STUDIES IN LOGIC
AND
THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS
Volume 81

PROOF THEORY

GAISI TAKEUTI
Professor of Mathematics
The University of Illinois
Urbana, Illinois, U. S. A.

1975

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY — AMSTERDAM·LONDON
AMERICAN ELSEVIER PUBLISHING COMPANY, INC. — NEW YORK

Г. ТАКЕУТИ

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Перевод с английского
С. К. СОБОЛЕВА

под редакцией
С. И. АДЯНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1978

УДК 517.11, 517.12

Книга посвящена одному из основных разделов математической логики — теории доказательств. Кроме традиционных результатов по системам первого порядка, таких, как устранимость сечений и полнота интуиционистского и классического исчислений предикатов, неполнота и непротиворечивость арифметики, в книге приводятся недавние достижения в этой области, включая доказательства устранимости сечений в простой теории типов и непротиворечивости ограниченной части математического анализа. Большое место уделено инфинитарной логике — логике с бесконечно длинными формулами. Многие из приведенных результатов принадлежат самому автору, известному специалисту по теории доказательств.

Книга будет полезна специалистам по математической логике, студентам, аспирантам и всем тем, кто интересуется вопросами оснований математики и математической логикой.

Редакция литературы по математическим наукам

Т $\frac{20203-009}{041(01)-78}$ 9—78

© North-Holland Publishing Company — 1975
© Перевод на русский язык, «Мир», 1978

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга профессора Иллинойского университета Г. Такеути «Теория доказательств» наряду с классическими результатами теории доказательств для исчисления предикатов и арифметики первого порядка (часть I) содержит изложение соответствующих вопросов для исчислений предикатов высших порядков и для систем, основанных на инфинитарных языках (части II и III). В части III излагается основанное на принадлежащей самому автору теории ординальных диаграмм доказательство непротиворечивости некоторых вариантов арифметики второго порядка. Читателю будут интересны также содержащиеся почти во всех главах высказывания общего характера, отражающие точку зрения автора по вопросам оснований математики.

В течение многих столетий математики доказывали теоремы, не испытывая при этом нужды в теории доказательств. Потребность в теории доказательств по-настоящему возникает лишь тогда, когда требуется убедиться, что в рамках рассматриваемой математической теории невозможно доказать то или иное предложение. Для обоснования таких отрицательных утверждений уже нужно иметь точное определение понятия доказательства в рассматриваемой теории, чтобы исследовать те или иные общие свойства таких доказательств и их структуру. Такого рода вопросы особенно остро встали в начале нашего столетия в связи с трудностями, которые выявились тогда в вопросах оснований математики. Предложенный Гильбертом аксиоматический метод сулил радужные перспективы на пути доказательства непротиворечивости математики и во всяком случае указывал некоторый путь уточнения понятия доказательства. За этим последовало бурное развитие математической логики, и особенно тех ее вопросов, которые относятся к теории доказательств.

В тридцатых годах стало ясно, что программу Гильберта обоснования математики реализовать в полной мере невозможно, но к этому времени уже сформировались основные идеи теории доказательств и были намечены пути частичной реализации этой программы. Логическим следствием исследований того времени по теории доказательств явилась, в частности, выработка точного определения понятия алгоритма, что позволило в дальнейшем установить неразрешимость многих алгоритмических проблем в различных традиционных разделах математики. Тем самым теория доказательств внесла весьма существенный вклад в развитие самой математики. В настоящее время идеи теории доказательств не только влияют на развитие математики, но и глубоко проникают в различные ее разделы. Например, известная лемма П. С. Новикова об исключении вставок правильных проходных букв в выводах равенств в групповых исчислениях (см. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 44, 1955 г.) является аналогом доказываемой в настоящей книге теоремы Г. Генцена об устранении сечений в логическом выводе. Многие другие конкретные исследования, связанные с доказательством невозможности вывода тех или иных соотношений в алгебраических системах, задаваемых с помощью тождественных или определяющих соотношений, также можно рассматривать как фрагменты теории доказательств, развитой для алгебраических систем данного класса. Нет сомнений в том, что влияние идей теории доказательств на математику в будущем будет расширяться. Возможно, это и имеет в виду автор, отмечающий в конце введения, что «нам еще предстоит увидеть, какое влияние на математику окажет теория доказательств».

Автор любезно предоставил нам список замеченных опечаток и неточностей. Соответствующие изменения были внесены в текст без примечаний. Кроме того, мы позволили себе привести терминологию в соответствие с принятой в советской литературе.

Книгу Г. Такеути можно рекомендовать студентам, аспирантам и научным работникам, специализирующимся по математической логике, а также всем, кто проявляет серьезный интерес к вопросам оснований математики. Она может служить основой для специальных курсов в университетах и пединститутах.

С. И. Адян

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе лекций, прочитанных мной летом 1968 г. на симпозиуме по интуиционизму и теории доказательств в г. Буффало. В подготовке текста лекций, распространявшегося на этом симпозиуме, мне помогали профессор Джон Майхилл и Акико Кино. Марико Ясуги помог расширить и переработать первоначальный вариант. Эта работа была завершена летом 1971 г. Тогда же Джефферри Цукер прочитал первые три главы и внес в них ряд улучшений, особенно в гл. 2, а мой коллега Уилсон Заринг помог при редактировании окончательного варианта гл. 4—6.

Я выражаю глубокую признательность всем, кто внес свой вклад в работу над этой книгой, включая сотрудников нашего отдела, которые перепечатывали различные варианты рукописи для моих слушателей.

Гаиси Такеути

Урбана, март 1975

ВВЕДЕНИЕ

Математика представляет собой совокупность доказательств. Это верно независимо от того, какой точки зрения на математику мы придерживаемся — платонизма, антиплатонизма, интуиционизма, формализма, номинализма и т. д. Поэтому формализация математических доказательств и изучение их структуры являются плодотворным методом исследования математики. Именно этим и занимается теория доказательств.

Начало теории доказательств положил Д. Гильберт, когда пытался доказать непротиворечивость математики. Его подход был позднее развит в блестящих работах Г. Генцена. Данная книга посвящена изложению теории доказательств в стиле этих последних.

В части I книги излагается теория доказательств для формальных систем первого порядка. В гл. 1 рассматривается исчисление предикатов первого порядка; центральное место здесь занимает теорема Генцена об устранении сечений. Эта теорема имеет многочисленные следствия, например различные интерполяционные теоремы. В этой же главе мы доказываем с помощью редукционных деревьев (следуя Шютте) полноту классического исчисления предикатов, а затем, приспосабливая этот метод для семантики Крипке, устанавливаем полноту интуиционистского исчисления предикатов.

В гл. 5 изучается теория натуральных чисел; главными результатами здесь являются теорема Гёделя о неполноте и генценовское доказательство непротиворечивости арифметики. Поскольку автор полагает, что подлинное значение генценовского доказательства непротиворечивости до сих пор не понято до конца, он включил в гл. 2 некоторые философские рассуждения на эту тему. Автор считает, что финитарный подход Гильберта — Генцена с «мысленными экспериментами» (Gedankenexperimenten), включающими в себя конечные (и конкретные) операции

над конкретно заданными фигурами (и последовательностями таких фигур), является наиболее важным в вопросах оснований математики.

Часть II посвящена исчислениям предикатов высших порядков и инфинитарным языкам. В гл. 3 рассматривается семантика систем конечного порядка и доказывается теорема об устранении сечений для них (по Тэйту, Такахаси и Правитцу). Так как исчисления конечных типов не полны и в них может быть формализована большая часть традиционной математики, то нам очень хотелось бы увидеть продвижение в исследовании значения теоремы об устранении сечений в таких системах.

Значение систем, основанных на инфинитарных языках, которым посвящена гл. 4, состоит в том, что для таких систем с однородными кванторами справедлива теорема об устранении сечений, они полны и являются при этом системами существенно второго порядка. Однако для систем с неоднородными кванторами ситуация остается довольно неопределенной. Мы предлагаем здесь некоторую базисную систему неоднородных кванторов, которая представляется разумной и для которой справедливо свойство так называемой слабой полноты. Однако наша система, по-видимому, не полна. Небольшая модификация этой системы приводит к системе, которая тесно связана с аксиомой детерминированности (AD). Поэтому задача о расширении нашей системы с целью получить (корректную и) полную систему связана с этой аксиомой AD.

Пусть M — некоторая транзитивная модель системы ZF+DC, содержащая $P(\omega)$ (DC — аксиома зависимого выбора). Показывается, что следующие два утверждения эквивалентны: 1) в M выполняется AD и 2) для всякой M-определимой детерминированной логики справедлива теорема об устранении сечений. Этот факт приводит к интересному направлению в изучении инфинитарных языков.

Часть III книги посвящена доказательствам непротиворечивости для систем, которыми занимался автор.

Мы старались избежать повторения материала других книг. Так, например, мы не привели результаты, содержащиеся в книге Шютте (K. Schütte, Beweistheorie, Springer-Verlag, 1960), хотя значительная ее часть представляет собой теорию доказательств в стиле Генцена. Тем, кого интересуют другие подходы к теории доказательств, мы советуем обратиться к работе Крайзеля (G. Kreisel, Survey of Proof Theory, I and II, Journal of Symbolic Logic (1968)) и к сборнику Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, ed. J. E. Fenstad, North-Holland, Amsterdam, 1971. Мы особенно старались ясно изложить нашу позицию в области оснований математики. По нашему мнению, при исследовании оснований математики (если не ограничиваться проблемами непротиворечивости) с философской точки зрения важно изучать и прояснять структуру математических доказательств.

Касаясь вопроса о влиянии исследований по основаниям математики на саму математику, отметим, что в то время, как, например, теория множеств уже внесла существенный вклад в развитие современной математики, нам еще предстоит увидеть, какое влияние на математику окажет теория доказательств.

Мы не пытались дать исчерпывающие ссылки на литературу, хотя с некоторыми теоремами связали определенные имена. Кроме того, в тексте книги дано несколько ссылок на литературу в дополнение к приведенным выше.

ЧАСТЬ I

СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ГЛАВА 1

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этой главе мы опишем удобную для наших целей генценовскую формализацию исчисления предикатов первого порядка **LK**, а также формализацию интуиционистской логики — исчисление **LJ**. Затем мы изложим доказательства теорем об устранении сечений для систем **LK** и **LJ** и приложения этих теорем.

§ 1. Формализация суждений

При формализации логики в качестве первого шага необходимо точно описать формальный язык.

Определение 1.1. *Формальный язык первого порядка* состоит из следующих символов.

1) *Константы*:
   1.1) *Индивидные* константы: $k_0, k_1, \ldots, k_j, \ldots$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$.
   1.2) *Функциональные* константы (i-местные): $f_0^i, f_1^i, \ldots, f_j^i, \ldots$ $(i=1, 2, \ldots; j=0, 1, 2, \ldots)$.
   1.3) *Предикатные* константы (i-местные): $R_0^i, R_1^i, \ldots, R_j^i, \ldots$ $(i=0, 1, 2, \ldots; j=0, 1, 2, \ldots)$.
2) *Переменные*:
   2.1) *Свободные* переменные: $a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$.
   2.2) *Связанные* переменные: $x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$.
3) *Логические символы*:
   $\neg$ (не), $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\supset$ (влечет), $\forall$ (для всех) и $\exists$ (существует). Первые четыре символа называются *пропозициональными связками*, а последние два — *кванторами*.
4) *Вспомогательные символы*:
   левая скобка (, правая скобка) и запятая , .

Мы говорим, что задан некоторый язык первого порядка L, если заданы все его константы. В дальнейшем в наших рассуждениях язык L будет фиксирован, и поэтому мы не будем каждый раз его указывать.

У нас нет оснований ограничивать мощность множеств различных видов символов числом $\aleph_0$. Но обычно изложение элементарной логики начинают с рассмотрения языков, имеющих счетное число символов, которые упорядочены по типу ω. Поэтому на некоторое время мы предположим, что язык состоит из указанных выше символов, хотя позже рассмотрим различные другие типы языков. В любом случае существенно, что каждое множество переменных бесконечно и что существует по крайней мере одна предикатная константа. Другие множества констант могут иметь произвольную мощность и, в частности, могут быть пустыми.

Мы примем некоторые соглашения относительно обозначений. Например, верхние индексы в символах из 1.2) и 1.3) мы обычно будем опускать, а символы из 1) и 2) будем употреблять и как метасимволы, и как формальные символы. Буквы g, h, ... мы будем использовать в качестве символов для функциональных констант, буквы a, b, c, ... — для свободных переменных, а буквы x, y, z, ... — для связанных переменных.

Всякая конечная последовательность символов (из языка L) называется *выражением* (этого языка).

Определение 1.2. *Термы* определяются индуктивно (рекурсивно) следующим образом:

1) всякая индивидная константа есть терм;
2) всякая свободная переменная есть терм;
3) если f^i есть i-местная функциональная константа и $t_1, \ldots, t_i$ — термы, то $f^i(t_1, \ldots, t_i)$ также есть терм;
4) термами являются только те выражения, которые получены согласно пп. 1) — 3).

Термы часто обозначаются буквами t, s, t_1, ...

Поскольку в теории доказательств часто встречаются такие индуктивные (рекурсивные) определения, как определение 1.2, мы не будем каждый раз явно указывать на их индуктивный характер. Мы будем также опускать последний пункт, который утверждает, что это определение задает только те объекты, которые получены согласно предыдущим пунктам.

Определение 1.3. Если R^i есть i-местная предикатная константа и $t_1, \ldots, t_i$ — термы, то выражение $R^i(t_1, \ldots, t_i)$ называется *атомарной формулой*. *Формулы* и их *внешние логические символы* определяются индуктивно следующим образом:

1) всякая атомарная формула есть формула. Она не имеет внешних логических символов;
2) если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \supset B)$ — формулы. Их внешними логическими символами являются $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\supset$ соответственно;

3) если A — формула, a — свободная переменная и x — связанная переменная, не входящая в A, то формулами будут $\forall x A'$ и $\exists x A'$, где A' — выражение, полученное из A подстановкой x вместо переменной a в каждом ее вхождении в A. Их внешними логическими символами являются $\forall$ и $\exists$ соответственно;
4) формулами являются только те выражения, которые получены согласно пп. 1) — 3).

Впредь буквы A, B, C, ..., F, G, ... будут метапеременными, обозначающими формулы. Формула без свободных переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением*. Формула, при определении которой не используется п. 3), называется *бескванторной*. Выражение A' в п. 3) называется *областью действия* кванторов $\forall x$ и $\exists x$ соответственно. В тех случаях, когда нужно подчеркнуть, о каком языке идет речь, терм или формулу языка L можно называть соответственно L-*термом* или L-*формулой*.

Замечание. Применение различных алфавитов для свободных и связанных переменных не существенно и делается для технических удобств. Однако оно оказывается чрезвычайно полезным и в значительной степени упрощает рассуждения. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем все-таки использовать различные алфавиты.

Следует также отметить, что в п. 3) определения 1.3 переменная x не должна входить в A. Это устраняет выражения типа $\forall x(C(x) \wedge \exists x B(x))$. Такое ограничение не сужает существенно класс формул, поскольку, например, выражение $\forall x(C(x) \wedge \exists x B(x))$ может быть заменено формулой $\forall y(C(y) \wedge \wedge \exists x B(x))$, имеющей тот же смысл. Как мы увидим позже, это ограничение оказывается полезным при описании формальных систем.

В дальнейшем мы будем опускать скобки всякий раз, когда смысл ясен и без них. В частности, всегда будут опускаться внешние скобки. Мы будем соблюдать следующее соглашение о приоритете связок: связка $\neg$ имеет преимущество перед каждой из связок $\wedge$ и $\vee$, а последние имеют преимущество перед связкой $\supset$. Таким образом, $\neg A \wedge B$ есть сокращение для $(\neg A) \wedge B$, а $A \wedge B \supset C \vee D$ — сокращение для $(A \wedge B) \supset (C \vee D)$. Скобки опускаются также и в случае двойного отрицания; например, $\neg\neg A$ есть сокращение для $\neg(\neg A)$. Через $A \equiv B$ будем обозначать формулу $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Определение 1.4. Пусть A — некоторое выражение, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — различные исходные символы, и пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — любые выражения. Через

$$\left(A \frac{\tau_1, \ldots, \tau_n}{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}\right)$$

мы обозначим выражение, полученное из A заменой всех вхождений каждого из символов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ на $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ соответственно (причем все эти символы заменяются одновременно). Такая операция называется (*одновременным*) *замещением* символов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ выражениями $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ в A. Не требуется, чтобы символы $\tau_1, \ldots, \tau_n$ действительно входили в A.

Предложение 1.5. (1) *Если ни один из символов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ не входит в A, то выражение*

$$\left(A\,\frac{\tau_1, \ldots, \tau_n}{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}\right)$$

совпадает с A.

(2) *Если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — различные исходные символы, то выражение*

$$\left(\left(A\,\frac{\tau_1, \ldots, \tau_n}{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}\right)\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}{\theta_1, \ldots, \theta_n}\right)$$

совпадает с выражением

$$\left(A\,\frac{\tau_1, \ldots, \tau_n}{\theta_1, \ldots, \theta_n}\right).$$

Определение 1.6. (1) Пусть A — некоторая формула и $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Если существует формула B и n различных свободных переменных $b_1, \ldots, b_n$, таких, что A совпадает с

$$\left(B\,\frac{b_1, \ldots, b_n}{t_1, \ldots, t_n}\right),$$

то для всякого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ вхождение терма t_i, полученное в результате этого замещения, называется *отмеченным* в A, и этот факт можно также выразить (менее точно), записав формулу B как $B(b_1, \ldots, b_n)$, а формулу A — как $B(t_1, \ldots, t_n)$. Конечно, A может содержать и другие вхождения терма t_i. Это происходит, когда формула B содержит этот терм.

(2) Мы говорим, что терм t *полностью отмечен* в формуле A (или *всякое вхождение t в A отмечено*), если каждое вхождение t в A получено таким замещением (из некоторой формулы B при $n=1$ и $t=t_1$).

Следует заметить, что формула B и свободные переменные, по которым формула A может быть получена с помощью замещения, определяются неоднозначно; отмеченные вхождения термов в A задаются относительно конкретной формулы и конкретных ее свободных переменных.

Предложение 1.7. *Если $A(a)$ — формула (в которой a отмечено не обязательно полностью) и x — связанная переменная, не входящая в $A(a)$, то $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ — также формулы.*

Доказательство. Индукция по числу логических символов в $A(a)$.

В дальнейшем пусть заглавные греческие буквы Γ, Δ, Π, Λ, Γ_0, Γ_1, ... обозначают конечные (возможно, пустые) последовательности формул, разделенных запятыми. Чтобы описать исчисление секвенций, мы должны сначала ввести вспомогательный символ $\rightarrow$.

Определение 1.8. Выражение вида $\Gamma \rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — произвольные конечные последовательности формул, называется *секвенцией*. При этом Γ и Δ называются соответственно *антецедентом* и *сукцедентом* этой секвенции, а каждая формула в последовательности Γ или Δ — *секвенциальной формулой*.

Интуитивно секвенция $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ (где $m, n \geqslant 1$) означает следующее: если $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$, то $B_1 \vee \ldots \vee B_n$. При $m \geqslant 1$ секвенция $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ означает, что $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ приводит к противоречию. При $n \geqslant 1$ секвенция $\rightarrow B_1, \ldots, B_n$ означает, что имеет место $B_1 \vee \ldots \vee B_n$. Пустая секвенция $\rightarrow$ означает, что в рассматриваемой системе имеется противоречие. Секвенции будут обозначаться буквой S (с нижними индексами или без них).

§ 2. Формальные доказательства и относящиеся к ним понятия

Определение 2.1. Всякую фигуру вида

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{или} \quad \frac{S_1 \; S_2}{S},$$

где S_1, S_2 и S — секвенции, будем называть *непосредственным выводом*. Секвенции S_1 и S_2 называются *верхними секвенциями*, а S — *нижней секвенцией* этого непосредственного вывода.

Интуитивно это означает, что если утверждается секвенция S_1 (утверждаются секвенции S_1 и S_2), то из нее (соответственно из них) можно вывести секвенцию S. Мы ограничимся рассмотрением непосредственных выводов, получаемых применением одного из следующих *правил вывода*, где A, B, C, D, $F(a)$ обозначают формулы.

1) *Структурные правила:*

1.1) *Ослабление*

$$\text{слева: } \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{D, \Gamma \rightarrow \Delta}; \qquad \text{справа: } \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, D}.$$

При этом D называется *ослабляющей формулой.*

1.2) *Сокращение*

слева: $\dfrac{D,\ D,\ \Gamma\to\Delta}{D,\ \Gamma\to\Delta}$; справа: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ D,\ D}{\Gamma\to\Delta,\ D}$.

1.3) *Перестановка*

слева: $\dfrac{\Gamma,\ C,\ D,\ \Pi\to\Delta}{\Gamma,\ D,\ C,\ \Pi\to\Delta}$; справа: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ C,\ D,\ \Lambda}{\Gamma\to\Delta,\ D,\ C,\ \Lambda}$.

Эти три правила вывода мы будем называть *слабыми* правилами, а все остальные — *сильными* правилами.

1.4) *Сечение*:

$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ D \qquad D,\ \Pi\to\Lambda}{\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda}.$$

Формула D называется *высекаемой формулой* этого правила.

2) *Логические правила*:

2.1) $\neg$-слева: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ D}{\neg D,\ \Gamma\to\Delta}$; $\neg$-справа: $\dfrac{D,\ \Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\ \neg D}$.

Формулы D и $\neg D$ называются соответственно *боковой формулой* и *главной формулой* этого правила вывода.

2.2) $\wedge$-слева: $\dfrac{C,\ \Gamma\to\Delta}{C\wedge D,\ \Gamma\to\Delta}$ и $\dfrac{D,\ \Gamma\to\Delta}{C\wedge D,\ \Gamma\to\Delta}$;

$\wedge$-справа: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ C \qquad \Gamma\to\Delta,\ D}{\Gamma\to\Delta,\ C\wedge D}$.

Формулы C и D называются *боковыми формулами*, а формула $C\wedge D$ — *главной формулой* этого правила.

2.3) $\vee$-слева: $\dfrac{C,\ \Gamma\to\Delta \qquad D,\ \Gamma\to\Delta}{C\vee D,\ \Gamma\to\Delta}$;

$\vee$-справа: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ C}{\Gamma\to\Delta,\ C\vee D}$ и $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ D}{\Gamma\to\Delta,\ C\vee D}$.

Формулы C и D называются *боковыми формулами*, а формула $C\vee D$ — *главной формулой* этого правила.

2.4) $\supset$-слева: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ C \qquad D,\ \Pi\to\Lambda}{C\supset D,\ \Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda}$;

$\supset$-справа: $\dfrac{C,\ \Gamma\to\Delta,\ D}{\Gamma\to\Delta,\ C\supset D}$.

Формулы C и D называются *боковыми*, а формула $C\supset D$ — *главной.*

Правила вывода 2.1) — 2.4) называются *пропозициональными.*

2.5) $\forall$-слева: $\dfrac{F(t),\ \Gamma\to\Delta}{\forall xF(x),\ \Gamma\to\Delta}$;

$\forall$-справа: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ F(a)}{\Gamma\to\Delta,\ \forall xF(x)}$,

где t — произвольный терм и a не входит в нижнюю секвенцию. Формулы $F(t)$ и $F(a)$ называются *боковыми*, а $\forall xF(x)$ — *главной* формулами. Переменная a в правиле $\forall$-справа называется *собственной переменной* этого правила.

Отметим, что в правиле $\forall$-справа все вхождения переменной a в $F(a)$ являются отмеченными. В правиле $\forall$-слева $F(t)$ и $F(x)$ суть

$$\left(F(a)\,\frac{a}{t}\right) \quad \text{и} \quad \left(F(a)\,\frac{a}{x}\right)$$

соответственно (для некоторой свободной переменной a), поэтому не всякий терм t в $F(t)$ обязательно отмечен.

2.6) $\exists$-слева: $\dfrac{F(a),\ \Gamma\to\Delta}{\exists xF(x),\ \Gamma\to\Delta}$;

$\exists$-справа: $\dfrac{\Gamma\to\Delta,\ F(t)}{\Gamma\to\Delta,\ \exists xF(x)}$,

где a не входит в нижнюю секвенцию и t — произвольный терм.

Формулы $F(a)$ и $F(t)$ называются *боковыми*, а формула $\exists xF(x)$ — *главной.* Переменная a в правиле $\exists$-слева называется собственной переменной этого правила.

Отметим, что в правиле $\exists$-слева переменная a полностью отмечена, тогда как в правиле $\exists$-справа не всякое t обязательно является отмеченным. (И снова $F(t)$ есть $\left(F(a)\,\frac{a}{t}\right)$ для некоторого a.)

Правила вывода 2.5) и 2.6) называются *кванторными.* Условие, что собственная переменная не должна входить в нижнюю секвенцию в правилах $\forall$-справа и $\exists$-слева, будем называть *ограничением на собственную переменную* для этих правил.

Всякая секвенция вида $A\to A$ называется *начальной секвенцией* или *аксиомой.*

Теперь мы введем понятие вывода, т. е. формального доказательства, в **LK**.

Определение 2.2. *Выводом* P (в **LK**) или **LK**-*выводом* называется дерево секвенций, удовлетворяющее следующим условиям:

1) самые верхние секвенции в P являются начальными секвенциями;

2) каждая секвенция в P, кроме самой нижней, является верхней секвенцией некоторого непосредственного вывода, нижняя секвенция которого тоже принадлежит P.

При рассмотрении выводов в **LK** будут использоваться следующие ниже понятия и соглашения.

Определение 2.3. Из определения 2.2 следует, что каждый вывод P имеет единственную секвенцию, расположенную ниже всех остальных секвенций. Она будет называться *заключительной секвенцией* вывода P. Вывод с заключительной секвенцией S называется также *выводом, оканчивающимся секвенцией* S, или *выводом секвенции* S. Секвенция S называется *выводимой* в **LK** или **LK**-*выводимой*, если существует ее **LK**-вывод. Формула A называется **LK**-*выводимой* (или *теоремой* в **LK**), если секвенция $\to A$ является **LK**-выводимой. Приставка „**LK**-" в выражениях „**LK**-вывод" и „**LK**-выводима" будет часто опускаться.

Вывод, не содержащий применений правила сечения, называется *выводом без сечений*.

Символом $\vdots$ всегда будем обозначать часть вывода. Например, фигуры

$$\begin{matrix}\vdots\\ S\end{matrix} \qquad \text{и} \qquad \begin{matrix}S_1\quad S_2\\ \vdots\\ S\end{matrix}$$

обозначают соответственно некоторый вывод секвенции S и какой-то вывод секвенции S из секвенций S_1 и S_2. Выводы обычно обозначаются буквами $P, Q, \ldots$. Запись типа $P(a)$ означает, что все вхождения переменной a в P отмечены. (Конечно, такое обозначение полезно только в том случае, когда предполагается заменить эти вхождения переменной a некоторым другим термом.) В таком случае $P(t)$ есть результат замены всех вхождений a в $P(a)$ термом t.

Рассмотрим некоторые слегка видоизмененные правила вывода. Схема

$$J\quad \frac{\Gamma\to\Delta, A \qquad \Pi\to\Lambda, B}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda, A\wedge B}$$

не является правилом вывода системы **LK**. Тем не менее из двух верхних секвенций мы можем вывести в **LK** нижнюю секвенцию, используя несколько структурных правил и правило

$\wedge$-справа:

$$(*)\qquad \wedge\text{-справа:}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Delta, A}{\text{несколько ослаблений и перестановок}}}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda, A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi\to\Lambda, B}{\text{несколько ослаблений и перестановок}}}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda, B}}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda, A\wedge B.}$$

Обратно, из секвенций $\Gamma\to\Delta, A$ и $\Gamma\to\Delta, B$ можно вывести секвенцию $\Gamma\to\Delta, A\wedge B$, используя несколько структурных правил и некоторый пример схемы J:

$$J\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Delta, A \qquad \Gamma\to\Delta, B}{\Gamma, \Gamma\to\Delta, \Delta, A\wedge B}}{\text{несколько сокращений и перестановок}}}{\Gamma\to\Delta, A\wedge B.}$$

Таким образом, мы можем рассматривать J как сокращение для (*). В таком случае мы будем использовать обозначение

$$\frac{\Gamma\to\Delta, A \qquad \Pi\to\Lambda, B}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda, A\wedge B.}$$

В дальнейшем двойной чертой, как и в этом примере, мы часто будем указывать на сокращение некоторого числа шагов.

Другое замечание, которое мы хотим здесь сделать, состоит в том, что ограничение на употребление связанных переменных (в п. 3 определения формул) мешает появлению таких нежелательных выводов, как, например,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a), B(b)\to A(a)\wedge B(b)}{A(a), B(b)\to \exists x(A(x)\wedge B(b))}}{A(a), B(b)\to\exists x\exists x(A(x)\wedge B(x))}}{\exists xA(x), \exists xB(x)\to\exists x\exists x(A(x)\wedge B(x)).}$$

В нашей системе этого никогда не произойдет, поскольку выражение $\exists x\exists x(A(x)\wedge B(x))$ не является формулой.

Бескванторный фрагмент системы **LK**, т. е. ее подсистема, не содержащая кванторов, называется *исчислением высказываний*.

Пример 2.4. Следующие фигуры являются **LK**-выводами.

1)
$$\begin{array}{rc}
 & A\to A \\ \cline{2-2}
\neg\text{-справа} & \to A, \neg A \\ \cline{2-2}
\vee\text{-справа} & \to A, A\vee\neg A \\ \cline{2-2}
\text{перестановка справа} & \to A\vee\neg A, A \\ \cline{2-2}
\vee\text{-справа} & \to A\vee\neg A, A\vee\neg A \\ \cline{2-2}
\text{сокращение справа} & \to A\vee\neg A.
\end{array}$$

2) Пусть свободная переменная a полностью отмечена в $F(a)$.

$$\begin{array}{lc}
 & F(a) \to F(a) \\ \cline{2-2}
\exists\text{-справа} & F(a) \to \exists x F(x) \\ \cline{2-2}
\neg\text{-справа} & \to \exists x F(x),\ \neg F(a) \\ \cline{2-2}
\forall\text{-справа} & \to \exists x F(x),\ \forall y \neg F(y) \\ \cline{2-2}
\neg\text{-слева} & \neg \forall y \neg F(y) \to \exists x F(x) \\ \cline{2-2}
\supset\text{-справа} & \to \neg \forall y \neg F(y) \supset \exists x F(x).
\end{array}$$

Следует заметить, что нижняя секвенция применения правила $\forall$-справа не содержит собственной переменной a.

Упражнение 2.5. Вывести в **LK** следующие формулы:

1) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$;
2) $A \supset B \equiv \neg A \vee B$;
3) $\exists x F(x) \equiv \neg \forall y \neg F(y)$;
4) $\neg \forall y F(y) \equiv \exists x \neg F(x)$;
5) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

Упражнение 2.6. Вывести в **LK** следующие формулы и секвенции:

1) $\exists x(A \supset B(x)) \equiv A \supset \exists x B(x)$;
2) $\exists x(A(x) \supset B) \equiv \forall x A(x) \supset B$;
3) $\exists x(A(x) \supset B(x)) \equiv \forall x B(x) \supset \exists x B(x)$;
4) $\neg A \supset B \to \neg B \supset A$;
5) $\neg A \supset \neg B \to B \supset A$;

Упражнение 2.7. Построить вывод без сечений секвенции $\forall x B(x) \supset B \to \exists x(A(x) \supset B)$, где $A(a)$ и B — различные атомарные формулы.

Определение 2.8. (1) *Формулой, термом* или *логическим символом в данном выводе* (*в секвенции* или *в формуле*) называется формула, терм или логический символ, рассматриваемый вместе с местом, которое он занимает в этом выводе (соответственно в секвенции или в формуле).

(2) Последовательность секвенций в выводе P называется *нитью* (вывода P), если выполняются следующие условия:

2.1) Последовательность начинается с начальной секвенции и заканчивается заключительной секвенцией.

2.2) Всякая секвенция в этой последовательности, кроме последней, является верхней секвенцией некоторого непосредственного вывода, и за ней непосредственно следует нижняя секвенция этого непосредственного вывода.

(3) Пусть S_1, S_2 и S_3 — секвенции в выводе P. Мы говорим, что S_1 расположена *выше* S_2 или что S_2 расположена *ниже* S_1 (в P), если существует нить, содержащая как S_1, так и S_2, и в этой нити S_1 появляется раньше, чем S_2. Если S_1 расположена выше S_2 и S_2 расположена выше S_3, то мы говорим, что S_2 расположена *между* S_1 и S_3.

(4) Говорят, что некоторый непосредственный вывод в P расположен *ниже* секвенции S (в P), если его нижняя секвенция расположена ниже S.

(5) Пусть P — некоторый вывод. Всякая часть P, которая сама является выводом, называется *подвыводом* вывода P. Это понятие можно определить также следующим образом. Если S — произвольная секвенции в выводе P, то часть этого вывода, которая состоит из секвенции S и всех секвенций в P, расположенных выше S, называется *подвыводом* вывода P (с заключительной секвенцией S).

(6) Пусть P_0 — некоторый вывод, имеющий вид

$$\begin{array}{rc}
 & \vdots \\
 & \Gamma \to \Theta \\
(*) & \{\ \vdots\ ,
\end{array}$$

где $(*)$ обозначает часть вывода P_0, расположенную под $\Gamma \to \Theta$. Если Q есть некоторый вывод, оканчивающийся секвенцией $\Gamma, D \to \Theta$, то *копией вывода* P_0 *относительно* Q назовем вывод P вида

$$\begin{array}{rc}
Q\Big\{ & \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, D \to \Theta \end{array} \\
(**) & \{\ \vdots\ ,
\end{array}$$

где $(**)$ отличается от $(*)$ только тем, что всякой секвенции в $(*)$ вида $\Pi \to \Lambda$ в $(**)$ соответствует секвенция вида $\Pi, D \to \Lambda$. Другими словами, P получается из P_0 заменой подвывода, оканчивающегося секвенцией $\Gamma \to \Theta$, на Q и добавлением формулы D к антецеденту каждой секвенции из $(*)$. Подобным образом можно определить и копию с дополнительной формулой в сукцеденте. Мы можем распространить это определение также и на случай нескольких дополнительных формул.

Точно копию вывода P_0 относительно Q можно определить индукцией по числу применений правил вывода в $(*)$. Но мы не будем этого делать, поскольку данное понятие является интуитивно ясным и простым.

(7) Пусть $S(a)$ (или $\Gamma(a) \to \Delta(a)$) обозначает секвенцию вида $A_1(a), \ldots, A_m(a) \to B_1(a), \ldots, B_n(a)$. Тогда $S(t)$ (или $\Gamma(t) \to \Delta(t)$) обозначает секвенцию $A_1(t), \ldots, A_m(t) \to B_1(t), \ldots, B_n(t)$.

По аналогии с определением 1.6 мы можем определить такое понятие: терм t *полностью отмечен в* $S(t)$ (или в $\Gamma(t) \to \Delta(t)$).

Для того чтобы доказать основное свойство выводимости, а именно тот факт, что выводимость сохраняется при подстановке термов вместо свободных переменных, мы приведем сначала несколько лемм, которые также выражают некоторые важные свойства выводов. Но сначала введем одно важное понятие.

Определение 2.9. Вывод в **LK** называется *регулярным*, если, во-первых, в нем все собственные переменные отличны друг от друга и, во-вторых, любая свободная переменная, входящая в некоторую секвенцию S этого вывода в качестве собственной, входит, кроме нее, только в те секвенции, которые расположены выше S.

Лемма 2.10. (1) *Пусть* $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ — *некоторая выводимая (в* **LK**) *секвенция, в которой переменная a полностью отмечена, и пусть* $P(a)$ — *вывод секвенции* $\Gamma(a) \to \Delta(a)$. *Пусть* b — *свободная переменная, не входящая в* $P(a)$. *Тогда дерево, полученное из* $P(a)$ *замещением каждого вхождения* a *в* $P(a)$ *на* b, *является выводом с заключительной секвенцией* $\Gamma(b) \to \Delta(b)$.

(2) *Для произвольного* **LK**-*вывода существует регулярный вывод с той же заключительной секвенцией. Более того, требуемый вывод получается из первоначального простым переименованием (в подходящих местах) свободных переменных.*

Доказательство. (1) Индукция по числу непосредственных выводов в $P(a)$. Если $P(a)$ состоит только из начальной секвенции $A(a) \to A(a)$, то $P(b)$ состоит из секвенции $A(b) \to A(b)$, которая тоже является начальной. Допустим, что наше утверждение верно для выводов, содержащих не более n непосредственных выводов, и предположим, что $P(a)$ содержит $n+1$ непосредственный вывод. Мы рассмотрим только случай, когда последний непосредственный вывод, скажем J, представляет собой применение правила $\forall$-справа (остальные случаи разбираются аналогично). Допустим, что собственной переменной этого применения является a и $P(a)$ имеет вид

$$Q(a)\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to \Lambda,\ A(a)\end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\\ J\end{array} \frac{\Gamma \to \Lambda,\ A(a)}{\Gamma \to \Lambda,\ \forall x A(x)},$$

где $Q(a)$ — подвывод вывода $P(a)$, оканчивающийся секвенцией $\Gamma \to \Lambda,\ A(a)$. Напомним, что a не входит ни в Γ, ни в Λ, ни в $A(x)$. По предположению индукции результат замещения всех a в $Q(a)$ на b — вывод, заключительная секвенция которого есть $\Gamma \to \Lambda,\ A(b)$. Ни Γ, ни Λ не содержат b. Следовательно, мы можем к этой секвенции применить правило $\forall$-справа, используя переменную b в качестве собственной:

$$Q(b)\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \to \Lambda,\ A(b)\end{array}\right. \quad \frac{\Gamma \to \Lambda,\ A(b)}{\Gamma \to \Lambda,\ \forall x A(x)},$$

и, значит, $P(b)$ есть вывод, оканчивающийся секвенцией $\Gamma \to \Lambda,\ \forall x A(x)$. Если же a не является собственной переменной применения J, то $P(a)$ имеет вид

$$Q(a)\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma(a) \to \Lambda(a),\ A(a, c)\end{array}\right. \quad \frac{\Gamma(a) \to \Lambda(a),\ A(a, c)}{\Gamma(a) \to \Lambda(a),\ \forall x A(a, x)}.$$

По предположению индукции результат замещения всех a в $Q(a)$ на b является выводом с заключительной секвенцией $\Gamma(b) \to \Lambda(b),\ A(b, c)$.

Так как по условию b не входит в $P(a)$, то c не совпадает с b, и, следовательно, мы можем к этой секвенции применить правило $\forall$-справа, используя переменную c в качестве собственной, и получить вывод $P(b)$ с заключительной секвенцией $\Gamma(b) \to \Lambda(b),\ \forall x A(b, x)$.

(2) Индукция по числу l применений правил $\forall$-справа и $\exists$-слева в данном выводе P. Если $l=0$, то возьмем само P. В противном случае P можно представить в виде

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & \ldots & P_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & S, & \end{array}\right.$$

где P_i — подвывод вывода P, имеющий вид

$$\begin{array}{c}P_i\\ I_i\end{array}\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{\Gamma_i \to \Delta_i,\ F_i(b_i)}{\Gamma_i \to \Delta_i,\ \forall y_i F_i(y_i)}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \begin{array}{c}P_i\\ I_i\end{array}\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{F_i(b_i),\ \Gamma_i \to \Delta_i}{\exists y_i F_i(y_i),\ \Gamma_i \to \Delta_i}\end{array}\right.,$$

и I_i — самое нижнее применение правил $\forall$-справа и $\exists$-слева в P $(i=1, \ldots, k)$ (т. е. в той части вывода P, которая обозначена через $(*)$, нет применений правил $\forall$-справа и $\exists$-слева).

Разберем лишь случай, когда I_i является применением правила $\forall$-справа. Тогда вывод P_i содержит меньшее количество применений правил $\forall$-справа или $\exists$-слева, чем P, и поэтому по предположению индукции существует регулярный вывод P'_i секвенции $\Gamma_i \to \Delta_i,\ F_i(b_i)$. Заметим, что ни одна свободная переменная в $\Gamma_i \to \Delta_i,\ F_i(b_i)$ (включая и b_i) не использовалась в P'_i в качестве собственной переменной. Пусть $c_{i,1}, \ldots, c_{i,m_i}$ — все собственные переменные вывода P'_i, $i=1, \ldots, k$. Пусть d_{ij} $(i=1, \ldots, k;\ j=0, 1, \ldots, m_i)$ — попарно различные свободные переменные, не входящие ни в один из выводов $P, P'_1, \ldots, P'_k$. Заменим в P'_i переменные $b_i, c_{i,1}, \ldots, c_{i,m_i}$ на $d_{i,0}, d_{i,1}, \ldots, d_{i,m_i}$ соответственно $(i=1, \ldots, k)$. Мы получим, таким образом, регулярные выводы $P''_1, \ldots, P''_k$. Наконец, вывод P' определим так:

$$P''_1 \ \ldots \ \frac{P''_i}{\Gamma_i \to \Delta_i,\ \forall y_i F_i(y_i)} \ \ldots \ P''_k$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ S, \end{array} \right.$$

где $(*)$ — такой же вывод, как и в P. Лемма доказана.

В дальнейшем всякий раз, когда это удобно, мы будем считать, что имеем дело с регулярными выводами, не оговаривая этого особо.

Таким же методом, что и в лемме 2.10, мы можем доказать следующее.

Лемма 2.11. *Пусть t — произвольный терм. Далее, пусть $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ — некоторая выводимая (в* **LK**) *секвенция, в которой переменная a полностью отмечена, и пусть $P(a)$ — вывод, оканчивающийся секвенцией $\Gamma(a) \to \Delta(a)$, в котором всякая собственная переменная отлична от a и не содержится в t. Тогда $P(t)$ (результат замещения всех a в $P(a)$ термом t) является выводом с заключительной секвенцией $\Gamma(t) \to \Delta(t)$.*

Лемма 2.12. *Пусть t — произвольный терм, $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ — выводимая (в* **LK**) *секвенция, в которой a полностью отмечена, и $P(a)$ — вывод секвенции $\Gamma(a) \to \Delta(a)$. Пусть $P'(a)$ — вывод, полученный из $P(a)$ некоторым переименованием собственных переменных (причем различные переменные заменяются не обязательно различными), таким, что в $P'(a)$ всякая собственная переменная отлична от a и не содержится в t. Тогда $P'(t)$ является выводом секвенции $\Gamma(t) \to \Delta(t)$.*

Доказательство. Индукция по числу собственных переменных в $P(a)$, которые совпадают с a или содержатся в t, с использованием лемм 2.10 и 2.11.

Перепишем часть утверждения леммы 2.11 следующим образом:

Предложение 2.13. *Пусть t — произвольный терм и $S(a)$ — выводимая (в* **LK**) *секвенция, в которой a полностью отмечена. Тогда секвенция $S(t)$ тоже выводима.*

Мы приведем один простой, но полезный факт о формальных выводах в нашей системе, который будет нами использоваться неоднократно.

Предложение 2.14. *Если некоторая секвенция выводима, то она имеет такой вывод, в котором все начальные секвенции состоят из атомарных формул. Кроме того, если некоторая секвенция выводима без сечений, то она имеет вывод указанного вида без сечений.*

Доказательство. Достаточно показать, что для произвольной формулы A секвенция $A \to A$ выводима без сечений из начальных секвенций, состоящих из атомарных формул, а это можно легко доказать индукцией по сложности формулы A.

Определение 2.15. Мы говорим, что формулы A и B являются *алфавитными вариантами* (друг друга), если для некоторых $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ формула

$$\left(A\,\frac{x_1, \ldots, x_n}{z_1, \ldots, z_n}\right)$$

совпадает с формулой

$$\left(B\,\frac{y_1, \ldots, y_n}{z_1, \ldots, z_n}\right),$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — различные связанные переменные, не входящие ни в A, ни в B, т. е. если A и B различаются только тем, что у них разный набор связанных переменных. В таком случае мы будем писать $A \sim B$.

Можно легко доказать, что отношение $A \sim B$ является отношением эквивалентности. Интуитивно ясно, что замена связанных переменных в формуле не изменяет ее смысла. Индукцией по числу логических символов в A можно доказать, что если $A \sim B$, то формула $A \equiv B$ выводима без сечений (на самом деле она выводима без сечений даже в системе **LJ**, которая будет описана в следующем параграфе). Таким образом, мы часто будем отождествлять два алфавитных варианта без специальных оговорок.

§ 3. Интуиционистское исчисление предикатов

Определение 3.1. *Интуиционистское исчисление предикатов* мы можем формализовать в виде некоторой подсистемы системы **LK**, которую, следуя Генцену, обозначим через **LJ** (буква **J** обозначает „интуиционистский“). Система **LJ** получается из **LK** следующей модификацией (ср. определения 2.1 и 2.2 для **LK**):

1) Секвенции системы **LJ** имеют вид $\Gamma \to \Delta$, где Δ состоит не более чем из одной формулы.

2) Правила вывода системы **LJ** получаются из соответствующих правил вывода системы **LK** добавлением следующего ограничения: сукцеденты нижней и каждой из верхних секвенций состоят не более чем из одной формулы; таким образом, в системе **LJ** нет аналогов правил сокращения справа и перестановки справа.

Понятия вывода, выводимости и другие для системы **LJ** аналогичны соответствующим понятиям для системы **LK**.

Всякий вывод в **LJ**, очевидно, является выводом в **LK**, но не наоборот. Следовательно, справедливо

Предложение 3.2. *Если некоторая секвенция системы* **LJ** *выводима в* **LJ**, *то она выводима также в* **LK**.

Для системы **LJ** справедливы аналоги лемм 2.10—2.12 и предложений 2.13 и 2.14, в которых вместо „выводима“ или „выводима (в **LK**)“ следует читать „**LJ**-выводима“. Мы будем ссылаться на эти результаты (для **LJ**) как на леммы 3.3—3.5 и предложения 3.6 и 3.7 соответственно. (Формулировки этих утверждений мы опускаем.)

Пример 3.8. Следующие фигуры являются **LJ**-выводами.

1)

$$\begin{array}{r c}
 & A \to A \\ \cline{2-2}
\wedge\text{-слева} & A \wedge \neg A \to A \\ \cline{2-2}
\neg\text{-слева} & \neg A,\ A \wedge \neg A \to \\ \cline{2-2}
\wedge\text{-слева} & A \wedge \neg A,\ A \wedge \neg A \to \\ \cline{2-2}
\text{сокращение слева} & A \wedge \neg A \to \\ \cline{2-2}
\neg\text{-справа} & \to \neg (A \wedge \neg A)
\end{array}$$

2) Пусть переменная a полностью отмечена в $F(a)$.

$$\begin{array}{r c}
 & F(a) \to F(a) \\ \cline{2-2}
\exists\text{-справа} & F(a) \to \exists x F(x) \\ \cline{2-2}
\neg\text{-слева} & \neg \exists x F(x),\ F(a) \to \\ \cline{2-2}
\text{перестановка слева} & F(a),\ \neg \exists x F(x) \to \\ \cline{2-2}
\neg\text{-справа} & \neg \exists x F(x) \to \neg F(a) \\ \cline{2-2}
\forall\text{-справа} & \neg \exists x F(x) \to \forall y \neg F(y)
\end{array}$$

Упражнение 3.9. Вывести в **LJ** следующие секвенции и формулы:

1) $\neg A \vee B \to A \supset B$;
2) $\exists x F(x) \to \neg \forall y \neg F(y)$;
3) $A \wedge B \to A$;
4) $A \to A \vee B$;
5) $\neg A \vee \neg B \to \neg (A \wedge B)$;
6) $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$;
7) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee C$;
8) $\exists x \neg F(x) \to \neg \forall x F(x)$;
9) $\forall x (F(x) \wedge G(x)) \equiv \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$;
10) $A \supset \neg B \to B \supset \neg A$;
11) $\exists x (A \supset B(x)) \to A \supset \exists x B(x)$;
12) $\exists x (A(x) \supset B) \to \forall x A(x) \supset B$;
13) $\exists x (A(x) \supset B(x)) \to \forall x A(x) \supset \exists x B(x)$.

Упражнение 3.10. Вывести в **LJ** следующие секвенции:

1) $\neg \neg (A \supset B),\ A \to \neg \neg B$;
2) $\neg \neg B \supset B,\ \neg \neg (A \supset B) \to A \supset B$;
3) $\to \neg \neg \neg A \equiv \neg A$.

Упражнение 3.11. Определим **LJ′** как систему, которая получается из системы **LJ** добавлением к ней в качестве начальных всех секвенций вида $\neg \neg R \to R$, где R — атомарная формула. Пусть A — формула, не содержащая символов $\vee$ и $\exists$. Показать, что тогда формула $\neg \neg A \to A$ выводима в **LJ′**. [*Указание*: применить индукцию по числу логических символов в формуле A; см. также упражнение 3.10.]

Задача 3.12. Для всякой формулы A следующим образом определим формулу A^*:

1) если A — атомарная формула, то A^* есть $\neg \neg A$;

2) если A имеет вид $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$ или $B \supset C$, то A^* есть $\neg B^*$, $B^* \wedge C^*$, $\neg (\neg B^* \wedge \neg C^*)$ или $B^* \supset C^*$ соответственно;

3) если A имеет вид $\forall x F(x)$ или $\exists x F(x)$, то A^* есть $\forall x F^*(x)$ или $\neg \forall x \neg F^*(x)$ соответственно.

(Таким образом, формула A^* не содержит символов $\vee$ и $\exists$.) Доказать, что всякая формула A выводима в **LK** тогда и только тогда, когда в **LJ** выводима формула A^*. [*Указание*: последовательно доказать следующие четыре утверждения:

1. Для любой формулы A в системе **LK** выводима формула $A \equiv A^*$.

2. Пусть S — некоторая секвенция вида $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$. Пусть S' обозначает секвенцию

$$A_1^*, \ldots, A_m^*, \ \neg B_1^*, \ldots, \neg B_n^* \to .$$

Тогда S выводима в **LK** в том и только том случае, когда в **LK** выводима S'.

3. В системе **LJ** выводима формула $A^* \equiv \neg\neg A^*$ (применить упражнение 3.11).

4. Если секвенция S выводима в **LK**, то секвенция S' выводима в **LJ**. (Воспользоваться индукцией по числу применений правил в выводе секвенции S.)

Утверждение, которое нужно доказать, есть частный случай утверждения 4.]

§ 4. Системы аксиом

Определение 4.1. 1) Произвольное (конечное или бесконечное) множество $\mathscr{A}$ предложений называется *системой аксиом*, а каждое из этих предложений называется *аксиомой* системы $\mathscr{A}$. Системы аксиом иногда называют также *теориями*. (Разумеется, это определение имеет смысл только в том или ином контексте.)

2) Любая конечная (возможно, пустая) последовательность формул, состоящая только из аксиом теории $\mathscr{A}$, называется *последовательностью аксиом* теории $\mathscr{A}$.

3) Мы говорим, что секвенция $\Gamma \to \Delta$ *выводима* (в **LK**) *из* $\mathscr{A}$, и записываем это в виде $\mathscr{A}$, $\Gamma \to \Delta$, если существует последовательность аксиом Γ_0 теории $\mathscr{A}$, такая, что секвенция $\Gamma_0, \Gamma \to \Delta$ выводима в **LK**.

4) Система аксиом $\mathscr{A}$ называется *несовместимой* (с **LK**) или *противоречивой* (относительно **LK**), если пустая секвенция $\to$ выводима (в **LK**) из $\mathscr{A}$. В противном случае система $\mathscr{A}$ называется *совместимой* (с **LK**) или *непротиворечивой* (относительно **LK**).

5) Если все функциональные и предикатные константы формулы A встречаются в аксиомах системы $\mathscr{A}$, то формула A называется *зависимой от системы* $\mathscr{A}$.

6) Предложение A называется *противоречивым* (*непротиворечивым*), если противоречива (непротиворечива) система аксиом $\{A\}$.

7) Через $\mathbf{LK}_{\mathscr{A}}$ обозначим систему, получаемую из **LK** добавлением в качестве начальных секвенций всех секвенций вида $\to A$, где $A \in \mathscr{A}$.

8) Система $\mathbf{LK}_{\mathscr{A}}$ называется *противоречивой*, если в ней выводима пустая секвенция $\to$; в противном случае система $\mathbf{LK}_{\mathscr{A}}$ называется *непротиворечивой*.

Следующие ниже легко доказываемые предложения будут довольно часто использоваться в дальнейшем.

Предложение 4.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая система аксиом. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(a) *система $\mathscr{A}$ противоречива* (*относительно* **LK**);

(b) *каждая формула* (*рассматриваемого языка*) *выводима в* **LK** *из* $\mathscr{A}$;

(c) *для некоторой формулы A в* **LK** *из $\mathscr{A}$ выводимы и A, и $\neg A$.*

Предложение 4.3. *Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая система аксиом. Тогда секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в системе $\mathbf{LK}_{\mathscr{A}}$ в том и только том случае, когда эта секвенция выводима из $\mathscr{A}$ в* **LK**.

Следствие 4.4. *Система аксиом $\mathscr{A}$ непротиворечива* (*относительно* **LK**) *тогда и только тогда, когда непротиворечива система $\mathbf{LK}_{\mathscr{A}}$.*

Все эти определения и предложения переносятся также на систему **LJ**.

§ 5. Теорема об устранении сечений

Очень важным свойством системы **LK** является теорема об устранении сечений, известная также как „основная теорема Генцена“.

Теорема 5.1 (теорема Генцена об устранении сечений). *Если какая-то секвенция выводима* (*в* **LK**), *то она выводима* (*в* **LK**) *и без сечений.*

Это значит, что всякую теорему исчисления предикатов можно вывести, так сказать, прямым путем. Мы вернемся к этому вопросу позднее. Цель настоящего параграфа — доказать сформулированную выше теорему. Мы будем следовать доказательству Генцена.

Введем сначала новое правило вывода и покажем, что оно эквивалентно правилу сечения. Пусть A — некоторая формула. *Смешением* (относительно A) назовем непосредственный вывод следующего вида:

$$\frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta^*,\ \Lambda}\ (A),$$

где и Δ и Π содержат формулу A, а Δ^* и Π^* получаются из Δ и Π соответственно удалением из них всех вхождений формулы A. Формула A называется *смешивающей формулой* и обычно указывается в скобках (как это сделано выше).

Через $\mathbf{LK}^*$ обозначим систему, полученную из **LK** заменой правила сечения на правило смешения. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 5.2. *Системы* **LK** *и* $\mathbf{LK}^*$ *эквивалентны, т. е. произвольная секвенция выводима в* **LK** *тогда и только тогда, когда она выводима в* $\mathbf{LK}^*$.

В силу этой леммы для доказательства теоремы 5.1 достаточно показать, что правило смешения устранимо в системе **LK***, поскольку всякий вывод в **LK*** без смешений является в то же время и выводом в **LK** без сечений.

Теорема 5.3 (ср. с теоремой 5.1). *Если какая-то секвенция выводима в* **LK***, *то она выводима в* **LK*** *без смешений.*

Эта теорема доказывается индукцией по числу смешений, входящих в некоторый вывод данной секвенции с помощью следующей леммы.

Лемма 5.4. *Если какая-то секвенция S имеет в* **LK*** *некоторый вывод, который содержит (только) одно смешение, расположенное в самом низу этого вывода, то секвенция S выводима и без смешений.*

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству леммы 5.4. Сначала введем две меры сложности выводов. *Степенью формулы* A (она обозначается через $g(A)$) называется число логических символов в A. *Степенью смешения* называется степень его смешивающей формулы. Если вывод P оканчивается смешением и не содержит других смешений, то *степенью вывода* P (она обозначается через $g(P)$) называется степень этого смешения.

Пусть вывод P содержит только одно смешение J, которое расположено в самом низу этого вывода:

$$J\ \frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta^*,\ \Lambda}\ (A).$$

Обозначим левую и правую верхние секвенции этого смешения через S_1 и S_2 соответственно, а нижнюю секвенцию — через S. Нить в выводе P называется *левой* (*правой*), если она содержит левую (правую) верхнюю секвенцию смешения J. *Ранг* нити $\mathcal{F}$ в выводе P, $\operatorname{rank}(\mathcal{F}; P)$, определяется следующим образом: если $\mathcal{F}$ — левая (правая) нить, то $\operatorname{rank}(\mathcal{F}; P)$ равняется числу последовательных секвенций в этой нити, содержащих смешивающую формулу в сукцеденте (антецеденте), если считать снизу вверх, начиная с левой (правой) верхней секвенции смешения J. Так как каждая из верхних секвенций смешения J обязательно содержит смешивающую формулу, то $\operatorname{rank}(\mathcal{F}, P)$ не меньше 1. Далее, положим

$$\operatorname{rank}_l(P) = \max_{\mathcal{F}}(\operatorname{rank}\mathcal{F}; P)),$$

где $\mathcal{F}$ пробегает все левые нити в P, и

$$\operatorname{rank}_r(P) = \max_{\mathcal{F}}(\operatorname{rank}(\mathcal{F}; P)),$$

где $\mathcal{F}$ пробегает все правые нити в P. *Ранг вывода* P, $\operatorname{rank}(P)$, определяется так:

$$\operatorname{rank}(P) = \operatorname{rank}_l(P) + \operatorname{rank}_r(P).$$

Заметим, что $\operatorname{rank}(P)$ всегда больше или равен 2.

Доказательство леммы 5.4. Мы докажем эту лемму двойной индукцией: по степени g и по рангу r вывода P (т. е. трансфинитной индукцией по $\omega \cdot g + r$). Доказательство распадается на два главных случая, а именно $r = 2$ и $r > 2$ (независимо от величины g).

Случай 1. $r = 2$, т. е. $\operatorname{rank}_l(P) = \operatorname{rank}_r(P) = 1$.

Разберем несколько случаев в зависимости от того, какой вид имеют выводы верхних секвенций смешения.

1.1) Левая верхняя секвенция S_1 является начальной, т. е. вывод P имеет вид

$$J\ \frac{A \to A \qquad \Pi \to \Lambda}{A,\ \Pi^* \to \Lambda.}$$

Тогда нижнюю секвенцию мы можем получить и без смешений:

$$\cfrac{\cfrac{\Pi \to \Lambda}{\text{несколько перестановок}}}{\cfrac{A,\ \ldots,\ A,\ \Pi^* \to \Lambda}{\cfrac{\text{несколько сокращений}}{A,\ \Pi^* \to \Lambda.}}}$$

1.2) Случай, когда правая верхняя секвенция S_2 смешения J является начальной, рассматривается аналогично.

1.3) Ни S_1, ни S_2 не являются начальными секвенциями, и S_1 получена применением некоторого структурного правила J_1. Поскольку $\operatorname{rank}_l(P) = 1$, формула A не может входить в верхнюю секвенцию правила J_1, т. е. J_1 есть ослабление справа, для которого A является ослабляющей формулой:

$$\begin{array}{l} J_1 \\ J \end{array}\ \frac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_1}{\Gamma \to \Delta_1,\ A} \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta_1,\ \Lambda}\ (A),$$

где Δ_1 не содержит A. Мы можем устранить смешение следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta_1}{\text{несколько ослаблений}}}{\cfrac{\Pi^*,\ \Gamma \to \Delta_1,\ \Lambda}{\cfrac{\text{несколько перестановок}}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta_1,\ \Lambda.}}}$$

1.4) Случай, когда обе секвенции S_1 и S_2 не являются начальными, причем S_2 получена применением некоторого структурного правила, рассматривается аналогично.

1.5) Обе секвенции S_1 и S_2 получены применением каких-то логических правил. Тогда, поскольку $\mathrm{rank}_l(P) = \mathrm{rank}_r(P) = 1$, формула A должна быть главной в каждом из этих правил. Далее применяем индукцию по степени вывода P с разбором случаев, соответствующих виду внешнего логического символа формулы A. Мы рассмотрим здесь только два случая, разбор остальных предоставляется читателю.

(i) Формула A имеет вид $B \wedge C$. Тогда S_1 и S_2 должны быть получены применением правил $\wedge$-справа и $\wedge$-слева соответственно:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_1,\ B \qquad \Gamma \to \Delta_1,\ C}{\Gamma \to \Delta_1,\ B \wedge C} \qquad \dfrac{B,\ \Pi_1 \to \Lambda}{B \wedge C,\ \Pi_1 \to \Lambda}}{\Gamma,\ \Pi_1 \to \Delta_1,\ \Lambda}\ (B \wedge C),$$

где по условию ни один из выводов, оканчивающихся одной из секвенций $\Gamma \to \Delta_1, B$, $\Gamma \to \Delta_1, C$ или $B, \Pi_1 \to \Lambda$, не содержит смешений. Рассмотрим следующий вывод:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta_1,\ B \qquad B,\ \Pi_1 \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi_1^{\#} \to \Delta_1^{\#},\ \Lambda}\ (B),$$

где последовательности $\Pi_1^{\#}$ и $\Delta_1^{\#}$ получаются из Π_1 и Δ_1 соответственно удалением всех вхождений формулы B. Этот вывод оканчивается смешением и не содержит других смешений. Кроме того, степень формулы B меньше, чем $g(A)$ $(= g(B \wedge C))$. Следовательно, по предположению индукции существует некоторый не содержащий смешений вывод секвенции $\Gamma, \Pi_1^{\#} \to \Delta_1^{\#}, \Lambda$, из которого мы затем можем построить вывод, оканчивающийся секвенцией $\Gamma, \Pi_1 \to \Delta_1, \Lambda$ и не содержащий смешений.

(ii) Формула A имеет вид $\forall x F(x)$. Тогда нижняя часть вывода P выглядит так:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_1,\ F(a)}{\Gamma \to \Delta_1,\ \forall x F(x)} \qquad \dfrac{F(t),\ \Pi_1 \to \Lambda}{\forall x F(x),\ \Pi_1 \to \Lambda}}{\Gamma,\ \Pi_1 \to \Delta_1,\ \Lambda}\ (A),$$

причем переменная a полностью отмечена в $F(a)$. Согласно ограничению на собственную переменную, a не входит ни в Γ, ни в Δ_1, ни в $F(x)$. Поскольку по нашему допущению вывод секвенции $\Gamma \to \Delta_1, F(a)$ не содержит смешений, мы можем получить из него по лемме 2.12 не содержащий смешений вывод

секвенции $\Gamma \to \Delta_1, F(t)$. Рассмотрим теперь следующий вывод:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta_1,\ F(t) \qquad F(t),\ \Pi_1 \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi_1^{\#} \to \Delta_1^{\#},\ \Lambda}\ (F(t)),$$

где последовательности $\Pi_1^{\#}$ и $\Delta_1^{\#}$ получаются из Π_1 и Δ_1 соответственно удалением всех вхождений формулы $F(t)$. Этот вывод имеет только одно смешение, расположенное в самом низу, и степень его смешивающей формулы меньше, чем $g(A)$. Следовательно, по предположению индукции мы можем устранить это смешение и получить некоторый не содержащий смешений вывод секвенции $\Gamma, \Pi_1^{\#} \to \Delta_1^{\#}, \Lambda$, из которого затем можно построить вывод, оканчивающийся секвенцией $\Gamma, \Pi_1 \to \Delta_1, \Lambda$ и также не содержащий смешений.

Случай 2. $r > 2$, т. е. $\mathrm{rank}_l(P) > 1$ или $\mathrm{rank}_r(P) > 1$. Предположение индукции теперь состоит в том, что во всяком выводе Q, который оканчивается смешением и не содержит других смешений и для которого либо $g(Q) < g(P)$, либо $g(Q) = g(P)$ и $r(Q) < r(P)$, мы можем устранить это смешение.

2.1) $\mathrm{rank}_r(P) > 1$.

2.1.1) Антецедент Γ секвенции S_1 содержит формулу A. Тогда построим вывод следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Lambda}{A,\ \Pi^* \to \Lambda}\ \begin{array}{c}\text{несколько перестановок}\\ \text{и сокращений}\end{array}}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta^*,\ \Lambda.}\ \begin{array}{c}\text{несколько ослаблений}\\ \text{и перестановок}\end{array}$$

2.1.2) Секвенция S_2 получена применением некоторого правила J_2, не являющегося логическим правилом с главной формулой A. Тогда нижняя часть вывода P выглядит следующим образом:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad J_2\ \dfrac{\Phi \to \Psi}{\Pi \to \Lambda}}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta^*,\ \Lambda}\ (A),$$

где выводы секвенций $\Gamma \to \Delta$ и $\Phi \to \Psi$ не содержат смешений и Φ содержит по крайней мере одну формулу A. Рассмотрим теперь следующий вывод P':

$$\text{смешение}\ \dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \Phi \to \Psi}{\Gamma,\ \Phi^* \to \Delta^*,\ \Psi}\ (A).$$

В выводе P' степень этого смешения равна $g(P)$, $\mathrm{rank}_l(P') = \mathrm{rank}_l(P)$, $\mathrm{rank}_r(P') = \mathrm{rank}_r(P) - 1$. Следовательно, по предположению индукции секвенция $\Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi$ выводима без смешений. Тогда мы строим следующий вывод:

$$\begin{array}{rc} & \vdots \\ & \Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi \\ \cline{2-2} & \text{несколько перестановок} \\ \cline{2-2} & \Phi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Psi \\ \cline{2-2} J_2 & \Pi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda. \end{array}$$

2.1.3) Формула A не входит в антецедент Γ секвенции S_1, а секвенция S_2 получается применением некоторого логического правила с главной формулой A. Возможно несколько случаев в зависимости от внешнего логического символа формулы A. Мы разберем только два из них, а остальные предоставим читателю.

