полуплоскости. Тогда на основании теоремы о вычетах (см. разд. 7.2).

$$F(t) = \sum (\text{вычеты в полуплоскости } \operatorname{Re} s < \gamma). \quad (15.207)$$

Замыкание контура в левой полуплоскости при вычислении интеграла может, вероятно, показаться парадоксальным с точки зрения первоначального требования $\operatorname{Re} s \geqslant \gamma$. Однако никакого противоречия в этом нет, если учесть, что требование $\operatorname{Re} s \geqslant \gamma$ обеспечивало сходимость интеграла Лапласа, который определял функцию-изображение $f(s)$. После того как $f(s)$ уже найдена, можно воспользоваться ее аналитическими свойствами в любой области комплексной плоскости. В частности, для отыскания оригинала мы применяем метод аналитического продолжения в левой полуплоскости, аналогичный прием был использован для распространения определения интеграла Эйлера (10.5) на левую полуплоскость.

Поясним смысл формулы (15.206) на следующих двух примерах.

Пример 1. Пусть $f(s)=a/(s^2-a^2)$, тогда

$$e^{st}f(s)=\frac{ae^{st}}{s^2-a^2}=\frac{ae^{st}}{(s+a)(s-a)}. \qquad (15.208)$$

Эта функция имеет простой полюс в точке $s=a$ с вычетом $e^{at}/2$ и второй полюс в точке $s=-a$ с вычетом $e^{-at}/2$

$$\sum \text{вычетов}=(e^{at}-e^{-at})/2=\operatorname{sh} dt \qquad (15.209)$$

в согласии с выражением (15.88).

Пример 2. Пусть $f(s)=(1-e^{-as})/s$, тогда

$$e^{st}f(s)=\frac{e^{st}}{s}-e^{-as}\left(\frac{e^{st}}{s}\right). \qquad (15.210)$$

Первый член в правой части имеет простой полюс в точке $s=0$ с вычетом, равным 1. Тогда на основании (15.207)

$$F_1(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \qquad (15.211)$$

Отвлекаясь от знака минус и множителя e^{-as}, находим, что второй член в правой части также имеет простой полюс в точке $s=0$ с вычетом 1. В соответствии с теоремой запаздывания (15.207)

$$F_2(t)=\begin{cases}1, & t-a>0,\\ 0, & t-a<0.\end{cases} \qquad (15.212)$$

Следовательно,

$$F(t)=F_1(t)-F_2(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0<t<a,\\ 0, & t>a.\end{cases} \qquad (15.213)$$

Таким образом, мы получили функцию включения единичной высоты и длительностью a (рис. 15.10)

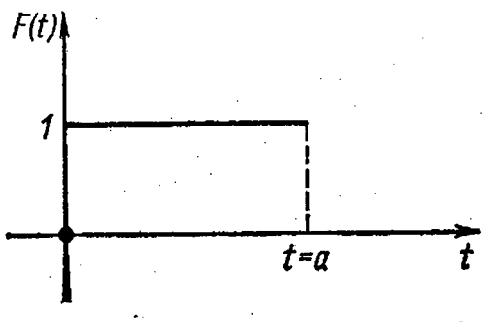


Рис. 15.10. Функция включения конечной длительности.

Теперь уместно высказать два общих соображения. Во-первых, мы убедились в плодотворности обратного преобразования. В случае более сложного изображения, которое отсутствует в таблицах преобразований Лапласа, можно всегда воспользоваться формулой (15.207).

Во-вторых, проведенный вывод формулы обращения нельзя признать вполне корректным. Скорее, данный вывод можно считать только конструктивным, хотя его можно

сделать и совершенно строгим. Отыскание обратного преобразования в какой-то мере аналогично решению дифференциального уравнения. При этом процедура весьма незначительно отличается от той, которой пользуются, решая уравнение. При необходимости вполне допустимо попытаться угадать решение, которое всегда можно проверить с помощью обратной подстановки в исходное дифференциальное уравнение. Точно так же оригинал $F(t)$ можно (а для проверки возможной ошибки и должно) проверить, подставляя его в уравнение (15.82):

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s).$$

Скорость электромагнитной волны в дисперсной среде. Групповая скорость u бегущей волны связана с фазовой скоростью v уравнением

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \qquad (15.214)$$

где λ — длина волны. Вблизи линии поглощения (резонанс) производная $dv/d\lambda$ может стать отрицательной (рис. 15.11),

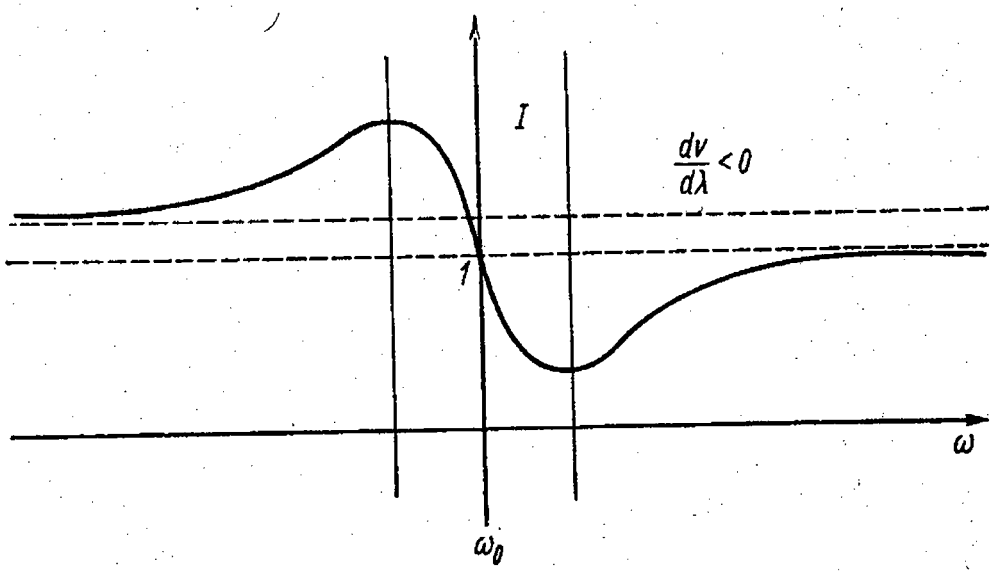


Рис. 15.11. Оптическая дисперсия: *I* — аномальная область.

в результате чего $u > c$, поэтому сразу же возникает вопрос: а не может ли сигнал распространяться со скоростью, превышающей скорость света c в вакууме? Этот вопрос имеет фундаментальное значение в специальной теории относительности.

Необходимо решить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \qquad (15.215)$$

которое описывает гармоническое колебание, возникшее в начале координат в нулевой момент времени. Поскольку мы имеем дело с рассеивающей средой, скорость v будет зависеть от угловой частоты. Остановимся, например, на плоской волне с угловой частотой ω, падающей на заслонку, которая помещена в начале координат. В момент $t = 0$

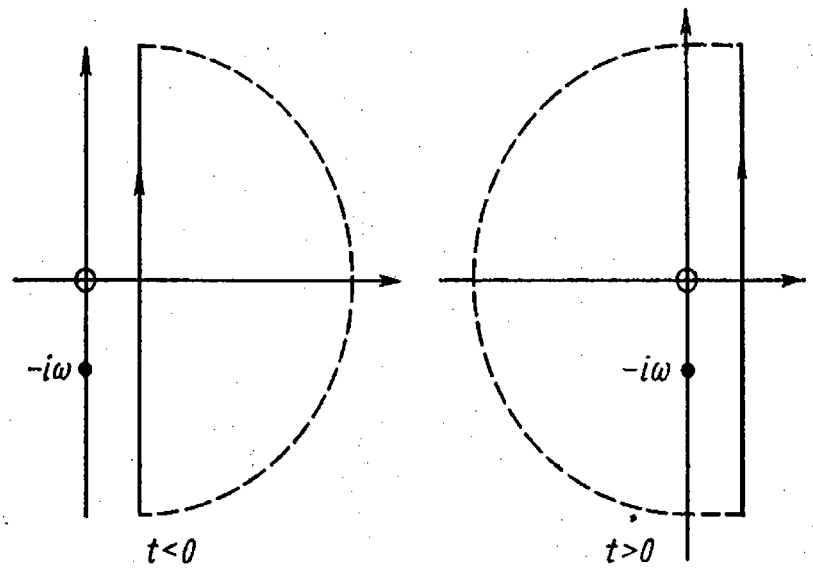


Рис. 15.12. Возможные варианты замкнутого контура.

заслонка мгновенно открывается, и волна начинает распространяться дальше вдоль положительного направления оси x.

Построим теперь решение уравнения (15.215) в области $x \geqslant 0$. Для этой цели удобно воспользоваться интегралом Коши (контуры показаны на рис. 15.12):

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}}{s + i\omega} ds = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{i-\omega t}, & t > 0. \end{cases} \qquad (15.216)$$

Это выражение в точности совпадает с обратным преобразованием Лапласа, в чем можно убедиться, взяв функцию

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-i\omega t}, & t > 0 \end{cases} \qquad (15.217)$$

и применив к ней преобразование Лапласа. Изображение окажется равным

$$f(s) = 1/(s + i\omega), \qquad (15.218)$$

Интеграл Коши описывает изменение во времени сигнала, возникшего в момент $t = 0$. Для включения в решение пространственной зависимости заметим, что функция $e^{s(t-x/v)}$ удовлетворяет волновому уравнению. Учитывая это, заменим t на $t - x/v$ и перепишем решение в виде

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s(t-x/v)}}{s+i\omega} ds \qquad (15.219)$$

По самому смыслу вывода обратного преобразования очевидно, что переменная s соответствует переменной ω из преобразования Фурье. Следовательно, скорость волны v становится функцией s, т. е. $v = v(s)$. Однако сейчас нас интересует лишь свойство

$$\lim_{|s|\to\infty} v(s) = c = \text{const}, \qquad (15.220)$$

которое следует из асимптотического поведения кривой в правой части на рис. 15.11 *.

Для вычисления контурного интеграла (15.219) с помощью теории вычетов мы можем замкнуть контур полуокружностью в правой полуплоскости, что обеспечит выполнение неравенства $t - x/c < 0$. Отсюда следует, что для $t - x/c < 0$

$$\psi(x, t) = 0, \qquad (15.221)$$

т. е. скорость распространения сигнала не может превосходить скорости света c в вакууме.

Упражнения

1. Найти $\mathscr{L}^{-1}\{s/(s^2-k^2)\}$, используя: 1) разложение на простые дроби и 2) обратное преобразование Лапласа.

2. Найти $\mathscr{L}^{-1}\{k^2/s(s^2+k^2)\}$, используя: 1) разложение на простые дроби, 2) теорему о свертке и 3) обратное преобразование Лапласа.

Ответ: $F(t) = 1 - \cos kt$.

3. Применив интеграл Бромвича, найти оригинал по заданному изображению $f(s) = s^{-1/2}$. Заметим, что функция $f(s)$ имеет точку ветвления при $s = 0$ (линия разреза по отрицательной полуоси x).

Ответ: $F(t) = (\pi t)^{-1/2}$.

---

* Условие (15.220) доказывается строго в теории аномальной дисперсии.

4. С помощью обратного преобразования Лапласа показать, что $\mathscr{L}^{-1}\{(s^2+1)^{-1/2}\}=J_0(t)$.

5. Произвести обратное преобразование Лапласа

$$\mathscr{L}^{-1}\{(s^2-a^2)^{-1/2}\}=I_0(at),\ \mathscr{L}^{-1}\{(s-\sqrt{s^2-a^2})^{\nu}/\sqrt{s^2-a^2}\}=$$
$$=a^{\nu}I_{\nu}(at),\ \nu>-1.$$

6. Показать, что $\mathscr{L}^{-1}\{(\ln s)/s\}=-\ln t-C$, где $C=0{,}5772$— постоянная Эйлера.

7. Доказать теорему свертки, используя обратное преобразование Лапласа.

ГЛАВА 16

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

16.1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения, в которых неизвестная функция содержится под знаком интеграла, называются *интегральными*, причем, если пределы интегрирования фиксированы, будем называть такое интегральное уравнение уравнением Фредгольма; если фиксирован только один предел — уравнением Вольтерра. Кроме того, если неизвестная функция содержится в уравнении только под знаком интеграла, будем считать его *уравнением первого рода*, если же она входит в уравнение еще и помимо интеграла, то оно называется *уравнением второго рода*.

Определения. Запишем основные типы интегральных уравнений. Уравнение Фредгольма первого рода:

$$f(x)=\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{16.1}$$

уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{16.2}$$

уравнение Вольтерра первого рода:

$$f(x)=\int_a^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{16.3}$$

уравнение Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{16.4}$$

Во всех четырех случаях $\varphi(t)$ — неизвестная функция; $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, причем $K(x, t)$

и $f(x)$ предполагаются известными. Если $f(x) = 0$, уравнение называется однородным.

Может возникнуть вопрос: зачем понадобились интегральные уравнения? Существует две причины, по которым необходимо рассмотреть интегральные уравнения. Во-первых, мы делали особое ударение на решении дифференциальных уравнений с *определенными граничными условиями*. Например, из-за граничного условия в нуле в решении уравнения Бесселя функции Неймана $N_n(r)$ не участвуют. Граничное условие при $r \to \infty$ отвечает на вопрос, нужно ли в решении уравнения Бесселя мнимого аргумента сохранить функцию $I_n(r)$. Интегральное уравнение связывает неизвестную функцию не только с ее значениями в соседних точках (производные), но также и с ее значениями во всей области, включая границу. Есть прямой смысл ввести граничные условия прямо в интегральное уравнение, а не подключать их на последней стадии решения. Из дальнейшего, когда мы построим ядра уравнений (см. разд. 16.5), станет ясным, что форма ядра зависит от значений на границе. Далее, интегральное уравнение компактно и в конечном итоге может оказаться более удобной и плодотворной формой записи по сравнению с дифференциальным уравнением. Во-вторых, независимо от того, нравится нам это или нет, некоторые проблемы, например диффузия и явления переноса, нельзя описать с помощью дифференциальных уравнений. Для решения этих проблем необходимо прибегать к интегральным уравнениям.

Теория переноса нейтронов. Уравнение Больцмана. Уравнение баланса выражает основное уравнение теории переноса нейтронов: рождение = потери + утечка. Под «рождением» понимается источник $S(v, \Omega, \mathbf{r})\, dv d\Omega$ — функция, которая описывает число нейтронов S, возникших в 1 $см^3$ за 1 *сек*, имеющих скорость в интервале от v до $v + dv$ и летящих в направлении Ω внутри телесного угла $d\Omega$.

Дополнительным источником служат столкновения нейтронов с ядрами среды, в результате которых рассеянный нейтрон попадает в заданный интервал переменных. Число актов рассеяния определяется величиной $\Sigma_s(v, v', \Omega, \Omega')\, \varphi(v', \Omega', \mathbf{r})$, где Σ_s — (макроскопическая) вероятность того, что нейтрон, который характеризуется скоростью v' и направлением Ω', после рассеяния

будет иметь скорость v и перемещаться в направлении Ω; $\varphi(v', \Omega', \mathbf{r})$ — нейтронный поток. Направление нейтронного потока как вектора $\boldsymbol{\varphi} = \Omega\varphi$ совпадает с направлением скорости нейтрона, а его абсолютная величина равна числу нейтронов, пересекающих за 1 *сек* под углом Ω со скоростью v единичную площадку, которая расположена в точке $\mathbf{r}$ (рис. 16.1).

Интегрируя по всевозможным значениям скорости v' и по всем направлениям Ω', получаем интеграл, который описывает второй член с рождением нейтронов:

$$\int\int \Sigma_s(v, v', \Omega, \Omega')\,\varphi(v', \Omega', \mathbf{r})\,dv'\,d\Omega'.$$

Потери нейтронов из-за утечки равны $\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(v, \Omega, \mathbf{r})$. Кроме того, общее число нейтронов в заданном интервале

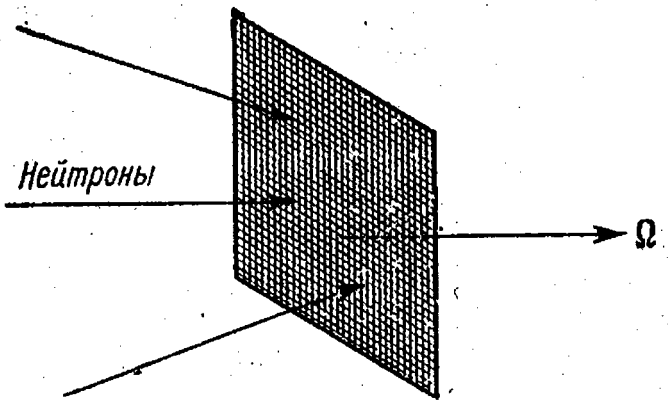


Рис. 16.1. Нейтронный поток.

скорости и направления уменьшается за счет их поглощения и рассеяния в другой интервал скорости, это дает $[\Sigma_a(v) + \Sigma_s(v)]\,\varphi(v, \Omega, \mathbf{r})$. Если среда, в которой перемещаются нейтроны, не является однородной и изотропной, величины Σ помимо указанной зависимости от скорости или энергии нейтрона могут также зависеть от координат и углов.

Запишем уравнение баланса нейтронов в окончательном виде:

$$\int\int \Sigma_a(v, v', \Omega, \Omega')\,\varphi(v', \Omega', \mathbf{r})\,dv'\,d\Omega' + S(v, \Omega, \mathbf{r}) =$$

$$= \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(v, \Omega, \mathbf{r}) + [\Sigma_a(v) + \Sigma_s(v)]\,\varphi(v, \Omega, \mathbf{r}). \quad (16.5)$$

Таким образом, мы получили стационарное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана. В этой форме урав-

нение Больцмана почти не поддается решению. Большинство разработанных методов теории переноса основано на компромиссе между физической картиной и математическими возможностями *.

Импульсное представление в квантовой механике. Уравнение Шредингера (в обычном пространственном представлении) имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r}) \tag{16.6}$$

или

$$(-\nabla^2+a^2)\psi(\mathbf{r})=v(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \tag{16.7}$$

где $a^2=-2mE/\hbar^2$, $v(\mathbf{r})=-(2m/\hbar^2)V(\mathbf{r})$. Мы можем обобщить уравнение (16.7):

$$(-\nabla^2+a^2)\psi(\mathbf{r})=\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'. \tag{16.8}$$

Для специального случая

$$v(\mathbf{r},\mathbf{r}')=v(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{16.9}$$

которое описывает локальное взаимодействие, уравнение (16.8) сводится к уравнению (16.7). Применим теперь к уравнению (16.8) преобразование Фурье (см. разд. 15.6)

$$\Phi(\mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\psi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{r},$$

$$\psi(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi(\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{k}. \tag{16.10}$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$p/\hbar=k\ (2\pi\times\text{волновое число}). \tag{16.11}$$

Умножим обе части уравнения (16.8) на $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и проинтегрируем по $\mathbf{r}$:

$$\int(-\nabla^2+a^2)\psi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}=\int\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}. \tag{16.12}$$

Подчеркнем, что оператор ∇^2 действует только на $\psi(\mathbf{r})$. Теперь нужно к левой части уравнения применить интегрирование по частям, а в правую подставить функцию

* См. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.— *Прим. перев.*

$\psi(\mathbf{r}')$ в виде (16.10):

$$\int (k^2+a^2)\,\psi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = (2\pi)^{3/2}(k^2+a^2)\,\Phi(\mathbf{k}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\Phi(\mathbf{k}')\,e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{k}'. \quad (16.13)$$

Если обозначить

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')}\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}, \quad (16.14)$$

уравнение (16.13) сведется к уравнению Фредгольма второго рода

$$(k^2+a^2)\,\Phi(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\Phi(\mathbf{k}')\,d\mathbf{k}', \quad (16.15)$$

где параметр a^2 соответствует собственному значению.