(i) Формула A имеет вид $B \supset C$. Тогда нижняя часть вывода P имеет вид

$$J\ \frac{\Gamma \to \Delta \qquad J_2\ \dfrac{\Pi_1 \to \Lambda_1, B \qquad C, \Pi_2 \to \Lambda_2}{B \supset C, \Pi_1, \Pi_2 \to \Lambda_1, \Lambda_2}}{\Gamma, \Pi_1^*, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \Lambda_2}\ (B \supset C).$$

Допустим, что формула $B \supset C$ входит и в Π_1, и в Π_2. Рассмотрим тогда следующие выводы P_1 и P_2:

$$P_1\quad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \Pi_1 \to \Lambda_1, B\end{matrix}}{\Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1, B}\ (B \supset C),$$

$$P_2\quad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ C, \Pi_2 \to \Lambda_2\end{matrix}}{\Gamma, C, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2}\ (B \supset C).$$

Заметим, что $g(P_1) = g(P_2) = g(P)$, $\mathrm{rank}_l(P_1) = \mathrm{rank}_l(P_2) = \mathrm{rank}_l(P)$ и $\mathrm{rank}_r(P_1) = \mathrm{rank}_r(P_2) = \mathrm{rank}_r(P) - 1$. Если же формула $B \supset C$ не входит в Π_i для некоторого $i \in \{1, 2\}$, то Π_i^* совпадает с Π_i и вывод P_i определяется так:

$$P_1\quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Pi_1 \to \Lambda_1, B \\ \hline \text{несколько ослаблений} \\ \text{и перестановок} \\ \hline \Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1, B, \end{array} \qquad P_2\quad \begin{array}{c} \vdots \\ C, \Pi_2 \to \Lambda_2 \\ \hline \text{несколько ослаблений} \\ \text{и перестановок} \\ \hline \Gamma, C, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2. \end{array}$$

По предположению индукции для заключительных секвенций выводов P_1 и P_2 существуют некоторые не содержащие смешений выводы P_1' и P_2' соответственно. Рассмотрим теперь следующий вывод P':

$$J\ \frac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\begin{matrix} P_1' \\ \vdots \\ \Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda_1, B \end{matrix} \qquad \begin{array}{c} P_2' \\ \vdots \\ \Gamma, C, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2 \\ \hline \text{несколько перестановок} \\ \hline C, \Gamma, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Lambda_2 \end{array}}{B \supset C, \Gamma, \Pi_1^*, \Gamma, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \Delta^*, \Lambda_2}}{\Gamma, \Gamma, \Pi_1^*, \Gamma, \Pi_2^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_1, \Delta^*, \Lambda_2}\ (B \supset C).$$

Тогда $g(P') = g(P)$, $\mathrm{rank}_l(P') = \mathrm{rank}_l(P)$, $\mathrm{rank}_r(P') = 1$, поскольку формула $B \supset C$ не входит в Γ, и потому $\mathrm{rank}(P') < \mathrm{rank}(P)$. Следовательно, по предположению индукции заключительная секвенция вывода P' выводима без смешений, а значит, выводима без смешений и заключительная секвенция вывода P.

(ii) Формула A имеет вид $\exists x F(x)$. Тогда нижняя часть вывода P выглядит так:

$$J\ \frac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{F(a), \Pi_1 \to \Lambda}{\exists x F(x), \Pi_1 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\exists x F(x)).$$

Пусть b — некоторая свободная переменная, не встречающаяся в выводе P. Тогда результат замещения a на b во всем выводе секвенции $F(a), \Pi_1 \to \Lambda$ является по лемме 2.11 выводом без смешений, оканчивающимся секвенцией $F(b), \Pi_1 \to \Lambda$, поскольку в силу ограничения на собственную переменную переменная a не входит ни в Π_1, ни в Λ.

Рассмотрим следующий вывод:

$$J\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ F(b), \Pi_1 \to \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, F(b), \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\exists x F(x)).$$

По предположению индукции для заключительной секвенции этого вывода найдется некоторый вывод P' без смешений. Рассмотрим теперь вывод

$$J\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to \Delta\end{matrix} \qquad \begin{array}{c} P' \\ \vdots \\ \Gamma, F(b), \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda \\ \hline \text{несколько перестановок} \\ \hline F(b), \Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda \\ \hline \exists x F(x), \Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Lambda \end{array}}{\Gamma, \Gamma, \Pi_1^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}\ (\exists x F(x)),$$

где b не входит ни в одну из формул последовательности $\exists x F(x)$, Γ, Π_1, Δ, Λ. Применяя опять предположение индукции, получаем, что это смешение также может быть устранено.

2.2) $\text{rank}_r(P) = 1$ (и $\text{rank}_l(P) > 1$). Этот случай рассматривается аналогично рассмотренному выше случаю 2.1).

Тем самым доказана лемма 5.4, а с нею и теорема об устранении сечений.

Следует подчеркнуть, что приведенное доказательство является конструктивным, т. е. новый вывод строится эффективно по данному выводу как в лемме 5.2, так и в лемме 5.4, а следовательно, и в теореме 5.1.

Теорема об устранении сечений верна также для системы **LJ**. В самом деле, приведенное выше доказательство построено так, что оно проходит для системы **LJ** без каких-либо существенных изменений — надо лишь все время помнить, что в каждом сукцеденте может находиться не более одной формулы. Детали предоставляются читателю, а мы только сформулируем эту теорему.

Теорема 5.5. *Для системы* **LJ** *справедлива теорема об устранении сечений.*

§ 6. Некоторые следствия теоремы об устранении сечений

Теорема об устранении сечений имеет многочисленные приложения; некоторые из них мы изложим в этом параграфе в виде теорем, другие приведем в упражнениях. Чтобы облегчить изложение этих важных результатов, введем некоторые понятия, которые будут часто использоваться в дальнейшем.

Определение 6.1. (1) *Подформулой* формулы A называется всякая формула, появляющаяся в процессе построения A. Более точно, множество всех подформул некоторой формулы определяется индукцией по числу логических символов в этой формуле следующим образом. У атомарной формулы имеется ровно одна подформула, а именно сама эта формула. Подформулами формулы $\neg A$ являются все подформулы формулы A и сама формула $\neg A$. Подформулами формулы $A \wedge B$, $A \vee B$ или $A \supset B$ являются сама эта формула, все подформулы формулы A и все подформулы формулы B. Подформулами формулы $\forall x A(x)$ или $\exists x A(x)$ являются сама эта формула и все подформулы каждой формулы вида $A(t)$, где t — произвольный терм.

(2) Говорят, что две формулы A и B *эквивалентны* в **LK**, если формула $A \equiv B$ выводима в **LK**.

(3) Мы будем говорить, что в формуле A некоторое вхождение логического символа, скажем $\#$, находится *в области действия* другого вхождения логического символа, скажем $\natural$, если при построении A (из атомарных формул) этап, когда символ $\#$ был внешним, предшествовал этапу, на котором символ $\natural$ стал внешним (см. определение 1.3). Далее, мы говорим, что символ $\#$ находится *в левой области действия* связки $\supset$, если вхождение $\supset$ имеет вид $B \supset C$ и символ $\#$ входит в B.

(4) Формула A называется *предваренной* (или имеет *предваренную форму*), если ни один квантор в A не находится в области действия никакой пропозициональной связки.

Легко видеть, что всякая формула эквивалентна (в **LK**) некоторой предваренной формуле, т. е. для всякой формулы A существует предваренная формула B, такая, что формула $A \equiv B$ выводима в **LK**.

Легко видеть, что во всяком правиле вывода, кроме сечения, нижняя секвенция имеет не меньшую сложность, чем каждая из верхних; более точно, каждая формула, входящая в какую-нибудь из верхних секвенций, является подформулой некоторой формулы, входящей в нижнюю секвенцию (но, вообще говоря, не наоборот). Следовательно, всякий вывод без сечений состоит только из подформул формул, входящих в его заключительную секвенцию (*свойство подформульности*). Таким образом, теорема об устранении сечений утверждает, что если какая-то формула выводима в **LK** (или в **LJ**), то для нее найдется вывод, состоящий только из подформул этой формулы. (Именно это мы имели в виду, когда говорили, что всякая теорема исчисления предикатов может быть выведена „прямым путем“.)

Это замечание позволяет нам убедиться в том, что пустая секвенция $\rightarrow$ не выводима в **LK** (и в **LJ**), а это, в свою очередь, дает нам доказательство непротиворечивости систем **LK** и **LJ**.

Теорема 6.2 (о непротиворечивости). *Системы* **LK** *и* **LJ** *непротиворечивы.*

Доказательство. Предположим, что секвенция $\rightarrow$ выводима в **LK** (или в **LJ**). Тогда по теореме об устранении сечений эту секвенцию можно вывести в **LK** (или **LJ**) без сечений. Но это невозможно по свойству подформульности выводов без сечений.

Анализ доказательства этой теоремы (включая теорему об устранении сечений) показывает, что непротиворечивость системы **LK** (и **LJ**) доказана бескванторной индукцией по ординалу ω^2. Однако на этом этапе мы не будем детально вдаваться в проблему непротиворечивости.

Для удобства ссылок свойство подформульности выводов без сечений мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 6.3. *Все формулы, входящие в произвольный не содержащий сечений вывод в системе* **LK** (*или* **LJ**) *являются подформулами формул, входящих в заключительную секвенцию этого вывода.*

Доказательство проводится индукцией по числу применений правил в данном не содержащем сечений выводе.

В оставшейся части этого параграфа мы приведем некоторые типичные следствия теоремы об устранении сечений. Хотя часть этих результатов будет сформулирована не только для системы **LK**, но и для **LJ**, доказательства будут даны лишь для **LK**; доказательства для **LJ** предоставляются читателю.

Теорема 6.4 (1) (теорема Генцена о средней секвенции для системы **LK**). *Пусть S — некоторая выводимая в* **LK** *секвенция, состоящая только из предваренных формул. Тогда для этой секвенции существует вывод без сечений, который содержит секвенцию S' (называемую средней секвенцией), удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *все формулы в секвенции S' являются бескванторными;*

2) *выше секвенции S' расположены только применения структурных и пропозициональных правил;*

3) *ниже секвенции S' расположены только применения структурных и кванторных правил.*

Таким образом, средняя секвенция разбивает этот вывод на верхнюю часть, содержащую применения пропозициональных правил, и нижнюю, содержащую применения кванторных правил.

(2) (теорема о средней секвенции для системы **LJ** без правила $\vee$-слева). *Сформулированное в (1) утверждение справедливо также, если всюду вместо „система* **LK**“ *читать „система* **LJ** *без правила $\vee$-слева“.*

Доказательство (набросок). Из предложения 2.14 и теоремы об устранении сечений следует, что секвенция S имеет некоторый вывод без сечений P, в котором все начальные секвенции состоят только из атомарных формул. Пусть I — какое-нибудь применение кванторного правила в выводе P. Число применений пропозициональных правил, расположенных ниже применения I, назовем его порядком. Сумму порядков всех применений кванторных правил в P назовем порядком вывода P (термин „порядок“ в таком смысле используется здесь временно). Доказательство теоремы проводится индукцией по порядку вывода P.

Случай 1. Порядок вывода P равен 0. Если P содержит применения пропозициональных правил, то возьмем самое нижнее из этих применений и через S_0 обозначим его нижнюю секвенцию. Выше этой секвенции нет применений кванторных правил. Поэтому, если в секвенции S_0 или выше нее встреча-

ется какой-нибудь квантор, то он вводится ослаблением. Поскольку наш вывод не содержит сечений, ослабляющая формула является подформулой одной из формул заключительной секвенции. Следовательно, к этой формуле не применялось никакое пропозициональное правило. Таким образом, в выводе секвенции S_0 мы можем удалить все такие ослабления и получить вывод некоторой секвенции S_0', не содержащей кванторов и соответствующей секвенции S_0. Добавляя (если необходимо) к этому выводу несколько ослаблений, мы получим вывод секвенции S_0, а с ним и вывод самой секвенции S; в качестве средней секвенции возьмем секвенцию S_0'.

Если вывод P не содержит применений пропозициональных правил, то рассмотрим самое верхнее применение кванторного правила. Верхнюю секвенцию этого применения и возьмем в качестве средней.

Случай 2. Порядок вывода P не равен 0. Тогда найдется по крайней мере одно применение пропозиционального правила, находящееся ниже некоторого применения кванторного правила. Более того, существует применение кванторного правила I со следующим свойством: самым верхним среди применений логических правил, расположенных под I, является применение пропозиционального правила. Обозначим его через I'. Тогда можно уменьшить порядок вывода P, переставив в нем местами применения I и I'. Мы рассмотрим здесь только один случай, а именно когда I есть применение правила $\forall$-справа. Тогда вывод P имеет вид

$$
\begin{array}{rl}
 & \vdots \\
I & \dfrac{\Gamma \to \Theta,\ F(a)}{\Gamma \to \Theta,\ \forall x\, F(x)} \\
(*)\ \left\{ I' \right. & \dfrac{\vdots}{\Delta \to \Lambda} \\
 & \vdots\ ,
\end{array}
$$

где часть $(*)$ вывода P содержит только применения структурных правил и $\forall x F(x)$ входит в Λ в качестве секвенциальной формулы. Преобразуем P в следующий вывод P':

$$
\begin{array}{rl}
 & \Gamma \to \Theta,\ F(a) \\
 & \overline{\text{структурные правила}} \\
 & \overline{\Gamma \to F(a),\ \Theta,\ \forall x F(x)} \\
 & \vdots \\
I' & \overline{\Delta \to F(a),\ \Lambda} \\
I & \overline{\overline{\Delta \to \Lambda,\ \forall x F(x)}} \\
 & \overline{\overline{\Delta \to \Lambda}} \\
 & \vdots\ .
\end{array}
$$

Очевидно, что порядок вывода P' меньше, чем порядок вывода P.

Прежде чем перейти к следующей теореме (интерполяционной теореме Крэйга[1]), мы сформулируем и докажем некоторую лемму, которая сама по себе может рассматриваться как сильная форма интерполяционной теоремы для выводимых секвенций и из которой немедленно вытекает обычная форма интерполяционной теоремы. Мы проведем доказательство лишь для системы **LK**, хотя оно проходит и для системы **LJ**.

По техническим причинам введем новый нульместный предикатный символ $\top$ и добавим к аксиомам системы **LK** секвенцию $\to \top$. Полученную таким образом систему обозначим через **LK**#.

Лемма 6.5. *Пусть секвенция* $\Gamma \to \Delta$ *выводима в* **LK**, *и пусть* (Γ_1, Γ_2) *и* (Δ_1, Δ_2) — *произвольные разбиения последовательностей* Γ *и* Δ *соответственно (возможно, что некоторые из* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ *пусты). Эту пару разбиений мы обозначим через* $[\{\Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Gamma_2; \Delta_2\}]$ *и будем называть разбиением секвенции* $\Gamma \to \Delta$. *Тогда существует некоторая формула* C *языка системы* **LK**# *(называемая интерполянтом разбиения* $[\{\Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Gamma_2; \Delta_2\}]$), *такая, что*:

(i) *секвенции* $\Gamma_1 \to \Delta_1, C$ *и* $C, \Gamma_2 \to \Delta_2$ *выводимы в* **LK**#;

(ii) *все свободные переменные, индивидные и предикатные константы формулы* C *(кроме* $\top$) *входят как в* $\Gamma_1 \cup \Delta_1$, *так и в* $\Gamma_2 \cup \Delta_2$.

Мы сначала докажем с помощью этой леммы интерполяционную теорему, а затем докажем и саму лемму.

Теорема 6.6 (интерполяционная теорема Крэйга). (1) *Пусть даны формулы* A *и* B, *такие, что формула* $A \supset B$ *выводима в* **LK**. *Если* A *и* B *имеют по крайней мере одну общую предикатную константу, то существует формула* C, *называемая интерполянтом формулы* $A \supset B$, *такая, что в* **LK** *выводимы формулы* $A \supset C$ *и* $C \supset B$, *причем* C *содержит только те свободные переменные, индивидные и предикатные константы, которые входят и в* A, *и в* B. *Если же* A *и* B *не имеют общих предикатных констант, то в* **LK** *выводима хотя бы одна из секвенций* $A \to$ *или* $\to B$.

(2) *Утверждение* (1) *справедливо для системы* **LJ**.

Доказательство. Допустим, что формула $A \supset B$ и, следовательно, секвенция $A \to B$ выводимы в **LK** и что формулы A и B имеют хотя бы одну общую предикатную константу, скажем R. Тогда по лемме 6.5, взяв формулу A в качестве Γ_1 и формулу B в качестве Δ_1 (а Γ_2 и Δ_2 положив пустыми), получим некоторую формулу C расширенного языка, удовлетворяющую условиям (i) и (ii) этой леммы. Поэтому секвенции $A \to C$ и $C \to B$ выводимы в **LK**#. Допустим, что константа R является k-местной. Через R' обозначим формулу $\forall y_1 \ldots \forall y_k R(y_1, \ldots, y_k)$, где $y_1, \ldots, y_k$ — некоторые новые связанные переменные. Заменив в формуле C всякое вхождение константы $\top$ на $R' \supset R'$, мы получим формулу C' исходного языка, такую, что секвенции $A \to C'$ и $C' \to B$ выводимы в **LK**. Формула C' и является искомым интерполянтом формулы $A \supset B$.

Если в описанном в лемме 6.5 разбиении нет общих для $\Gamma_1 \cup \Delta_1$ и $\Gamma_2 \cup \Delta_2$ предикатных символов, то, согласно этой лемме, существует формула C, состоящая только из константы $\top$ и логических символов, такая, что секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1, C$ и $C, \Gamma_2 \to \Delta_2$ выводимы в **LK**#. Тогда индукцией по сложности формулы C легко можно показать, что либо секвенция $\to C$, либо секвенция $C \to$ является выводимой. Следовательно, выводима хотя бы одна из секвенций $\Gamma_1 \to \Delta_1$ или $\Gamma_2 \to \Delta_2$. В частности, все это показывает, что выводима секвенция $A \to B$, если в качестве Γ_1 взять формулу A, а в качестве Δ_2 — формулу B.

Это доказательство принадлежит Маехаре; особенностью его является то, что интерполянт формулы $A \supset B$ строится конструктивно по данному выводу этой формулы. Отметим также, что интерполяционную теорему можно сформулировать следующим образом: *если формула* $A \supset B$ *выводима, а формулы* $\neg A$ *и* B *не выводимы, то для* $A \supset B$ *существует интерполянт.*

Доказательство леммы 6.5. Доказательство проводится индукцией по числу k непосредственных выводов в некотором не содержащем сечений выводе секвенции $\Gamma \to \Delta$. На каждом этапе надо рассмотреть несколько случаев; мы разберем лишь некоторые из них.

1) $k = 0$. Тогда секвенция $\Gamma \to \Delta$ имеет вид $D \to D$. Возможны четыре варианта разбиения $\Gamma \to \Delta$: (1) $[\{D; D\}, \{\ ;\ \}]$, (2) $[\{\ ;\ \}, \{D; D\}]$, (3) $[\{D;\ \}, \{\ ; D\}]$ и (4) $[\{\ ; D\}, \{D;\ \}]$. В случае (1) в качестве C следует взять $\top$, в случае (2) — $\neg\top$, в случае (3) — D и в случае (4) — $\neg D$.

2) $k > 0$ и вывод завершается применением правила $\wedge$-справа:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B.}$$

[1]) Общая теория интерполяционных теорем построена в работе Motohasi N., Interpolation theorem and characterization theorem, *Ann. Japan Assoc. Philos. Sci.*, **4** (1972), 15—80.

Пусть разбиение имеет вид $[\{\Gamma_1;\ \Delta_1,\ A \wedge B\},\ \{\Gamma_2;\ \Delta_2\}]$. Рассмотрим индуцированные разбиения верхних секвенций, а именно $[\{\Gamma_1;\ \Delta_1,\ A\},\ \{\Gamma_2;\ \Delta_2\}]$ и $[\{\Gamma_1;\ \Delta_1,\ B\},\ \{\Gamma_2;\ \Delta_2\}]$ соответственно. Применяя предположение индукции к подвыводам этих верхних секвенций, получаем, что существуют интерполянты C_1 и C_2, такие, что в системе **LK#** выводимы секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1,\ A,\ C_1$; $C_1,\ \Gamma_2 \to \Delta_2$; $\Gamma_1 \to \Delta_1,\ B,\ C_2$ и $C_2,\ \Gamma_2 \to \Delta_2$. А из этих секвенций можно вывести секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1,\ A \wedge B,\ C_1 \vee C_2$ и $C_1 \vee C_2,\ \Gamma_2 \to \Delta_2$. Таким образом, искомым интерполянтом является формула $C_1 \vee C_2$.

3) $k > 0$ и вывод завершается применением правила $\forall$-слева:

$$\frac{F(s),\ \Gamma \to \Delta}{\forall x F(x),\ \Gamma \to \Delta.}$$

Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — все свободные переменные, входящие в терм s (возможно, что таких нет). Допустим, что разбиение имеет вид $[\{\forall x F(x),\ \Gamma_1;\ \Delta_1\},\ \{\Gamma_2;\ \Delta_2\}]$. Рассмотрим индуцированное разбиение верхней секвенции и применим предположение индукции. Тогда существует некоторый интерполянт $C(b_1, \ldots, b_n)$, такой, что секвенции

$$F(s),\ \Gamma_1 \to \Delta_1,\ C(b_1, \ldots, b_n) \quad \text{и} \quad C(b_1, \ldots, b_n),\ \Gamma_2 \to \Delta_2$$

выводимы в **LK#**. Пусть $b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$ — все те переменные из $b_1, \ldots, b_n$, которые не входят в $\{F(x),\ \Gamma_1;\ \Delta_1\}$. Тогда формула

$$\forall y_1 \ldots \forall y_m C(b_1, \ldots, y_1, \ldots, y_m, \ldots, b_n),$$

где $b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$ замещены соответствующими связанными переменными, является искомым интерполянтом.

4) $k > 0$ и вывод завершается применением правила $\forall$-справа:

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ F(a)}{\Gamma \to \Delta,\ \forall x F(x),}$$

где переменная a не входит в нижнюю секвенцию.

Пусть разбиение имеет вид $[\{\Gamma_1;\ \Delta_1,\ \forall x F(x)\},\ \{\Gamma_2;\ \Delta_2\}]$. По предположению индукции существует интерполянт C, такой, что выводимы секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1,\ F(a),\ C$ и $C,\ \Gamma_2 \to \Delta_2$. Поскольку a не входит в C, мы можем вывести отсюда секвенцию

$$\Gamma_1 \to \Delta_1,\ \forall x F(x),\ C;$$

следовательно, формула C является интерполянтом и для данного разбиения.

Все остальные случаи рассматриваются аналогично.

Упражнение 6.7. Пусть A и B — предваренные формулы, не содержащие никаких логических символов, кроме $\forall$ и $\wedge$. Предположим, кроме того, что A и B имеют хотя бы одну общую предикатную константу. Допустим, что формула $A \supset B$ выводима.

Показать, что существует формула C, такая, что

1) выводимы формулы $A \supset C$ и $C \supset B$;

2) формула C является предваренной;

3) C не содержит никаких логических символов, кроме $\forall$ и $\wedge$;

4) все входящие в C предикатные константы являются общими для A и B.

[*Указание*: применить теорему об устранении сечений и теорему о средней секвенции.]

Определение 6.8 (1) *Полутермами* мы будем называть выражения, построенные так же, как термы, с тем отличием, что в процессе их построения разрешается употреблять связанные переменные (точное определение предоставляется читателю). Пусть t — некоторый терм и s — полутерм. Мы будем называть s *подполутермом* терма t, если выполнены условия:

(i) в s входит некоторая связанная переменная (т. е. s не является термом);

(ii) s не является просто связанной переменной;

(iii) некоторый подтерм терма t получается из s заменой в нем всех связанных переменных на подходящие термы.

(2) *Полуформулами* будем называть выражения, построенные так же, как формулы, с тем отличием, что разрешаются свободные вхождения (т. е. вне области действия каких-либо кванторов) в них связанных переменных.

Теорема 6.9. *Пусть t — некоторый терм и S — выводимая секвенция, удовлетворяющая условию*

(*) *в S не входит никакой подполутерм терма t.*

Тогда секвенция, полученная из S замещением в ней всех вхождений t произвольной свободной переменной, также выводима.

Доказательство (набросок). Пусть P — некоторый регулярный не содержащий сечений вывод секвенции S. Заметим, что если условие (*) справедливо для нижней секвенции какого-нибудь непосредственного вывода в P, то оно справедливо и для каждой из его верхних секвенций. Поэтому теорема легко доказывается индукцией по числу непосредственных выводов в P.

Определение 6.10. Пусть $R_1, \ldots, R_m$ — некоторые предикатные константы, R и R' — различные k-местные предикатные константы ($k \geqslant 0$). Пусть $A(R, R_1, \ldots, R_m)$ — некоторое предложение, в котором все вхождения $R, R_1, \ldots, R_m$ отмечены.

Через B обозначим предложение $\forall x_1 \ldots \forall x_k (R(x_1, \ldots, x_k) \equiv R'(x_1, \ldots, x_k))$, причем строка кванторов при $k=0$ пуста, а через C — предложение $A(R, R_1, \ldots, R_m) \wedge A(R', R_1, \ldots, R_m)$. Мы говорим, что предложение $A(R, R_1, \ldots, R_m)$ *неявно определяет* R (в **LK**) *через* $R_1, \ldots, R_m$, если предложение $C \supset B$ выводимо в **LK**. Будем говорить, что предложение $A(R, R_1, \ldots, R_m)$ *явно определяет* R (в **LK**) *через* $R_1, \ldots, R_m$ *и индивидные константы, входящие в* $A(R, R_1, \ldots, R_m)$, если существует формула $F(a_1, \ldots, a_k)$, не содержащая никаких предикатных констант, отличных от $R_1, \ldots, R_m$, и никаких индивидных констант, кроме тех, что входят в $A(R, R_1, \ldots, R_m)$, такая, что в **LK** выводима секвенция

$$A(R, R_1, \ldots, R_m) \to \forall x_1 \ldots \forall x_k (R(x_1, \ldots, x_k) \equiv F(x_1, \ldots, x_k)).$$

Предложение 6.11 (теорема Бета об определимости для системы **LK**). *Если предикатная константа R неявно определяется предложением $A(R, R_1, \ldots, R_m)$ через $R_1, \ldots, R_m$, то R может быть явно определена через $R_1, \ldots, R_m$ и индивидные константы, входящие в $A(R, R_1, \ldots, R_m)$.*

Доказательство (набросок). Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — свободные переменные, не входящие в A. Тогда в **LK** выводима секвенция

$$A(R, R_1, \ldots, R_m), A(R', R_1, \ldots, R_m) \to \\ \to R(c_1, \ldots, c_n) \equiv R'(c_1, \ldots, c_n),$$

а следовательно, и секвенция

$$A(R, R_1, \ldots, R_m) \wedge R(c_1, \ldots, c_n) \to \\ \to A(R', R_1, \ldots, R_m) \supset R'(c_1, \ldots, c_n).$$

Применим теперь к последней секвенции интерполяционную теорему Крэйга (т. е. утверждение (1) теоремы 6.6).

Теперь мы приведем один из вариантов теоремы Робинсона (для системы **LK**).

Предложение 6.12 (Робинсон). *Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — две непротиворечивые системы аксиом в языке, не содержащем функциональных констант. Допустим далее, что ни для какого зависящего от $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ предложения A невозможно, чтобы в **LK** были выводимы $\mathcal{A}_1 \to A$ и $\mathcal{A}_2 \to \neg A$ (или $\mathcal{A}_1 \to \neg A$ и $\mathcal{A}_2 \to A$).*

Тогда система аксиом $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ непротиворечива. (*Определение см. в п.* 4.1.)

Доказательство (набросок). Допустим, что система аксиом $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ противоречива. Тогда найдутся последовательности аксиом Γ_1 и Γ_2 из $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно, такие, что в **LK** выводима секвенция $\Gamma_1, \Gamma_2 \to$. Поскольку каждая из систем $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ непротиворечива, то Γ_1 и Γ_2 непусты. Применим теперь лемму 6.5 к разбиению $[\{\Gamma_1;\ \}, \{\Gamma_2;\ \}]$.

Пусть **LK′** и **LJ′** обозначают бескванторные фрагменты систем **LK** и **LJ** соответственно, т. е. секвенциальные варианты классического и интуиционистского исчислений высказываний соответственно.

Теорема 6.13. *Для систем* **LK′** *и* **LJ′** *существуют разрешающие процедуры.*

Доказательство (набросок). Приводимая ниже разрешающая процедура была предложена Генценом. Секвенцию S назовем *редуцированной*, если никакая формула не повторяется более трех раз ни в сукцеденте, ни в антецеденте этой секвенции. Секвенция S' называется *редуктом* секвенции S, если S' редуцированна и получена из S удалением „лишних" вхождений некоторых формул. Пусть S — некоторая секвенция и S' — какой-нибудь ее редукт. Сначала отметим следующие факты.

1) Секвенция S выводима тогда и только тогда, когда секвенция S' имеет вывод, состоящий лишь из редуцированных секвенций.

2) Число всех редуцированных секвенций, составленных только из подформул формул секвенции S, конечно.

Рассмотрим конечную совокупность всех секвенций, указанных в п. 2). Обозначим ее через $\mathcal{S}$. Выделим в этой совокупности все начальные секвенции и обозначим полученное множество через $\mathcal{S}_0$. Затем проверим, содержатся ли в множестве $\mathcal{S} - \mathcal{S}_0$ какие-нибудь секвенции, которые можно получить применением того или иного правила вывода к секвенциям из $\mathcal{S}_0$. Обозначим через $\mathcal{S}_1$ множество всех секвенций, удовлетворяющих этому условию. Теперь посмотрим, содержатся ли во множестве $(\mathcal{S} - \mathcal{S}_0) - \mathcal{S}_1$ какие-нибудь секвенции, которые можно получить применением одного из правил вывода к секвенциям из $\mathcal{S} - \mathcal{S}_0$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока он не стабилизируется, т. е. пока мы не перестанем получать новые выводимые секвенции. Если секвенция S' попала в одно из построенных множеств $\mathcal{S}_i$, то эта секвенция, а с нею и S выводима. В противном случае секвенция S не выводима.

(Заметим, что это доказательство целиком является финитным.)

Теорема 6.14 (Харроп). (1) *Если* Γ — *некоторая конечная последовательность формул, удовлетворяющих условию*

(*) *всякое вхождение символа* $\vee$ *или* $\exists$ *находится либо в области действия какого-нибудь вхождения* $\neg$, *либо в левой области действия какого-нибудь вхождения* $\supset$ (*см. определение* 6.1, *п.*3)),

то верны следующие два утверждения:

1) *секвенция* $\Gamma \to A \vee B$ *выводима в* **LJ** *тогда и только тогда, когда в* **LJ** *выводима секвенция* $\Gamma \to A$ *или секвенция* $\Gamma \to B$;

2) *секвенция* $\Gamma \to \exists x F(x)$ *выводима в* **LJ** *тогда и только тогда, когда для некоторого терма* s *в* **LJ** *выводима секвенция* $\Gamma \to F(s)$.

(2) *Следующие* (*выводимые в* **LK**) *секвенции, вообще говоря, не выводимы в* **LJ**:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to A \vee B; \qquad \neg \forall x \neg F(x) \to \exists x F(x);$$
$$A \supset B \to \neg A \vee B; \qquad \neg \forall x F(x) \to \exists x \neg F(x);$$
$$\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B.$$

Доказательство. Докажем пункт 1) утверждения (1). Часть „тогда" этого утверждения тривиальна. Для доказательства второй части рассмотрим какой-нибудь не содержащий сечений вывод секвенции $\Gamma \to A \vee B$ и применим индукцию по числу применений правил вывода в данном выводе. Если последним применяется правило $\vee$-справа, то доказывать нечего. Заметим, что последними не могли применяться правила $\wedge$-справа, $\supset$-справа, $\forall$-справа, $\vee$-слева, а также правила $\neg$-справа, $\neg$-слева, $\exists$-справа и $\exists$-слева.

Случай 1: последним применяется правило $\wedge$-слева:

$$\frac{C, \Gamma \to A \vee B}{C \wedge D, \Gamma \to A \vee B.}$$

Очевидно, что формула C удовлетворяет условию (*). Тогда к верхней секвенции применимо предположение индукции; следовательно, в **LJ** выводима секвенция $C, \Gamma \to A$ или секвенция $C, \Gamma \to B$. В каждом из этих случаев в **LJ** можно вывести соответствующую заключительную секвенцию.

Случай 2: последним применяется правило $\supset$-слева:

$$\frac{\Gamma \to C \qquad D, \Pi \to A \vee B}{C \supset D, \Gamma, \Pi \to A \vee B.}$$

Очевидно, что формула D удовлетворяет условию (*); тогда, применяя к правой верхней секвенции предположение индукции, получаем, что в **LJ** выводима секвенция $D, \Pi \to A$ или секвенция $D, \Pi \to B$. В каждом из этих случаев можно вывести соответствующую заключительную секвенцию.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Доказательства п. 2) утверждения (1) и утверждения (2) предоставляются читателю.

§ 7. Исчисление предикатов с равенством

Определение 7.1. Исчисление предикатов с равенством (обозначаемое через $\mathbf{LK_e}$) получается из исчисления **LK** выделением некоторой двуместной предикатной константы $=$ (читается „равно") и добавлением следующих секвенций в качестве начальных ($=(a, b)$ обозначается через $a = b$):

$$\to s = s;$$
$$s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n \to f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

для всякой n-местной функциональной константы f при $n = 1, 2, \ldots$;

$$s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, R(s_1, \ldots, s_n) \to R(t_1, \ldots, t_n)$$

для всякой n-местной предикатной константы R (включая и $=$) при $n = 1, 2, \ldots$; здесь $s, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ — произвольные термы.

Каждая такая секвенция называется *аксиомой равенства* системы $\mathbf{LK_e}$.

Предложение 7.2. *Пусть* $A(a_1, \ldots, a_n)$ — *произвольная формула. Тогда секвенция*

$$s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, A(s_1, \ldots, s_n) \to A(t_1, \ldots, t_n)$$

выводима в $\mathbf{LK_e}$ *для любых термов* s_i, t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Кроме того, в* $\mathbf{LK_e}$ *выводимы секвенции* $s = t \to t = s$ *и* $s_1 = s_2, s_2 = s_3 \to s_1 = s_3$.

Определение 7.3. Пусть Γ_e — система аксиом, состоящая из следующих предложений:

$$\forall x (x = x);$$
$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n [x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \supset f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)]$$

для всякой n-местной функциональной константы f при $n = 1, 2, \ldots$;

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n [x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge R(x_1, \ldots, x_n) \supset R(y_1, \ldots, y_n)]$$

для всякой n-местной предикатной константы R при $n = 1, 2, \ldots$. Каждое из этих предложений называется аксиомой равенства.

Предложение 7.4. *Секвенция* $\Gamma \to \Delta$ *выводима в* $\mathbf{LK}_e$ *тогда и только тогда, когда эта секвенция выводима в* $\mathbf{LK}$ *из* Γ_e.

Доказательство. Необходимость: легко видеть, что все начальные секвенции системы $\mathbf{LK}_e$ выводимы из Γ_e; поэтому предложение доказывается индукцией по числу применений правил в некотором выводе секвенции $\Gamma \to \Delta$.

Достаточность: все формулы системы Γ_e выводимы в $\mathbf{LK}_e$.

Определение 7.5. Применение правила сечения называется *несущественным*, если его высекаемая формула имеет вид $s = t$. В противном случае оно называется *существенным*.

Теорема 7.6 (теорема об устранении сечений для исчисления предикатов с равенством $\mathbf{LK}_e$). *Если какая-то секвенция системы* $\mathbf{LK}_e$ *выводима в* $\mathbf{LK}_e$, *то она имеет в* $\mathbf{LK}_e$ *вывод, не содержащий существенных сечений.*

Доказательство. Будем устранять существенные сечения (на самом деле существенные смешения), следуя методу, использованному в доказательстве теоремы 5.1.

Если ранг вывода равен 2, секвенция S_2 представляет собой аксиому равенства и высекаемая формула не есть формула вида $s = t$, то она имеет вид $P(t_1, \ldots, t_n)$. Если секвенция S_1 — тоже аксиома равенства, то она имеет вид

$$s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, P(s_1, \ldots, s_n) \to P(t_1, \ldots, t_n).$$

Из нее и из секвенции S_2, имеющей вид

$$t_1 = r_1, \ldots, t_n = r_n, P(t_1, \ldots, t_n) \to P(r_1, \ldots, r_n),$$

мы получаем с помощью смешения секвенцию

$$s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, t_1 = r_1, \ldots, t_n = r_n, P(s_1, \ldots, s_n) \to \\ \to P(r_1, \ldots, r_n).$$

Заменим эту часть вывода следующим выводом:

$$s_i = t_i, t_i = r_i \to s_i = r_i \quad (i = 1, \ldots, n);$$
$$s_1 = r_1, \ldots, s_n = r_n, P(s_1, \ldots, s_n) \to P(r_1, \ldots, r_n)$$

и затем применим к этим секвенциям несколько раз правило сечения с высекаемой формулой $s_i = r_i$, пока не получим ту же заключительную секвенцию. Все примененные здесь сечения (или смешения) являются несущественными.

Если $P(t_1, \ldots, t_n)$ в секвенции S_2 является ослабляющей формулой, то смешение имеет вид

$$\frac{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, P(s_1, \ldots, s_n) \to P(t_1, \ldots, t_n) \quad P(t_1, \ldots, t_n), \Pi \to \Lambda}{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n, P(s_1, \ldots, s_n), \Pi \to \Lambda.}$$

Преобразуем его следующим образом:

$$\frac{\Pi \to \Lambda}{\text{заключительная секвенция.}}$$

Остальная часть доказательства проводится так же, как и в теореме 5.1.

Задача 7.7. Секвенцию вида

$$s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n \to s = t \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

назовем простой, если она может быть получена применением правил перестановки, сокращения, сечения и ослабления слева из секвенций следующих четырех видов:

1) $\to s = s$;
2) $s = t \to t = s$;
3) $s_1 = s_2, s_2 = s_3 \to s_1 = s_3$;
4) $s_1 = t_1, \ldots, s_m = t_m \to f(s_1, \ldots, s_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$.

Доказать, что если секвенция $s_1 = s_1, \ldots, s_m = s_m \to s = t$ проста, то $s = t$ имеет вид $s = s$. В частности, если секвенция $\to s = t$ проста, то она имеет вид $\to s = s$.

Обозначим через $\mathbf{LK}'_e$ систему, получающуюся из $\mathbf{LK}$ добавлением следующих секвенций в качестве начальных:

а) все простые секвенции;
б) все секвенции вида

$$s_1 = t_1, \ldots, s_m = t_m, R(s'_1, \ldots, s'_n) \to R(t'_1, \ldots, t'_n),$$

где для всякого i ($i = 1, \ldots, n$) секвенция $s_1 = t_1, \ldots, s_m = t_m \to s'_i = t'_i$ является простой.

Доказать сначала, что класс всех начальных секвенций системы $\mathbf{LK}'_e$ замкнут относительно сечений и что если секвенция

$$R(s_1, \ldots, s_n) \to R(t_1, \ldots, t_n)$$

является начальной в системе $\mathbf{LK}'_e$ (где R не имеет вида $=$), то эта секвенция имеет вид $D \to D$. Затем доказать, что для системы $\mathbf{LK}'_e$ справедлива теорема об устранении сечений (всех, в том числе и несущественных).

Задача 7.8. Показать, что если некоторая секвенция, не содержащая символа $=$, выводима в $\mathbf{LK}_e$, то она выводима и в $\mathbf{LK}$.

Задача 7.9. Доказать, что для системы $\mathbf{LK}_e$ справедливы теоремы 6.2—6.4, 6.6 и 6.14, предложения 6.11 и 6.12 и упражнение 6.7, если их формулировки видоизменить следующим образом: всюду вместо $\mathbf{LK}$ (или $\mathbf{LJ}$) подставить $\mathbf{LK}_e$ и, кроме того, если требуется, чтобы та или иная формула содержала только некоторые константы, то константу $=$ следует добавить к ним как исключение.

Общая идея доказательства такова. Всякое условие о выводимости в $\mathbf{LK}_e$ той или иной секвенции $\Gamma \to \Delta$ следует заменить на условие выводимости в $\mathbf{LK}$ секвенции $\Pi, \Gamma \to \Delta$, где Π — некоторая последовательность аксиом равенства. Таким образом, задача сводится к аналогичной задаче для системы $\mathbf{LK}$.

§ 8. Теорема о полноте

Хотя мы не собираемся развивать в настоящей книге теорию моделей, наметим в общих чертах доказательство теоремы о полноте для системы $\mathbf{LK}$. Впервые теорему о полноте для исчисления предикатов первого порядка доказал Гёдель. Здесь мы следуем методу Шютте; этот метод имеет тесную связь с теоремой об устранении сечений. На самом деле теорема об устранении сечений является следствием теоремы о полноте в том виде, как она сформулирована ниже. (Значение приведенного в § 5 доказательства теоремы об устранении сечений состоит в том, что оно имеет конструктивный характер.)

Определение 8.1. (1) Пусть L — некоторый язык в смысле § 1. Под *структурой* для языка L (L-структурой) мы понимаем пару $\langle D, \phi\rangle$, где D — некоторое непустое множество и ϕ — некоторое отображение, определенное на множестве констант языка L и удовлетворяющее условиям:

(i) если k — индивидная константа, то ϕk — элемент множества D;

(ii) если f — какая-либо n-местная функциональная константа, то ϕf — отображение из D^n в D;

(iii) если R — какая-либо n-местная предикатная константа, то ϕR — некоторое подмножество множества D^n.

(2) *Интерпретацией* $\mathfrak{J}$ языка L называется структура $\langle D, \phi\rangle$ вместе с отображением ϕ_0 множества всех переменных языка L в D, $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$. Отображение ϕ_0 называется *оценкой* на D.

(3) Мы говорим, что интерпретация $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$ *выполняет* формулу A, если это вытекает из следующего индуктивного определения. В действительности мы определим это понятие для полуформул A (см. определение 6.8).

0) Определим сначала для всякого полутерма t значение ϕt. Положим $\phi a = \phi_0 a$ и $\phi x = \phi_0 x$ для всех свободных переменных a и связанных переменных x. Затем, если f — некоторая n-местная функциональная константа и $t_1, \ldots, t_n$ — полутермы, для которых значения ϕt_i уже определены ($i = 1, \ldots, n$), то определим $\phi f(t_1, \ldots, t_n)$ как $(\phi f)(\phi t_1, \ldots, \phi t_n)$.

1) Если R — некоторая n-местная предикатная константа и $t_1, \ldots, t_n$ — полутермы, то интерпретация $\mathfrak{J}$ выполняет $R(t_1, \ldots, t_n)$, если $\langle \phi t_1, \ldots, \phi t_n\rangle \in \phi R$.

2) Интерпретация $\mathfrak{J}$ выполняет $\neg A$, если она не выполняет A; интерпретация $\mathfrak{J}$ выполняет $A \wedge B$, если она выполняет A и B; интерпретация $\mathfrak{J}$ выполняет $A \vee B$, если она выполняет A или B; интерпретация $\mathfrak{J}$ выполняет $A \supset B$, если она не выполняет A или выполняет B.

3) Интерпретация $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$ выполняет $\forall x B$, если для всякой оценки ϕ_0', совпадающей с ϕ_0 на всех переменных, кроме, быть может, x, интерпретация $(\langle D, \phi\rangle, \phi_0')$ выполняет B; интерпретация $\mathfrak{J}$ выполняет $\exists x B$, если для некоторой оценки ϕ_0', совпадающей с ϕ_0 на всех переменных, кроме, быть может, x, интерпретация $(\langle D, \phi\rangle, \phi_0')$ выполняет B.

Если интерпретация $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$ выполняет формулу A, то мы говорим, что формула A *выполняется в структуре* $\langle D, \phi\rangle$ *при оценке* ϕ_0 или просто что A выполняется в $\mathfrak{J}$.

(4) Формула называется *истинной* в структуре $\langle D, \phi\rangle$, если для всякой оценки ϕ_0 интерпретация $(\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$ выполняет эту формулу. Формула называется *общезначимой*, если она истинна в каждой структуре.

(5) Секвенция $\Gamma \to \Delta$ *выполняется в структуре* $\langle D, \phi\rangle$ *при оценке* ϕ_0 (или интерпретация $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$ *выполняет* секвенцию $\Gamma \to \Delta$), если некоторая формула из Γ не выполняется в $\mathfrak{J}$ или некоторая формула из Δ выполняется в $\mathfrak{J}$. Секвенция называется *общезначимой*, если она выполняется в каждой интерпретации.

(6) Структуры можно обозначать следующим образом:

$$\langle D;\ \phi k_0, \phi k_1, \ldots, \phi f_0, \phi f_1, \ldots, \phi R_0, \phi R_1, \ldots\rangle.$$

Структура называется *моделью* системы аксиом Γ, если всякое предложение из Γ истинно в ней. Структура называется *контрмоделью* для Γ, если найдется предложение из Γ, которое в ней не истинно.

Теорема 8.2 (полнота и корректность). *Для того чтобы формула была выводима в* $\mathbf{LK}$, *необходимо и достаточно, чтобы она была общезначима.*

Замечание. (1) Достаточность этого условия представляет собой утверждение о полноте системы $\mathbf{LK}$. Вообще система называется *полной*, если всякая общезначимая формула выводима в этой системе (свойство полноты зависит от того, как определяется общезначимость).

Корректность системы означает, что все выводимые в ней секвенции являются общезначимыми (т. е. это утверждение о необходимости приведенного в теореме условия). Корректность системы гарантирует ее непротиворечивость.

(2) Данная теорема осуществляет связь теории доказательств с семантикой, где под семантикой, грубо говоря, понимается изучение интерпретаций формул в структурах (языка) и, следовательно, изучение их истинности или ложности.

Доказательство теоремы 8.2. Корректность легко доказывается индукцией по сложности вывода данной формулы. Полноту мы докажем в следующей обобщенной форме:

Лемма 8.3. *Пусть S — некоторая секвенция. Тогда либо существует не содержащий сечений вывод этой секвенции, либо существует интерпретация, которая не выполняет секвенцию S (и, таким образом, секвенция S не общезначима).*

Доказательство. Для каждой секвенции S мы определим некоторое (возможно, бесконечное) дерево, называемое редукционным деревом для S. Из такого дерева мы сможем получить либо вывод без сечений секвенции S, либо интерпретацию, в которой секвенция S не выполняется. (Эта идея принадлежит Шютте.) В каждом узле этого дерева находится некоторая секвенция. Строится оно следующим образом.

Этап 0. Запишем секвенцию S в корне дерева.

Этап k ($k > 0$). Возможны два случая.

Случай I. В каждом из верхних узлов дерева антецедент и сукцедент расположенной там секвенции имеют некоторую общую формулу. Тогда процесс построения на этом заканчивается.

Случай II. Случай I не имеет места. Тогда дальнейшие построения на этом этапе зависят от того, какое из следующих 13 сравнений имеет место:

$$k \equiv 0, \quad k \equiv 1, \ \ldots, \ k \equiv 11, \quad k \equiv 12 \pmod{13}.$$

Случаи $k \equiv 0$ и $k \equiv 1$ относятся к связке $\neg$; $k \equiv 2$ и $k \equiv 3$ — к связке $\wedge$; $k \equiv 4$ и $k \equiv 5$ — к связке $\vee$; $k \equiv 6$ и $k \equiv 7$ — к связке $\supset$; $k \equiv 8$ и $k \equiv 9$ — к квантору $\forall$, и, наконец, случаи $k \equiv 10$ и $k \equiv 11$ относятся к квантору $\exists$.

Поскольку применение редукционных деревьев является общепринятым методом и они неоднократно будут использоваться в настоящей книге, мы детально опишем указанные выше этапы так называемого редукционного процесса. Для простоты рассуждений предположим, что язык не содержит индивидных и функциональных констант.

Все свободные переменные, которые входят в какие-нибудь секвенции, полученные на этапе k или ранее, мы будем называть *доступными на этапе k*. Если же на каком-то этапе таких переменных нет, возьмем любую свободную переменную и объявим ее доступной.

0) $k \equiv 0$. Пусть $\Pi \to \Lambda$ — произвольная секвенция, расположенная в одном из верхних узлов дерева, построенного на этапе $k-1$. Пусть $\neg A_1, \ldots, \neg A_n$ — все формулы из Π, имеющие вид $\neg A$, к которым на предыдущих этапах не применялась ни одна из редукций. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем секвенцию

$$\Pi \to \Lambda, A_1, \ldots, A_n.$$

Мы будем говорить, что к формулам $\neg A_1, \ldots, \neg A_n$ применена редукция $\neg$-слева.

1) $k \equiv 1$. Пусть $\neg A_1, \ldots, \neg A_n$ — все формулы из Λ, имеющие вид $\neg A$, к которым до сих пор не применялась ни одна из редукций. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем секвенцию

$$A_1, \ldots, A_n, \Pi \to \Lambda.$$

Мы будем говорить, что к формулам $\neg A_1, \ldots, \neg A_n$ применена редукция $\neg$-справа.

2) $k \equiv 2$. Пусть $A_1 \wedge B_1, \ldots, A_n \wedge B_n$ — все формулы из Π, имеющие вид $A \wedge B$, к которым еще не применялись редукции. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем секвенцию

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n, \Pi \to \Lambda.$$

Мы будем говорить, что к формулам

$$A_1 \wedge B_1, \ldots, A_n \wedge B_n$$

применена редукция $\wedge$-слева.

3) $k \equiv 3$. Пусть $A_1 \wedge B_1, \ldots, A_n \wedge B_n$ — все формулы из Λ, имеющие вид $A \wedge B$, к которым еще не применялись редукции. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем все секвенции вида

$$\Pi \to \Lambda, C_1, \ldots, C_n,$$

где C_i есть либо A_i, либо B_i. Таким образом, непосредственно над $\Pi \to \Lambda$ находятся 2^n секвенций, соответствующих всем комбинациям формул C_i. Мы будем говорить, что к формулам $A_1 \wedge B_1, \ldots. A_n \wedge B_n$ применена редукция $\wedge$-справа.

4) $k \equiv 4$. Редукция $\vee$-слева определяется симметрично редукции $\wedge$-справа в 3).

5) $k \equiv 5$. Редукция $\vee$-справа определяется симметрично редукции $\wedge$-слева в 2).

6) $k \equiv 6$. Пусть $A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n$ — все формулы из Π, имеющие вид $A \supset B$, к которым еще не применялись редукции.

Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем все секвенции вида

$$B_{i_1}, \ldots, B_{i_l}, \Pi \to \Lambda, A_{j_1}, \ldots, A_{j_k},$$

где $(i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k)$ — произвольная перестановка множества $(1, \ldots, n)$. Мы будем говорить, что к формулам $A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n$ применена редукция $\supset$-слева.

7) $k \equiv 7$. Пусть $A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n$ — все формулы из Λ, имеющие вид $A \supset B$, к которым еще не применялись редукции. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем секвенцию

$$A_1, \ldots, A_n, \Pi \to \Lambda, B_1, \ldots, B_n.$$

Мы будем говорить, что к формулам

$$A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n$$

применена редукция $\supset$-справа.

8) $k \equiv 8$. Пусть $\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_n A_n(x_n)$ — все формулы из Π, начинающиеся с квантора $\forall$. Пусть a_i — первая доступная на этом этапе свободная переменная, которая не использовалась в редукциях формул $\forall x_i A_i(x_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ напишем секвенцию

$$A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n), \Pi \to \Lambda.$$

Мы будем говорить, что к формулам

$$\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_n A_n(x_n)$$

применена редукция $\forall$-слева.

9) $k \equiv 9$. Пусть $\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_n A_n(x_n)$ — все формулы из Λ, начинающиеся с квантора $\forall$, к которым до сих пор не применялись редукции. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — первые n свободных переменных (в фиксированном списке переменных), которые *не* доступны на этом этапе. Тогда над $\Pi \to \Lambda$ запишем секвенцию

$$\Pi \to \Lambda, A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n).$$

Мы будем говорить, что к формулам $\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_n A_n(x_n)$ применена редукция $\forall$-справа. Отметим, что $a_1, \ldots, a_n$ — новые доступные свободные переменные.

10) $k \equiv 10$. Редукция $\exists$-слева определяется симметрично редукции $\forall$-справа в 9).

11) $k \equiv 11$. Редукция $\exists$-справа определяется симметрично редукции $\forall$-слева в 8).

12) Если Π и Λ имеют общую формулу, то над секвенцией $\Pi \to \Lambda$ мы ничего не пишем (и поэтому эта секвенция остается в верхнем узле дерева). Если же Π и Λ не имеют общих формул, то над $\Pi \to \Lambda$ напишем саму эту секвенцию.

Совокупность всех тех секвенций, которые получаются описанным выше редукционным процессом вместе с частичным порядком, возникающим в ходе этого процесса, называется *редукционным деревом* (для секвенции S). Это дерево обозначается через $T(S)$. Мы будем строить „редукционные деревья“, подобные этому, и в дальнейшем. Назовем *ветвью* произвольную (конечную или бесконечную) последовательность $S_0, S_1, S_2, \ldots$ секвенций дерева $T(S)$, удовлетворяющую следующим условиям: (i) $S_0 = S$; (ii) секвенция S_{i+1} расположена в $T(S)$ непосредственно над S_i; (iii) если эта последовательность конечна, скажем $S_1, \ldots, S_n$, то секвенция S_n имеет вид $\Pi \to \Lambda$, где Π и Λ содержат некоторую общую формулу.

Пусть теперь дана секвенция S и $T = T(S)$ — ее редукционное дерево. Если всякая ветвь дерева T заканчивается секвенцией, антецедент и сукцедент которой содержат некоторую общую для них формулу, то, подходящим образом видоизменяя T, в принципе нетрудно выписать вывод без сечений, оканчивающийся секвенцией S.

В противном случае существует некоторая бесконечная ветвь. Рассмотрим какую-нибудь бесконечную ветвь, состоящую из секвенций $S = S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$. Пусть секвенция S_i имеет вид $\Gamma_i \to \Delta_i$. Через $\bigcup \Gamma$ обозначим множество всех формул, встречающихся хотя бы в одном антецеденте Γ_i при некотором i, а через $\bigcup \Delta$ — множество всех формул, входящих хотя бы в один сукцедент Δ_j при некотором j. Мы построим интерпретацию, в которой выполняется всякая формула из $\bigcup \Gamma$ и не выполняется ни одна формула из $\bigcup \Delta$, а потому не выполняется и секвенция S.

Сначала заметим, что из способа выбора этой ветви следует, что множества $\bigcup \Gamma$ и $\bigcup \Delta$ не имеют общих атомарных формул. Пусть D — множество всех свободных переменных. Рассмотрим интерпретацию $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi \rangle, \phi_0)$, где ϕ и ϕ_0 определяются следующим образом: $\phi_0(a) = a$ для всякой свободной переменной a, для всякой связанной переменной x $\phi_0(x)$ определяется произвольным образом. Для всякой n-местной предикатной константы R значением ϕR является любое подмножество D^n, такое, что если $R(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcup \Gamma$, то $(a_1, \ldots, a_n) \in \phi R$, и если $R(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcup \Delta$, то $(a_1, \ldots, a_n) \notin \phi R$.

Мы утверждаем, что эта интерпретация $\mathfrak{J}$ обладает требуемыми свойствами: в ней выполняется всякая формула из $\bigcup \Gamma$, но не выполняется ни одна формула из $\bigcup \Delta$. Докажем это индукцией по числу логических символов в формуле A. Мы рассмотрим здесь шаг индукции лишь для случая, когда формула A имеет вид $\forall x F(x)$.

Подслучай 1: формула A принадлежит $\bigcup \Gamma$. Пусть i — наименьший такой номер, что A находится в Γ_i. Тогда A принадлежит Γ_j для всякого $j > i$. Надо показать, что все формулы вида $F(a)$ для $a \in D$ выполняются в интерпретации $\mathfrak{J}$, а для этого в силу предположения индукции достаточно показать, что все они принадлежат $\bigcup\Gamma$. Но это, очевидно, вытекает из способа построения редукционного дерева.

Подслучай 2: формула A принадлежит $\bigcup\Delta$. Рассмотрим тот этап, на котором в формуле A применялась редукция $\forall$-справа. Он выглядит так:

$$\frac{\Gamma_{i+1} \to \Delta^1_{i+1},\ F(a),\ \Delta^2_{i+1}}{\Gamma_i \to \Delta^1_i,\ A,\ \Delta^2_i}.$$

Тогда по предположению индукции в интерпретации $\mathfrak{J}$ не выполняется формула $F(a)$; следовательно, в ней не выполняется и формула A. Теорема доказана.

Задача 8.4 (Скотт). Рассмотрим язык, содержащий только конечное число предикатных констант $R_1, \ldots, R_k$ и не содержащий ни индивидных, ни функциональных констант. Обозначим его через $\mathrm{L}(R_1, \ldots, R_k)$. Если $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, то *$I$-формулой* назовем всякую формулу, содержащую предикатные константы лишь с индексами из I. Пусть F — некоторое множество подмножеств множества $\{1, \ldots, k\}$ и $\mathrm{F} \neq \varnothing$. Под *$\mathrm{F}$-формулой* понимается всякая пропозициональная комбинация I-формул для I из F, т. е. формула, составленная из I-формул для всевозможных I из F с помощью связок $\vee$ и $\wedge$. Если $\mathfrak{A} = \langle A, \bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_k\rangle$ — некоторая структура для нашего языка и $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$, то через $\mathfrak{A}_I$ обозначим структуру, полученную из $\mathfrak{A}$ ограничением ее предикатными константами с индексами из I, т. е. $\mathfrak{A}_I$ есть $\langle A, \bar{R}_{i_1}, \ldots, \bar{R}_{i_m}\rangle$. Структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ языка $\mathrm{L}(R_1, \ldots, R_m)$ называются F-изоморфными, если для всякого I из F структуры $\mathfrak{A}_I$ и $\mathfrak{B}_I$ изоморфны.

Доказать следующую интерполяционную теорему, касающуюся F-изоморфных моделей.

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая теория (система аксиом) в языке $\mathrm{L}(R_1, \ldots, R_k)$, а A и B — два предложения этого языка. Допустим, что всякий раз, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — какие-то две F-изоморфные модели теории $\mathcal{T}$ и в $\mathfrak{A}$ выполняется A, то в $\mathfrak{B}$ выполняется B. Тогда найдется некоторое F-предложение C, такое, что в **LK** выводимы $\mathcal{T}, A \to C$ и $\mathcal{T}, C \to B$.

[*Указание*: (1) Сначала для всякого $i = 1, \ldots, k$ добавим к языку новую предикатную константу S_i, имеющую такое же число аргументов, что и R_i. Если A — какое-то выражение языка $\mathrm{L}(R_1, \ldots, R_k)$, то пусть A^* обозначает выражение, получающееся из A заменой в нем всех вхождений R_i на S_i для всех $i = 1, \ldots, k$.

(2) Для всякого I из F добавим к языку новые функциональные константы f_I и g_I. Константа f_I будет представлять некоторый изоморфизм между $\mathfrak{A}_I$ и $\mathfrak{B}_I$, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две F-изоморфные структуры, а g_I — обратный к f_I изоморфизм.

(3) Рассмотрим язык $\mathrm{L}' = \mathrm{L}(R_1, \ldots, R_k, S_1, \ldots, S_k, f_I, g_I \mid I \in \mathrm{F})$, в котором понятие „$\mathrm{F}$-изоморфизма между двумя структурами" выразимо синтаксически. Пусть $\cong_{\mathrm{F}}$ — предложение, выражающее F-изоморфизм.

(4) При наличии понятия F-изоморфизма, выраженного синтаксически, решение задачи сводится к доказательству следующей леммы.]

Лемма 8.5. *Пусть Φ_1, Ψ_1 — некоторые конечные (возможно, пустые) последовательности формул языка $\mathrm{L}(R_1, \ldots, R_k, f_I, g_I \mid I \in \mathrm{F})$, в которых никакая функциональная константа не содержит связанных переменных.*

Аналогично, пусть Φ_2^*, Ψ_2^* — некоторые конечные (возможно, пустые) последовательности формул языка $\mathrm{L}(S_1, \ldots, S_k, f_I, g_I \mid I \in \mathrm{F})$, в которых никакая функциональная константа не содержит связанных переменных.

Пусть далее Φ_3 — некоторая конечная (возможно, пустая) последовательность подформул формулы $\cong_{\mathrm{F}}$. Предположим, что выводима секвенция $\Phi_1, \Phi_2^*, \Phi_3 \to \Psi_1, \Psi_2^*$.

Тогда найдутся некоторая F-формула Σ языка $\mathrm{L}(R_1, \ldots, R_k, f_I, g_I \mid I \in \mathrm{F})$ и некоторая F-формула Σ^* языка $\mathrm{L}(S_1, \ldots, S_k, f_I, g_I \mid I \in \mathrm{F})$, такие, что выводимы секвенции $\Phi_1 \to \Psi_1, \Sigma$ и $\Sigma^*, \Phi_2^* \to \Psi_2^*$ и, кроме того,

1) *никакая функциональная константа ни в Σ, ни в Σ^* не содержит связанных переменных;*

2) *всякая свободная переменная формулы Σ или Σ^* должна встречаться среди свободных переменных каждой из формул Φ_1, Φ_2^*, Ψ_1 и Ψ_2^*;*

3) *формула Σ^* получается из формулы Σ заменой всякой предикатной константы R_i на S_i и всякого терма t на t^*, где либо*

(a) *терм t^* есть $f_I(t)$ и t^* есть аргумент некоторого предиката S_k при $k \in I$,*
либо

(b) *терм t есть $g_I(t^*)$ и t есть аргумент некоторого предиката R_k при $k \in I$.*

Доказательство проводится индукцией по числу применений правил вывода в некотором не содержащем сечений выводе данной секвенции. В большинстве случаев построение формулы Σ не вызывает принципиальных трудностей; в случае применения правила $\supset$-слева или правила, вводящего квантор, нам нужен следующий результат.

Подлемма 8.6. *Пусть* Σ_1 *и* Σ_1^* — *некоторые* F-*формулы, удовлетворяющие условиям* 1) *и* 3) *леммы* 8.5 *и такие, что* (*в* **LK**) *выводимы секвенции* $\Phi_1 \to \Psi_1, \Sigma_1$ *и* $\Sigma_1^*, \Phi_2^* \to \Psi_2^*$. *Предположим, что единственным термом, содержащим свободную переменную* a *и входящим хотя бы в одну из последовательностей* Φ_1, Φ_2^*, Ψ_1 *или* Ψ_1^*, *является сама переменная* a. *Тогда существуют* F-*формулы* Σ *и* Σ^*, *для которых также выполняются условия* 1) *и* 3) *леммы* 8.5, *выводимы секвенции* $\Phi_1 \to \Sigma, \Psi_1$ *и* $\Sigma^*, \Phi_2^* \to \Psi_2^*$, *переменная* a *не входит ни в* Σ, *ни в* Σ^*, *а все свободные переменные этих формул содержатся среди переменных формул* Σ_1 *и* Σ_1^*.

Искомая формула Σ (соответственно Σ^*) может быть построена из Σ_1 (соответственно Σ_1^*) уменьшением шаг за шагом числа вхождений переменной a. Чтобы сделать это, отметим следующие факты:

(i) Мы можем предположить, что если некоторый терм t (соответственно t^*) входит в формулу Σ_1 (соответственно Σ_1^*), причем это вхождение имеет вид (b) (соответственно (a)) части 3) леммы 8.5 и содержит переменную a, то терм t (соответственно t^*) не имеет вида $g_I(f_I(t'))$ $(f_I(g_I(t')))$.

(ii) Формула Σ_1 может быть записана в виде $\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} A_{ij}$, где все A_{ij} — некоторые I_j-формулы. Для любого фиксированного j всякий терм t, имеющий вхождения переменной a и не входящий в другие термы, входит в формулу A_{ij}, причем это вхождение имеет либо вид (a) для всех i, либо вид (b) для всех i. Аналогичное утверждение справедливо для терма t^*.

(iii) Возьмем терм t, содержащий переменную a, не содержащийся в других термах и являющийся самым сложным среди таких термов. Если формула A_{ij} содержит терм t, т. е. ее можно записать в виде $A_{ij}(t)$, то мы заменим эту формулу в Σ_1 на $\forall x A_{ij}(x)$. Подобным же образом мы делаем замену в формуле Σ_1^*.

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не удалим все вхождения переменной a.

Опираясь на подлемму 8.6, легко избавиться от „лишних" свободных переменных при построении интерполянта на основе предположения индукции (в случаях, относящихся к $\supset$, $\forall$ и $\exists$).

Задача 8.7 (Феферман). Пусть J — некоторое непустое множество. Каждый элемент из J мы будем называть *сортом*. *Многосортный язык* $\mathbf{L}(J)$, соответствующий множеству сортов J, содержит следующие символы.

1) Индивидные константы: $k_0, k_1, \ldots, k_i, \ldots$, причем каждой константе k_i приписан определенный сорт.

2) Предикатные константы: $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$, причем каждой константе R_i приписаны целое число $n \geqslant 0$ (число аргументов) и сорта $j_1, \ldots, j_n$. Мы будем говорить, что предикатная константа R_i имеет тип $(n; j_1, \ldots, j_n)$.

3) Функциональные константы: $f_0, f_1, \ldots, f_i, \ldots$, причем каждой константе f_i приписаны некоторое число n $(n \geqslant 0)$ (число аргументов) и сорта $j_1, \ldots, j_n, j$. Мы будем говорить, что функциональная константа f_i имеет тип $(n; j_1, \ldots, j_n, j)$.

4) Свободные переменные сорта j для каждого j из J: $a_0^j, a_1^j, \ldots, a_i^j, \ldots$

5) Связанные переменные сорта j для каждого j из J: $x_0^j, x_1^j, \ldots, x_i^j, \ldots$.

6) Логические символы: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \forall, \exists$.

Термы сорта j для всякого j определяются следующим образом. Индивидные константы и свободные переменные сорта j являются термами сорта j; если f — функциональная константа типа $(n; j_1, \ldots, j_n, j)$ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы сортов $j_1, \ldots, j_n$ соответственно, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм сорта j.

Если R — предикатная константа типа $(n; j_1, \ldots, j_n)$ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы сортов $j_1, \ldots, j_n$ соответственно, то $R(t_1, \ldots, t_n)$ — атомарная формула. Если $F(a^j)$ — формула и x^j не входит в $F(a^j)$, то $\forall x^j F(x^j)$ и $\exists x^j F(x^j)$ — тоже формулы; остальные шаги в построении формул языка $\mathrm{L}(J)$ проводятся, как обычно. Секвенции языка $\mathrm{L}(J)$ определяются также обычным образом.