Для специального, но важного случая локального взаимодействия применение соотношения (16.9) дает искомое импульсное представление

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = f(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad (16.16)$$

которое эквивалентно обычному потенциалу статистического взаимодействия в обычном пространстве. Функция $\Phi(\mathbf{k})$ в импульсном пространстве удовлетворяет интегральному уравнению (16.15). Следует подчеркнуть, что здесь предполагалось только существование интеграла Фурье. В случае потенциала линейного осциллятора $V(\mathbf{r}) = r^2$ требуемый интеграл не существует. Решение уравнения (16.10) должно давать расходящиеся колебания, и мы не сможем получить уравнение (16.15).

Часто физическая задача может быть сформулирована как с помощью дифференциального, так и с помощью интегрального уравнений. Предположим, что задано дифференциальное уравнение, которое мы хотим преобразовать в интегральное. Начнем с линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + A(x)\,y' + B(x)\,y = g(x) \quad (16.17)$$

с начальными условиями вида

$$y(a) = y_0,\ y'(a) = y_0'.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$y' = -\int_a^x Ay'\,dx - \int_a^x By\,dx + \int_a^x g\,dx + y_0'. \quad (16.18)$$

После интегрирования по частям первого интеграла справа будем иметь

$$y' = -Ay - \int_a^x (B - A')\,y\,dx + \int_a^x g\,dx + A(a)\,y_0 + y_0'. \quad (16.19)$$

Интересно проследить, в каком виде начальные условия попали в уравнение (16.19). Проинтегрируем уравнение еще раз, тогда

$$y = -\int_x^x Ay\,dx - \int_a^x \int_a^x [B(t) - A'(t)]\,y(t)\,dt\,dx +$$

$$+ \int_a^x \int_a^x g(t)\,dt\,dx + [A(a)\,y_0 + y_0'](x - a) + y_0. \quad (16.20)$$

Для приведения полученного уравнения к более компактному виду воспользуемся соотношением

$$\int_a^x \int_a^x f(t)\,dt\,dx = \int_a^x (x - t)\,f(t)\,dt. \quad (16.21)$$

Оно может быть проверено дифференцированием обеих частей. Действительно, в силу равенства производных исходные выражения могут отличаться друг от друга только на некоторую постоянную. Если теперь сделать предельный переход $x \to a$, то эта постоянная обратится в нуль, и уравнение (16.21) доказано. Применим это соотношение к уравнению (16.20), тогда

$$y(x) = -\int_a^x \{A(t) + (x - t)\,[B(t) - A'(t)]\}\,y(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^x (x - t)\,g(t)\,dt + [A(a)\,y_0 + y_0'](x - a) + y_0. \quad (16.22)$$

Введем обозначения

$$K(x, t)=(t-x)[B(t)-A'(t)]-A(t),$$

$$f(x)=\int_a^x (x-t)\,g(t)\,dt+[A(a)\,y_0+y_0']\,(x-a)+y_0, \tag{16.23}$$

после чего уравнение (16.22) приведется к новому:

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x, t)\,y(t)\,dt, \tag{16.24}$$

которое представляет собой уравнение Вольтерра второго рода.

Пример 1. Рассмотрим уравнение линейного осциллятора

$$y''+\omega^2 y=0 \tag{16.25}$$

с условиями $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Для этого уравнения $A(x)=0$, $B(x)=\omega^2$, $g(x)=0$, и исходное уравнение сведется к интегральному

$$y(x)=x+\omega^2\int_0^x (t-x)\,y(t)\,dt.$$

Можно проверить, что решением его служит функция $y(x)=(1/\omega)\sin\omega x$.

Возвратимся к уравнению линейного осциллятора (16.25), но теперь при граничных условиях

$$y(0)=0, \quad y(b)=0. \tag{16.26}$$

Производная $y'(0)$ не задана, поэтому следует изменить порядок действий. Первое интегрирование дает

$$y'=-\omega^2\int_0^x y\,dx+y'(0). \tag{16.27}$$

Проинтегрируем второй раз и опять воспользуемся формулой (16.21):

$$y=-\omega^2\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt+y'(0)\,x. \tag{16.28}$$

Теперь наложим условие $y(b)=0$, тогда

$$\omega^2 \int_0^b (b-t)\, y(t)\, dt = by'(0). \tag{16.29}$$

Этот результат подставим опять в уравнение (16.28) и получим

$$y(x) = -\omega^2 \int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt + \omega^2 \frac{x}{b} \int_0^b (b-t)\, y(t)\, dt. \tag{16.30}$$

Теперь разобьем отрезок $[0, b]$ на два $[0, x]$ и $[x, b]$.

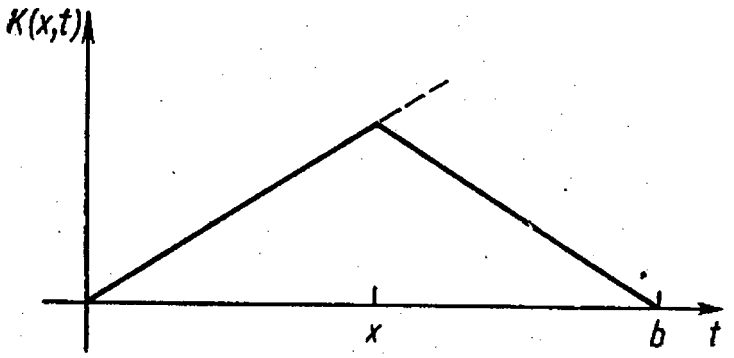


Рис. 16.2. Ядро $K(x, t)$.

Поскольку

$$\frac{x}{b}(b-t)-(x-t) = \frac{t}{b}(b-x), \tag{16.31}$$

находим

$$y(x) = \omega^2 \int_0^x \frac{t}{b}(b-x)\, y(t)\, dt + \omega^2 \int_x^b \frac{x}{b}(b-t)\, y(t)\, dt. \tag{16.32}$$

Наконец, если определить ядро следующим образом (рис. 16.2):

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{b}(b-x), & t < x, \\ \frac{x}{b}(b-t), & x < t, \end{cases} \tag{16.33}$$

то

$$y(x) = \omega^2 \int_0^b K(x, t)\, y(t)\, dt. \tag{16.34}$$

Итак, мы получили уравнение Фредгольма второго рода.

Новое ядро $K(x, t)$ обладает некоторыми интересными свойствами: оно симметрично, т. е. $K(x, t) = K(t, x)$, и непрерывно в том смысле, что $(t/b)(b-x)|_{t=x} = (x/b)(b-t)|_{t=x}$; его производная по t терпит разрыв: при переходе в положительном направлении через точку $t = x$, производная $\partial K(x, t)/\partial t$ имеет скачок, равный -1.

Мы вновь вернемся к этим свойствам в разд. 16.5, где будет установлена тождественность ядра $K(x, t)$ и функции Грина.

Упражнения

1. Получить интегральное уравнение Вольтерра для случаев:
1) $y''(x) - y(x) = 0$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
2) $y''(x) - y(x) = 0$ с граничными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Ответ: 1) $y = \int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt + x$; 2) $y = \int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt - x + 1$.

2. Получить интегральное уравнение Фредгольма, соответствующее дифференциальному уравнению $y''(x) - y(x) = 0$ с граничными условиями $y(1) = 1$, $y(-1) = 1$, двойным интегрированием и с помощью функции Грина.

Ответ: $y(x) = 1 - \int_{-1}^{1} K(x, t)\, y(t)\, dt$, $K(x, t) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(1-t)(x+1), & x < t, \\ \frac{1}{2}(1-x)(t+1), & x > t. \end{cases}$$

3. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в общем виде записывается как $y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$. При заданных граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$ произвести двойное интегрирование и получить интегральное уравнение $y(x) = \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, dt$ с ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} a_2 t(1-x) + a_1(x-1), & t < x, \\ a_2 x(1-t) + a_1(x), & x < t. \end{cases}$$

Обратим внимание, что $K(x, t)$ симметрично и непрерывно, если $a_1 = 0$. Каким образом это свойство связано с самосопряженностью дифференциального уравнения?

16.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Не существует общего метода решения интегральных уравнений, однако в некоторых специальных случаях очень полезны методы *интегральных преобразований* (см. гл. 15). Перечислим здесь типы интегральных преобразований. Если $\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)\,dt$, то преобразование Фурье

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\psi(t)\,dt. \tag{16.35}$$

Если $\psi(x)=\int_{0}^{\infty} e^{-xt}\varphi(t)\,dt$, то преобразование Лапласа

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xt}\psi(t)\,dt. \tag{16.36}$$

Если $\psi(x)=\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\varphi(t)\,dt$, то преобразование Меллина

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-t}\psi(t)\,dt. \tag{16.37}$$

Если $\psi(x)=\int_{0}^{\infty} t\varphi(t)J_{\nu}(xt)\,dt$, то преобразование Ханкеля

$$\varphi(x)=\int_{0}^{\infty} t\psi(t)J_{\nu}(xt)\,dt. \tag{16.38}$$

В действительности же аппарат интегральных преобразований не исчерпывается перечисленными четырьмя довольно специфическими формами.

Решение с помощью преобразования Фурье. Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода с ядром типа $k(x-t)$:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{16.39}$$

где $\varphi(t)$ — неизвестная функция. *Предположив существование необходимых интегралов*, применим теорему свертки (см. разд. 15.5)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,\Phi(t)\,e^{-ixt}\,dt. \tag{16.40}$$

Функции $K(t)$ и $\Phi(t)$ — фурье-изображения функций $k(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно. Применив обратное преобразование к уравнению (16.40), с помощью формулы (16.35) получим

$$K(t)\,\Phi(t)=\frac{t}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ixt}\,dx=\frac{F(t)}{\sqrt{2\pi}}, \tag{16.41}$$

тогда

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{F(t)}{K(t)} \tag{16.42}$$

и, применив еще раз обратное преобразование,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)}{K(t)}\,e^{-ixt}\,dt. \tag{16.43}$$

Корректный вывод этого выражения с помощью интегрирования в комплексной плоскости проведен в книге Морса и Фешбаха. Решение в форме (16.43) в дальнейшем будет использовано в упр. 1 к разд. 16.2.

Обобщенное уравнение Абеля. Теорема свертки. В разд. 15.10 для решения интегрального уравнения, которое возникло в задаче о таутохроне, мы пользовались преобразованием Лапласа. Запишем это уравнение в несколько более общем виде

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt,\quad 0<\alpha<1 \tag{16.44}$$

и применим к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(x)\}=\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt\right\}=\mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\,\mathcal{L}\{\varphi(x)\}. \tag{16.45}$$

Здесь на последнем этапе мы воспользовались теоремой свертки (см. разд. 15.10). Из соотношения (16.45) следует

$$\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \frac{s^{1-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!}. \qquad (16.46)$$

Поделим обе части этого равенства на s:

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \frac{s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!} = \frac{\mathcal{L}\{x^{\alpha-1}\}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(\alpha-1)!(-\alpha)!}. \qquad (16.47)$$

Объединим факториалы с помощью соотношения (10.32) и вновь применим теорему свертки, в результате чего получим уравнение

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\mathcal{L}\left\{\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\right\}, \qquad (16.48)$$

которое можно обратить с помощью формулы (15.179)

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt, \qquad (16.49)$$

и, наконец, продифференцировав, получим

$$\varphi(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt. \qquad (16.50)$$

Решение уравнения Абеля (см. гл. 15) есть частный случай ($\alpha = 1/2$) этого более общего решения.

Производящие функции. Иногда встречаются интегральные уравнения, в которых под знаком интеграла содержится производящая функция. Пусть задано уравнение специального вида

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{(1-2xt+x^2)^{1/2}}\,dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (16.51)$$

Обратим внимание на два важных обстоятельства: 1) под знак интеграла входит производящая функция для полиномов Лежандра $(1 - 2xt + x^2)^{-1/2}$; 2) область интегрирования $[-1, 1]$ совпадает с областью ортогональности полиномов Лежандра.

Если теперь разложим знаменатель в ряд (свойство 1) и предположим далее, что неизвестная функция $\varphi(t)$ может

быть также представлена рядом по полиномам Лежандра

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(t)\sum_{r=0}^{\infty}P_r(t)\,x^r\,dt, \qquad (16.52)$$

то, учитывая ортогональность полиномов P_n (свойство 2), можно записать, что

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2a_r}{2r+1}x^r. \qquad (16.53)$$

Коэффициенты a_n определятся, если продифференцировать функцию $f(x)$ n раз, а затем положить $x=0$:

$$f^{(n)}(0)=n!\,\frac{2}{2n+1}a_n. \qquad (16.54)$$

Окончательно

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{f^{(n)}(0)}{n!}P_n(t). \qquad (16.55)$$

Аналогичные результаты получаются и для других производящих функций.

Упражнения

1. Ядро уравнения Фредгольма второго рода (16.2) имеет форм $k(x-t)$*. Предполагая, что требуемые преобразования существуют показать, что $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)\,e^{-ixt}}{1-\sqrt{2\pi}\lambda K(t)}$, где $F(t)$ и $K(t)$ — фурье-преобразования функций $f(x)$ и $k(x)$ соответственно.

2. Ядро уравнения Вольтерра первого рода (16.3) имеет форму $k(x-t)$. Предполагая, что требуемые преобразования существуют, показать, что

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(s)}{K(s)}e^{xs}\,ds,$$

где $F(s)$ и $K(s)$ — изображения (Лапласа) оригиналов $f(x)$ и $k(x)$, соответственно.

3. Ядро уравнения Вольтерра второго рода (16.4) имеет форму $k(x-t)$. Предполагая, что требуемые преобразования существуют,

* Это ядро и интервал $0\leqslant x<\infty$ характерны для интегральных уравнений Винера — Хопфа. Подробнее см. в книге Морса и Фешбаха.

показать, что

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(s)}{1-\lambda K(s)}e^{xs}\,ds.$$

4. Используя решение, найденное с помощью преобразования Лапласа (см. упр. 3), решить уравнения

$$\varphi(x)=x+\int\limits_0^x(t-x)\varphi(t)\,dt,\ \text{где}\ \varphi(x)=\sin x,$$

$$\varphi(x)=x-\int\limits_0^x(t-x)\varphi(t)\,dt,\ \text{где}\ \varphi(x)=\operatorname{sh}x.$$

Проверить полученные результаты подстановкой в исходные интегральные уравнения.

5. Уравнение Фредгольма первого рода (16.1) имеет ядро $e^{-(x-t)^2}$. Показать, что оно имеет решение $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!}H_n(x)$, где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита n-го порядка.

6. Решить уравнение Абеля $f(x)=\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt$, $0<\alpha<1$:

1) умножая обе части уравнения на $(z-x)^{\alpha-1}$ и интегрируя по x в области $0\leqslant x\leqslant z$; 2) изменяя порядок интегрирования и вычисляя интеграл по x в правой части уравнения с помощью бета-функции. *Замечание.*

$$\int\limits_t^z\frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha}=B(1-\alpha,\ \alpha)=(-\alpha)!\ (\alpha-1)!=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

16.3. РЯД НЕЙМАНА, ВЫРОЖДЕННЫЕ ЯДРА

Большинство интегральных уравнений нельзя решить с помощью интегральных преобразований, о которых шла речь в предыдущем разделе. Разработаем два более общих метода решения этих уравнений. Первый, развитый Нейманом, Лиувиллем и Вольтерра, основан на разложении искомой функции $\varphi(x)$ в ряд по степеням λ, где λ — заданная константа. Метод пригоден всегда, когда ряд сходится.

Второй способ решения несколько ограничен по своим возможностям, поскольку для него требуется, чтобы две переменные, которые входят в ядро $K(x, t)$, разделялись. Однако имеются два благоприятных обстоятельства: во-первых, существует очевидная связь между интегральным

уравнением и системой линейных алгебраических уравнений, и, во-вторых, этот метод сводится к определению собственных значений и собственных функций, т. е. к задаче, которую мы уже решали в разд. 4.5.

Ряд Неймана. Будем решать линейное интегральное уравнение второго рода методом последовательных приближений; рассмотрим, например, уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \qquad (16.56)$$

в котором $f(x) \neq 0$. В случае переменного верхнего предела (уравнение Вольтерра) последующий анализ сохранит силу, однако потребуются незначительные изменения. Попытаемся (ибо нет никакой уверенности, что это будет именно так) аппроксимировать искомую функцию следующим образом:

$$\varphi(x) \approx \varphi_0(x) = f(x). \qquad (16.57)$$

Этот выбор совершенно не обязателен. Если мы сможем с первого раза предложить лучший выбор, безусловно, ему нужно отдать предпочтение. Первое приближение, выраженное соотношением (16.57), фактически означает, что значение интеграла или постоянной λ невелико. Для улучшения первого грубого приближения функцию $\varphi_0(x)$ нужно подставить обратно в интеграл, тогда

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, f(t)\, dt. \qquad (16.58)$$

Повторяя указанный процесс подстановки новых функций $\varphi_n(x)$ в уравнение (16.56), в конце концов получаем последовательность

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t_1)\, f(t_1)\, dt_1 + \\ &+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2)\, f(t_2)\, dt_2\, dt_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x), \end{aligned}\right\} \qquad (16.59)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &u_0(x)=f(x);\ u_1(x)=\int_a^b K(x,t_1)\,f(t_1)\,dt_1;\\ &u_2(x)=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\,f(t_2)\,dt_2\,dt_1;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &u_n(x)=\int\ldots\int K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\ldots\\ &\qquad\ldots K(t_{n-1},t_n)\cdot f(t_n)\,dt_n\ldots dt_1. \end{aligned}\right\} \quad (16.60)$$

Мы ожидаем, что искомое решение будет равно

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i(x) \quad (16.61)$$

при условии *сходимости бесконечного ряда*. Сходимость этого ряда удобно проверить по признаку сходимости Коши, для чего запишем неравенство

$$|\lambda^n u_n(x)|\leqslant|\lambda|^n|f_{\text{макс}}||K_{\text{макс}}|^n|b-a|^n. \quad (16.62)$$

Здесь $f_{\text{макс}}$ — максимальное значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а $K_{\text{макс}}$ — максимальное значение ядра $K(x, t)$ в области, в которой оно определено в плоскости xt. Ряд сходится, если

$$|\lambda||K_{\text{макс}}||b-a|<1. \quad (16.63)$$

Обратим внимание, что произведение $\lambda u_{n\,\text{макс}}$ — член *мажорантного* ряда. Если этот ряд сходится, то ряд (16.61) тем более будет сходиться. Если же данное условие не выполнено, ряд (16.61) может быть как сходящимся, так и расходящимся, поэтому необходим более тонкий признак сходимости. Что же касается собственно решения уравнения, то может оказаться, что оно определяется другими методами, даже в тех случаях, когда ряд Неймана расходится.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\,\varphi(t)\,dt. \quad (16.64)$$

Для него последовательные приближения дают

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = x,\\
&\varphi_1(x) = x + 1/3,\\
&\varphi_2(x) = x + 1/3 - x/3\\
&\varphi_3(x) = x + 1/3 - x/3 - 1/3^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(x) = x + \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}3^{-s} - x\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}3^{-s}.
\end{aligned}\right\} \quad (16.65)$$

Перейдем теперь к пределу $n \to \infty$ и окончательно

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}. \quad (16.66)$$

Отметим, что полученный ряд сходится, хотя для него условие (16.63) и не выполняется. Действительно, это неравенство скорее определяет верхнюю границу λ. Можно показать, что необходимым и достаточным условием сходимости ряда является требование $|\lambda| < |\lambda_e|$, где λ_e — наименьшее собственное значение, соответствующее однородному уравнению при $f(x) = 0$. В рассматриваемом примере $\lambda_e = \sqrt{3}/2$, что заведомо больше 1/2.

Решение уравнения Фредгольма методом Фредгольма состоит в разбиении интервала интегрирования и замене интеграла суммой. При этом одно интегральное уравнение заменяется большим числом (в принципе бесконечным) совместных линейных алгебраических уравнений.