Правила вывода такие же, как и для системы **LK**, за исключением правил, относящихся к кванторам $\forall$ и $\exists$: термы и свободные переменные должны теперь замещаться связанными переменными тех же сортов.

Доказать следующие утверждения.

(1) Для только что описанной системы верна теорема об устранении сечений.

Далее, для всякой формулы A следующим образом определим множества $\mathrm{Sort}(A)$, $\mathrm{Ex}(A)$, $\mathrm{Un}(A)$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Cn}(A)$ и $\mathrm{Pr}(A)$.

$\mathrm{Sort}(A)$ — это множество всех j из J, таких, что формула A содержит некоторый символ сорта j.

$\mathrm{Ex}(A)$ (соответственно $\mathrm{Un}(A)$) — это множества сортов связанных переменных, которые входят в некоторые существенно экзистенциальные (соответственно универсальные) кванторы формулы A. (Существенно экзистенциальное и существенно универсальное вхождение # квантора $\exists$ определяется следующим образом. Подсчитываем число вхождений связок

$\neg$ и $\supset$ в формуле A, таких, как вхождение $\#$ находится либо в области действия $\neg$, либо в левой области действия $\supset$. Если это число четно, то вхождение $\#$ называется *существенно экзистенциальным*, а если нечетно, то *существенно универсальным*. Двойственным образом определяются существенно экзистенциальные и существенно универсальные вхождения квантора $\forall$.)

$\mathrm{Fr}(A)$ — это множество всех свободных переменных в формуле A.

$\mathrm{Cn}(A)$ — множество всех индивидных констант в A.

$\mathrm{Pr}(A)$ — множество всех предикатных констант в A.

(2) Допустим, что формула $A \supset B$ выводима в описанной выше системе и что по крайней мере одно из множеств $\mathrm{Sort}(A) \cap \mathrm{Ex}(B)$ и $\mathrm{Sort}(B) \cap \mathrm{Un}(A)$ непусто. Тогда существует формула C, такая, что $\mathrm{Un}(C) \subseteq \mathrm{Un}(A)$, $\mathrm{Ex}(C) \subseteq \mathrm{Ex}(B)$ и $\sigma(C) \subseteq \sigma(A) \cap \sigma(B)$, где σ обозначает любое из множеств Fr, Cn, Pr или Sort. [*Указание*: переформулировать это утверждение для секвенций и применить утверждение (1), т. е. теорему об устранении сечений.]

Задача 8.8 (Феферман: обобщение теоремы Лося—Тарского). Структура для многосортного языка (см. задачу 8.7) определяется следующим образом. Пусть $\mathrm{L}(J)$ — некоторый многосортный язык. *Структурой* для языка $\mathrm{L}(J)$ называется пара $\langle D, \phi \rangle$, где D — некоторое семейство непустых множеств $\{D_j \mid j \in J\}$ и ϕ — отображение, ставящее в соответствие константам языка $\mathrm{L}(J)$ соответствующие объекты. Множество D_j называется *областью сорта* j данной структуры. Перечисление свойств, которым должно удовлетворять отображение ϕ, мы предоставляем читателю; следует все время помнить, что индивидные константы сорта j принадлежат области D_j. Пусть $\mathscr{M} = \langle D, \phi \rangle$ и $\mathscr{M}' = \langle D', \phi' \rangle$ — две структуры для языка $\mathrm{L}(J)$, и пусть $J_0 \subseteq J$. Мы будем говорить, что структура $\mathscr{M}'$ является *J_0-расширением* структуры $\mathscr{M}$, и использовать запись $\mathscr{M} \subseteq_{J_0} \mathscr{M}'$, если выполнены условия:

(i) $D_j \subseteq D'_j$ для всякого j из J;

(ii) $D'_j = D_j$ для всякого j из J_0;

(iii) $\phi' k = \phi k$ для всякой индивидной константы k;

(iv) для всякой предикатной константы R типа $(n; j_1, \ldots, j_n)$

$$\phi R = \phi' R \cap (D_{j_1} \times \ldots \times D_{j_n});$$

(v) для всякой функциональной константы f типа $(n; j_1, \ldots, j_n, j)$, если $(d_1, \ldots, d_n) \in D_{j_1} \times \ldots \times D_{j_n}$, то

$$(\phi' f)(d_1, \ldots, d_n) = (\phi f)(d_1, \ldots, d_n).$$

Формулу A назовем *J_0-экзистенциальной*, если $\mathrm{Un}(A) \subseteq J_0$.

Пусть даны $J_0 \subseteq J$ и некоторая формула A языка $\mathrm{L}(J)$, свободными переменными которой являются (только) $b_1, \ldots, b_n$, имеющие сорта $j_1, \ldots, j_n$ соответственно. Показать, что следующие два утверждения эквивалентны.

(1) Для произвольных структур $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$, таких, что $\mathscr{M} \subseteq_{J_0} \mathscr{M}'$, и для произвольных оценок ϕ_0 и ϕ'_0, ставящих в соответствие переменным элементы областей (соответствующих сортов) структур $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ и совпадающих на $b_1, \ldots, b_n$, если формула A выполняется в интерпретации $(\mathscr{M}, \phi_0)$, то она выполняется и в интерпретации $(\mathscr{M}', \phi'_0)$,

(2) Существует некоторая J_0-экзистенциальная формула B, такая, что выводимо $A \equiv B$ и $\mathrm{Fr}(B) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$.

[*Указание* (Феферман). Пусть справедливо (2). Индукцией по сложности формулы B легко показывается, что для нее справедливо утверждение (1), откуда следует справедливость этого утверждения и для формулы A.

Чтобы доказать обратное, поступим следующим образом. Допустим (для простоты), что язык не содержит индивидных и функциональных констант. Главная задача — записать утверждение (1) синтаксически в каком-нибудь расширенном языке, в котором мы смогли бы выразить отношение J_0-расширения между двумя структурами.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ — две структуры вида

$$\mathscr{M} = \langle \{D_j\}_{j \in J}, \{R_i\}_{i \in I} \rangle, \quad \mathscr{M}' = \langle \{D'_j\}_{j \in J'}, \{R'_i\}_{i \in I} \rangle,$$

причем множества J и J' не пересекаются и находятся во взаимно однозначном соответствии. Мы будем обозначать через j и j' соответствующие друг другу элементы множеств J и J'. Через J^+ обозначим $J \cup J'$. Тогда $(J^+, I, \langle k_i \rangle_{i \in I})$ будет определять „тип“ структур. Пусть L^+ — язык, соответствующий множеству сортов J^+. Этот язык включает в себя исходный язык L. Пусть u — произвольная связанная переменная, скажем n-я связанная переменная сорта j; обозначим через u' соответствующую n-ю связанную переменную сорта j'. Если C — формула языка L, то через C' обозначим результат замещения в C всякой связанной переменной u на u'; таким образом, $\mathrm{Fr}(C) = \mathrm{Fr}(C')$. В этих обозначениях пусть множество Ext состоит из предложений вида $\forall u' \exists u (u' = u)$ для каждого сорта переменной u из J и из предложений вида $\forall u \exists u' (u = u')$ для каждого сорта переменной u из J_0.

Тогда из Ext и всех формул $\exists u'_i (u'_i = b_i)$ при $i = 1, \ldots, n$ выводима секвенция $A' \to A$. Поэтому существует конечное подмножество Ext_1 множества Ext и некоторый вывод без сечений секвенции

$$(*)\qquad \mathrm{Ext}_1,\ \{\exists u_i'(u_i'=b_i)\}_{i=1}^n,\ A'\to A.$$

Применим теперь интерполяционную теорему (2) задачи 8.7. Можно выбрать такой интерполянт B, чтобы выполнялись условия

(i) $\mathrm{Fr}(B)\subseteq \mathrm{Fr}(A)=\{b_1,\ \ldots,\ b_n\}$;
(ii) $\mathrm{Pr}(B)\subseteq \mathrm{Pr}(A)$;
(iii) сорт каждой связанной переменной в B принадлежит J;
(iv) $\mathrm{Un}(B)\subseteq J_0$.

Следовательно, B представляет собой некоторую J_0-экзистенциальную формулу языка L. Поскольку выводимы секвенции

$$\mathrm{Ext}_1,\ \{\exists u_i'(u_i'=b_i)\}_{i=1}^n,\ A'\to B\quad\text{и}\quad B\to A,$$

мы получаем, что выводима формула $A\equiv B$.]

Пусть $\mathcal{M}=\langle D,\ \phi_0\rangle$ и $\mathcal{M}'=\langle D,\ \phi_0'\rangle$ — две структуры для одного и того же языка. Структура $\mathcal{M}'$ называется *расширением* структуры $\mathcal{M}$, если $D\subseteq D'$, $\phi_0 k=\phi_0' k$ для всякой индивидной константы k и $\phi_0 f$ совпадает с ограничением $\phi_0' f$ на D для всякой функциональной или предикатной константы f.

Следствие 8.9 (Лось — Тарский). *Пусть A — некоторая формула обычного (т. е. односортного) языка* L. *Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

(i) *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная структура (для языка* L) *и $\mathcal{M}'$ — любое ее расширение, ϕ и ϕ' — произвольные оценки на структурах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ соответственно, совпадающие на всех переменных формулы A; тогда, если в интерпретации $(\mathcal{M},\phi)$ выполняется формула A, то она выполняется и в интерпретации $(\mathcal{M}',\phi')$.*

(ii) *Существует (существенно) экзистенциальная формула B, такая, что в* **LK** *выводимо $A\equiv B$ и все свободные переменные формулы B находятся среди свободных переменных формулы A.*

Доказательство. Это следует из задачи 8.8 при J, состоящем из одного сорта, и пустом J_0.

Задача 8.10. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая система аксиом в языке L, $\forall x\exists y A(x,y)$ — предложение языка L, выводимое из $\mathcal{A}$, и f — функциональная константа, не входящая в L. Показать, что тогда всякая L-формула, которая выводима из $\mathcal{A}\cup\{\forall xA(x,f(x))\}$, выводима также из $\mathcal{A}$ в L (т. е. введение таким способом символа f не расширяет существенно эту систему). [*Указание* (метод Маехары): данное утверждение является следствием леммы 8.11.]

Лемма 8.11. *Пусть $\forall x\exists yA(x,y)$ — некоторое предложение языка* L, *f — функциональный символ, не входящий в* L, *а Γ — и Θ — конечные последовательности* L-*формул. Если секвенция $\forall xA(x,f(x)),\ \Gamma\to\Theta$ выводима, то секвенция $\forall x\exists yA(x,y),\ \Gamma\to\Theta$ выводима в* L.

Доказательство. Пусть P — некоторый не содержащий сечений регулярный вывод секвенции $\forall xA(x,f(x)),\ \Gamma\to\Theta$. Пусть $t_1,\ \ldots,\ t_n$ — все термы (именно термы, а не полутермы), входящие в P и начинающиеся с символа f. Пусть эти термы расположены в таком порядке, что терм t_i не является подтермом терма t_j при $i<j$. Допустим, что t_i имеет вид $f(s_i)$ для $i=1,\ \ldots,\ n$. Вывод P преобразуется в три шага.

Шаг (1). Пусть $a_1,\ \ldots,\ a_n$ — попарно различные свободные переменные, не входящие в P. Преобразуем вывод P, заменив в нем всякое вхождение t_1 на a_1, t_2 на a_2 и т. д. Получившаяся фигура P' имеет ту же заключительную секвенцию, что и P, но не является, вообще говоря, выводом (как мы увидим ниже) и поэтому должна подвергнуться дальнейшему преобразованию.

Шаг (2). Поскольку вывод P не содержит сечений и f не входит ни в Γ ни в Θ, легко видеть, что f может входить в P' только в антецеденты секвенций и только в виде $\forall xA(x,f(x))$, причем соответствующие вхождения $\forall xA(x,f(x))$ в P вводятся (в P) либо правилом ослабления слева, либо некоторым правилом вида

$$I\quad\frac{A(s_i,\ f(s_i)),\ \Pi\to\Lambda}{\forall xA(x,\ f(x)),\ \Pi\to\Lambda}$$

(для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n$). Допустим, что верхняя секвенция применения I преобразуется в P' в секвенцию

$$A(s_i',\ a_i),\ \Pi'\to\Lambda'.$$

(То есть на шаге (1) I не переходит в правильный непосредственный вывод в P'.) Теперь заменим все вхождения формулы $\forall xA(x,f(x))$ в P' на последовательность формул

$$A(s_1',\ a_1),\ \ldots,\ A(s_n',\ a_n),$$

где s_i' получается заменой всех t_j в s_i на a_j. Тогда нижняя секвенция (преобразованного) применения I может быть выведена из верхней секвенции с помощью нескольких ослаблений.

В результате (после добавления некоторых сокращений и перестановок) получится фигура P'' с заключительной секвенцией

$$A(s_1',\ a_1),\ \ldots,\ A(s_n',\ a_n),\ \Gamma\to\Theta.$$

Однако эта фигура все еще может не быть выводом, как мы сейчас покажем, и должна подвергнуться дальнейшему преобразованию.

Шаг (3). Рассмотрим какое-нибудь применение правила $\exists$-слева в P:

$$J\ \frac{B(b),\ \Delta \to \Psi}{\exists z B(z),\ \Delta \to \Psi}$$

и предположим, что оно преобразовалось (после шагов (1) и (2)) в

$$J'\ \frac{B'(b),\ \Delta' \to \Psi'}{\exists z B'(z),\ \Delta' \to \Psi'}.$$

Может так случиться, что для некоторого i собственная переменная b применения J входит в s_i (а также в s_i') и, кроме того, формула $A(s_i', a_i)$ входит в Δ' или Ψ'; таким образом, для J' не выполнено теперь ограничение на собственную переменную.

Тогда мы преобразуем все J' в фигуре P'' (получающиеся из применений J правила $\exists$-слева) следующим образом:

$$\supset\text{-слева}\ \frac{\exists z B'(z) \to \exists z B'(z) \qquad B'(b),\ \Delta' \to \Psi'}{\exists z B'(z) \supset B'(b),\ \exists z B'(z),\ \Delta' \to \Psi'}$$

и пронесем дополнительную формулу $\exists z B'(z) \supset B'(b)$ вниз вплоть до заключительной секвенции.

По той же причине для всякого применения правила $\forall$-справа в P вида

$$J\ \frac{\Delta \to \Psi,\ B(b)}{\Delta \to \Psi,\ \forall z B(z)}$$

мы заменим соответствующую ему фигуру в P''

$$J'\ \frac{\Delta' \to \Psi',\ B'(b)}{\Delta' \to \Psi',\ \forall z B'(z)}$$

на

$$\supset\text{-слева}\ \frac{\to \forall z B'(z),\ \exists z \neg B'(z) \qquad \dfrac{\Delta' \to \Psi',\ B'(b)}{\neg B'(b),\ \Delta' \to \Psi'}}{\exists z \neg B'(z) \supset \neg B'(b),\ \Delta' \to \Psi',\ \forall z B'(z)}$$

(и пронесем дополнительную формулу вниз до конца).

В результате (после очевидных корректировок с помощью структурных правил) получится некоторый вывод, не содержащий применений правил $\exists$-слева и $\forall$-справа, заключительная секвенция которого имеет вид

$$S_1:\quad \exists z B'(z) \supset B'(b),\ \ldots,\ A(s_i', a_i),\ \Gamma \to \Theta.$$

Применим теперь к этой секвенции в подходящем порядке (см. ниже) правила $\exists$-слева и $\forall$-слева (плюс сокращения и т. п.) с тем, чтобы вывести секвенцию

$$S_2:\quad F,\ \ldots,\ \forall x \exists y A(x, y),\ \Gamma \to \Theta,$$

где F — замыкание формулы $\exists u (\exists z B'(z) \supset B'(u))$ кванторами всеобщности по всем ее свободным переменным.

Наконец, применив сечения к S_2 и к секвенциям $\to F, \ldots$, мы получим требуемый вывод секвенции

$$\forall x \exists y A(x, y),\ \Gamma \to \Theta.$$

Нам надо еще проверить, что на самом деле существует подходящая последовательность применений кванторных правил в указанном выше переходе от S_1 и S_2, таких, что все они удовлетворяют ограничению на собственную переменную. Далее в доказательстве этой леммы мы будем пользоваться следующими (временными) обозначениями. Для всяких термов s, t и формулы B запись $s \subset t$ означает, что s — (собственный) подтерм терма t; $s \subseteq t$ означает, что s — либо подтерм терма t, либо сам терм t, а $s \subset B$ означает, что s содержится в B.

Заметим теперь, что для любой из рассмотренных выше боковых формул $B(b)$ вывода P с собственной переменной b и для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполняется следующее условие:

(C) если $b \subset t_i$ то неверно, что $t_i \subset B(b)$.

В самом деле, допустим, что $b \subset t_i$ и что терм t_i, который мы запишем как $f(s_i(b))$, входит в $B(b)$. Тогда в нижней секвенции применения J с боковой формулой $B(b)$ символ f должен входить в главную формулу $\exists z B(z)$ (или $\forall z B(z)$) как полутерм $f(s_i(z))$; поэтому, поскольку вывод P не содержит сечений, символ f должен также входить (аналогичным образом) во все секвенции вывода P, расположенные ниже этой, а следовательно, в Γ или Θ.

Пусть $J_1, \ldots, J_m$ — все применения правил $\exists$-слева и $\forall$-справа в выводе P, и пусть $b_1, \ldots, b_m$ — соответствующие собственные переменные, а $B_1(b_1), \ldots, B_m(b_m)$ — соответствующие боковые формулы. Рассмотрим частичный порядок на $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$, который порождается отношением $\prec$, задаваемым следующими условиями:

(1a) если $t_j \subset t_i$, то $a_i \prec a_j$;

(1b) если $b_j \subset t_i$, то $a_i \prec b_j$;

(2a) если $t_j \subset B_i(b_i)$, то $b_i \prec a_j$;

(2b) если $b_j \subset B_i(b_i)$ $(j \neq i)$, то $b_i \prec b_j$.

Мы докажем ниже, что это отношение $\prec$ на самом деле порождает некоторый частичный порядок, т. е. оно не образует циклов. Допустим, что это уже доказано. Тогда, начиная с секвенции S_1, примéним в любом $\prec$-возрастающем порядка кванторные правила

$$\frac{\dfrac{A(s_i', a_i), \ldots}{\exists\text{-слева и }\forall\text{-слева}}}{\forall x \exists y A(x, y), \ldots}$$

и

$$\frac{\dfrac{\exists z B_j(z, a_i, \ldots, b_k, \ldots) \supset B_j(b_j, a_i, \ldots, b_k, \ldots), \ldots}{\exists\text{-слева и }\forall\text{-слева}}}{\forall x \ldots \forall y \ldots \exists u (\exists z B_j(z, x, \ldots, y, \ldots) \supset B_j(u, x, \ldots, y, \ldots)), \ldots}$$

так, чтобы получить секвенцию S_2. Из определения отношения $\prec$ вытекает, что для каждого из этих применений выполнено ограничение на собственную переменную (так как верны импликации $a_j \subset s_i' \Rightarrow t_j \subset t_i$, $b_j \subset s_i' \Rightarrow b_j \subset t_i$, $a_j \subset B_i'(b_i) \Rightarrow t_j \subset B_i(b_i)$ и $b_j \subset B_i'(b_i) \Rightarrow b_j \subset B_i(b_i)$).

Нам остается показать, что отношение $\prec$ действительно порождает некоторый частичный порядок. Это следует из такой леммы:

Лемма 8.12 (обозначения такие же, как и в лемме 8.11). (a) *Для всякой $\prec$-возрастающей последовательности $b_i \prec \ldots \prec b_j$ применение J_i расположено в P выше, чем J_j (и поэтому $i \neq j$).*

(b) *Для всякой $\prec$-возрастающей последовательности $a_i \prec \ldots \ldots \prec a_j$ не имеет места $t_i \subseteq t_j$ (и, в частности, $i \neq j$).*

Доказательство утверждения (a) проводится индукцией по длине данной последовательности.

(i) Если эта длина равна 2, т. е. последовательность имеет вид $b_i \prec b_j$, то наше утверждение следует из п. (2b) определения отношения $\prec$ и из ограничения на собственную переменную в P.

(ii) В случае $b_i \prec a_k \prec b_j$ имеем $t_k \subset B_i(b_i)$ (согласно (2a)) и $b_j \subset t_k$ (согласно (1b)). Следовательно, $b_j \subset B_i(b_i)$. Из условия (C) следует, что $i \neq j$. Поэтому снова $b_i \prec b_j$ (в силу (2b)) и J_i расположено выше J_j.

(iii) В случае, когда последовательность имеет вид $b_i \prec a_k \prec \ldots \ldots \prec a_l \prec b_j$ (между b_i и b_j расположены только какие-то a_r), заметим, что $t_l \subset t_k$ (согласно (1a)). Далее рассуждаем, как в (ii).

(iv) В оставшемся случае, т. е. когда последовательность имеет вид $b_i \prec \ldots \prec b_k \prec \ldots b_j$, воспользуемся предположением индукции.

Доказательство утверждения (b) также проводится индукцией по длине данной последовательности.

(i) Если последовательность имеет длину 2, т. е. имеет вид $a_i \prec a_j$, утверждение следует из п. (1a) определения.

(ii) В случае $a_i \prec b_k \prec a_j$ имеем $b_k \subset t_i$ и $t_j \subset B_k(b_k)$. Поэтому, если бы $t_i \subseteq t_j$, то отсюда вытекало бы, что $t_i \subset B_k(b_k)$, а это противоречит условию (C).

(iii) В случае когда последовательность имеет вид $a_i \prec b_k \prec \ldots \ldots \prec b_l \prec a_j$ (между b_k и b_l может быть любая буква), имеем $b_k \subset t_i$, $t_j \subset B_l(b_l)$ и J_k расположено выше J_l (согласно утверждению (a) данной леммы). Поэтому, если бы $t_i \subseteq t_j$, то было бы $b_k \subset B_l(b_l)$, что противоречит ограничению на собственную переменную в P.

В оставшихся двух случаях

(iv) $a_i \prec a_k \prec \ldots \prec a_j$;

(v) $a_i \prec \ldots \prec a_k \prec a_j$

воспользуемся пунктом (1a) определения $\prec$ и предположением индукции. Тем самым доказана лемма 8.12, а следовательно, и лемма 8.11.

Задача 8.13. Доказать следующее усиление интерполяционной теоремы для системы **LK** (Маехара — Такеути).

Пусть A и B — формулы, имеющие хотя бы одну общую предикатную константу, и пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — две конечные последовательности свободных переменных одинаковой длины, такие, что все переменные в последовательности $\boldsymbol{a}$ отличны друг от друга (в то время как некоторые переменные в последовательности $\boldsymbol{b}$ могут повторяться). Через $A\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ и $B\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ обозначим формулы, полученные соответственно из A и B заменой в них каждой переменной из $\boldsymbol{a}$ на соответствующую переменную из $\boldsymbol{b}$. Допустим, что в **LK** выводима формула $A\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \supset B\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. Тогда существует формула C, такая, что все ее свободные переменные (кроме тех, что входят в $\boldsymbol{a}$), индивидные и предикатные константы входят и в A, и в B, и такая, что в **LK** выводимы формулы $A\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \supset C\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ и $C \supset B$. [*Указание*: Сформулировать и доказать эту теорему для секвенций. Метод доказательства такой же, как для теоремы 6.6.]

Следующее утверждение по своей природе не является теоретико-доказательным в строгом смысле, но оно нам понадобится в дальнейшем (а именно в доказательстве предложения 8.16). Приведем сначала некоторые определения.

Пусть R — некоторое множество, и допустим, что каждому $p \in R$ поставлено в соответствие некоторое множество W_p.

Если $R_1 \subseteq R$ и $f \in \prod_{p \in R_1} W_p$, то f называется *частичной функцией* (*на* R) *с областью определения* $\mathrm{Dom}(f) = R_1$. Если $\mathrm{Dom}(f) = R$, то f называется *всюду определенной* (*на* R) *функцией*. Если f и g — некоторые частичные функции, $\mathrm{Dom}(f) = D_0 \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ и $f(x) = g(x)$ для всякого $x \in D_0$, то будем называть g *продолжением функции* f и писать при этом $f \prec g$ или $f = g \restriction D_0$.

Предложение 8.14 (обобщенная лемма Кёнига). *Пусть R — некоторое множество. Допустим, что каждому $p \in R$ поставлено в соответствие некоторое конечное множество W_p. Пусть P — некоторое свойство частичных функций f на R, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *$P(f)$ справедливо тогда и только тогда, когда существует конечное подмножество $N \subseteq R$, для которого справедливо $P(f \restriction N)$;*

2) *$P(f)$ справедливо для всякой всюду определенной функции f.*

Тогда найдется конечное подмножество $N_0 \subseteq R$, такое, что $P(f)$ справедливо для всякой частичной функции f, для которой $N_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Заметим, что множество R может иметь произвольную мощность. В случае когда R есть множество натуральных чисел, мы получаем первоначальную лемму Кёнига.

Доказательство. Положим $X = \prod_{p \in R} W_p$ и наделим каждое множество W_p дискретной топологией, а множество X — топологией произведения. Поскольку каждое W_p компактно, то и X компактно (теорема Тихонова).

Для каждой частичной функции g, область определения $\mathrm{Dom}(g)$ которой конечна, положим

$$N_g = \{f \mid f \text{ всюду определена и } g \prec f\}.$$

Далее положим

$$C = \{N_g \mid \text{справедливо } P(g) \text{ и область } \mathrm{Dom}(g) \text{ конечна}\}.$$

Тогда C является открытым покрытием компакта X. Следовательно, из него можно выбрать конечное подпокрытие, скажем

$$N_{g_1}, \ldots, N_{g_k}.$$

Пусть $N_0 = \mathrm{Dom}(g_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Dom}(g_k)$. Покажем, что множество N_0 удовлетворяет условию теоремы. Если $N_0 \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, то пусть $g \prec f$, где f — всюду определенная функция. Тогда справедливо $P(f)$ и $f \in N_{g_1} \cup \ldots \cup N_{g_k}$. Пусть, например, $f \in N_{g_i}$. Тогда $g_i \prec f$, справедливо $P(g_i)$ и $g_i \prec g$. Поэтому справедливо и $P(g)$. Предложение 8.14 доказано.

Что произойдет, если мы захотим применить к системе **LJ** метод, который использовался в доказательстве полноты для **LK**? Это естественным образом приведет нас к изучению моделей Крипке для системы **LJ**, относительно которых можно доказать полноту этой системы. Чтобы упростить рассуждения, мы снова предположим, что наш язык не содержит индивидных и функциональных констант. Доказательство существенно не усложнится, если мы включим в рассмотрение индивидные и функциональные константы.

По техническим причинам мы будем работать с некоторой эквивалентной модификацией системы **LJ**. Эту модификацию, которую ввел Маехара, мы обозначим через **LJ**′. Система **LJ**′ определяется как следующее ограничение системы **LK** (а не системы **LJ**): каждое из правил вывода $\neg$-справа, $\supset$-справа и $\forall$-справа разрешается применять только тогда, когда главная формула является единственной формулой в сукцеденте нижней секвенции (эти правила мы назовем «критическими» для системы **LJ**′). Тогда правило $\neg$-справа, например, будет иметь вид

$$\frac{D, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg D.}$$

Из определения очевидным образом следует, что секвенции у системы **LJ**′ те же, что и у системы **LK** (поэтому ограничение на секвенции системы **LJ**, согласно которому сукцеденты этих секвенций должны содержать не более одной формулы, здесь снимается). Следует отметить, что все остальные правила вывода в точности такие же, как и для системы **LK**. В частности, позволяется применять правило $\vee$-справа

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B,}$$

даже если Δ непусто.

Если всякую секвенцию системы **LJ**′, скажем $\Gamma \to B_1, \ldots, B_n$, интерпретировать как $\Gamma \to B_1 \vee \ldots \vee B_n$, то нетрудно доказать, что системы **LJ**′ и **LJ** эквивалентны. Для системы **LJ**′ также справедлива теорема об устранении сечений (надо скомбинировать доказательства устранимости сечений для **LK** и **LJ**).

Теперь возникает вопрос: имеет ли произвольная секвенция $\Gamma \to \Delta$ системы **LJ**′ вывод без сечений в этой системе?

Мы можем применить к секвенции $\Gamma \to \Delta$ редукционный процесс, который был определен для классического случая (см. лемму 8.3), опустив этапы 1) (редукция $\neg$-справа), 7) (редукция $\supset$-справа) и 9) (редукция $\forall$-справа); другими словами, все редукции для **LJ**′ будут такие же, как и в классическом случае, кроме редукций, относящихся к критическим правилам системы **LJ**′, который мы просто опускаем. Мы вернемся к рассмотрению этого вопроса позднее.

В качестве примера, когда редукционный процесс не заканчивается, можно рассмотреть секвенцию вида

$$\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow,$$

где A — предикатная константа.

Дерево, полученное в результате проведения описанного выше редукционного процесса, (снова) будем называть редукционным деревом для секвенции $\Gamma \rightarrow \Delta$.

Подготавливая определение семантики Крипке для интуиционистских систем и доказательство теоремы о полноте для **LJ**, мы обобщим описанный выше редукционный процесс на случай, когда Γ и (или) Δ могут быть бесконечными, т. е. определим редукционные деревья для бесконечных секвенций.

Определение 8.15. Пусть Γ и Δ — некоторые вполне упорядоченные (возможно, бесконечные) последовательности формул. Мы скажем, что $\Gamma \rightarrow \Delta$ *выводимо* (*выводимо без сечений*) в **LJ**, если существуют конечные подпоследовательности, скажем $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Delta}$, последовательностей Γ и Δ соответственно, такие, что секвенция $\tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Delta}$ выводима (выводима без сечений) в **LJ**′.

(В силу теоремы об устранении сечений из § 5, относящейся к **LJ**′, ясно, что секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$ выводима (в **LJ**′) тогда и только тогда, когда она выводима без сечений, даже если Γ и (или) Δ бесконечны.)

Только что описанный редукционный процесс немедленно обобщается на случай бесконечных секвенций. Мы только укажем на небольшие модификации в определении редукций на некоторых этапах. Заметим, что при проведении редукционного процесса мы предполагаем, что язык пополнен несчетным множеством свободных и связанных переменных (заданных в виде некоторой вполне упорядоченной последовательности).

8) $k \equiv 8$. Пусть $\forall x_1 A_1(x_1), \ldots, \forall x_\alpha A_\alpha(x_\alpha), \ldots$ — все формулы в Π, начинающиеся с квантора $\forall$. Пусть $a_1, \ldots, a_\beta, \ldots$ — все свободные переменные, доступные на этом этапе. Тогда над $\Pi \rightarrow \Lambda$ запишем секвенцию

$$A_1(a_1), \ldots, A_1(a_\beta), \ldots, A_\alpha(a_1), \ldots, A_\alpha(a_\beta), \ldots, \Pi \rightarrow \Lambda.$$

10) $k \equiv 10$. Пусть $\exists x_1 A_1(x_1), \ldots, \exists x_\alpha A_\alpha(x_\alpha), \ldots$ — все формулы из Π, начинающиеся с квантора $\exists$. Возьмем новые свободные переменные $b_1, b_2, \ldots, b_\alpha, \ldots$ и запишем над $\Pi \rightarrow \Lambda$ секвенцию

$$A_1(b_1), \ldots, A_\alpha(b_\alpha), \ldots, \Pi \rightarrow \Lambda.$$

Предложение 8.16. (a) *Если секвенция* $\Gamma \rightarrow \Delta$ *выводима* (*в* **LJ**′), *то всякая секвенция редукционного дерева для* $\Gamma \rightarrow \Delta$ *также выводима.*

(b) *Если секвенция* $\Gamma \rightarrow \Delta$ *не выводима, то найдется некоторая ветвь* (*в редукционном дереве для* $\Gamma \rightarrow \Delta$), *в которой никакая секвенция не выводима.*

Доказательство. Утверждение (a) очевидно. Для того чтобы доказать (b), докажем сначала следующее утверждение. Пусть $\Pi \rightarrow \Lambda$ — какая-нибудь секвенция в редукционном дереве, и пусть $\Pi_\lambda \rightarrow \Lambda_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha, \ldots$, — все секвенции, расположенные в этом дереве непосредственно над $\Pi \rightarrow \Lambda$. Если каждая из этих секвенций $\Pi_\lambda \rightarrow \Lambda_\lambda$ выводима, то и секвенция $\Pi \rightarrow \Lambda$ выводима. Другими словами, если для всякого λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha, \ldots$, существуют конечные подпоследовательности, скажем Π'_λ и Λ'_λ, последовательностей Π_λ и Λ_λ соответственно, такие, что выводима секвенция $\Pi'_\lambda \rightarrow \Lambda'_\lambda$, то существуют также конечные подпоследовательности, скажем Π' и Λ', последовательностей Π и Λ соответственно, такие, что выводима секвенция $\Pi' \rightarrow \Lambda'$.

Мы рассмотрим лишь несколько случаев.

1) К секвенции $\Pi \rightarrow \Lambda$ применена редукция $\exists$-слева. Тогда верхняя секвенция этой редукции имеет вид

$$A_1(b_1), \ldots, A_\alpha(b_\alpha), \ldots, \Pi \rightarrow \Lambda,$$

где $\exists x_\alpha A_\alpha(x_\alpha)$ входит в Π для всякого α и $b_1, \ldots, b_\alpha, \ldots$ — вновь введенные свободные переменные. По условию существуют конечные подпоследовательности последовательностей $A_1(b_1), \ldots, A_\alpha(b_\alpha), \ldots$ (скажем, $B_1(c_1), \ldots, B_n(c_n)$), Π (скажем, Π') и Λ (скажем, Λ'), такие, что выводима секвенция

$$B_1(c_1), \ldots, B_n(c_n), \Pi' \rightarrow \Lambda',$$

причем можно считать, что в Π' входят $\exists x_1 B_1(x_1), \ldots, \exists x_n B_n(x_n)$. Применив несколько правил $\exists$-слева, а затем несколько слабых правил, мы получим подсеквенцию $\Pi' \rightarrow \Lambda'$ секвенции $\Pi \rightarrow \Lambda$. Заметим, что, поскольку секвенция $B_1(c_1), \ldots, B_n(c_n), \Pi' \rightarrow \Lambda'$ имеет конечный вывод, мы можем рассматривать $c_1, \ldots, c_n$ как свободные переменные нашего исходного языка.

2) К секвенции $\Pi \rightarrow \Lambda$ применена редукция $\wedge$-справа. Тогда верхние секвенции этой редукции имеют вид

$$\Pi \rightarrow \Lambda, C_1, \ldots, C_\alpha, \ldots,$$

где $A_1 \wedge B_1, \ldots, A_\alpha \wedge B_\alpha, \ldots$ — все формулы из Λ, имеющие вид $A \wedge B$, и C_α есть A_α или B_α. Мы будем различать эти случаи, обозначая C_α через $C_{0,\alpha}$, если C_α есть A_α, и через $C_{1,\alpha}$, если C_α есть B_α. Тогда верхними секвенциями являются все секвенции вида

$$\Pi \rightarrow \Lambda, C_{i_1, 1}, \ldots, C_{i_\alpha, \alpha}, \ldots,$$

где $i_\alpha = 0$ или 1, для всевозможных комбинаций индексов $i_1, \ldots, i_\alpha, \ldots$. Пусть f обозначает произвольную последовательность $(i_1, \ldots, i_\alpha, \ldots)$. По условию у каждой из таких секвенций существует некоторая конечная подсеквенция, скажем $\Pi^f \to \Lambda^f$, $C_1^f, \ldots, C_{n_i}^f$, которая выводима, где $C_1^f, \ldots, C_{n_i}^f$ — некоторые из формул $C_{i_1,1}, \ldots, C_{i_\alpha,\alpha}, \ldots$.

Для того чтобы теперь воспользоваться обобщенной леммой Кёнига (предложение 8.14), возьмем в качестве R любое множество, упорядоченное по тому же типу, что и последовательность $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ (скажем, $R = \{1, 2, \ldots, \alpha, \ldots\}$). Положим $W_\alpha = \{0, 1\}$. Для всякого подмножества $R_1 \subseteq R$ и любого $f \in \prod_{\alpha \in R_1} W_\alpha$ назовем конечную последовательность формул

$$(C_{f(\alpha_1), \alpha_1}, \ldots, C_{f(\alpha_n), \alpha_n}),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_1$, *избранной для* f, если в Π и Λ можно указать некоторые конечные подпоследовательности Π' и Λ' соответственно, такие, что выводима секвенция

$$\Pi' \to \Lambda', C_{f(\alpha_1), \alpha_1}, \ldots, C_{f(\alpha_n), \alpha_n}.$$

Из сделанного выше замечания следует, что всякая всюду определенная функция имеет такую избранную подпоследовательность. Теперь для любого $R_1 \subseteq R$ и произвольной функции $f \in \prod_{\alpha \in R_1} W_\alpha$ определим

$P(f) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists k \exists \alpha_1 \ldots \exists \alpha_k (\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ и последовательность $(C_{f(\alpha_1), \alpha_1}, \ldots, C_{f(\alpha_k), \alpha_k})$ является избранной для f), где k пробегает множество натуральных чисел.

Тогда выполняются условия (1) и (2) обобщенной леммы Кёнига; следовательно, по этой лемме существует некоторое конечное подмножество $N_0 \subseteq R$, скажем $N_0 = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$, такое, что если $N_0 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, то справедливо $P(f)$.

Положим

$$\mathrm{F} = \{f \mid \mathrm{Dom}(f) = N_0\} = \prod_{j=1}^{l} W_{\gamma_j}.$$

Множество F конечно, и для всякого f из F справедливо $P(f)$, т. е. среди $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ можно выбрать $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ так, что последовательность $(C_{f(\alpha_1), \alpha_1}, \ldots, C_{f(\alpha_k), \alpha_k})$ будет избранной для f, а это в свою очередь означает, что в Π и Λ можно выбрать конечные подпоследовательности Π' и Λ' соответственно, такие, что выводима секвенция

$$\Pi' \to \Lambda', C_{f(\alpha_1), \alpha_1}, \ldots, C_{f(\alpha_k), \alpha_k}.$$

Поэтому для любой возможной комбинации индексов $i = (i_1, \ldots, i_l)$ в Π и Λ можно указать конечные подпоследовательности Π^i и Λ^i соответственно, такие, что выводима секвенция

$$\Pi^i \to \Lambda^i, C_{i_1, \gamma_1}, \ldots, C_{i_l, \gamma_l}.$$

Следовательно, применив к этим секвенциям несколько раз правила ослабления и $\wedge$-справа, мы получим секвенцию

$$\tilde{\Pi}' \to \tilde{\Lambda}', A_{\gamma_1} \wedge B_{\gamma_1}, \ldots, A_{\gamma_l} \wedge B_{\gamma_l},$$

где последовательность $\tilde{\Pi}'$ состоит из всех последовательностей Π', соответствующих элементам f из F, а $\tilde{\Lambda}'$ определяется аналогично.

Теперь из только что завершенных рассуждений получаем, что если секвенция $\Gamma \to \Delta$ не выводима, то найдется ветвь, в которой не выводима ни одна секвенция.

После всех этих приготовлений мы переходим к определению (интуиционистских) структур Крипке для языка L.

Определение 8.17. (1) *Частично упорядоченная структура* $P = \langle O, \leqslant \rangle$ состоит из множества O и некоторого бинарного отношения $\leqslant$ на нем, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $p \leqslant p$;

b) если $p \leqslant q$ и $q \leqslant p$, то $p = q$;

c) если $p \leqslant q$ и $q \leqslant r$, то $p \leqslant r$,

где p, q, r — любые элементы множества O.

(2) *Структурой Крипке* для языка L называется упорядоченная тройка $\langle P, U, \phi \rangle$, такая, что

1) $P = \langle O, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная структура.

2) U — отображение, которое каждому элементу p из O ставит в соответствие некоторое непустое множество U_p так, что если $p \leqslant q$, то $U_p \subseteq U_q$ (где $\subseteq$ обозначает теоретико-множественное включение).

3) ϕ — некоторая бинарная функция $\phi(R, p)$, где R пробегает множество предикатных констант языка L, а p — множество O. Кроме того, выполняются следующие условия:

3.1) Пусть R — некоторая 0-местная предикатная константа. Тогда $\phi(R, p) = \mathbf{T}$ или $\mathbf{F}$, и если $\phi(R, p) = \mathbf{T}$ и $p \leqslant q$, то $\phi(R, q) = \mathbf{T}$.

3.2) Пусть R — какой-либо n-местный предикат $(n \geqslant 1)$. Тогда $\phi(R, p)$ — некоторое подмножество множества

$$U_p^n = \underbrace{U_p \times \ldots \times U_p}_{n \text{ раз}}$$

и $p \leqslant q$ влечет $\phi(R, p) \subseteq \phi(R, q)$.

Положим $U = \bigcup_{p \in O} U_p$. Множество U можно мыслить себе как универсум модели или структуры, а элементы множества O — как этапы (см. ниже).

Допустим, что задана какая-то оценка всех свободных переменных объектами из U, т. е. каждой свободной переменной a_i поставлен в соответствие некоторый объект c_i из U. Пусть $F(a_1, \ldots, a_n)$ — формула, все свободные переменные которой содержатся среди $a_1, \ldots, a_n$. Индукцией по числу логических символов в формуле $F(a_1, \ldots, a_n)$ определим интерпретацию этой формулы на (этапе) p (при этой оценке) [эту интерпретацию мы обозначим через $\phi(F(c_1, \ldots, c_n), p)$; значениями такой интерпретации могут быть только T или F]:

a) $\phi(R(c_1, \ldots, c_n), p) = \mathsf{T}$, если $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in \phi(R, p)$ (при $n > 0$);

b) $\phi(A \wedge B, p) = \mathsf{T}$, если $\phi(A, p) = \mathsf{T}$ и $\phi(B, p) = \mathsf{T}$;

c) $\phi(A \vee B, p) = \mathsf{T}$, если $\phi(A, p) = \mathsf{T}$ или $\phi(B, p) = \mathsf{T}$;

d) $\phi(A \supset B, p) = \mathsf{T}$, если для всех q, таких, что $p \leqslant q$, $\phi(A, q) = \mathsf{F}$ или $\phi(B, q) = \mathsf{T}$.

e) $\phi(\neg A, p) = \mathsf{T}$, если $\phi(A, q) = \mathsf{F}$ для всех q, таких, что $p \leqslant q$.

f) $\phi(\exists x A(c_1, \ldots, c_n, x), p) = \mathsf{T}$, если найдется c из U_p, такое, что $\phi(A(c_1, \ldots, c_n, c), p) = \mathsf{T}$.

g) $\phi(\forall x A(c_1, \ldots, c_n, x), p) = \mathsf{T}$, если для всех q, таких, что $p \leqslant q$, и для всякого c из U_q $\phi(A(c_1, \ldots, c_n, c), q) = \mathsf{T}$.

Только что приведенное определение интерпретации мы можем распространить и на секвенции (конечные или бесконечные). Пусть $\Gamma \to \Delta$ — произвольная секвенция. Тогда полагаем $\phi(\Gamma \to \Delta, p) = \mathsf{T}$, если для всех q, таких, что $p \leqslant q$, $\phi(A, q) = \mathsf{F}$ для некоторой формулы A из Γ или $\phi(B, q) = \mathsf{T}$ для некоторой формулы B из Δ. Секвенция $\Gamma \to \Delta$ называется *истинной* в структуре Крипке $\langle P, U, \phi\rangle$ (где $P = \langle O, \leqslant\rangle$), если $\phi(\Gamma \to \Delta, p) = \mathsf{T}$ для всех p из O.

Утверждение 8.18. *Допустим, что секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в системе* **LJ′** *и $\langle P, U, \phi\rangle$ — произвольная структура Крипке. Тогда секвенция $\Gamma \to \Delta$ истинна в структуре $\langle P, U, \phi\rangle$.*

Доказательство проводится обычным путем — индукцией по числу применений правил в некотором выводе секвенции $\Gamma \to \Delta$ (или некоторой ее подсеквенции).

Теперь, чтобы завершить доказательство полноты системы **LJ**, возьмем произвольную невыводимую секвенцию $\Gamma \to \Delta$ и построим для нее контрмодель в смысле Крипке. Эта модель будет строиться из редукционного дерева для $\Gamma \to \Delta$. Обозначим это дерево через T. (Напомним, что при построении дерева T не применялись редукции $\neg$-справа, $\supset$-справа и $\forall$-справа.) Эту ситуацию, т. е. когда имеется именно это дерево, назовем этапом 0. Из предложения 8.16 следует, что найдется некоторая ветвь B_0 дерева T, в которой все секвенции не выводимы. Если ветвь B_0 конечна, то пусть $\Gamma_0 \to \Delta_0$ — секвенция, расположенная в ее верхнем узле. Если же ветвь B_0 бесконечна, то пусть Γ_0 и Δ_0 обозначают объединения всех формул (вполне упорядоченные некоторым образом) в антецедентах и сукцедентах секвенций ветви B_0 соответственно; рассмотрим (возможно, бесконечную) секвенцию $\Gamma_0 \to \Delta_0$. Выберем среди формул в Δ_0 все те, внешними логическими символами которых являются $\neg$, $\supset$ или $\forall$ (если таких формул нет, то останавливаемся). Пусть p пробегает множество всех таких формул. Мы будем считать, что каждое такое p непосредственно следует за 0 (и 0 непосредственно предшествует всем таким p).

Случай 1. p есть формула вида $\neg A$. Тогда через $\tilde{\Gamma}_p \to \tilde{\Delta}_p$ обозначим секвенцию $A, \Gamma_0 \to$.

Случай 2. p имеет вид $B \supset C$. Тогда через $\tilde{\Gamma}_p \to \tilde{\Delta}_p$ обозначим секвенцию $B, \Gamma_0 \to C$.

Случай 3. p имеет вид $\forall x F(x)$. Возьмем какую-нибудь свободную переменную a, не входящую в B_0 (это всегда можно сделать, введя, если необходимо, новый символ). Тогда через $\tilde{\Gamma}_p \to \tilde{\Delta}_p$ обозначим секвенцию $\Gamma_0 \to F(a)$.

Легко показывается, что (в каждом из этих случаев) секвенция $\tilde{\Gamma}_p \to \tilde{\Delta}_p$ не выводима, поскольку в противном случае была бы выводима секвенция $\Gamma_0 \to \Delta_0$. Пусть T_p — редукционное дерево для секвенции $\tilde{\Gamma}_p \to \tilde{\Delta}_p$.

Как и ранее, пусть B_p — ветвь дерева T_p, состоящая из невыводимых секвенций, и пусть $\Gamma_p \to \Delta_p$ — либо секвенция, расположенная в верхнем узле ветви B_p, либо (если ветвь B_p бесконечна) «объединение» всех секвенций этой ветви, как и ранее. Затем следуем той же процедуре, что и на предыдущем этапе. А именно пусть q пробегает множество всех формул из Δ_p, внешними символами которых являются $\neg$, $\supset$ или $\forall$ (если таких формул нет, то останавливаемся). И снова считаем, что каждое такое q непосредственно следует за p, а p — непосредственно предшествует всем таким q. Затем, как и ранее, определяем дерево T_q и ветвь B_q.

Повторим эту процедуру ω раз. Пусть O — множество всех выбранных при этом формул $(p, q, \ldots)$, и пусть $\leqslant$ есть транзитивное рефлексивное отношение на O, порожденное определенным выше отношением непосредственного следования. Множество O частично упорядочено отношением $\leqslant$. Определим теперь U_p как множество всех свободных переменных, встречающихся в ветви B_p (для всякого $p \in O$), и положим $U = \bigcup_{p \in O} U_p$. Отметим следующее:

1) если $p \leqslant q$, то $U_p \subseteq U_q$;

2) если q непосредственно следует за p, то все формулы из Γ_p входят в антецеденты всех секвенций дерева T_q (и, следовательно, ветви B_q).

Оценку ϕ определим следующим образом. Для всякого n-местного предикатного символа R $(n > 0)$ и всякого $p \in O$ положим

$$\phi(R, p) = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in U_p \text{ и } R(a_1, \ldots, a_n) \text{ входит в } \Gamma_p\},$$

а в случае $n = 0$ положим

$$\phi(R, p) = \mathbf{T}, \text{ если и только если } R \text{ входит в } \Gamma_p.$$

Итак, мы определили структуру Крипке $\langle P, U, \phi \rangle$. Рассмотрим интерпретацию формул в этой структуре при (естественной) оценке, ставящей в соответствие каждой переменной ее саму.

Предложение 8.19 (все обозначения имеют указанный выше смысл). *Пусть A — произвольная формула в ветви B_p. Если A входит в антецедент некоторой секвенции этой ветви, то* $\phi(A, p) = \mathbf{T}$, *а если A входит в сукцедент, то* $\phi(A, p) = \mathbf{F}$.

Доказательство проводится индукцией по числу логических символов в A. Прежде всего следует заметить, что если какая-то формула входит в антецедент некоторой секвенции ветви B_p, то она не входит в сукцедент никакой секвенции этой ветви. То же самое будет, если переставить местами слова «сукцедент» и «антецедент». Кроме того, стоит какой-то формуле появиться с одной из сторон некоторой секвенции, то она будет оставаться с той же стороны во всех расположенных выше секвенциях ветви B_p, а следовательно, и в секвенции $\Gamma_p \to \Delta_p$.

1) Формула A является атомарной формулой вида $R(a_1, \ldots, a_n)$. Если A входит в какой-то антецедент и, следовательно, в Γ_p, то по определению $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \phi(R, p)$, откуда, опять же по определению, следует, что $\phi(A, p) = \mathbf{T}$. Если же A входит в какой-то сукцедент, то $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \notin \phi(R, p)$, и потому $\phi(A, p) = \mathbf{F}$.

2) A имеет вид $\neg B$. Допустим, что A входит в антецедент. Тогда A входит и в Γ_p. Отсюда следует, что для всякой формулы q, такой, что $p \leqslant q$, A входит в антецеденты всех секвенций ветви B_q; следовательно, по предположению индукции $\phi(B, q) = \mathbf{F}$. Поэтому $\phi(B, q) = \mathbf{F}$ для всех q, таких, что $p \leqslant q$. Это и означает, что $\phi(A, p) = \mathbf{T}$.

Предположим теперь, что A входит в сукцедент некоторой секвенции ветви B_p. Тогда за p непосредственно следует некоторый этап q, на котором строится редукционное дерево для секвенции $B, \Gamma_p \to$. По предположению индукции $\phi(B, q) = \mathbf{T}$. Это означает, что существует q, такое, что $p \leqslant q$ и $\phi(B, q) = \mathbf{T}$. Тогда по определению $\phi(A, p) = \mathbf{F}$.

3) A имеет вид $B \wedge C$ или $B \vee C$. Эти случаи легкие и потому предоставляются читателю.

4) A имеет вид $\forall x F(x)$. Допустим, что A входит в антецедент секвенции ветви B_p, и допустим, что $p \leqslant q$. Тогда A входит в антецедент некоторой секвенции в ветви B_q. Пусть a — произвольный элемент области U_q. Тогда $F(a)$ входит в антецедент некоторой секвенции ветви B_q. Следовательно, по предположению индукции $\phi(F(a), q) = \mathbf{T}$. Итак, для всех q, таких, что $p \leqslant q$, и для любого a из U_q $\phi(F(a), q) = \mathbf{T}$, а это означает, что $\phi(A, p) = \mathbf{T}$.

Предположим теперь, что A входит в сукцедент некоторой секвенции ветви B_p. Тогда на некотором следующем за p этапе q строится редукционное дерево для секвенции $\Gamma_p \to F(a)$, где a — некоторая (новая) переменная из U_q. По предположению индукции $\phi(F(a), q) = \mathbf{F}$. Итак, существуют некоторое q, такое, что $p \leqslant q$, и некоторый элемент a из U_q, для которых $\phi(F(a), q) = \mathbf{F}$. Это значит, что $\phi(\forall x F(x), p) = \mathbf{F}$.

5) A имеет вид $\exists x F(x)$. Этот случай предлагается в качестве упражнения.

6) A имеет вид $B \supset C$. Предположим, что A входит в антецедент некоторой секвенции в B_p. Тогда C входит в Γ_p или B входит в Δ_p. Пусть $p \leqslant q$. Тогда C входит в сукцедент или B входит в антецедент некоторой секвенции ветви B_q. Поэтому для всех q, таких, что $p \leqslant q$, имеем $\phi(C, q) = \mathbf{T}$ или $\phi(B, q) = \mathbf{F}$. Тогда $\phi(B \supset C, p) = \mathbf{T}$.

Предположим теперь, что A входит в сукцедент некоторой секвенции в B_p. Тогда на следующем этапе q строится редукционное дерево для $B, \Gamma_p \to C$. Поэтому найдется q, такое, что $p \leqslant q$, $\phi(B, q) = \mathbf{T}$ и $\phi(C, q) = \mathbf{F}$, а следовательно, $\phi(B \supset C, p) = \mathbf{F}$.

Таким образом, мы можем заключить, что если секвенция $\Gamma \to \Delta$ не выводима, то можно построить некоторую структуру Крипке $\langle P, U, \phi \rangle$, в которой (при подходящей оценке свободных переменных) всякая формула из Γ принимает значение $\mathbf{T}$, а всякая формула из Δ — значение $\mathbf{F}$; другими словами, существует модель Крипке, опровергающая секвенцию $\Gamma \to \Delta$. Полнота системы $\mathbf{LJ}'$ доказана. Таким образом, нами получена

Теорема 8.20 (полнота интуиционистского исчисления предикатов в сильной форме, обобщенный вариант; ср. с теоремой 8.2). *Пусть* $\Gamma \to \Delta$ — *произвольная секвенция (конечная или бесконечная). Если эта секвенция истинна во всех структурах Крипке, то она выводима в системе* **LJ**. *В частности, система* **LJ** *является полной.*

(Напомним, что корректность системы **LJ** была установлена в предложении 8.18.) Заметим, что описанный здесь метод доказательства полноты для **LJ** пригоден и в случае, когда язык несчетен, в то время как соответствующий метод для **LK** годится только для счетных языков. Хотя на самом деле можно было бы применить для **LK** метод, аналогичный тому, который мы применили для **LJ′**, мы не будем этого делать, поскольку простой метод Генкина достаточен для этой цели.

Упражнение 8.21. Построить контрмодели Крипке для каждой из следующих секвенций:

1) $\to P \vee \neg P$, где P — некоторый предикатный символ;

2) $\forall x (P(x) \vee Q) \to \forall x P(x) \vee Q$, где P и Q — предикатные символы с заданным числом аргументов;

3) $\to \exists x (\exists y P(y) \supset P(x))$, где P — одноместный предикатный символ.

[*Указание* для 1). На этапе 0 имеем

$$\frac{\to P \vee \neg P,\ P,\ \neg P}{\to P \vee \neg P.}$$

Пусть p есть $\neg P$. Тогда на этапе p имеем

$$\frac{P \to}{\to \neg P.}$$

Поэтому определим $O = \{0, p\}$, $0 \leqslant p$, $U_0 = U_p = \{a\}$, $\phi(P, 0) = \mathbf{F}$. Легко доказывается, что $\phi(P \vee \neg P, 0) = \mathbf{F}$.]

ГЛАВА 2

АРИФМЕТИКА ПЕАНО

В этой главе мы опишем формальную систему первого порядка арифметики Пеано, докажем теорему Гёделя о неполноте, изложим конструктивную теорию ординалов вплоть до первого ε-числа ε_0, а затем приведем принадлежащее Генцену доказательство непротиворечивости этой системы.

§ 9. Формальная система арифметики Пеано

Определение 9.1. Язык Ln арифметики Пеано содержит конечное число констант (см. также определение 1.1):

индивидную константу 0;

функциональные константы $'$, $+$, $\cdot$;

предикатную константу $=$;

где $'$ — одноместная константа, а остальные — двуместные.

Подразумеваемая интерпретация приведенных выше констант очевидна. Мы будем писать $s = t$, $s + t$, $s \cdot t$ и s' вместо $=(s, t)$, $+(s, t)$ и т. д.

Нумералом называется всякое выражение вида $0'^{\cdots}{}'$, т. е. 0 с некоторым конечным числом штрихов; 0 с n штрихами будет служить формальным выражением для натурального числа n и обозначаться через $\bar{n}$. Далее, если s — замкнутый терм языка Ln, обозначающий некоторое число m (при естественной интерпретации), то через $\bar{s}$ обозначим нумерал $\bar{m}$ (например, если s есть $\bar{2} + \bar{3}$, то $\bar{s}$ обозначает $\bar{5}$).

Введем две системы аксиом арифметики Пеано — CA и VJ.

Определение 9.2. Через CA обозначим систему, состоящую из следующих аксиом:

A1. $\forall x \forall y (x' = y' \supset x = y)$;
A2. $\forall x (\neg x' = 0)$;
A3. $\forall x \forall y \forall z (x = y \supset (x = z \supset y = z))$;
A4. $\forall x \forall y (x = y \supset x' = y')$;
A5. $\forall x (x + 0 = x)$;
A6. $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$;
A7. $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
A8. $\forall x \forall y (x \cdot y' = x \cdot y + x)$.

Через VJ обозначим систему аксиом, состоящую из всех предложений вида

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n \forall x (F(0, \boldsymbol{z}) \wedge \forall y (F(y, \boldsymbol{z}) \supset F(y', \boldsymbol{z})) \supset F(x, \boldsymbol{z})),$$

где $\boldsymbol{z}$ обозначает последовательность переменных $z_1, \ldots, z_n$ и все переменные, входящие в $F(x, \boldsymbol{z})$ свободно, содержатся среди x, $\boldsymbol{z}$.

Базисной логической системой арифметики Пеано является **LK**. Тогда CA $\cup$ VJ — система аксиом, в которой $=$ есть выделенная предикатная константа (в смысле § 7). Кроме того, в этой системе для каждой формулы $F(a)$ языка Ln выводимо $\forall x \forall y (x = y \supset (F(x) \equiv F(y)))$ (см. предложение 7.2).

Отметим, что в системе CA $\cup$ VJ может быть развита теория примитивно рекурсивных функций. Этот факт мы будем предполагать известным и не будем обсуждать его далее.

Определение 9.3. Система **PA** (арифметика Пеано) получается из системы **LK** (в языке Ln) добавлением новых начальных секвенций (называемых *математическими начальными секвенциями*) и нового правила вывода — *правила индукции*.

1) Математические начальные секвенции:

$$\begin{aligned}
&s' = t' \to s = t;\\
&s' = 0 \to ;\\
&s = t,\ s = r \to t = r;\\
&s = t \to s' = t';\\
&\to s + 0 = s;\\
&\to s + t' = (s + t)';\\
&\to s \cdot 0 = 0;\\
&\to s \cdot t' = s \cdot t + s,
\end{aligned}$$

где s, t, r — произвольные термы языка Ln.

2) Индукция:

$$\frac{F(a),\ \Gamma \to \Delta,\ F(a')}{F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(s)},$$

где a не входит ни в $F(0)$, ни в Γ, ни в Δ, s — произвольный терм (который может содержать a), а $F(a)$ — произвольная формула языка Ln.

Формула $F(a)$ называется *индукционной формулой*, а a — *собственной переменной* этого правила. Далее, мы назовем $F(a)$ и $F(a')$ соответственно *левой* и *правой боковыми формулами*, а $F(0)$ и $F(s)$ — соответственно *левой* и *правой главными формулами* этого правила.

Начальные секвенции вида $D \to D$ называются *логическими* (в отличие от математических начальных секвенций, определенных выше).

Суммируем: система **PA** имеет два вида начальных секвенций — логические и математические — и три вида правил вывода — структурные, логические и правило индукции (см. определение 2.1). Наконец, *слабые правила* вывода — это все структурные правила, кроме правила сечения.

Все определенные в гл. 1 понятия, относящиеся к выводам, с некоторыми модификациями переносятся на систему **PA**; в каждом определении теперь надо принимать во внимание новое правило индукции.

В качестве простого следствия только что приведенных определений сформулируем

Предложение 9.4. *Некоторая секвенция выводима из* CA $\cup$ VJ *(в* **LK**) *тогда и только тогда, когда она выводима в* **PA**. *Следовательно, система аксиом* CA $\cup$ VJ *непротиворечива тогда и только тогда, когда секвенция* $\to$ *не выводима в* **PA**.

Таким образом, мы можем сосредоточить свое внимание на изучении системы **PA**. Формализация арифметики первого порядка в виде системы **PA** — замечательное достижение Генцена. Всюду далее в этой главе „выводимость“ означает „выводимость в **PA**“.

Следующее ниже предложение, которое можно доказать аналогично лемме 2.11, мы будем использовать, не ссылаясь на него.

Предложение 9.5. *Пусть P — некоторый вывод в системе* **PA** *секвенции $S(a)$, причем все вхождения переменной a в $S(a)$ отмечены. Пусть t — произвольный терм. Тогда мы можем построить для секвенции $S(t)$ некоторый* **PA**-*вывод P', который является регулярным (ср. с утверждением* (2) *леммы* 2.10) *и отличается от вывода P только тем, что по сравнению с последним в нем некоторые свободные переменные замещены другими, а некоторые вхождения переменной a — термом t.*

Следующая лемма нам будет нужна в дальнейшем.

Лемма 9.6. (1) *Для всякого замкнутого терма s найдется единственный нумерал $\bar{n}$, такой, что секвенция $\to s = \bar{n}$ имеет вывод, не содержащий применений правила индукции и существенных сечений* (*см. определение* 7.5).

(2) *Пусть s и t — замкнутые термы. Тогда либо секвенция $\to s = t$, либо секвенция $s = t \to$ выводима в* **PA** *без существенных сечений и применений правила индукции.*

(3) *Пусть s и t — замкнутые термы, такие, что секвенция $\to s = t$ выводима без существенных сечений и применений правила индукции, и пусть $q(a)$ и $r(a)$ — термы, имеющие некоторые вхождения переменной a (возможно, этих вхождений и нет).*

Тогда секвенция $q(s)=r(s)\to q(t)=r(t)$ *выводима без существенных сечений и применений правила индукции.*

(4) *Пусть* s *и* t — *такие же термы, как и в п.* (3) *Тогда для произвольной формулы* $F(a)$ *секвенция* $s=t,\ F(s)\to F(t)$ *выводима без существенных сечений и применений правила индукции.*

Доказательство утверждения (1) проводится индукцией по сложности терма s.

В § 2 мы определили некоторые понятия, относящиеся к формальным выводам. Однако для того, чтобы изложить доказательство непротиворечивости системы **PA**, нам понадобятся некоторые новые понятия. Мы приведем их все здесь.

Определение 9.7. Под формулой в выводе (в секвенции) и логическим символом в формуле мы понимаем соответственно формулу и логический символ, рассматриваемые вместе с местом, которые они занимают в этом выводе (в секвенции) и в этой формуле соответственно. Формулу в секвенции мы называем также *секвенциальной формулой*.

(1) Преемник. Если формула E находится в верхней секвенции некоторого применения правила вывода системы **PA**, то ее *преемник* определяется следующим образом:

(1.1) Если E — высекаемая формула, то она не имеет преемника.

(1.2) Если E — боковая формула применения какого-нибудь правила, кроме правил сечения, индукции и перестановки, то ее преемником является главная формула этого применения.

(1.3) Если E есть формула $F(a)$ (соответственно $F(a')$) в применении правила индукции, то ее преемником является формула $F(0)$ (соответственно $F(s)$).

(1.4) Если E — формула, обозначенная через C (соответственно через D), в верхней секвенции применения правила перестановки (см. определение 2.1), то ее преемником является формула C (соответственно D) в нижней секвенции этого применения.

(1.5) Если E есть k-я формула последовательности Γ, Δ, Π или Λ в верхней секвенции (см. определение 2.1), то ее преемником является k-я формула последовательности Γ, Δ, Π или Λ в нижней секвенции.

(2) Нить. Определение *нити* как последовательности секвенций в выводе было дано в определении 2.8.

(3) Определения секвенции, расположенной выше или ниже другой секвенции, и секвенции, расположенной между двумя секвенциями, были даны в определении 2.8; там же было определено понятие применения правила вывода, расположенного ниже некоторой секвенции.

(4) Секвенциальная формула называется *начальной* (*заключительной*), если она входит в начальную (соответственно в заключительную) секвенцию.

(5) Пучок. Последовательность формул в выводе называется *пучком*, если выполняются следующие условия:

(5.1) Последовательность начинается с начальной или ослабляющей формулы.

(5.2) Последовательность оканчивается заключительной или высекаемой формулой.

(5.3) За каждой формулой в этой последовательности, кроме последней, непосредственно следует ее преемник.

(6) Предок и потомок. Мы говорим, что формула A является *предком* формулы B, а B — *потомком* формулы A, если существует пучок, содержащий и A, и B и в котором A появляется раньше B.

(7) Предшественник. Пусть A и B — формулы. Если A — преемник формулы B, то B называется *предшественником* формулы A.

Некоторые главные формулы, например в применении правила $\wedge$-справа, имеют двух предшественников. В таких случаях мы называем предшественник *первым* или *вторым* в зависимости от того, входит он в левую или правую верхнюю секвенцию.

(8) Понятия явного и неявного:

(8.1) Пучок называется *явным*, если он оканчивается заключительной формулой.

(8.2) Пучок называется *неявным*, если он оканчивается высекаемой формулой.

Формула в выводе называется *явной* или *неявной* в зависимости от того, является явным или неявным пучок, содержащий эту формулу.

Секвенция в выводе называется *неявной* или *явной* в зависимости от того, содержит эта секвенция неявную формулу или нет.

Применение логического правила в выводе называется *явным* или *неявным* в зависимости от того, какой является главная формула этого применения — явной или неявной.

(9) *Заключительная часть* вывода определяется следующим образом:

(9.1) Заключительная секвенция вывода содержится в его заключительной части.

(9.2) Верхняя секвенция какого-нибудь непосредственного вывода, не являющегося неявным применением логического правила, содержится в заключительной части данного вывода, если в ней содержится нижняя секвенция этого непосредственного вывода.

(9.3) Никакая верхняя секвенция неявного применения логического правила не содержится в заключительной части вывода.

Это определение мы можем переформулировать следующим образом: данная секвенция в рассматриваемом выводе содержится в его заключительной части, если ниже этой секвенции в этом выводе нет неявных применений логических правил.

(10) Мы говорим, что применение правила находится в заключительной части вывода, если нижняя секвенция этого применения находится в заключительной части.

(11) Граница. Пусть J — некоторое применение правила в данном выводе. Мы скажем, что J *принадлежит границе* (или что J — *граничное применение правила*), если нижняя секвенция применения J находится в заключительной части вывода, а верхняя — нет. Следует заметить, что если J принадлежит границе, то оно есть неявное применение логического правила.

(12) Подходящее сечение. Применение правила сечения, расположенное в заключительной части, называется *подходящим*, если у высекаемой формулы этого применения имеется предок, являющийся главной формулой некоторого граничного применения правила.

(13) Существенные и несущественные сечения. Применение правила сечения называется *несущественным*, если высекаемая формула этого применения не содержит логических символов; в противном случае это применение называется *существенным*.

В системе **PA** высекаемые формулы несущественных сечений имеют вид $s = t$.

(14) Вывод C называется *регулярным*, если: (i) собственные переменные любых двух различных применений правил (∀-справа, ∃-слева или индукции) в P отличаются друг от друга и (ii) всякая свободная переменная, входящая в секвенцию S вывода P в качестве собственной, входит, кроме того, лишь в те секвенции, которые расположены выше S.

Предложение 9.8. *Для произвольного вывода в системе* **PA** *найдется регулярный вывод, имеющий ту же заключительную секвенцию и получающийся из исходного вывода лишь переименованием некоторых свободных переменных.*

Доказательство. Это предложение доказывается так же, как и утверждение (2) леммы 2.10.

§ 10. Теорема о неполноте

В этом параграфе мы докажем неполноту системы **PA**. Это знаменитый результат Гёделя. На самом деле мы докажем неполноту произвольной аксиоматизируемой системы, содержащей **PA** в качестве подсистемы.

Определение 10.1. Система аксиом $\mathscr{A}$ (см. § 4) называется *аксиоматизируемой*, если найдется конечное множество схем аксиом, таких, что $\mathscr{A}$ состоит из всех примеров этих схем. Формальная система **S** называется *аксиоматизируемой*, если существует аксиоматизируемая система аксиом $\mathscr{A}$, такая, что **S** эквивалентна системе $\mathbf{LK}_{\mathscr{A}}$ (см. § 4). (Две системы называются эквивалентными, если они имеют в точности одни и те же теоремы.)

Система **S** называется *расширением* системы **PA**, если всякая теорема системы **PA** выводима в **S**. Всюду в этом параграфе мы имеем дело с аксиоматизируемыми системами, которые являются расширениями системы **PA**. Они будут обозначаться буквой **S**. Такая система **S** является произвольной, но фиксированной; таков же и язык L системы **S** (который всегда является расширением языка Ln).

Определение 10.2. Класс *примитивно рекурсивных функций* — это наименьший класс функций, порождаемых следующими схемами (эти схемы можно мыслить как пункты индуктивного определения или как определяющие равенства для этих функций):

(i) $f(x) = x'$, где $'$ — функция прибавления 1;

(ii) $f(x_1, \ldots, x_n) = k$, где $n \geqslant 1$ и k — натуральное число;

(iii) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$;

(iv) $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$, где $g, h_1, \ldots, h_m$ — примитивно рекурсивные функции;

(v) $f(0) = k$, $f(x') = g(x, f(x))$, где k — некоторое натуральное число и g — примитивно рекурсивная функция;

(vi) $f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$, $f(x', x_2, \ldots, x_n) = h(x, f(x, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, где g и h — примитивно рекурсивные функции.

Это определение принадлежит Клини.

Содержательное n-местное отношение R (на натуральных числах) называется *примитивно рекурсивным*, если существует примитивно рекурсивная функция f, которая принимает только значения 0 и 1 и такая, что $R(a_1, \ldots, a_n)$ верно тогда и только тогда, когда $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Упражнение 10.3. Операции $+$ и $\cdot$ определяются следующим образом:

$$a + 0 = a, \qquad a \cdot 0 = 0,$$
$$a + b' = (a + b)', \qquad a \cdot b' = a \cdot b + a.$$

Вывести в **PA** из этих равенств следующие:

(1) $a + b = b + a$;

(2) $a \cdot b = b \cdot a$;

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Упражнение 10.4. Доказать, что отношения $=$ и $<$ на множестве натуральных чисел являются примитивно рекурсивными.

Мы сформулируем без доказательства основную метаматематическую лемму, которая нам будет нужна в дальнейшем.

Лемма 10.5. *Непротиворечивость системы* **S** (*т. е. невыводимость в ней секвенции* $\to$) *эквивалентна невыводимости в* **S** *равенства* $0 = 1$. *Другими словами,* $0 = 1$ *выводимо в* **S** *тогда и только тогда, когда всякая формула языка* L *выводима в* **S**. (Ср. с предложением 4.2.)

Предложение 10.6 (Гёдель). (1) *Графики всех примитивно рекурсивных функций можно выразить в языке* Ln *так, что переводы их определяющих равенств будут выводимы в системе* **PA**.

Таким образом, теорию примитивно рекурсивных функций можно развить внутри нашей формальной системы арифметики. Мы можем поэтому считать, что система **PA** (*или любое ее расширение*) *в действительности содержит функциональные символы для всех примитивно рекурсивных функций и их определяющие равенства, а также предикатные символы для всех примитивно рекурсивных отношений.*

Мы должны различать неформальные объекты и соответствующие им формальные выражения (хотя это ведет к усложнению обозначений). Например, формальное выражение (функциональный символ) для примитивно рекурсивной функции f будет обозначаться через $\bar{f}$; если R — содержательный предикат (на натуральных числах), выразимый в нашем формальном языке, то соответствующее ему формальное выражение будет обозначаться через $\bar{R}$. Добавим, что, согласно определению 9.1, для всякого замкнутого терма t выражение $\bar{t}$ есть нумерал

числа, обозначаемого этим термом. Хотя в следующих параграфах мы не всегда будем строго различать формальные и неформальные выражения, в настоящем параграфе это различение является существенным.

(2) *Пусть* R — *примитивно рекурсивное* n-*местное отношение. Оно может быть представлено в* **PA** *некоторой формулой* $\bar{R}(a_1, \ldots, a_n)$, *а именно* $\bar{f}(a_1, \ldots, a_n) = \bar{0}$, *где* f — *характеристическая функция отношения* R. *Тогда для всякой* n-*ки чисел* $(m_1, \ldots, m_n)$, *если* $R(m_1, \ldots, m_n)$ *истинно, то формула* $\bar{R}(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$ *выводима в* **PA**.

Доказательство. Утверждение (1) доказывается индукцией по определению примитивно рекурсивных функций (т. е. индукцией по их построению).

Доказательство утверждения (2) проводится следующим образом. Мы показываем, что для всякой примитивно рекурсивной функции f (от n аргументов) и для любых чисел $m_1, \ldots, m_n, p$, если $f(m_1, \ldots, m_n) = p$, то формула $\bar{f}(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n) = \bar{p}$ выводима в **PA**. Доказательство проводится индукцией по построению функции f (согласно ее определяющим равенствам). Отсюда получаем, что если f — примитивно рекурсивная функция, являющаяся характеристической функцией отношения R, то для всех $m_1, \ldots, m_n$, если $R(m_1, \ldots, m_n)$ истинно, то формула $\bar{f}(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n) = \bar{0}$ выводима в **PA**.

Поскольку в дальнейших рассуждениях это предложение применяется часто, мы будем пользоваться им, не ссылаясь на него всякий раз.

Заметим, что обратное утверждение (т. е. тот факт, что если R примитивно рекурсивно и в **PA** выводимо $\bar{R}(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$, то истинно $R(m_1, \ldots, m_n)$) следует из непротиворечивости системы **PA**.

Определение 10.7 (гёделева нумерация). Мы определим взаимно однозначное отображение формальных выражений языка L — исходных символов, термов, формул, секвенций и выводов — в множество натуральных чисел. (Далее приводится лишь один пример подходящего отображения.) Если X — выражение, то через $\ulcorner X \urcorner$ мы обозначим соответствующее ему число, которое назовем *гёделевым номером* этого выражения.

(1) Сначала припишем различные нечетные числа всем символам языка L (в число символов языка мы включаем здесь также знаки $\to$ и $-$).

(2) Пусть X — формальное выражение $X_0 X_1 \ldots X_n$, где каждое X_i при $0 \leqslant i \leqslant n$ — некоторый символ языка L. Тогда

$\ulcorner X \urcorner$ определяется как число $2^{\ulcorner X_0 \urcorner} 3^{\ulcorner X_1 \urcorner} \ldots p_n^{\ulcorner X_n \urcorner}$, где p_n есть n-е простое число.

(3) Если P — вывод, имеющий вид

$$\frac{Q}{S} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1 \quad Q_2}{S},$$

то $\ulcorner P \urcorner$ равняется $2^{\ulcorner Q \urcorner} 3^{\ulcorner - \urcorner} 5^{\ulcorner S \urcorner}$ или $2^{\ulcorner Q_1 \urcorner} 3^{\ulcorner Q_2 \urcorner} 5^{\ulcorner - \urcorner} 7^{\ulcorner S \urcorner}$ соответственно.

Если какая-то операция (или отношение), определенная на некотором классе формальных объектов (например, формул, выводов и т. д.), мыслится как соответствующая теоретико-числовая операция (или отношение) на гёделевых номерах этих объектов, то мы говорим, что эта операция (или отношение) *арифметизована*. Точнее, пусть ψ — некоторая операция, определенная на n-ках формальных объектов из некоторого класса, и f — теоретико-числовая функция от n аргументов, такая, что если для всех формальных объектов $X_1, \ldots, X_n$, X (рассматриваемого класса) результатом применения ψ к $X_1, \ldots, X_n$ является X, то $f(\ulcorner X_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner X_n \urcorner) = \ulcorner X \urcorner$. Тогда функция f называется *арифметизацией* операции ψ. Аналогично определяется арифметизация отношения.

Лемма 10.8. (1) *Операция подстановки может быть примитивно рекурсивно арифметизована, т. е. существует примитивно рекурсивная функция* sb *от двух аргументов, такая, что если $X(a_0)$ — выражение языка* L *(причем все вхождения переменной a_0 в X отмечены), а Y — другое выражение, то* $\mathrm{sb}(\ulcorner X(a_0) \urcorner, \ulcorner Y \urcorner) = \ulcorner X(Y) \urcorner$, *где $X(Y)$ — результат подстановки Y вместо a_0 в X.*

(2) *Существует примитивно рекурсивная функция ν, такая, что $\nu(m)$ равняется гёделеву номеру m-го нумерала, т. е. в наших обозначениях $\nu(m) = \ulcorner \bar{m} \urcorner$.*

(3) *Отношение „P есть вывод (в системе* **S**) *формулы A (или секвенции S)“ может быть примитивно рекурсивно арифметизовано, т. е. существует примитивно рекурсивное отношение* $\mathrm{Prov}(p, a)$, *такое, что* $\mathrm{Prov}(p, a)$ *истинно тогда и только тогда, когда существуют вывод P и формула A (или секвенция S), такие, что $p = \ulcorner P \urcorner$, $a = \ulcorner A \urcorner$ (или $a = \ulcorner S \urcorner$) и P — вывод формулы A (или секвенции S).*

(4) *Вместо* Prov *будем писать* $\mathrm{Prov}_{\mathbf{S}}$, *если надо подчеркнуть, что имеется в виду выводимость в системе* **S**.

(5) *Согласно принятому выше соглашению, формальное выражение, соответствующее отношению* Prov, *будет обозначаться через* $\overline{\mathrm{Prov}}$.

Мы не будем доказывать эту лемму. Важно отметить, что в доказательстве утверждения (3) используется аксиоматизируемость системы **S**; утверждение (3) будет решающим в последующих рассуждениях. Нам также понадобится следующий факт, касающийся гёделевой нумерации: *мы можем эффективно переходить от формальных объектов к их гёделевым номерам и обратно* (т. е. эффективно распознавать, является ли данное натуральное число гёделевым номером некоторого формального объекта, а если да, то какого).

Выражение $\exists x \overline{\mathrm{Prov}}(x, \overline{\ulcorner A \urcorner})$ часто будем сокращенно записывать как $\overline{\mathrm{Pr}}(\overline{\ulcorner A \urcorner})$ или как $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner}$.

Предложение 10.9. (1) *Если формула A выводима в системе* **S**, *то в ней выводима и формула* $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner}$.

(2) *Если формула $A \equiv B$ выводима в системе* **S**, *то в ней выводима и формула* $\overline{\mathrm{Pr}}(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \equiv \overline{\mathrm{Pr}}(\overline{\ulcorner B \urcorner})$, *т. е.* $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner} \equiv \vdash \overline{\ulcorner B \urcorner}$.

(3) *Формула* $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner} \supset (\vdash \overline{\ulcorner \vdash \overline{\ulcorner A \urcorner} \urcorner})$ *выводима в* **S**.

Доказательство. (1) Пусть формула A выводима и P — некоторый ее вывод. Тогда, согласно утверждению (3) леммы 10.5, истинно $\mathrm{Prov}(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner A \urcorner)$, откуда, согласно утверждению (2) предложения 10.6, следует, что формула $\exists x \overline{\mathrm{Prov}}(x, \overline{\ulcorner A \urcorner})$, т. е. $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner}$, выводима в **S**.

(2) Пусть P — некоторый вывод формулы $A \equiv B$ и Q — вывод формулы A. Существует предписание для построения вывода формулы B по выводам P и Q, не зависящее от P и Q, которое может быть арифметизовано некоторой примитивно рекурсивной функцией f. Тогда из $\mathrm{Prov}(q, \ulcorner A \urcorner)$ следует $\mathrm{Prov}(f(p, q), \ulcorner B \urcorner)$, где $p = \ulcorner P \urcorner$ и $q = \ulcorner Q \urcorner$, откуда в силу утверждения (2) предложения 10.6 вытекает, что выводима формула $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner} \supset \vdash \overline{\ulcorner B \urcorner}$. Аналогичные рассуждения проводятся для формулы $\vdash \overline{\ulcorner B \urcorner} \supset \vdash \overline{\ulcorner A \urcorner}$.

(3) Если P — некоторый вывод формулы A, то, согласно (1), мы можем построить некоторый вывод Q формулы $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner}$, причем существует единое предписание для получения вывода Q по выводу P. Следовательно, истинна импликация

$$\mathrm{Prov}(p, \ulcorner A \urcorner) \Rightarrow \mathrm{Prov}(f(p), \ulcorner \overline{\mathrm{Pr}}(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \urcorner)$$

для некоторой примитивно рекурсивной функции f, откуда следует, что выводима формула $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner} \supset \vdash \overline{\ulcorner \vdash \overline{\ulcorner A \urcorner} \urcorner}$.

Теперь мы рассмотрим вопрос об определении истинности и относящуюся к нему теорему Тарского.

Определение 10.10. Формула $T(a_0)$ языка L, содержащая одну свободную переменную a_0, называется *определением* *истинности* для системы **S**, если для всякого предложения A языка L в **S** выводима формула

$$T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \equiv A.$$

Теорема 10.11 (Тарский). *Если система* **S** *непротиворечива, то для нее не существует определения истинности.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует некоторая формула $T(a_0)$ языка L, такая, что для всякого предложения A этого языка в **S** выводима формула $T(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \equiv A$. Пусть $F(a_0)$ обозначает следующую формулу с единственной свободной переменной a_0: $\neg T(\overline{\mathrm{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0)))$. Положим $p = \ulcorner F(a_0) \urcorner$, и пусть A_T обозначает предложение $F(\bar{p})$. Тогда по определению A_T имеем

$$(1) \qquad A_T \equiv \neg T(\overline{\mathrm{sb}}(\bar{p}, \bar{\nu}(\bar{p}))).$$

Кроме того, поскольку $\ulcorner A_T \urcorner = \mathrm{sb}(p, \nu(p))$, мы можем вывести в **S** эквивалентности

$$(2) \qquad A_T \equiv T(\overline{\ulcorner A_T \urcorner}) \equiv T(\overline{\mathrm{sb}}(\bar{p}, \bar{\nu}(\bar{p}))).$$

Тогда (1) и (2), вместе взятые, противоречат предположению о непротиворечивости системы **S**.

Теорема 10.11 имеет интересное следствие. Отметим сначала, что в ее доказательстве мы не предполагали, что система **S** аксиоматизируема (см. определение 10.1). Поэтому в качестве аксиом системы **S** мы можем взять множество всех предложений языка Ln, *истинных* в естественной интерпретации (или стандартной модели) $\mathfrak{M}$ системы **PA** (используя обычное семантическое или теоретико-модельное определение истинности в $\mathfrak{M}$). Тогда мы получим, что не существует формулы $T(a_0)$ языка Ln, такой, что для всякого предложения A этого языка

$$A \text{ истинно} \Leftrightarrow \mathrm{T}(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \text{ истинно}$$

(подразумевается истинность в $\mathfrak{M}$). Это следствие теоремы 10.11 мы можем сформулировать в таком виде: *свойство арифметической истинности не является арифметическим* (т. е. не может быть выражено никакой формулой языка Ln). Часто теоремой Тарского называют именно это утверждение.

Определение 10.12. Система **S** называется *неполной*, если для некоторого предложения A в **S** не выводимы ни A, ни $\neg A$.

Теперь мы покажем один прием („гёделев трюк“), который будет использоваться в доказательстве теоремы 10.16.

Определение 10.13. Рассмотрим некоторую формулу $F(\alpha)$, содержащую метапеременную α (т. е. новую 0-местную предикатную переменную α, не входящую в язык L; мы вводим ее временно для удобства обозначений), причем α рассматривается в $F(\alpha)$ как атомарная формула, а формула $F(\alpha)$ считается замкнутой. Тогда $F(\vdash \overline{\mathrm{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0)))$ — формула с единственной свободной переменной a_0. Положим $p = \ulcorner F(\vdash \overline{\mathrm{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0))) \urcorner$, и пусть A_F обозначает $F(\vdash \overline{\mathrm{sb}}(\bar{p}, \bar{\nu}(\bar{p})))$. Заметим, что A_F — предложение языка L.

Лемма 10.14. *В* **S** *выводима формула* $A_F \equiv F(\vdash \overline{\ulcorner A_F \urcorner})$.

Доказательство. Так как по определению $\ulcorner A_F \urcorner = \mathrm{sb}(p, \nu(p))$, то в **S** выводима формула

$$\overline{\ulcorner A_F \urcorner} = \overline{\mathrm{sb}}(\bar{p}, \bar{\nu}(\bar{p})).$$

Следовательно, в **S** выводима и формула $A_F \equiv F(\vdash \overline{\ulcorner A_F \urcorner})$.

Начиная с этого места, мы будем кратко писать $\vdash A$ вместо $\vdash \overline{\ulcorner A \urcorner}$.

Определение 10.15. Система **S** называется *ω-непротиворечивой*, если выполняется следующее условие: если для некоторой формулы $A(a_0)$ при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ в **S** выводима формула $\neg A(\bar{n})$, то в **S** не выводима формула $\exists x A(x)$. Заметим, что ω-непротиворечивость системы **S** влечет ее непротиворечивость.

Теорема 10.16 (первая теорема Гёделя о неполноте). *Если система* **S** *ω-непротиворечива, то она неполна.*

Доказательство. Существует предложение A_G языка L такое, что в **S** выводимо $A_G \equiv \neg \vdash A_G$ (всякое такое предложение A_G мы будем называть *гёделевым предложением* для **S**). Это следует из леммы 10.14, если в качестве $F(\alpha)$ в определении 10.13 взять $\neg\alpha$. Пусть в **S** выводимо $A_G \equiv \neg \vdash A_G$. Покажем сначала, что в **S** не выводимо A_G, предполагая лишь непротиворечивость системы **S** (без предположения о ее ω-непротиворечивости). Допустим, что A_G выводимо в **S**. Тогда, согласно утверждению (1) предложения 10.9, в **S** выводимо и $\vdash A_G$. По определению гёделева предложения в **S** выводимо также $\neg A_G$, что противоречит предположению о непротиворечивости **S**.

Покажем теперь, что в системе **S** не выводимо $\neg A_G$, в предположении, что **S** ω-непротиворечива. Поскольку мы уже доказали, что A_G не выводимо в **S**, для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ в **S** выводимо $\neg \overline{\mathrm{Prov}}(\bar{n}, \overline{\ulcorner A_G \urcorner})$. Ввиду ω-непротиворечивости системы **S** в ней не выводимо $\exists x \overline{\mathrm{Prov}}(x, \overline{\ulcorner A_G \urcorner})$. Так как в **S** выводимо $\neg A_G \equiv \vdash A_G$, то предложение $\neg A_G$ не выводимо в **S**.

Замечание. Хотя предложение A_G и не выводимо, оно (интуитивно) истинно, поскольку утверждает свою собственную невыводимость.

Определение 10.17. Через $\overline{\text{Consis}_S}$ обозначим предложение $\neg \vdash 0 = 1$ (таким образом, $\overline{\text{Consis}_S}$ утверждает, что система **S** непротиворечива).

Теорема 10.18 (вторая теорема Гёделя о неполноте). *Если система* **S** *непротиворечива, то в ней не выводимо* $\overline{\text{Consis}_S}$.

Доказательство. Пусть A_G — гёделево предложение. В доказательстве теоремы 10.16 мы показали, что A_G не выводимо, предполагая лишь непротиворечивость системы **S**. Мы теперь докажем более сильное утверждение, а именно что в **S** выводимо $A_G \equiv \overline{\text{Consis}_S}$.

(1) Покажем, что в **S** выводима секвенция $A_G \to \overline{\text{Consis}_S}$. По лемме 10.5 выводимо предложение $\neg \overline{\text{Consis}_S} \equiv \forall \ulcorner A \urcorner (\vdash A)$ (где $\forall \ulcorner A \urcorner$ означает „для всех гёделевых номеров формул A“). Следовательно, в **S** выводимы $A_G \to \neg \vdash A_G \to \neg \forall \ulcorner A \urcorner (\vdash A) \to \overline{\text{Consis}_S}$.

(2) Покажем, что в **S** выводима секвенция $\overline{\text{Consis}_S} \to A_G$. Опять-таки по лемме 10.5 в **S** выводимы $\overline{\text{Consis}_S}$, $\vdash A_G \to \neg \vdash \neg A_G \to \neg \vdash \vdash A_G$, поскольку $\neg A_G \equiv \vdash A_G$. Но в **S** выводима $\vdash A_G \to \vdash \vdash A_G$ в силу предложения 10.9. Поэтому в **S** выводима секвенция $\overline{\text{Consis}_S}$, $\vdash A \to \neg \vdash \vdash A_G \wedge \vdash \vdash A_G$, т. е. $\overline{\text{Consis}_S} \to \neg \vdash A_G$, откуда следует выводимость $\overline{\text{Consis}_S} \to A_G$.

Упражнение 10.19. Пусть **QA** — бескванторный фрагмент системы **PA**. Показать, что в **QA** выводимы следующие формулы (a, b, c — свободные переменные):

(1) $a = a$;
(2) $a = b \supset b = a$;
(3) $a + b = b + a$;
(4) $a \cdot b = b \cdot a$;
(5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Упражнение 10.20. В описании „гёделева трюка“ (см. определение 10.13) формулу $\overline{\text{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0))$ можно заменить на $\bar{e}(\overline{\text{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0)))$ для некоторой примитивно рекурсивной функции e, удовлетворяющей такому условию: если A — какая-то формула, то $e(\ulcorner A \urcorner)$ — гёделев номер формулы, получаемой из A применением некоторых дополнительных этапов построения формул (согласно определению 1.3); например, $e(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner \neg A \urcorner$. Показать, что если $p = \ulcorner F(\vdash \bar{e}(\overline{\text{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0)))) \urcorner$, $e(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner \neg A \urcorner$ и B_F обозначает формулу $F(\vdash \bar{e}(\overline{\text{sb}}(\bar{p}, \bar{\nu}(\bar{p}))))$, то $\ulcorner B_F \urcorner = \text{sb}(p, \nu(p))$, т. е. B_F совпадает с $F(\vdash \neg B_F)$.

Задача 10.21 (Лёб). Показать, что если для какого-либо предложения A в системе **PA** выводимо $(\vdash A) \to A$, то в ней выводимо и само A. [*Указание*. Применив „гёделев трюк“, мы получим некоторое предложение B, такое, что в **PA** выводимо $B \equiv (\vdash B \supset A)$. Если такое B выводимо, то выводимо $\vdash B$ (см. предложение 10.9 (1)) и выводимо $(\vdash B) \to A$; таким образом, выводимо A. В этой процедуре вывод предложения A строится единообразно по выводу B; следовательно, формализуя этот процесс, мы получаем, что в **PA** выводимо $(\vdash B) \to (\vdash A)$. Отсюда и из предположения, что выводимо $(\vdash A) \to A$, следует выводимость секвенции $(\vdash B) \to A$. Но по определению B это означает, что выводимо само предложение B и, следовательно, $\vdash B$ (предложение 10.9). Поэтому, так как выводимы $\vdash B$ и $(\vdash B) \to A$, то выводимо и A.]

Задача 10.22 (Россер). Пусть e — примитивно рекурсивная функция, удовлетворяющая условию $e(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner \neg A \urcorner$ (см. упражнение 10.20). Пусть $F(a_0)$ — формула

$$\forall x_1 (\overline{\text{Prov}}(x_1, \overline{\text{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0))) \supset$$
$$\supset \exists x_2 (x_2 \leqslant x_1 \wedge \overline{\text{Prov}}(x_2, \bar{e}(\overline{\text{sb}}(a_0, \bar{\nu}(a_0)))))).$$

Положим $p = \ulcorner F(a_0) \urcorner$, и пусть A_R обозначает предложение $F(\bar{p})$. Доказать, что если система **S** непротиворечива, то в ней не выводимы ни A_R, ни $\neg A_R$.

Замечание. Это утверждение усиливает первую теорему Гёделя о неполноте. А именно предположение об ω-непротиворечивости в теореме 10.16 ослаблено до предположения о непротиворечивости.

§ 11. Обсуждение ординалов с финитной точки зрения

При рассмотрении доказательств непротиворечивости первостепенной задачей является их философская интерпретация. Нет никаких сомнений, что идеальной точкой зрения на доказательства непротиворечивости является „финитная точка зрения“ Гильберта, которая рассматривает только конечное число конкретно заданных символов и конкретные рассуждения о конечных последовательностях этих символов (называемых выражениями). Согласно этой точке зрения, выражения определяются следующим образом (как мы на самом деле уже делали).

(0) Прежде всего мы задаем конечное множество символов, называемое алфавитом.

(1) Затем задаем конечное множество конечных последовательностей этих символов, называемых начальными выражениями.

(2) Далее задаем конечное множество конкретных операций для построения (или порождения) новых выражений из уже полученных.

(3) Наконец, мы ограничиваемся рассмотрением только тех выражений, которые получаются, если, начав с шага (1), повторять шаг (2) конечное число раз. В частном случае такое определение имеет следующий вид. Допустим, что мы задали некоторые символы $a_1, \ldots, a_n$ и конкретные операции $f_1, \ldots, f_j$ для порождения новых выражений из уже имеющихся, и пусть $\mathscr{D}$ — совокупность всех выражений, получаемых таким образом. Тогда определение класса $\mathscr{D}$ происходит таким образом:

(0) алфавит состоит из символов $a_1, \ldots, a_n$;

(1) выражения $a_1, \ldots, a_n$ (рассматриваемые как последовательности длины 1) принадлежат классу $\mathscr{D}$;

(2) если $x_1, \ldots, x_{k_i}$ принадлежат $\mathscr{D}$, то $f_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ принадлежит $\mathscr{D}$ $(i = 1, \ldots, j)$;

(3) класс $\mathscr{D}$ состоит только из тех объектов (выражений), которые получены согласно (1) и (2).

Такое определение называется *рекурсивным* или *индуктивным определением* класса $\mathscr{D}$. В соответствии с этим индуктивным определением мы имеем принцип *доказательства индукцией по* (элементам класса) $\mathscr{D}$. А именно пусть A — некоторое свойство (выражений), и допустим, что мы можем сделать следующее:

(1°) Доказать, что справедливы $A(a_1), \ldots, A(a_n)$.

(2°) Из предположения, что справедливы $A(x_1), \ldots, A(x_k)$ для $x_1, \ldots, x_k$ из $\mathscr{D}$, вывести, что справедливы и

$$A(f_1(x_1, \ldots, x_{k_1})), \ldots, A(f_j(x_1, \ldots, x_{k_j})).$$

Тогда мы заключаем, что свойство $A(x)$ справедливо для всех x из $\mathscr{D}$. Это следует из того, что для всякого конкретно заданного объекта x из $\mathscr{D}$ можно показать справедливость $A(x)$, следуя этапам построения этого x и применяя на каждом этапе (1°) или (2°). Согласно этой точке зрения, мы можем рассматривать индукцию просто как общее утверждение о некотором конкретном методе доказательства, применимом для любого данного выражения x, а не как аксиому, которая принимается априори.

Хотя никто не отрицает, что приведенный выше способ рассуждения приемлем с гильбертовской точки зрения, существуют разные мнения относительно того, где следует установить

предел для нее. Например, если допустить трансфинитную индукцию до каждого из ординалов ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3$, ..., то следует ли тогда допустить и трансфинитную индукцию до ω^2? Или если допустить трансфинитную индукцию до каждого из ординалов ω, ω^ω, ω^{ω^ω}, ..., то допускать ли тогда трансфинитную индукцию до первого ε-числа (обозначаемого через ε_0)? Если мы рассматриваем любое конкретно заданное выражение (в данном случае ординал, меньший, чем ε_0), то оно должно быть меньше некоторого ω_n, и, значит, его следует допускать, но следует ли? Здесь ω_n обозначает ординал

$$\left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}\right\} n \text{ раз.}$$

Если смотреть на все это скептически, то возникает вопрос: как далеко можно допускать индукцию? Может даже появиться сомнение, не выходит ли уже индукция до ω за рамки гильбертовской точки зрения.

Однако если интерпретировать точку зрения Гильберта совсем строгим и узким образом и, в частности, исключить трансфинитную индукцию и все абстрактные понятия вроде гёделевых примитивно рекурсивных функционалов конечных типов, то станет ясно в силу теоремы Гёделя о неполноте, что *непротиворечивость системы* **PA** *нельзя показать, придерживаясь этой точки зрения*, так как такие строго финитные методы (по-видимому) можно формализовать в **PA** (и даже в „примитивно рекурсивной арифметике“, определяемой ниже).

Поэтому при рассмотрении некоторого доказательства непротиворечивости всегда интересно знать, что именно в нем используется выходящего за пределы гильбертовского подхода и как это можно обосновать.

В настоящее время в доказательствах непротиворечивости применяются, во-первых, методы, использующие трансфинитную индукцию (по Генцену), и, во-вторых, методы, использующие функционалы высших типов (по Гёделю).

Мы изложим метод Генцена. Сначала, чтобы обосновать нашу точку зрения, рассмотрим индуктивное определение натуральных чисел, максимально близкое к приведенной выше схеме:

N1. 1 — натуральное число.

N2. Если a — натуральное число, то и $a1$ — натуральное число.

N3. Натуральными числами являются только те объекты, которые получены согласно N1 и N2.

Определения такого рода мы обычно считаем очевидными; это происходит, наверное, потому, что многое уже бессознательно предполагается известным. Чтобы прояснить нашу „бессознательно достигнутую“ позицию, рассмотрим вопросы, которые может задать нам субъект E, не понимающий определение N1 — N3.

Во-первых, E может сказать, что он не понял пп. N2 и N3. Субъект E не может понять N2, используя понятие натурального числа, если он не понимает, что такое „натуральное число“ (порочный круг). Более того, E не может понять в N3, что значит „те объекты, которые получены согласно N1 и N2“. Существует много возможных ответов на эти вопросы. Наиболее естественным с дидактической точки зрения будет следующий: 1 есть натуральное число, согласно N1. Теперь, когда мы знаем, что 1 — натуральное число, 11 — тоже натуральное число, согласно N2; поскольку мы знаем, что 11 — натуральное число, 111 — тоже натуральное число, согласно N2. Все, что получается таким способом, если, начав с N1, повторять N2, является натуральным числом. Условие N3 говорит, с другой стороны, что натуральными числами являются только те объекты, которые получены таким способом. Конечно, E может задать новые вопросы, относящиеся к этим объяснениям: „что вы имеете в виду под повторением операции N2?“ или „что вы подразумеваете, говоря „все, что получается таким способом“? и т. д., и такого рода дискуссия может продолжаться бесконечно. Я надеюсь, что в конце концов E поймет смысл определения N1 — N3. Здесь важно вот что: для того чтобы понять определение N1 — N3 натуральных чисел, нужно заранее принять общую концепцию (потенциально) бесконечного процесса порождения новых объектов повторением конечное число раз конкретной операции, а целью этого определения является выявление (с помощью такой процедуры) процесса построения натуральных чисел.

Если внимательно проанализировать эту долгую дискуссию с субъектом E, то станет ясно, что мы должны в качестве основного понятия в какой-то степени допустить понятие конечной последовательности (или повторения конечное число раз некоторой операции). Это не означает, что мы должны предполагать большое количество знаний о понятиях „последовательность“ и „конечное“ в отдельности. Нам надо принять лишь то, что является абсолютно необходимым для понимания единого понятия „конечная последовательность“.

Чтобы дальше прояснить нашу точку зрения, рассмотрим индуктивное определение конечных (непустых) последовательностей натуральных чисел.

S1. Если n — натуральное число, то оно само является конечной последовательностью натуральных чисел.

S2. Если m — натуральное число и s — конечная последовательность натуральных чисел, то $s * m$ — конечная последовательность натуральных чисел.

S3. Только те объекты, которые получены согласно S1 и S2, являются конечными последовательностями натуральных чисел.

Следует осознать, что такого рода определения считаются основными и понятными независимо от того, с какой точки зрения они рассматриваются.

Мы приведем еще несколько примеров таких индуктивно определяемых классов конкретных объектов и их свойств.

Например, длина конечной последовательности натуральных чисел определяется индуктивно следующим образом:

L1. Если s — последовательность, состоящая лишь из натурального числа n, то ее длина равна 1.

L2. Если s — последовательность натуральных чисел, имеющая вид $s_0 * n$, и длина последовательности s_0 равна l, то длина последовательности s равна $l+1$.

Конечно, можно привести и другое определение: если дана какая-то последовательность натуральных чисел, скажем s, то просматриваем s и подсчитываем число символов $*$ в ней. Если это число равно l, то длина s равна $l+1$. (Каждое из этих определений указывает некоторую операцию, которая применяется к конкретно заданным фигурам в общем виде.)

Эти финитные рассуждения часто имеют поразительные аналогии с рассуждениями в следующем формализме, который мы назовем примитивно рекурсивной арифметикой.

(1) Исходная логическая система — исчисление высказываний.

(2) Определяющие равенства для примитивно рекурсивных функций берутся в качестве аксиом.

(3) Кванторы не рассматриваются.

(4) Допускается правило математической индукции (для бескванторных формул)

$$\frac{A(a),\ \Gamma \to \Delta,\ A(a')}{A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t),}$$

где a не входит ни в $A(0)$, ни в Γ, ни в Δ, а t — произвольный терм.

После приведенной выше дискуссии кажется довольно разумным охарактеризовать финитную точку зрения Гильберта как точку зрения, допускающую только те методы, которые можно формализовать в примитивно рекурсивной арифметике. Эта точка зрения будет называться *чисто финитной*. Поэтому выяснение того, в каком месте доказательство непротиворечивости выходит за рамки этого формализма, т. е. становится недопустимым с чисто финитной точки зрения, имеет первостепенную важность. (Таким образом, в дальнейшем мы не будем беспокоиться о правомерности рассуждений, которые могут быть проведены в рамках описанного выше формализма.) Следуя этому подходу, мы приведем рекурсивное определение ординалов до ε_0 (первого ε-числа); временно под ординалом мы будем понимать «ординал, меньший, чем ε_0».

O1. 0 есть ординал.

O2. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ и μ — ординалы. Тогда $\mu_1 + \ldots + \mu_n$ и ω^μ — ординалы.

O3. Ординалами являются только те объекты, которые получены согласно O1 и O2.

Ординал ω^0 будем обозначать через 1. Рассматривая 1 как натуральное число 1, $1+1$ — как 2 и т. д., можно считать, что натуральные числа содержатся среди ординалов. (Мы можем считать и 0 натуральным числом, если захотим.)

Далее можно определить на ординалах отношения $=$ и $<$ так, чтобы они совпадали с равенством и естественным порядком на ординалах, которые нам известны из теории множеств, и развить теорию ординалов с этими отношениями в рамках чисто финитного подхода. Действительно, мы можем одновременной индукцией определить отношения $=$, $<$ и операции $+$, $\cdot$ так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям.

(1) Отношение $<$ является линейным порядком и 0 — наименьший элемент (в смысле этого порядка).

(2) $\omega^\mu < \omega^\nu$ тогда и только тогда, когда $\mu < \nu$.

(3) Пусть μ — ординал, содержащий некоторые вхождения символа 0, но не совпадающий с самим 0, и пусть μ' — ординал, полученный из μ удалением из него всех вхождений 0, а затем лишних вхождений символа $+$. Тогда $\mu = \mu'$.

С помощью (3) легко показать следующее.

(4) Всякий ординал, не совпадающий с 0, может быть записан в виде

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \ldots + \omega^{\mu_n},$$

где каждый из ординалов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, не совпадающий с 0, обладает тем же свойством. (Каждое слагаемое ω^{μ_i} называется *мономиалом* этого ординала.)

(5) Пусть ординалы μ и ν имеют вид

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \ldots + \omega^{\mu_k} \quad \text{и} \quad \omega^{\nu_1} + \omega^{\nu_2} + \ldots + \omega^{\nu_l}$$

соответственно. Тогда ординал $\mu + \nu$ определяется как

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \ldots + \omega^{\mu_k} + \omega^{\nu_1} + \omega^{\nu_2} + \ldots + \omega^{\nu_l}.$$

(6) Пусть μ — ординал, записанный в виде (4) и содержащий два последовательных члена ω^{μ_j} и $\omega^{\mu_{j+1}}$ при $\mu_j < \mu_{j+1}$, т. е. μ имеет вид

$$\ldots + \omega^{\mu_j} + \omega^{\mu_{j+1}} + \ldots,$$

и пусть μ' — ординал, полученный из μ удалением «$\omega^{\mu_j} +$», так что μ' имеет вид

$$\ldots + \omega^{\mu_{j+1}} + \ldots.$$

Тогда $\mu = \mu'$.

Как следствие свойства (6) можно показать следующее.

(7) Для всякого ординала μ (не совпадающего с 0) существует ординал вида

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \ldots + \omega^{\mu_n},$$

такой, что $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ и $\mu = \omega^{\mu_1} + \ldots + \omega^{\mu_n}$, где $\mu \geqslant \nu$ означает, что $\nu < \mu$ или $\nu = \mu$. Последняя запись называется *нормальной формой* ординала μ. (Такая нормальная форма для ординала μ единственна, поскольку то же самое справедливо для всякого ординала, использующегося в построении μ, согласно O2.)

(8) Пусть ординал μ имеет нормальную форму

$$\omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \ldots + \omega^{\mu_n}$$

и $\nu > 0$. Тогда $\mu \cdot \omega^\nu = \omega^{\mu_1 + \nu}$.

(9) Пусть ординалы μ и ν имеют такой же вид, как в (5). Тогда

$$\mu \cdot \nu = \mu \cdot \omega^{\nu_1} + \mu \cdot \omega^{\nu_2} + \ldots + \mu \cdot \omega^{\nu_l}.$$

(10) Степень $(\omega^\mu)^n$ определяется как $\omega^\mu \cdot \omega^\mu \cdot \ldots \cdot \omega^\mu$ (n раз) для любого натурального числа n. Тогда $(\omega^\mu)^n = \omega^{\mu \cdot n}$.

Из наших определений легко вытекает, что для произвольного ординала μ можно построить ординал вида ω_n, такой, что $\mu < \omega_n$.

Очевидно, для всякого данного натурального числа n длина строго убывающей последовательности ординалов, начинающейся с n, не больше $n+1$; другими словами, не существует строго убывающей последовательности ординалов, начинающейся с n и имеющей длину $n+2$. Этот факт говорит о том, что понятие произвольной строго убывающей последовательности ординалов, начинающейся с числа n, является достаточно четким понятием.

В связи с этим кажутся не очень серьезными возражения, основанные на том, что если мы запишем утверждение «всякая строго убывающая последовательность обрывается» в виде формального выражения, то окажется, что оно принадлежит классу Π_1^1 в иерархии Клини. Важно не то, какому классу иерархии оно принадлежит, а то, насколько оно очевидно. Мы вернемся к этому вопросу позднее.

В следующем параграфе будет изложено доказательство непротиворечивости (для **PA**), проходящее по следующей схеме. (Для того чтобы подчеркнуть конкретный или «графический» характер формальных доказательств, мы будем говорить «фигура вывода» вместо «вывод».)

1) Мы указываем единообразный метод, такой, что если конкретно задана какая-то фигура вывода P, то этот метод позволяет нам построить другую конкретно заданную фигуру вывода P'; при этом фигура P' имеет ту же заключительную секвенцию, что и P, если заключительная секвенция фигуры P не содержит кванторов. Этот процесс построения фигуры вывода P' по P называется «редукцией» (фигуры вывода P) и будет обозначаться буквой r. Таким образом, $P' = r(P)$.

2) Существует единообразный метод, позволяющий каждой фигуре вывода ставить в соответствие некоторый ординал $< \varepsilon_0$. Ординал, поставленный в соответствие фигуре вывода P (ординал фигуры вывода P), мы обозначим через $o(P)$.

3) Операции o и r удовлетворяют такому условию: всякий раз, когда фигура вывода P содержит применение правила индукции или сечения, то $o(P) > \omega$ и $o(r(P)) < o(P)$, а если P не содержит таких применений, то $o(P) < \omega$.

Предположим, что мы эффективно доказали, что всякая строго убывающая последовательность натуральных чисел конечна и что если задан эффективный метод построения строго убывающих последовательностей ординалов $< \varepsilon_0$, то можно установить, что любая убывающая последовательность, построенная по этому методу, является конечной (т. е. что такая последовательность обрывается). (Под «убывающей последовательностью» мы всегда будем понимать строго убывающую последовательность ординалов.) Тогда в силу 1) — 3) мы можем заключить, что существует эффективный метод преобразования произвольной фигуры вывода P, заключительная секвенция которой не содержит кванторов, в фигуру вывода с той же заключительной секвенцией, не содержащую применений правил сечения и индукции. С другой стороны, легко видеть, что никакая фигура вывода, не содержащая применения этих правил, не может быть фигурой вывода пустой секвенции. Таким образом, мы можем утверждать, что непротиворечивость нашей системы доказана.

Решающим моментом в приведенных выше рассуждениях является доказательство следующего утверждения:

(*) Если задан эффективный метод построения убывающих последовательностей ординалов, то всякая полученная этим методом последовательность должна быть конечной.

Мы собираемся привести одно из возможных доказательств этого утверждения, которое, как кажется автору, лучше других освещает доказательство непротиворечивости.

Пусть $a_0 > a_1 > \ldots$ — некоторая конкретно заданная убывающая последовательность.

(I) Допустим, что $a_0 < \omega$, т. е. a_0 — натуральное число.

Рассмотрим какую-нибудь убывающую последовательность, начинающуюся с некоторого конкретно заданного натурального числа. Коль скоро записан первый член n этой последовательности, можно заключить, что ее длина не превосходит $n+1$. Поэтому мы можем считать, что ординал a_0 не является натуральным числом.

Для того чтобы работать со всеми ординалами $< \varepsilon_0$, мы определим понятия α-последовательности и α-элиминатора для всех ординалов $\alpha < \varepsilon_0$. Мы начнем, однако, с одного простого примера, а не с общего определения.

(II) Допустим, что каждый ординал a_i в последовательности $a_0 > a_1 > \ldots$ записан в нормальной форме; пусть a_i имеет вид

$$\omega^{\mu_1^i} + \omega^{\mu_2^i} + \ldots + \omega^{\mu_{n_i}^i} + k_i,$$

где $\mu_j^i > 0$ и k_i — натуральное число (в частности, возможно, что слагаемое $+k_i$ в действительности отсутствует). Последовательность, в которой у каждого ординала a_i отсутствует слагаемое k_i, мы будем называть 1-*последовательностью*. Сумму $\omega^{\mu_1^i} + \omega^{\mu_2^i} + \ldots + \omega^{\mu_{n_i}^i}$ в a_i мы назовем 1-*главной* частью ординала a_i. Мы опишем эффективный метод M_1, позволяющий делать следующее: по данной убывающей последовательности $a_0 > a_1 > \ldots$, где каждый член a_i записан в нормальной форме, M_1 выдает некоторую (убывающую) 1-последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ так, чтобы выполнялось условие

(C_1) ординал b_0 является 1-главной частью ординала a_0, и мы можем эффективно доказать, что если последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ конечна, то конечна и последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$.

Этот метод M_1 (1-*элиминатор*) определяется следующим образом. Пусть $a_i = a'_i + k_i$, где a'_i есть 1-главная часть ординала a_i. Тогда последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ может быть записана в виде $a'_0 + k_0 > a'_1 + k_1 > \ldots$.

Положим $b_0 = a'_0$. Допустим, что последовательность $b_0 > b_1 > \ldots > b_m$ построена так, что b_m есть a'_j при некотором j. Тогда либо $a'_j = a'_{j+1} = \ldots = a'_{j+p}$ для некоторого p и a_{j+p} — последний член нашей последовательности, либо $a'_j = a'_{j+1} = \ldots \ldots = a'_{j+p} > a'_{j+p+1}$. Это так, поскольку $a'_j = a'_{j+1} = \ldots = a'_{j+p} = \ldots$ влечет $k_j > k_{j+1} > \ldots > k_{j+p} > \ldots$, но такая последовательность (натуральных чисел) должна оборваться (см. (I)). Следовательно, либо, как и утверждалось, исходная последовательность обрывается, либо $a'_{j+p} > a'_{j+p+1}$ для некоторого p. Если имеет место первый случай, то останавливаемся, если же второй, то положим $b_{m+1} = a'_{j+p+1}$.

Из определения очевидно, что $b_0 > b_1 > \ldots > b_m > \ldots$. Допустим, что эта последовательность конечна, т. е. имеет вид $b_0 > b_1 > \ldots > b_m$. Тогда, согласно предписанию для построения ординала b_{m+1}, исходная последовательность также конечна. Таким образом, последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ удовлетворяет условию (C_1), и определение метода M_1 закончено.

(III) Допустим, дана некоторая убывающая последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$, в которой $a_0 < \omega^2$. Применив к этой последовательности 1-элиминатор M_1, мы можем построить 1-последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$, где $b_0 \leqslant a_0$. Тогда последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ может быть записана в виде $\omega \cdot k_0 > \omega \cdot k_1 > \ldots$, откуда следует, что $k_0 > k_1 > \ldots$. В силу (I) последовательность $k_0 > k_1 > \ldots$ должна быть конечной, откуда вытекает, что последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$, а значит, и $a_0 > a_1 > \ldots$ являются конечными.

(IV) Теперь мы определим понятие «n-последовательности» следующим образом. Пусть $a_0 > a_1 > \ldots$ — некоторая убывающая последовательность, записанная в виде $a'_0 + c_0 > a'_1 + c_1 > \ldots$, где если $a_i = a'_i + c_i$, то в ординале a'_i каждый мономиал $\geqslant \omega^n$, а в ординале c_i каждый мономиал $< \omega^n$ (a'_i мы будем называть *n-главной* частью ординала a_i). Такая последовательность называется *n-последовательностью*, если каждый c_i пуст.

Допустим теперь (в качестве предположения индукции), что всякая убывающая последовательность $d_0 > d_1 > \ldots$, где $d_0 < \omega^n$, является конечной. Определим теперь эффективный метод M_n (*n-элиминатор*), который по данной убывающей последовательности $a_0 > a_1 > \ldots$ эффективным образом выдает некоторую n-последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$, удовлетворяющую условию

(C_n) ординал b_0 является n-главной частью ординала a_0, и если последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ конечна, то мы можем эффективным образом показать, что последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ также конечна.

Предписание для M_n следующее. Запишем каждый из a_i как $a'_i + c_i$, где a'_i является n-главной частью ординала a_i. Далее определение происходит способом, очень напоминающим соответствующее определение для 1-последовательностей в (II). А именно положим $b_0 = a'_0$. Допустим, что уже построена последовательность $b_0 > b_1 > \ldots > b_m$ и $b_m = a'_j$. Если $a'_j = a'_{j+1} = \ldots \ldots = a'_{j+p}$ и a'_{j+p} — последний член данной последовательности, то останавливаемся. В противном случае $a'_j = a'_{j+1} = \ldots \ldots = a'_{j+p} > a'_{j+p+1}$ для некоторого p, поскольку $a'_j = a'_{j+1} = \ldots \ldots = a'_{j+p}$ влечет $c_j > c_{j+1} > \ldots > c_{j+p}$, а эта последовательность по предположению индукции конечна; следовательно, для некоторого p имеем $c_{j+p+1} \geqslant c_{j+p}$, откуда вытекает, что $a'_{j+p} > a'_{j+p+1}$. Положим теперь $b_{m+1} = a'_{j+p+1}$. Тогда последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ удовлетворяет условию (C_n), и поэтому определение метода M_n завершено.

(V) С помощью n-элиминатора M_n мы докажем, что всякая убывающая последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$, где $a_0 < \omega^{n+1}$, должна быть конечной. Применяя к такой последовательности метод M_n, мы можем эффективно построить некоторую n-последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$, где $b_0 \leqslant a_0$. Более того, каждый ординал b_i может быть записан в виде $\omega^n \cdot k_i$, где k_i — некоторое натуральное число. Поэтому $\omega^n \cdot k_0 > \omega^n \cdot k_1 > \ldots$, откуда вытекает, что $k_0 > k_1 > \ldots$, и эта последовательность конечна в силу (I), следовательно, последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ конечна, откуда в свою очередь вытекает, что последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ тоже конечна.

(VI) Из (III) и (IV) мы можем заключить следующее: по всякому (конкретно) заданному натуральному числу n мы можем эффективно показать, что любая убывающая последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$, у которой $a_0 < \omega^n$, является конечной.

(VII) Всякая убывающая последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ является конечной, если $a_0 < \omega^\omega$, так как последнее означает, что $a_0 < \omega^n$ для некоторого n, и, таким образом, применимо (VI).

(VIII) Теперь будем развивать общую теорию α-последовательностей и (α, n)-элиминаторов, где α пробегает все ординалы $< \varepsilon_0$, а n — все натуральные числа > 0. Убывающая последовательность $d_0 > d_1 > \ldots$ называется *α-последовательностью*, если в каждом d_i все мономиалы $\geqslant \omega^\alpha$. Если $a = a' + c$, причем в ординале a' каждый мономиал $\geqslant \omega^\alpha$, а в ординале c каждый мономиал $< \omega^\alpha$, то мы скажем, что a' является *α-главной частью* ординала a. Метод M_α (*α-элиминатор*) обладает тем свойством, что по всякой данной конкретной убывающей последовательности $a_0 > a_1 > \ldots$ он эффективно выдает некоторую α-последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$, такую, что

(i) ординал b_0 является α-главной частью ординала a_0;

(ii) если последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$ конечна, то мы можем эффективно показать, что последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ тоже конечна.

(Ясно, что $a_0 \geqslant b_0$.)

Мы отложим определение α-элиминаторов. В предположении, что для всякого α уже определен α-элиминатор, мы можем показать, что всякая убывающая последовательность является конечной. В самом деле, рассмотрим последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$. Существует α, такой, что $a_0 < \omega^{\alpha+1}$. Тогда α-элиминатор эффективно выдает некоторую α-последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$, удовлетворяющую указанным выше условиям (i) и (ii). Поскольку $b_0 \leqslant a_0$, каждый из ординалов b_i можно записать в виде $\omega^\alpha \cdot k_i$; таким образом, $\omega^\alpha \cdot k_0 > \omega^\alpha \cdot k_1 > \ldots$, откуда вытекает, что $k_0 > k_1 > \ldots$. В силу (I) это означает, что последовательность $k_0 > k_1 > \ldots$ конечна, следовательно, конечна и последовательность $b_0 > b_1 > \ldots$; поэтому последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ тоже конечна. Тем самым утверждение (*) доказано. Следовательно, теперь нам осталось определить (построить) α-элиминаторы для всех $\alpha < \varepsilon_0$.

(IX) Переименуем α-элиминаторы в (α, 1)-*элиминаторы*. Предположим, что (α, n)-*элиминаторы* уже определены. Тогда (β, $n+1$)-*элиминатор* представляет собой эффективный метод построения $(\alpha \cdot \omega^\beta, n)$-элиминатора по любому данному (α, n)-элиминатору. Будем следовать такой процедуре:

(X) Пусть $\{\mu_m\}_{m<\omega}$ — некоторая возрастающая последовательность ординалов, предел которой равен μ (причем существует эффективный метод получения μ_m по каждому m), и пусть g_m есть μ_m-элиминатор. Определим тогда μ-элиминатор g следующим образом. Допустим, что $a_0 > a_1 > \ldots$ — некоторая конкретно заданная последовательность. Если a_0 записан в виде $a_0' + c_0$, где a_0' является μ-главной частью ординала a_0, то существует некоторое m, такое, что $c_0 < \omega^{\mu_m}$; поэтому можно считать, что каждый из a_i записан в виде $a_i' + c_i$, где a_i' является μ_m-главной частью ординала a_i. Тогда к последовательности $a_0 > a_1 > \ldots$ можно применить метод g_m и эффективным образом получить некоторую μ_m-последовательность

$$b_{10} > b_{11} > b_{12} > \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяющую указанным выше условиям (i) и (ii) (где роль α играет μ_m), причем $b_{10} = a_0'$, так что на самом деле b_{10} является μ-главной частью ординала a_0. Положим $b_0 = b_{10}$.

Рассмотрим теперь последовательность $b_{11} > b_{12} > \ldots$. Предположим, что $b_{11} \geqslant \omega^\mu$. Повторим описанную выше процедуру для последовательности (1), т. е. запишем $b_{10} = b_{10}' + c_{10}$, где ординал b_{10}' является μ-главной частью ординала b_{10}. Тогда существует некоторое m_1, такое, что $c_{10} < \omega^{\mu_{m_1}}$. Применив теперь процедуру g_{m_1} к последовательности $b_{11} > b_{12} > b_{13} > \ldots$, мы получим некоторую μ_{m_1}-последовательность

$$b_{21} > b_{22} > b_{23} > \ldots,$$

удовлетворяющую условиям (i) и (ii) (где роль α уже играет μ_{m_1}), причем b_{21} является μ-главной частью ординала b_{10}. Положим $b_1 = b_{21}$. Допустим, что $b_{22} \geqslant \omega^\mu$. Тогда повторим эту процедуру для последовательности $b_{22} > b_{23} > \ldots$, в результате чего получим последовательность

$$b_{32} > b_{33} > b_{34} > \ldots$$

и положим $b_2 = b_{32}$. Продолжая таким образом, мы получим некоторую μ-последовательность

$$b_0 > b_1 > b_2 > \ldots .$$

Если эта последовательность конечна и, скажем, обрывается на $b_l = b_{l+1,\,l}$, то отсюда следует, что в последовательности

$$b_{l+1,\,l} > b_{l+1,\,l+1} > b_{l+1,\,l+2} > \ldots \tag{2}$$

должно быть $b_{l+1,\,l+1} < \omega^\mu$. Поэтому $b_{l+1,\,l+1} < \omega^{\mu_{m'}}$ для некоторого m'. Применим к последовательности (2) метод $g_{m'}$; мы получим тогда конечную $\mu_{m'}$-последовательность, состоящую лишь из двух членов, причем второй член равен 0. Значит, последовательность (2) является конечной (по определению $\mu_{m'}$-элиминатора); следовательно, конечной является и последовательность $b_{l,\,l-1} > b_{l,\,l} > \ldots$, и так далее (возвращаясь назад), пока не получим, что исходная последовательность $a_0 > a_1 > \ldots$ также является конечной.

(XI) Пусть $\{\mu_m\}_{m<\omega}$ — некоторая возрастающая последовательность ординалов, предел которой равен μ, и пусть для каждого m конкретно задан $(\mu_m, n+1)$-элиминатор. Тогда мы можем определить $(\mu, n+1)$-элиминатор следующим образом. Определение проводится индукцией по n. Для $n = 0$ (т. е. при $n+1 = 1$) применяем (X). Предположим, что (XI) справедливо для n; тогда существует операция k_n, такая, что для всякой последовательности $\{\gamma_m\}_{m<\omega}$, предел которой равен γ, и для всякого (γ_m, n)-элиминатора g'_m применение операции k_n к g'_m эффективно выдает (γ, n)-элиминатор. Теперь, чтобы доказать (XI) для $n+1$, предположим, что последовательность $\{\beta_m\}_{m<\omega}$ имеет предел β и что задан (α, n)-элиминатор p. Поскольку g_m есть $(\beta_m, n+1)$-элиминатор, он по p эффективно выдает $(\alpha\cdot\omega^{\beta_m}, n)$-элиминатор, который мы обозначим через $g_m(p)$. Тогда, взяв $\alpha\cdot\omega^{\beta_m}$ в качестве γ_m, $g_m(p)$ — в качестве g'_m и $\alpha\cdot\omega^{\beta}$ — в качестве γ, мы можем применить предположение индукции; таким образом, применение операции k_n к последовательности $\{g'_m\}$ дает $(\alpha\cdot\omega^{\beta}, n)$-элиминатор q. Эта процедура получения q по p является эффективной и, таким образом, выдает нам $(\beta, n+1)$-элиминатор.

(XII) Пусть g есть $(\mu, n+1)$-элиминатор. Построим $(\mu\cdot\omega, n+1)$-элиминатор. В силу (XI) достаточно показать, что мы можем (по g) эффективно построить $(\mu\cdot m, n+1)$-элиминатор для всякого $m<\omega$. Предположим, что задан (α, n)-элиминатор f. Заметим, что

$$\alpha\cdot\omega^{\mu\cdot m}=\alpha\cdot\underbrace{\omega^{\mu}\cdot\omega^{\mu}\ \ldots\ \omega^{\mu}}_{m}.$$

Поскольку g есть $(\mu, n+1)$-элиминатор, он по f эффективно строит $(\alpha\cdot\omega^{\mu}, n)$-элиминатор $g(f)$. Применив теперь g к этому элиминатору, мы получим $(\alpha\cdot\omega^{\mu}\cdot\omega^{\mu}, n)$-элиминатор $g(g(f))$. Повторив этот процесс m раз, мы получим $(\alpha\cdot\omega^{\mu\cdot m}, n)$-элиминатор $g(g(\ldots\ g(f)\ \ldots))$.

(XIII) Мы можем теперь для всякого $m\geqslant 0$ построить $(1, m+1)$-элиминатор. Построение проходит индукцией по m. В качестве $(1, 1)$-элиминатора возьмем M_1. При $m>0$ предположим, что f есть (α, m)-элиминатор. Тогда, согласно (XII) (где $n+1=m$), мы можем по f эффективно построить $(\alpha\cdot\omega, m)$-элиминатор. Следовательно, у нас есть $(1, m+1)$-элиминатор.

(XIV) Заключение: для всякого α вида ω_m, т. е. вида

$$\left.\begin{matrix}\omega\\ \cdot^{\cdot^{\cdot}}\\ \omega\end{matrix}\right\}m$$

мы можем построить (α, n)-элиминатор. Это построение проводится индукцией по m. Если $m=0$, то α есть $1=\omega^0$. Тогда (α, n)-элиминатор уже определен в (XIII) для любого n. Допустим, что f есть $(1, n)$-элиминатор, а g есть $(\alpha, n+1)$-элиминатор, который по предположению индукции уже определен. Тогда применяем элиминатор g к f, в результате чего получаем искомый

$(1\cdot\omega^{\alpha}, n)=(\omega^{\alpha}, n)$-элиминатор. Утверждение (*) полностью доказано.

Наша точка зрения, изложенная выше, подобна гильбертовской точке зрения в том смысле, что обе они включают в себя «мысленные эксперименты» только с четко определенными операциями, применяемыми к некоторым конкретно заданным фигурам, и с некоторыми ясно определенными действиями над этими операциями. Например, α-элиминатор есть эффективная операция, которая оперирует с конкретно заданными фигурами. Далее, $(\beta, 2)$-элиминатор есть эффективный метод, позволяющий осуществить некоторый мысленный эксперимент с тем, чтобы построить $\alpha\cdot\omega^{\beta}$-элиминатор по произвольному, конкретно заданному α-элиминатору. Поэтому, если дан какой-то ординал, например ω_k, у нас есть метод, позволяющий эффективно построить ω_k-элиминатор. Мы полагаем, что на доказательство непротиворечивости системы **PA**, которое будет изложено в § 12, наибольший свет проливает рассмотрение его в терминах элиминаторов. (На самом деле нетрудно обобщить это понятие так, чтобы оно включало в себя, скажем, понятие (α, ω)-элиминатора и т. д.; однако для доказательства непротиворечивости системы **PA** это не нужно.)

Идеи, которые мы сейчас изложили, обычно формулируются в терминах достижимости. По-видимому, будет полезно переформулировать наши идеи в терминах этого понятия, которое (как мы полагаем) является грубым, но удобным способом выражения идеи элиминатора.

Мы говорим, что ординал μ *достижим*, если доказано, что всякая строго убывающая последовательность, начинающаяся с μ, является конечной. Более точно, мы употребляем термин «достижимость», только когда мы на самом деле убедились или доказали конструктивно, что данный ординал достижим. Следовательно, мы вообще не рассматриваем общее понятие достижимости и потому не определяем «отрицание достижимости» как таковое. Если мы говорим о «недостижимости», то это значит, что мы конкретно указали некоторую бесконечную строго убывающую последовательность.

Во-первых, предположим, что мы арифметизовали построение ординалов (меньших, чем ε_0) согласно определению O1—O3. Другими словами, предположим, что задана некоторая гёделева нумерация этих (выражений для) ординалов, которая обладает определенными «хорошими» свойствами, а именно индуцированные теоретико-числовые отношения и функции, соответствующие ординальным отношениям $=$, $<$ и функциям $+$, $\cdot$ и экспоненте с основанием ω (которые мы часто будем по-прежнему обозначать теми же символами), являются примитивно рекурсивными; мы можем также примитивно рекурсивно привести всякий ординал (его гёделев номер) к нормальной форме и, следовательно, примитивно рекурсивным образом распознать, представляет он собой предельный или непредельный ординал и т. д. Порядок на натуральных числах, соответствующий отношению $<$ (на ординалах), называется «стандартным вполне-упорядочением по типу ε_0» или просто «стандартным упорядочением по ε_0».

Наш метод доказательства достижимости ординалов состоит в следующем (мы работаем в рамках нашего стандартного вполне-упорядочения по типу ε_0):

(1) Если известно, что $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots \to \nu$ (т. е. ν является пределом возрастающей последовательности $\{\mu_i\}$) и каждый μ_i достижим, то ν также достижим.

(2) Дается метод, с помощью которого из достижимости некоторой подсистемы ординалов можно вывести достижимость большей системы.

(3) Повторяя (1) и (2), мы показываем, что каждый начальный отрезок нашего упорядочения достижим, а следовательно, достижимо и все упорядочение.

Тот факт, что всякая убывающая последовательность, начинающаяся с натурального числа, конечна, можно доказать таким же способом, как и выше в (I).

Перейдем теперь к следующему этапу — рассмотрим убывающие последовательности ординалов, меньших, чем $\omega + \omega$. Здесь мы опять можем убедиться, что всякая убывающая последовательность обрывается. Это достигается следующим образом. Рассмотрим первый член μ_0 этой последовательности. Мы можем эффективно распознать, имеет ординал μ_0 вид n или $\omega + n$, где n — натуральное число. Если он имеет вид n, то достаточно повторить приведенное выше рассуждение для натуральных чисел. Если же он имеет вид $\omega + n$, рассмотрим первые $n + 2$ члена этой последовательности

$$\mu_0 > \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_{n+1}.$$

Легко видеть, что ординал μ_{n+1} не может иметь вид $\omega + m$ ни для какого натурального m, и потому он должен быть натуральным числом, так что теперь повторяем доказательство для натуральных чисел. Этот метод можно распространить на случаи убывающих последовательностей ординалов, меньших, чем $\omega \cdot n$; меньших, чем ω^2; меньших, чем ω^ω, и т. д.

Теперь изложим более математическую разработку этой идеи.

Лемма 11.1. *Если ординалы μ и ν достижимы, то достижима и их сумма $\mu + \nu$.*

Доказательство. Мы только обобщаем доказательство того, что ординал $\omega + \omega$ достижим, и пользуемся следующим легко доказываемым фактом: по данным ординалам μ, ξ, ν, таким, что $\mu \leqslant \xi < \mu + \nu$, можно эффективно найти ординал ν_0, такой, что $\nu_0 < \nu$ и $\xi = \mu + \nu_0$.

Лемма 11.2. *Если ординал μ достижим, то и ординал $\mu \cdot \omega$ достижим.*

Доказательство. Мы пользуемся следующим легко доказываемым фактом: если $\nu < \mu \cdot \omega$, то можно найти такое n, что $\nu < \mu \cdot n$.

С помощью этих лемм мы теперь докажем, что все ординалы, меньшие, чем ε_0, являются достижимыми. Введем сперва индукцией по n вспомогательное понятие «n-достижимый».

Определение 11.3. Ординал μ называется 1-*достижимым*, если он достижим. Ординал μ называется $(n+1)$-*достижимым*, если для всякого n-достижимого ординала ν ординал $\nu \cdot \omega^\mu$ тоже n-достижим.

Следует подчеркнуть, что понятие «ординал ν является n-достижимым» является ясным только тогда, когда эффективно доказано, что ν является n-достижимым.