Вырожденное ядро. Замена исходного интегрального уравнения системой алгебраических уравнений применяется всегда, когда переменные в ядре разделяются, а само ядро записывается в виде

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x)\, N_j(t), \quad (16.67)$$

где верхний предел суммы *n конечен*. Ядра, обладающие указанным свойством, называются вырожденными. К типу вырожденных ядер принадлежат полиномы и многие элементарные трансцендентные функции, например:

$$\cos(t - x) = \cos t \cos x + \sin t \sin x. \quad (16.68)$$

Будем считать условие (16.67) выполненным, тогда подстановка в уравнение Фредгольма второго рода дает

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt. \quad (16.69)$$

В последнем уравнении мы поменяли порядок интегрирования и суммирования. Теперь интеграл по переменной t — постоянная величина:

$$\int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt = c_j. \quad (16.70)$$

С учетом этого уравнение (16.69) дает искомое решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x). \quad (16.71)$$

Остается только определить постоянные коэффициенты c_i. Они определяются умножением уравнения (16.71) на $N_i(x)$ и интегрированием по x, что позволяет исключить зависимость от этой переменной. С помощью уравнения (16.70) получим

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j, \quad (16.72)$$

где

$$b_i = \int_a^b N_i(x)\,f(x)\,dx, \quad a_{ij} = \int_a^b N_i(x)\,M_j(x)\,dx. \quad (16.73)$$

Полезно записать уравнение (16.72) в матричной форме с помощью матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$:

$$\boldsymbol{c} - \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} = (1 - \lambda \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{c}, \quad (16.74)$$

или

$$\boldsymbol{c} = (1 - \lambda \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{b}. \quad (16.75)$$

Такая запись эквивалентна системе совместных линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}
(1 - \lambda a_{11})\,c_1 - \lambda a_{12} c_2 - \lambda a_{13} c_3 - \ldots &= b_1, \\
-\lambda a_{21} c_1 + (1 - \lambda a_{22})\,c_2 - \lambda_{23} a_3 - \ldots &= b_2, \\
-\lambda a_{31} c_1 - \lambda a_{32} c_2 + (1 - \lambda a_{33})\,c_3 - \ldots &= b_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (16.76)$$

Если исходное интегральное уравнение однородно, т. е. $f(x)=0$, то $\boldsymbol{b}=0$. Для отыскания решения приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов c_i (см. разд. 4.5):

$$|\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A}|=0. \tag{16.77}$$

Корни уравнения (16.77) и определят искомые собственные значения. Подставив их в (16.75), найдем коэффициенты c_i, а затем с помощью (16.71) —и искомое решение.

Пример 2. Проиллюстрируем на простом примере технику определения собственных значений и собственных функций однородного уравнения Фредгольма:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(t+x)\varphi(t)\,dt, \tag{16.78}$$

где $M_1=1$, $M_2(x)=x$; $N_1(t)=t$, $N_2=1$. Из уравнений (16.73) имеем $a_{11}-a_{22}=0$, $a_{12}=2/3$, $a_{21}=2$. Секулярное уравнение (16.77) запишем в явном виде через определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -3\lambda/3 \\ -2\lambda & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{16.79}$$

из которого

$$1-4\lambda^2/3=0,\quad \lambda=\pm\sqrt{3}/2. \tag{16.80}$$

Найденные собственные значения $\lambda=\pm\sqrt{3/2}$ подставим теперь в уравнение (16.75), тогда

$$c_1\mp c_2/\sqrt{3}=0. \tag{16.81}$$

Наконец, положив $c_1=1$, из уравнения (16.71) получим

$$\varphi_1(x)=(\sqrt{3}/2)(1+\sqrt{3}x),\ \lambda=\sqrt{3}/2; \tag{16.82}$$

$$\varphi_2(x)=-(\sqrt{3}/2)(1-\sqrt{3}x),\ \lambda=-\sqrt{3}/2. \tag{16.83}$$

В данном случае нормировка $\varphi(x)$ несущественна, так как мы рассматривали однородное уравнение.

Упражнения

1. С помощью ряда Неймана решить уравнени ($\varphi(x)=e^{-x^2}$)

$$\varphi(x)=1-2\int_0^x t\varphi(t)\,dt,\quad \varphi(x)=x+\int_0^x(t-x)\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(x)=x-\int_0^x(t-x)\varphi(t)\,dt.$$

2. Используя метод вырожденного ядра, решить уравнение

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+x)\,\varphi(t)\,dt$$

и сравнить полученный результат с решением, которое записано через ряд Неймана (см. разд. 16.3).

Ответ: $\varphi(x)=(3x+1)/2$.

3. Найти собственные значения и собственные функции уравнений:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(t-x)\,\varphi(t)\,dt,\quad \varphi(x)=\lambda\int_{0}^{2\pi}\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(x-t^2)\,\varphi(t)\,dt.$$

Указание. Для решения последнего уравнения можно воспользоваться методом вырожденного ядра или разложением в ряд Лежандра.

16.4. ТЕОРИЯ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА

Симметризация ядер. Исследуем свойства линейных интегральных уравнений (типа Фредгольма) с симметричными ядрами

$$K(x,\ t)=K(t,\ x). \tag{16.84}$$

Однако прежде чем вплотную заняться теорией таких уравнений, следует особо остановиться на некоторых специальных случаях уравнений с несимметричными ядрами, которые могут быть симметризованы. Пусть задано уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,\ t)\,\rho(t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{16.85}$$

в котором полное ядро $K(x,\ t)\,\rho(t)$ несимметрично, если, конечно, функция $K(x,\ t)$ симметрична. Однако если умножить уравнение (16.85) на $\sqrt{\rho(x)}$ и сделать замену

$$\sqrt{\rho(x)}\,\varphi(x)=\psi(x), \tag{16.86}$$

то можно получить уравнение

$$\psi(x)=\sqrt{\rho(x)}\,f(x)+\lambda\int_{a}^{b}\left[K(x,\ t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}\right]\psi(t)\,dt, \tag{16.87}$$

в котором полное ядро

$$K(x, t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)} \tag{16.88}$$

окажется уже симметричным. В дальнейшем функция $\rho(x)$ будет называться весовой.

Ортогональные собственные функции. Рассмотрим однородные уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt. \tag{16.89}$$

Будем предполагать, что ядро $K(x, t)$ симметрично и вещественно. По-видимому, математик прежде всего спросит: «Существует ли собственное значение λ, удовлетворяющее этому уравнению?» Показано *, что существует по крайней мере одно такое собственное значение (а возможно, и бесконечно много), если $K(x, t)$ непрерывно.

Сейчас мы докажем, что собственные значения λ вещественны, а соответствующие им собственные функции ортогональны. Возьмем два *разных* собственных значения λ_i и λ_j и соответствующие им собственные функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$. Они удовлетворяют уравнению (16.89)

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)\,dt, \quad \varphi_j(x) = \lambda_j \int_a^b K(x, t)\varphi_j(t)\,dt. \tag{16.90}$$

Умножим первое из них на $\lambda_j\varphi_j(x)$, а второе на $\lambda_i\varphi_i(x)$ и полученные результаты проинтегрируем по x, тогда **

$$\lambda_j \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)\varphi_j(x)\,dt\,dx, \tag{16.91а}$$

$$\lambda_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\varphi_j(t)\varphi_i(x)\,dt\,dx. \tag{16.91б}$$

* Доказательство см. в книге Гильберт Д. и Курант Р. Методы математической функции. Перев. с англ. М.-Л., Гостехиздат, 1951.

** Предполагается, что нужные интегралы существуют.

В силу симметричности ядра $K(x, t)$ перепишем уравнение (16.91б)

$$\lambda_i \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,\varphi_j(t)\,\varphi_j(x)\,dt\,dx. \tag{16.92}$$

Имея в виду (16.91а), заменим правую часть этого уравнения

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0. \tag{16.93}$$

Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, то

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0, \quad i \neq j, \tag{16.94}$$

и ортогональность доказана. Подчеркнем, что для симметричного ядра в уравнении (16.94) не нужно производить операцию комплексного сопряжения. Самосопряженное, или эрмитово, ядро рассмотрено в упр. 1 (см. ниже).

При вырожденном собственном значении * соответствующие функции ортогонализуются по методу Шмидта (см. разд. 9.3). Ортогональные собственные функции всегда могут быть нормированы, поэтому в предположении, что уже сделано, запишем

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \delta_{ij}. \tag{16.95}$$

Чтобы доказать вещественность собственного значения λ_i, возьмем уравнение комплексно-сопряженное первому уравнению (16.90)

$$\varphi_i^*(x) = \lambda_i^* \int_a^b K(x, t)\,\varphi_i^*(t)\,dt, \tag{16.96}$$

в котором учтено, что ядро $K(x, t)$ вещественно. Аналогично тому, как было выведено соотношение (16.93), полу-

* Собственное значение называется вырожденным, если ему соответствует несколько различных собственных функций, удовлетворяющих уравнению (16.89).

чим уравнение

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) \int_a^b \varphi_i^*(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0. \qquad (16.97)$$

Интеграл в этом уравнении отличен от нуля (тривиальное решение $\varphi_i = 0$ не рассматривается), поэтому $\lambda_i^* = \lambda_i$, откуда следует, что собственное значение λ_i вещественно.

Собственные функции интегрального уравнения образуют замкнутую систему в том смысле, что любая функция, заданная с помощью интеграла,

$$g(x) = \int K(x, t)\, h(t)\, dt, \qquad (16.98)$$

где $h(t)$ — кусочно-непрерывная функция, может быть представлена рядом по собственным функциям

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad (16.99)$$

причем этот ряд сходится равномерно и абсолютно.

Распространим этот результат на ядро $K(x, t)$, предположив, что

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \qquad (16.100)$$

где $a_n = a_n(x)$. Подставив это разложение в исходное интегральное уравнение (16.89) и воспользовавшись ортогональностью, получим

$$\varphi_i(x) = \lambda_i a_i(x). \qquad (16.101)$$

Таким образом, ядро однородного уравнения Фредгольма второго рода можно выразить через собственные функции и собственные значения:

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n} \quad (\lambda_n \neq 0). \qquad (16.102)$$

Может случиться так, что разложение (16.100) не существует. Чтобы убедиться в возможности такой ситуации, читателю предлагается применить разработанный анализ к интегральному уравнению

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-xt} \phi(t)\, dt. \qquad (16.103)$$

Важно подчеркнуть, что в теории Гильберта — Шмидта изучаются свойства собственных значений (вещественность) и собственных функций (ортогональность, полнота), т. е. тех свойств, которые могут иметь наибольший интерес и значение. Указанная теория не дает алгоритма для решения однородного интегрального уравнения. Способы решений интегрального уравнения рассмотрены в разд. 16.2 и 16.3 (кроме того, возможно применение обычных численных методов).

Неоднородное интегральное уравнение. Требуется решить неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \qquad (16.104)$$

Будем предполагать, что решения соответствующего однородного интегрального уравнения известны. Собственные функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, dt \qquad (16.105)$$

с соответствующим собственным значением. Разложим $\varphi(x)$ и $f(x)$ в ряд по собственным функциям

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad (16.106)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \qquad (16.107)$$

и подставим эти разложения в уравнение (16.104):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)\, dt. \qquad (16.108)$$

Поменяв порядок суммирования и интегрирования, можно с помощью (16.105) вычислить интеграл в правой части

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varphi_n(x)}{\lambda_n}. \qquad (16.109)$$

Если теперь умножить уравнение (16.109) на $\varphi_i(x)$ и проинтегрировать по x от a до b, то с учетом ортогональности собственных функций получим

$$a_i = b_i + \lambda a_i/\lambda_i, \tag{16.110}$$

или

$$a_i = b_i + \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} b_i, \tag{16.111}$$

после чего окончательное решение примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x). \tag{16.112}$$

Подчеркнем, что для $f(x) = 0$ решение *отсутствует, если только* $\lambda \neq \lambda_i$, т. е. однородное уравнение не имеет решения (за исключением тривиального $\varphi(x) = 0$), если λ не равно собственному значению λ_i.

Может оказаться, что λ для неоднородного уравнения (16.104) равно одному из собственных значений λ_p для однородного уравнения, тогда полученное решение (16.112) теряет силу. Чтобы распространить формулу (16.112) и на этот случай, нужно специально исследовать выражение (16.110) с λ_p:

$$a_p = b_p + \lambda_p \frac{a_p}{\lambda_p} = b_p + a_p. \tag{16.113}$$

Очевидно, a_p взаимно уничтожаются и уже не могут быть определены через b_p, а сам коэффициент $b_p = 0$. Это означает что $\int f(x)\varphi_p(x) = 0$, т. е. функции $f(x)$ и $\varphi_p(x)$ ортогональны.

Уравнение (16.111) остается в силе при $i \neq p$, поэтому следует умножать на $\varphi_i(x)$ и суммировать по i $(i \neq p)$:

$$\varphi(x) = f(x) + a_p\varphi_p + \lambda_p \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p}}^{\infty} \frac{\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i - \lambda_p} \varphi_i(x); \tag{16.114}$$

здесь член $i = p$ пропущен. В этом решении a_p остается неопределенной постоянной*.

* Аналогичное положение возникает в неоднородном линейном дифференциальном уравнении. К решению этого уравнения можно прибавить любую постоянную, умноженную на решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Упражнения

1. В уравнении Фредгольма (16.89) ядро $K(x, t)$ — самосопряженное, или эрмитово, т. е. $K(x, t)=K^*(x, t)$. Показать, что собственные функции ортогональны, т. е.

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\,\varphi_n(x)\,dx=0,\quad m\neq n\ (\lambda_m\neq\lambda_n),$$

а собственные значения вещественны.

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+x)\,\varphi(t)\,dt$$

методом Гильберта—Шмидта. Вообще говоря, в данном случае это нецелесообразно, поскольку уравнение легко решается с помощью разложения по полиномам Лежандра.

3. Дано уравнение $y(x)=x+\lambda\int_0^1 xty(t)\,dt$.

Найти $y(x)$ в виде ряда Неймана. Определить область изменения λ, в которой ряд Неймана сходится. Сравнить эти значения λ со значениями, найденными из условия $|\lambda|\,|K_{\text{макс}}|<1$.

Найти собственное значение и собственную функцию соответствующего однородного интегрального уравнения.

Разделяя переменные в ядре, показать, что решение имеет вид $y(x)=3x/(3-\lambda)$.

4. Для ядра $K(x, t)=\cos(x-t)$ собственными функциями (ненормированными) являются $\cos x$ и $\sin x$ (см. упр. 3 к разд. 16.3). Показать, что существует функция $h(t)$, такая, что ядро $K(x, s)$, рассматриваемое как функция s, может быть представлено интегралом $K(x, s)=\int_0^{2\pi} K(s, t)\,h(t)\,dt$.

Доказать, что $K(x, t)=\sum_{n=1}^{2}\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}$.

16.5. ФУНКЦИИ ГРИНА

Уравнение Пуассона из электростатики

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r})=-\rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0 \qquad (16.115)$$

имеет решение (см. разд. 8.6)

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\mathbf{r}'. \qquad (16.116)$$

В разд. 8.6 был рассмотрен бесконечный случай, когда интегрирование распространено на все пространство. Однако, вообще говоря, потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ можно отыскивать и для ограниченной области пространства, для чего необходимо ввести соответствующее распределение заряда на границе *.

Уравнение (16.116) представляет собой интегральное уравнение относительно $\rho(\mathbf{r}')$, если потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ задан и требуется определить распределение заряда $\rho(\mathbf{r}')$.

Однако если известно распределение заряда $\rho(\mathbf{r}')$, то уравнение (16.116) можно решать относительно потенциала $\varphi(\mathbf{r})$.

Рассмотрим вторую задачу, которая встречается чаще, при этом под величиной $\rho(\mathbf{r}')$ будем понимать «причину», а под величиной $\varphi(\mathbf{r})$ —«следствие», поскольку распределенный заряд порождает потенциальное поле. Значение потенциала определяется расстоянием между элементом заряда $\rho(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'$ и точкой наблюдения $\mathbf{r}'$, или, иначе говоря, влиянием элемента заряда, которое задается функцией $(4\pi\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|)^{-1}$.

По этой причине функцию $(4\pi\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|)^{-1}$ называют *функцией влияния* или *функцией Грина*.

Для простоты ограничимся одномерным случаем. Сначала рассмотрим однородное уравнение Штурма — Лиувилля (см. гл. 9)

$$\mathscr{L}y(x)+f(x)=0, \tag{16.117}$$

где $\mathscr{L}$ — самосопряженный дифференциальный оператор, причем

$$\mathscr{L}=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x). \tag{16.118}$$

Функция $y(x)$ должна удовлетворять определенным граничным условиям (см. разд. 9.1) на концах отрезка $[a, b]$. Действительно, отрезок можно выбрать так, чтобы соответствующие граничные условия были удовлетворены.

Определим довольно необычную и достаточно произвольную функцию Грина G на отрезке $[a, b]$ следующим образом:

1. $G(x)=G_1(x)$ для $a\leqslant x<t$ и $G(x)=G_2(x)$ для $t<x\leqslant b$ $(a\leqslant t\leqslant b)$.

* См. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. Перев. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

2. Функции $G_1(x)$ и $G_2(x)$ каждая в отдельности удовлетворяет однородному (относительно искомой функции) уравнению Штурма — Лиувилля:

$$\mathcal{L}G_1(x)=0 \text{ для } a\leqslant x<t,\ \mathcal{L}G_2(x)=0 \text{ для } t<x\leqslant b. \tag{16.119}$$

3. $G_1(x)$ удовлетворяет граничным условиям задачи в точке $x=a$, а $G_2(x)$ в точке $x=b$. Для простоты возьмем однородные граничные условия, т. е. при $x=a$ $y(a)=0$, $y'(a)=0$ или $\alpha y(a)+\beta y'(a)=0$, аналогичные условия заданы в точке $x=b$.

4. $G(x)$ *непрерывна* *, т. е.

$$G_1(t)=G_2(t). \tag{16.120}$$

5. Производная $G'(x)$ *разрывна* *:

$$\frac{d}{dx}G_2(x)\Big|_t-\frac{d}{dx}G_1(x)\Big|_t=-\frac{1}{p(t)}. \tag{16.121}$$

Подчеркнем, что первая производная имеет разрыв, а вторая не существует вовсе.

Все эти требования в конце концов приводят к тому, что G становится функцией двух переменных $G(x, t)$. Кроме того, $G(x, t)$ зависит как от вида дифференциального оператора $\mathcal{L}$, *так и от граничных условий*, которым должно удовлетворять решение $y(x)$. Свойства функции G будут логически обоснованы, а смысл ее станет совершенно очевидным.

Предположим далее, что мы нашли функцию Грина $G(x, t)$, обладающую всеми перечисленными свойствами, тогда решение уравнения (16.117) запишется в виде интеграла

$$y(x)=\int_a^b G(x, t)f(t)\,dt. \tag{16.122}$$

Построим функцию Грина $G(x, t)$. Пусть $u(x)$ — решение однородного уравнения Штурма — Лиувилля, которое удовлетворяет граничным условиям в точке $x=a$, а $v(x)$ — решение, удовлетворяющее граничным условиям

* Строго говоря, под этим понимается предел $x\to t$.

в точке $x = b$. Тогда положим

$$G(x, t) = \begin{cases} c_1 u(x), & x < t, \\ c_2 v(x), & t < x. \end{cases} \qquad (16.123)$$

Из условия непрерывности (16.120) в точке $x = t$ следует, что

$$c_2 v(t) - c_1 u(t) = 0. \qquad (16.124)$$

Наконец, скачок первой производной, согласно условию (16.121), дает

$$c_2 v'(t) - c_1 u'(t) = -1/p(t). \qquad (16.125)$$

Как известно, для коэффициентов c_1 и c_2 существует единственное решение (см. разд. 8.5), если

$$\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = u(t) v'(t) - v(t) u'(t) \neq 0.$$

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — линейно независимые функции. Если $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям на обоих концах отрезка, требуется обобщенная функция Грина. Строго говоря, функция Грина не существует, если $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы. То же самое можно сказать, если $\lambda = 0$ — собственное значение однородного уравнения. Тем не менее «обобщенную» функцию Грина все же можно определить.

Для независимых $u(x)$ и $v(x)$ получаем определитель Вронского

$$u(t) v'(t) - v(t) u'(t) = A/p(t), \qquad A = \text{const}. \qquad (16.126)$$

Соотношение (16.126) иногда называют формулой Абеля. С учетом (16.125) запишем

$$c_1 = -v(t)/A, \quad c_2 = -u(t)/A. \qquad (16.127)$$

Очевидно, такие значения коэффициентов удовлетворяют уравнению (16.124). После подстановки их в (16.123) получаем функцию Грина

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{A} u(x) v(t), & x < t, \\ -\frac{1}{A} u(t) v(x), & t < x. \end{cases} \qquad (16.128)$$

Важно подчеркнуть, что $G(x, t) = G(t, x)$, т. е. функция Грина обладает свойством симметрии. Объяснение этого

факта связано с принципом взаимности, в соответствии с которым причина и следствие совершенно равноправны относительно переменных x и t. Взяв пример из электростатики, можно утверждать, что функция влияния зависит только от абсолютной величины расстояния между двумя точками.

Нам удалось построить функцию Грина $G(x, t)$, однако мы еще не доказали, что интеграл (16.122) с построенной функцией Грина будет решением исходного дифференциального уравнения (16.117). Это можно проверить прямой подстановкой функции Грина (16.128) в уравнение (16.122). Имеем

$$y(x) = -\frac{1}{A}\int_a^x v(x)\,u(t)\,f(t)\,dt - \\ -\frac{1}{A}\int_x^b u(x)\,v(t)\,f(t)\,dt. \qquad (16.129)$$

Дифференцируя, получаем

$$y'(x) = -\frac{1}{A}\int_a^x v'(x)\,u(t)\,f(t)\,dt - \\ -\frac{1}{A}\int_x^b u'(x)\,v(t)\,f(t)\,dt, \qquad (16.130)$$

производные пределов интегрирования взаимно уничтожились. Продифференцируем еще раз:

$$y''(x) = -\frac{1}{A}\int_a^x v''(x)\,u(t)\,f(t)\,dt - \frac{1}{A}\int_x^b u''(x)\,v(t)\,f(t)\,dt - \\ -\frac{1}{A}[u(x)\,v'(x) - v(x)\,u'(x)]\,f(x). \qquad (16.131)$$

С учетом (16.125) и (16.127) последнее выражение можно переписать так:

$$y''(x) = -\frac{v''(x)}{A}\int_a^x u(t)\,f(t)\,dt - \\ -\frac{u''(x)}{A}\int_x^b v(t)\,f(t)\,dt - \frac{f(x)}{p(x)}. \qquad (16.132)$$

Теперь подставим (16.132) в уравнение (16.118)

$$\mathscr{L}y(x) = -\frac{[\mathscr{L}v(x)]}{A}\int_a^x u(t)f(t)\,dt - \frac{[\mathscr{L}u(x)]}{A}\int_x^b v(t)f(t)\,dt - f(x). \qquad (16.133)$$

Поскольку по условию $u(x)$ и $v(x)$ выбраны такими, что они удовлетворяют однородному уравнению Штурма — Лиувилля, выражения в квадратных скобках равны нулю, поэтому члены с интегралами исчезают. Перенеся $f(x)$ в левую часть, получаем в точности уравнение (16.117).

Постараемся теперь удовлетворить граничным условиям для функции $y(x)$. В точке $x=a$ с учетом постоянства определенного интеграла

$$y(a) = -\frac{u(a)}{A}\int_a^b v(t)f(t)\,dt = cu(a), \qquad (16.134)$$

$$y'(a) = -\frac{u'(a)}{A}\int_a^b v(t)f(t)\,dt = cu'(a). \qquad (16.135)$$

Возьмем функцию $u(x)$ такой, чтобы

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0. \qquad (16.136)$$

Умножая данное уравнение на постоянную c, видим, что $y(x)$ тоже удовлетворяет уравнению (16.136). Эта операция иллюстрирует удобство *однородных* граничных условий, так как в этом случае нормировка не имеет значения. В задачах квантовой механики граничное условие, которому должна удовлетворять волновая функция, часто задается в виде отношения $\psi'(x)/\psi(x) = d\,[\ln\psi(x)]/dx$, эквивалентного уравнению (16.136). Удобство такой записи состоит в том. что волновая функция не нуждается в нормировке.

Резюмируя, можно утверждать, что уравнение (16.122) определяет функцию $y(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (16.117) и граничным условиям, которые учтены в самой функции Грина $G(x, t)$.

По существу мы воспользовались решениями однородного линейного уравнения Штурма — Лиувилля и с их помощью построили решение неоднородного уравнения. Для примера снова обратимся к уравнению Пуассона. Его решение (16.116) представлено комбинацией решений соответствующего однородного уравнения Лапласа с весом $\rho(\mathbf{r}')$.

До сих пор на $f(x)$ не налагалось никаких ограничений. Теперь предположим, что $f(x) = \lambda\rho(x)\,y(x)$, тогда

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t)\,\rho(t)\,y(t)\,dt \tag{16.137}$$

будет решением уравнения

$$\mathscr{L}y(x) + \lambda\rho(x)\,y(x) = 0 \tag{16.138}$$

с соответствующими граничными условиями. Уравнение (16.137) является однородным уравнением Фредгольма второго рода, а уравнение (16.138) — уравнением Штурма — Лиувилля на отыскание собственных значений (см. гл. 9).

Чтобы завершить обсуждение последующего дифференциального уравнения, докажем его эквивалентность интегральному уравнению, иными словами, докажем, что решение дифференциального уравнения (16.138) с соответствующими граничными условиями удовлетворяет интегральному уравнению (16.137). Для этого умножим уравнение (16.138) на соответствующую функцию Грина $G(x, t)$ и проинтегрируем по x от a до b:

$$\int_a^b G(x, t)\,\mathscr{L}y(x)\,dx + \lambda \int_a^b G(x, t)\,\rho(x)\,y(x)\,dx = 0. \tag{16.139}$$

Благодаря виду функции Грина первый интеграл распадается на два:

$$-\int_a^t G_1(x, t)\,\mathscr{L}y(x)\,dx - \int_t^b G_2(x, t)\,\mathscr{L}y(x)\,dx =$$

$$= \lambda \int_a^b G(x, t)\,\rho(x)\,y(x)\,dx. \tag{16.140}$$

Применим к левой части последнего уравнения теорему Грина, или, что эквивалентно, проинтегрируем по частям, тогда

$$-\int_a^t G_1(x, t)\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right)+q(x)y(x)\right]dx=$$

$$=-\left|G_1(x, t)p(x)y'(x)\right|_a^t+\int_a^t G_1'(x, t)p(x)y'(x)\,dx-$$

$$-\int_a^t G_1(x, t)q(x)y(x)\,dx; \qquad (16.141)$$

точно такое же выражение получается для второго интеграла. Повторное интегрирование по частям дает

$$-\int_a^t G_1(x, t)\mathcal{L}y(x)\,dx=-\int_a^t y(x)\mathcal{L}G_1(x, t)\,dx-$$

$$-\left|G_1(x, t)p(x)y'(x)\right|_a^t+\left|G_1(x, t)p(x)y(x)\right|_a^t. \qquad (16.142)$$

Интеграл справа равен нулю, так как $\mathcal{L}G_1=0$. Сгруппируем проинтегрированные члены с соответствующими членами, которые содержат G_2, тогда

$$-p(t)[G_1(t, t)y'(t)-G_1'(t, t)y(t)-G_2(t, t)y'(t)+$$
$$+G_2'(t, t)y(t)]+p(a)[G_1(a, t)y'(a)-G_1(a, t)y(a)]-$$
$$-p(b)[G_2(b, t)y'(b)-G_2'(b, t)y(b)]. \qquad (16.143)$$

Оба последних выражения в квадратных скобках равны нулю, поскольку $G(x, t)$ и $y(x)$ удовлетворяют одинаковым граничным условиям. С другой стороны, первое выражение с помощью уравнений (16.120) и (16.122) приводится к $y(t)$. Подставив затем в уравнение (16.140), мы придем к уравнению (16.137), и, таким образом, эквивалентность интегрального уравнения дифференциальному с соответствующими граничными условиями доказана.

Пример 1. Линейный осциллятор. Рассмотрим уравнение линейного осциллятора

$$y''(x)+\lambda y(x)=0 \qquad (16.144)$$

с граничными условиями $y(0)=y(1)=0$ (пружина закреплена на обоих концах). Теперь, чтобы построить функцию Грина, необходимо решить

однородное уравнение Штурма—Лиувилля $\mathscr{L}y(x)=0$, которое имеет вид $y''(x)=0$. Мы удовлетворим граничным условиям, если потребуем,

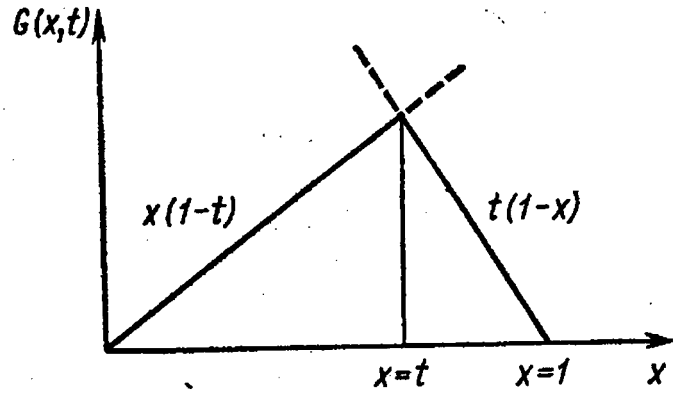


Рис. 16.3. Функция Грина линейного осциллятора.

чтобы одно решение обращалось в нуль в точке $x=0$, а второе в точке $x=1$. Такими решениями (ненормированными) являются функции

$$u(x)=x, \quad v(x)=1-x, \tag{16.145}$$

для которых

$$uv'-vu'=-1. \tag{16.146}$$

Из сравнения последнего соотношения с (16.126) следует, что $p(x)=1$, $A=1$, а искомая функция Грина имеет вид (рис. 16.3)

$$G(x, t)=\begin{cases} x(1-t), & x<t, \\ t(1-x), & t<x. \end{cases} \tag{16.147}$$

Следовательно, в силу (16.137) движение пружины с закрепленными концами описывается функцией

$$y(x)=\lambda\int_0^1 G(x, t)\,y(t)\,dt. \tag{16.148}$$

Читатель может убедиться самостоятельно, что решения уравнения (16.144) $y=\sin n\pi x$ ($\lambda=n^2\pi^2$) удовлетворяют также и уравнению (16.148).

Чтобы характеризовать функцию Грина с новой стороны, рассмотрим уравнение Пуассона с точечным зарядом

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r})=-\rho_{\text{точ}}/\varepsilon_0. \tag{16.149}$$

Решение этого уравнения с помощью функции Грина получено в разд. 8.6. Здесь для удобства ограничимся одномерным аналогом

$$\mathscr{L}y(x)+f(x)_{\text{точ}}=0, \tag{16.150}$$

где $f(x)_{\text{точ}}$ описывает точечный заряд или импульсную силу и может быть представлена самым различным образом, наиболее удобно задать ее так (см. разд. 8.6):

$$f(x)_{\text{точ}} = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & t-\varepsilon < x < t+\varepsilon, \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases} \tag{16.151}$$

Проинтегрируем уравнение (16.150) и учтем определение $f(x)_{\text{точ}}$, тогда

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathcal{L}y(x)\,dx = -\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x)_{\text{точ}}\,dx = -1. \tag{16.152}$$

Остановимся подробнее на операторе $\mathcal{L}y(x)$. Имеем

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{d}{dx}[p(x)\,y'(x)]\,dx + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\,y(x)\,dx =$$

$$= |p(x)\,y'(x)|_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\,y(x)\,dx = -1. \tag{16.153}$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ можно удовлетворить этому уравнению, если *потребовать*, чтобы $y'(x)$ в точке $x = t$ имела скачок величиной $-1/p(x)$, а сама функция $y(x)$ оставалась непрерывной *. Теперь мы замечаем, что именно эти свойства были использованы для определения функции Грина $G(x, t)$. Кроме того, в пределе при $\varepsilon \to 0$

$$f(x)_{\text{точ}} = \delta(x-t), \tag{16.154}$$

где $\delta(x-t)$ — δ-функция Дирака (см. разд. 8.6). Следовательно, уравнение (16.150) приобретает вид

$$\mathcal{L}G(x, t) = -\delta(x-t) \tag{16.155}$$

(напомним, что в разд. 8.6 и 11.4 с помощью этого соотношения определялись функции Грина).

---

* Функции $p(x)$ и $q(x)$, входящие в оператор $\mathcal{L}$, непрерывны, поэтому интеграл $\int q(x)\,y(x)\,dx$, взятый от непрерывных функций, также непрерывен. Следовательно, интегралы из выражения (16.153), взятые на отрезке длиной 2ε, обращаются в нуль при $\varepsilon \to 0$.

Полученный результат обобщается на n-мерное пространство

$$\mathscr{L}G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \qquad (16.156)$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — n-компонентные векторы. В n-мерном пространстве оператор $\mathscr{L}$ становится оператором в частных производных. Для трех измерений

$$\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[p(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left[p(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}\right] + q(x, y, z). \qquad (16.157)$$

В заключение приведем функции Грина для наиболее часто встречающихся случаев.

I. Уравнение Пуассона

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0, \qquad (16.158)$$

в котором $\varphi(\mathbf{r})$ конечна или имеет только логарифмическую расходимость при $r \to \infty$.

1. Одномерный случай. Функция Грина не существует во всем интервале $(-\infty, \infty)$.

2. Двумерный случай. Интегрируя по поверхности круга с центром в точке $r_1 = r_2$, получаем

$$\lim_{\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2} \int\int \nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, dA = -1. \qquad (16.159)$$

Применение теоремы Гаусса (двумерный случай) сводит поверхностный интеграл от оператора Лапласа к линейному от градиента

$$\lim_{r_{12} \to 0} \oint \nabla G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, r_{12}\, d\theta = -1, \quad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \qquad (16.160)$$

Этому интегральному соотношению удовлетворяет выражение

$$\nabla G = -1/2\pi r_{12} = -1/2\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \qquad (16.161)$$

и, следовательно,

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \qquad (16.162)$$

В таком случае решение двумерного уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int \ln|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\,\rho(\mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_2. \qquad (16.163)$$

3. Трехмерный случай (см. разд. 1.14 и 8.6)

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1/4\pi\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \tag{16.164}$$

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\,d\mathbf{r}_2. \tag{16.165}$$

II. Уравнение Гельмгольца (пространственная часть волнового уравнения)

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \tag{16.166}$$

$$(\nabla^2 + k^2)\,G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{16.167}$$

1. Одномерный случай

$$G(r_1, r_2) = \frac{i}{2k}\,e^{ik|r_1 - r_2|}. \tag{16.168}$$

2. Двумерный случай

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4}\,H_0^{(1)}(k\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{16.169}$$

3. Трехмерный случай

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \tag{16.170}$$

В одномерном случае функция $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца всюду, за исключением точки $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, и имеет разрывную первую производную. В двумерном и трехмерном случаях функции имеют особенности типа $\ln r$ и r^{-1}, характерные для оператора $\mathcal{L} = \nabla^2$. И вообще, функция Грина для двумерной задачи, которая описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка, имеет вид

$$G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| + H_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{16.171}$$

где $H_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — регулярная функция, зависящая от формы дифференциального уравнения и граничных условий. В соответствующем трехмерном случае

$$G_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + H_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{16.172}$$

где $H_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ также регулярна. Приведем функции Грина для модифицированного уравнения Гельмгольца, чтобы яснее представить, как H_2 и H_3 изменяются в зависимости от формы дифференциального уравнения.

III. Модифицированное уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 - k^2)\,\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \tag{16.173}$$

$$(\nabla^2 - k^2)\,G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{16.174}$$

Решения, ограниченные при $r \to \infty$:

1. Одномерный случай

$$G(r_1, r_2) = \frac{1}{2k} e^{-k|r_1 - r_2|}. \tag{16.175}$$

2. Двумерный случай

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi} K_0(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{16.176}$$

3. Трехмерный случай, мезонный потенциал

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^{-k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \tag{16.177}$$

Все три формы функции Грина представляют собой известные ядра уравнения диффузии из гл. 11, которые играют весьма важную роль в элементарной теории диффузии нейтронов.

Отметим, что здесь и во всех рассмотренных примерах особенность $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ и функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ были связаны с *радиальной* частью дифференциального уравнения. Физически это означает, что взаимодействие (функция влияния) зависит только от расстояния между точками $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и не зависит от ориентации.

Если дифференциальный оператор оказывается самосопряженным (и, следовательно, ему соответствует полная система собственных функций), то с помощью выкладок, которые привели к выражению (16.103), функцию Грина можно разложить в ряд по этим функциям. Исключением, как это видно из формулы (16.103), является случай, когда одно из собственных значений равно нулю или же последовательность λ_n сходится к нулю. Разложение по собственным функциям используется в упр. 8—12 (см. ниже).

Квантовое рассеяние частиц. Падающий пучок частиц, который описывается функцией $e^{ik_0 z}$, частично рассеивается. Рассеянная (расходящаяся) волна имеет асимптотический вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} f(r, \theta)\, e^{ik_0 r}. \tag{16.178}$$

Полную волновую функцию запишем в виде суммы падающей и рассеянной волн:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \Phi(\mathbf{r}). \tag{16.179}$$

Далее, предполагая, что вероятность рассеяния гораздо меньше единицы, сведем волновое уравнение Шредингера к некоторому *приближенному*

$$(\nabla^2 + k_0^2)\,\Phi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\, e^{ik_0 z}, \tag{16.180}$$

где

$$\frac{\hbar^2}{2m} U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) — \text{рассеивающий (возмущающий) потенциал;} \tag{16.181}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = E — \text{полная энергия.} \tag{16.182}$$

Задача свелась к решению неоднородного дифференциального уравнения (16.180). Дифференциальному оператору ∇^2 соответствует непрерывная система собственных функций

$$\nabla^2 \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -k^2 \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{16.183}$$

где

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{16.184}$$

Они обладают свойством ортогональности, т. е.

$$\int \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})\, \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{16.185}$$

(см. упр. 1 и 2 к разд. 15.6). Воспользуемся этими собственными функциями для построения функции Грина.

Разложим $\Phi(\mathbf{r})$ в интеграл Фурье

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int A_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\, d\mathbf{k}, \tag{16.186}$$

подставив который в уравнение (16.180), получим, воспользовавшись результатом (16.183):

$$\int A_{\mathbf{k}} (k_0^2 - k^2)\, \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\, d\mathbf{k} = U(\mathbf{r})\, e^{ik_0 z}. \tag{16.187}$$

Умножим на $\psi^*_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по пространственным координатам, после чего

$$\int A_{\mathbf{k}}(k_0^2 - k^2)\,d\mathbf{k} \int \psi^*_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})\,\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} =$$

$$= A_{\mathbf{k}'}(k_0^2 - k'^2) = \int \psi^*_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})\,U(\mathbf{r})\,e^{ik_0 z}\,d\mathbf{r}. \quad (16.188)$$

Получим отсюда в явном виде коэффициент $A_{\mathbf{k}'}$ и подставим его в интеграл (16.186)

$$\Phi(\mathbf{r}') = \int \left[(k_0^2 - k'^2)^{-1} \int \psi^*_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})\,U(\mathbf{r})\,e^{ik_0 z}\,d\mathbf{r}\right] \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{k}'. \quad (16.189)$$

Тогда, заменяя $\mathbf{k}'$ на $\mathbf{k}$, а $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}'$, в согласии с уравнением (16.186)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\,(k_0^2 - k^2)^{-1}\,d\mathbf{k} \int \psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')\,U(\mathbf{r}')\,e^{ik_0 z'}\,d\mathbf{r}'. \quad (16.190)$$

Изменим порядок интегрирования:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,U(\mathbf{r}')\,e^{ik_0 z'}\,d\mathbf{r}', \quad (16.191)$$

здесь $G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина, определенная интегралом

$$G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{\psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')\,\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{k^2 - k_0^2}\,d\mathbf{k}, \quad (16.192)$$

аналогичным полученному для дискретного набора собственных функций ряду (9.75). Интеграл (16.191) нужно сравнить с функцией Грина из уравнения Пуассона (16.165).