Лемма 11.4. *Если ординал μ n-достижим и $\nu < \mu$, то ординал ν также n-достижим.*

Лемма 11.5. *Пусть $\{\mu_m\}$ — некоторая возрастающая последовательность ординалов, предел которой равен μ. Если каждый μ_m n-достижим, то n-достижим и μ.*

Лемма 11.6. *Если ординал ν $(n+1)$-достижим, то и ординал $\nu \cdot \omega$ $(n+1)$-достижим.*

Доказательство. Нам надо показать, что если μ есть n-достижимый ординал, то ординал $\mu \cdot \omega^{\nu \cdot \omega}$ также n-достижим. Для этого достаточно показать, что ординал $\mu \cdot \omega^{\nu \cdot m}$ является n-достижимым при всяком m (см. лемму 11.5). Однако это очевидно, поскольку

$$\mu \cdot \omega^{\nu \cdot m} = \mu \cdot (\omega^\nu)^m = \mu \cdot \omega^\nu \cdot \ldots \cdot \omega^\nu$$

и ординал ν $(n+1)$-достижим.

Предложение 11.7. *Ординал 1 является $(n+1)$-достижимым.*

Доказательство. Допустим, что μ n-достижим. Тогда по леммам 11.2 и 11.6 $\mu \cdot \omega = \mu \cdot \omega^1$ тоже n-достижим, а это означает по определению, что 1 является $(n+1)$-достижимым ординалом.

Определение 11.8. $\omega_0 = 1$; $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$.

Предложение 11.9. *Ординал* ω_k *является* $(n-k)$-*достижимым для любого* $n > k$.

Доказательство. Индукция по k. Если $k = 0$, то $\omega_k = 1$, и поэтому ω_0 n-достижим для всех n (см. предложение 11.7). Пусть ω_k $(n-k)$-достижим. Поскольку ординал 1 является $[n-(k+1)]$-достижимым, $1 \cdot \omega^{\omega_k}$ также $[n-(k+1)]$-достижим, согласно определению 11.3, т. е. ординал ω_{k+1} является $[n-(k+1)]$-достижимым.

Частным случаем предложения 11.9 является

Предложение 11.10. *Для всякого* k *ординал* ω_k *достижим*.

Если дана убывающая последовательность ординалов (меньших, чем ε_0), то найдется ω_k, такой, что все ординалы в этой последовательности меньше, чем ω_k. Следовательно, согласно предложению 11.10, эта последовательность должна быть конечной. Таким образом, мы можем заключить:

Предложение 11.11 *Ординал* ε_0 *достижим.*

Важно отметить следующее обстоятельство. Доказательство достижимости ординала ε_0 (с помощью элиминаторов, согласно (I)-(XIV), или с помощью предложения 11.11) существенно зависит от того факта, что мы используем некоторое стандартное вполне-упорядочение по типу ε_0, для которого последовательные шаги в доказательстве очевидны. Разумеется, это не верно для произвольного вполне-упорядочения по типу ε_0 и тем более для произвольного вполне-упорядочения или ординала.

Чтобы лучше понять нашу точку зрения, сравним ее с другими. Рассмотрим сначала теорию множеств. При нашем подходе не предполагается существования абсолютного мира (как это делается в теории множеств), который можно было бы считать основанным на «бесконечном разуме». Напротив, мы пытаемся по возможности избежать обращения к абсолютному миру «бесконечного разума». Хотя при рассмотрении теории чисел без включения в нее понятия множества абсолютный мир чисел 0, 1, 2, ... не является столь уж сложным понятием, а для бесконечного разума он был бы даже совсем ясным и прозрачным, но, поскольку наш разум конечен, для нас, в конце концов, это воображаемый мир, каким бы ясным и прозрачным он ни казался. Следовательно, нам надо так или иначе убедиться в существовании такого мира.

Рассмотрим теперь интуиционизм. Хотя наша точка зрения и точка зрения интуиционизма имеют много общего, между ними существует разница, которую можно выразить следующим образом.

Наш подход избегает, насколько возможно, абстрактных понятий, кроме тех, которые в конечном счете сводятся к конкретным операциям или к мысленным экспериментам над конкретно заданными последовательностями. Конечно, нам также придется иметь дело с операциями над операциями и т. д. Однако такие операции тоже можно представлять себе как мысленные эксперименты над (конкретными) операциями.

Интуиционизм, напротив, намеренно имеет дело с абстрактными понятиями. Это видно из того, что основное его понятие «конструкции» (или «доказательства») абсолютно абстрактно, и эта абстрактность, по-видимому, также необходима для непредикативного интуиционистского понятия «импликация». Целью интуиционизма не является сведение этих абстрактных понятий к конкретным, как это делаем мы.

Мы считаем, что наша точка зрения есть естественное расширение финитной точки зрения Гильберта и подобна точке зрения Генцена; поэтому мы называем ее точкой зрения Гильберта — Генцена.

Итак, доказательство непротиворечивости в стиле Генцена проводится следующим образом:

(1) Строим подходящее стандартное упорядочение, придерживаясь строго финитной точки зрения.

(2) Убеждаемся, придерживаясь точки зрения Гильберта — Генцена, что это в самом деле вполне-упорядочение.

(3) В остальной части доказательства пользуемся только строго финитными средствами.

Перейдем теперь к доказательству непротиворечивости системы **PA**.

§ 12. Доказательство непротиворечивости системы PA

Впредь будем считать, что система **PA** формализована в некотором языке, содержащем константу $\bar{f}$ для каждой примитивно рекурсивной функции f. Обозначим этот язык через L.

В качестве начальных секвенций системы **PA** возьмем также определяющие равенства для всех примитивно рекурсивных функций, все секвенции вида $\rightarrow s = t$, где s, t — замкнутые термы, обозначающие одно и то же число, и все секвенции вида $s = t \rightarrow$, где s, t — замкнутые термы, обозначающие разные числа.

Мы будем следовать второму варианту генценовского доказательства непротиворечивости арифметики первого порядка. В этом доказательстве используется «метод редукций». Поскольку этот метод будет часто применяться в дальнейшем, мы вкратце изложим его здесь (предполагаем, что ординалы, меньшие, чем ε_0, представлены своими обозначениями и вполне упорядочены некоторым фиксированным стандартным образом, как указано в § 11).

Во-первых, допустим, что выводам эффективно поставлены в соответствие некоторые ординалы, меньшие, чем ε_0. Далее, пусть R — некоторое свойство выводов, такое, что:

(*) Для всякого вывода P, удовлетворяющего условию R, мы можем (эффективно по P) найти вывод P', удовлетворяющий условию R, такой, что его ординал меньше, чем ординал вывода P.

Тогда из (*) и из достижимости ординала ε_0 следует утверждение:

(**) Никакой вывод не обладает свойством R.

Процедура нахождения (или построения) вывода P' по выводу P в (*) называется *редукцией вывода* P *к* P' (для свойства R).

Нас будет интересовать свойство R выводов оканчиваться пустой секвенцией $\rightarrow$.

Указав некоторую единообразную процедуру для этого свойства (лемма 12.8), мы тем самым докажем (в силу (**)), что никакой вывод в системе **PA** не оканчивается секвенцией $\rightarrow$; другими словами, верна

Теорема 12.1. *Система* **PA** *непротиворечива.*

Разумеется, значение этой теоремы состоит в методе ее доказательства, который, за исключением допущения о достижимости ординала ε_0, является строго финитным. (Никто не сомневается в том, что арифметика Пеано непротиворечива!)

Теорема 12.1, как мы уже сказали, следует из леммы 12.8. Введем сначала еще одно понятие.

Определение 12.2. Вывод в системе **PA** называется *простым*, если в нем нет свободных переменных и он содержит только математические начальные секвенции, применения слабых правил и несущественные применения правила сечения.

(Напомним, что слабыми правилами являются все структурные правила, кроме сечения. Определения остальных понятий см. в § 9.)

Лемма 12.3. *Не существует простого вывода секвенции* $\rightarrow$.

Доказательство. Пусть P — произвольный простой вывод. Все формулы в P имеют вид $s=t$, где s и t — замкнутые термы. Заметим, что, интерпретируя константы естественным образом, мы можем (за конечное число шагов) определить, является равенство $s=t$ истинным или ложным (поскольку для этого надо лишь вычислить значения определенных примитивно рекурсивных функций). Секвенция в P принимает значение T, если хотя бы одна формула в ее антецеденте ложна или хотя бы одна формула в сукцеденте истинна; в противном случае эта секвенция принимает значение F. Легко видеть, что математические начальные секвенции принимают значение T и что при применениях слабых правил и при несущественных применениях правила сечения значение T передается от верхних секвенций к нижним. Поэтому все секвенции вывода P принимают значение T. Но секвенция $\rightarrow$ имеет значение F.

Определение 12.4. (1) *Степенью формулы* называется (как и в § 5) число содержащихся в ней логических символов. *Степенью сечения* называется степень его высекаемой формулы; *степенью применения правила индукции* называется степень его индукционной формулы.

(2) *Высотой секвенции* S в выводе P (обозначается через $h(S, P)$ или, короче, $h(S)$) называется максимум степеней применений правил сечения и индукции, входящих в вывод P ниже секвенции S.

Предложение 12.5. (1) *Высота заключительной секвенции в любом выводе равна* 0.

(2) *Если секвенция* S_1 *расположена в выводе над секвенцией* S_2, *то* $h(S_1)\geqslant h(S_2)$; *если* S_1 *и* S_2 — *верхние секвенции некоторого применения правила вывода, то* $h(S_1)=h(S_2)$.

Перед тем как поставить в соответствие выводам ординалы, мы введем следующее обозначение. Для всякого ординала α и натурального числа n индукцией по n определим $\omega_n(\alpha)$: $\omega_0(\alpha)=\alpha$, $\omega_{n+1}(\alpha)=\omega^{\omega_n(\alpha)}$. Таким образом,

$$\omega_n(\alpha)=\underbrace{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}_{n}.$$

Определение 12.6. Сопоставление ординалов (меньших, чем ε_0) выводам в системе **PA**. Сначала мы поставим в соответствие ординалы секвенциям в выводе. Ординал, поставленный в соответствие секвенции S в выводе P, будет обозначаться через $o(S, P)$ или $o(S)$. Пусть теперь дан некоторый вывод P. Определим для всех секвенций S в P ординал $o(S)=o(S, P)$.

Далее будем предполагать, что ординалы записаны в нормальной форме (см. § 11). Если μ и ν — ординалы вида $\omega^{\mu_1}+\ldots$ $\ldots+\omega^{\mu_n}$ и $\omega^{\nu_1}+\ldots+\omega^{\nu_n}$ соответственно (так что $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots$ $\ldots\geqslant\mu_m$ и $\nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\ldots\geqslant\nu_n$), то $\mu\#\nu$ определяется как ординал $\omega^{\lambda_1}+\omega^{\lambda_2}+\ \dots\ +\omega^{\lambda_{m+n}}$, где $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}\}=\{\mu_1, \mu_2, \dots, \nu_1, \nu_2, \dots\}$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{m+n}$. Ординал $\mu \# \nu$ называется *натуральной суммой* ординалов μ и ν.

(1) Начальным секвенциям (в P) ставится в соответствие ординал 1.

(2) Нижним секвенциям применений слабых правил ставятся в соответствие те же ординалы, что и верхним секвенциям этих применений.

(3) Если S — нижняя секвенция некоторого применения правила $\wedge$-слева, $\vee$-справа, $\supset$-справа, $\neg$-слева, $\neg$-справа или кванторного правила и верхней секвенции этого применения поставлен в соответствие ординал μ, то $o(S)=\mu+1$.

(4) Если S — нижняя секвенция некоторого применения правила $\wedge$-справа, $\vee$-слева или $\supset$-слева и верхним секвенциям этого применения поставлены в соответствие ординалы μ и ν, то $o(S)=\mu \# \nu$.

(5) Если S — нижняя секвенция некоторого сечения и его верхним секвенциям поставлены в соответствие ординалы μ и ν, то $o(S)$ равняется $\omega_{k-l}(\mu \# \nu)$, т. е.

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\mu \# \nu}}}}}\right\} k-l,$$

где k — высота верхних секвенций, а l — высота секвенции S.

(6) Если S — нижняя секвенция некоторого применения правила индукции и его верхней секвенции сопоставлен ординал μ, то $o(S)$ равняется $\omega_{k-l+1}(\mu_1+1)$, т. е.

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\mu_1+1}}}}}\right\} (k-l)+1,$$

где μ имеет нормальную форму $\omega^{\mu_1}+\omega^{\mu_2}+\ \dots\ +\omega^{\mu_n}$ (причем $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_n$), а k и l — высоты верхней секвенции и секвенции S соответственно.

(7) Ординал $o(P)$ вывода P равняется ординалу его заключительной секвенции.

Мы используем следующую запись:

$$P:\ \begin{array}{c} \ddots\ \vdots\ \therefore \\ \overset{\mu}{\Gamma \to \Delta} \end{array}$$

для обозначения вывода P секвенции $\Gamma \to \Delta$, такого, что $o(\Gamma \to \Delta,\ P)=o(P)=\mu$.

Лемма 12.7. *Пусть P — некоторый вывод, содержащий секвенцию S_1, ниже которой в P нет применений правила индукции, P_1 — подвывод вывода P, оканчивающийся секвенцией S_1, P_1' — какой-то другой вывод этой секвенции и P' — вывод, полученный из P заменой в нем P_1 на P_1':*

$$P:\ P_1\left\{\begin{array}{c}\ddots\vdots\therefore\\ S_1\end{array}\right. , \qquad P':\ P_1'\left\{\begin{array}{c}\ddots\vdots\therefore\\ S_1\end{array}\right. .$$
$$\qquad\ \ddots\vdots\therefore \qquad\qquad\qquad \ddots\vdots\therefore$$

Предположим также, что $o(S_1;\ P') < o(S_1;\ P)$. Тогда $o(P') < o(P)$.

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь нить вывода P, проходящую через S_1. Мы покажем, что для любой секвенции S этой нити, расположенной ниже секвенции S_1 или совпадающей с ней, выполняется следующее: если S' — секвенция в выводе P', «соответствующая» секвенции S, то

$$(*) \qquad o(S';\ P') < o(S;\ P).$$

Это верно для $S=S_1$ по условию, а свойство (*), как можно проверить, сохраняется при переходе от верхних секвенций к нижним при всех правилах вывода. (Мы пользуемся тем фактом, что натуральная сумма строго монотонна по каждому аргументу, т. е. $\alpha < \beta \Rightarrow (\alpha \# \gamma < \beta \# \gamma$ и $\gamma \# \alpha < \gamma \# \beta)$.) Наконец, взяв в качестве S заключительную секвенцию вывода P, мы приходим к нужному заключению.

Эта лемма используется неоднократно в нашем доказательстве непротиворечивости.

Пусть теперь R — свойство вывода P оканчиваться секвенцией $\to$, т. е. для вывода P справедливо $\mathrm{R}(P)$ тогда и только тогда, когда P есть вывод секвенции $\to$.

Отметим сначала, что если P — вывод секвенции $\to$, то всякое применение логического правила в P является неявным (см. определение 9.7), поскольку в противном случае пучок, содержащий главную формулу такого применения, должен был бы оканчиваться некоторой формулой, входящей в заключительную секвенцию.

Поэтому определение заключительной части таких выводов можно сформулировать следующим образом.

Заключительная часть вывода секвенции $\to$ состоит из всех секвенций, встречающихся при движении вверх вдоль любой нити от заключительной секвенции до первого (считая снизу) применения логического правила. (Тогда верхняя секвенция этого применения уже не принадлежит заключительной части, а нижняя секвенция и все секвенции, расположенные ниже ее, принадлежат.) Данное применение является граничным.

Лемма 12.8. *Если P — вывод секвенции $\to$, то существует другой вывод P' секвенции $\to$, такой, что $o(P') < o(P)$.*

Доказательство. Пусть P — вывод секвенции $\to$. В силу предложения 9.8 можно считать, что вывод P регулярен. Опишем „редукцию“ вывода P к искомому выводу P'. Эта редукция состоит из некоторого числа шагов, определяемых ниже. Каждый шаг выполняется конечное число раз, и на каждом шаге мы предполагаем, что предыдущие шаги уже выполнены (столько раз, сколько это возможно).

На каждом шаге ординал получающегося вывода не увеличивается и по крайней мере на одном шаге он уменьшается.

Шаг 1. Допустим, что заключительная часть вывода P содержит некоторую свободную переменную, скажем a, которая не используется в P как собственная. Заменим тогда a на константу 0. Мы получим вывод секвенции $\to$ (в силу аналога леммы 2.10 для системы **PA**), имеющий тот же ординал.

Шаг 1 повторяется до тех пор, пока в заключительной части не останется свободных переменных, не используемых в качестве собственных.

Шаг 2. Допустим, что заключительная часть вывода P содержит применения правила индукции. Пусть I — самое нижнее такое применение. Предположим, что I имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P_0(a) & \left\{\begin{array}{c} \vdots \\ F(a),\ \Gamma \xrightarrow{\mu} \Delta,\ F(a') \end{array}\right. \\ I & \overline{\ F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(s)\ } \\ & \qquad\vdots \\ & \qquad\to, \end{array}$$

где $P_0(a)$ — подвывод, оканчивающийся секвенцией $F(a),\ \Gamma \to \Delta,\ F(a')$, и пусть l и k — высоты верхней секвенции (обозначим ее через S) и нижней секвенции (обозначим ее через S_0) применения I соответственно. Тогда

$$o(S_0) = \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1),$$

где $\mu = o(S) = \omega^{\mu_1} + \omega^{\mu_2} + \ldots + \omega^{\mu_n}$ и $\mu_n \leqslant \ldots \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1$. Так как ниже I нет вхождений свободных переменных, то терм s замкнут, и поэтому существует натуральное число m, такое, что секвенция $\to s = \bar{m}$ имеет в **PA** вывод, не содержащий применений правила индукции и существенных сечений (в силу леммы 9.6); следовательно, для секвенции $F(\bar{m}) \to F(s)$ найдется некоторый вывод Q, также не содержащий применений правила индукции и существенных сечений (согласно лемме 9.6). Пусть $P_0(\bar{n})$ — вывод, полученный из P_0 заменой в нем всюду a

на $\bar{n}$. Рассмотрим следующий вывод P':

$$\begin{array}{llll} & P_0(\bar{0}) & P_0(\bar{1}) & P_0(\bar{2}) \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_1 & F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(0') & F(0'),\ \Gamma \to \Delta,\ F(0'') & \\ S_2 & \multicolumn{2}{c}{\overline{\qquad F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(0'') \qquad}} & F(0''),\ \Gamma \to \Delta,\ F(0''') \\ S_3 & \multicolumn{3}{c}{\overline{\qquad F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(0''') \qquad}} \\ & & \vdots & Q \\ & & & \vdots \\ S_m & & F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(\bar{m}) & F(\bar{m}) \xrightarrow{q} F(s) \\ S_0 & & \multicolumn{2}{c}{\overline{\qquad F(0),\ \Gamma \to \Delta,\ F(s) \qquad}} \\ & & \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ & & \multicolumn{2}{c}{\to\ ,} \end{array}$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_m, S_0$ обозначают секвенции, расположенные справа от них, и все секвенции $S_1, \ldots, S_m$ имеют высоту l, так как все формулы вида $F(\bar{n})$, $n = 0, \ldots, m$, имеют одинаковую степень. Следовательно,

$$o(F(\bar{n}),\ \Gamma \to \Delta,\ F(\bar{n}');\ P') = \mu \quad \text{для} \quad n = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Поскольку вывод Q не содержит существенных сечений и применений правила индукции, то $o(F(\bar{m}) \to F(s);\ P') = q < \omega$, $o(S_2) = \mu \# \mu$; $o(S_3) = \mu \# \mu \# \mu$; ..., и вообще, если положить $\mu * n = \mu \# \mu \# \ldots \# \mu$ (n раз), то $o(S_n) = \mu * n$ для $n = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом,

$$o(S_0) = \omega_{l-k}(\mu * m + q)$$

и $\mu * m + q < \omega^{\mu_1 + 1}$, так как $q < \omega$. Следовательно,

$$o(S_0;\ P') = \omega_{l-k}(\mu * m + q) < \omega_{l-k+1}(\mu_1 + 1) = o(S_0;\ P).$$

Таким образом, $o(S_0;\ P') < o(S_0,\ P)$, и поэтому в силу леммы 12.7 $o(P') < o(P)$.

Итак, если вывод P содержит применение правила индукции в своей заключительной части, мы редуцируем P к некоторому выводу P' секвенции $\to$, для которого $o(P') < o(P)$. В противном случае, т. е. если вывод P не содержит применений правила индукции в своей заключительной части, мы переходим к шагу 3.

Шаг 3. Допустим, что заключительная часть вывода P содержит логическую начальную секвенцию $D \to D$. Поскольку заключительная секвенция пуста, обе эти формулы D (или, более точно, их потомки) должны исчезнуть в результате применений правила сечения. Предположим, что некоторый потомок формулы D, входящей в антецедент, становится высекаемой формулой раньше, чем потомок формулы D, входящей в сукцедент (т. е. в следующей фигуре потомок формулы D из сукцедента секвенции $D\to D$ входит в Ξ). Вывод P имеет вид

$$\begin{array}{c} S\quad \dfrac{\begin{matrix}\\ \vdots\\ \Gamma\to\Delta,\ D\end{matrix}\qquad\quad \begin{matrix}D\to D\\ \vdots\\ D,\ \Pi\to\Xi\end{matrix}}{\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Xi} \\ \vdots \\ \to\ . \end{array}$$

Редуцируем его к следующему выводу P':

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma\to\Delta,\ D \\ \hline \text{ослабления и перестановки} \\ \hline S\quad \Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Xi \\ \vdots \\ \to\ . \end{array}$$

Тогда $o(S,\ P')<o(S;\ P)$. (Этого и следовало ожидать, поскольку ординал вывода является мерой его сложности, и подвывод секвенции S в P', очевидно, проще, чем подвывод секвенции S в P. Однако доказывается это нетривиально, поскольку высоты секвенции $\Gamma\to\Delta,\ D$ и секвенций, расположенных выше нее, могут уменьшиться, если степень формулы D больше, чем $h(S;\ P)$. Доказательство опирается на неравенство $\omega^{\alpha}\#\,\omega^{\beta}<\omega^{\alpha\#\beta}$ для $\alpha,\ \beta\neq 0$.) Следовательно, в силу леммы 12.2 $o(P')<o(P)$.

Случай, когда какой-нибудь потомок формулы D, входящей в сукцедент, оказывается высекаемой формулой раньше, чем потомок формулы D, входящей в антецедент, рассматривается аналогично.

Итак, если заключительная часть вывода P содержит логическую начальную секвенцию, мы получаем искомый вывод P'. В противном случае, т. е. если заключительная часть вывода P не содержит логических начальных секвенций, переходим к шагу 4.

Шаг 4. Предположим, что заключительная часть вывода P содержит некоторые ослабления. Тогда мы определим „устранение ослаблений“. Нам удобно определить это „устранение ослаблений“ для выводов, которые удовлетворяют заключениям шагов 1—3 (т. е. их заключительные части не содержат никаких свободных переменных, кроме собственных, и не содержат применений правила индукции и логических начальных секвенций), но заключительная секвенция которых может быть непустой. Пусть P — такой вывод. Определим другой такой вывод P^*, удовлетворяющий, кроме того, следующим условиям:

его заключительная часть не содержит ослаблений, его заключительная секвенция получается из заключительной секвенции вывода P удалением из нее некоторых формул (включая случай, когда ни одна формула не удаляется) и $o(P^*)\leqslant o(P)$. В частности, если P — вывод секвенции $\to$, то и P^* — вывод секвенции $\to$.

Вывод P^* получается устранением в заключительной части вывода P всех ослаблений. Определение P^* проводится индукцией по числу применений правил вывода в заключительной части вывода P.

(1) Если заключительная часть вывода P не содержит ослаблений, то P^* совпадает с P.

Предположим, что заключительная часть P содержит ослабления. Пусть I есть применение правила вывода, завершающее вывод P. Вывод P^* определим в зависимости от того, каким является это применение.

Ниже мы пользуемся следующими обозначениями. Через Γ^*, Δ^* и т. д. будем обозначать последовательности формул, получаемые соответственно из Γ, Δ и т. д. удалением из них некоторых формул (возможно, ни одна формула не удаляется).

(2) I есть ослабление слева,

$$I\quad \frac{\Gamma\to\Delta}{D,\ \Gamma\to\Delta.}$$

Пусть P' — подвывод вывода P, оканчивающийся верхней секвенцией применения I. По предположению индукции вывод P'^* уже определен. Тогда в качестве P^* возьмем P'^*.

Если I есть ослабление справа, то P^* определяется аналогично.

(3) I есть сечение. Пусть P имеет вид

$$\frac{P_1\left\{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\to\Delta,\ D\end{matrix}\right.\qquad P_2\left\{\begin{matrix}\vdots\\ D,\ \Pi\to\Lambda\end{matrix}\right.}{\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda.}$$

По предположению индукции P_1^* и P_2^* уже определены.

(3.1) Заключительная секвенция вывода P_1^* имеет вид $\Gamma^*\to\Delta^*$. Тогда P^* есть P_1^*.

(3.2) Если случай (3.1) не имеет места и заключительная секвенция вывода P_2^* имеет вид $\Pi^*\to\Lambda^*$, то P^* есть P_2^*.

(3.3) Если заключительная секвенция вывода P_1^* имеет вид $\Gamma^*\to\Delta^*,\ D$, а заключительная секвенция вывода P_2^* имеет вид $D,\ \Pi^*\to\Lambda^*$, то в качестве P^* возьмем

$$\frac{P_1^*\left\{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma^*\to\Delta^*,\ D\end{matrix}\right.\qquad P_2^*\left\{\begin{matrix}\vdots\\ D,\ \Pi^*\to\Lambda^*\end{matrix}\right.}{\Gamma^*,\ \Pi^*\to\Delta^*,\ \Lambda^*.}$$

(4) I есть сокращение слева, т. е. P имеет вид

$$P_0\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ D,\ D,\ \Gamma\to\Delta\end{array}\right.\over D,\ \Gamma\to\Delta.$$

По предположению индукции вывод P_0^* уже определен.

(4.1) Заключительная секвенция вывода P_0^* имеет вид D, $\Gamma^*\to\Delta^*$ или $\Gamma^*\to\Delta^*$. Тогда P^* есть P_0^*.

(4.2) Заключительная секвенция вывода P_0^* имеет вид D, D, $\Gamma^*\to\Delta^*$. Тогда вывод P^* определяется как

$$P_0^*\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ D,\ D,\ \Gamma^*\to\Delta^*\end{array}\right.\over D,\ \Gamma^*\to\Delta^*.$$

Если I — сокращение справа, то действуем аналогично.

(5) I есть перестановка слева. Пусть P имеет вид

$$P_0\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1,\ C,\ D,\ \Gamma_2\to\Delta\end{array}\right.\over \Gamma_1,\ D,\ C,\ \Gamma_2\to\Delta.$$

По предположению индукции вывод P_0^* уже определен.

(5.1) Заключительная секвенция вывода P_0^* имеет вид Γ_1^*, $\Gamma_2^*\to\Delta^*$, или Γ_1^*, C, $\Gamma_2^*\to\Delta^*$, или Γ_1^*, D, $\Gamma_2^*\to\Delta^*$. Определим тогда P^* как P_0^*.

(5.2) Заключительная секвенция вывода P_0^* имеет вид Γ_1^*, C, D, $\Gamma_2^*\to\Delta^*$. Вывод P^* определяется как

$$P_0^*\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1^*,\ C,\ D,\ \Gamma_2^*\to\Delta^*\end{array}\right.\over \Gamma_1^*,\ D,\ C,\ \Gamma_2^*\to\Delta^*.$$

Аналогично действуем в случае, когда I есть перестановка справа.

Определение вывода P^* закончено. Легко видеть, что $o(P^*)\leqslant o(P)$. Поэтому далее (возвращаясь к случаю, когда P есть вывод секвенции $\to$) мы будем предполагать, что заключительная часть вывода P не содержит ослаблений (после замены P на P^*).

Шаг 5. Мы можем теперь предположить, что вывод P не совпадает со своей заключительной частью, поскольку в противном случае он был бы, как легко видеть, простым (см. определение 12.2), а следовательно, по лемме 12.3 не мог бы оканчиваться секвенцией $\to$.

В этих предположениях мы докажем, что заключительная часть вывода P содержит некоторое подходящее сечение (см. определение 9.7). На самом деле мы докажем следующий более сильный результат, который в дальнейшем нам понадобится еще раз (для задачи 12.11):

Подлемма 12.9. *Допустим, что вывод P в системе* **PA** *удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *P не совпадает со своей заключительной частью.*

(2) *Заключительная часть вывода P не содержит применений логических правил, правил индукции и ослабления.*

(3) *Если какая-то начальная секвенция принадлежит заключительной части вывода P, то она не содержит логических символов.*

Тогда заключительная часть вывода P содержит некоторое подходящее сечение.

(Заметим, что мы здесь не предполагаем, что вывод P оканчивается секвенцией $\to$.)

Доказательство. Применяем индукцию по числу существенных сечений в заключительной части вывода P. Заключительная часть вывода P содержит хотя бы одно существенное сечение, поскольку она не совпадает со всем выводом P.

Возьмем самое нижнее из таких сечений и обозначим его через I. Если I — подходящее сечение, то подлемма доказана. В противном случае пусть P имеет вид

$$I\quad \dfrac{P_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\Delta,\ D\end{array}\right. \qquad P_2\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ D,\ \Pi\to\Lambda\end{array}\right.}{\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda}.$$

Так как сечение I не является подходящим, одна из двух высекаемых формул в I не является потомком главной формулы никакого граничного применения ни одного из правил вывода.

(i) Подвывод P_1 содержит некоторое граничное для P применение какого-либо правила вывода.

Допустим противное. Тогда формула D в секвенции $\Gamma\to\Delta$, D является потомком формулы D в некоторой начальной секвенции, входящей в заключительную часть вывода P (в силу условия (2)). Но это в силу (3) противоречит предположению, что сечение I является существенным.

(ii) Если какое-то применение правила в выводе P_1 является граничным для вывода P, то оно является граничным и для вывода P_1.

Это легко вытекает из того факта, что I — самое нижнее существенное сечение в выводе P и формула D не является потомком главной формулы никакого граничного применения правила.

(iii) Вывод P_1 не совпадает со своей заключительной частью, причем последняя представляет собой пересечение вывода P_1 с заключительной частью вывода P.

Это утверждение непосредственно следует из (i), (ii) и (1). По предположению индукции заключительная часть вывода P_1 содержит некоторое подходящее сечение. Это сечение является подходящим сечением вывода P и расположено в его заключительной части.

Вернемся к нашему выводу P секвенции $\to$, удовлетворяющему заключениям шагов 1 — 4. В качестве непосредственного следствия подлеммы 12.9 получаем, что заключительная часть вывода P содержит некоторое подходящее сечение. Определим теперь *существенную редукцию* вывода P.

Возьмем какое-нибудь из самых нижних подходящих сечений в заключительной части вывода P и обозначим его через I.

Случай 1. Высекаемая формула сечения I имеет вид $A\wedge B$. Допустим, что P имеет вид

$$I_1\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma'\to\Theta',\ A\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma'\to\Theta',\ B\end{array}}{\Gamma'\to\Theta',\ A\wedge B}\qquad I_2\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A,\ \Pi'\to\Lambda'\end{array}}{A\wedge B,\ \Pi'\to\Lambda'}$$

$$I\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\xrightarrow{\mu}\Theta,\ A\wedge B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A\wedge B,\ \Pi\xrightarrow{\nu}\Lambda\end{array}}{\Gamma,\ \Pi\to\Theta,\ \Lambda}\ (l)$$

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta\xrightarrow{\lambda}\Xi\quad (k)\\ \vdots\\ \to,\end{array}$$

где $\mu=o(\Gamma\to\Theta,\ A\wedge B)$, $\nu=o(A\wedge B,\ \Pi\to\Lambda)$, $\lambda=o(\Delta\to\Xi)$ а $\Delta\to\Xi$ обозначает самую верхнюю секвенцию, которая расположена ниже I и высота которой меньше, чем высота верхних секвенций применения I. Пусть l — высота каждой из верхних секвенций применения I, а k — высота секвенции $\Delta\to\Xi$. Тогда $k<l$. Заметим, что $\Delta\to\Xi$ может быть нижней секвенцией применения I или заключительной секвенцией. Существование такой секвенции следует из предложения 12.5.

Секвенция $\Delta\to\Xi$ должна быть нижней секвенцией некоторого сечения J, так как ниже I нет применений правила индук-

ции. Рассмотрим следующие выводы:

$$P_1:\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma'\to\Theta',\ A\\ \hline\hline \Gamma'\to A,\ \Theta'\\ \hline \Gamma'\to A,\ \Theta',\ A\wedge B\end{array}\ \text{(ослабление справа)}$$

$$J_1\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\xrightarrow{\mu_1}A,\ \Theta,\ A\wedge B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A\wedge B,\ \Pi\xrightarrow{\nu_1}\Lambda\end{array}}{\Gamma,\ \Pi\to A,\ \Theta,\ \Lambda}\ (l)$$

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta\xrightarrow{\lambda_1}A,\ \Xi\\ \hline\hline \Delta\to\Xi,\ A\end{array}\ (m),$$

$$P_2:\quad \begin{array}{c}\vdots\\ A,\ \Pi'\to\Lambda'\\ \hline\hline \Pi',\ A\to\Lambda'\\ \hline A\wedge B,\ \Pi',\ A\to\Lambda'\end{array}\ \text{(ослабление слева)}$$

$$J_2\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\xrightarrow{\mu_2}\Theta,\ A\wedge B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A\wedge B,\ \Pi,\ A\xrightarrow{\nu_2}\Lambda\end{array}}{\Gamma,\ \Pi,\ A\to\Theta,\ \Lambda}\ (l)$$

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta,\ A\xrightarrow{\lambda_2}\Xi\\ \hline\hline A,\ \Delta\to\Xi\end{array}\ (m)$$

(где l и m обозначают высоты указанных секвенций, но не в P_1 или в P_2, а в выводе P', который определяется ниже и содержит эти выводы в качестве подвыводов).

Определим теперь вывод P':

$$I'\ \dfrac{\begin{array}{c}P_1\\ \vdots\\ \Delta\xrightarrow{\lambda_1}\Xi,\ A\quad (m)\end{array}\qquad \begin{array}{c}P_2\\ \vdots\\ A,\ \Delta\xrightarrow{\lambda_2}\Xi\quad (m)\end{array}}{\Delta,\ \Delta\xrightarrow{\lambda_0}\Xi,\ \Xi\quad (k)}\ \text{(сечение)}$$

$$\begin{array}{c}\Delta,\ \Delta\to\Xi,\ \Xi\\ \hline\hline \Delta\to\Xi\\ \vdots\\ \to.\end{array}$$

Итак, m — высота каждой из верхних секвенций сечения I'. Отметим, что высота нижней секвенции сечения I' равна k.

Очевидно, что $m=k$, если k больше степени формулы A, и что m равняется степени формулы A в противном случае. В обоих случаях $k\leqslant m<l$. Имеем

$$h(\Gamma\to A,\ \Theta,\ A\wedge B;\ P')=h(A\wedge B,\ \Pi\to\Lambda;\ P')=l,$$

поскольку все высекаемые формулы сечений, расположенных в P ниже I, входят в вывод P' ниже J_1, все высекаемые формулы сечений, расположенных в P' ниже J_1, кроме формулы A, входят в вывод P ниже I и степень формулы A меньше степени формулы $A \wedge B$, которая в свою очередь не больше l. Аналогично получаем

$$h(\Gamma \to \Theta,\ A \wedge B;\ P') = h(A \wedge B,\ \Pi,\ A \to \Lambda;\ P') = l.$$

Положим

$$\mu_1 = o(\Gamma \to A,\ \Theta,\ A \wedge B;\ P'), \quad \nu_1 = o(A \wedge B,\ \Pi \to \Lambda;\ P'),$$
$$\mu_2 = o(\Gamma \to \Theta,\ A \wedge B;\ P'), \quad \nu_2 = o(A \wedge B,\ \Pi,\ A \to \Lambda;\ P'),$$
$$\lambda_1 = o(\Delta \to A,\ \Xi;\ P'), \quad \lambda_2 = o(\Delta,\ A \to \Xi;\ P'),$$
$$\lambda_0 = o(\Delta,\ \Delta \to \Xi,\ \Xi;\ P').$$

Тогда $\mu_1 < \mu$, $\nu_1 = \nu$, $\mu_2 = \mu$ и $\nu_2 = \nu$.

Пусть теперь

$$J' \quad \frac{S_1' \quad S_2'}{S'} \quad \begin{matrix}(k_1)\\(k_2)\end{matrix}$$

есть произвольный непосредственный вывод, расположенный между сечением J_1 и секвенцией $\Delta \to A,\ \Xi$, и пусть

$$J \quad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

— соответствующий непосредственный вывод, расположенный между I и $\Delta \to \Xi$. Положим

$$\alpha_1' = o(S_1';\ P'), \quad \alpha_2' = o(S_2';\ P'), \quad \alpha' = o(S';\ P'),$$
$$\alpha_1 = o(S_1;\ P), \quad \alpha_2 = o(S_2;\ P), \quad \alpha = o(S;\ P),$$
$$k_1 = h(S_1';\ P') = h(S_2';\ P'), \quad k_2 = h(S';\ P').$$

Тогда $\alpha = \alpha_1 \# \alpha_2$, если S' не совпадает с $\Delta \to A,\ \Xi$, и $\alpha = \omega_{l-k}(\alpha_1 \# \alpha_2)$, если S' совпадает с $\Delta \to A,\ \Xi$. С другой стороны, $\alpha' = \omega_{k_1-k_2}(\alpha_1 \# \alpha_2)$.

Опираясь на $\mu_1 < \mu$ и $\nu_1 = \nu$, индукцией по числу непосредственных выводов между J_1 и S легко показываем, что

(1) $$\alpha' < \omega_{l-k_2}(\alpha),$$

если S' не совпадает с $\Delta \to A,\ \Xi$. Положим $\lambda = \omega_{l-k}(\alpha)$. Тогда из (1) следует, что $\lambda_1 < \omega_{l-m}(\alpha)$. Аналогично $\lambda_2 < \omega_{l-m}(\alpha)$. Следовательно,

$$\omega_{m-k}(\lambda_1 \# \lambda_2) < \omega_{l-k}(\alpha),$$

так как $l - k = (l - m) + (m - k)$. Поэтому $\lambda_0 < \lambda$. Наконец, из $\lambda_0 < \lambda$ вытекает, что $o(P') < o(P)$.

Случай 2. Высекаемая формула в I имеет вид $\forall x F(x)$. Тогда вывод P имеет вид

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\vdots & \vdots\\
I_1\ \dfrac{\Gamma' \to \Theta',\ F(a)}{\Gamma' \to \Theta',\ \forall x F(x)} & I_2\ \dfrac{F(s),\ \Pi' \to \Lambda'}{\forall x F(x),\ \Pi' \to \Lambda'}\\
\vdots & \vdots
\end{array}\\
I\ \dfrac{\Gamma \to \Theta,\ \forall x F(x) \qquad \forall x F(x),\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi \to \Theta,\ \Lambda}\\
\vdots\\
\Delta \to \Xi\\
\vdots\\
\to .
\end{array}
$$

Секвенция $\Lambda \to \Xi$ определяется так же, как и в случае 1. Вывод P' теперь определяется с помощью двух своих подвыводов P_1 и P_2:

P_1:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\Gamma' \to \Theta',\ F(s)}{\Gamma' \to F(s),\ \Theta'}}{\Gamma' \to F(s),\ \Theta',\ \forall x F(x)}\\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\dfrac{\Gamma \to F(s),\ \Theta,\ \forall x F(x) \qquad \forall x F(x),\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi \to F(s),\ \Theta,\ \Lambda},\\
\vdots\\
\dfrac{\Delta \to F(s),\ \Xi}{\Delta \to \Xi,\ F(s)},
\end{array}
$$

P_2:

$$
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\dfrac{F(s),\ \Pi' \to \Lambda'}{\Pi',\ F(s) \to \Lambda'}}{\forall x F(x),\ \Pi',\ F(s) \to \Lambda'}\\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\dfrac{\Gamma \to \Theta,\ \forall x F(x) \qquad \forall x F(x),\ \Pi,\ F(s) \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi,\ F(s) \to \Theta,\ \Lambda}\\
\vdots\\
\dfrac{\Delta,\ F(s) \to \Xi}{F(s),\ \Delta \to \Xi.}
\end{array}
$$

Вывод P' определим следующим образом:

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}P_1\\ \vdots\\ \Delta\to\Xi,\ F(s)\end{matrix}\qquad\begin{matrix}P_2\\ \vdots\\ F(s),\ \Delta\to\Xi\end{matrix}}{\Delta,\ \Delta\to\Xi,\ \Xi}}{\Delta\to\Xi}\\
\vdots\\
\to .
\end{array}$$

Заметим, что $o(\Gamma'\to\Theta',\ F(s);\ P')=o(\Gamma'\to\Theta',\ F(a);\ P)$. Рассуждения с ординалами проводятся так же, как и в случае 1.

В остальных случаях доказательство проходит аналогично.

Итак, нами доказана лемма 12.8, а с нею и непротиворечивость системы **PA** (теорема 12.1).

Замечание 12.10. Нам хотелось бы отметить следующее. Часто говорят, что непротиворечивость системы **PA** доказывается трансфинитной индукцией по ординалам выводов, как будто мы использовали обший принцип трансфинитной индукции для доказательства непротиворечивости математической индукции. Однако такое мнение ошибочно. Дело в том, что в доказательстве непротиворечивости используется достижимость ординала ε_0, как объяснялось в § 11, а в остальных отношениях оно является строго финитным. Сформулируем это более точно.

Принцип *трансфинитной индукции* для некоторого (определимого) вполне-упорядочения $\prec$ натуральных чисел можно выразить (в формальных системах первого порядка) следующей схемой:

$$TI(\prec,\ F(a)):\quad \forall x\,[\forall y\,(y\prec x\supset F(y))\supset F(x)]\to\forall xF(x)$$

для произвольных формул $F(a)$ рассматриваемой системы.

Тогда генценовское доказательство непротиворечивости системы **PA** может быть формализовано в системе примитивно рекурсивной арифметики, пополненной аксиомой $TI(\prec,\ F(a))$, где $\prec$ — стандартное вполне-упорядочение по типу ε_0 и $F(a)$ — некоторая *бескванторная* формула.

Задача 12.11. Описанный в доказательстве леммы 12.8 редукционный процесс мы можем распространить на следующую ситуацию.

Будем говорить, что секвенция S (языка **L**) обладает свойством $\mathscr{P}$, если

(1) все секвенциальные формулы в S замкнуты;

(2) каждая секвенциальная формула в сукцеденте S либо является бескванторной, либо имеет вид $\exists y_1\ldots\exists y_mR(y_1,\ldots,y_m)$, где $R(y_1,\ \ldots,\ y_m)$ — некоторая бескванторная формула;

(3) каждая секвенциальная формула в антецеденте S либо является бескванторной, либо имеет вид $\forall y_1\ldots\forall y_mR(y_1,\ldots,y_m)$, где $R(y_1,\ \ldots,\ y_m)$ — некоторая бескванторная формула.

Показать, что если какая-то секвенция, удовлетворяющая условию $\mathscr{P}$, выводима в **PA**, то она имеет в **PA** вывод без сечений и применений правила индукции.

[*Указание.* Можно считать, что в заключительной части вывода такой секвенции нет свободных переменных, которые не использовались бы в качестве собственных.

Если заключительная часть этого вывода содержит явные применения логических правил, то возьмем самое нижнее такое применение и обозначим его через I. Без потери общности можно считать, что вывод имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c}
\vdots\\
I\ \dfrac{\Gamma\to\Delta,\ \exists y_2\ldots\exists y_mR(t,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)}{\Gamma\to\Delta,\ \exists y_1\ldots\exists y_mR(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)}\\
\vdots\\
\Gamma_0\to\Delta_0,\ \exists y_1\ldots\exists y_mR(y_1,\ \ldots,\ y_m),\ \Delta_1,
\end{array}$$

где $\Gamma_0\to\Delta_0,\ \exists y_1\ldots\exists y_mR(y_1,\ \ldots,\ y_m),\ \Delta_1$ — заключительная секвенция вывода. Мы можем устранить применение I, заменив этот вывод некоторым другим, заключительная секвенция которого имеет либо вид

$$\Gamma_0\to\Delta_0,\ \exists y_2\ldots\exists y_mR(t,\ y_2,\ \ldots,\ y_m),\ \Delta_1,$$

либо вид

$$\Gamma_0\to\Delta_0,\ \exists y_1\ldots\exists y_mR(y_1,\ \ldots,\ y_m),\ \Delta_1,\ \exists y_2\ldots\exists y_mR(t,\ y_2,\ \ldots\ y_m).]$$

Задача 12.12. Интуиционистскую арифметику можно формализовать в виде подсистемы классической системы **PA**, определяемой условием, что в сукцеденте каждой секвенции должно быть не более одной секвенциальной формулы, содержащей кванторы. Эту систему мы обозначим через **HA** (арифметика Гейтинга). Метод редукций, определенный для системы **PA**, применим с небольшими изменениями и к системе **HA**: грубо говоря, в случае существенной редукции, когда высекаемая формула рассматриваемого подходящего сечения содержит кванторы, ослабление справа применять не надо.

Описать точно редукционный процесс для системы **HA** и тем самым доказать непротиворечивость этой системы непосредственно (а не как подсистемы системы **PA**).

Задача 12.13. Пусть $(*)$ — то свойство формул, о котором говорится в условии теоремы 6.14, т. е. формула удовлетворяет условию $(*)$, если каждое вхождение в нее символа $\vee$ или $\exists$

находится в области действия связки $\neg$ или в левой области действия связки $\supset$. Показать, что если всякая формула в Γ удовлетворяет условию (*) и все формулы в Γ, а также формулы A, B и $\exists x F(x)$ замкнуты, то в системе **HA** (см. задачу 12.12)

(1) секвенция $\Gamma \to A \vee B$ выводима тогда и только тогда, когда выводима секвенция $\Gamma \to A$ или секвенция $\Gamma \to B$;

(2) секвенция $\Gamma \to \exists x F(x)$ выводима тогда и только тогда, когда для некоторого замкнутого терма s выводима секвенция $\Gamma \to F(s)$.

[*Указание* (Скарпеллини). Применить трансфинитную индукцию по ординалу вывода секвенции $\Gamma \to A \vee B$ (для утверждения (1)) или секвенции $\Gamma \to \exists x F(x)$ (для утверждения (2)), следуя методу редукций для доказательства непротиворечивости системы **PA**. Начать с явных применений логических правил в заключительной части этого вывода.]

Замечание 12.14. Генценовский метод редукций имеет следующее приложение.

Непротиворечивость ограниченной арифметики, в которой индукционные формулы содержат не более k кванторов, можно доказать трансфинитной индукцией по ординалу ω_{k+1}.

Доказательство проходит по следующей схеме. Допустим, что в этой системе существует вывод секвенции $\to$. Проведем редукцию такого вывода.

(1) Предполагаем, что индукционные формулы имеют предваренную нормальную форму.

(2) Формулу A в некотором выводе (в рассматриваемой системе) временно назовем *свободной*, если либо она не имеет предков, являющихся индукционными формулами, либо у нее имеются такие предки, но между каждым из них и самой формулой A в некотором ее предке вводится логический символ. Сечение в выводе назовем *свободным*, если обе его высекаемые формулы свободны. Заметим, что если формула A не свободна, то она находится в предваренной форме, содержащей не более k кванторов. Теперь мы можем доказать следующую теорему о частичном устранении сечений.

Если какая-то секвенция выводима в нашей системе, то она имеет вывод без свободных сечений.

(Надо приспособить доказательство устранимости сечений для системы **LK**.)

Таким образом, мы получили вывод секвенции $\to$, в котором нет свободных сечений, и поэтому все высекаемые формулы, а также все индукционные формулы находятся в предваренной форме, содержащей не более k кванторов. Считаем, что $k \geqslant 1$.

(3) Далее мы предположим, что правила вывода видоизменены таким образом, что все формулы в выводе находятся в предваренной форме, содержащей не более k кванторов.

Обозначим эту систему через $\mathbf{PA}_k$.

Нам надо слегка изменить определения некоторых понятий. Степень формулы A определяется теперь как число кванторов в A минус 1; степень сечения или применения правила индукции — это степень высекаемой формулы или индукционной формулы соответственно. Высота секвенции в выводе определяется так же, как и раньше, но с учетом нового определения степени. Ординалы ставятся в соответствие выводам так же, как и раньше, за тем исключением, что начальным секвенциям теперь приписывается ординал 0, а применения пропозициональных правил и бескванторные сечения рассматриваются таким же образом, как и применения слабых правил, т. е. они не меняют ординала секвенции. (В случае двух верхних секвенций берем максимум ординалов этих секвенций.) Легко видеть, что ординал вывода (рассматриваемого вида) меньше, чем $\omega_k(l)$ для некоторого натурального числа l.

Граничное применение правила определяется как применение кванторного правила, являющееся граничным в старом смысле.

Подходящее сечение — это сечение, высекаемая формула которого содержит кванторы и которое является подходящим в старом смысле. При устранении начальных секвенций из заключительной части вывода устраняют только те из них, которые содержат кванторы. Существование подходящих сечений (при определенных условиях) можно доказать в точности так же, как и раньше.

(4) В случае существенной редукции, если степень подходящего сечения > 0, то мы действуем, как раньше (шаг 5 в доказательстве леммы 12.8). Если же степень равняется 0, то высекаемая формула имеет вид $\forall x F(x)$ или $\exists x F(x)$, где F — бескванторная формула. В качестве примера разберем первый случай. Пусть $F(s)$ — боковая формула граничного применения некоторого правила, являющаяся предком высекаемой формулы $\forall x F(x)$. Терм s замкнут, и потому либо $\to F(s)$, либо $F(s) \to$ есть математическая начальная секвенция (с ординалом 0). Допустим, что $\to F(s)$ — математическая начальная секвенция. Рассмотрим вывод

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \Gamma \to \Theta,\ \forall x F(x) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\to F(s) \qquad \begin{matrix}\vdots\\ F(s),\ \Pi' \to \Lambda'\end{matrix}}{\Pi' \to \Lambda'}}{\overline{\forall x F(x)\ \Pi' \to \Lambda'}} \\ \vdots \\ \forall x F(x),\ \Pi \to \Lambda \end{matrix}}{\begin{matrix} \Gamma,\ \Pi \to \Theta,\ \Lambda \\ \vdots \\ \to \end{matrix}}$$

(взяв секвенцию $\Gamma, \Pi \to \Theta, \Lambda$ в качестве секвенции $\Delta \to \Xi$, указанной на шаге 5 в доказательстве леммы 12.8). Легко видеть, что в результате этой редукции ординал снова уменьшается.

Замечание 12.15. Мы вводим здесь обобщения понятия примитивно рекурсивной функции. Пусть $\lessdot$ есть некоторое примитивно рекурсивное вполне-упорядочение натуральных чисел. Класс *$\lessdot$-примитивно рекурсивных функций* определяется как класс функций f, порождаемых следующими схемами:

(i) $f(a) = a + 1$;

(ii) $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$;

(iii) $f(a_1, \ldots, a_n) = a_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$;

(iv) $f(a_1, \ldots, a_n) = g(h_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, h_m(a_1, \ldots, a_n))$, где функции g и h_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ являются примитивно рекурсивными;

(v) $f(0, a_2, \ldots, a_n) = g(a_2, \ldots, a_n)$,
$f(a+1, a_2, \ldots, a_n) = h(a, f(a, a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n)$,
где функции g и h $\lessdot$-примитивно рекурсивны,

(vi) (определение с помощью $\lessdot$-рекурсии)

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} h(f(\tau(a_1, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n), \\ \qquad\qquad \text{если } \tau(a_1, \ldots, a_n) \lessdot a_1, \\ g(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где функции g, h и τ являются $\lessdot$-примитивно рекурсивными.

Смысл пункта (vi) заключается в том, что значение $f(a, a_2, \ldots, a_n)$ определяется либо непосредственно, либо через $f(b, a_2, \ldots, a_n)$ для некоторого $b \lessdot a$.

Доказательство непротиворечивости системы $\mathbf{PA}_k$, которое было только что приведено, имеет следующее приложение.

Следствие 12.16. *Пусть R — некоторый примитивно рекурсивный предикат, и пусть секвенция $\to \exists x R(a, x)$ имеет в $\mathbf{PA}_k$ вывод с ординалом $< \omega_k(l)$ для некоторых k и l (в смысле определения 12.6). Тогда теоретико-числовая функция f, определяемая так:*

$$f(m) = \textit{наименьшее } n, \textit{ такое, что } R(m, n),$$

является $\lessdot$-примитивно рекурсивной, где $\lessdot$ есть упорядоченный по типу $\omega_k(l)$ начальный отрезок стандартного вполне-упорядочения по типу ε_0.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

(i) Пусть $P(a)$ — некоторый вывод в системе $\mathbf{PA}_k$ секвенции $\to \exists x R(a, x)$ (где все вхождения переменной a отмечены). Тогда для любого m $P(\bar{m})$ есть вывод в $\mathbf{PA}_k$ секвенции $\to \exists x R(\bar{m}, x)$, имеющий тот же ординал, что и $P(a)$, и гёделев номер этого вывода вычисляется примитивно рекурсивно по m. Заметим также, что секвенция $\to \exists x R(\bar{m}, x)$ обладает свойством $\mathscr{P}$ из задачи 12.11.

(ii) Назовем (временно) вывод *редуцируемым*, если он является выводом в системе $\mathbf{PA}_k$ с ординалом $< \omega_k(l)$, содержит существенное сечение или применение правила индукции и оканчивается секвенцией, обладающей свойством $\mathscr{P}$. Если вывод P редуцируем, то применив к нему несколько раз редукционную процедуру, описанную в доказательстве леммы 12.8 (и модифицированную для системы $\mathbf{PA}_k$ согласно замечанию 12.14), мы получим некоторый вывод в $\mathbf{PA}_k$ той же секвенции, не содержащий существенных сечений и применений правила индукции. Пусть r — такая функция, что если p — гёделев номер некоторого редуцируемого вывода, то $r(p)$ — гёделев номер вывода, полученного из данного однократным применением этой редукционной процедуры; в противном случае $r(p) = p$. Ясно, что функция r примитивно рекурсивна.

Пусть O — функция, такая, что если p — гёделев номер некоторого вывода в $\mathbf{PA}_k$ с ординалом $< \omega_k(l)$, то $O(p)$ — гёделев номер ординала этого вывода (и, например, $O(p) = 0$ в противном случае). Ясно, что функция O примитивно рекурсивна. Заметим также, что для всех p

$O(r(p)) \lessdot O(p) \Leftrightarrow p$ — гёделев номер некоторого редуцируемого вывода.

(iii) Теперь, если дан вывод P секвенции $\to \exists x R(\bar{m}, x)$, не содержащий существенных сечений и применений правила индукции, мы можем эффективно найти по P натуральное число n, такое, что выполняется $R(m, n)$ (на самом деле наименьшее такое n). Это делается следующим образом.

Во-первых, мы можем предположить, что вывод P не содержит свободных переменных. Поэтому, если $\Gamma \to \Delta$ — некоторая секвенция в P, то всякая формула в Γ является замкнутой атомарной формулой, а всякая формула в Δ либо имеет вид $\exists x R(\bar{m}, x)$, либо тоже является замкнутой атомарной формулой.

Рассмотрим теперь следующее свойство $\mathscr{Q}$ секвенций: всякая атомарная формула в антецеденте истинна, а всякая атомарная формула в сукцеденте ложна.

Заметим, что заключительная секвенция вывода P удовлетворяет условию $\mathscr{Q}$ и что если нижняя секвенция некоторого сечения в P удовлетворяет условию $\mathscr{Q}$, то ему удовлетворяет хотя бы одна из верхних секвенций этого сечения (поскольку высекаемая формула является замкнутой и атомарной). Теперь начинаем строить нить секвенций в P, удовлетворяющих условию $\mathscr{Q}$, двигаясь снизу вверх: заключительная секвенция вывода

P принадлежит этой нити и, если нижняя секвенция какого-то применения правила принадлежит этой нити, то возьмем ту из верхних секвенций, которая обладает свойством Q. Поскольку никакая из начальных секвенций в P не обладает свойством Q, эта процедура должна закончиться раньше, чем мы достигнем какой-нибудь начальной секвенции. Это может произойти только в следующем случае:

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ R(\bar{m}, \bar{k})}{\Gamma \to \Delta,\ \exists x R(\bar{m}, x),}$$

где $R(\bar{m}, \bar{k})$ истинно. Наконец, берем наименьшее $n \leqslant k$, для которого выполняется $R(m, n)$. Ясно, что существует примитивно рекурсивная функция h, такая, что если P — вывод секвенции $\to \exists x R(\bar{m}, x)$, не содержащий существенных сечений и применений правила индукции, то $h(\ulcorner P \urcorner)$ равняется найденному таким образом числу n.

(iv) Теперь мы можем определить $<$-примитивно рекурсивную функцию g, такую, что если P — вывод секвенции $\to \exists x R(\bar{m}, x)$ в системе $\mathbf{PA}_k$ и ординал этого вывода $< \omega_k(l)$, то $g(\ulcorner P \urcorner)$ равняется наименьшему такому n, что выполняется $R(m, n)$:

$$g(p) = \begin{cases} g(r(p)), & \text{если } O(r(p)) < O(p), \\ h(p) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что функция g является $<$-примитивно рекурсивной.

(v) Наконец, пусть $P(a)$ — вывод в $\mathbf{PA}_k$ секвенции $\to \exists x R(x, a)$ и ординал этого вывода $< \omega_k(l)$. Тогда функцию f определяем так:

$$f(m) = g(\ulcorner P(\bar{m}) \urcorner).$$

Как частный случай следствия 12.16 мы получаем такое утверждение: если секвенция $\to \exists x R(x, a)$ выводима в системе с правилом индукции, в котором индукционные формулы содержат не более одного квантора, то функция f (определенная выше) является примитивно рекурсивной (в силу теоремы Р. Петер, согласно которой ω^l-примитивная рекурсивность влечет примитивную рекурсивность для любого конечного l).

§ 13. Доказуемые вполне-упорядочения

Отношение порядка, задаваемое стандартным упорядочением по типу ε_0 мы будем обозначать в этом параграфе через $\prec$ для того, чтобы отличать его от обычного порядка на натуральных числах.

Под частичной функцией мы понимаем теоретико-числовую функцию, которая определена, возможно, не для всех значений аргументов.

Определение 13.1. (1) Класс *частично рекурсивных функций* — это класс частичных функций, задаваемых схемами (i) — (vi) для примитивно рекурсивных функций (см. определение 10.2), а также следующей схемой:

(vii) $f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y\,[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$, где g — частично рекурсивная функция; выражение, стоящее справа от $\simeq$, обозначает наименьшее y, такое, что для любого $z < y$ значение $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ определено и отлично от 0, а $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, если такое y существует, и не определено в противном случае; символ $\simeq$ означает, что стоящее слева выражение определено тогда и только тогда, когда определено выражение слева, и в этом случае значения этих выражений равны.

(2) *Общерекурсивной* или *рекурсивной* функцией называется частично рекурсивная функция, являющаяся всюду определенной.

(3) Отношение R на натуральных числах называется *рекурсивным*, если существует рекурсивная функция f, принимающая только значения 0 и 1, такая, что $R(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

(4) Σ_1^0-формулы языка L — это формулы вида

$$\exists y\,(\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, y) = 0),$$

где $\bar{f}$ — символ для некоторой примитивно рекурсивной функции f. Симметрично Π_1^0-формулы имеют вид $\forall y\,(\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$, где f — примитивно рекурсивная функция.

Можно показать, что всякое рекурсивное отношение R представимо в $\mathbf{PA}$ некоторой Σ_1^0-формулой, т. е. существует Σ_1^0-формула $\bar{R}(x_1, \ldots, x_n)$ языка L, такая, что для всех $m_1, \ldots, m_n$

выполняется $R(m_1, \ldots, m_n) \Longleftrightarrow$ в $\mathbf{PA}$ выводимо $\bar{R}(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$.

Всякое рекурсивное отношение представимо в $\mathbf{PA}$ также некоторой Π_1^0-формулой.

Определение 13.2. Пусть ε — новая одноместная предикатная константа. Через $L(\varepsilon)$ обозначим язык, получаемый из языка L (см. § 12) добавлением к нему константы ε; таким образом, для всякого терма t выражение $\varepsilon(t)$ является атомарной формулой языка $L(\varepsilon)$.

Через $\mathbf{PA}(\varepsilon)$ обозначим систему $\mathbf{PA}$ в языке $L(\varepsilon)$; более точно, мы расширяем систему $\mathbf{PA}$, добавляя к ней секвенции $s=t$, $\varepsilon(s)\to\varepsilon(t)$ для любых термов s, t в качестве математических начальных секвенций и распространяя правило индукции на все формулы языка $L(\varepsilon)$.

Определение 13.3. Пусть $\prec\cdot$ — некоторое рекурсивное (бесконечное) линейное упорядочение натуральных чисел, являющееся в действительности вполне-упорядочением. (Без потери общности мы можем считать, что областью определения отношения $\prec\cdot$ является множество всех натуральных чисел и что наименьшим элементом в смысле порядка $\prec\cdot$ является 0.) Тот же символ $\prec\cdot$ мы будем использовать для обозначения Σ_1^0-формулы, представляющей в **PA** упорядочение $\prec\cdot$.

Рассмотрим секвенцию

$$TI(\prec\cdot): \qquad \forall x\,(\forall y \prec\cdot\, x\,(\varepsilon(y)\supset\varepsilon(x)))\to\varepsilon(a)$$

(ср. с формулой $TI(\prec, F(a))$ в замечании 12.10). Если секвенция $TI(\prec\cdot)$ выводима в системе **PA** (ε), то мы будем говорить, что $\prec\cdot$ есть *доказуемое вполне-упорядочение* относительно **PA**.

Настоящий параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 13.4 (Генцен). *Если $\prec\cdot$ — доказуемое вполне-упорядочение относительно* **PA**, *то существует рекурсивная функция, переводящая отношение $\prec\cdot$ в отношение $\prec$ и являющаяся отображением в некоторый начальный отрезок ординала ε_0. То есть найдется рекурсивная функция f, такая, что $a\prec\cdot\, b$ тогда и только тогда, когда $f(a)\prec f(b)$, и существует некоторый ординал $\mu\ (<\varepsilon_0)$, такой, что для всякого a $f(a)\prec\bar\mu$ (где $\bar\mu$ — гёделев номер ординала μ).*

Эта теорема получается на основе анализа и арифметизации генценовского доказательства того факта, что указанное в начале этого параграфа отношение $\prec$ не является доказуемым вполне-упорядочением.

Пусть теперь $\prec\cdot$ — некоторое фиксированное доказуемое вполне-упорядочение относительно **PA**.

13.1) Сначала мы определим понятие **TJ**-*вывода*, где **TJ** обозначает „трансфинитная индукция“. **TJ**-*выводы* определяются аналогично **PA** (ε)-выводам с некоторыми изменениями:

(1) Начальными секвенциями **TJ**-выводов являются все начальные секвенции системы **PA** (ε) и следующие секвенции, называемые **TJ**-*начальными*:

$$\forall x\,(x\prec\cdot\, t\supset\varepsilon(x))\to\varepsilon(t)$$

для всевозможных термов t.

(2) Заключительные секвенции **TJ**-выводов должны иметь вид

$$\to\varepsilon(\bar m_1),\ \ldots,\ \varepsilon(\bar m_n),$$

где $\bar m_1, \ldots, \bar m_n$ — некоторые нумералы.

Пусть $|m|_{\prec\cdot}$ — тот ординал, который обозначен числом m относительно $\prec\cdot$, т. е. порядковый тип начального отрезка упорядочения $\prec\cdot$, задаваемого числом m. Тогда минимум из ординалов $|m_1|_{\prec\cdot}, \ldots, |m_n|_{\prec\cdot}$ называется *заключительным числом* **TJ**-вывода.

13.2) Поскольку $\prec\cdot$ есть доказуемое вполне-упорядочение относительно **PA**, секвенция $TI(\prec\cdot)$ (см. определение 13.3) выводима в **PA** (ε), и поэтому в системе, полученной из **PA** (ε) добавлением **TJ**-начальных секвенций, существует некоторый вывод $P(a)$ секвенции $\to\varepsilon(a)$ (для некоторой свободной переменной a). Заметим, что для всякого натурального m $P(\bar m)$ является **TJ**-выводом секвенции $\to\varepsilon(\bar m)$.

13.3) **TJ**-вывод называется *некритическим*, если к нему применим один из редукционных шагов, определенных для системы **PA** (в доказательстве леммы 12.8) и уменьшающих ординал вывода (т. е. 2, 3 или 5). В противном случае **TJ**-вывод называется *критическим*.

13.4) Мы поставим в соответствие **TJ**-выводам некоторые ординалы (меньшие, чем ε_0) и определим редукцию для **TJ**-выводов, следуя редукционному методу для **PA**, который был приведен в доказательстве леммы 12.8: если **TJ**-вывод является критическим, то необходимо произвести еще некоторые действия. Редукция определяется таким образом, что **TJ**-вывод P, заключительное число которого >0, редуцируется в другой вывод с тем же заключительным числом, если вывод P некритический, и с произвольным заключительным числом, меньшим первоначального, если вывод P критический. Одновременно уменьшается ординал вывода.

13.5) Если мы сумеем поставить в соответствие выводам ординалы и определить редукционный метод так, чтобы выполнялись условия, о которых говорится в 13.4), то мы сможем доказать следующее.