Для вычисления этого интеграла воспользуемся граничными условиями. Возьмем собственные функции уравнения (16.183), поскольку

$$d\mathbf{k} = k^2\,dk \sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \quad (16.193)$$

получим

$$G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{k^2 - k_0^2}\,d\varphi \sin\theta\,d\theta k^2\,dk. \quad (16.194)$$

Здесь $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k\rho\cos\theta$, где $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'$ определяет полярную ось в k-пространстве. Интегрирование по φ дает 2π,

а после интегрирования по 0 получим

$$G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2\rho i}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ik\rho}{k^2-k_0^2}\,k\,dk. \qquad (16.195)$$

Подынтегральная функция — *четная* по k, поэтому

$$G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi^2\rho i}\int_{-\infty}^\infty \frac{k\operatorname{sh} ik}{k^2-\sigma^2}\,dk. \qquad (16.196)$$

Последнее понадобилось нам для подготовки вычисления функции Грина $G_{k_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ с помощью контурного интеграла. Под k и σ ($\sigma > 0$) понимаются соответственно $k\rho$ и $k_0\rho$.

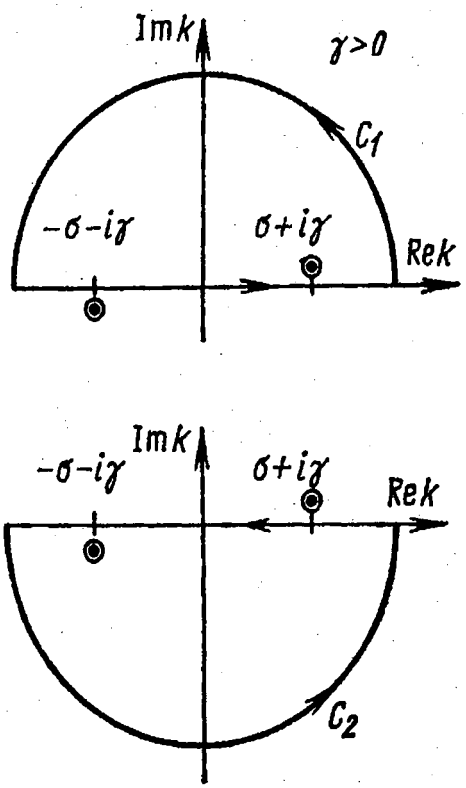


Рис. 16.4. Контуры интегрирования для вычисления функции Грина.

Разобьем интеграл на два, причем каждый из них можно записать в виде интеграла по соответствующему контуру:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^2\rho i}\oint_{C_1}\frac{ke^{ik}\,dk}{k^2-\sigma^2} + \frac{1}{8\pi^2\rho i}\oint_{C_2}\frac{ke^{-ik}dk}{k^2-\sigma^2}. \qquad (16.197)$$

Контуры C_1 и C_2 показаны на рис. 16.4. При интегрировании мы сместим сначала особые точки с вещественной оси, заменив σ на $\sigma+i\gamma$, а затем уже после вычисления интеграла перейдем к пределу $\gamma \to 0$.

При *положительном* γ внутрь контура C_1 попадает особая точка $k = \sigma + i\gamma$, и получаем, что первый интеграл равен $2\pi i e^{i(\sigma+i\gamma)}/2$. Второй интеграл с особенностью в точке $k = -(\sigma+i\gamma)$ равен $2\pi i e^{i(\sigma+i\gamma)}/2$. Тогда, переходя в уравнении (16.197) к пределу $\gamma \to 0$, в полном согласии с результатом (16.165) имеем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\rho}\,e^{i\sigma} = \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (16.198)$$

Этот результат зависит от выбранного знака γ (в данном случае положительного). Если бы мы взяли $\gamma < 0$, искомая

функция Грина содержала бы множитель $e^{-i\sigma}$, который соответствует *падающей* волне. Выбор $\gamma > 0$ диктуется граничными условиями.

Нужно подчеркнуть, что выражения (16.191) и (16.198) — точное решение уравнения (16.180). Однако это уравнение, записанное, как часто говорят, в борновском приближении, является только первым приближением к реальной физической картине.

Упражнения

1. Найти функцию Грина оператора $\mathscr{L} = d^2/dx^2$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

Ответ: $G(x, t) = \begin{cases} x, & x < t, \\ t, & t < x, \end{cases}$

2. Найти функции Грина для операторов

$$\mathscr{L}y(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

$\mathscr{L}y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x)$, $y(x)$ конечна всюду.

3. Найти функции Грина для операторов Бесселя

$$\mathscr{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right), \quad \mathscr{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) - \frac{n^2}{x}y(x).$$

Ответ:

$$G(x, t) = \begin{cases} -\ln t, & x < t, \\ -\ln x, & t < x, \end{cases}$$

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{t}\right)^n - (xt)^n\right], & x < t, \\ \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{t}{x}\right)^n - (xt)^n\right], & t < x. \end{cases}$$

4. Построить функцию Грина для задачи

$$x^2\frac{d^2y}{dx} + x\frac{dy}{dx} + (k^2x^2 - 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

5. Электростатический потенциал (в системе МКСА) $\varphi(r) = (Z/4\pi\varepsilon_0)(e^{-ar}/r)$. Найти распределение электрического заряда. Потенциал $\varphi(r)$ стремится экспоненциально к нулю для больших r. Показать, что полный заряд равен нулю.

Ответ: $\rho(r) = Z\delta(r) - \dfrac{Za^2}{4\pi}\cdot\dfrac{e^{-ar}}{r}$.

6. Преобразовать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y(r)}{dr^2} - k^2y(r) + V_0\frac{e^{-r}}{r}y(r) = 0,$$

решение которого удовлетворяет граничным условиям $y(0)=y(\infty)=0$, в интегральное уравнение Фредгольма вида

$$y(r)=\lambda\int_0^\infty G(r,\ t)\frac{e^{-t}}{t}y(t)\,dt.$$

Величины V_0 и k^2 постоянны. Дифференциальное уравнение получается из волнового уравнения Шредингера с мезонным потенциалом.

Ответ: $\lambda=V_0$, $G(r,\ t)=\begin{cases}\frac{1}{k}e^{-kt}\operatorname{sh}kr, & r<t,\\ \frac{1}{k}e^{-kr}\operatorname{sh}kt, & t<r.\end{cases}$

7. Найти решение уравнения Фредгольма $f(x)=\lambda^2\int_a^b G(x,\ t)\varphi(t)\,dt$,

для которого $G(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n^2-\lambda^2}$.

Ответ: $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2-\lambda^2}{\lambda^2}\varphi_n(x)\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt.$

8. Однородное уравнение Гельмгольца $\nabla^2\varphi+\lambda^2\varphi=0$ имеет собственные значения λ_i^2 и собственные функции φ_i. Показать, что функция Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2G(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)+\lambda^2G(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2),$$

может быть представлена рядом

$$G(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(\mathbf{r}_1)\varphi_i(\mathbf{r}_2)}{\lambda_i^2-\lambda^2}.$$

Такой ряд называется билинейным. Если функцию Грина можно получить в *замкнутой форме*, то это дает возможность получить производящую функцию.

9. Воспользовавшись результатами предыдущего упражнения, показать, что функция Грина уравнения Лапласа в сферических координатах равна

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}=\sum_{n,\,m}\frac{1}{2n+1}Y_n^{m*}(\theta_1,\ \varphi_1)Y_n^m(\theta_2\ \ \varphi_2)\times$$

$$\times\begin{cases}\frac{r_1^n}{r_2^{n+1}}, & r_1<r_2,\\ \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}}, & r_2<r_1.\end{cases}$$

10. Учитывая полученное в разд. 12.1 соотношение

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\omega)^{1/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\omega)\begin{cases}\dfrac{r_1^n}{r_2^{n+1}}, & r_1<r_2,\\[2ex] \dfrac{r_2^n}{r_1^{n+1}}, & r_2<r_1\end{cases}$$

и разложение $1/R$ по собственным функциям (см. упр. 9), сформулировать теорему сложения для полиномов Лежандра или сферических функций (рис. 16.5).

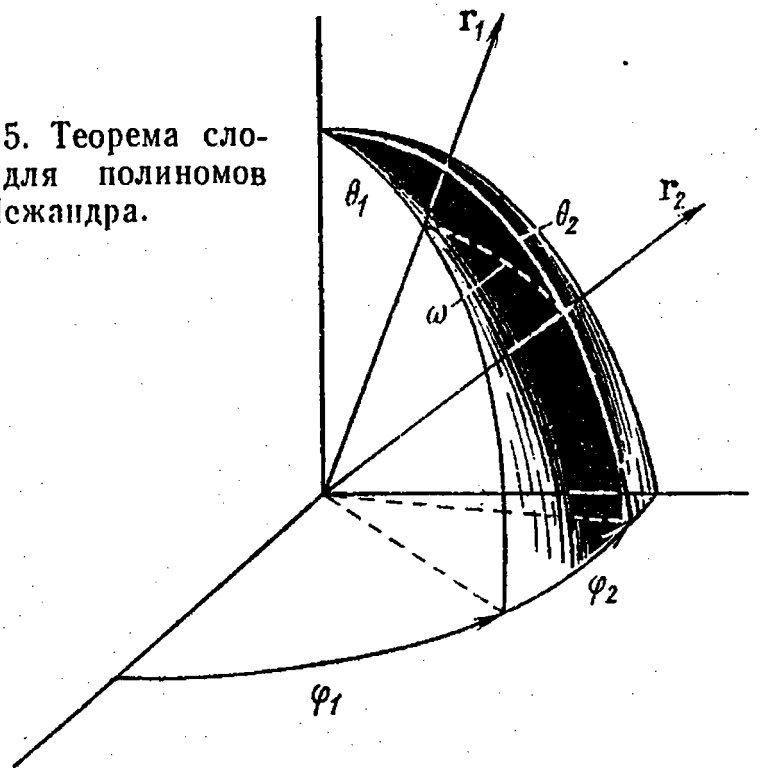


Рис. 16.5. Теорема сложения для полиномов Лежандра.

11. Исходя из разложения функции Грина по собственным функциям, показать, что

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi t}{n^2}=\begin{cases}x(1-t), & x<t,\\ t(1-x), & t<x;\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=\begin{cases}x, & x<t,\\ t, & t<x.\end{cases}$$

12. Имея в виду, что $\psi_k(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/(2\pi)^{3/2}$ — собственная функция уравнения $(\nabla^2+k^2)\psi_k(\mathbf{r})=0$ [выражения (16.183) и (16.184)], показать, что функцию Грина для оператора $\mathscr{L}=\nabla^2$ в неограниченном пространстве можно представить интегралом

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\frac{dk}{k^2}.$$

ГЛАВА 17

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

17.1. ОДНА ЗАВИСИМАЯ И ОДНА НЕЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННЫЕ

Понятие вариации. Вариационное исчисление рассматривает задачи, в которых необходимо сделать минимальным (или максимальным) значение некоторого интеграла. В качестве простейшего примера возьмем интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x)\, dx. \qquad (17.1)$$

Здесь J — величина, которая принимает экстремальное значение. Под знаком интеграла стоит известная функция f, зависящая от переменных y, y_x * и x, однако зависимость y от x не фиксирована, т. е. функция $y(x)$ не известна. Это означает, что хотя интеграл и берется между точками x_1 и x_2, точный путь интегрирования мы не знаем (рис. 17.1). Выберем путь таким, чтобы интегрирование между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) приводило к минимальной величине J.

Строго говоря, будем определять экстремальные значения J: минимум, максимум или седловые точки. В большинстве физических задач приходится разыскивать минимальное значение. Эта проблема гораздо труднее соответствующей проблемы дифференциального исчисления. Иногда решения может не оказаться вовсе. В дифференциальном исчислении минимум ищут, сравнивая $y(x_0)$ с $y(x)$, где x — расстояние между двумя соседними точками. Здесь же будем предполагать существование оптимального пути (для которого J экстремально), а затем сравнивать J для этого (неизвестного) оптимального пути со значениями J, полученными после интегрирования по соседним путям. На рис. 17.1 показаны два возможных варианта.

---

* Здесь и в дальнейшем всегда будем полагать, что $y_x = dy/dx$, $y_{xx} = d^2y/dx^2$ и т. д.

(Очевидно, существует бесконечное множество таких возможностей.) Разница между ординатами этих двух кривых при фиксированном x называется вариацией y и обозначается символом δy; для ее описания удобно ввести новую

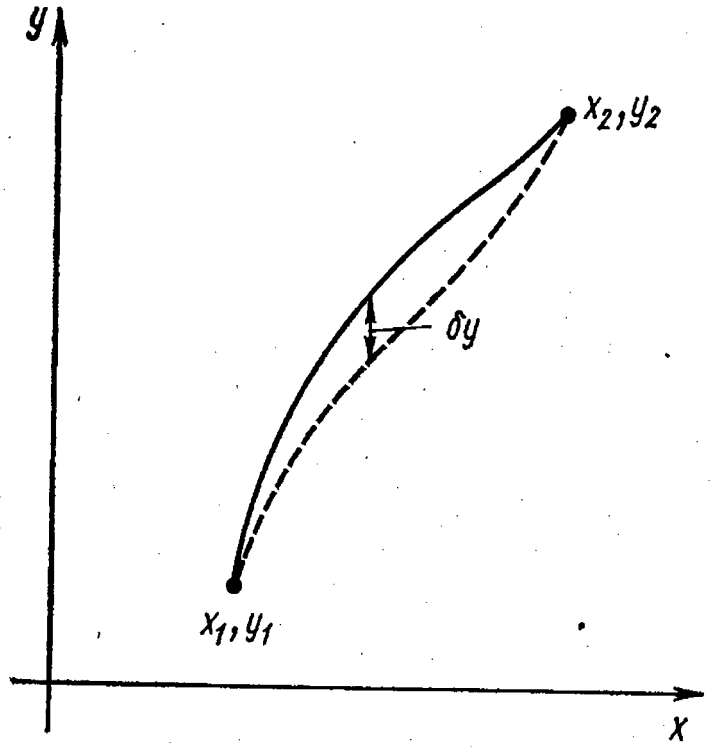


Рис. 17.1. Вариация пути интегрирования.

функцию $\eta(x)$, которая определяет произвольную деформацию пути, а также масштабный множитель α, задающий величину вариации.

На произвольную функцию $\eta(x)$ накладывается только два ограничения. Во-первых,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \tag{17.2}$$

откуда следует, что все возможные пути должны проходить через фиксированные концевые точки. Во-вторых, как вскоре это будет очевидно, $\eta(x)$ должна быть дифференцируема, т. е. нельзя пользоваться функцией

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0; \end{cases} \tag{17.3}$$

правда, в качестве $\eta(x)$ можно выбрать любую из функций, с помощью которых в гл. 8 и 16 выражалась δ-функция Дирака ($\eta(x)$ будет отлична от нуля в бесконечно малой

области). Тогда с помощью α и $\eta(x)$ запишем путь

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x), \tag{17.4}$$

а

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha\eta(x). \tag{17.5}$$

Выберем в качестве неизвестного пути, который минимизирует J, путь $y(x, \alpha = 0)$. Тогда $y(x, \alpha)$ будет описывать соседний путь, а интеграл J окажется теперь функцией нового параметра α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x]\, dx, \tag{17.6}$$

и, следовательно, условие экстремальности по аналогии с таким же условием из дифференциального исчисления запишется как

$$\left[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = 0. \tag{17.7}$$

Зависимость интеграла от параметра α определяется величинами $y(x, \alpha)$ и $y_x(x, \alpha)$, поэтому

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial \alpha}\right] dx. \tag{17.8}$$

Из уравнения (17.4) имеем

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x), \tag{17.9}$$

$$\frac{\partial y_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx}, \tag{17.10}$$

с учетом которых уравнение (17.8) сведется к следующему:

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{d\eta(x)}{dx}\right) dx. \tag{17.11}$$

Интегрируя второй член по частям, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta(x)}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\, dx = \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y_x}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\, dx. \tag{17.12}$$

При этом нужно учитывать, что в силу условия (17.2) проинтегрированная часть равна нулю, и уравнение (17.11)

приобретает более компактную форму:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right] \eta(x)\, dx = 0, \qquad (17.13)$$

для которой параметр α можно положить равным нулю.

Иногда уравнение (17.13) представляют так:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) \delta y\, dx = \alpha \left[\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = \delta J = 0. \qquad (17.14)$$

Поскольку функция $\eta(x)$ произвольна, ее можно выбрать с тем же знаком, какой имеет выражение в скобках, когда оно отлично от нуля. Тогда подынтегральная функция будет всегда положительной. Благодаря этому условие (17.13), которое обеспечивает существование экстремума, может выполняться только в том случае, если выражение в скобках тождественно равно нулю. Таким образом, можно окончательно записать условие экстремума в виде дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 0. \qquad (17.15)$$

Это условие называют уравнением Эйлера.

Формы уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера часто записывают так:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0. \qquad (17.16)$$

В задачах, в которых $f = f(y, y_x)$, т. е. функция не зависит явно от x, уравнение (17.16) упрощается:

$$\frac{d}{dx}\left(f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0 \qquad (17.17)$$

или

$$f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} = \text{const}. \qquad (17.18)$$

Очевидно, условия (17.15) или (17.16) удовлетворяются при экстремальном значении J, т. е. в этом случае условие (17.14) тоже окажется выполненным. Условие (17.15) является необходимым, но не достаточным. Курант и Роббинс очень остроумно иллюстрируют это, рассматривая

расстояние по поверхности сферы между двумя точками A и B, лежащими на этой сфере (рис. 17.2). Пусть *1* как часть большого круга определяется из условия (17.15) (см. ниже упр. 3). Однако оставшаяся часть большого круга, путь *2*, также удовлетворяет уравнению Эйлера. Путь *2* максимален при условии, что он совпадает с большим кругом, который можно обходить лишь один раз; иначе говоря, путь $2+n$ полных оборотов по большому кругу — тоже решение. Если не требовать, чтобы измеряемое расстояние совпадало с частью большого круга, любое отклонение от пути *2* будет увеличивать расстояние между точками A и B. На этом примере видно, как важно исследовать свойства решений уравнения (17.15) и ясно представлять, удовлетворяют ли полученные решения физическим условиям поставленной задачи.

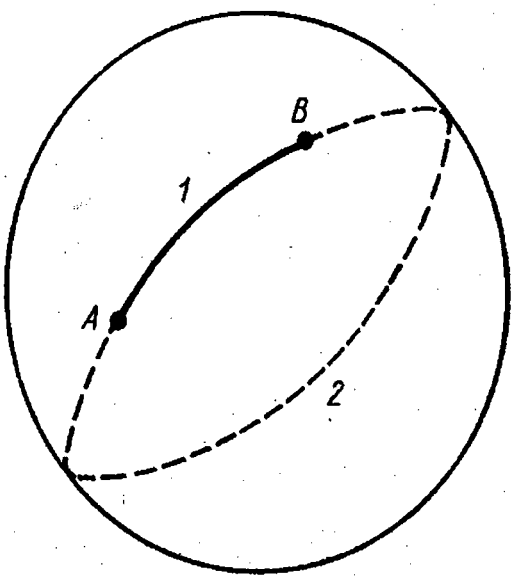


Рис. 17.2. Экстремальные пути на сфере.

Упражнения

1. Доказать эквивалентность двух форм уравнений Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0.$$

2. Вывести уравнение Эйлера, соответствующее уравнению (17.15) при условии, что $f=f(y_{xx}, y_x, y, x)$.

Ответ:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_{xx}}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$
$$\eta(x_0)=\eta(x_2)=\eta_x(x_1)=\eta_x(x_2)=0.$$

3. Показать, что кратчайшим расстоянием по поверхности сферы между двумя точками на ней служит дуга большого круга.

4. Вывести уравнение Эйлера, разлагая подынтегральную функцию $J(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f[y(x,\alpha), y_x(x,\alpha), x]\,dx$ в ряд по степеням α. *Замечание:* Использовать ряд Тейлора для двух переменных (см. разд. 5.6). Можно положить $\alpha=0$ (после дифференцирования по α).

17.2. ПРИЛОЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Прямая линия. Простейшим примером использования уравнения Эйлера служит задача о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками в плоскости xy. Элемент расстояния равен

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = [1 + y_x^2]^{1/2}\, dx. \qquad (17.19)$$

Полное расстояние J записывается через интеграл

$$J = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} ds = \int_{x_1}^{x_2} [1 + y_x^2]^{1/2}\, dx. \qquad (17.20)$$

Сравнение с уравнением (17.1) показывает, что

$$f(y, y_x, x) = (1 + y_x^2)^{1/2}. \qquad (17.21)$$

Подставим функцию f в уравнение Эйлера (17.16)

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{y_x}{(1+y_x^2)^{1/2}}\right] = 0;$$

или

$$\frac{1}{(1+y_x^2)^{1/2}} = C = \text{const}. \qquad (17.22)$$

Это условие выполняется, если $y_x = a = \text{const}$, отсюда

$$y = ax + b. \qquad (17.23)$$

Таким образом, получено уравнение прямой линии. Постоянные a и b выбирают так, чтобы линия проходила через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Следовательно, уравнение Эйлера предсказывает, что кратчайшее расстояние между двумя фиксированными точками — прямая линия *.

Поверхность вращения. Теперь рассмотрим поверхность, образованную вращением кривой $y(x)$ вокруг оси x (рис. 17.3). Известно, что концы кривой зафиксированы в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Вариационная задача заключается в отыскании такой кривой $y(x)$, чтобы поверхность вращения оказалась минимальной. Для элемента поверхности (см. рис. 17.3) имеем

$$dA = 2\pi y\, ds = 2\pi y\, (1 + y_x^2)^{1/2}\, dx, \qquad (17.24)$$

* Очевидно, в этом случае мы имеем экстремум. Проверка показывает, что это минимум.

тогда

$$J = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y (1 + y_x^2)^{1/2} \, dx. \qquad (17.25)$$

Опуская множитель 2π, запишем

$$f(y, y_x, x) = y (1 + y_x^2)^{1/2}. \qquad (17.26)$$

Производная $\partial f/\partial x = 0$, поэтому прямое использование

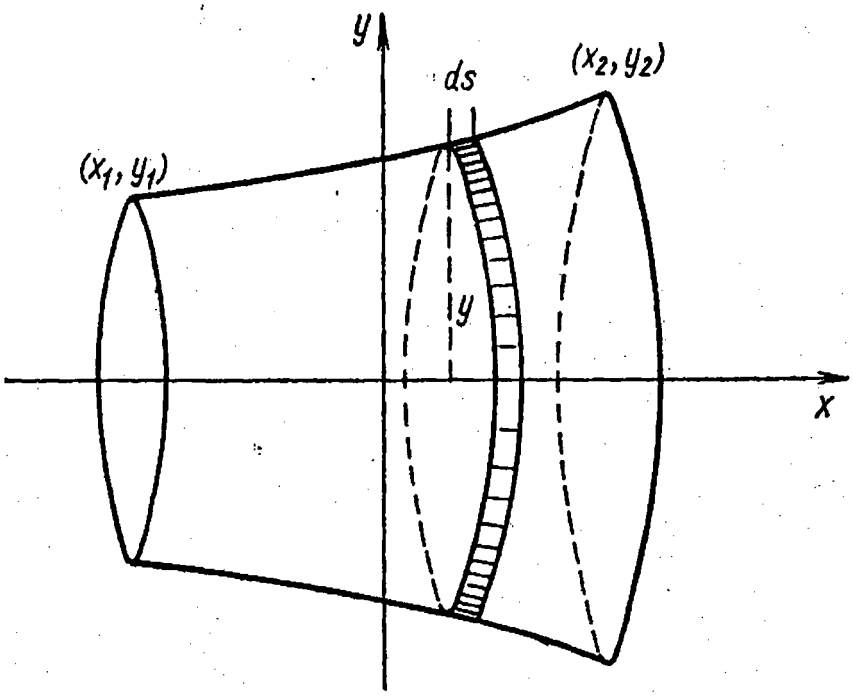


Рис. 17.3. Поверхность вращения, задача о мыльной пленке.

уравнения (17.16) дает

$$y (1 + y_x^2)^{1/2} - y y_x^2 \frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = c_1, \qquad (17.27)$$

или

$$y/(1 + y_x^2)^{1/2} = c_1. \qquad (17.28)$$

Возведем в квадрат (17.28):

$$\frac{y^2}{1 + y_x^2} = c_1^2, \quad c_1^2 \leqslant y_{\text{мин}}^2, \qquad (17.29)$$

откуда

$$(y_x)^{-1} = \frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}. \qquad (17.30)$$

Интегрируя, получаем

$$x = c_1 \operatorname{Arch}(y/c_1) + c_2. \tag{17.31}$$

Разрешим (17.31) относительно y

$$y = c_1 \operatorname{ch}\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right), \tag{17.32}$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются из условия прохождения графика гиперболического косинуса через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Таким образом, минимальная поверхность вращения имеет цепную линию (в результате вращения образуется катеноид).

Мыльная пленка — минимальная поверхность. Полученную формулу следует применять с очень большой осторожностью. В этом отношении весьма полезными оказываются конкретные примеры, которые помогают лучше почувствовать некоторые тонкости. Рассмотрим эту же проблему минимальной поверхности при концевых точках $(x_1, y_1) = (-x_0, 1)$, $(x_2, y_2) = (x_0, 1)$. Минимальной поверхностью в этом случае оказывается мыльная пленка, натянутая на два кольца единичного радиуса, центры которых совпадают с точками $x = \pm x_0$. Задача заключается в отыскании кривой $y(x)$. Вновь возвращаясь к формуле (17.32), видим, что вследствие симметрии задачи постоянную c_2 нужно положить равной нулю. Если взять $x_0 = 1/2$, то получится трансцендентное уравнение для определения c_1

$$1 = c_1 \operatorname{ch}(1/2c_1), \tag{17.33}$$

которое имеет два решения: значение $c_1 = 0{,}2350$ приводит к «глубокой» кривой, а значение $c_2 = 0{,}8483$ дает «плоскую» кривую. Какое из этих двух значений нужно взять, чтобы поверхность была минимальной? Какая кривая соответствует мыльной пленке? Прежде чем ответить на эти вопросы, положим, что кольца раздвинуты друг от друга так, чтобы $x_0 = 1$. Тогда уравнение (17.32) сведется к

$$1 = c_1 \operatorname{ch}(1/c_1), \tag{17.34}$$

которое *не имеет вещественных решений*! Физическая сущность процесса заключается в том, что кольца раздвигают до тех пор, пока не достигается точка, в которой мыльная пленка не может больше удерживаться горизонтальной силой и разрывается (необратимый процесс), так

что вместо нее образуются пленки на каждом из колец (с общей поверхностью $2\pi = 6{,}2832\ldots$). Это условие разрыва Гольдшмидта.

Поставим вопрос: насколько большим может быть x_0, чтобы уравнение (17.32) еще имело вещественное решение? Положим $c_1^{-1} = p$, тогда из (17.32) следует

$$p = \operatorname{ch} p x_0. \tag{17.35}$$

Из требования $dx_0/dp = 0$ вытекает

$$1 = x_0 \operatorname{sh} p x_0. \tag{17.36}$$

Из (17.35) и (17.36) получим

$$p x_0 = \operatorname{cth} p x_0 \tag{17.37}$$

с корнем $px_0 = 1{,}200$. После подстановки в уравнение (17.35) или (17.36) имеем $p = 1{,}811$ ($c_1 = 0{,}5523$) и $x_{0\,\text{макс}} = 0{,}663$.

Вернемся теперь к решению уравнения (17.33), которое описывает поверхность мыльной пленки, и рассчитаем поверхность, соответствующую каждому решению:

$$A = 4\pi \int_0^{x_0} y\,(1 + y_x^2)^{1/2}\,dx = \frac{4\pi}{c_1} \int_0^{x_0} y^2\,dx =$$

$$= 4\pi c_1 \int_0^{x_0} \left(\operatorname{ch} \frac{x}{c_1}\right)^2 dx = \pi c_1^2 \left[\operatorname{sh}\left(\frac{2x_0}{c_1}\right) + \frac{2x_0}{c_1}\right]. \tag{17.38}$$

Для $x_0 = 1/2$ уравнение (17.33) приводит к следующим значениям: $c_1 = 0{,}2350 \to A = 6{,}8456$; $c_1 = 0{,}8483 \to A = 5{,}9917$, откуда следует, что первое из этих решений может иметь только местный минимум. Более подробное исследование показывает, что эта поверхность не имеет даже местного минимума. При $x_0 = 1/2$ мыльная пленка описывается «плоской» кривой

$$y = 0{,}8483 \operatorname{ch}(x/0{,}8483). \tag{17.39}$$

Этот «плоский», или мелкий, катеноид имеет абсолютный минимум в интервале $0 \leqslant x_0 < 0{,}528$. Однако в области $0{,}528 < x < 0{,}663$ его поверхность превышает поверхность, соответствующую разрывному условию Гольдшмидта (6,2832), поэтому указанный минимум является только относительным.

Брахистохрона. Исторически первой задачей вариационного исчисления была задача о брахистохроне, или проблема кратчайшего времени. Она формулируется следующим образом: среди всех кривых, соединяющих точку (x_1, y_1) с началом координат, найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь из точки (x_1, y_1) без трения, под влиянием силы тяжести с начальной скоростью, равной нулю, попадает в кратчайший срок в начало координат. В этой задаче время движения тяжелой точки равно интегралу

$$J = \int_0^{x_1, y_1} \frac{ds}{v}. \tag{17.40}$$

Поскольку по закону сохранения энергии $mv^2/2 = mg(y_1 - y)$, то $v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$, и, следовательно,

$$J = \int_0^{x_1} \left[\frac{1 + y_x^2}{2g(y_1 - y)}\right]^{1/2} dx. \tag{17.41}$$

Опуская постоянную $2g$, запишем функцию f в виде

$$f = \left(\frac{1 + y_x^2}{y_1 - y}\right)^{1/2}. \tag{17.42}$$

Снова $\partial f/\partial x = 0$, поэтому, исходя из уравнения (17.16), имеем

$$\left(\frac{1 + y_x^2}{y_1 - y}\right)^{1/2} - \frac{y_x^2}{[(y_1 - y)(1 + y_x^2)]^{1/2}} = c \tag{17.43}$$

или $1/[(y_1 - y)(1 + y_x^2)]^{1/2} = c$, откуда

$$y_x = \left(\frac{b + y}{a - y}\right)^{1/2}, \tag{17.44}$$

где $a = y_1$, $b = 1/c^2 - y_1$. Введем новую переменную

$$y = \frac{a - b}{2} - \frac{a + b}{2}\cos\theta. \tag{17.45}$$

Тогда, исходя из (17.44), получаем

$$dx = \frac{a + b}{2}\left(\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}\right)^{1/2}\sin\theta\, d\theta = \frac{a + b}{2}(1 + \cos\theta)\, d\theta, \tag{17.46}$$

и, наконец, имеем известные уравнения циклоиды

$$x + d = \frac{a + b}{2}(\theta + \sin\theta), \quad y + b = \frac{a + b}{2}(1 - \cos\theta). \tag{17.47}$$

Постоянные интегрирования b и d определяются из требования прохождения циклоиды через начало координат

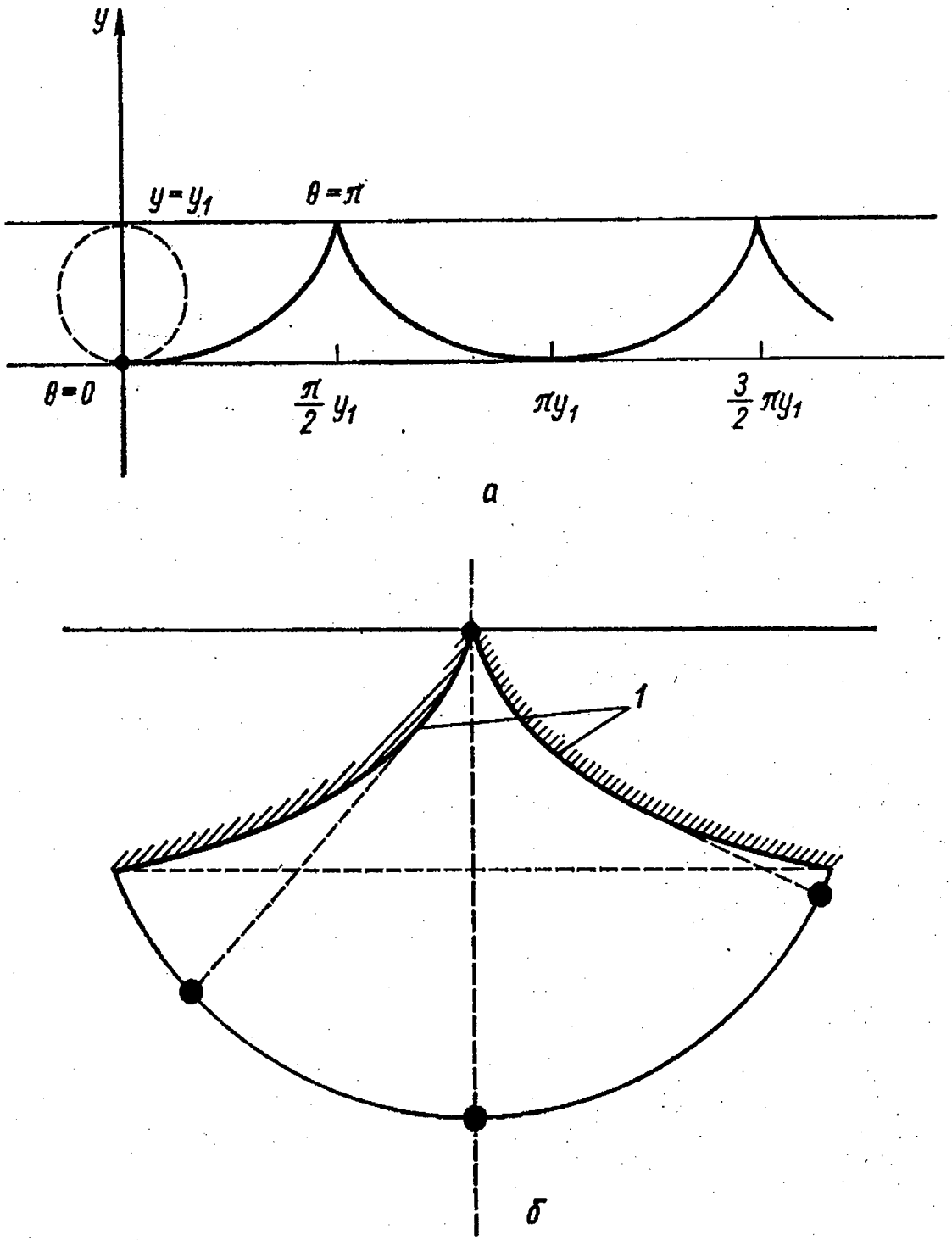


Рис. 17.4. Брахистохрона, движение частицы по циклоиде (*а*) и циклоидальный маятник с ограничителями (*б*).

и точку (x_1, y_1), параметр a фиксируется в зависимости от координаты y_1, которая задает начальное условие задачи. В частном случае, когда $x_1 = (\pi/2)y_1$, $b = d = 0$, тогда

$$x = \frac{y_1}{2}(\theta + \sin\theta), \quad y = \frac{y_1}{2}(1 - \cos\theta), \qquad (17.48)$$

т. е. циклоида вычерчивается точкой, расположенной на ободе колеса радиусом $y_1/2$, катящегося вдоль линии $y = y_1$ (рис. 17.4, *а*). Отсюда получаем интересное следствие. Время скольжения по циклоиде, заданной уравнениями (17.48), из точки (x_2, y_2) равно

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \left(\frac{1+y_x^2}{y_2-y}\right)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{y_1}{2g}\right)^{1/2} \qquad (17.49)$$

и не зависит от начальной точки (см. гл. 15, задача о таутохроне). Любопытно сравнить движение по циклоиде с движением по круговому пути (обычный маятник). Указанное свойство циклоиды учитывается при конструировании маятника, период колебания которого не зависит от амплитуды. Поскольку разверткой круга служит циклоида, мы можем сделать маятник с некоторым ограничителем *1*, имеющим форму циклоиды (рис. 17.4, *б*), тогда подвес маятника начнет огибать этот ограничитель, и его движение будет напоминать движение частицы, скользящей свободно без трения по циклоиде.

Упражнения

1. Мыльная пленка натянута между двумя кольцами единичного радиуса с центрами в точках $\pm x_0$ на оси x и перпендикулярными к этой оси. Найти такое значение $\pm x_0$, чтобы поверхность вращения оказалась равной площади двух торцовых колец (разрывное решение Гольдшмидта).

2. Под действием силы тяжести частица без трения скользит по циклоиде, заданной формулами $x = c(\theta + \sin\theta)$, $y = c(1 - \cos\theta)$. Показать, что время, затрачиваемое частицей на весь путь от исходной точки до начала координат, равно $T = (\pi/2)\sqrt{c/g}$ и не зависит от положения исходной точки на кривой $(0 < \theta \leqslant \pi)$.

17.3. НЕСКОЛЬКО ЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Уравнение (17.1) допускает обобщение. Рассмотрим случай, когда подынтегральная функция f определяется сразу несколькими зависимыми переменными $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, . . ., которые являются фнукциями одной независимой переменной x.

Для нескольких зависимых переменных уравнение (17.1) перепишется в следующем виде:

$$d = \int_{x_1}^{x_2} f\,[y_1(x),\ \ldots, y_n(x),\ y_{1x}(x),\ \ldots, y_{nx}(x),\ x]\,dx. \quad (17.50)$$

Как и в разд. 17.1, будем определять экстремальное значение, сравнивая соседние пути. Положим,

$$y_i(x,\ \alpha) = y_i(x,\ 0) + \alpha\eta_i(x),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \quad (17.51)$$

где η_i не зависят друг от друга, но в остальном удовлетворяют тем условиям, о которых говорилось в разд. 17.1. Поскольку уравнение (17.7) в данном случае тоже остается в силе, продифференцируем выражение (17.50) по α, а затем положим $\alpha = 0$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}}\eta_{ix}\right) dx = 0. \quad (17.52)$$

Снова каждый из членов типа $(\partial f/\partial y_{ix})\,\eta_{ix}$ проинтегрируем по частям. Проинтегрированные части равны нулю, и из (17.52) получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_{ix}}\right)\eta_i\,dx = 0. \quad (17.53)$$

В силу того что η_i произвольны и *не зависят* друг от друга* каждый из членов этой суммы должен *независимо* от других равняться нулю. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial\,(\partial y_i/\partial x)} = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (17.54)$$

Таким образом, возникла система уравнений Эйлера, каждое из которых выполняется при наличии экстремума.

Самое важное практическое приложение уравнения (17.50) связано с лагранжианом L, который заменяет в нем функцию f. Лагранжиан определяют как *разность* между кинетической и потенциальной энергиями системы

$$L \equiv T - V. \quad (17.55)$$

---

* Например, можно положить $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \ldots = 0$ и тем самым уничтожить все члены суммы, за исключением первого, а затем действовать в соответствии с разд. 17.1.