Лемма 13.5 (основная лемма). *Заключительное число любого* **TJ**-*вывода не больше его ординала.*

Доказательство. Применяем трансфинитную индукцию по ординалу вывода. Пусть P — некоторый **TJ**-вывод с ординалом μ и заключительным числом σ. Допустим в качестве предположения индукции, что лемма верна для всех **TJ**-выводов, у которых ординал меньше, чем μ, и покажем, что $\sigma\leqslant\mu$. Если P — некритический вывод, то он редуцируется в некоторый **TJ**-вывод P' с тем же заключительным числом σ и с ординалом $\nu < \mu$. По предположению индукции $\sigma \leqslant \nu$, и поэтому $\sigma \leqslant \mu$. Предположим теперь, что P — критический вывод. Если бы σ было больше, чем μ, то мы смогли бы редуцировать P в некоторый **TJ**-вывод, заключительное число которого было бы равно μ и ординал которого был бы меньше, чем μ, что противоречит индуктивному предположению.

Перейдем теперь к описанию редукционного метода для **TJ**-выводов.

13.6) Ординалы ставятся в соответствие секвенциям **TJ**-выводов так же, как в § 12; ординал **TJ**-начальной секвенции равен 7, т. е. $\omega^0 + \ldots + \omega^0$ (7 раз). Для удобства формулу в сукцеденте **TJ**-начальной секвенции будем рассматривать как главную формулу.

13.7) Мы можем следовать редукционному процессу, определенному для доказательства непротиворечивости **PA**, вплоть до шага 4 (в доказательстве леммы 12.8), т. е. до тех пор, пока не получим некоторый **TJ**-вывод P, удовлетворяющий следующим условиям:

- p1. Заключительная часть вывода P не содержит свободных переменных.
- p2. Заключительная часть вывода P не содержит применений правила индукции.
- p3. Заключительная часть вывода P не содержит логических начальных секвенций.
- p4. Если заключительная часть вывода P содержит некоторое ослабление I, то все применения правил, расположенные в P ниже I, также являются ослаблениями.

Замечание. Поскольку заключительная часть всякого **TJ**-вывода непуста, заключительная секвенция S' вывода, получаемого из P удалением ослаблений из его заключительной части (на шаге 4), может отличаться от заключительной секвенции вывода P. В этом случае мы добавляем несколько ослаблений ниже S' с тем, чтобы заключительная секвенция стала такой же, как и заключительная секвенция вывода P.

13.8) Мы можем легко показать следующее. Пусть P — некоторый **TJ**-вывод, удовлетворяющий условиям p1—p4. Тогда P содержит хотя бы одно применение логического правила (которое должно быть неявным) или хотя бы одну **TJ**-начальную секвенцию. Следовательно, заключительная часть вывода P содержит некоторую главную формулу либо на границе, либо в какой-то **TJ**-начальной секвенции.

13.9) Пусть P — некоторый **TJ**-вывод, удовлетворяющий условиям p1—p4. Тогда в силу 13.8) его заключительная часть

содержит некоторую главную формулу либо на границе, либо в какой-то **TJ**-начальной секвенции. Формулу A в заключительной части вывода P мы назовем *главным потомком* или *главным* **TJ**-*потомком* в зависимости от того, является A потомком главной формулы некоторого граничного применения правила или потомком главной формулы некоторой **TJ**-начальной секвенции в заключительной части P.

Заметим, что главный **TJ**-потомок в заключительной части вывода P всегда входит в сукцедент соответствующей секвенции и имеет вид $\varepsilon(t)$.

13.10) Пусть P — некоторый **TJ**-вывод, удовлетворяющий условиям p1—p4, а S — секвенция в его заключительной части. Если S содержит некоторую неатомарную формулу B, то найдется формула A, входящая в секвенцию S или в некоторую секвенцию, расположенную выше S, такая, что A является главным потомком или главным **TJ**-потомком.

Доказательство. Допустим, что секвенция S содержит некоторую неатомарную формулу. Тогда S расположена выше самого верхнего ослабления в заключительной части. Свойство секвенций содержать некоторую неатомарную формулу сохраняется при переходе от нижней секвенции к одной из верхних в каждом применении правила в заключительной части (кроме, быть может, граничного применения). Поэтому, двигаясь таким образом от секвенции S вверх, мы достигнем границы или некоторой **TJ**-начальной секвенции и получим нужную главную формулу. Заметим, что B не обязательно совпадает с A, так как B может быть потомком некоторой формулы, которая „пассивна“ в граничном применении правила.

13.11) Пусть P — некоторый **TJ**-вывод, удовлетворяющий условиям p1—p4 и не содержащий подходящих сечений. Тогда в его заключительную часть входит некоторый главный **TJ**-потомок.

Доказательство. Поскольку заключительная секвенция вывода P не содержит логических символов, достаточно показать, что в эту секвенцию входит некоторый главный потомок или главный **TJ**-потомок. Допустим, что это не так. Согласно 13.8), в заключительную часть вывода P входит некоторая формула, являющаяся главным потомком или главным **TJ**-потомком. Рассмотрим следующее свойство $\mathscr{P}$ сечений в заключительной части вывода P: сечение, расположенное в заключительной части вывода P, обладает свойством $\mathscr{P}$, если по крайней мере одна из его верхних секвенций содержит такую формулу, а нижняя секвенция — не содержит. Так как заключительная часть такую формулу содержит, а заключительная секвенция — нет (по допущению), то должно существовать сечение, обладающее свойством $\mathscr{P}$. Пусть I — самое верхнее сечение со свойством $\mathscr{P}$, расположенное в заключительной части вывода P,

$$I\ \frac{\Gamma \to \Delta,\ D \qquad D,\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda.}$$

Через S_1 и S_2 обозначим соответственно левую и правую верхние секвенции сечения I. По нашему допущению одна из высекаемых формул является главным потомком или главным **TJ**-потомком. Допустим сначала, что этим свойством обладает формула D в S_1. Если формула D неатомарная, то она является главным потомком. Тогда S_2 также содержит некоторую неатомарную формулу (а именно D). Следовательно, в силу 13.10) в секвенции S_2 или выше нее найдется формула A, являющаяся главным потомком или главным **TJ**-потомком. Если в S_2 такой формулы нет, то тогда выше I должно быть некоторое сечение, обладающее свойством $\mathscr{P}$, в противоречие с выбором I. Если же такая формула A находится в S_2, то она должна совпадать с D, что противоречит нашему допущению о том, что вывод P не содержит подходящих сечений. Таким образом, формула D должна иметь вид $\varepsilon(t)$.

Предположим теперь, что секвенция S_2 содержит некоторый логический символ. Тогда либо в секвенции S_2, либо выше нее найдется некоторая формула, являющаяся главным потомком или главным **TJ**-потомком. Если эта формула принадлежит S_2, то она не совпадает с D (поскольку формула D имеет вид $\varepsilon(t)$ и расположена в левой части секвенции, она не может быть главным **TJ**-потомком) и потому должна также входить в нижнюю секвенцию сечения I в противоречие с нашим допущением, что I обладает свойством $\mathscr{P}$. Это значит, что такая формула входит в некоторую секвенцию, расположенную выше S, но не входит в S, что противоречит нашему допущению о том, что I — самое верхнее сечение, обладающее свойством $\mathscr{P}$. Таким образом, S_2 не содержит формул с логическими символами.

Так как I — самое верхнее сечение, обладающее свойством $\mathscr{P}$, то над секвенцией S_2 нет граничных применений логических правил и **TJ**-начальных секвенций, расположенных в заключительной части. Следовательно, подвывод секвенции S_2 целиком содержится в заключительной части, в него не входит никакая логическая начальная секвенция или **TJ**-начальная секвенция и секвенция S_2 не содержит формул вида $\varepsilon(t)$; поэтому и формула D не имеет вид $\varepsilon(t)$. Итак, мы доказали, что формула D в S_1 не может быть главным потомком или главным **TJ**-потомком.

Теперь предположим, что формула D в S_2 является главным потомком или **TJ**-потомком. Как мы уже показали, эта формула не может быть главным **TJ**-потомком: в D должен входить некоторый логический символ. Следовательно, либо в секвенции S_1, либо в некоторой секвенции, расположенной выше S_1, найдется формула, являющаяся главным потомком или главным **TJ**-потомком. Если в S_1 такой формулы нет, то выше S_1 существует сечение, обладающее свойством $\mathscr{P}$, что противоречит нашему допущению относительно I. Поэтому такой формулой должна быть формула D в S_1, поскольку нижняя секвенция сечения I не может содержать такой формулы. Но это опять противоречит нашему допущению, что вывод P не содержит подходящих сечений.

13.12) Пусть теперь P — некоторый критический **TJ**-вывод, к которому уже применена вплоть до шага 4 редукция из леммы 12.8. Тогда вывод P обладает свойствами p1—p4 и не содержит подходящих сечений (поскольку он критический). Определим понятие критической редукции. В силу 13.11) в заключительную секвенцию вывода P входит некоторый главный **TJ**-потомок, скажем $\varepsilon(\bar{m}_i)$, т. е. потомок какой-то главной формулы $\varepsilon(r)$ (где r — замкнутый терм, обозначающий число m_i). Пусть m — любое число, такое, что ординал $|m|_{\lessdot}$ меньше заключительного числа вывода P. Тогда $\bar{m} \lessdot r$ является истинным Σ_1^0-предложением системы **PA**, и потому секвенцию $\to \bar{m} \lessdot r$ можно вывести в **PA** из некоторой математической начальной секвенции (скажем, $\to F$) с помощью одного применения правила $\exists$-справа. Тогда заменим **TJ**-начальную секвенцию

$$\forall x\,(x \lessdot r \supset \varepsilon(x)) \to \varepsilon(r)$$

в выводе P обычным выводом в **PA** (ε):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\to F}{\to \bar{m} \lessdot r} \qquad \varepsilon(\bar{m}) \to \varepsilon(\bar{m})}{\bar{m} \lessdot r \supset \varepsilon(\bar{m}) \to \varepsilon(\bar{m})}}{\forall x\,(x \lessdot r \supset \varepsilon(x)) \to \varepsilon(\bar{m})}}{\forall x\,(x \lessdot r \supset \varepsilon(x)) \to \varepsilon(\bar{m}),\ \varepsilon(r).}}{}$$

Ординал этого вывода равен 6 и меньше ординала соответствующей **TJ**-начальной секвенции (который равен 7). С помощью этой замены и некоторых очевидных изменений вывод P преобразуется в некоторый **TJ**-вывод P', заключительная секвенция которого имеет вид

$$\to \varepsilon(\bar{m}),\ \varepsilon(\bar{m}_1),\ \ldots,\ \varepsilon(\bar{m}_n),$$

где $\to \varepsilon(\bar{m}_1), \ldots, \varepsilon(\bar{m}_n)$ — заключительная секвенция вывода P, и ординал которого меньше ординала вывода P, а заключительное число равно $|m|_{\lessdot}$. Мы будем говорить, что вывод P' получается из P применением *критической редукции по* m.

Предположим теперь, что P — произвольный **TJ**-вывод (не обязательно критический) и ординал $|m|_{\lessdot}$ меньше заключительного числа вывода P. Определим теперь, что понимается под выводом, получаемым из P применением критической редукции по m.

Если P — критический вывод, то определение такое же, как и выше. В противном случае проведем последовательность редукций (как в доказательстве леммы 12.8). При каждой редукции ординал вывода уменьшается, и поэтому этот процесс должен закончиться через конечное число шагов на некотором критическом выводе, удовлетворяющем условиям p1 — p4. Тогда берем вывод, получающийся из этого указанным выше способом.

13.13) Присоединяя к предыдущим редукциям редукцию, описанную в 13.12), и применяя основную лемму 13.5, мы получаем теорему Генцена в ее первоначальной формулировке:

Теорема 13.6. *Порядковый тип отношения $\lessdot$ меньше, чем* ε_0.

13.14) Пусть $P(a)$ — некоторый вывод секвенции $\to \varepsilon(a)$, где $\varepsilon(a)$ получено, как указано в 13.2). Для всякого натурального числа k определим индукцией по k некоторый **TJ**-вывод P_k, заключительное число которого равно $|k|_{\lessdot}$.

(1) Допустим, что $\forall n < k\,(n \lessdot k)$. Тогда P_k — это вывод $P(\bar{k})$, получаемый из вывода $P(a)$ заменой в нем всюду переменной a нумералом $\bar{k}$.

(2) Допустим, что $\exists n < k\,(k \lessdot n)$. Пусть

(**) $$n_0 \lessdot \ldots \lessdot n_{j-1} (= k) \lessdot n_{j+1} \lessdot \ldots \lessdot n_k$$

— упорядочение в смысле $\lessdot$ всех чисел $\leqslant k$. Тогда P_k определяется как вывод, получающийся из вывода $P_{n_{j+1}}$ применением к нему критической редукции по k (см. 13.12)). Очевидно, что это определение рекурсивно.

13.15) Определим теперь с помощью P_k отображение f, которое и будет искомым отображением теоремы 13.4. Значение $f(k)$ определяется индукцией по k:

$$f(0) = \omega^{o(P_0)},$$

и $f(k) = f(n_{j-1}) + \omega^{o(P_k)}$ для $k > 0$, где $o(P)$ — гёделев номер ординала вывода P, „+" есть (примитивно рекурсивная функция, представляющая) сложение ординалов, ω^α — экспонента (т. е. представляющая ее примитивно рекурсивная функция) с основанием ω, а n_{j-1} — натуральное число, имеющее тот же смысл, что и в (**) (такое число всегда существует, если $k > 0$).

13.16) Пусть $m_0 \lessdot m_1 \lessdot \ldots \lessdot m_i$ — упорядочение в смысле $\lessdot$ натуральных чисел $< i+1$. Тогда

$$f(m_{j+1}) = f(m_j) + \omega^{o(P_{m_{j+1}})},$$

где $0 \leqslant j < i$. Это равенство доказывается индукцией по i. Для $i = 0$ оно тривиально. Допустим, что оно верно для i. Чтобы доказать, что оно верно и для $i+1$, достаточно показать, что

(1) $$f(i+1) = f(m_j) + \omega^{o(P_{i+1})}.$$

и

(2) $$f(m_{j+1}) = f(i+1) + \omega^{o(P_{m_{j+1}})},$$

где числа $m_0, \ldots, m_i$ имеют указанный выше смысл и $m_j \lessdot i + 1 \lessdot m_{j+1}$. Равенство (1) выполняется по определению функции f, а равенство (2) следует из (1), равенства $f(m_{j+1}) = f(m_j) + \omega^{o(P_{m_{j+1}})}$ (верного по предположению индукции) и из того, что $o(P_{i+1}) \lessdot o(P_{m_{j+1}})$ (согласно определению P_{i+1}). Вторая часть теоремы 13.4 легко получается, если положить $\mu = \omega^{o(P(a))+1}$. Теорема 13.4 доказана.

В заключение сформулируем другой результат Генцена, который доказывается непосредственно.

Теорема 13.7. *Пусть $\lessdot_n$ — стандартное вполне-упорядочение по типу ε_0, ограниченное ординалом ω_n. Тогда $\lessdot_n$ — доказуемое вполне-упорядочение относительно* **PA**.

T-предикат Клини (для функций одного аргумента) — это примитивно рекурсивное отношение T, такое, что для произвольной частично рекурсивной функции f (от одного аргумента) существует натуральное число e, для которого

$$f(x) \simeq U(\mu y T(e, x, y))$$

при всех x (U — некоторая фиксированная примитивно рекурсивная функция). Такое число e называется *гёделевым номером функции* f. Это определение можно распространить на функции от нескольких аргументов.

Если e — гёделев номер некоторой частично рекурсивной функции f одного аргумента, то, очевидно,

$$f \text{ (обще) рекурсивна тогда и только тогда, когда } \forall x \exists y T(e, x, y).$$

Далее, функция f называется *доказуемо рекурсивной* (в **PA**), если она имеет гёделев номер e, такой, что в **PA** выводимо $\forall x \exists y T(\bar{e}, x, y)$. Определив гёделеву нумерацию рекурсивных функций, мы можем теперь сформулировать следующую задачу, которую по ее содержанию следовало бы поместить в § 12.

Задача 13.8. Пусть $\mathbf{PA}^*$ — система, получаемая из **PA** следующей модификацией. Язык системы $\mathbf{PA}^*$ — тот же, что и для **PA**; начальные секвенции — те же, что и для **PA**; правилами вывода являются все правила для **PA**, кроме правил сечения, $\forall$-справа и индукции; в качестве нового правила добавляется описываемое ниже конструктивное ω-правило:

$$\frac{P_1 \ldots P_i \ldots}{\Gamma \to \Delta,\ \forall x A(x)} \quad (i < \omega),$$

где P_i — выводы, оканчивающиеся секвенциями $\Gamma \to \Delta$, $A(\bar{i})$, и существует рекурсивная функция f, такая, что $f(i) = \ulcorner P_i \urcorner$. Пусть e — гёделев номер функции f. Тогда выводу, оканчивающемуся секвенцией $\Gamma \to \Delta$, $\forall x A(x)$, ставится в соответствие номер

$$5^e \cdot 7^{\ulcorner \Gamma \to \Delta,\ \forall x A(x) \urcorner}.$$

Показать, что если секвенция S выводима в **PA** и не содержит свободных переменных, то она выводима и в $\mathbf{PA}^*$. [*Указание.* Приспособить метод доказательства непротиворечивости системы **PA** следующим образом. Пусть P — некоторый (регулярный) вывод в **PA**, ординал которого в смысле определения 12.4 равен α. Тогда выводу P следует приписать новый ординал $\omega^\alpha \dotplus m$, где m — число свободных переменных в заключительной части вывода P. Редукционный процесс, определенный для доказательства непротиворечивости, проходит при этом почти без изменений, за исключением того, что в случае, когда P содержит явные применения логических правил и самым нижним таким применением является применение правила $\forall$-справа, его следует заменить соответствующим применением ω-правила в конце вывода.]

Задача 13.9. Пусть f — доказуемо рекурсивная функция в **PA**. Тогда существует ординал μ (меньший, чем ε_0), такой, что функция f является $\prec^\mu$-примитивно рекурсивной, где $\prec^\mu$ — стандартное упорядочение по типу ε_0, ограниченное ординалом μ. [*Указание.* Пусть e — гёделев номер функции f, такой, что в **PA** выводимо $\forall x \exists y T(\bar{e}, x, y)$. Тогда формула $\exists y T(\bar{e}, a, y)$ имеет некоторый вывод $P(a)$ со свободной переменной a. Пусть μ — ординал этого вывода, и пусть P_m обозначает $P(\bar{m})$ для всякого натурального числа m. Методом, описанным в указании к задаче 13.8, вывод P_m может быть преобразован в некоторый не содержащий сечений вывод в системе $\mathbf{PA}^*$ с той же заключительной секвенцией. Легко показать, что получающийся вывод не содержит применений ω-правила, поскольку $P(\bar{m})$ не содержит явных применений правила $\forall$-справа. Это преобразование в действительности является $\prec^\mu$-примитивно рекурсивным. Таким образом, существует некоторая $\prec^\mu$-примитивно рекурсивная функция τ, такая, что $\tau(\ulcorner P_m \urcorner)$ есть гёделев номер вывода без сечений секвенции $\to \exists y T(\bar{e}, \bar{m}, y)$. Анализируя этот вывод, можно найти (примитивно рекурсивно по его номеру) некоторое натуральное число n, удовлетворяющее $T(e, m, n)$. Тогда n вычисляется $\prec^\mu$-примитивно рекурсивно по m, и $f(m) = U(n)$. Таким образом, функция f является $\prec^\mu$-примитивно рекурсивной.]

§ 14. Еще один вопрос

Мы здесь опять предполагаем, что язык L системы **PA** содержит символы для всех примитивно рекурсивных функций, а их определяющие равенства включены в число начальных секвенций.

Предложение 14.1. *Пусть Φ_n — множество предложений языка* L, *содержащих не более n логических символов. Тогда для Φ_n в системе* **PA** *существует определение истинности, т. е. найдется некоторая формула $T_n(a)$ языка* L, *такая, что для всякого предложения A из Φ_n в* **PA** *выводимо*

$$T_n(\overline{\ulcorner A \urcorner}) \equiv A.$$

Доказательство. Формула T_n определяется индукцией по n. Мы приведем лишь переход от T_n к T_{n+1}.

Натуральное число x назовем *кодовым*, если его можно разложить в произведение $x = 2^{x_0} \cdot 3^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{x_{n-1}}$, где $x_i = 0$ или $x_i = 1$ для всякого i. Пусть $\mathrm{seq}(x, n)$ — (примитивно рекурсивный) предикат, выражающий тот факт, что x — кодовое число указанного выше вида. Мы будем называть n длиной такого x. Число x_i, т. е. i-й показатель в разложении x, будем обозначать через $x(i)$. Пусть предикат $\mathrm{st}(\ulcorner A \urcorner)$ выражает тот факт, что A — предложение языка L, и пусть $\mathrm{ls}(\ulcorner A \urcorner)$ равняется числу логических символов в A. Тогда предикат T_{n+1} определим следующим образом:

$$T_{n+1}(\ulcorner A\urcorner)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{st}(\ulcorner A\urcorner)\wedge \mathrm{ls}(\ulcorner A\urcorner)\leqslant n+1\wedge$$

$$\wedge\, \exists x[\mathrm{seq}(x,\ \ulcorner A\urcorner)\wedge \forall i\,(0\leqslant i\leqslant \ulcorner A\urcorner\supset$$

$$\supset(\forall\ulcorner B\urcorner[i=\ulcorner\neg B\urcorner\supset(x(i)=1\equiv x(\ulcorner B\urcorner)=0)]\wedge$$

$$\wedge\,\forall\ulcorner B\urcorner\forall\ulcorner C\urcorner[i=\ulcorner B\wedge C\urcorner\supset$$

$$\supset(x(i)=1\equiv x(\ulcorner B\urcorner)=1\wedge x(\ulcorner C\urcorner)=1)]\wedge$$

$$\wedge\,\forall\ulcorner\forall yB(y)\urcorner[i=\ulcorner\forall yB(y)\urcorner\supset$$

$$\supset(x(i)=1\equiv\forall yT_n(\ulcorner B(\bar{y})\urcorner))]\wedge$$

$$\wedge\,\forall\ulcorner\exists yB(y)\urcorner[i=\ulcorner\exists yB(y)\urcorner\supset$$

$$\supset(x(i)=1\equiv\exists yT_n(\ulcorner B(\bar{y})\urcorner))]))\wedge$$

$$\wedge\, x(\ulcorner A\urcorner)=1].$$

Легко видеть, что формула

$$T_{n+1}(\overline{\ulcorner A(\bar{b}_1,\ \ldots,\ \bar{b}_n)\urcorner})\equiv A(b_1,\ \ldots,\ b_n)$$

выводима в **PA** для всякой формулы A из Φ_n, причем все свободные переменные формулы A содержатся среди $b_1, \ldots, b_n$.

Пусть S—секвенция, имеющая вид $A_1, \ldots, A_m\to B_1, \ldots, B_l$, причем все $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_l$ принадлежат классу Φ_n. Тогда $T_n(\ulcorner S\urcorner)$ определяется так:

$$\exists i(1\leqslant i\leqslant m\wedge\neg T_n(\ulcorner A_i\urcorner))\vee\exists i(1\leqslant i\leqslant l\wedge T_n(\ulcorner B_i\urcorner)).$$

Конечно, m и l здесь примитивно рекурсивно зависят от $\ulcorner S\urcorner$, а формулы A_i и B_i также примитивно рекурсивно определяются по $\ulcorner S\urcorner$ и i.

Предложение 14.2. *Система* **PA** *не может быть задана конечным числом аксиом; другими словами, математическую индукцию нельзя выразить конечным числом формул.*

Доказательство. Отметим сначала, что если в **PA** формализовать теорему об устранении сечений для **LK**, то мы получим

$$\text{(1)}\qquad \mathbf{PA}\vdash(\vdash\ulcorner S\urcorner\to\underset{CF}{\vdash}\ulcorner S\urcorner).$$

Здесь $\vdash$ означает выводимость в системе **LK**, а $\underset{CF}{\vdash}$ — выводимость в **LK** без сечений.

Допустим, что P — некоторый не содержащий сечений вывод (в **LK**) секвенции S и все формулы в S принадлежат классу Φ_n. Тогда каждая формула в P также принадлежит Φ_n. Далее, если P — вывод в языке L, то мы можем средствами **PA** показать, что всякий нумерический пример секвенции S является истинным; иными словами,

$$\text{(2)}\qquad \mathbf{PA}\vdash(\underset{CF}{\vdash}\ulcorner S(b_1,\ \ldots,\ b_m)\urcorner\to\forall x_1\ldots x_mT_n(\ulcorner S(\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_m)\urcorner),$$

причем все свободные переменные секвенции S содержатся среди $b_1, \ldots, b_m$. Утверждение (2) доказывается индукцией по числу секвенций в P.

Пусть теперь Γ_0 — произвольное конечное множество (или, точнее, последовательность) аксиом из $\mathrm{CA}\cup\mathrm{VJ}$ (см. определение 9.2), и пусть n — максимальное число логических символов, встречающихся в формулах последовательности Γ_0. Взяв в качестве S секвенцию $\Gamma_0\to\bar{0}=\bar{1}$, мы получим в силу (2)

$$\text{(3)}\qquad \mathbf{PA}\vdash(\underset{CF}{\vdash}\ulcorner\Gamma_0\to\bar{0}=\bar{1}\urcorner\to T_n(\ulcorner\Gamma_0\to\bar{0}=\bar{1}\urcorner).$$

Далее, очевидно, имеем

$$\mathbf{PA}\vdash(\neg T_n(\ulcorner\Gamma_0\to\bar{0}=\bar{1}\urcorner)),$$

и поэтому из (1) и (3) следует

$$\mathbf{PA}\vdash(\neg\vdash\ulcorner\Gamma_0\to\bar{0}=\bar{1}\urcorner).$$

Предложение $\neg\vdash\ulcorner\Gamma_0\to\bar{0}=\bar{1}\urcorner$ выражает непротиворечивость системы аксиом Γ_0 и, как мы видим, выводимо в **PA**. Отсюда в силу второй теоремы Гёделя о неполноте (теорема 10.18) получаем, что система аксиом Γ_0 не эквивалентна системе **PA**.

Упражнение 14.3. Показать, что ZF (теорию множеств Цермело — Френкеля) нельзя задать конечным числом аксиом. Иными словами, схему аксиом подстановки нельзя выразить конечным числом формул.

ЧАСТЬ II

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Прежде чем перейти к строгому изложению содержания части II, мы сначала объясним значение систем более высоких (конечных) порядков и укажем трудности, встречающиеся при их изучении.

Для начала встанем на позицию „бесконечного разума", который, как мы предполагаем, может перебрать один за другим бесконечное число объектов. С такой точки зрения смысл исчисления предикатов первого порядка вполне ясен. Иначе говоря, вполне ясно и однозначно определен смысл кванторов ($\forall x$ и $\exists x$): для данной структуры $\mathscr{D}=\langle D, \phi\rangle$ квантор $\forall x$ означает „для всякого элемента x из D", а $\exists x$ означает „существует элемент x из D". Хотя может возникнуть вопрос, является ли структура $\mathscr{D}$ корректно определенной, исчисление предикатов первого порядка сомнений не вызывает. Однако ситуация полностью изменится, как только мы начнем рассматривать произвольные подмножества множества D. Нам придется тогда предположить, что бесконечный разум обладает следующими возможностями в дополнение к упомянутой выше:

1) Он может объединять элементы множества D в произвольные подмножества этого множества.

2) Он может перебирать все эти подмножества.

Пусть D — данное множество. Допустим, что мы рассматриваем множество подмножеств D, множество подмножеств этого множества подмножеств и т. д. Если мы предположим, что бесконечный разум обладает двумя указанными выше возможностями, то станет очевидно, что для таких множеств справедлива аксиома выделения. Что касается аксиомы выбора, то, хотя смысл ее не так ясен, как смысл аксиомы выделения, ее также следует принять, коль скоро сделано допущение о существовании бесконечного разума.

По существу, именно с этой точки зрения многие математики представляют себе множества. Справедливости ради следует отметить, что в современной математике многие рассуждения, касающиеся множеств, проводятся на такой основе, а исчисление предикатов высших (конечных) порядков является

формализацией такого подхода к множествам. Поэтому вполне естественно, что исследование структуры исчисления предикатов более высокого порядка (в частности, второго порядка) с точки зрения теории доказательств должно привлечь наше внимание, хотя исчисление предикатов конечного порядка формализует только некоторую собственную часть общей теории множеств. То обстоятельство, что мы ограничиваемся рассмотрением этой части теории множеств, будет оправдано в дальнейшем, когда мы заметим, что лишь для немногих теорем требуется полная теория множеств. Кроме того, основные понятия теории множеств не кажутся нам вполне ясными по следующим причинам.

(1) Мы не знаем, является совокупность всех ординалов, а тем более совокупность всех множеств, завершенной или же она находится в процессе развития: другими словами, не ясно, является эта совокупность завершенным универсумом или, так сказать, растущим. Если мы вообразим, что она представляет собой растущий универсум, то смысл кванторов ($\forall x$ и $\exists x$) будет неясным.

(2) Существуют определенные трудности при обосновании аксиомы подстановки. Эта аксиома часто обосновывается следующим образом:

(2.1) Ординалы порождаются неограниченно.

(2.2) Предположим, что α — некоторый уже построенный ординал и f — некоторая функция, определенная для всех $\beta<\alpha$. В силу (2.1) должен существовать некоторый ординал, который больше $f(\beta)$ для любого $\beta<\alpha$.

Даже если мы примем допущения (2.1) и (2.2), смысл аксиомы подстановки будет все еще не очень ясным. Трудность состоит в том, что эта аксиома содержит формулы с кванторами, и потому, если предполагается, что множества порождаются неограниченно, не ясно, что означают эти кванторы. Даже если мы попытаемся интерпретировать эти кванторы подходящим образом, мы все равно встретимся с трудностями, проистекающими из-за допущения (2.2).

Поясним более подробно, в чем состоят эти затруднения. Предположим, что (при некоторой интерпретации) формула $A(x, y)$ выражает функцию $y=f(x)$ и что на определенном этапе не существует супремума значений функции f на ординале α (это возможно, если мы предполагаем, что ординалы находятся в процессе порождения). Допустим далее, что со временем супремум функции f на α будет построен. Это значит, что добавится некоторое новое множество и смысл кванторов (вообще говоря) соответственно изменится. Таким образом, формула $A(x, y)$, возможно, уже не будет больше выражать ту же функцию f.

Для того чтобы пояснить суть дела, рассмотрим подобную ситуацию в теории натуральных чисел. Натуральные числа строятся из 0 с помощью операции $+1$. При попытке доказать предложение $\forall x \exists y (y = x + 1)$, когда уже построены числа $0, 1, \ldots, n$, обнаруживается, что это предложение не выполняется для $x = n$; тогда мы добавляем к множеству натуральных чисел $n + 1$ и доказываем это предложение для n так же, как делали это для $0, 1, \ldots, n - 1$. Тем не менее это не значит, что на $\{0, 1, \ldots, n + 1\}$ — множестве натуральных чисел, построенных к настоящему времени, — это предложение выполнено (поскольку смысл квантора $\forall x$ изменился). Данный пример представляет собой аналогию с неполным универсумом множеств, хотя в случае натуральных чисел мы на самом деле можем завершить процесс порождения натуральных чисел и построить универсум натуральных чисел, а именно ω. Это происходит потому, что в этом случае $+1$ является единственной операцией для порождения новых объектов, и ее поведение вполне ясно. В случае же теории множеств принципы порождения новых объектов являются более мощными и неточными. Даже если мы будем управлять интерпретацией кванторов локально, т. е. на определенных этапах построения (что можно сделать по аналогии с приведенным выше примером для натуральных чисел), все равно будет неясно, существует ли универсум, в котором выполняется аксиома подстановки. Это наводит нас на сомнения относительно существования недостижимых кардиналов.

Предыдущие рассуждения оправдывают наш интерес к исчислению предикатов конечного порядка. А именно:

1. Мир теории множеств более нестабилен, чем исчисление предикатов конечного порядка (с аксиомой выделения и аксиомой выбора).

2. Большую часть обычной математики (по крайней мере, классический анализ) можно формализовать в исчислении предикатов конечного порядка.

3. Теория доказательств полной теории множеств все еще слишком сложна для удовлетворительного ее исследования. Поэтому мы должны изучать что-нибудь попроще, и это, надо надеяться, укажет нам путь к изучению более сильных систем.

Указанные выше доводы в том виде, как они сформулированы, представляются скорее негативными причинами для изучения исчисления предикатов конечного порядка. Однако, развив второй из указанных выше пунктов, мы сможем привести более позитивную причину: дело в том, что погружение классического анализа в теорию множеств не только является излишним, но и, возможно, даже вводит в заблуждение! Исторически полная теория множеств развивалась позже классического анализа, и фактически принципы теории множеств являются слишком мощными для изучения этой части математики. Для целей классического анализа больше подходит исчисление предикатов конечного порядка, поскольку оно является формализацией (большинства) принципов, фактически в нем содержащихся. Подобным же образом примитивно рекурсивная арифметика, видимо, больше подходит для формализации финитной математики, чем арифметика Пеано. (Точности ради следует отметить, что некоторые разделы классического анализа могут побудить нас использовать (элементарную) теорию ординалов; по сути дела, именно это обстоятельство привело Кантора к развитию теории множеств.)

Изучение исчисления предикатов конечного порядка является все еще делом будущего, поскольку пока не известно, в какой степени для него справедливы красивые метатеоремы, относящиеся к исчислению предикатов первого порядка. Известных результатов совсем немного. Мы перечислим трудности, с которыми мы сталкиваемся при изучении исчисления предикатов конечного порядка:

1. Хотя теорема об устранении сечений справедлива для этой системы и является сама по себе изящным результатом, она не обеспечивает нас информацией о структуре этой системы (в отличие от случая системы первого порядка, в которой выводы без сечений обладают свойством подформульности; см. § 6).

2. В отличие от системы первого порядка эта система вместе с аксиомой выделения и аксиомой выбора не полна относительно семантики стандартных структур, где под стандартной моделью (или структурой) для языка конечного порядка понимается такая модель, в которой кванторы второго порядка пробегают множество *всех* подмножеств данной области, кванторы третьего порядка — множество всех подмножеств предыдущего множества и т. д.

Например, множество предложений

$$\forall \phi \forall x (\phi(0) \land \forall y (\phi(y) \supset \phi(y')) \supset \phi(x)),$$

$$\forall x \forall y \forall \phi (x = y \land \phi(x) \supset \phi(y)),$$

$$\forall x \forall y (x' = y' \supset x = y),$$

$$\forall x \neg x' = 0,$$

$$P(0),\ P(1),\ P(2),\ \ldots,$$

$$\exists x \neg P(x)$$

непротиворечиво, но не имеет стандартной модели. (Правда, относительно семантики так называемых структур Генкина исчисление предикатов конечного порядка является полным, как мы увидим в § 21.) Хуже того, нами не обнаружено никакого „хорошего“ расширения исчисления предикатов конечного порядка, не говоря уже о полном расширении. Мы можем перефразировать это следующим образом: нам не известно ни одного естественного и значительного принципа для этого исчисления, кроме аксиомы выделения и аксиомы выбора. Это приводит к новому важному направлению в исследовании: искать системы второго порядка с правилами вывода трансцендентного характера (например, бесконечными) с тем, чтобы получать полные системы.

До сих пор мы обсуждали изучение исчисления предикатов конечного порядка с точки зрения „бесконечного разума“. Несомненно, это исчисление столь же важно изучать и с точки зрения, отрицающей абсолютный мир бесконечного разума. Чтобы развить такую точку зрения, мы попытаемся проанализировать эти системы и обосновать их. Вторая точка зрения, возможно, не проявится в части II; она проявится в части III в связи с приведенными там доказательствами непротиворечивости. Стоит отметить, что, хотя в части II мы проводим рассуждения, опираясь на сильные средства, такие, как теория множеств и „бесконечный разум“, некоторые из результатов этой части точно соответствуют строго финитной точке зрения.

Изучение бесконечных языков было предпринято в попытке преодолеть затруднительное положение в системах второго порядка. Бесконечный язык сильнее, чем обычный язык первого порядка, тем не менее для него справедлива теорема о полноте (а поэтому он относительно слабый). Как можно было ожидать, обобщенные кванторы Генкина выдвигают трудности такого же сорта, как и те, что появляются в языке второго порядка. Их изучение — пока еще дело будущего.

ГЛАВА 3

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПРОСТАЯ ТЕОРИЯ ТИПОВ

§ 15. Исчисление предикатов второго порядка

Определение 15.1. Язык исчисления предикатов второго порядка (*язык второго порядка*) получается из языка исчисления предикатов первого порядка (см. определение 1.1) добавлением следующих символов:

5) *Переменные второго порядка*:

5.1) свободные i-местные переменные ($i = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\alpha_0^i,\ \alpha_1^i,\ \ldots,\ \alpha_j^i,\ \ldots \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots);$$

5.2) связанные i-местные переменные ($i = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\varphi_0^i,\ \varphi_1^i,\ \ldots,\ \varphi_j^i,\ \ldots \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Переменные из п. 2) определения 1.1 ($a_0, a_1, \ldots, x_0, x_1, \ldots$) мы будем называть *переменными первого порядка* для того, чтобы отличать их от переменных второго порядка.

Термы определяются так же, как и в определении 1.2.

Как и в предыдущих параграфах, для формальных переменных и для метапеременных мы будем использовать одни и те же символы, буквы α, β, γ, ... (с индексами и без них) будут использоваться для обозначения свободных переменных второго порядка, а буквы φ, ψ, χ, ... — для обозначения связанных переменных второго порядка. Верхний индекс i у переменных α_j^i и φ_j^i мы обычно будем опускать.

Определение 15.2. *Формулы* языка второго порядка определяются так же, как в определении 1.3, с учетом следующих изменений:

Если R^i — некоторая i-местная предикатная константа или свободная переменная второго порядка, а $t_1, \ldots, t_i$ — термы, то $R^i(t_1, \ldots, t_i)$ — атомарная формула.

В п. 3) определения 1.3 вместо „a — свободная переменная“ и „x — связанная переменная“ следует читать соответственно „a — свободная переменная первого порядка“ и „x — связанная переменная первого порядка“.

Кроме того, добавляется пункт

3′) Если A — формула, α — свободная переменная второго порядка и φ — связанная переменная второго порядка, не входящая в A и имеющая то же число аргументов, что и α, то $\forall\varphi A'$ и $\exists\varphi A'$ — тоже формулы; где A' есть выражение, полученное из A заменой α на φ в каждом вхождении α в A. Внешними логическими символами формул $\forall\varphi A'$ и $\exists\varphi A'$ являются соответственно $\forall$ и $\exists$.

Бескванторные формулы и замкнутые формулы (т. е. предложения) определяются так же, как ранее.

Замещение символов и понятия отмеченных и полностью отмеченных вхождений данных символов определяются так же, как в 1.4 и 1.6 соответственно. Таким образом, из $F(\alpha)$ мы получим $F(R)$, заменив отмеченное вхождение α на R. Понятие алфавитного варианта определяется таким же образом, как и в 2.15 (но теперь связанные переменные должны замещаться другими связанными переменными того же порядка, а для переменных второго порядка, кроме того, с тем же числом аргументных мест).

Секвенция — это выражение вида $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ — конечные последовательности формул нашего языка.

В дальнейшем мы будем предполагать, что фиксирован некоторый язык второго порядка, который мы обозначим через L_2.

Сначала мы определим некоторую систему второго порядка, не содержащую никаких „аксиом выделения" и являющуюся просто системой **LK** с переменными второго порядка. Поскольку эта система является основной среди систем второго порядка, мы назовем ее *базисным исчислением* для систем второго порядка и будем сокращенно обозначать **BC**.

Определение 15.3. Формулы и секвенции системы **BC** — это соответственно формулы и секвенции языка L_2. Правила вывода для системы **BC** определяются так же, как и для системы **LK**: к правилам вывода, приведенным в определении 2.1, нужно лишь добавить следующие правила:

2.5′) Правила второго порядка для $\forall$:

$$\forall\text{-слева:}\quad \frac{F(R),\ \Gamma \to \Delta}{\forall\varphi F(\varphi),\ \Gamma \to \Delta,}$$

где R — произвольная предикатная константа или свободная переменная второго порядка и φ имеет такое же число аргументных мест, что и R.

$$\forall\text{-справа:}\quad \frac{\Gamma \to \Delta,\ F(\alpha)}{\Gamma \to \Delta,\ \forall\varphi F(\varphi),}$$

где α — свободная переменная второго порядка, полностью отмеченная в $F(\alpha)$ и не входящая в нижнюю секвенцию, а φ — связанная переменная второго порядка, имеющая такое же число аргументных мест, что и α (разумеется, не входящая в $F(\alpha)$). Переменная α называется *собственной переменной* этого правила.

2.6′) Правила второго порядка для $\exists$:

$$\exists\text{-слева:}\quad \frac{F(\alpha),\ \Gamma \to \Delta}{\exists\varphi F(\varphi),\ \Gamma \to \Delta,}$$

где α — свободная переменная второго порядка, полностью отмеченная в $F(\alpha)$ и не входящая в нижнюю секвенцию, а φ — связанная переменная второго порядка, имеющая такое же число аргументных мест, что и α. Переменная α называется *собственной переменной* этого правила.

$$\exists\text{-справа:}\quad \frac{\Gamma \to \Delta,\ F(R)}{\Gamma \to \Delta,\ \exists\varphi F(\varphi),}$$

где R — произвольная предикатная константа или свободная переменная второго порядка, а φ имеет такое же число аргументных мест, что и R.

Боковые и главные формулы этих правил определяются так же, как и в остальных случаях. Правила 2.5) и 2.6) в отличие от правил 2.5′) и 2.6′) будем называть правилами первого порядка для $\forall$ и $\exists$ соответственно.

Определение 15.4. Выводы в системе **BC** и относящиеся к ним понятия определяются, как в § 2 (см. определения 2.2, 2.3 и 2.8); таким образом, мы можем определить понятия „вывод, оканчивающийся секвенцией S, или вывод секвенции S", „секвенция S выводима", „нить секвенций", „секвенция, расположенная в выводе ниже или выше другой секвенции" и т. д. Непротиворечивость этой системы определяется в точности так же, как и раньше (см. определение 4.1).

Подобно лемме 2.10, мы можем доказать следующее

Предложение 15.5. (1) *Пусть $P(R)$ — некоторый* **BC**-*вывод секвенции $S(R)$, где R — произвольная предикатная константа или свободная переменная второго порядка. Пусть R' — произвольная предикатная константа или свободная переменная второго порядка, не входящая в $P(R)$. Предположим, что R и R' имеют одинаковое число аргументных мест. Тогда $P(R')$ — вывод секвенции $S(R')$.*

(2) *Вывод называется регулярным, если, во-первых, все собственные переменные в нем отличны друг от друга и, во-вторых, всякая переменная второго порядка, входящая в некоторую секвенцию S этого вывода в качестве собственной, входит, кроме того, только в секвенции, расположенные выше S. Тогда если какая-то секвенция S выводима в* **BC**, *то она имеет в* **BC** *некоторый регулярный вывод.*

В дальнейшем всякий раз, когда это нужно, мы будем предполагать, что имеем дело с регулярными выводами.

Определение 15.6. Понятие „система аксиом" определяется так же, как в определении 4.1: система аксиом $\mathcal{A}$ (в языке L_2) — это произвольное множество предложений (языка L_2). Пункты 2) — 6) определения 4.1 можно приспособить для систем второго порядка. Предложение 4.3 принимает здесь такую формулировку:

Предложение 15.7. *Пусть $\mathcal{A}$ — система аксиом, и пусть* $\mathbf{BC}_{\mathcal{A}}$ — *система, получающаяся из* **BC** *добавлением в качестве начальных секвенций секвенции вида $\to A$ для всех A из $\mathcal{A}$. Тогда секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в* $\mathbf{BC}_{\mathcal{A}}$, *если и только если для*

некоторых предложений $A_1, \ldots, A_m$ *из* $\mathscr{A}$ *секвенция* $A_1, \ldots,$
$\Gamma \to \Delta$ *выводима в* **BC**.

При рассмотрении систем второго порядка удобно работ
с полутермами и полуформулами.

Определение 15.8. (1) *Полутермы* определяются следующ
образом. Индивидные константы и переменные первого
рядка (свободные или связанные) являются полутермами; е
$t_1, \ldots, t_n$ — полутермы и f — некоторая n-местная функциона
ная константа, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже полутерм.

(2) *Полуформулы и свободные вхождения* в них *связан*
переменных определяются следующим образом.

Пусть R — некоторая i-местная предикатная константа
переменная второго порядка (свободная или связанная),
пусть $t_1, \ldots, t_i$ — полутермы. Тогда $R(t_1, \ldots, t_i)$ — атомар
полуформула, все связанные переменные полутермов $t_1, \ldots$
входят свободно в $R(t_1, \ldots, t_i)$, и если R — связанная перем
ная, то R входит свободно в $R(t_1, \ldots, t_i)$. Если B и C — по
формулы, то $B \wedge C$ тоже полуформула, и все связанные пе
менные, входящие свободно в B или C, входят свободно и в $B \wedge$
Для остальных пропозициональных связок определение про
дится аналогично. Если $F(x)$ — полуформула, в которой
вхождения связанной переменной первого порядка x являю
свободными и отмечеными, то $\forall x F(x)$ тоже полуформула, п
чем свободные вхождения связанных переменных в $\forall x F(x)$
же, что и в $F(x)$, кроме вхождений переменной x. Если $F(\varphi)$
полуформула, в которой все вхождения связанной перемен
второго порядка φ являются свободными и отмеченными,
$\forall \varphi F(\varphi)$ тоже полуформула, и свободные вхождения в $\forall \varphi F$
те же, что и в $F(\varphi)$, кроме вхождений переменной φ. Для
определение аналогично.

Очевидно, что термы — это полутермы без связанных пе
менных, а формулы — это полуформулы, не имеющие своб
ных вхождений связанных переменных.

Теперь мы определим два важных понятия: „абстракт"
„подстановка".

Определение 15.9. Пусть $A(b_1, \ldots, b_m)$ — формула, в ко
рой отмечены некоторые вхождения переменных $b_1, \ldots,$
(возможно, что какие-то из переменных $b_1, \ldots, b_m$ не вход
в эту формулу совсем). Пусть $y_1, \ldots, y_m$ — связанные перем
ные первого порядка, не входящие в $A(b_1, \ldots, b_m)$. Тог
метавыражение $\{y_1, \ldots, y_m\} A(y_1, \ldots, y_m)$ называется *абстр*
том формулы $A(b_1, \ldots, b_m)$.

акты являются метавыраже-
жениями языка L_2 и будут
тельных целях.
$y_1, \ldots, y_m)$ называется m-
мы будем обозначать бук-
$\ldots, y_m\} \alpha(y_1, \ldots, y_m)$ будет
обозначает абстракт $\{y_1, \ldots$
полутермы, то $V(t_1, \ldots, t_m)$
$t_m)$.

абстракта вместо свободной
луформулу определяется сле-
олуформула, где некоторые
ны, и пусть V — абстракт,
ных мест, что и α. (В даль-
оследнее условие, поскольку
для таких α и V, которые
ных мест.) Определим *под-*
ьтат которой мы обозначим

дения обозначений мы пред-

номестными. Итак, пусть V

определяется индукцией по

α).

α отмечено в $F(\alpha)$, то $F\binom{\alpha}{V}$

это α не отмечено, или же

отличного от α, то $F\binom{\alpha}{V}$

ала заменим все связанные
а связанные переменные, не
обы каждая переменная за-
ого же порядка, различные
стные связанные переменные
ные переменные. Таким об-
то F не содержит связанных

(α), $B(\alpha) \wedge C(\alpha)$, $B(\alpha) \vee C(\alpha)$

ь $\neg B\binom{\alpha}{V}$, $B\binom{\alpha}{V} \wedge C\binom{\alpha}{V}$,

) соответственно.

3) $F(\alpha)$ имеет вид $\forall x G(x)(\alpha)$, $\exists x G(x)(\alpha)$, $\forall\varphi G(\varphi)(\alpha)$ или $\exists\varphi G(\varphi)(\alpha)$. Тогда $F\binom{\alpha}{V}$ есть $\forall x\left(G(x)\binom{\alpha}{V}\right)$, $\exists x\left(G(x)\binom{\alpha}{V}\right)$, $\forall\varphi\left(G(\varphi)\binom{\alpha}{V}\right)$ или $\exists\varphi\left(G(\varphi)\binom{\alpha}{V}\right)$ соответственно.

Очевидно, что $F\binom{\alpha}{V}$ есть полуформула. Очевидно также, что если $F(\alpha)$ — формула, то и $F\binom{\alpha}{V}$ — формула.

Имеющуюся в 2) и 3) неопределенность в выборе новых связанных переменных можно устранить, если потребовать, чтобы эти переменные были первыми в списке связанных переменных первого и второго порядка, которые удовлетворяют нужным условиям. Это ограничение не так существенно ввиду того, что справедливо

Предложение 15.11. *Пусть A и B — любые две формулы, являющиеся алфавитными вариантами друг друга. Тогда в* **BC** *выводима формула $A \equiv B$.*

Таким образом, в дальнейшем мы можем иметь дело с любым алфавитным вариантом данной формулы.

Пример 15.12. (1) Пусть $F(\alpha)$ — формула $\forall x \forall y (x = y \supset (\alpha(x) \equiv \alpha(y)))$, где оба вхождения α отмечены, и пусть V — абстракт $\{u\} \exists x (x + u = 5)$, где подразумевается, что 5 — индивидная константа, $+$ — функциональная константа и $=$ — предикатная константа языка L_2. Поскольку переменная x из $F(\alpha)$ входит в V, сначала заменим ее на другую связанную переменную, скажем z: $\forall z \forall y (z = y \supset (\alpha(z) \equiv \alpha(y)))$. Обозначим полученную формулу через $F'(\alpha)$. Проведем шаг за шагом подстановку абстракта V в $F'(\alpha)$ вместо α.

$$\alpha(z)\binom{\alpha}{V}: \quad \exists x (x + z = 5),$$

$$\alpha(y)\binom{\alpha}{V}: \quad \exists x (x + y = 5),$$

$$(\alpha(z) \equiv \alpha(y))\binom{\alpha}{V}: \quad \exists x (x + z = 5) \equiv \exists x (x + y = 5),$$

$$F'\binom{\alpha}{V}, \text{ т. е. } \forall z \forall y (z = y \supset (\alpha(z) \equiv \alpha(y)))\binom{\alpha}{V}:$$
$$\forall z \forall y (z = y \supset (\exists x (x + z = 5) \equiv \exists y (y + z = 5))).$$

Такая формула нам знакома — это аксиома равенства. Если бы мы предварительно не заменили x на z, то в результате получили бы выражение

$$\forall x \forall y (x = y \supset (\exists x (x + x = 5) \equiv \exists x (x + y = 5))),$$

которое даже не является формулой.

Этот пример можно обобщить для произвольного абстракта $\{u\} B(u)$ (при условии что нет „коллизии“ связанных переменных) и получить таким образом формулу $\forall x \forall y (x = y \supset (B(x) \equiv B(y)))$, представляющую собой аксиому равенства. Таким образом, из простой схемы

$$\forall x \forall y (x = y \supset (\alpha(x) \equiv \alpha(y)))$$

с помощью подстановки получаются все аксиомы равенства.

(2) Пусть $F(\alpha)$ обозначает формулу $\alpha(0) \wedge \forall x (\alpha(x) \supset \alpha(x')) \supset \forall x \alpha(x)$, где все вхождения переменной α в $F(\alpha)$ отмечены, и пусть V есть абстракт $\{u\} B(u)$. Предположим, что x не входит в V. Тогда $F\binom{\alpha}{V}$ есть формула $B(0) \wedge \forall x (B(x) \supset B(x')) \supset \forall x B(x)$, представляющая собой аксиому индукции для арифметики (в соответствующем языке).

(3) Пусть $F(\alpha)$ обозначает формулу

$$\forall x \forall y \forall z (\alpha(x, y) \wedge \alpha(x, z) \supset y = z) \supset$$
$$\supset \exists v \forall y (y \in v \equiv \exists x (x \in u \wedge \alpha(x, y))),$$

где все вхождения α в $F(\alpha)$ отмечены, и пусть V обозначает абстракт

$$\{x^1, y^1\} B(x^1, y^1),$$

где $B(x^1, y^1)$ — полуформула языка теории множеств. Тогда $F\binom{\alpha}{V}$ есть формула

$$\forall x \forall y \forall z (B(x, y) \wedge B(x, z) \supset y = z) \supset$$
$$\supset \exists v \forall y (y \in v \equiv \exists x (x \in u \wedge B(x, y))),$$

представляющая собой аксиому подстановки в теории множеств. Заметим, что формула $B(x, y)$ может содержать, кроме x и y, и другие переменные, в том числе u, но не должна содержать v (поскольку v — связанная переменная в $F(\alpha)$).

Мы еще вернемся к этому примеру.

Индукцией по числу логических символов в формуле $F(\alpha)$ легко доказывается следующее

Предложение 15.13. *Для любой формулы $F(\alpha)$ и произвольных абстрактов U и V в системе* **BC** *выводима секвенция*

$$\forall x (U(x) \equiv V(x)), \quad F(U) \to F(V)$$

(*где предполагается, что связанные переменные должным образом переименованы*).

Определение 15.14. (1) Пусть $A(b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ — формула, все свободные переменные которой содержатся среди переменных $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n, \beta_1, \ldots, \beta_k$ (хотя не обязательно все они входят в A), причем все вхождения этих переменных отмечены. Тогда всякое предложение вида

$$(*)\ \forall z_1 \ldots \forall z_n \forall \psi_1 \ldots \forall \psi_k \exists \varphi \forall y_1 \ldots \forall y_m (\varphi(y_1, \ldots, y_m) \equiv \\ \equiv A(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n, \psi_1, \ldots, \psi_k))$$

называется *аксиомой выделения*.

Пусть V обозначает абстракт

$$\{y_1, \ldots, y_m\} A(y_1, \ldots, y_m, c_1, \ldots, c_n, \beta_1, \ldots, \beta_k).$$

Тогда приведенную выше аксиому выделения можно записать так:

$$(**)\ \forall z_1 \ldots \forall z_n \forall \psi_1 \ldots \forall \psi_k \exists \varphi \forall y_1 \ldots \forall y_m (\varphi(y_1, \ldots, y_m) \equiv \\ \equiv U(y_1, \ldots, y_m)),$$

где абстракт U получается из V замещением переменных c_i и β_j переменными z_i и ψ_j соответственно, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots k$.

(2) Пусть К — произвольное множество формул. (Буква К используется в этом смысле временно.) Формулу, принадлежащую множеству К, мы назовем К-*формулой*, и если $A(b_1, \ldots, b_m)$ есть К-формула, то абстракт $\{y_1, \ldots, y_m\} A(y_1, \ldots, y_m)$ назовем К-*абстрактом*. Если формула A в аксиоме выделения (см. (*)) является К-формулой, то предложение (*) называется *аксиомой* К-*выделения*.

(3) Множество формул К называется *замкнутым относительно подстановок*, если для всякой К-формулы A и для всякого К-абстракта V формула $A(V)$ тоже принадлежит К.

Определение. 15.15. Пусть К — некоторое множество формул.

1) К-*система* получается из системы **BC** добавлением к ней в качестве начальных секвенций всех аксиом К-выделения (т. е. всех секвенций вида $\to A$, где A — аксиома К-выделения).

2) Система **KC** получается из системы **BC** добавлением следующих правил вывода, где $F(\alpha)$ — произвольная формула, V — произвольный К-абстракт, а $F(V)$ и $F(\varphi)$ получаются из $F(\alpha)$ подстановкой V и φ соответственно вместо отмеченных вхождений α:

правило $\forall$-слева второго порядка: $\dfrac{F(V),\ \Gamma \to \Delta}{\forall \varphi F(\varphi),\ \Gamma \to \Delta}$;

правила $\exists$-справа второго порядка: $\dfrac{\Gamma \to \Delta,\ F(V)}{\Gamma \to \Delta,\ \exists \varphi F(\varphi)}$.

Главные и боковые формулы этих правил вывода определяются, как обычно.

Поскольку система **KC** представляет интерес, только когда множество К замкнуто относительно подстановок, мы будем далее предполагать, что К удовлетворяет этому условию.

Предложение 15.16. *Для произвольного множества формул* К (*замкнутого относительно подстановок*) *система* **KC** *эквивалентна* К-*системе*.

Доказательство. Легко можно показать, что аксиомы К-выделения выводимы в **KC**, а, с другой стороны, нижние секвенции правил второго порядка $\forall$-слева и $\exists$-справа выводимы из соответствующих верхних секвенций в К-системе.

Определение 15.17. Если К — множество всех формул языка второго порядка, то система **KC** называется исчислением предикатов второго порядка с полным выделением и обозначается через $\mathbf{G^1LC}$.

Предложение 15.18. *Если для системы* $\mathbf{G^1LC}$ *верна теорема об устранении сечений, то эта система непротиворечива.*

Доказательство такое же, как для теоремы 6.2, и мы не будем его повторять.

В действительности теорема об устранении сечений, как мы увидим позже, верна для системы $\mathbf{G^1LC}$ (см. § 21). Но мы сформулировали предложение 15.18 в такой форме, поскольку устранимость сечений для системы $\mathbf{G^1LC}$ доказывается неконструктивно, и, значит, с нашей финитной точки зрения, мы не можем на основании этого доказательства утверждать, что система $\mathbf{G^1LC}$ непротиворечива.

§ 16. Некоторые системы исчисления предикатов второго порядка

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые несущественные расширения исчисления предикатов первого порядка.

Определение 16.1. Пусть $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ — две формальные системы, содержащие систему **LK**. Система $\mathbf{S}_2$ называется *несуществен-*

ным расширением системы $\mathbf{S}_1$, если $\mathbf{S}_1$ является подсистемой системы $\mathbf{S}_2$ и для всякой секвенции S в языке системы $\mathbf{S}_1$ выводимость ее в системе $\mathbf{S}_2$ влечет ее выводимость в системе $\mathbf{S}_1$.

Предложение 16.2. *Для системы* **BC** *справедлива теорема об устранении сечений.*

Доказательство проводится в точности так же, как и для системы **LK**, и поэтому мы не повторяем рассуждения.

Как следствие этого предложения получаем, что система **BC** непротиворечива, для нее выполняется свойство подформульности, справедлива теорема о средней секвенции и т. д. Приведем еще одно

Следствие 16.3. *Система* **BC** *является несущественным расширением системы* **LK**.

Доказательство. Если в некотором не содержащем сечений выводе в системе **BC** применяется кванторное правило второго порядка, то соответствующий квантор должен входить во все секвенции, расположенные ниже этого применения (что легко доказывается индукцией по числу применений правил в таком выводе).

Определение 16.4. (1) *Формулой первого порядка* называется формула языка L_2, которая не содержит кванторов второго порядка (хотя может содержать переменные второго порядка). Такая формула называется также *арифметической* в случае, когда L_2 есть язык арифметики второго порядка (т. е. системы **PA** с кванторами второго порядка).

Абстрактом первого порядка называется абстракт, полученный из формулы первого порядка.

(2) Через K_1 обозначим множество всех формул первого порядка.

(3) *Предикативными аксиомами выделения* назовем такие аксиомы выделения, у которых U (см. (**) в определении 15.14) является абстрактом первого порядка; другими словами, это аксиомы K_1-выделения.

Теорема 16.5 (теорема об устранении сечений для системы с предикативными аксиомами выделения). *Если какая-то секвенция S выводима в системе* $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ *(см. определение 15.15), то она выводима в* $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ *без сечений.*

Доказательство. Здесь почти проходит доказательство для **LK**. Вместо двойной индукции (см. доказательство леммы 5.4) мы применяем здесь тройную индукцию. Пусть A — произвольная формула языка второго порядка. Пусть $c(A)$ равняется числу кванторов второго порядка в A. Легко видеть, что $c(F(\alpha)) = c(F(V))$, если V — абстракт первого порядка. Положим $c =_{\mathrm{df}} c(P) =_{\mathrm{df}} c(D)$, где D — смешивающая формула в P (в предположении, что вывод P содержит смешение разве только в качестве самого нижнего своего непосредственного вывода). Лемма 5.4 доказывается теперь трансфинитной индукцией по $\omega^2 \cdot c + \omega \cdot g(P) + \mathrm{rank}(P)$. Мы будем следовать доказательству, приведенному в § 5, но теперь надо рассмотреть еще несколько случаев. После случая 1.5) (i) добавляются случаи, когда формула D имеет вид $\forall\varphi F(\varphi)$ или $\exists\varphi F(\varphi)$. Пусть, например, вывод P имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0,\ F(\alpha)}{\Gamma \to \Delta_0,\ \forall\varphi F(\varphi)} \qquad \dfrac{F(V),\ \Pi_0 \to \Lambda}{\forall\varphi F(\varphi),\ \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma,\ \Pi_0 \to \Delta_0,\ \Lambda}\ (\forall\varphi F(\varphi)),$$

где V — абстракт первого порядка. В силу сделанного выше замечания $c(F(V)) = c(F(\alpha)) = c(\forall\varphi F(\varphi)) - 1$. Так как α не входит в Γ, Δ_0 и $F(\varphi)$, то секвенция $\Gamma \to \Delta, F(V)$ выводима без смешений (см. случай 1.5) в доказательстве леммы 5.4). Определим вывод P' таким образом:

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta_0,\ F(V) \qquad F(V),\ \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi_0^{\#} \to \Delta_0^{\#},\ \Lambda}\ (F(V)).$$

Поскольку $c(P') = c(F(V)) < c(\forall\varphi F(\varphi)) = c(P)$, к выводу P' применимо предположение индукции. Поэтому мы можем получить некоторый не содержащий смешений вывод секвенции $\Gamma,\ \Pi_0^{\#} \to \Delta_0^{\#},\ \Lambda$ и, следовательно, не содержащий смешений вывод секвенции $\Gamma,\ \Pi_0 \to \Delta_0,\ \Lambda$.

Наконец, после случая 2.1.3 (ii) в доказательстве леммы 5.4 добавляются случаи, когда D имеет вид $\forall\varphi F(\varphi)$ или $\exists\varphi F(\varphi)$.

Следствие 16.6. *Система* $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ *является несущественным расширением системы* **LK**. *В частности, система* $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ *непротиворечива.*

Доказательство такое же, как и для системы **BC** (см. следствие 16.3).

Предложение 16.7. *Через* $\mathbf{LK}^+$ *обозначим систему* **LK** *в языке, содержащем свободные переменные второго порядка.*

Пусть секвенция $\Gamma \to \Theta$ состоит только из формул первого порядка, и пусть $F_i(\beta_i)$ — некоторая формула первого порядка, содержащая свободную переменную β_i второго порядка, $i = 1, 2, \ldots, m$. Для того чтобы секвенция

(1) $$\forall\varphi_1 F_1(\varphi_1),\ \ldots,\ \forall\varphi_m F_m(\varphi_m),\ \Gamma \to \Theta$$

была выводима в $\mathbf{K_1C}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(*) *Для каждого* $i=1, \ldots, m$ *существуют абстракты первого порядка* $V_{i,1}, \ldots, V_{i,l_i}$ $(l_i \geqslant 1)$, *такие, что секвенция*

$$(2) \quad \{\forall \mathbf{z}_{1,j} F_1(V'_{1,j})\}_{j=1,\ldots,l_1}, \ldots, \{\forall \mathbf{z}_{m,j} F_m(V'_{m,j})\}_{j=1,\ldots,l_m}, \Gamma \to \Theta$$

выводима в $\mathbf{LK}^+$.

Здесь через $\{A_j\}_{j=1,\ldots,l}$ *обозначена последовательность формул* $A_1, \ldots, A_l$, *через* $\forall \mathbf{z}_{ij}$ — *некоторая (возможно, пустая) подпоследовательность универсальных кванторов* $\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_k$, *где* k *(зависящее от* i *и* j*) есть число свободных переменных первого порядка в абстракте* V_{ij}, *и* V' *получается из абстракта* V *заменой в нем свободных переменных первого порядка, не входящих в* (1), *на* $z_1, \ldots, z_k$.

Доказательство. Достаточность. Допустим, что выполняется условие (*). Сначала мы покажем, что для всякой формулы $F(\alpha)$ секвенция $\forall \varphi F(\varphi) \to \forall \mathbf{z} F(V')$ выводима в $\mathbf{K_1C}$, если V — абстракт первого порядка:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{F(V) \to F(V)}{\forall \varphi F(\varphi) \to F(V)}}{\text{несколько правил } \forall\text{-справа}}}{\forall \varphi F(\varphi) \to \forall \mathbf{z} F(V').}$$

Таким образом, мы имеем секвенции $\forall \varphi_i F_i(\varphi_i) \to \forall \mathbf{z}_{ij} F_i(V'_{ij})$ для $j=1, \ldots, l_i$ и $i=1, \ldots, m$. Отсюда и из (2), применяя несколько сечений и сокращений, мы можем получить некоторый $\mathbf{K_1C}$-вывод секвенции (1).

Необходимость. Допустим, что секвенция (1) выводима в $\mathbf{K_1C}$. Тогда эта секвенция имеет в $\mathbf{K_1C}$ вывод без сечений. Поэтому достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 16.8. *Пусть* P — *вывод без сечений в системе* $\mathbf{K_1C}$ *некоторой секвенции указанного выше вида* (1). *Тогда для заключительной секвенции вывода* P *выполняется условие* (*).

Заметим, что так как вывод P не содержит сечений, то все секвенции в P также имеют вид (1). Значит, это предложение можно доказать индукцией по числу непосредственных выводов в P.

Доказательство. 1) Если вывод P состоит из начальной секвенции $D \to D$, то формула D не содержит кванторов второго порядка. Следовательно, секвенция $D \to D$ сама имеет указанный выше вид (2).

2) Шаги индукции проводятся в зависимости от правила вывода I, применяемого в P последним. Заметим, что из кванторных правил второго порядка в выводе P может применяться только правило второго порядка $\forall$-слева.

2.1) I есть правило второго порядка $\forall$-слева. Тогда вывод P имеет вид

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ F(V),\ \Pi \to \Lambda\end{array}}{\forall \varphi F(\varphi),\ \Pi \to \Lambda,}$$

где V и $F(\varphi)$ имеют первый порядок. По предположению индукции, взяв секвенцию $F(V), \Pi \to \Lambda$ в качестве (1), мы можем получить подходящие абстракты, для которых в $\mathbf{LK}^+$ выводима некоторая секвенция вида (2). Обозначим эту секвенцию через $F(V), \Pi^* \to \Lambda$. Добавим теперь абстракт V к множеству абстрактов, полученных по предположению индукции. Если V не содержит свободных переменных первого порядка, не входящих в $\forall \varphi F(\varphi), \Pi \to \Lambda$, то в качестве секвенции (2) возьмем саму секвенцию $F(V), \Pi^* \to \Lambda$. Если же V содержит свободные переменные $b_1, \ldots, b_k$, которые не входят в указанную секвенцию, то заменим их на новые связанные переменные $z_1, \ldots, z_k$ и обозначим результат замещения через V'. Тогда секвенция $\forall z_1 \ldots \forall z_k F(V'), \Pi^* \to \Lambda$ является искомой.

2.2) I не является правилом второго порядка $\forall$-слева. В таком случае доказательство тривиально в силу предположения индукции.

Наконец, заменим свободные переменные второго порядка на $0=0$.

Отметим, что именно правило сокращения слева приводит к нескольким абстрактам первого порядка $V_{i,1}, V_{i,2}, \ldots$, соответствующим одной и той же формуле $F_i(\beta_i)$ в (2).

Предложение 16.9. *Если формула* $\exists \varphi F(\varphi)$, *где* $F(\varphi)$ *не содержит кванторов второго порядка, выводима в* $\mathbf{K_1C}$, *то существуют абстракты* $V_1, \ldots, V_n$ *первого порядка, такие, что в* $\mathbf{LK}^+$ *выводима дизъюнкция* $\exists \mathbf{z}_1 F(V'_1) \vee \ldots \vee \exists \mathbf{z}_n F(V'_n)$.

Это предложение двойственно предложению 16.7 и доказывается аналогичным образом.

Задача 16.10. Определим систему $\mathbf{PA'}$ — предикативное расширение (второго порядка) арифметики Пеано. Пусть VJ′ и Eq′ обозначают соответственно предложения

VJ′ $\quad \forall \varphi (\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \supset \varphi(x')) \supset \forall x \varphi(x));$

Eq′ $\quad \forall \varphi \forall x \forall y (x=y \wedge \varphi(x) \supset \varphi(y)).$

VJ′ представляет собой формализацию в языке второго порядка принципа математической индукции, а Eq′ — одна из аксиом равенства в этом языке.

Система **PA′** получается из системы $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ (в языке системы **PA**, пополненном переменными второго порядка) добавлением в качестве начальных секвенций всех аксиом из $\mathrm{CA} \cup \mathrm{VJ}' \cup \mathrm{Eq}'$ (система аксиом CA определена в 9.2).

Показать, что система PA′ является несущественным расширением системы **PA**. [*Указание.* Пусть A — какая-то формула языка системы **PA′**. Она выводима в **PA′** тогда и только тогда, когда в $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ выводима секвенция $\mathrm{CA} \cup \mathrm{VJ}' \cup \mathrm{Eq}' \to A$. Поскольку каждая из аксиом VJ′ и Eq′ начинается с квантора $\forall$ второго порядка, можно применить предложение 16.7.]

Задача 16.11. Рассмотрим систему аксиом ZF (теорию множеств Цермело — Френкеля). Ее язык состоит из двухместного предикатного символа $\in$, переменных первого порядка и логических символов ($a = b$ есть сокращение для $\forall x (a \in x \equiv b \in x)$). Аксиомы объемности, пары, суммы, степени, регулярности и бесконечности можно записать в виде отдельных предложений. Однако аксиома подстановки в действительности является схемой аксиом, которая выглядит так:

$$\forall x \forall y \forall z (B(x, y) \land B(x, z) \supset y = z) \supset$$
$$\supset \exists v \forall y (y \in v \equiv \exists x (x \in u \land B(x, y))$$

(см. пример 15.12, (3)). Исходной логической системой является **LK**.

С другой стороны, система аксиом BG (теория множеств Геделя — Бернайса) формулируется в языке второго порядка. Язык этой системы представляет собой язык системы ZF, пополненный переменными второго порядка. Аксиомы те же, что и у ZF, плюс аксиома равенства

$$\forall \varphi \forall x \forall y (x = y \supset \varphi(x) \equiv \varphi(y)).$$

Аксиома подстановки выражается теперь одним предложением:

$$\forall \varphi (\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \land \varphi(x, z) \supset y = z) \supset$$
$$\supset \exists v \forall y (y \in v \equiv \exists x (x \in u \land \varphi(x, y)))).$$

Исходной логической системой является $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$.

Показать, что система BG является несущественным расширением системы ZF. [*Указание.* Действовать так же, как и в предыдущей задаче.]

Определение 16.12. Предположим, что логическими символами языка являются только $\neg$, $\land$ и $\forall$. (Для удобства базисное исчисление в этом языке также обозначим **BC**.)

1) Формула называется *позитивной*, если всякое вхождение в нее квантора второго порядка находится в области действия четного числа связок $\neg$. Секвенция

$$F_1, \ldots, F_m \to H_1, \ldots, H_n$$

называется *позитивной*, если позитивной является формула $\neg(F_1 \land \ldots \land F_m) \lor H_1 \lor \ldots \lor H_n$ (где связка $\lor$ выражена через связки $\neg$ и $\land$). Так, например, формула $\neg(\neg \forall \varphi F(\varphi) \land \land \forall \psi H(\psi))$ не является позитивной, так как квантор $\forall \psi$ находится в области действия одной связки $\neg$, а формула $\neg(B \land \neg \forall \varphi F(\varphi))$, где B и F не содержат кванторов второго порядка, является позитивной.

2) Π^1-*исчислением предикатов*, или $\mathbf{\Pi^1PC}$, называется система, получающаяся из системы **BC** добавлением следующих ограничений. (Ради простоты мы предполагаем, что язык не содержит функциональных и предикатных констант.)

(1) Начальные секвенции состоят только из формул первого порядка.

(2) Нет правила второго порядка $\forall$-слева.

(3) Нет правила сечения.

Очевидно, что всякая секвенция, выводимая в $\mathbf{\Pi^1PC}$, является позитивной.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — конечные последовательности свободных переменных, такие, что все переменные в последовательности $\boldsymbol{a}$ попарно различны, тогда как в последовательности $\boldsymbol{b}$ они могут повторяться; $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют одинаковую длину. Кроме того, если i-я переменная в $\boldsymbol{a}$ имеет первый (второй) порядок, то и i-я переменная в $\boldsymbol{b}$ имеет первый (второй) порядок, и если i-я переменная в $\boldsymbol{a}$ является j-местной переменной второго порядка, то такой же является и i-я переменная в $\boldsymbol{b}$. Пусть

$$F\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \text{ обозначает формулу } \left(F\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)$$

(т. е. результат замещения в F последовательности $\boldsymbol{a}$ последовательностью $\boldsymbol{b}$; см. определение 1.4).

(Заметим, что удаление из языка предикатных констант является несущественным ограничением, поскольку в качестве таковых можно рассматривать свободные переменные второго порядка, не использующиеся как собственные.)

Предложение 16.13 (Маехара — Такеути). *Если формула* $F\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \supset G\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ *выводима в* $\mathbf{\Pi^1PC}$, *то существует некоторая формула C первого порядка, удовлетворяющая следующим условиям.*

1) *Каждая переменная формулы C, не встречающаяся в* $\boldsymbol{a}$, *входит и в F, и в G.*

2) *в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$ *выводимы формулы* $F\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \supset C\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *и* $C \supset G$.

(Заметим, что выводимости формулы $F \supset G$ не предполагается.)

Доказательство проводится почти так же, как и для теоремы 6.6 (интерполяционная теорема Крэйга для системы **LK**). А именно, формулируем это предложение для произвольных разбиений выводимых секвенций, вводим секвенцию $\rightarrow \mathsf{T}$ как дополнительную начальную секвенцию (см. лемму 6.5) и доказываем утверждение для этой системы. Условия (1) — (3) в определении системы $\mathbf{\Pi^1 PC}$ оказываются решающими.

Задача 16.14 (Чэн). Пусть $\boldsymbol{x}$ — последовательность связанных переменных $X_1, \ldots, X_n$ и $\mathrm{Q}\boldsymbol{x}$ — последовательность кванторов $\mathrm{Q}_1X_1 \ldots \mathrm{Q}_nX_n$, где Q_i обозначает $\forall$ или $\exists$, причем Q_i всегда есть $\forall$, если X_i — переменная второго порядка. Доказать, что если формула $\mathrm{Q}\boldsymbol{x}(F(\boldsymbol{x}) \supset G(\boldsymbol{x}))$ выводима в $\mathbf{\Pi^1 PC}$, то существует некоторая формула $C(\boldsymbol{a})$ первого порядка, такая, что в $\mathbf{\Pi^1 PC}$ выводима формула

$$\mathrm{Q}\boldsymbol{x}((F(\boldsymbol{x}) \supset C(\boldsymbol{x})) \wedge (C(\boldsymbol{x}) \supset G(\boldsymbol{x}))).$$

[*Указание* (метод Маехары — Такеути). Это тривиальное следствие предложения 16.16, которое, в свою очередь, является следствием предложения 16.13.]

Определение 16.15. Пусть $G(\boldsymbol{a})$ — некоторая формула, все свободные переменные которой содержатся в $\boldsymbol{a}$.

Для удобства временно введем метапеременную $\mathscr{A}$ третьего порядка, новую атомарную формулу $\mathscr{A}(\boldsymbol{a})$ и соответственно расширим понятие формулы. (Однако ни эта переменная, ни какая-либо формула, содержащая ее, не являются объектами нашей формальной системы.) Пусть F — некоторая формула, содержащая $\mathscr{A}$. Через

$$F\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

обозначим формулу, получаемую из F подстановкой $G(\boldsymbol{b})$ вместо $\mathscr{A}(\boldsymbol{b})$. Если S — какая-либо секвенция вида $F_1, \ldots, F_m \rightarrow H_1, \ldots, H_n$, то

$$S\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

обозначает секвенцию

$$F_1\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \ldots, F_m\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \rightarrow H_1\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \ldots, H_n\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Вхождения переменной $\mathscr{A}$ в формулу F разделяются на *положительные* и *отрицательные* следующим образом. (Как уже отмечалось выше, предполагается, что логическими символами являются только $\neg$, $\wedge$ и $\forall$.)

1) Вхождение $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}(\boldsymbol{b})$ является положительным.

2) Если вхождение $\mathscr{A}$ в F является положительным (отрицательным), то это вхождение $\mathscr{A}$ в $F \wedge G$ и в $G \wedge F$ также является положительным (отрицательным). Вхождение $\mathscr{A}$ в формулу $\neg F$ является положительным (отрицательным), если это вхождение $\mathscr{A}$ в F является отрицательным (положительным).

3) Вхождение $\mathscr{A}$ в $\forall x F(x)$ или в $\forall \varphi F(\varphi)$ является положительным (отрицательным), если это вхождение $\mathscr{A}$ в $F(a)$ или $F(\alpha)$ является положительным (отрицательным).

Вхождение $\mathscr{A}$ в секвенцию $F_1, \ldots, F_m \rightarrow G_1, \ldots, G_n$ является положительным или отрицательным в зависимости от того, является это вхождение $\mathscr{A}$ в формулу $\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_m) \vee \vee G_1 \vee \ldots \vee G_n$ положительным или отрицательным (где связка $\vee$ определяется через $\neg$ и $\wedge$).

Предложение 16.16. *Пусть* $G(\boldsymbol{a})$ — *формула, все свободные переменные которой содержатся в* $\boldsymbol{a}$, *и пусть* S — *секвенция, в которой все вхождения переменной* $\mathscr{A}$ *являются положительными. Если секвенция*

$$S\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

выводима в $\mathbf{\Pi^1 PC}$, *то существует некоторая формула первого порядка* $C(\boldsymbol{a})$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *секвенция* $S\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} C(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ *выводима в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$;

2) *все свободные переменные формулы* $C(\boldsymbol{a})$ *содержатся в* $\boldsymbol{a}$;

3) *формула* $\forall \boldsymbol{x}(C(\boldsymbol{x}) \supset G(\boldsymbol{x}))$ *выводима в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$.

Доказательство проводится индукцией по сложности вывода секвенции

$$S\begin{pmatrix} \mathscr{A} \\ \lambda \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

В случае применения правила $\forall$-справа второго порядка надо воспользоваться предложением 16.13.

Определение 16.17. Отношение „формула A второго порядка *выполняется* в данной структуре $\mathscr{D} = \langle D, \phi \rangle$“ (см. § 8) определяется следующим образом. Пусть ϕ_0 — функция (называемая *оценкой*), определенная на множестве всех переменных (первого и второго порядка), такая, что значениями ее на переменных первого порядка являются элементы множества D, а на i-местных переменных второго порядка — подмножества множества $D \times \ldots \times D (= D^i)$.

1) Формула $\alpha(t_1, \ldots, t_i)$ (или $\varphi(t_1, \ldots, t_i)$) выполняется в интерпретации $(\mathscr{D}, \phi_0)$, если $(\phi_0 t_1, \ldots, \phi_0 t_i)$ принадлежит $\phi_0\alpha$ (соответственно $\phi_0\varphi$).

2) Формула $\forall\varphi F(\varphi)$ (или $\exists\varphi F(\varphi)$) выполняется в интерпретации $(\mathscr{D}, \phi_0)$, если для всякой оценки ϕ_0' (соответственно для некоторой оценки ϕ_0'), совпадающей с ϕ_0 на всех переменных, кроме, быть может, φ, $F(\varphi)$ выполняется в интерпретации $(\mathscr{D}, \phi_0')$.

В остальных случаях определение такое же, как в § 8.

Формула называется *истинной* в структуре $\mathscr{D}$, если она выполняется в интерпретации $(\mathscr{D}, \phi_0)$ при любой оценке ϕ_0. Формула называется *общезначимой*, если она истинна во всех структурах.

Предложение 16.18. *Исчисление* $\mathbf{\Pi^1 PC}$ *является полным для позитивных формул (или секвенций), т. е. всякая общезначимая позитивная формула выводима в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$. *Отсюда следует, что правило сечения является допустимым в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$, *т. е. если секвенции* $\Gamma \to \Delta$, D *и* D, $\Gamma \to \Delta$ *выводимы в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$, *то и секвенция* $\Gamma \to \Delta$ *выводима в* $\mathbf{\Pi^1 PC}$.

Доказательство. Это утверждение можно доказать, следуя доказательству полноты системы **LK** (теорема 8.2), а именно для данной позитивной секвенции строим редукционное дерево и, если в нем содержится некоторая бесконечная ветвь, определяем структуру, в которой эта секвенция ложна. На каждом этапе построения редукционного дерева появится новый случай, соответствующий формулам, которые начинаются с квантора $\forall\varphi$. Эти формулы могут входить только в сукцеденты секвенций, так как все секвенции являются позитивными.

Итак, допустим, что (на некотором этапе) рассматривается секвенция $\Pi \to \Lambda$, и пусть $\forall\varphi_1 F_1(\varphi_1), \ldots, \forall\varphi_n F_n(\varphi_n)$ — все формулы в Λ, начинающиеся с квантора $\forall$ (второго порядка). Запишем над рассматриваемой секвенцией секвенцию $\Pi \to \Lambda$, $F_1(\alpha_1), \ldots, F_n(\alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — первые еще не использованные n свободных переменных (второго порядка). Заметим, что если $F(\alpha)$ ложна в какой-то структуре, то в ней ложна и формула $\forall\varphi F(\varphi)$.

Задача 16.19. Пусть язык L содержит символы 0, $'$, $=$, $<$, и пусть Γ_0 состоит из аксиом Пеано первого порядка в этом языке без аксиомы математической индукции. Предположим также, что каждая формула в Γ_0 находится в предваренной нормальной форме и не содержит квантора $\exists$. Пусть $N(a)$ обозначает формулу

$$\forall\varphi(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \supset \varphi(x')) \wedge \forall x \forall y(x = y \wedge \varphi(x) \supset \varphi(y)) \supset \varphi(a)).$$

Показать, что если секвенция $\Gamma_0 \to F(\{x\} N(x))$ выводима в $\mathbf{\Pi^1 PC}$, то существует некоторая формула $A(a)$ вида $0 = 0$ или $a = \bar{n}_1 \vee \ldots \vee a = \bar{n}_k$ для некоторых нумералов $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k$, такая, что в $\mathbf{\Pi^1 PC}$ выводима секвенция $\Gamma_0 \to F(\{x\} A(x))$.

Решение. Из предложения 16.16 вытекает существование некоторой формулы первого порядка $A(a)$ языка L, такой, что

1) единственной свободной переменной в $A(a)$ является a;
2) секвенция Γ_0, $A(a) \to N(a)$ выводима в $\mathbf{\Pi^1 PC}$;
3) секвенция $\Gamma_0 \to \Gamma(\{x\} A(x))$ выводима в $\mathbf{\Pi^1 PC}$.

В силу хорошо известного разрешающего метода мы можем считать, что $A(a)$ имеет один из следующих видов:

a) $0 = 0$;
b) $0 = 1$;
c) $a = \bar{n}_1 \vee a = \bar{n}_2 \vee \ldots \vee a = \bar{n}_k$;
d) $\bar{n} < a \vee a = \bar{n}_1 \vee \ldots \vee a = \bar{n}_k$.

Случай 1. $A(a)$ есть $0 = 1$.

Поскольку все вхождения N в $F(\{x\} N(x))$ являются положительными, из выводимости секвенции $\Gamma_0 \to F(\{x\}(0 = 1))$ следует выводимость секвенции $\Gamma_0 \to F(\{x\}(0 = 0))$.

Случай 2. $A(a)$ имеет вид $\bar{n} < a \vee a = \bar{n}_1 \vee \ldots \vee a = \bar{n}_k$.

В этом случае в силу 2) выводима секвенция Γ_0, $\bar{n} < a \to N(a)$. Следовательно, выводима и секвенция

$$\Gamma_0, \bar{n} < a, \alpha(0), \forall x(\alpha(x) \supset \alpha(x')), \forall x \forall y(x = y \wedge \alpha(x) \supset \alpha(y)) \to \alpha(a).$$

Теперь введем новую индивидную константу ω и подставим $a < \omega$ вместо $\alpha(a)$. Тогда мы получим некоторый вывод секвенции

$$\Gamma_0,\ 0 < \omega,\ \forall x(x < \omega \supset x' < \omega) \to .$$

Рассмотрев обычную интерпретацию константы $<$ на множестве $\{0, 0', 0'', \ldots, \omega, \omega', \omega'', \ldots\}$, мы приходим к противоречию.

Задача 16.20 (Крайзель). Рассмотрим систему $\mathbf{PA'}$ предикативной арифметики второго порядка, определенную в задаче 16.10. Введем следующие обозначения: $\forall f A(f)$ (соответственно $\exists f A(f)$) является сокращением для $\forall\varphi$ (φ есть функция $\supset A^*(\varphi)$) (соответственно для $\exists\varphi$ (φ есть функция и $A^*(\varphi)$)), где предикат „φ есть функция“ выражается формулой

$$\forall x \exists y \forall z(\varphi(x, z) \equiv y = z),$$

и $A^*(\varphi)$ получается из $A(f)$ таким образом: все подформулы формулы $A(f)$ вида $B(f(t))$ (систематически) замещаются в A на $\exists y(\varphi(t, y) \wedge B(y))$.

Далее, Π_1^1-*формулой* (соответственно Σ_1^1-*формулой*) назовем всякую формулу вида $\forall\varphi A(\varphi)$ (соответственно $\exists\varphi A(\varphi)$), где A — арифметическая формула. Всякая Π_1^1-формула эквивалентна (в **PA′**) формуле, имеющей „Π_1^1-нормальную форму“, т. е. формуле вида $\forall f \exists y R(\bar{f}y)$ для некоторого примитивно рекурсивного предиката R (точнее, примитивно рекурсивного относительно свободных переменных второго порядка, входящих в эту формулу), где $\bar{f}y$ обозначает гёделев номер последовательности $\langle f(0), \ldots, f(y-1)\rangle$. Аналогично всякую Σ_1^1-формулу можно привести к Σ_1^1-нормальной форме, т. е. к формуле вида $\exists f \forall y R(\bar{f}y)$ для подходящего примитивно рекурсивного предиката R. Наконец, Π_1^1-*предикатом* или Π_1^1-*отношением* (скажем, от k переменных) назовем такое отношение, которое можно выразить некоторой Π_1^1-формулой, имеющей k свободных переменных первого порядка (и не содержащей свободных переменных второго порядка). Аналогично определяются Σ_1^1-*предикаты* (Σ_1^1-*отношения*).

Пусть теперь $\prec$ — некоторое Σ_1^1-упорядочение, т. е. бинарное Σ_1^1-отношение, представляющее собой линейный порядок на натуральных числах. Пусть формула $We(\prec)$ выражает тот факт, что отношение $\prec$ является вполне-упорядочением: $\forall f \exists x \neg(f(x+1) \prec f(x))$. Допустим, что формула $We(\prec)$ выводима в **PA′**, т. е. отношение $\prec$ является доказуемым вполне-упорядочением относительно **PA′**.

Показать, что ординал упорядочения $\prec$ (т. е. его порядковый тип) меньше, чем ε_0.

[*Указание.* Сначала привести формулу $a \prec b$ к Σ_1^1-нормальной форме $\exists f \forall y R(\bar{f}y, a, b)$. Затем последовательно доказать следующие 7 утверждений.

1) Пусть $<_n$ некоторое перечисление примитивно рекурсивных бинарных отношений (где $n = 0, 1, 2, \ldots$), и пусть $W(x)$ обозначает формулу $We(<_x)$. Тогда $W(x)$ является (доказуемо) полной Π_1^1-формой, т. е. существует примитивно рекурсивная функция $S(r, x)$, такая, что для каждого Π_1^1-предиката $A(x)$ существует число r_0, такое, что в **PA′** выводима формула $\forall x(A(x) \equiv W(S(\bar{r}_0, x)))$.

2) Для всякого Σ_1^1-предиката $B(x)$ существует натуральное число n, такое, что в **PA′** выводимо $B(\bar{n}) \equiv \neg W(\bar{n})$. (Надо формализовать те рассуждения в теории рекурсии, которые показывают, что существует Σ_1^1-предикат, не являющийся Π_1^1-полным.)

3) Пусть $W_1(x)$ — формула, выражающая тот факт, что существует вложение $<_x$ в $\prec$, т. е. что существует сохраняющая порядок функция, заданная на области определения отношения $<_x$ и принимающая значения в области определения отношения $\prec$ (откуда следует, что отношение $<_x$ является вполне-упорядочением, ординал которого меньше или равен ординалу упорядочения $\prec$). Тогда $W_1(x)$ является Σ_1^1-формулой, и поэтому существует формула $W_1^*(x)$, имеющая Σ_1^1-нормальную форму, такая, что в **PA′** выводимо $\forall x(W_1(x) \equiv W_1^*(x))$.

4) Так как формула $We(\prec)$ выводима, то формула $\forall x(W_1^*(x) \supset W(x))$ также выводима.

5) В силу 2) существует n, такое, что выводима формула $W_1^*(\bar{n}) \equiv \neg W(\bar{n})$. Тогда в силу 4) выводимы $W(\bar{n})$ и $\neg W_1^*(\bar{n})$.

6) Выводимость в **PA′** формулы $W(\bar{n})$ означает, что примитивно рекурсивное отношение $<_n$ есть доказуемое вполне-упорядочение относительно **PA′** и, следовательно, относительно **PA**. Отсюда в силу результата Генцена, приведенного в предыдущей главе, следует, что ординал отношения $<_n$ меньше, чем ε_0.

7) Формулы $W(\bar{n})$ и $\neg W_1^*(\bar{n})$ (см. 5)) означают, что $<_n$ есть примитивно рекурсивное вполне-упорядочение, не вложимое в $\prec$, и поэтому ординал упорядочения $\prec$ меньше ординала упорядочения $<_n$. Отсюда и из 6) следует, что порядковый тип упорядочения $\prec$ меньше ε_0.]

§ 17. Теория релятивизаций

Определение 17.1. *Системой релятивизации* называется пара формул $R^0(a)$ и $R^1(\alpha)$, каждая из которых содержит ровно по одной переменной a и α соответственно. Одна или даже обе формулы $R^0(a)$ и $R^1(\alpha)$ могут на самом деле отсутствовать. Система релятивизации часто будет обозначаться буквой r.

Для произвольной полуформулы A (второго порядка) индуктивно определим A^r (*релятивизацию* A по r). (Здесь предполагается, что r состоит из двух формул. Если одна или обе формулы R^0 и R^1 отсутствуют, то определение соответствующим образом модифицируется.)

1) Если A не содержит логических символов, то A^r совпадает с A.

2) Если A имеет вид $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \supset C$ или $\neg B$, то A^r есть $B^r \wedge C^r$, $B^r \vee C^r$, $B^r \supset C^r$ или $\neg B^r$ соответственно.

3) Если A имеет вид $\forall x F(x)$ или $\exists x F(x)$, то A^r есть $\forall y(R^0(y) \supset F^r(y))$ или $\exists y(R^0(y) \wedge F^r(y))$ соответственно, где $F^r(y)$ есть $(F(y))^r$, а y — переменная, не входящая ни в $R^0(a)$, ни в $F^r(a)$.

4) Если A имеет вид $\forall\varphi F(\varphi)$ или $\exists\varphi F(\varphi)$, то A^r есть $\forall\psi(R^1(\psi)\supset F^r(\psi))$ или $\exists\psi(R^1(\psi)\wedge F^r(\psi))$ соответственно, где $F^r(\psi)$ есть $(F(\psi))^r$, а ψ — переменная, не входящая в $R^1(\alpha)$ и $F^r(\alpha)$.

5) Если A — абстракт вида $\{y_1, \ldots, y_n\} B(y_1, \ldots, y_n)$, то A^r есть $\{y_1, \ldots, y_n\}(B(y_1, \ldots, y_n))^r$.

Лемма 17.2. (1) *Если A не содержит кванторов, то A^r совпадает с A.*

(2) *Произвольная свободная переменная входит в A тогда и только тогда, когда она входит в A^r.*

(3) *Произвольная связанная переменная свободно входит в A тогда и только тогда, когда она свободно входит в A^r.*

(4) *A является формулой тогда и только тогда, когда A^r является формулой.*

(5) *Пусть $A(t)$ обозначает $A(a)\binom{a}{t}$; тогда $(A(t))^r$ есть то же самое, что и $A^r(t)$, т. е. $(A(a))^r\binom{a}{t}$ („то же самое" означает совпадение с точностью до обозначений связанных вхождений связанных переменных).*

(6) *Пусть $A(V)$ обозначает $A(\alpha)\binom{\alpha}{V}$; тогда $(A(V))^r$ есть то же самое, что и $A^r(V^r)$, т. е. $(A(\alpha))^r\binom{\alpha}{V^r}$ (и опять-таки с точностью до обозначений связанных вхождений связанных переменных).*

Доказательство. Применяем индукцию по числу логических символов в A. Доказательство утверждений (1) — (5) предоставляется читателю.

(6) Пусть абстракт V имеет вид $\{y\} C(y)$ (для простоты мы предполагаем, что это одноместный абстракт). Если $A(\alpha)$ имеет вид $\alpha(t)$, то $(A(V))^r$ есть $(C(t))^r$, а $(A(\alpha))^r\binom{\alpha}{V^r}$ есть $(\alpha(t))^r\binom{\alpha}{V^r}$, т. е. $C^r(t)$, что в силу (5) есть то же самое, что и $(C(t))^r$.

Допустим, что $A(\alpha)$ имеет вид $\forall x F(x, \alpha)$. Тогда $(\forall x F(x, V))^r$ есть $\forall y(R^0(y)\supset(F(y, V))^r)$. По предположению индукции это то же самое, что и $\forall y\left(R^0(y)\supset F^r(y, \alpha)\binom{\alpha}{V^r}\right)$, т. е. $(\forall x F(x, \alpha))^r\binom{\alpha}{V^r}$.

Допустим, что $A(\alpha)$ имеет вид $\forall\varphi F(\varphi, \alpha)$. Тогда $(\forall\varphi F(\varphi, V))^r$ есть $\forall\psi(R^1(\psi)\supset(F(\psi, V))^r)$. По предположению индукции это то же самое, что и $\forall\psi(R^1(\psi)\supset F^r(\psi, \alpha))$, т. е. $(\forall\varphi F(\varphi, \alpha))^r\binom{\alpha}{V^r}$.

Рассмотрение остальных случаев предоставляется читателю.

Определение 17.3. (1) Если Γ — последовательность формул $A_1, \ldots, A_m$, то Γ^r обозначает последовательность $A_1^r, \ldots, A_m^r$. Для простоты мы будем писать r и вместо R^0, и вместо R^1. Всегда будет ясно, что имеется в виду, поскольку $r(a)$ обозначает $R^0(a)$, а $r(\alpha)$ обозначает $R^1(\alpha)$.

(2) Допустим, что дана некоторая система релятивизации r. Через Φ обозначим множество, состоящее из следующих формул:

1) $r(c)$ для всех индивидных констант c (рассматриваемого языка);
2) $\forall y_1 \ldots \forall y_m(r(y_1)\wedge\ldots\wedge r(y_m)\supset r(f(y_1, \ldots, y_m)))$ для всякой функциональной константы f;
3) $\exists x r(x)$;
4) $\exists\varphi r(\varphi)$.

Пример 17.4. Пусть язык содержит выделенную двухметную предикатную константу $=$. Допустим, что r состоит лишь из формулы R^1, где $R^1(\alpha)$ есть

$$\forall x\forall y(x=y\wedge\alpha(x)\supset\alpha(y)).$$

Пусть $\mathscr{B}$ — следующая система аксиом:

$\forall x(x=x)$,

$\forall x\forall y(x=y\supset y=x)$,

$\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y=z\supset x=z)$,

$\forall x_1\ldots\forall x_m\forall y_1\ldots\forall y_m(x_1=y_1\wedge\ldots\wedge x_m=y_m\supset f(x_1, \ldots, x_m)=$
$=f(y_1, \ldots, y_m))$ для всякой функциональной константы f,

$\forall x_1\ldots\forall x_m\forall y_1\ldots\forall y_m(x_1=y_1\wedge\ldots\wedge x_m=y_m\wedge$
$\wedge P(x_1, \ldots, x_m)\supset P(y_1, \ldots, y_m))$ для всякой предикатной константы P.

Чтобы применить к этому примеру излагаемую ниже теорию, нам нужно проверить, что для всякого A из Φ в рассматриваемой системе выводимо $\mathscr{B}\to A$. Поскольку формула R^0 отсутствует, нам надо только рассмотреть 4). Нетрудно проверить, что это условие действительно выполнено. (Более того, r и $\mathscr{B}$ удовлетворяют условию 5) леммы 17.5.)

Лемма 17.5. *Пусть* **S** — *система* **KC**, *где* K — *произвольное множество формул, замкнутое относительно подстановок (см. определения 15.14 и 15.15). Допустим, что система релятивизации r удовлетворяет следующему условию: если V — произвольный K-абстракт, то V^r тоже K-абстракт (это выполняется, например, когда K состоит из всех формул языка). Пусть $\mathscr{B}$ — некоторая* *система аксиом, такая, что для всякого A из Φ в* $\mathbf{S}$ *выводима секвенция* $\mathcal{B} \to A$ *и, кроме того,*

5) *для всякого* К*-абстракта* V *в* $\mathbf{S}$ *выводима секвенция* $r(b), \ldots, r(\beta), \ldots, \mathcal{B} \to r(V^r)$, *где* $b, \ldots$ *и* $\beta, \ldots$ — *все свободные переменные, входящие в* V (*а следовательно, и в* V^r; *см. утверждение* (2) *леммы* 17.2).

Тогда для всякой выводимой в $\mathbf{S}$ *секвенции* $\Gamma \to \Theta$ *в* $\mathbf{S}$ *выводима секвенция*

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, \Gamma^r \to \Theta^r,$$

где $a, \ldots$ *и* $\alpha, \ldots$ — *все свободные переменные, входящие в* Γ, Θ.

Сначала мы докажем следующую подлемму.

Подлемма 17.6. *Если* s — *некоторый терм, то в* $\mathbf{S}$ *выводима секвенция* $r(b), \ldots, \mathcal{B} \to r(s)$, *где* $b, \ldots$ — *все свободные переменные первого порядка, входящие в* s.

Это утверждение доказывается индукцией по числу функциональных констант, входящих в s.

Доказательство леммы 17.5 проводится индукцией по сложности вывода секвенции $\Gamma \to \Theta$.

1) Вывод состоит лишь из начальной секвенции $D \to D$. Тогда $D^r \to D^r$ — тоже начальная секвенция. Поэтому в $\mathbf{S}$, очевидно, выводима секвенция $\mathcal{B}, D^r \to D^r$ и, следовательно, секвенция $r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, D^r \to D^r$.

2) Последним применяется правило $\forall$-слева первого порядка

$$\frac{F(s),\ \Gamma' \to \Theta}{\forall x F(x),\ \Gamma' \to \Theta.}$$

По предположению индукции в $\mathbf{S}$ выводима секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, F^r(s), \Gamma'^r \to \Theta^r.$$

(см. утверждение (5) леммы 17.2), а также $r(b), \ldots, \mathcal{B} \to r(s)$ в силу подлеммы 17.6 (где переменные $b, \ldots$ находятся среди $a, \ldots$). Поэтому в $\mathbf{S}$ выводима и секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, \forall x(r(x) \supset F^r(x)), \Gamma'^r \to \Theta^r.$$

3) Последним применяется правило $\forall$-справа первого порядка

$$\frac{\Gamma \to \Theta',\ F(d)}{\Gamma \to \Theta',\ \forall x F(x).}$$

По предположению индукции в $\mathbf{S}$ выводима секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, \Gamma^r \to \Theta'^r, F^r(d),$$

где d не входит в антецедент. Поэтому выводима и секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, \Gamma^r \to \Theta'^r, \forall x(r(x) \supset F^r(x)).$$

4) Последним применяется правило $\forall$-слева второго порядка

$$\frac{F(V),\ \Gamma' \to \Theta}{\forall \varphi F(\varphi),\ \Gamma' \to \Theta,}$$

где V — некоторый К-абстракт. По предположению индукции в $\mathbf{S}$ выводима секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, F^r(V^r), \Gamma'^r \to \Theta^r$$

(см. утверждение (6) леммы 17.2). Следовательно, секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B} \to r(V^r)$$

также выводима в $\mathbf{S}$ в силу условия 5) (поскольку среди $a, \ldots, \alpha, \ldots$ содержатся все свободные переменные, входящие в V). Поэтому выводима и

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, r(V^r) \supset F^r(V^r), \Gamma'^r \to \Theta^r.$$

Кроме того, в силу соглашения о множестве К V^r является К-абстрактом, и потому в $\mathbf{S}$ из последней секвенции выводима секвенция

$$r(a), \ldots, r(\alpha), \ldots, \mathcal{B}, \forall \varphi(r(\varphi) \supset F^r(\varphi)), \Gamma'^r \to \Theta^r.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Определение 17.7. (1) Под *системой аксиом* (в настоящем параграфе) понимается произвольное множество формул, не содержащих свободных переменных первого порядка.

(2) Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная система аксиом, и пусть r — система релятивизации. Через $\mathcal{A}^r$ обозначим множество всех формул вида A^r для A из $\mathcal{A}$.

Теорема 17.8. *Пусть* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ — *некоторые системы аксиом. Допустим, что формальная система* $\mathbf{S}$ *и система аксиом* $\mathcal{B}$ *удовлетворяют условиям леммы* 17.5 *и, кроме того, следующим условиям: для всякой формулы* A *из* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *в* $\mathbf{S}$ *выводимо* $\mathcal{B} \to A^r$; *для всякой свободной переменной* α *второго порядка, входящей в* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, *в* $\mathbf{S}$ *выводимо* $\mathcal{B} \to r(\alpha)$. *Тогда*

(1) *если для некоторой формулы* B *в* $\mathbf{S}$ *выводимо* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \to B$, *то выводимо и* $\mathcal{B} \to B^r$;

(2) *если система аксиом* $\mathcal{B}$ *непротиворечива* (*относительно* $\mathbf{S}$), *то и система аксиом* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *непротиворечива* (*относительно* $\mathbf{S}$).

Замечание. Утверждение (1) теоремы 17.8 можно выразить следующим образом: система $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ интерпретируема в системе $\mathcal{B}$ (относительно $\mathbf{S}$), или, точнее, r осуществляет интерпретацию (или „внутреннюю модель“) системы $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ в системе $\mathcal{B}$ (относительно $\mathbf{S}$).

Доказательство. (1) Допустим, что в **S** выводимо $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} \to B$. Тогда существуют конечные последовательности формул Γ и Δ из $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответственно, такие, что секвенция $\Gamma, \Delta \to B$ выводима (в **S**).

Поэтому в силу леммы 17.5 в **S** выводима секвенция

$$r(\alpha), \ldots, \Gamma^r, \Delta^r \to B^r.$$

(Напомним, что Γ и Δ не содержат переменных первого порядка.) По условию для всякой формулы A и переменной второго порядка α, входящей в $\Gamma \cup \Delta$, в **S** выводимы $\mathscr{B} \to A^r$ и $\mathscr{B} \to r(\alpha)$. Следовательно, в **S** выводимо $\mathscr{B} \to B^r$.

Утверждение (2) следует из (1), если в качестве B взять формулу $C \wedge \neg C$ (поскольку $(C \wedge \neg C)^r$ совпадает с $C^r \wedge \neg C^r$).

Определение 17.9. В следующей ниже теореме L' обозначает язык второго порядка, содержащий константы 0, $'$ и $=$, а $\mathscr{A}_0$ — множество, состоящее из следующих аксиом (для арифметики) в этом языке:

$$\forall x (\neg x' = 0),$$
$$\forall x \forall y (x = y \supset x' = y'),$$
$$\forall x \forall y (x' = y' \supset x = y),$$
$$\forall x (x = x),$$
$$\forall x \forall y (x = y \supset y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \supset x = z).$$

Теорема 17.10 (относительная непротиворечивость классического анализа). *Рассмотрим классический анализ, формализованный в виде системы аксиом* $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}', \mathrm{VJ}'\}$ *на основе логической системы* $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ *в языке* L'. (*Аксиомы* Eq' *и* VJ' *были определены в задаче* 16.10.) *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *классический анализ интерпретируем в системе* $\mathscr{A}_0$ (*относительно* $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$);

(2) *классический анализ непротиворечив, если для* $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ *верна теорема об устранении сечений.*

Доказательство. Интерпретация осуществляется в два этапа.

(i) В силу теоремы 17.8 система $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}'\}$ интерпретируема в $\mathscr{A}_0$ (относительно $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$), где r состоит из одной формулы $R^1(\alpha)$ и $R^1(\alpha)$ есть $\forall x \forall y (x = y \wedge \alpha(x) \supset \alpha(y))$ (формула R^0 отсутствует). В самом деле, взяв в качестве V абстракт $\{u\}$ $(u = 0)$, мы можем в $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ вывести $\mathscr{A}_0 \to r(V)$, и, следовательно, $A_0 \to \exists \varphi r(\varphi)$. Далее, индукцией по логической сложности абстракта V легко доказывается, что выполняется условие 5) леммы 17.5, кроме того, в $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ выводима формула $(\mathrm{Eq}')^r$.

(ii) Далее, опять-таки в силу теоремы 17.8 система $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}', \mathrm{VJ}'\}$ интерпретируема в $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}'\}$; на этот раз r состоит из одной формулы $R^0(a)$, где $R^0(a)$ есть

$$\forall \varphi (\varphi(0) \wedge \forall y (\varphi(y) \supset \varphi(y')) \supset \varphi(a))$$

(формула R^1 отсутствует). Тогда, как легко показать, в $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ выводимы $r(0)$ и, следовательно, $\exists x r(x)$. Далее, для всякой формулы A из $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}'\}$ в $\mathbf{G}'\mathbf{LC}$ выводимы $\mathscr{A}_0, \mathrm{Eq}' \to A^r$, а потому и $\mathscr{A}_0, \mathrm{Eq}' \to \mathrm{VJ}'^r$.

Таким образом, утверждение (1) доказано. На самом деле эти два этапа можно было бы скомбинировать таким образом, чтобы осуществить интерпретацию системы $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}', \mathrm{VJ}'\}$ в $\mathscr{A}_0$ непосредственно, с помощью единственной системы релятивизации. Определение такой системы релятивизации предоставляется читателю.

Чтобы доказать утверждение (2), мы сначала показываем, что если система $\mathscr{A}_0$ непротиворечива (относительно $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$), то непротиворечива и система $\mathscr{A}_0 \cup \{\mathrm{Eq}', \mathrm{VJ}'\}$. Доказываем это так же, как и утверждение (1), дважды применяя утверждение (2) теоремы 17.8.

Для завершения доказательства надо показать, что система A_0 непротиворечива (относительно $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$) в предположении, что в $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ устранимо правило сечения. Но это очевидно, так как всякий вывод секвенции $\mathscr{A}_0 \to$ в $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ без сечений должен быть на самом деле выводом в **LK**, что невозможно.

§ 18. Определение истинности для арифметики первого порядка

Определение 18.1. (1) Ранее мы только упоминали время от времени арифметику второго порядка, теперь опишем ее более систематично. Язык арифметики второго порядка — это язык системы **PA** (см. § 9), пополненный переменными второго порядка. Ее базисной логической системой является система **BC** (см. определение 15.3), а аксиомы (т. е. математические начальные секвенции) у нее те же, что и у системы **PA**, плюс обобщенные аксиомы равенства

$$s = t, \; A(s) \to A(t)$$

для произвольных термов s, t и произвольной формулы A. Различные системы арифметики второго порядка классифицируются по виду аксиом индукции и выделения (каждая из этих аксиом на самом деле является правилом вывода). Если обе эти аксиомы допускаются для всех формул и абстрактов, мы получаем классический анализ. Чтобы упростить рассуждения, мы предположим, что логическими символами являются только $\neg$, $\wedge$ и $\forall$, хотя иногда будут использоваться и другие символы. Напомним, что правило индукции имеет следующий вид:

$$\frac{F(a),\ \Gamma \to \Theta,\ F(a')}{F(0),\ \Gamma \to \Theta,\ F(s)},$$

где a не входит в Γ, Θ и $F(0)$, а s — произвольный терм. Формула A называется индукционной формулой, а переменная a — собственной переменной этого правила. *Аксиома выделения*, или правило $\forall$-слева второго порядка, имеет такой вид:

$$\frac{F(V),\ \Gamma \to \Theta}{\forall\varphi F(\varphi),\ \Gamma \to \Theta},$$

где V и φ имеют одинаковое число аргументных мест.

Как правило, мы будем иметь дело с системами, в которых индукционные формулы принадлежат определенному классу формул, замкнутому относительно подстановок (см. определение 15.14, п. (3)), а абстракты для правила $\forall$-слева второго порядка также принадлежат некоторому классу, замкнутому относительно подстановок. Если индукционная формула или абстракт для правила $\forall$-слева выбирается из некоторого множества K, то эти правила мы называем *аксиомами* K-*индукции* и K-*выделения* соответственно.

(2) Формулы арифметики второго порядка, не содержащие кванторов второго порядка, называются *арифметическими*. Также арифметическими называются те абстракты, которые получены из арифметических формул.

(3) Пусть Π_i^1 — класс формул вида $\forall\varphi_1\exists\varphi_2 \ldots \varphi_i F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i)$, где $\forall\varphi_1\exists\varphi_2 \ldots \varphi_i$ обозначает строку, состоящую из i чередующихся кванторов по связанным переменным второго порядка и начинающуюся с $\forall$, и F — арифметическая формула. Замыкание класса Π_i^1 относительно подстановок будем называть классом Π_i^1 *в широком смысле*. Класс Σ_i^1 и класс Σ_i^1 *в широком смысле* определяются аналогично (с $\exists\varphi_1\forall\varphi_2 \ldots \varphi_i$ вместо $\forall\varphi_1\exists\varphi_2 \ldots \varphi_i$). (При $i=1$ эти классы, по существу, совпадают с классами, определенными в задаче 16.20, где вместо кванторов по предикатам использовались предикаты по функциям, поскольку предикаты и множества можно представить их характеристическими функциями.)

Следующее ниже предложение непосредственно вытекает из этого определения.

Предложение 18.2. (1) *Аксиомы* Π_i^1-*выделения и* (Π_i^1 *в широком смысле*)-*выделения эквивалентны* (*в* **BC**). *То же самое верно для аксиом* Σ_i^1-*выделения*.

(2) *Аксиомы* Π_i^1-*выделения и* Σ_i^1-*выделения эквивалентны* (в **BC**).

Это предложение позволяет нам отождествлять аксиомы Π_i^1-, (Π_i^1 в широком смысле)-, Σ_i^1- и (Σ_i^1 в широком смысле)-выделения. Поэтому все эти аксиомы мы будем называть аксиомами Π_i^1-выделения.

Определение 18.3. Предполагаем, что имеется некоторая гёделева нумерация формальных объектов системы **PA** и $\ulcorner X \urcorner$ обозначает гёделев номер объекта X (см. § 9 и 10). Перечислим необходимые нам примитивно рекурсивные функции и предикаты.

$\mathrm{ls}(a)$: число логических символов в формуле с номером a.

$\mathrm{fl}(a)$: a есть номер некоторой формулы системы **PA**.

$\mathrm{st}(a)$: a есть номер некоторого предложения (т. е. замкнутой формулы) системы **PA**.

$\mathrm{tm}(a)$: a есть номер некоторого терма.

$\mathrm{ct}(a)$: a есть номер замкнутого терма.

$\mathrm{sub}(\ulcorner A \urcorner, \ulcorner a_i \urcorner, \ulcorner t \urcorner)$: номер результата подстановки t вместо a_i в A. Его можно обозначить также через $\ulcorner A(t) \urcorner$.

$v(\ulcorner t \urcorner)$: значение терма t (если он замкнут).

$\nu(a)$: гёделев номер нумерала $\bar{a}$.

Мы будем использовать следующие сокращения:

$\forall \ulcorner A \urcorner (\ldots \ulcorner A \urcorner \ldots)$ — для $\forall x(\mathrm{fl}(x) \supset \ldots x)$,

$\forall \ulcorner A \wedge B \urcorner (\ldots \ulcorner A \wedge B \urcorner \ldots)$ — для $\forall x(\mathrm{fl}(x) \wedge$ „внешним логическим символом формулы с номером x является $\wedge$“ $\supset \ldots x \ldots)$,

$\forall \ulcorner t \urcorner (\ldots \ulcorner t \urcorner \ldots)$ — для $\forall x(\mathrm{tm}(x) \supset \ldots x \ldots)$.

Кроме того, для всякого терма $t(a_i)$ и формулы $A(a_i)$ мы будем писать

$\ulcorner t(\nu(b)) \urcorner$ вместо $\mathrm{sub}(\ulcorner t(a_i) \urcorner, \ulcorner a_i \urcorner, \nu(b))$,

$\ulcorner A(\nu(b)) \urcorner$ вместо $\mathrm{sub}(\ulcorner A(a_i) \urcorner, \ulcorner a_i \urcorner, \nu(b))$.

В данном параграфе $\mathbf{S}^1$ обозначает систему арифметики второго порядка с арифметической аксиомой выделения и с правилом индукции для (Π_1^1 в широком смысле)-формул.

Через **PA**$'$ обозначим систему арифметики второго порядка с арифметическим правилом индукции и арифметической аксиомой выделения. (Эта система, очевидно, эквивалентна системе предикативной арифметики, которая была определена в задаче 16.10 и также была обозначена через **PA**$'$.)

Чтобы избежать большого количества скобок в обозначениях, мы используем точки хорошо известным способом, так, например, $A . \supset . B \equiv C$ обозначает $A \supset (B \equiv C)$.

Этот параграф посвящен определению истинности для системы **PA**. Построение производится внутри системы $\mathbf{S}^1$.

Определение 18.4. Через $F(\alpha, n)$ обозначим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
&\forall \ulcorner t_1 \urcorner \forall \ulcorner t_2 \urcorner [\mathrm{ct}(\ulcorner t_1 \urcorner) \wedge \mathrm{ct}(\ulcorner t_2 \urcorner) \supset \\
&\qquad \supset (\alpha(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv v(\ulcorner t_1 \urcorner) = v(\ulcorner t_2 \urcorner))] \wedge \\
&\wedge \forall \ulcorner A \urcorner \forall \ulcorner B \urcorner [\mathrm{st}(\ulcorner A \wedge B \urcorner) \wedge \mathrm{ls}(\ulcorner A \wedge B \urcorner] \leqslant n \supset \\
&\qquad \supset (\alpha(\ulcorner A \wedge B \urcorner) \equiv \alpha(\ulcorner A \urcorner) \wedge \alpha(\ulcorner B \urcorner))] \wedge \\
&\wedge \forall \ulcorner \neg A \urcorner [\mathrm{st}(\ulcorner \neg A \urcorner) \wedge \mathrm{ls}(\ulcorner \neg A \urcorner) \leqslant n \supset \\
&\qquad \supset (\alpha(\ulcorner \neg A \urcorner) \equiv \neg \alpha(\ulcorner A \urcorner))] \wedge \\
&\wedge \forall \ulcorner \forall x_i A(x_i) \urcorner [\mathrm{st}(\ulcorner \forall x_i A(x_i) \urcorner) \wedge \mathrm{ls}(\ulcorner \forall x_i A(x_i) \urcorner) \leqslant n \supset \\
&\qquad \supset (\alpha(\ulcorner \forall x_i A(x_i) \urcorner) \equiv \forall x \alpha(\ulcorner A(\nu(x)) \urcorner))].
\end{aligned}$$

Формула $F(\alpha, n)$ означает, что α является определением истинности для предложений, имеющих сложность $\leqslant n$. На самом деле предикат T_n, удовлетворяющий условию $F(\{y\} T_n(y), \bar{n})$, был определен в § 14 для каждого n (отдельно). Однако теперь мы можем пойти дальше и дать определение истинности для всех предложений, а именно пусть $T(a)$ обозначает следующую формулу:

$$\mathrm{st}(a) \wedge \exists \varphi (F(\varphi, \mathrm{ls}(a)) \wedge \varphi(a)).$$

(Замечание. Предикат $T(a)$ не является „определением истинности“ в смысле определения 10.10. Мы здесь обобщаем понятие определения истинности. Смысл этого предиката прояснится в теореме 18.13.)

Лемма 18.5. *В системе* **PA′** *выводимы следующие секвенции:*

(1) $F(\alpha, n)$, $F(\beta, n)$, $\mathrm{st}(\ulcorner A \urcorner)$, $\mathrm{ls}(\ulcorner A \urcorner) \leqslant n \to \alpha(\ulcorner A \urcorner) \equiv \beta(\ulcorner A \urcorner)$ (*эта секвенция утверждает, что всякое* α, *для которого справедливо* $F(\alpha, n)$, *определено однозначно, по крайней мере относительно предложений сложности* $\leqslant n$);

(2) $F(\alpha, n)$, $m \leqslant n \to F(\alpha, m)$;

(3) $F(\alpha, n)$, $E(\alpha, \beta, n) \to F(\beta, n+1)$, *где* $E(\alpha, \beta, n)$ *обозначает следующую формулу:*

$$\begin{aligned}
\forall x (\beta(x) \equiv [&\mathrm{st}(x) \wedge \mathrm{ls}(x) \leqslant n \wedge \alpha(x)] \vee \\
&\vee [\mathrm{st}(x) \wedge \mathrm{ls}(x) = n+1 \wedge \\
&\wedge \{\exists \ulcorner A \urcorner (x = \ulcorner \neg A \urcorner \wedge \neg \alpha(\ulcorner A \urcorner)) \vee \\
&\vee \exists \ulcorner A \urcorner \exists \ulcorner B \urcorner (x = \ulcorner A \wedge B \urcorner \wedge \alpha(\ulcorner A \urcorner) \wedge \alpha(\ulcorner B \urcorner)) \vee \\
&\vee \exists \ulcorner \forall x_i A(x_i) \urcorner (x = \ulcorner \forall x_i A(x_i) \urcorner \wedge \forall y \alpha(\ulcorner A(\nu(y)) \urcorner))\}])
\end{aligned}$$

(*эта формула означает, что* β *является продолжением* α *на предложения сложности* $\leqslant n+1$);

(4) $\to \forall n \forall \varphi \exists \psi E(\varphi, \psi, n)$ (*существование продолжения*);

(5) $G(\alpha) \to F(\alpha, 0)$, *где* $G(\alpha)$ *обозначает формулу*

$$\begin{aligned}
\forall x (\alpha(x) \equiv \exists \ulcorner t_1 \urcorner \exists \ulcorner t_2 \urcorner [&\mathrm{ct}(\ulcorner t_1 \urcorner) \wedge \mathrm{ct}(\ulcorner t_2 \urcorner) \wedge \\
&\wedge (x = \ulcorner t_1 = t_2 \urcorner \wedge v(\ulcorner t_1 \urcorner) = v(\ulcorner t_2 \urcorner))])
\end{aligned}$$

(*определение истинности для предложений сложности* $n = 0$).

Предложение 18.6. *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима формула* $\forall n \exists \varphi F(\varphi, n)$.

Доказательство. Применяем правило индукции с индукционной формулой $\exists \varphi F(\varphi, a)$, которая принадлежит классу Σ_1^1, а потому и классу Π_1^1 в широком смысле. Далее используем утверждения (4), (2), (3) леммы 18.5.

Предложение 18.7. *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима формула*

$$T(a) \equiv (\mathrm{st}(a) \wedge \forall \varphi (F(\varphi, \mathrm{ls}(a)) \supset \varphi(a))).$$

Доказательство. Применяем утверждение (1) леммы 18.5 и предложение 18.6.

Следующее предложение утверждает, что предикат T коммутирует с логическими символами.

Предложение 18.8. *В системе* $\mathbf{S}^1$ *выводимы следующие секвенции:*

(1) $\mathrm{st}(\ulcorner A \urcorner) \to T(\ulcorner \neg A \urcorner) \equiv \neg T(\ulcorner A \urcorner)$;

(2) $\mathrm{st}(\ulcorner B \urcorner) \wedge \mathrm{st}(\ulcorner C \urcorner) \to T(\ulcorner B \wedge C \urcorner) \equiv T(\ulcorner B \urcorner) \wedge T(\ulcorner C \urcorner)$.

(3) $\mathrm{st}(\ulcorner \forall x_i B(x_i) \urcorner) \to T(\ulcorner \forall x_i B(x_i) \urcorner) \equiv \forall x T(\ulcorner B(\nu(x)) \urcorner)$.

Это предложение вытекает из предложения 18.6 и утверждений (1) и (2) леммы 18.5. Следует отметить, что если мы примем предложение 18.6, то рассуждения можно будет провести в системе **PA′**.

Лемма 18.9. (1) *В системе* **PA′** *выводима секвенция*

$$\mathrm{ct}(\ulcorner t_1 \urcorner),\ \mathrm{ct}(\ulcorner t_2 \urcorner) \to T(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv v(\ulcorner t_1 \urcorner) = v(\ulcorner t_2 \urcorner).$$

(2) *В системе* **PA** *выводимы равенства*

a) $v(\ulcorner \nu(b) \urcorner) = b$;

b) $v(\ulcorner t(\nu(b_1), \ldots, \nu(b_k)) \urcorner) = t(b_1, \ldots, b_k)$, *где* $t(a_1, \ldots, a_k)$ — *произвольный терм, все свободные переменные которого содержатся среди* $a_1, \ldots, a_k$, *и* $b_1, \ldots, b_k$ — *произвольные свободные переменные.*

Предложение 18.10. *Пусть* $A(a_1, \ldots, a_k)$ — *некоторая формула системы* **PA**, *не содержащая никаких свободных переменных, кроме* $a_1, \ldots, a_k$. *Тогда в* $\mathbf{S}^1$ *выводима формула*

$$T(\ulcorner A(\nu(b_1), \ldots, \nu(b_k))\urcorner) \equiv A(b_1, \ldots, b_k).$$

Доказательство проводится индукцией по сложности формулы A с использованием утверждения (2) леммы 18.9 и предложения 18.8.

Теорема 18.11 (свойство определения истинности). *Пусть* A — *произвольное предложение системы* **PA**. *Тогда в* $\mathbf{S}^1$ *выводима формула*

$$T(\ulcorner A\urcorner) \equiv A.$$

Эта теорема является частным случаем предложения 18.10.

После того как мы установили основное свойство предиката T, мы можем доказать в $\mathbf{S}^1$ непротиворечивость системы **PA**.

Определение 18.12. Напомним (см. § 10), что формула $\mathrm{Prov}_{\mathbf{PA}}(p, a)$ выражает предикат „p есть вывод формулы a в **PA**“ (нижний индекс „**PA**“ может быть опущен). Далее, формулу $\exists p\, \mathrm{Prov}(p, a)$ будем сокращенно обозначать через $\mathrm{Pr}(a)$.

Лемма 18.13. (1) *В* **PA** *выводима секвенция*

$$\mathrm{ct}(\ulcorner t_1\urcorner),\ \mathrm{ct}(\ulcorner t_2\urcorner),\ \mathrm{ct}(\ulcorner t(0)\urcorner),\ v(\ulcorner t_1\urcorner) = v(\ulcorner t_2\urcorner) \to \\ \to v(\ulcorner t(t_1)\urcorner) = v(\ulcorner t(t_2)\urcorner);$$

(2) *в* $\mathbf{S}^1$ *выводима секвенция*

$$\mathrm{ct}(\ulcorner t_1\urcorner),\ \mathrm{ct}(\ulcorner t_2\urcorner),\ \mathrm{st}(\ulcorner A(0)\urcorner),\ v(\ulcorner t_1\urcorner) = v(\ulcorner t_2\urcorner) \to \\ \to T(\ulcorner A(t_1)\urcorner) \equiv T(\ulcorner A(t_2)\urcorner).$$

Доказательство утверждения (2). Применим индукцию по n к следующей формуле:

$$\forall \ulcorner A(a_i)\urcorner\, [\mathrm{st}(\ulcorner A(0)\urcorner) \wedge \mathrm{ls}(\ulcorner A(0)\urcorner) \leqslant n . \supset \\ \supset . \forall \ulcorner t_1\urcorner \forall \ulcorner t_2\urcorner (\mathrm{ct}(\ulcorner t_1\urcorner) \wedge \mathrm{ct}(\ulcorner t_2\urcorner) \wedge v(\ulcorner t_1\urcorner) = v(\ulcorner t_2\urcorner) \supset \\ \supset T(\ulcorner A(t_1)\urcorner) \equiv T(\ulcorner A(t_2)\urcorner))].$$

Эта формула принадлежит классу Π_1^1 в широком смысле. Используем утверждение (1) этой леммы и предложение 18.8.

Теорема 18.14. *В системе* $\mathbf{S}^1$ *выводима секвенция* $\mathrm{st}(a)$, $\mathrm{Pr}(a) \to T(a)$.

Доказательство. Применим правило индукции по n к следующей формуле:

$$(*) \qquad \forall y\, (i(y) \leqslant n \supset T(u(y))),$$

где если y — гёделев номер некоторого вывода секвенции $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_p$, то $i(y)$ равняется числу применений правил в этом выводе, а $u(y)$ обозначает „универсальное замыкание“ формулы $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_p)$ (т. е. предложение, полученное добавлением спереди необходимого числа кванторов всеобщности). Функции i и u примитивно рекурсивны. Формула (*) принадлежит классу Π_1^1 в широком смысле. Остается воспользоваться предложением 18.8 и леммой 18.13.

Теорема 18.15. *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима формула* $\mathrm{Consis}(\mathbf{PA})$.

Доказательство. Применяем теоремы 18.11 и 18.14 к формуле $0 = 0'$.

Задача 18.16. Через ZF′ обозначим систему аксиом ZF на основе логической системы $\mathbf{K}_1\mathbf{C}$ (см. определения 15.15 и 16.4) с правилом (конечной) индукции для Π_1^1-формул. Дать в ZF′ определение истинности для системы ZF и тем самым доказать ее непротиворечивость в ZF′ [Указание: следовать доказательству, изложенному в настоящем параграфе. Важно отметить, что формула $T(\ulcorner A\urcorner)$, где A — некоторая аксиома подстановки, снова есть аксиома подстановки.]

§ 19. Интерпретация арифметических систем второго порядка

Определение 19.1. (1) Через $\mathbf{S}^2$ обозначим арифметику второго порядка с арифметической аксиомой выделения и аксиомой полной индукции, а через $\mathbf{S}^3$ — арифметику второго порядка с аксиомой (Π_1^1 в широком смысле)-выделения и аксиомой (Π_1^1 в широком смысле)-индукции. Заметим, что $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{S}^3$ — расширения системы $\mathbf{S}^1$.

(2) Будем предполагать, что имеется некоторая стандартная нумерация языка (арифметики) второго порядка. В частности, $\ulcorner\alpha_1\urcorner$, $\ulcorner\alpha_2\urcorner, \ldots$, $\ulcorner\varphi_1\urcorner$, $\ulcorner\varphi_2\urcorner, \ldots$ обозначают гёделевы номера переменных второго порядка. В число формальных объектов мы теперь включим и абстракты. Поэтому нам нужны гёделевы номера для них: $\ulcorner\{\urcorner$, $\ulcorner\}\urcorner$, $\ulcorner\{x\}\, A(x)\urcorner$. (В действительности мы используем здесь только арифметические абстракты.)

Заметим, однако, что, хотя мы для удобства и включили абстракты в число формальных объектов, в действительности они, как таковые, не входят в формулы системы $\mathbf{S}^2$ (как уже объяснялось в § 15).

(3) Мы переносим сюда из § 18 все обозначения для примитивно рекурсивных функций и предикатов, относящиеся к арифметике первого порядка (некоторые из них, такие, как $\mathrm{ls}(a)$, здесь естественным образом приспосабливаются для языка второго порядка).

Нам нужны также следующие примитивно рекурсивные функции и предикаты:

$\mathrm{fl2}(a)$: a есть формула первого или второго порядка (системы $\mathbf{S}^2$).

$\mathrm{st2}(a)$: a есть предложение, т. е. $\mathrm{fl2}(a)$ и a замкнуто.

$\mathrm{ab}(a)$: a есть арифметический абстракт.

$\mathrm{cab}(a)$: $\mathrm{ab}(a)$ и a замкнуто.

$\mathrm{sub}(\ulcorner A\urcorner, \ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner V\urcorner)$: результат подстановки V вместо α в A, если A — формула, α — переменная второго порядка и V — арифметический абстракт. Это можно обозначить также через $\ulcorner A\begin{pmatrix}\alpha\\ V\end{pmatrix}\urcorner$ или $\ulcorner A(V)\urcorner$.

$\mathrm{q2}(a)$: число кванторов второго порядка в a, если $\mathrm{fl2}(a)$.

Мы будем использовать и другие сокращения из § 18; предикат T определяется так же, как в определении 18.4.

Определение 19.2. Через $F'(\alpha, n)$ обозначим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
&\forall\ulcorner A\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner)\wedge \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner)=0 .\supset. \alpha(\ulcorner A\urcorner)\equiv T(\ulcorner A\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner A\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner)\wedge 0<\mathrm{q2}(\ulcorner\neg A\urcorner)\leqslant n .\supset\\
&\qquad\supset. \alpha(\ulcorner\neg A\urcorner)\equiv\neg\alpha(\ulcorner A\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner A\wedge B\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner)\wedge 0<\mathrm{q2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner)\leqslant n .\supset\\
&\qquad\supset. \alpha(\ulcorner A\wedge B\urcorner)\equiv\alpha(\ulcorner A\urcorner)\wedge\alpha(\ulcorner B\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)\wedge 0<\mathrm{q2}(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)\leqslant n .\supset\\
&\qquad\supset. \alpha(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)\equiv\forall x\alpha(\ulcorner A(\nu(x))\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner)\wedge 0<\mathrm{q2}(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner)\leqslant n .\supset\\
&\qquad\supset. \alpha(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner)\equiv\forall\ulcorner V\urcorner(\mathrm{cab}(V)\supset\\
&\qquad\supset\alpha(\ulcorner A(V)\urcorner))].
\end{aligned}$$

Формула $F'(\alpha, n)$ означает, что α — интерпретация предложений системы $\mathbf{S}^2$, сложность (кванторов второго порядка) которых $\leqslant n$. Теперь определим интерпретацию всех предложений системы $\mathbf{S}^2$.

$$\mathrm{I}(a):\ \exists\psi(F'(\psi, \mathrm{q2}(a))\wedge\psi(a)).$$

Мы можем дать для $\mathbf{S}^2$ некоторую разновидность определения истинности, интерпретируя переменные второго порядка арифметическими предикатами или множествами (т. е. множествами или отношениями на натуральных числах, задаваемыми замкнутыми арифметическими абстрактами). Имея в виду это, часто говорят, что арифметические множества образуют модель системы $\mathbf{S}^2$. Более того, это утверждение можно формализовать и доказать в $\mathbf{S}^3$ (см. лемму 19.14).

Лемма 19.3. (1) *В* $\mathbf{PA}'$ *выводима секвенция* $F'(\alpha, n), \mathrm{st}(\ulcorner A\urcorner)\to\alpha(\ulcorner A\urcorner)\equiv T(\ulcorner A\urcorner)$. (*На арифметических формулах* α *совпадает с определением истинности* T.)

(2) *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима секвенция* $\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner), F'(\alpha, n), F'(\beta, n), \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner)\leqslant n\to\alpha(\ulcorner A\urcorner)\equiv\beta(\ulcorner A\urcorner)$.

(3) *В* $\mathbf{PA}'$ *выводима секвенция* $F'(\alpha, n), m\leqslant n\to F'(\alpha, m)$.

Доказательство утверждения (2). Применяем двойную индукцию по $(\mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner), \mathrm{ls}(\ulcorner A\urcorner))$ к указанной выше секвенции, которая принадлежит классу Π_1^1 в широком смысле.