Принцип Гамильтона. Выберем в качестве независимой переменной время t, тогда x будет функцией t, и сделаем замену переменных в системе уравнений Эйлера (17.54):

$$x \to t,\ y_i \to x_i(t),\ y_{ix} \to \dot{x}_i(t). \qquad (17.56)$$

Здесь $x_i(t)$ — смещение, а $\dot{x}_i(t) = dx_i/dt$ — скорость i-й частицы. В принятых обозначениях уравнение $\delta J = 0$ отражает математическую формулировку принципа Гамильтона в классической механике:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n; t)\, dt = 0. \qquad (17.57)$$

Иными словами, принцип Гамильтона говорит о том, что движение системы с момента времени t_1 до момента t_2 происходит таким образом, что линейный интеграл от лагранжиана L сохраняет постоянное значение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \qquad (17.58)$$

Эти уравнения для лагранжиана системы можно получить из уравнений движения Ньютона, и наоборот. Указанные системы уравнений называют фундаментальными. Однако формулировка Лагранжа имеет определенные преимущества по сравнению с уравнениями, которые отражают обычные законы Ньютона. Если уравнения Ньютона связывают векторные величины, то уравнения Лагранжа записаны для скаляров. Координаты x_1, x_2, x_3, ... понимаются в широком смысле и не обязательно характеризуют размеры. Обычно их выбирают, исходя из требований конкретной физической задачи. Наконец, уравнения Лагранжа, хотя они и записываются не в столь наглядной форме, гораздо удобнее для описания сложных систем и легче переносятся из механики в другие области физики (например, в квантовую механику).

Пример 1. Движение частицы в прямоугольных координатах. Построим лагранжиан (17.55) для частицы с кинетической энергией

$$T = m\dot{x}^2/2 \qquad (17.59)$$

и потенциальной энергией $V(x)$. Сила, как обычно, задана с помощью отрицательного градиента потенциала:

$$F(x) = -dV(x)/dx. \qquad (17.60)$$

Из (17.59) получаем второй закон Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x})-\frac{d(-V)}{dx}=m\ddot{x}-F(x)=0. \tag{17.61}$$

Пример 2. Движение частицы в цилиндрической системе координат. Поставим теперь перед собой аналогичную задачу и рассмотрим движение частицы в цилиндрической системе координат в плоскости $z=0$. Кинетическая энергия движущейся частицы

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2), \tag{17.62}$$

а потенциальная равна нулю. Уравнения Лагранжа в этом случае запишутся так:

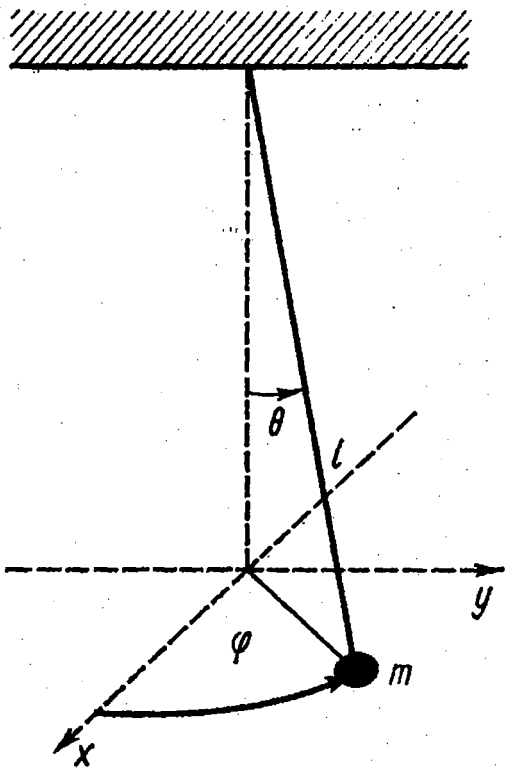


Рис. 17.5. Сферический маятник.

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho})-m\rho\dot{\varphi}^2=0,\quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})=0. \tag{17.63}$$

Второе уравнение отражает закон сохранения момента количества движения, а первое можно понимать как равенство радиального ускорения центробежной силе. В этом смысле центробежная сила является реальной силой.

Упражнения

1. Записать уравнения Лагранжа движущейся частицы в сферической системе координат, потенциал V считать постоянным. Выделить члены, соответствующие центробежной силе и силе Кориолиса.

2. Имеется сферический маятник, в котором смещение массы m, подвешенной на нити длиной l, характеризуется полярным и азимутальным углами θ и φ (рис. 17.5).

Записать лагранжиан этой системы, получить уравнение движения в форме Лагранжа.

3. Показать, что лагранжиан $L=m_0c^2\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)-V(\mathbf{r})$ приводит к релятивистской формулировке второго закона Ньютона

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0V_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=F_i,$$

где $F_i=-\partial V/\partial x_i$.

17.4. НЕСКОЛЬКО НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Подынтегральная функция f в уравнении (17.1) может содержать только одну неизвестную функцию u, которая зависит, однако, от нескольких независимых переменных, например в трехмерном случае: $u = u(x, y, z)$. Уравнение (17.1) приобретает тогда форму

$$J = \int\int\int f[u, u_x, u_y, u_z, x, y, z]\,dx\,dy\,dz. \quad (17.64)$$

Необходимо найти такую функцию $u(x, y, z)$, для которой величина J постоянна, т. е.

$$\delta J = \alpha \frac{\partial J}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0. \quad (17.65)$$

Обобщая результат разд. 17.1, полагаем

$$u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z, 0) + \alpha\eta(x, y, z). \quad (17.66)$$

Здесь $u(x, y, z; \alpha = 0)$ — неизвестная функция, для которой выполняется условие (17.65); $\eta(x, y, z)$ — произвольное отклонение, характеризующее функцию $u(x, y, z, \alpha)$. Как и раньше, потребуем, чтобы отклонение $\eta(x, y, z, \alpha)$ было дифференцируемой функцией и обращалось в нуль в концевых точках. Из уравнения (17.66) получаем

$$u_x(x, y, z, \alpha) = u_x(x, y, z, 0) + \alpha\eta_x. \quad (17.67)$$

Аналогичные выражения записываются для u_y и u_z.

Продифференцируем интеграл (17.64) по α, а затем положим $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \int\int\int \left(\frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y}\eta_y + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial u_z}\eta_z\right) dx\,dy\,dz = 0. \quad (17.68)$$

Вновь проинтегрируем по частям каждый из членов $(\partial f/\partial u_i)\eta_i$ Проинтегрированные части после подстановки пределов обратятся в нуль (так как по условию отклонение η равно нулю в концевых точках):

$$\int\int\int \left(\frac{\partial f}{du} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z}\right)\eta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 0. \quad (17.69)$$

В силу произвольности вариации $\eta(x, y, z)$ выражение в круглых скобках можно приравнять нулю. В результате получим уравнение Эйлера для трех независимых переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z} = 0. \qquad (17.70)$$

Уравнение Лапласа. Плотность энергии электростатического поля равна $\varepsilon E^2/2$. Здесь E — обычное электростатическое поле сил. То же самое можно записать и через статический потенциал: плотность энергии $= \varepsilon (\nabla\varphi)^2/2$. Потребуем теперь, чтобы электростатическая энергия была минимальной для данного объема (при этом необходимо учесть еще граничные условия для величин E и φ). В соответствии с поставленной задачей запишем

$$J = \int\int\int (\nabla\varphi)^2\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int\int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad (17.71)$$

в котором функция из уравнения (17.70) заменена на

$$f(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, x, y, z) = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2. \qquad (17.72)$$

Уравнение Эйлера определяет соотношение

$$-2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0 \text{ или } \nabla^2\varphi(x, y, z) = 0, \qquad (17.73)$$

которое совпадает с уравнением Лапласа из электростатики.

Более подробное исследование показывает, что найденный экстремум является минимумом. Таким образом, требование минимальности энергии поля приводит к уравнению Лапласа.

17.5. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В некоторых случаях подынтегральная функция f содержит более чем одну зависимую и более чем одну независимую переменную. Рассмотрим функцию

$$f = f[p, p_x, p_y, p_z, q, q_x, q_y, q_z, r, r_x, r_y, r_z, x, y, z]. \qquad (17.74)$$

Потребуем, как и раньше,

$$\left.\begin{aligned} p(x, y, z, \alpha) &= p(x, y, z, 0) + \alpha\xi(x, y, z), \\ q(x, y, z, \alpha) &= q(x, y, z, 0) + \alpha\eta(x, y, z), \\ r(x, y, z, \alpha) &= r(x, y, z, 0) + \alpha\zeta(x, y, z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (17.75)$$

Учитывая, что ξ, η и ζ независимы (аналогичному условию подчинялись η_i из разд. 17.3), и проведя дифференцирование с последующим интегрированием по частям, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z} = 0 \quad (17.76)$$

и такие же уравнения для функций q и r. Заменяя p, q, r, ... на y_i а x, y, z, ... на x_j, мы можем переписать уравнение (17.87) в более компактной форме

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial y_{ij}}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad (17.77)$$

где $y_{ij} \equiv \partial y_i/\partial x_j$.

17.6. МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА

В этом разделе мы введем понятие связей. Чтобы не загромождать изложения, будем подразумевать под связью некоторую простую функцию. В нашу задачу пока не входит исчисление вариаций, в котором используются множители Лагранжа. Сейчас же мы определим эти множители.

Рассмотрим функцию трех независимых переменных $f(x, y, z)$. Она имеет максимум (или экстремум), если $df = 0$. Необходимым и достаточным условием для этого является равенство нулю частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (17.78)$$

причем

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \quad (17.79)$$

В различных физических задачах переменные x, y, z часто оказываются взаимосвязанными, т. е. не являются независимыми. Можно, по крайней мере в принципе, использовать каждую связь для исключения одной переменной и продолжить дальнейший анализ с новым уменьшенным набором переменных.

Метод множителей Лагранжа применяется в тех случаях, когда такое исключение переменных оказывается неудобным или нежелательным. Запишем уравнение связи

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{17.80}$$

из которого следует, что

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz = 0. \tag{17.81}$$

Из условия $df = 0$ уже не следует соотношение (17.78), поскольку есть только две независимые переменные. Если в качестве независимых переменных взять x и y, то dz уже не может быть произвольным. Умножим теперь уравнение (17.81) на некоторый множитель λ и сложим это уравнение с (17.79):

$$df + \lambda\, d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = 0. \tag{17.82}$$

Множитель Лагранжа λ выбран так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{17.83}$$

причем предполагается, что $\partial\varphi/\partial z \neq 0$. Уравнение (17.82) при выполнении условия (17.83) упрощается:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy = 0. \tag{17.84}$$

Однако при произвольных dx и dy

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{17.85}$$

При выполнении условий (17.83) и (17.85) $df = 0$, а f имеет экстремум. Теперь уже имеется четыре неизвестные: x, y, z и λ. В качестве четвертого уравнения, конечно, можно взять уравнение связи (17.80). В действительности

же определять параметр λ не нужно, поэтому λ иногда называют *неопределенным множителем Лагранжа*. Этот метод теряет силу, когда все производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial z$ равны нулю.

Частица в потенциальном ящике. Проиллюстрируем метод множителей Лагранжа на примере задачи из квантовой механики, в которой рассматривается частица m в потенциальном ящике. В качестве ящика взят прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b и c. Энергия частицы в основном состоянии равна $E = \frac{\hbar^2}{8}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.\right)$ Необходимо найти такую форму ящика при постоянном объеме, для которой энергия E окажется минимальной; условие постоянства объема дает уравнение связи

$$V(a, b, c) = abc = k. \tag{17.86}$$

При $f(a, b, c) = E(a, b, c)$ и $\varphi(a, b, c) = abc - k = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial a} + \lambda\frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{h^2}{4ma^3} + \lambda bc = 0, \\ &-\frac{h^2}{4mb^3} + \lambda ac = 0, \quad -\frac{h^2}{4mc^3} + \lambda ab = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.87}$$

Умножим первое из выражений на a, второе на b, а третье на c и сложим их:

$$\lambda abc = \frac{h^2}{4ma^2} = \frac{h^2}{4mb^2} = \frac{h^2}{4mc^2}. \tag{17.88}$$

Следовательно, искомым решением будет $a = b = c$, т. е. куб.

Ядерный реактор в форме цилиндра. Предположим, что ядерный реактор на тепловых нейтронах имеет форму правильного кругового цилиндра радиусом R и высотой H. В теории диффузии нейтронов возникает соотношение, которое представляет собой уравнение связи:

$$\varphi(R, H) = \left(\frac{2{,}4048}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right) = \text{const}^*. \tag{17.89}$$

Найдем минимальный объем реактора $f(R, H) = \pi R^2 H$. Применим уравнения (17.85):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial R} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial R} = 2\pi RH - 2\lambda\frac{(2{,}4048)^2}{R^3} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial H} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial H} = \pi R^2 - 2\lambda\frac{\pi^2}{H^3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.90}$$

* Величина 2,4048 — первый корень функции Бесселя $J_0(R)$.

После умножения первого из этих уравнений на $R/2$, а второго на H получим $\pi R^2 H = \lambda (2{,}4048)^2/R^2 = \lambda 2\pi^2/H^2$ или

$$H = \sqrt{2}\,\pi R/2{,}4048 = 1{,}847R. \qquad (17.91)$$

Следовательно, при такой высоте объем цилиндрического реактора будет минимальным.

Строго говоря, мы нашли только экстремум. Отождествление этого экстремума с минимумом следует из рассмотрения исходного уравнения.

Упражнения *

1. Энергия основного состояния частицы в правильной круговой цилиндрической яме равна

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2{,}4048)^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2}\right),$$

где R — радиус; H — высота цилиндра. Определить отношение R/H, для которого при фиксированном объеме цилиндра энергия будет минимальной.

Ответ: $R/H = 0{,}5414$.

2. Определить отношение радиуса R к высоте H, при котором для фиксированного объема правильного кругового цилиндра его поверхность будет минимальной.

3. Частица скользит без трения во внутренней стороне параболоида вращения. Показать, что сила $F^{(c)}$ (сила связи), удерживающая частицу на поверхности, пропорциональна кривизне поверхности $K = c/(\xi^2+\eta^2)^{1/2}$. *Указание.* Воспользоваться параболическими координатами. Уравнение связи $y = \xi - \xi_0 = 0$.

Ответ: $F^{(c)} = \lambda \nabla\varphi\,|_{\xi} = \lambda/(\xi_0^2+\eta^2)^{1/2}$.

4. Приведенная масса μ определена соотношением $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$. Найти максимальное значение μ при фиксированной сумме $m_1 + m_2$.

5. Вероятность распределения для тождественных частиц, подчиняющихся (не подчиняющихся) принципу Паули, равна

$$W_1 = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i-n_i)!} \quad \left(W_2 = \prod_i \frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!\,(g_i-1)!}\right).$$

Показать, что требование максимального значения величины W_1 (W_2) приводит к распределению Ферми — Дирака (Бозе — Эйнштейна):

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1+\lambda_2 E_i}+1} \quad \left(n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1+\lambda_2 E_i}-1}\right).$$

Здесь $\lambda_1 = -E_0/kT$, $\lambda_2 = 1/kT$. *Указание.* Взять $\ln W_1$ и воспользоваться формулой Стирлинга (предположить что $g_i \gg 1$). *Замечание.*

* Упражнения выполнить с помощью множителей Лагранжа.

Квантовомеханическая система характеризуется g_i различными квантовыми состояниями, в которых она может находиться, если ее энергия заключена в интервале (E_i, E_i+dE_i). Обычно решают следующую задачу: каким образом n_i частиц распределены по энергетическим состояниям, если выполнено два условия: 1) число частиц фиксировано $\sum_i n_i = n$; 2) полная энергия фиксирована $\sum_i n_i E_i = E$.

17.7. ВАРИАЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ

Определим «путь», для которого интеграл

$$J = \int f\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) dx_j \tag{17.92}$$

постоянный. Здесь интеграл представлен в общей форме, в которой x_j описывает набор независимых, а y_i — набор зависимых переменных. Снова $\delta J = 0$. Введем одну или более связей. Как и в разд. 17.6, связь представим в виде

$$\varphi_k(y_i, x_j) = 0. \tag{17.93}$$

Уравнение (17.93) умножим на некоторую функцию x_j, скажем на $\lambda_k(x_j)$, и проинтегрируем в тех же пределах, что и (17.92):

$$\int \lambda_k(x_j)\,\varphi_k(y_i, x_j)\,dx_j = 0. \tag{17.94}$$

Ясно, что

$$\delta \int \lambda_k(x_j)\,\varphi_k(y_i, x_j)\,dx_j = 0. \tag{17.95}$$

С другой стороны, связь можно задать и в форме интеграла

$$\int \varphi_k(y_i, x_j)\,dx_j = \text{const}. \tag{17.96}$$

Можно ввести любой *постоянный* множитель Лагранжа и снова получить уравнение (17.95), теперь уже с постоянным λ.

В любом случае, сложив $\delta J = 0$ с уравнением (17.95), получим

$$\delta \int \left[f\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) + \sum_k \lambda_k \varphi_k(y_i, x_j)\right] dx_j = 0. \tag{17.97}$$

Если $\varphi(y_i, x_j)$ задано в форме (17.93), множитель Лагранжа λ_k может зависеть от x_j.

Считая подынтегральное выражение из (17.97) некоторой новой функцией $g(y_i, \partial y_i/\partial x_j, x_j)$, т. е.

$$g\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) = f + \sum_k \lambda_k \varphi_k, \qquad (17.98)$$

находим, что функция g должна удовлетворять обычным уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial (\partial y_i/\partial x_j)} = 0 \qquad (17.99)$$

(по одному такому уравнению на каждую зависимую переменную y_i) [см. уравнения (17.70) и (17.76)]. Затем, решая совместно уравнения Эйлера и уравнения связей, находим экстремум.

Уравнения Лагранжа. В отсутствие связей уравнения движения Лагранжа (17.58) принимают форму $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{dL}{\partial q_i} = 0$, где t (время) — независимая переменная, $q_i(t)$ (положение частицы) — набор зависимых переменных. Обобщенные координаты q_i обычно выбирают из условия исчезновения влияния связей, однако эта процедура не является необходимой, да и не всегда она возможна. При наличии связей φ_k принцип Гамильтона формулируется следующим образом:

$$\delta \int \left[L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_k \lambda_k(t)\, \varphi_k(q_i, t) \right] dt = 0, \qquad (17.100)$$

а уравнения Лагранжа записываются так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k a_{ik}\lambda_k. \qquad (17.101)$$

Обычно связь $\varphi_k = \varphi_k(q_i, t)$ не зависит от обобщенной скорости $\dot{q}_i$. В таком случае коэффициент $a_{ik} = \partial\varphi_k/\partial q_i$. Если q_i — длина, то произведение $a_{ik}\lambda_k$ представляет собой силу со стороны k-й связи в направлении q_i, и в уравнение (17.101) эта сила входит в виде производной $-\partial V/\partial q_i$.

Простой маятник. Рассмотрим простой маятник, имеющий массу m, которая подвешена на нити длиной l (влияние нити отождествляется со связью). При наличии связи

$\varphi_1 = r - l = 0$ имеется две обобщенные координаты r и θ (движение в вертикальной плоскости). Запишем лагранжиан

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta. \quad (17.102)$$

Исходя из уравнений Лагранжа (17.101), получим уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1 (a_{r_1} = 1,\ a_{\theta_1} = 0),\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (17.103)$$

или

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda_1,\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\sin\theta = 0. \quad (17.104)$$

Подставляя в уравнение связи ($r = l$, $\dot{r} = 0$), получаем

$$ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = -\lambda_1,\ ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0. \quad (17.105)$$

Второе уравнение, решенное относительно $\theta(t)$ при малой амплитуде ($\sin\theta = \theta$), описывает простое гармоническое движение, тогда как первое уравнение характеризует натяжение нити — λ_1.

Скольжение частицы по цилиндру. С задачей о колебании маятника тесно связана задача о скольжении частицы по цилиндрической поверхности. Необходимо определить критический угол θ_k, при котором частица сорвется с поверхности цилиндра. Это произойдет в той точке поверхности, где радиальная сила связи окажется равной нулю. Мы имеем

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta \quad (17.106)$$

и одно уравнение связи $\varphi_1 = r - l = 0$. Проделав те же выкладки, что и в задаче о маятнике, получим с учетом того, что $a_{r_1} = 1$,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1(\theta), \quad (17.107)$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\sin\theta = 0. \quad (17.108)$$

В уравнении (17.107) влияние связи $\lambda_1(\theta)$ есть функция угла θ*. В силу $r = l$, $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ уравнения (17.107) и (17.108) упрощаются:

$$-ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1(\theta), \tag{17.109}$$

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0. \tag{17.110}$$

Дифференцируя уравнение (17.109) по времени и вспоминая, что $\frac{df(\theta)}{dt} = \frac{df(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}$, получаем $-2ml\dot{\theta}\ddot{\theta} - mg\sin\theta = \frac{d\lambda_1(\theta)}{d\theta}$. Комбинируя это уравнение с уравнением (17.110) и интегрируя, имеем $\lambda_1(\theta) = 3mg\cos\theta + C$. Поскольку $\lambda_1(0) = mg$, то $C = -2mg$.

Частица m будет удерживаться на поверхности, пока влияние связи неотрицательно, т. е. до тех пор, пока поверхность цилиндра не перестанет воздействовать на связь

$$\lambda(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg \geqslant 0. \tag{17.111}$$

Критический угол соответствует условию $\lambda(\theta_k) = 0$, т. е. сила связи равна нулю. Из уравнения (17.111) имеем $\cos\theta_k = {}^2/_3$ или $\theta_k = 48°11'$. При таком угле (если пренебречь трением) происходит срыв частицы с поверхности.

Уравнение Эйлера в квантовой механике. В квантовой механике встречаются уравнения Эйлера

$$\delta\int\int\int \psi^*(x, y, z)\, H\psi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0 \tag{17.112}$$

с ограничивающим условием

$$\int\int\int \psi^*\psi\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{17.113}$$

Из уравнения (17.112) следует, что энергия системы постоянна, $H = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(x, y, z)$ — квантовомеханический гамильтониан частицы с массой m. Условие связи (17.113) означает, что мы имеем только одну частицу; зависимая переменная ψ — обычная волновая функция,

---

* Подчеркнем, что λ_1 представляет собой радиальную силу, действующую со стороны цилиндра на частицу. Из физических соображений ясно, что λ_1 должна зависеть от угла θ. Мы положим $\lambda = \lambda(t)$, а затем заменим зависимость от времени на неизвестную зависимость от угла.

а ее комплексно-сопряженная ψ^* рассматривается в качестве второй (см. разд. 6.1) зависимой переменной.

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big| - \int \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx. \quad (17.114)$$

Будем предполагать, что граничные условия либо периодичны (как в теории Штурма — Лиувилля, гл. 9), либо область интегрирования настолько велика, что функции ψ и ψ^* обращаются на границе в нуль ($\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\psi(r) = 0$). При таких предположениях проинтегрированная часть обращается в нуль, и уравнение (17.112) приводится к виду

$$\delta \int\int\int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi\right] dx\, dy\, dz = 0. \quad (17.115)$$

Функция g, которую мы ввели в уравнение (17.98), в рассматриваемом случае равна

$$g = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (\psi_x^*\psi_x + \psi_y^*\psi_y + \psi_z^*\psi_z) + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi. \quad (17.116)$$

Уравнение Эйлера (17.99) окончательно принимает форму:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = \lambda\psi. \quad (17.117)$$

Сравнение с гамильтонианом H показывает, что параметр λ должен быть отождествлен с энергией квантовомеханической системы. Таким образом, мы получили известное волновое уравнение Шредингера. Такой вывод волнового уравнения (17.117) имеет не только академический интерес, но дает возможность разработать плодотворный метод приближенного решения волнового уравнения (метод Ритца).

Упражнения

1. Частица с массой m под действием связи движется без трения по горизонтальной поверхности по закону $\theta = \omega t$. Начальные условия: $t = 0$, $r = r_0$, $\dot{r} = 0$. Определить положение частицы как функцию времени и силу влияния связи, действующую на частицу.

Ответ: $r(t) = r_0 \operatorname{ch} \omega t$.

2. Гибкий кабель подвешен между двумя точками. Его длина фиксирована. Найти кривую, для которой характерно минимальное значение общей потенциальной энергии кабеля в поле силы тяжести.

Ответ: гиперболический косинус.

3. Определить максимальное значение производной по направлению функции $\varphi(x, y, z)$

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma,$$

если $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Ответ: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)=|\nabla\varphi|$.

4. Показать, что требование $J=\int\limits_a^b[p(x)\,y_x^2-q(x)\,y^2]\,dx=\text{const}$ наряду с нормировкой $\int\limits_a^b y^2\omega(x)\,dx=1$ приводит к уравнению Штурма—Лиувилля (см. гл. 9):

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy+\lambda\omega y=0.$$

Замечание. Граничное условие удобно задать в $py_xy\big|_a^b=0$.

5. Определенное количество воды вращается в цилиндре с постоянной угловой скоростью ω. Найти кривую поверхности воды из условия минимальности ее полной потенциальной энергии с учетом сил тяжести и центробежных сил.

Ответ: парабола.

6. Вариационный метод Рэлея—Ритца. Пробная функция $y=y_0+\sum\limits_{i=1}c_iy_i$ приближенно описывает собственную функцию основного состояния y_0. Коэффициенты c_i малы. Показать, что $y(x)$ позволяет получить приближенное значение λ_0, отличающееся от истинного на величину второго порядка малости.

Воспользоваться приближением Рэлея—Ритца для оценки низшего собственного значения уравнения $d^2y/dx^2+\lambda y=0$ при граничных условиях $y(0)=y(1)=0$. *Указание.* В качестве пробной функции удобно взять $y(x)=x(1-x)$.

Ответ: $\lambda\leqslant 10$ или точно $\lambda=\pi^2=9{,}8696$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики. Перев. с англ. М.— Л., Гостехиздат, 1951.

Irving J., Mullineux N. Mathematics in Physics and Engineering. N.Y., Academic Press, 1959.

Jeffreys H. S., Jeffreys B. S. Methods of Mathematical Physics. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1950.

Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series 55 (AMS-55), National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce, 1964.

Морс П. М., Фешбах Х. Методы теоретической физики. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1963.

К главе 1

Kellogg O. D. Foundations of Potential Theory. N.Y., Dover, 1953.

Lass H. Vector and Tensor Analysis. N.Y., McGraw-Hill, 1950.

Schwartz M., Green S., Rutledge W. A. Vector Analysis with Applications to Geometry and Physics. N.Y., Harper and Row, 1960.

Wrede R. C. Introduction to Vector and Tensor Analysis. N.Y., Wiley, 1963.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. М. — Л., Гостехиздат, 1954.

Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.

Компанеец А. С. Теоретическая физика. М., Гостехтеориздат, 1957.

К главе 3

Гайтлер В. Квантовая теория излучения. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.

Jeffreys H. Cartesian Tensor. Cambridge, Cambridge University Press, 1952.

Lawden D. F. An Introduction to Tensor Calculus and Relativity. N.Y., Wiley (Methuen monograph), 1962.

Moller C. The Theory of Relativity. Oxford, Oxford University Press, 1955.
Пановский В., Филлипс М. Классическая электродинамика. Перев. с англ. Под ред. С. П. Капицы. М., Физматгиз, 1963.
Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis — Theory and Applications. N.Y., Wiley, 1951.
Spain B. Tensor Calculus, 3rd ed. N.Y., Interscience Publishers, 1960.
Stratton J. A. Electromagnetic Theory, N.Y., McGraw-Hill, 1941.
Temple G. Cartesian Tensor. N.Y., Wiley (Methuen monograph), 1960.

К главе 4

Aitken A. C. Determinants and Matrices. N.Y., Interscience Publishers, 1956.
Bickley W. G., Thompson R. S. H. G. Matrices—Their Meaning and Manipulation. Princeton, New Jersey, Van Nostrand, 1964.
Michael A. D. Matrix and Tensor Calculus with Applications to Mechanics, Elasticity and Aeronautics. N.Y., Wiley, 1947.
Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

К главе 5

Hardy G. H. Divergent Series. Oxford, Clarendon Press, 1956.
Hyslop J. M. Infinite Series. 5th ed. N.Y., Interscience Publishers, 1959.
Knopp K. Theory and Application of Infinite Series. Ld, Blackie and Son, 1946.
Smail L. L. Elements of the Theory of Infinite Processes. N.Y., McGraw-Hill, 1923.
Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M. Mathematics of Physics and Modern Engineering. N.Y., McGraw-Hill, 1958.
Widder D. V. Advanced Calculus, 2nd ed. Englewood Cliffs. New Jersey, Prentice-Hall, 1961.

К главе 6

Churchill R. V. Complex Variables and Applications. 2nd ed. N. Y. McGraw-Hill, 1960.
Lass H. Elements of Pure and Applied Mathematics. N. Y. McGraw-Hill, 1957.
Smith L. P. Mathematical Methods for Scientists and Engineers. N. Y., Prentice-Hall, 1953.
Sokolnikoff I. S. Redheffer R. M. Mathematics of Physics and Modern Engineering. N.Y., McGraw-Hill, 1958.
Watson G. N. Complex Integration and Cauchy's Theorem. N. Y., Hafner, 1917.
См. также ссылки к гл. 15.

К главе 8

Bateman H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics . N. Y., Dover, 1944.
Ince E. L. Ordinary Differential Equations. N. Y. Dover, 1926.
Murphy G. M. Ordinary Differential Equations and Their Solutions. Princeton, New Jersey, Van Nostrand, 1960.

К главе 9

Miller K. S. Linear Differential Equations in the Real Domain. N. Y., Norton, 1963.
Titchmarsh E. C. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. Ld., Oxford University Press, Vol. I. 2nd. ed. 1962; Vol. II. 1958.

К главе 10

Artin E. The Gamma Function. (Translated by Michael Butler). N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1964.

К главе 11

Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1952.
Relton F. E. Applied Bessel Functions. Ld., Blackie and Son, 1946.
См. также литературу к гл. 13.

К главе 12

Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. N. Y., Chelsea, 1955.
См. также литературу к гл. 13.

К главе 13

Abramowitz M., Stegun I. A., eds. Handbook of Mathematical Functions. Washington, D.C., National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series-55, 1964, ch. 22.
Magnus W., Oberhettinger F. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. N. Y., Chelsea, 1949, ch. 10—13.
Rainville E. D. Special Functions. N.Y., Macmillan, 1960.
Sansone G. Orthogonal Functions. N.Y., Intenscience Publishers, 1959.
Slater L. J. Confluent Hypergeometric Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 1960.

К главе 14

Carslaw H. S. Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. 2nd ed. Ld., Macmillan, 1921.
Lanczos C. Applied Analysis. Englewood Cliffs. New Jersey, Prentice-Hall, 1956.
Zygmund A. Trigonometric Series, Vol. I and II. Cambridge, Cambridge University Press, 1959.

К главе 15

Carslaw H. S., Jeager J. C. Operational Methods in Applied Mathematics. 2nd ed. Oxford, Oxford University Press, 1947.
Erdelyi A. Tables of Integral Transforms. Vol. I and II. Bateman Manuscript Project. N. Y., McGraw-Hill, Vol. I: Fourier, Laplace, Mellin Transforms. Vol. II: Hankel Transforms and Special Functions.
LePage W. R. Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. N.Y., McGraw-Hill, 1961.
Scott E. J. Transform Calculus with an Introduction to Complex Variables. N.Y., Harper, 1955.
Sneddon I. N. Fourier Transforms. N.Y., McGraw-Hill, 1951.
Titchmarsh E. C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford, Oxford University Press, 1948.
Tranter C. J. Integral Transforms in Mathematical Physics. 2nd ed. Ld., Methuen, N.Y., Wiley, 1951.
Van der Pol B., Bremmer H. Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1955.

К главе 16

Bocher M. An Introduction to the Study of Integral Equations. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 10. N.Y., Hafner, 1960.
Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1961.
Lovitt W. V. Linear Integral Equations. N.Y., Dover, 1950.

К главе 17

Bliss G. A. Calculus of Variations. The Mathematical Association of America, Open Court Publishing Company. Illinois, LaSalle, 1925.
Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Перев. с англ. М., «Просвещение», 1967.
Sagan H. Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics. N.Y., Wiley, 1961.
Weinstock R. Calculus of Variations. N.Y., McGraw-Hill, 1952.
Yourgrau W., Mandelstam S. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory. 2nd ed. N.Y., Pitman, 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие переводчика 3
Предисловие автора 5
Глава 1. **Векторный анализ**
1.1 Основные понятия 7
1.2. Поворот системы координат 11
1.3. Скалярное произведение 17
1.4. Векторное произведение 21
1.5. Смешанное и двойное векторное произведение трех векторов 26
1.6. Градиент ∇ 30
1.7. Дивергенция $\nabla\cdot$ 34
1.8. Ротор $\nabla\times$ 37
1.9. Последовательное применение оператора ∇ 40
1.10. Интегрирование векторов 44
1.11. Теорема Гаусса 50
1.12. Теорема Стокса 52
1.13. Теория потенциала 56
1.14. Закон Гаусса. Уравнение Пуассона 64
1.15. Теорема Гельмгольца 67
Глава 2. **Системы координат**
2.1. Криволинейные координаты 74
2.2. Дифференциальные векторные операторы 76
2.3. Специальные системы координат. Декартовы (прямоугольные) координаты 80
2.4. Сферические координаты r, θ, φ 81
2.5. Разделение переменных 96
2.6. Круговые цилиндрические координаты ρ, φ, z 91
2.7. Эллиптические цилиндрические координаты u, v, z 94
2.8. Параболические цилиндрические координаты ξ, η, z 95
2.9. Биполярные координаты ξ, η, z 97
2.10. Координаты вытянутого сфероида u, v, φ 101
2.11. Координаты сплющенного сфероида u, v, φ 105
2.12. Параболические координаты ξ, η, φ 107
2.13. Тороидальные координаты ξ, η, φ . . . 110
2.14. Бисферические координаты ξ, η, φ . . . 113

2.15. Софокусные эллипсоидальные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 115
2.16. Конические координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 . . . 116
2.17. Софокусные параболоидальные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 117
Глава 3. **Тензорный анализ**
3.1. Введение. Основные понятия 119
3.2. Свертывание, прямое произведение . . . 125
3.3. Правило частного 127
3.4. Псевдотензоры 128
3.5. Аффиноры 135
3.6. Теория упругости 138
3.7. Ковариантная форма уравнений Максвелла 147
Глава 4. **Матрицы и определители**
4.1. Определители 153
4.2. Матрицы 158
4.3. Ортогональные матрицы 164
4.4. Эрмитовы и унитарные матрицы 174
4.5. Диагонализация матриц 180
Глава 5. **Бесконечные ряды**
5.1. Основные понятия 189
5.2. Признаки сходимости 192
5.3. Знакопеременные ряды 203
5.4. Алгебра рядов 205
5.5. Функциональные ряды 208
5.6. Разложение Тейлора 213
5.7. Степенные ряды 222
5.8. Числа Бернулли 227
5.9. Бесконечные произведения 233
5.10. Асимптотические или полусходящиеся ряды 238
Глава 6. **Функции комплексного переменного I (аналитические свойства, конформное отображение)**
6.1. Условия Коши — Римана 243
6.2. Интегральная теорема Коши 249
6.3. Интегральная формула Коши 253
6.4. Ряд Лорана 259
6.5. Отображение 267
6.6. Конформное отображение 275
6.7. Преобразование Шварца — Кристоффеля 285
Глава 7. **Функции комплексного переменного II (теория вычетов)**
7.1. Особые точки 291
7.2. Теория вычетов 294
7.3. Применение теории вычетов 309
7.4. Метод перевала 319
Глава 8. **Дифференциальные уравнения второго порядка**
8.1. Типы дифференциальных уравнений . . . 328
8.2. Разделение переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения 330
8.3. Особые точки 333
8.4. Представление решения уравнения в виде ряда. Метод Фробениуса 337

8.5. Второе решение 347
8.6. Функция Грина. Аналогия с электростатикой 355
Глава 9. **Теория Штурма — Лиувилля. Ортогональные функции**
9.1. Самосопряженные дифференциальные уравнения 363
9.2. Эрмитовы (самосопряженные) операторы 370
9.3. Ортогонализация функций (метод Шмидта) 374
9.4. Полнота собственных функций 380
Глава 10. **Гамма-функция (факториальная функция)**
10.1. Определение, основные свойства 388
10.2. Дигамма- и полигамма-функции (производные гамма-функции) 396
10.3. Ряд Стирлинга 400
10.4. Бета-функция 404
10.5. Неполная гамма-функция и родственные ей функции 409
Глава 11. **Функции Бесселя**
11.1. Функции Бесселя первого рода 413
11.2. Функции Неймана 427
11.3. Функции Ханкеля 434
11.4. Функции Бесселя мнимого аргумента 439
11.5. Асимптотические разложения 446
11.6. Сферические функции Бесселя 451
Глава 12. **Функции Лежандра**
12.1. Производящая функция 462
12.2. Рекуррентные соотношения и специальные свойства 468
12.3. Ортогональность 472
12.4. Другие определения полиномов Лежандра 477
12.5. Присоединенные полиномы Лежандра 482
12.6. Сферические функции 493
12.7. Теорема сложения для сферических функций 498
12.8. Интегралы от произведения трех сферических функций 503
12.9. Функции Лежандра второго рода 506
12.10. Сфероидальные системы координат . . 517
12.11. Векторные сферические функции . . . 524
Глава 13. **Специальные функции**
13.1. Полиномы Эрмита 528
13.2. Полиномы Лагерра 533
13.3. Полиномы Чебышева 543
13.4. Гипергеометрические функции 550
13.5. Вырожденные гипергеометрические функции 554
Глава 14. **Ряды Фурье**
14.1. Общие свойства 559
14.2. Применение рядов Фурье 563
14.3. Свойства рядов Фурье 571
14.4. Явление Гиббса 576

Глава 15. **Интегральные преобразования**
15.1. Интегральные преобразования 581
15.2. Интеграл Фурье 583
15.3. Преобразование Фурье 585
15.4. Преобразование Фурье производной 590
15.5. Теорема свертки 592
15.6. Метод моментов 594
15.7. Элементарные преобразования Лапласа 600
15.8. Преобразование Лапласа производной 605
15.9. Свойства преобразования Лапласа . . . 611
15.10. Теорема свертки 620
15.11. Обратное преобразование Лапласа . . 626
Глава 16. **Интегральные уравнения**
16.1. Введение 634
16.2. Интегральные преобразования, производящие функции 643
16.3. Ряд Неймана, вырожденные ядра . . .
16.4. Теория Гильберта — Шмидта 653
16.5. Функции Грина 659
Глава 17. **Вариационное исчисление**
17.1. Одна зависимая и одна независимая переменные 678
17.2. Приложения уравнения Эйлера . . . 683
17.3. Несколько зависимых переменных . . . 689
17.4. Несколько независимых переменных 693
17.5. Функции многих переменных 694
17.6. Множители Лагранжа 695
17.7. Вариация при наличии связей 699
Рекомендуемая литература 705

Г. Арфкен

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ

Редактор Т. С. Лим
Художественный редактор А. С. Александров Художник Е. В. Терехов
Технический редактор Н. А. Власова Корректор Е.П.Пьянкова

Сдано в набор 28.X 1969 г. Подписано к печати 13.III 1970 г. Формат 84×108/32. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 37,38. Уч.-изд. л. 36,03. Тираж 12 000 экз. Цена 3 р. 42 к. Зак. изд. 1984. Зак. тип. 1257

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР Москва, Трехпрудный пер., 9