Определение 19.4. Формулу $E(\alpha, \beta, n, l)$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\forall\ulcorner A\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner)\wedge\mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner)\leqslant n .\supset. \beta(\ulcorner A\urcorner)\equiv\alpha(\ulcorner A\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner\neg A\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner\neg A\urcorner)\wedge\mathrm{q2}(\ulcorner\neg A\urcorner)=n'\wedge\mathrm{ls}(\ulcorner\neg A\urcorner)\leqslant l .\supset\\
&\qquad\supset. \beta(\ulcorner\neg A\urcorner)\equiv\neg\beta(\ulcorner A\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner A\wedge B\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner]\wedge\mathrm{q2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner)=n'\wedge\mathrm{ls}(\ulcorner A\wedge B\urcorner)\leqslant l .\supset\\
&\qquad\supset. \beta(\ulcorner A\wedge B\urcorner)\equiv\beta(\ulcorner A\urcorner)\wedge\beta(\ulcorner B\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)\wedge\mathrm{q2}(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)=n'\wedge\\
&\qquad\wedge\mathrm{ls}(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)\leqslant l .\supset\\
&\qquad\supset. \beta(\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner)\equiv\forall x\beta(\ulcorner A(\nu(x))\urcorner)]\wedge\\
&\wedge\forall\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner[\mathrm{st2}(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner)\wedge\mathrm{q2}(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner)=n'\wedge\\
&\qquad\wedge\mathrm{ls}(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i\urcorner))\leqslant l .\supset\\
&\qquad\supset. \beta(\ulcorner\forall\varphi_i A(\varphi_i)\urcorner)\equiv\forall\ulcorner V\urcorner(\mathrm{cab}(V)\supset\beta(\ulcorner A(V)\urcorner))].
\end{aligned}$$

Лемма 19.5. *В* $\mathbf{PA}'$ *выводимы следующие секвенции:*

(1) $E(\alpha, \beta, n, l), \mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner), \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner)\leqslant n\to\beta(\ulcorner A\urcorner)\equiv\alpha(\ulcorner A\urcorner)$;

(2) $E(\alpha, \beta, n, l), E(\alpha, \gamma, n, k), \mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner), \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner)\leqslant n'.$ $\mathrm{ls}(\ulcorner A\urcorner)\leqslant\min(l, k)\to\beta(\ulcorner A\urcorner)\equiv\gamma(\ulcorner A\urcorner)$

(*единственность продолжения*);

(3) $\to E(\alpha, \alpha, n, 0)$;

(4) $E(\alpha, \beta, n, l)\to E(\alpha, \{x\}C(x), n, l')$,

где $C(x)$ *обозначает формулу*

$$[(\mathrm{st2}(x) \,.\wedge.\, \mathrm{q2}(x) \leqslant n \vee (\mathrm{q2}(x) = n' \wedge \mathrm{ls}(x) < l')) \wedge \beta(x)] \vee$$
$$\vee [\mathrm{st2}(x) \wedge \mathrm{q2}(x) = n' \wedge \mathrm{ls}(x) = l' \wedge$$
$$\wedge (\exists \ulcorner A \urcorner (x = \ulcorner \neg A \urcorner \wedge \neg\beta(\ulcorner A\urcorner)) \vee$$
$$\vee \exists \ulcorner A \wedge B\urcorner (x = \ulcorner A\wedge B\urcorner \wedge \beta(\ulcorner A\urcorner)\wedge\beta(\ulcorner B\urcorner)) \vee$$
$$\vee \exists\ulcorner\forall x_i A(x_i)\urcorner (x=\ulcorner\forall x_iA(x_i)\urcorner \wedge \forall y\beta(\ulcorner A(\nu(y))\urcorner)) \vee$$
$$\vee \exists\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner(x=\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner\wedge\forall\ulcorner V\urcorner(\mathrm{cab}(\ulcorner V\urcorner)\supset\beta(\ulcorner A(V)\urcorner))))].$$

(*Продолжение* β *с* (n, l) *до* (n, l').)

(5) *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима формула* $\forall l \exists \varphi E(\alpha, \varphi, n, l)$. (*Существование продолжения для* α *при фиксированном* n *и любом* l.)

Доказательство утверждения (5). Применяем индукцию по l к формуле $\exists\varphi E(\alpha, \varphi, n, l)$. Используем утверждения (3) и (4) этой леммы и аксиому арифметического выделения.

Определение 19.6. Через $G(\alpha, n, x)$ или, короче, $G(x)$ обозначим следующую формулу:

$$\exists\varphi(E(\alpha, \varphi, n, \mathrm{ls}(x)) \wedge \varphi(x)).$$

Лемма 19.7. *В* $\mathbf{PA}'$ *выводимы следующие секвенции*:

(1) $F'(\alpha, n),\ \mathrm{st}(\ulcorner A\urcorner) \to G(\ulcorner A\urcorner) \equiv T(\ulcorner A\urcorner)$;

(2) $E(\alpha, \beta, n, l),\ \mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner),\ \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner) \leqslant n \vee (\mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner) = n' \wedge \mathrm{ls}(\ulcorner A\urcorner) \leqslant l) \to G(\ulcorner A\urcorner) \equiv \beta(\ulcorner A\urcorner)$.

В $\mathbf{S}^1$ *выводимы следующие секвенции*:

(3) $\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner),\ F'(\alpha, n),\ \mathrm{q2}(\ulcorner\neg A\urcorner) \leqslant n' \to G(\ulcorner\neg A\urcorner) \equiv \neg G(\ulcorner A\urcorner)$;

(4) $\mathrm{st2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner),\ F'(\alpha, n),\ \mathrm{q2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner) \leqslant n' \to G(\ulcorner A\wedge B\urcorner) \equiv G(\ulcorner A\urcorner) \wedge G(\ulcorner B\urcorner)$;

(5) $\mathrm{st2}(\ulcorner\forall x_iA(x_i)\urcorner),\ F'(\alpha, n),\ \mathrm{q2}(\ulcorner\forall x_iA(x_i)\urcorner) \leqslant n' \to G(\ulcorner\forall x_iA(x_i)\urcorner) \equiv \forall x G(\ulcorner A(\nu(x))\urcorner)$;

(6) $\mathrm{st2}(\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner),\ F'(\alpha, n),\ \mathrm{q2}(\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i))\urcorner) \leqslant n' \to G(\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner) \equiv \forall\ulcorner V\urcorner(\mathrm{cab}(\ulcorner V\urcorner) \supset G(\ulcorner A(V)\urcorner))$.

Доказательство. Выводимость секвенции (1) следует из утверждения (1) леммы 19.3 и утверждения (1) леммы 19.5. В силу утверждения (2) леммы 19.5 выводима секвенция (2). Отсюда и из леммы 19.5 вытекает выводимость секвенций (3) — (6). Заметим, что в (6) из $\mathrm{q2}(\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner) \leqslant n'$ следует $\mathrm{q2}(\ulcorner A(V)\urcorner) \leqslant n$.

Лемма 19.8. (1) *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима секвенция* $F'(\alpha, n) \to F'(\{x\}G(x), n')$.

(2) *В* $\mathbf{PA}'$ *выводима секвенция* $\to F'(\{x\}T(x), 0)$.

Доказательство. Эта лемма следует из определения формулы F' и из леммы 19.7.

Предложение 19.9. *В* $\mathbf{S}^3$ *выводима секвенция* $\to \forall n \exists \psi F'(\psi, n)$.

Доказательство. Применим аксиому выделения к абстрактам $\{x\}G(x)$ и $\{x\}T(x)$ и аксиому индукции — к формуле $\exists\psi F'(\psi, n)$, которые все принадлежат классу Π_1^1 в широком смысле, и воспользуемся леммой 19.8.

Лемма 19.10. *В* $\mathbf{S}^1$ *выводима секвенция* $F'(\alpha, n),\ \mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner),\ \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner) \leqslant n \to \alpha(\ulcorner A\urcorner) \equiv \mathrm{I}(\ulcorner A\urcorner)$.

Доказательство. Применяем утверждения (2) и (3) леммы 19.3.

Предложение 19.11. *В* $\mathbf{S}^3$ *выводима секвенция* $\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner),\ \mathrm{q2}(\ulcorner A\urcorner) = 0 \to \mathrm{I}(\ulcorner A\urcorner) \equiv T(\ulcorner A\urcorner)$.

Доказательство. Это вытекает из леммы 19.10, утверждения (1) леммы 19.3 и утверждения (2) леммы 19.8.

Следующее предложение утверждает, что I коммутирует с логическими символами. Оно доказывается с помощью леммы 19.10 и предложения 19.9.

Предложение 19.12. *В* $\mathbf{S}^3$ *выводимы следующие секвенции*:

(1) $\mathrm{st2}(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{I}(\ulcorner\neg A\urcorner) \equiv \neg\mathrm{I}(\ulcorner A\urcorner)$;
(2) $\mathrm{st2}(\ulcorner A\wedge B\urcorner) \to \mathrm{I}(\ulcorner A\wedge B\urcorner) \equiv \mathrm{I}(\ulcorner A\urcorner) \wedge \mathrm{I}(\ulcorner B\urcorner)$;
(3) $\mathrm{st2}(\ulcorner\forall x_iA(x_i)\urcorner) \to \mathrm{I}(\ulcorner\forall x_iA(x_i)\urcorner) \equiv \forall x\mathrm{I}(\ulcorner A(\nu(x))\urcorner)$;
(4) $\mathrm{st2}(\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner) \to \mathrm{I}(\ulcorner\forall\varphi_iA(\varphi_i)\urcorner) \equiv \forall\ulcorner V\urcorner(\mathrm{cab}(\ulcorner V\urcorner) \supset \mathrm{I}(\ulcorner A(V)\urcorner))$.

Теперь мы перейдем к доказательству в $\mathbf{S}^3$ непротиворечивости системы $\mathbf{S}^2$.

Определение 19.13. (1) Пусть $i(p)$ равняется числу непосредственных выводов в выводе (с гёделевым номером) p.

(2) Пусть предикат $i(b, a)$ выражает следующее: „b есть замкнутый подстановочный пример формулы a“, т. е. $i(b, a)$ верно тогда и только тогда, когда $a = \ulcorner A(\beta, \ldots, c, \ldots)\urcorner$ и $b = \ulcorner A(V, \ldots, \nu(n), \ldots)\urcorner$ для некоторых замкнутых арифметических абстрактов $V, \ldots$ и чисел $n, \ldots$, где $\beta, \ldots, c, \ldots$ суть все свободные переменные, входящие в A.

(3) Предикат $j(b, p)$ означает „если p — гёделев номер некоторого вывода в $\mathbf{S}^2$ секвенции $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$, то $i(b, \ulcorner A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B_1 \vee \ldots \vee B_n\urcorner)$“.

(4) Мы будем писать Prov_2 вместо $\mathrm{Prov}_{\mathrm{S}_2}$ и $\mathrm{Pr}_2(a)$ вместо $\exists x\,\mathrm{Prov}_2(x, a)$.

Лемма 19.14. *В* $\mathbf{S}^3$ *выводима секвенция*

$$\mathrm{Pr}_2(a) \to \forall x\,(i\,(x, a) \supset \mathrm{I}\,(x)).$$

Доказательство. Пусть $H(m)$ — следующая формула:

$$\forall p \forall x\,[i\,(p) \leqslant m \wedge j\,(x, p) \supset \mathrm{I}\,(x)].$$

Доказательство проводится индукцией по m применительно к формуле $H(m)$, которая принадлежит классу Π^1_1 в широком смысле. Рассуждения проводятся в зависимости от того, какое правило применяется в p последним. Случай, когда последним применяется правило индукции, не вызывает затруднений, так как на шаге индукции тогда можно применить индукцию (по k) к некоторой формуле вида $\mathrm{I}\,(\ulcorner A\,(\nu\,(k), V, \ldots, \nu\,(n), \ldots)\urcorner)$, где $A\,(a, \beta, \ldots, c, \ldots)$ — индукционная формула этого правила с собственной переменной a.

Предложение 19.15. *В* $\mathbf{S}^3$ *выводима секвенция*

$$\mathrm{st2}\,(\ulcorner A \urcorner),\ \mathrm{Pr}_2\,(\ulcorner A \urcorner) \to \mathrm{I}\,(\ulcorner A \urcorner).$$

Это следует из леммы 19.14.

Теорема 19.16. *В* $\mathbf{S}^3$ *выводима формула* $\mathrm{Consis}\,(\mathbf{S}^2)$.

Доказательство. Эта теорема является следствием предложений 19.11 и 19.15 и теоремы 18.11.

§ 20. Простая теория типов

В этом параграфе мы опишем исчисление предикатов высшего (конечного) порядка. Мы зададим его в виде исчисления секвенций. Это исчисление представляет собой упрощение системы **GLC**, введенной автором. Мы ограничимся здесь рассмотрением только предикатных переменных. Следуя общепринятой терминологии, мы будем говорить „тип“ (переменной), а не „порядок“ (переменной) (как это было в § 15), и отсчет типов начнем с 0, а не с 1. Таким образом, индивидные объекты имеют тип 0.

Определение 20.1. (1) *Типы* мы определяем индуктивно: 0 есть тип; если $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — типы ($k \geqslant 1$), то $[\tau_1, \ldots, \tau_k]$ тоже тип; типами являются только те объекты, которые получаются таким образом.

(2) Символы нашего языка классифицируются следующим образом.

1) *Константы*:
 1.1) индивидные константы: $c_0, c_1, \ldots$;
 1.2) функциональные константы (i-местные): $f^i_0, f^i_1, \ldots$ ($i = 1, 2, \ldots$);
 1.3) предикатные константы типа τ ($\tau \neq 0$): $R^\tau_0, R^\tau_1, \ldots$.
2) *Переменные*:
 2.1) свободные переменные: $a^\tau_0, a^\tau_1, \ldots$ для каждого типа τ;
 2.2) связанные переменные: $x^\tau_0, x^\tau_1, \ldots$ для каждого типа τ.
3) *Логические символы*: $\neg$ (не), $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\supset$ (влечет), $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует).
4) *Вспомогательные символы*: (,), { , }, [,].

Язык высшего порядка (язык простой теории типов) задан, когда заданы все его константы. Под предикатной переменной понимается любая переменная (свободная или связанная) типа $\tau \neq 0$. Символы языка мы будем использовать также в качестве метапеременных. Верхние индексы, обозначающие типы, иногда будут опускаться. Кроме того, тут остаются в силе все принятые в § 1 соглашения относительно обозначений.

Интуитивно переменные типа 0 обозначают индивидные объекты, а переменные типа $[\tau_1, \ldots, \tau_k]$ — предикаты, которым мы сопоставляем подмножества множества $T_1 \times \ldots \times T_k$, где T_i — множество объектов типа τ_i.

Определение 20.2. *Термы* (данных типов), *формулы* и их *внешние логические символы* определяются одновременной индукцией.

1) Индивидные константы — термы типа 0.
2) Свободные переменные типа τ — термы типа τ.
3) Если f — некоторая i-местная функциональная константа и $t_1, \ldots, t_i$ — термы типа 0, то $f\,(t_1, \ldots, t_i)$ — терм типа 0.
4) Предикатные константы типа τ — термы типа τ.
5) Если A — формула, $a^{\tau_0}_0, \ldots, a^{\tau_k}_k$ — различные свободные переменные указанных типов, $x^{\tau_0}_0, \ldots, x^{\tau_k}_k$ — различные не входящие в A связанные переменные указанных типов и A' — результат одновременной замены в A переменных $a_0, \ldots, a_k$ на $x_0, \ldots, x_k$ соответственно, то $\{x_0, \ldots, x_k\}\,A'$ — терм (называемый также *абстрактом*) типа $[\tau_0, \ldots, \tau_k]$.
6) Если α — предикатная константа или свободная переменная типа $[\tau_1, \ldots, \tau_k]$ и $t_1, \ldots, t_k$ — термы типов $\tau_1, \ldots, \tau_k$ соответственно, то $\alpha\,[t_1, \ldots, t_k]$ — формула, называемая *атомарной*. Она не имеет внешнего логического символа.
7) Если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ — формулы, и их внешними логическими символами являются соответственно $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$.

8) Если A — формула, a^τ — свободная переменная, x^τ — не входящая в A связанная переменная того же типа и A' получается из A заменой всех вхождений a^τ на x^τ, то $\forall x^\tau A'$ и $\exists x^\tau A'$ — формулы, и их внешними логическими символами являются $\forall$ и $\exists$ соответственно.

Эти правила образования формул и термов могут привести к чрезмерно большому количеству скобок. Поэтому некоторые из скобок, как и раньше, мы будем опускать, если это не приводит к двусмысленности.

Заметим, что в отличие от предыдущих параграфов здесь абстракты рассматриваются как формальные объекты. Понятие *алфавитного варианта* определяется так же, как и раньше: выражение A называется алфавитным вариантом выражения B (и наоборот), если A и B отличаются только наименованием своих связанных переменных.

Определение 20.3. *Высота* типа определяется индуктивно следующим образом:

$$h(0)=0; \quad h([\tau_1, \ldots, \tau_k]) = \max(h(\tau_1), \ldots, h(\tau_k)) + 1.$$

Под высотой $h(t)$ терма t мы понимаем высоту его типа.

Логическая сложность формулы или абстракта A определяется как общее число логических символов и пар символов абстракции $\{,\}$, входящих в A.

Подстановка в формулу (в абстракт) A терма t типа τ вместо свободной переменной a типа τ определяется двойной индукцией: по высоте типа τ и по сложности формулы (абстракта) A. Результат такой подстановки мы обозначим через $A\binom{a}{t}$.

1) Базис: высота типа τ равна 0, т. е. тип τ есть 0.

Тогда $A\binom{a}{t}$ определяется просто как $\left(A\,\frac{a}{t}\right)$ в соответствии с определением 1.4 или как некоторый алфавитный вариант этого выражения.

Пусть a и b — некоторые свободные переменные типа 0, и пусть t, s — некоторые термы типа 0.

Мы можем легко доказать следующее.

(i) Если A — формула (терм типа τ), то $A\binom{a}{t}$ — формула (терм типа τ).

(ii) Если A — алфавитный вариант B, то $A\binom{a}{t}$ — алфавитный вариант $B\binom{a}{t}$.

(iii) $A\binom{a}{t}$ содержит только те свободные переменные, которые входят в A или в t.

(iv) Если s не содержит a, то

$$A\binom{a}{t}\binom{b}{s} \text{ совпадает с } A\binom{b}{s}\left(\begin{matrix} a \\ t\binom{b}{s}\end{matrix}\right).$$

2) Шаг индукции: допустим, что $h(\tau)=n\neq 0$ и для всех $m<n$ уже определена подстановка терма t типа σ (такого, что $h(\sigma)=m$) вместо свободной переменной a типа σ так, что выполняются условия:

(1) Если A — формула (терм типа σ), то $A\binom{a}{t}$ — формула (терм типа σ).

(2) Если A — алфавитный вариант B, а s — алфавитный вариант t, то $A\binom{a}{s}$ — алфавитный вариант $B\binom{a}{t}$.

(3) $A\binom{a}{t}$ содержит только те свободные переменные, которые входят в A или в t.

(4) $A\left(\begin{matrix} a \\ \{x_1, \ldots, x_k\}\ a\ [x_1, \ldots, x_k]\end{matrix}\right)$ есть алфавитный вариант A.

(5) $\{x_1, \ldots, x_k\}\,a[x_1, \ldots, x_k]\binom{a}{t}$ есть алфавитный вариант t.

(6) Если s не содержит a и высота b меньше n, то

$$A\binom{a}{t}\binom{b}{s}$$

есть алфавитный вариант

$$A\binom{b}{s}\left(\begin{matrix} a \\ t\binom{b}{s}\end{matrix}\right).$$

(7) Если A не содержит a, то $A\binom{a}{s}$ есть алфавитный вариант A.

Пусть a и t — соответственно свободная переменная и терм типа τ, такие, что $h(\tau)=n$. Если t — свободная переменная или предикатная константа, то $A\binom{a}{t}$ снова определяется как (некоторый алфавитный вариант) $\left(A\,\frac{a}{t}\right)$. Допустим, что t — некоторый абстракт. Определим $A\binom{a}{t}$ индукцией по сложности A.

Пусть t есть $\{x_1, \ldots, x_k\}\,U(x_1, \ldots, x_k)$, где x_i имеет тип τ_i, a имеет тип $\tau=[\tau_1, \ldots, \tau_k]$ и $\max(h(\tau_1), \ldots, h(\tau_k))+1=n$. Отметим сперва, что для всякого терма s типа 0 $s\binom{a}{t}$ определяется как s.

2.1) Если A имеет вид $b[t_1, \ldots, t_k]$, где b — некоторая предикатная константа или переменная, отличная от a, то

$$A\binom{a}{t} \text{ — это } b\left[t_1\binom{a}{t}, \ldots, t_k\binom{a}{t}\right].$$

2.2) Если A имеет вид $a[t_1, \ldots, t_k]$, то

$$A\binom{a}{t} \text{ — это } U(b_1, \ldots, b_k)\left(\begin{matrix} b_1 \\ t_1\binom{a}{t} \end{matrix}\right) \ldots \left(\begin{matrix} b_k \\ t_k\binom{a}{t} \end{matrix}\right),$$

где $b_1, \ldots, b_k$ отличны от всех свободных переменных в A, и

$$U(b_1, \ldots, b_k) \text{ есть } \left(U(x_1, \ldots, x_k)\frac{x_1, \ldots, x_k}{b_1, \ldots, b_k}\right).$$

Здесь $h(b_i) < n$ и каждый t_i „проще“, чем A, поэтому

$$B\left(\begin{matrix} b_i \\ t_i\binom{a}{t} \end{matrix}\right)$$

уже определено для произвольного B.

2.3) Если A имеет вид $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$ или $B \supset C$, то $A\binom{a}{t}$ — это

$$\neg B\binom{a}{t}, \quad B\binom{a}{t} \wedge C\binom{a}{t}, \quad B\binom{a}{t} \wedge C\binom{a}{t}$$

$$\text{или } B\binom{a}{t} \supset C\binom{a}{t}$$

соответственно.

2.4) Если A имеет вид $\forall x F(x)$ или $\exists x F(x)$, то $A\binom{a}{t}$ — это соответственно $\forall y G(y)$ или $\exists y G(y)$, где $G(b)$ есть $F(b)\binom{a}{t}$, b отлично от a и не входит в A, а y не входит в $G(b)$.

2.5) Если A имеет вид $\{x_1, \ldots, x_k\} B(x_1, \ldots, x_k)$, то

$$A\binom{a}{t} \text{ — это } \{y_1, \ldots, y_k\} C(y_1, \ldots, y_k),$$

где $C(b_1, \ldots, b_k)$ есть $B(b_1, \ldots, b_k)\binom{a}{t}$, все $b_1, \ldots, b_k$ отличны от a и не входят в A и ни одно из y_i не входит в $C(b_1, \ldots, b_k)$.

Тогда для $h(a) = n$ мы можем доказать справедливость свойств (1) — (7). (Доказательства этих свойств опускаются.) Мы часто будем вместо $A\binom{a}{t}$ писать $A(t)$.

Здесь и далее мы будем использовать буквы $U, V, \ldots$ с верхними индексами для типов или без таких индексов в качестве метапеременных для абстрактов. Кроме того, для обозначения свободных переменных часто будем использовать буквы $\alpha, \beta, \ldots$ вместо букв $a, b, \ldots$, а для обозначения связанных переменных — буквы $\varphi, \psi, \ldots$ вместо $x, y, \ldots$ (как правило, в тех случаях когда мы имеем в виду переменные типа $\neq 0$).

Пример 20.4. Пусть A есть формула $\forall\varphi\exists x(\alpha[a] \equiv \varphi[x])$, где φ и α имеют тип [0], а x и a — тип 0. Пусть V — абстракт $\{z\}\forall\varphi\exists x(\varphi[x] \wedge \beta[z])$, где φ и β имеют тип [0], а x и z — тип 0. Тогда V — абстракт типа [0]. Найдем формулу $A\binom{\alpha}{V}$. Подстановка выполняется поэтапно согласно определению 20.3. Поскольку α имеет тип [0], мы начинаем с п. 2) этого определения и неоднократно возвращаемся к п. 1). В силу 2.2) и 1) $\alpha[a]\binom{\alpha}{V}$ есть $\forall\varphi\exists x(\varphi(x) \wedge \beta[a])$. Используя это, а также 2.1) и 2.3), получаем, что $(\alpha[a] \equiv \gamma[b])\binom{\alpha}{V}$ (для некоторых b и γ, отличных от a и α соответственно) есть $\forall\varphi\exists x(\varphi[x] \wedge \beta[a]) \equiv \gamma(b)$. Отсюда в силу 2.4) мы получаем, что $A\binom{\alpha}{V}$ есть

$$\forall\psi\exists y(\forall\varphi\exists x(\varphi[x] \wedge \beta[a]) \equiv \psi[y]).$$

Упражнение 20.5 Пусть A — следующий абстракт:

$$\{y\}\,\alpha^2[\{z\}(\alpha^1[z] \equiv \beta^1[y])],$$

и пусть V^2 есть

$$\{\psi^1\}\,\forall\varphi^1\exists x(\psi^1[a] \equiv \varphi^1[x]),$$

где $1 = [0]$ и $2 = [1]$. Найти $A\binom{\alpha^2}{V^2}$.

Определение 20.6. Пусть V — некоторый абстракт вида

$$\{x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}\}\,A\,\{x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}\},$$

и пусть $V_1, \ldots, V_n$ — термы типов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ соответственно. Тогда $V[V_1, \ldots, V_n]$ определяется как

$$A(a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n})\binom{a_1^{\tau_1}}{V_1} \ldots \binom{a_n^{\tau_n}}{V_n},$$

где $a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n}$ — свободные переменные указанных типов, не входящие в термы $V, V_1, \ldots, V_n$, а $A\left(a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n}\right)$ есть

$$\left(A\left(x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}\right)\frac{x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}}{a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n}}\right).$$

Определение 20.7. Формальная система *простой теории типов* определяется аналогично системе $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ из § 15. Секвенции, как обычно, имеют вид $\Gamma \to \Theta$, где Γ и Θ состоят из конечного числа формул. Правила вывода в ней такие же, как в системе $\mathbf{G}^1\mathbf{LC}$ (см. определение 15.15), со следующим обобщением (для высших типов). (Мы переносим сюда из предыдущих параграфов все нужные определения и обозначения.)

$$\text{Правило } \forall\text{-слева: } \frac{F(V),\ \Gamma \to \Theta}{\forall\varphi F(\varphi),\ \Gamma \to \Theta},$$

где V — произвольный терм (любого типа) и φ — связанная переменная того же типа, что и V $\left(\text{если } F(V) \text{ есть } F\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ V\end{smallmatrix}\right), \text{ то } F(\varphi) \text{ есть } \left(F\frac{\alpha}{\varphi}\right)\right)$.

$$\text{Правило } \forall\text{-справа: } \frac{\Gamma \to \Theta,\ F(\alpha)}{\Gamma \to \Theta,\ \forall\varphi F(\varphi)},$$

где α не входит в нижнюю секвенцию и φ имеет тот же тип, что и α. Переменная α называется собственной переменной для этого правила. Правила $\exists$-слева и $\exists$-справа определяются симметрично.

Всякое предложение вида

$$\forall y_1 \ldots \forall y_m \exists\varphi\forall x_1 \ldots \forall x_n (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \equiv A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)),$$

где $A(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ — произвольная формула (и переменные $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ имеют произвольный тип), называется *аксиомой выделения* (ср. с определением 15.14).

Аналогом предложения 15.16 является следующее

Предложение 20.8. *Все аксиомы выделения (для произвольных A) выводимы в простой теории типов. Обратно, рассмотрим подсистему простой теории типов, в которой правила $\forall$-слева и $\exists$-справа разрешается применять, только когда V есть свободная переменная или предикатная константа. В этой подсистеме, пополненной аксиомами выделения для всех A, допустимы общие правила $\forall$-слева и $\exists$-справа.*

Определение 20.9. (1) *Полуформулами* называются выражения, построенные так же, как и формулы, и отличающиеся от них лишь тем, что полуформулы могут содержать свободные вхождения связанных переменных. *Полутермы* определяются аналогично.

(2) *Логическая сложность* полуформул и полутермов определяется так же, как и для формул и абстрактов (определение 20.3).

§ 21. Теорема об устранении сечений для простой теории типов

Около 25 лет назад автор высказал предположение, что для простой теории типов, формализованной как в определении 20.7, справедлива теорема об устранении сечений. Это предположение, известное как гипотеза Такеути, оставалось недоказанным в течение многих лет. В 1966 г. Тэйтом была доказана теорема об устранении сечений для логики второго порядка. Полностью гипотезу доказали независимо Такахаси и Правитц. В этом параграфе мы изложим доказательство теоремы об устранении сечений для простой теории типов, следуя методу Такахаси и Правитца. Нам хотелось бы отметить, что в 1971 г. Жирар значительно улучшил несколько результатов, излагаемых в этом параграфе, включая доказательство теоремы об устранении сечений. (См. *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, ed. J. E. Fenstad, North Holland Amsterdam, 1971.) Основную идею Жирара использовали затем Мартин-Лёф и Правитц, которые независимо получили другую, в некоторой степени более элегантную форму теоремы об устранении сечений.

Всюду в этом параграфе для упрощения рассуждений мы имеем дело только с одноместными переменными и абстрактами и считаем, что логическими символами являются только $\neg$, $\wedge$ и $\forall$. Таким образом, типами будут 0, [0], [[0]], ..., и мы обозначим их через 0, 1, 2, ... соответственно. Мы будем также опускать константы. Все результаты легко можно обобщить на общий случай.

Определение. 21.1 *Аксиомой отождествления* (*или аксиомой объемности*) называется всякая формула вида

$$\forall x (V_1(x) \equiv V_2(x)) \supset \forall\varphi(\varphi[V_1] \equiv \varphi[V_2]),$$

где V_1 и V_2 — произвольные абстракты одинакового типа. В простой теории типов эта схема аксиом эквивалентна следующему правилу вывода (*правилу отождествления*):

$$\frac{V_1(a),\ \Gamma \to \Delta,\ V_2(a) \qquad V_2(a),\ \Gamma \to \Delta,\ V_1(a)}{\alpha[V_1],\ \Gamma \to \Delta,\ \alpha[V_2],}$$

где a не входит в нижнюю секвенцию.

Предложение 21.2. *В простой теории типов, пополненной правилом отождествления, допустимо следующее правило:*

$$\frac{V_1(a),\ \Gamma\to\Delta,\ V_2(a)\qquad V_2(a),\ \Gamma\to\Delta,\ V_1(a)}{A(V_1),\ \Gamma\to\Delta,\ A(V_2)},$$

где $A(V_i)$ получается из (произвольной) формулы $A(\beta)$ подстановкой V_i вместо β и a не входит в нижнюю секвенцию.

Доказательство. Применяем индукцию по сложности формулы A. Мы разберем лишь случай, когда $A(\beta)$ имеет вид $\forall\varphi B(\varphi,\beta)$. Допустим, что выводимы секвенции $V_1(a),\ \Gamma\to\Delta,\ V_2(a)$ и $V_2(a),\ \Gamma\to\Delta,\ V_1(a)$. По предположению индукции выводима секвенция $B(\gamma, V_1),\ \Gamma\to\Delta,\ B(\gamma, V_2)$, где γ — свободная переменная подходящего типа, не входящая нигде больше в эту секвенцию; следовательно, вводя с обеих сторон квантор $\forall\varphi$, получаем, что выводима секвенция $\forall\varphi B(\varphi, V_1),\ \Gamma\to\Delta,\ \forall\varphi B(\varphi, V_2)$.

Теорема 21.3 (теорема об устранении сечений для простой теории типов с аксиомой отождествления; Такахаси). *Пусть* $\mathbf{S}$ — *простая теория типов, пополненная правилом отождествления. Тогда для* $\mathbf{S}$ *верна теорема об устранении сечений.*

Доказательство получается модификацией первоначального метода Такахаси — Правитца. Мы изложим его поэтапно, вводя по мере необходимости некоторые понятия и обозначения.

Определение 21.4. (1) *Структурой* (*для простой теории типов*) называется ω-последовательность множеств, скажем $\mathscr{S}=(S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots)$, где

1.1) S_0 — некоторое непустое множество;
1.2) S_{i+1} — некоторое подмножество множества $P(S_i)$, состоящего из всех подмножеств множества S_i.

(2) *Оценкой* ϕ (на $\mathscr{S}$) называется отображение, определенное на множестве всех (свободных и связанных) переменных так, что всякой переменной типа i ϕ ставит в соответствие некоторый элемент из S_i. *Интерпретация* $\mathfrak{I}$ — это пара $(\mathscr{S}, \phi)$, состоящая из структуры $\mathscr{S}$ и некоторой оценки ϕ на $\mathscr{S}$.

(3) Для данной интерпретации $\mathfrak{I}=(\mathscr{S}, \phi)$ мы определим интерпретацию полуформул и полутермов (относительно $\mathfrak{I}$). Мы будем использовать $\phi\left(\begin{smallmatrix} x \\ S\end{smallmatrix}\right)$ для обозначения оценки, совпадающей с ϕ на всех переменных, кроме x, на которой она принимает значение S.

Если A — полуформула или полутерм, то ее интерпретация (относительно $\mathfrak{I}$) обозначается через $\phi(A)$. Она определяется таким образом, что для всякой полуформулы A имеет место в точности одно из равенств $\phi(A)=\mathsf{T}$ или $\phi(A)=\mathsf{F}$ (где T обозначает „истина“, а F — „ложь“). Если A — полутерм типа $i+1$, то $\phi(A)$ является подмножеством множества S_i. Определение проводится индукцией по сложности A. (Если A — свободная или связанная переменная, то $\phi(A)$ уже определено и совпадает со значением ϕ на A.)

3.1) $\phi(\alpha[W])=\mathsf{T}$, если и только если $\phi(W)\in\phi(\alpha)$.
3.2) $\phi(\forall xA(x))=\mathsf{T}$ (где x — переменная любого типа), если и только если для всякой оценки ϕ', совпадающей с ϕ на всех переменных, кроме, быть может, x, $\phi'(A(x))=\mathsf{T}$.
3.3) $\phi(\{x\}A(x))=\left\{S\mid S\in S_i \text{ и } \phi\left(\begin{smallmatrix} x \\ S\end{smallmatrix}\right)(A(x))=\mathsf{T}\right\}$, где x имеет тип i.
3.4) $\phi(A\wedge B)=\mathsf{T}$, если и только если $\phi(A)=\mathsf{T}$ и $\phi(B)=\mathsf{T}$.
3.5) $\phi(\neg A)=\mathsf{T}$, если и только если $\phi(A)=\mathsf{F}$.

Пусть $\Gamma\to\Delta$ — секвенция $A_1, \ldots, A_m\to B_1, \ldots, B_n$. Тогда

$$\phi(\Gamma\to\Delta)=\phi(\neg(A_1\wedge\ \ldots\ \wedge A_m)\vee B_1\vee\ \ldots\ \vee B_n)$$

(где $\vee$ определена через $\neg$ и $\wedge$).

(4) Структура $\mathscr{S}$ называется *структурой Генкина*, если для всякой оценки ϕ на $\mathscr{S}$ и для каждого абстракта U^i типа i (для $i=1, 2, \ldots$) $\phi(U^i)$ является элементом множества S_i.

Предложение 21.5. *Пусть* $\mathscr{S}$ — *некоторая структура Генкина и* ϕ — *оценка на* $\mathscr{S}$. *Если секвенция* $\Gamma\to\Delta$ *выводима в системе* $\mathbf{S}$, *то* $\phi(\Gamma\to\Delta)=\mathsf{T}$.

Это предложение доказывается, как обычно, индукцией по построению вывода секвенции.

Определение 21.6. *Полуоценкой с отождествлением* называется отображение v, ставящее в соответствие некоторым формулам одно из значений T, F и удовлетворяющее следующим условиям:

1) Если $v(\neg A)=\mathsf{T}$, то $v(A)=\mathsf{F}$; если $v(\neg A)=\mathsf{F}$, то $v(A)=\mathsf{T}$.

2) Если $v(A\wedge B)=\mathsf{T}$, то $v(A)=\mathsf{T}$ и $v(B)=\mathsf{T}$; если $v(A\wedge B)=\mathsf{F}$, то $v(A)=\mathsf{F}$ или $v(B)=\mathsf{F}$.

3) Если $v(\forall xA(x))=\mathsf{T}$, то $v(A(t))=\mathsf{T}$ для всякого терма t того же типа, что и x; если $v(\forall xA(x))=\mathsf{F}$, то найдется свободная переменная a того же типа, что и x, такая, что $v(A(a))=\mathsf{F}$.

4) Если A — алфавитный вариант B, то $v(A)=v(B)$.

5) Пусть α — некоторая свободная переменная типа $i>1$. Если $v(\alpha[U_1])=\mathsf{T}$ и $v(\alpha[U_2])=\mathsf{F}$, то найдется свободная переменная a типа $i-2$, такая, что либо $v(U_1[a])=\mathsf{T}$ и $v(U_2[a])=\mathsf{F}$, либо $v(U_1[a])=\mathsf{F}$ и $v(U_2[a])=\mathsf{T}$.

Если v — полуоценка с отождествлением и S — секвенция

$$A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n,$$

то мы полагаем

$$v(S) =_{\mathrm{df}} v(\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n),$$

при условии что правая часть определена.

Предложение 21.7. *Если секвенция S не выводима без сечений, то существует полуоценка v с отождествлением, такая, что, $v(S) = \mathsf{F}$.*

Доказательство. Это предложение доказывается аналогично теореме о полноте, а именно с помощью редукционного дерева для S (см. § 8). Мы лишь наметим определение „непосредственных последователей“ (т. е. секвенций, записываемых непосредственно над рассматриваемой секвенцией) в случаях, касающихся правила отождествления и формул вида $\forall \varphi F(\varphi)$. В первом случае пусть $\Gamma \to \Delta$ — одна из самых верхних секвенций в дереве, построенном к настоящему времени. Пусть

$$\langle \alpha_1[U_{111}], \alpha_1[U_{112}]\rangle, \ldots, \langle \alpha_1[U_{1k_11}], \alpha_1[U_{1k_12}]\rangle, \ldots$$
$$\ldots, \langle \alpha_m[U_{m11}], \alpha_m[U_{m12}]\rangle, \ldots, \langle \alpha_m[U_{mk_m1}], \alpha_m[U_{mk_m2}]\rangle$$

суть все пары атомарных формул в Γ, Δ, такие, что $\alpha_i[U_{ij1}]$ входит в Γ и $\alpha_i[U_{ij2}]$ входит в Δ для $j = 1, \ldots, k_i$. Пусть $b_{11}, \ldots, b_{1k_1}, \ldots, b_{m1}, \ldots, b_{mk_m}$ — различные новые переменные соответствующих типов. Запишем непосредственно над секвенцией $\Gamma \to \Delta$ все секвенции вида $U_{ijl}[b_{ij}]$, $\Gamma \to \Delta$, $U_{ijl'}[b_{ij}]$ для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k_i$, $l = 1$ или $l = 2$, причем $l' = 2$ при $l = 1$ и $l' = 1$ при $l = 2$.

На этапах, когда рассматриваются кванторы высших типов, мы поступаем следующим образом. Мы определяем понятие доступной свободной переменной (на данном этапе), как в § 8, но таким образом, чтобы по крайней мере одна свободная переменная каждого типа всегда была доступна. Теперь определим редукцию $\forall$-слева (высшего типа). Рассмотрим $\{\forall \varphi_i F_i(\varphi_i)\}_{i=1}^m$ — последовательность всех формул в антецеденте секвенции $\Gamma \to \Delta$, начинающихся с кванторов высших порядков. Допустим, что данный этап имеет номер k. Для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m$, пусть $V_1^i, \ldots, V_k^i$ — первые k абстрактов в некотором заранее заданном списке абстрактов того же типа, что и φ_i. Тогда над секвенцией $\Gamma \to \Delta$ запишем секвенцию

$$F_1(V_1^1), \ldots, F_1(V_k^1), \ldots, F_m(V_1^m), \ldots, F_m(V_k^m), \Gamma \to \Delta.$$

Редукцию $\forall$-справа (высшего типа) определяем так же, как и ранее (т. е. в случае II. 9) в доказательстве леммы 8.3), заменяя связанные переменные на свободные переменные тех же типов.

Таким образом, мы можем считать, что редукционное дерево построено. Как и в лемме 8.3, если каждая ветвь этого дерева конечна и (следовательно) завершается секвенцией, антецедент и сукцедент которой имеют некоторую общую формулу, то это дерево легко преобразовать в не содержащий сечений вывод секвенции S в системе $\mathbf{S}$. Поэтому, если секвенция S не выводима без сечений, то существует некоторая бесконечная ветвь. Возьмем одну такую бесконечную ветвь и определим полуоценку v следующим образом: $v(A) = \mathsf{T}$, если формула A входит в антецедент какой-нибудь секвенции из этой ветви, и $v(A) = \mathsf{F}$, если A входит в сукцедент. Ясно, что $v(S) = \mathsf{F}$. Нетрудно видеть, что v действительно является полуоценкой. Мы проверим лишь, что v удовлетворяет условиям 5) и 3) определения 21.6.

Допустим, что $v(\alpha[U_1]) = \mathsf{T}$ и $v(\alpha[U_2]) = \mathsf{F}$. Тогда $\alpha(U_1)$ входит в антецедент, а $\alpha[U_2]$ — в сукцедент рассматриваемой ветви. Из построения дерева следует, что раз формула $\alpha[U_1]$ входит в антецедент некоторой секвенции, то она входит в антецеденты всех секвенций, расположенных выше нее; аналогичное утверждение верно и для $\alpha[U_2]$. Таким образом, существует секвенция, которая содержит $\alpha[U_1]$ в антецеденте и $\alpha[U_2]$ в сукцеденте и к которой применялась редукция, соответствующая правилу отождествления; тогда существует свободная переменная a, такая, что секвенция, непосредственно следующая за этой секвенцией, содержит $U_1[a]$ в антецеденте, а $U_2[a]$ в сукцеденте (или наоборот). Таким образом, по определению v получаем $v(U_1[a]) = \mathsf{T}$ и $v(U_2[a]) = \mathsf{F}$ (или $v(U_1[a]) = \mathsf{F}$ и $v(U_2[a]) = \mathsf{T}$).

Допустим, что $v(\forall \varphi F(\varphi)) = \mathsf{T}$. Это значит, что формула $\forall \varphi F(\varphi)$ входит в антецедент некоторой секвенции (и, следовательно, в антецеденты всех секвенций, расположенных выше нее). Из способа построения дерева вытекает, что для каждого абстракта V того же типа, что и φ, формула $F(V)$ входит в антецедент некоторой секвенции. Поэтому $v(F(V)) = \mathsf{T}$.

Определение 21.8. По данной полуоценке с отождествлением v следующим образом определим *структуру Генкина* $\mathcal{S} = (S_0, S_1, \ldots)$, соответствующую полуоценке v. Множества $S_0, S_1, \ldots$ и отношения $U^{n+1} < S$ для $S \subseteq S_n$ определяются совместной индукцией.

1) S_0 есть множество всех термов типа 0 (в нашем упрощенном случае S_0 состоит лишь из свободных переменных). Для всяких термов t_1 и t_2 пусть $t_1 < t_2$ означает, что t_1 совпадает с t_2.

2) Предположим, что уже определены множества $S_0, \ldots, S_n$ и отношение $<$ для соответствующих типов. Допустим, что U^{n+1} есть абстракт типа $n+1$ и $S \subseteq S_n$. Тогда положим $U^{n+1} < S$, если и только если для каждого абстракта U_0^n типа n и каждого S^n, принадлежащего S_n, из $U_0^n < S^n$ и $v(U^{n+1}[U_0^n]) = \mathsf{T}$ вытекает, что S^n принадлежит S, а из $U_0^n < S^n$ и $v(U^{n+1}[U_0^n]) = \mathsf{F}$ вытекает, что S^n не принадлежит S. Множество S_{n+1} определяется так:

$$S_{n+1} =_{\mathrm{df}} \{S \mid S \subseteq S_n \text{ и существует абстракт } U^{n+1}, \text{ такой, что } U^{n+1} < S\}.$$

Из определения легко следует, что $S_{n+1} \subseteq P(S_n)$.

Отношение $U < S$ можно понимать так: „U есть одно из возможных имен для S (при полуоценке v)“.

Для удобства свободные переменные типа 0 мы также будем называть абстрактами. Тогда каждой свободной переменной a мы поставим в соответствие некоторый абстракт, также обозначаемый через a, а именно $\{x\}\, a[x]$, если a имеет тип > 0, и саму переменную a, если она имеет тип 0.

Предложение 21.9. *Пусть $\mathcal{S}$ — структура, описанная в определении 21.8. Тогда для всякой свободной переменной α типа n найдется некоторый элемент S множества S_n, такой, что $\alpha < S$ (здесь α обозначает уже абстракт в соответствии с нашей договоренностью).*

Доказательство проводится индукцией по n.

Базис: $n = 0$. Для всякой свободной переменной a типа 0 a принадлежит S_0 и $a < a$.

Шаг индукции: пусть $n > 0$ и допустим, что предложение верно для $0, 1, \ldots, n-1$. Множество S определим таким образом:

$$S =_{\mathrm{df}} \{S^{n-1} \mid S^{n-1} \text{ принадлежит } S_{n-1} \text{ и существует абстракт } U^{n-1}, \text{ такой, что } U^{n-1} < S^{n-1} \text{ и } v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{T}\}.$$

Тогда, согласно определению, $S \subseteq S_{n-1}$. Мы утверждаем, что $\alpha < S$. В самом деле, возьмем произвольные U^{n-1} и S^{n-1}, такие, что $U^{n-1} < S^{n-1}$. Покажем следующее.

(1) Если $v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{T}$, то S^{n-1} принадлежит S.

(2) Если $v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{F}$, то S^{n-1} не принадлежит S.

Утверждение (1), очевидно, вытекает из определения S. Утверждение (2) доказывается следующим образом. Допустим, что (2) не верно, т. е. что $v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{F}$ и S^{n-1} принадлежит S. Тогда найдется абстракт W^{n-1}, такой, что $W^{n-1} < S^{n-1}$ и $v(\alpha[W^{n-1}]) = \mathsf{T}$.

Случай 1: $n = 1$. Тогда $W^{n-1} = S^{n-1} = U^{n-1}$, что приводит к противоречию.

Случай 2: $n > 1$. Поскольку $v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{F}$ и $v(\alpha[W^{n-1}]) = \mathsf{T}$, в силу условия 5) определения 21.6 найдется переменная a, такая, что либо $v(U^{n-1}[a]) = \mathsf{F}$ и $v(W^{n-1}[a]) = \mathsf{T}$, либо $v(U^{n-1}[a]) = \mathsf{T}$ и $v(W^{n-1}[a]) = \mathsf{F}$. По предположению индукции существует S^{n-2}, принадлежащее S_{n-2}, такое, что $a < S^{n-2}$. Если $v(U^{n-1}[a]) = \mathsf{F}$ и $v(W^{n-1}[a]) = \mathsf{T}$, то (поскольку $v(U^{n-1}[a]) = \mathsf{F}$) S^{n-2} не принадлежит S^{n-1}, так как $U^{n-1} < S^{n-1}$. С другой стороны, из $v(W^{n-1}[a]) = \mathsf{T}$ следует, что S^{n-2} принадлежит S^{n-1}, поскольку $W^{n-1} < S^{n-1}$. Таким образом, получаем противоречие.

Если $v(U^{n-1}[a]) = \mathsf{T}$ и $v(W^{n-1}[a]) = \mathsf{F}$, то мы приходим к противоречию аналогичным образом. Поэтому утверждение (2) должно быть верным.

Из (1) и (2), согласно определению, следует, что $\alpha < S$.

Определение 21.10. Отношение $<$ мы продолжаем на формулы и истинностные значения следующим образом:

1) $A < \mathsf{T}$, если и только если $v(A) \neq \mathsf{F}$.

2) $A < \mathsf{F}$, если и только если $v(A) \neq \mathsf{T}$.

Непосредственными следствиями этого определения являются следующие утверждения:

(1) если $A < *$ (где $*$ обозначает F или T) и $v(A) = \mathsf{T}$, то $* = \mathsf{T}$;

(2) если $A < *$ и $v(A) = \mathsf{F}$, то $* = \mathsf{F}$.

В самом деле, если $v(A) = \mathsf{T}$, то $v(A) \neq \mathsf{F}$ по определению v; поэтому в силу 1) $A < \mathsf{T}$. Тогда $*$ не может быть F, согласно 2). Утверждение (2) доказывается аналогично.

Предложение 21.11. *Пусть $\mathcal{S}$ — структура, описанная в определении 21.8, и пусть ϕ — оценка на $\mathcal{S}$. Тогда для любого абстракта (или формулы) $U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где все свободные переменные в U находятся среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и для всяких абстрактов $U_1, \ldots, U_n$ (соответствующих типов), если $U_i < \phi(\alpha_i)$ при $i = 1, \ldots, n$, то $U(U_1, \ldots, U_n) < \phi(U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$.*

Доказательство. Индукция по сложности $U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

(1) U есть α_i. По условию $U_i < \phi(\alpha_i)$.

Проведем теперь шаги индукции.

(2) U есть $\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$. Пусть α_i имеет тип n_i. По условию $U_i < \phi(\alpha_i)$, откуда вытекает (согласно определению $<$),

что для всякого $U_0^{n_i-1}$ и всякого S^{n_i-1} из S_{n_i-1} выполняются следующие условия:

1) если $U_0^{n_i-1} < S^{n_i-1}$ и $v\left(U_i\left[U_0^{n_i-1}\right]\right) = \mathsf{T}$, то $S^{n_i-1} \in \phi(\alpha_i)$;

2) если $U_0^{n_i-1} < S^{n_i-1}$ и $v\left(U_i\left[U_0^{n_i-1}\right]\right) = \mathsf{F}$, то $S^{n_i-1} \notin \phi(\alpha_i)$.

Возьмем теперь $W(U_1, \ldots, U_n)$ в качестве $U_0^{n_i-1}$ и $\phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ в качестве S^{n_i-1}. По предположению индукции $W(U_1, \ldots, U_n) < \phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, и поэтому первая посылка в 1) и 2) выполнена. Если $v(U_i[W(U_1, \ldots, U_n)])$ равно T, то в силу 1) $\phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \in \phi(\alpha_i)$, а если оно равно F, то в силу 2) $\phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \notin \phi(\alpha_i)$. В первом случае $U_i[W(U_1, \ldots, U_n)] < \mathsf{T}$, согласно определению 21.10, и по определению 21.4, п. 3.1), имеем $\phi(\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]) = \mathsf{T}$, откуда следует, что $U_i[W(U_1, \ldots, U_n)] < \phi(\alpha_i[W(\alpha_i, \ldots, \alpha_n)])$. Аналогично во втором случае имеем $U_i[W(U_1, \ldots, U_n)] < \mathsf{F} = \phi(\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)])$. (Заметим, что если $v(U(U_1, \ldots, U_n))$ не определено, то (тривиальным образом) $U(U_1, \ldots, U_n) < \phi(U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, согласно определению 21.10.)

(3) $U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ имеет вид $\forall\varphi A(\varphi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Случай 1. $v(\forall\varphi A(\varphi, U_1, \ldots, U_n)) = \mathsf{F}$. Тогда существует β, такое, что $v(A(\beta, U_1, \ldots, U_n)) = \mathsf{F}$. Для этого β возьмем то S, которое было построено в предложении 21.9 так, что $\beta < S$. Пусть ϕ' есть $\phi\begin{pmatrix}\beta\\ S\end{pmatrix}$. Тогда $\beta < \phi'(\beta)$ и $U_i < \phi'(\alpha_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. По предположению индукции

$$A(\beta, U_1, \ldots, U_n) < \phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)),$$

и потому $\phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{F}$ в силу п. (2) определения 21.10, а это означает, что $\phi(\forall\varphi A(\varphi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{F}$, откуда следует $U(U_1, \ldots, U_n) < \phi\ (U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$.

Случай 2. $v(\forall\varphi A(\varphi, U_1, \ldots, U_n)) = \mathsf{T}$. Пусть β — новая свободная переменная того же типа, что и φ. Возьмем произвольное S из S_n и положим $\phi' = \phi\begin{pmatrix}\beta\\ S\end{pmatrix}$. Найдется абстракт V, такой, что $V < S$, т. е. $V < \phi'(\beta)$. По предположению индукции

$$A(V, U_1, \ldots, U_n) < \phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Из нашего допущения следует, что $v(A(V, U_1, \ldots, U_n)) = \mathsf{T}$, откуда получаем

$$\phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{T}.$$

Это верно для всякого S из S_n, т. е. для всякой оценки ϕ', совпадающей с ϕ на всех переменных, кроме β. Следовательно, $\phi(\forall\varphi A(\varphi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{T}$, и потому $U(U_1, \ldots, U_n)) < \phi(U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$.

(4) $U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ имеет вид $\{x\} A(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть β — новая свободная переменная и

$$Q = \left\{ S \mid \phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{T}, \quad \text{где} \quad \phi' = \phi\begin{pmatrix}\beta\\ S\end{pmatrix} \right\} = \\ = \phi(\{x\} A(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Для произвольных U_0 и S_0 подходящих типов, удовлетворяющих условию $U_0 < S_0$, рассмотрим формулу $A(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ и оценку $\phi' = \phi\begin{pmatrix}\beta\\ S_0\end{pmatrix}$. Тогда $U_0 < \phi'(\beta)$. По предположению индукции $A(U_0, U_1, \ldots, U_n) < \phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. Допустим, что $v(A(U_0, U_1, \ldots, U_n)) = \mathsf{T}$. Тогда

$$\phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{T}$$

по определению 21.10, и поэтому $S_0 \in Q$. Если же $v(A(U_0, U_1, \ldots, U_n)) = \mathsf{F}$, то

$$\phi'(A(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathsf{F},$$

и, значит, $S_0 \notin Q$. Следовательно, по определению отношения $<$ имеем $U(U_1, \ldots, U_n) < Q$.

Разбор других случаев предоставляется читателю.

Предложение 21.12. *Структура $\mathscr{S}$ (описанная в определении 21.8) является структурой Генкина.*

Доказательство. Пусть ϕ — произвольная оценка на $\mathscr{S}$. Нам нужно только показать, что для каждого абстракта U имеет место $U' < \phi(U)$ для некоторого абстракта U' того же типа, что и U. Пусть все свободные переменные, входящие в U, находятся среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поскольку $\phi(\alpha_i)$ принадлежит S_{n_i}, где n_i — тип переменной α_i, найдется абстракт U_i типа n_i, такой, что $U_i < \phi(\alpha_i)$. Следовательно, в силу предложения 21.11 $U(U_1, \ldots, U_n) < \phi(U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. Поэтому в качестве U' возьмем $U(U_1, \ldots, U_n)$.

Предложение 21.13. *Пусть $\mathscr{S}$ — рассматриваемая структура, и пусть ϕ_0 — оценка на $\mathscr{S}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) *$\phi_0(a) = a$, если a — свободная переменная типа 0;*

(ii) *$\phi_0(\alpha)$ есть множество S, определенное согласно предложению 21.9, если α — свободная переменная типа > 0 (и $\phi_0(x)$ произвольно, если x — связанная переменная).*

Пусть A — любая формула. Тогда из $v(A) = \mathsf{T}$ следует $\phi_0(A) = \mathsf{T}$, а из $v(A) = \mathsf{F}$ следует $\phi_0(A) = \mathsf{F}$.

Доказательство. Для такой оценки ϕ_0 выполняется $\alpha < \phi_0(\alpha)$ для каждой свободной переменной α. Таким образом, в силу предложения 21.11 $A < \phi_0(A)$ (в качестве U_i надо взять α_i). Тогда доказываемое предложение вытекает из определения 21.10.

Предложение 21.14. *Если секвенция S не выводима без сечений (в системе* **S**), *то найдутся структура Генкина $\mathscr{S}$ и некоторая оценка ϕ_0 на $\mathscr{S}$, такая, что $\phi_0(S) = \mathsf{F}$.*

Доказательство. В силу предложения 21.7 существует некоторая полуоценка с отождествлением, скажем v, такая, что $v(S) = \mathsf{F}$. Пусть $\mathscr{S}$ — структура Генкина, соответствующая полуоценке v (см. определение 21.8 и предложение 21.12). Пусть ϕ_0 — оценка на $\mathscr{S}$, определенная в предложении 21.13. Тогда из $v(S) = \mathsf{F}$ опять-таки в силу предложения 21.13 следует, что $\phi_0(S) = \mathsf{F}$.

Доказательство теоремы 21.3. Согласно предложению 21.14, если секвенция S не выводима без сечений (в системе **S**), то найдется структура Генкина $\mathscr{S}$ и оценка ϕ_0 на $\mathscr{S}$, такая, что $\phi_0(S) = \mathsf{F}$. Но отсюда и из предложения 21.5 следует, что секвенция S не выводима в системе **S** вообще. Другими словами, если секвенция S выводима в системе **S**, то она выводима в ней и без сечений.

Замечание. В силу предложения 21.14 мы доказали не только устранимость сечений для системы **S**, но и *полноту системы* **S** *без правила сечения* (относительно семантики структур Генкина). (*Корректность* системы **S** доказана в предложении 21.5.)

Теперь мы докажем аналогичную теорему для системы без правила отождествления. Идея доказательства такая же, как и в теореме 21.3.

Теорема 21.15 (теорема об устранении сечений для простой теории типов без аксиомы отождествления; Такахаси — Правитц). *Пусть* $\mathbf{S}^-$ — *система простой теории типов, приведенная в* § 20. *Тогда для нее верна теорема об устранении сечений.*

Доказательство. Следуем схеме, по которой проводилось доказательство теоремы 21.3, указывая соответствующие пункты из настоящего параграфа.

Определение 12.16 (ср. с определением 21.4). (1) *Структурой (для простой теории типов без аксиомы отождествления)* называется ω-последовательность множеств $\mathscr{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots)$ с отношением $\in$, причем

1.1) P_0 — некоторое непустое множество;

1.2) P_{i+1} — некоторое множество пар вида $\langle U^{i+1}, S\rangle$, где U^{i+1} — некоторый абстракт типа $i+1$, а S — подмножество множества P_i. Пусть $P^{i+1} = \langle U^{i+1}, S\rangle$ — некоторый элемент из P_{i+1}, и пусть P^i — элемент из P_i. Тогда $P^i \in P^{i+1}$, если и только если P^i принадлежит S.

(2) *Оценкой* на $\mathscr{P}$ называется всякое отображение ϕ, которое каждой переменной типа i ставит в соответствие некоторый элемент из P_i. *Интерпретация* — это пара $\mathfrak{J} = (\mathscr{P}, \phi)$.

(3) Для каждой полуформулы или полутерма A значение $\phi(A)$ определяется так же, как и в определении 21.4, за исключением следующих случаев:

$$\phi(\alpha[W]) = \mathsf{T}, \text{ если и только если } \phi(\alpha) \in \phi(W);$$

$$\phi(\{x^n\} A(x^n, x_1, \ldots, x_m)) =$$
$$= \langle \{x^n\} A(x^n, U_1, \ldots, U_m), \{P^n \mid P^n \in$$
$$\in P_n \wedge \phi\binom{x^n}{P^n}(A(x^n, x_1, \ldots, x_m)) = \mathsf{T}\}\rangle,$$

где $\phi(x_i) = \langle U_i, S_i\rangle$ и все связанные переменные, входящие свободно в $\{x\} A(x)$, содержатся среди $x_1, \ldots, x_m$.

(4) Структура $\mathscr{P}$ называется *предструктурой Генкина*, если для всякой оценки ϕ на ней и для всякого абстракта U типа i $\phi(U)$ принадлежит P_i.

Замечание. Причина, по которой в определении множества P_{i+1} мы должны брать пары $\langle U, S\rangle$ вместо одних S, состоит в том, что $\mathscr{P}$ является моделью для аксиом выделения, в которой аксиома отождествления может не выполняться. Таким образом, мы не можем всякий раз отождествлять два объекта, имеющие одинаковое содержание. Для различения объектов с одинаковым содержанием мы вводим в рассмотрение пары с тем, чтобы имена (этих объектов) были выражены явно.

Предложение 21.17 (ср. с предложением 21.5). *Пусть $\mathscr{P}$ — некоторая предструктура Генкина и ϕ — оценка на $\mathscr{P}$. Если секвенция S выводима в системе* $\mathbf{S}^-$, *то* $\phi(S) = \mathsf{T}$.

Определение 21.18 (ср. с определением 21.6). *Полуоценки* определяются так же, как и в определении 21.6, за тем исключением, что опускается п. 5).

Предложение 21.19 (ср. с предложением 21.7). *Если секвенция S не выводима без сечений в системе* $\mathbf{S}^-$, *то найдется некоторая полуоценка v, такая, что $v(S) = \mathsf{F}$.*

Определение 21.20 (ср. с определением 21.8). По данной полуоценке v мы определяем структуру $\mathscr{P}$, соответствующую этой полуоценке. Множества $P_0, P_1, \ldots$ и отношения $U^i < S$ и $U^i < P^i$ (где U^i — абстракт, $P^i \in P_i$ и $S \subseteq P^i$) определяются совместной индукцией по i.

1) P_0 есть множество всех свободных переменных типа 0; $t_1 < t_2$, если t_1 совпадает с t_2.

2) Допустим, что множества $P_0, \ldots, P_i$ и отношения $<$ для этих множеств уже определены. Пусть S — некоторое подмножество множества P_i. Тогда по определению $U^{i+1} < S$ истинно, если и только если для всякого U_0^i и всякого P^i из P_i, такого, что $U_0^i < P^i$, из $v(U^{i+1}[U_0^i]) = \mathsf{T}$ следует, что $P^i \in S$, а из $v(U^{i+1}[U_0^i]) = \mathsf{F}$ следует, что $P^i \notin S$.

3) $P_{i+1} =_{\mathrm{df}} \{\langle U^{i+1}, S\rangle \mid S \subseteq P_i$ и $U^{i+1} < S\}$.

4) Пусть $P^{i+1} = \langle U^{i+1}, S\rangle$ — некоторый элемент P_{i+1} (и поэтому $U^{i+1} < S$). Тогда $U < P^{i+1}$, если и только если U совпадает с U^{i+1}.

Предложение 21.21 (ср. с предложением 21.9). *Для произвольной переменной α типа n найдется элемент P множества P_n, такой, что $\alpha < P$.*

Доказательство. Возможны два случая.

1) $n = 0$. Для всякого a из P_0 по определению $a < a$.

2) $n > 0$. Определим P так:

$$P =_{\mathrm{df}} \langle \alpha, S\rangle,$$

где

$S = \{P^{n-1} \mid P^{n-1} \in P_{n-1}$ и существует абстракт U^{n-1}, такой, что

$$U^{n-1} < P^{n-1} \text{ и } v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{T}\}.$$

Нам нужно лишь доказать, что $\alpha < S$. Чтобы это доказать, достаточно показать, что для любых U^{n-1} и P^{n-1}, таких, что $U^{n-1} < P^{n-1}$, выполняются условия

(1) если $v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{T}$, то $P^{n-1} \in S$;

(2) если $v(\alpha[U^{n-1}]) = \mathsf{F}$, то $P^{n-1} \notin S$.

Условие (2) в этом случае тривиально, поскольку $U^{n-1} < P^{n-1}$ здесь означает, что $P^{n-1} = \langle U^{n-1}, \tilde{S}\rangle$ для подходящего $\tilde{S}$.

Определение 21.22. Мы можем продолжить отношение $<$ на формулы так же, как в определении 21.10.

Предложение 21.23 (ср. с предложением 21.11). *Пусть $\mathscr{P}$ — определенная выше структура. По данной оценке ϕ следующим*

образом определим отображение ϕ_1: если $\phi(\alpha) = \langle U_1, S\rangle$, то $\phi_1(\alpha) = U_1$, а для свободной переменной a типа 0 положим $\phi_1(a) = \phi(a) = a$. Пусть U — формула или абстракт со свободными переменными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Если

$$\phi_1(\alpha_1) = U_1, \ \ldots, \ \phi_1(\alpha_n) = U_n,$$

то

$$U(U_1, \ldots, U_n) < \phi(U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Доказательство. Индукция по сложности $U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Рассуждения в основном такие же, как и в доказательстве предложения 21.11. Мы разберем лишь один случай шага индукции. Допустим, что U имеет вид $\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$. Пусть α_i имеет тип n_i, и пусть $\phi(\alpha_i)$ есть $\langle U_i, S_i\rangle$ (это случай, когда $n_i > 0$, так как по условию $\phi_1(\alpha_i) = U_i$; если бы было $n_i = 0$, то мы имели бы $\phi(\alpha_i) = \alpha_i = U_i$). Поскольку $U_i < S_i$, то для всех $U_0^{n_i-1}$ и P^{n_i-1} из P_{n_i-1} справедливо следующее:

1) если $U_0^{n_i-1} < P^{n_i-1}$ и $v(U_i[U_0^{n_i-1}]) = \mathsf{T}$, то $P^{n_i-1} \in S_i$;

2) если $U_0^{n_i-1} < P^{n_i-1}$ и $v(U_i[U_0^{n_i-1}]) = \mathsf{F}$, то $P^{n_i-1} \notin S_i$.

Теперь в качестве $U_0^{n_i-1}$ возьмем $W(U_1, \ldots, U_n)$, а в качестве P^{n_i-1} возьмем $\phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. По предположению индукции $W(U_1, \ldots, U_n) < \phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, и, следовательно, выполняется первая посылка в 1) и 2). Если $v(U_i[W(U_1, \ldots, U_n)]) = \mathsf{T}$, то в силу 1) $\phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \in \phi(\alpha_i)$ (так как $\phi(\alpha_i) = \langle U_i, S_i\rangle$ и $\phi(W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ принадлежит S_i), и поэтому $\phi(\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]) = \mathsf{T}$, откуда следует $U_i[W(U_1, \ldots, U_n)] < \phi(\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)])$. Аналогично, если $v(U_i[W(U_1, \ldots, U_n)]) = \mathsf{F}$, то в силу 2) $\phi(\alpha_i[W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]) = \mathsf{F}$, и поэтому выполняется требуемое отношение.

Предложение 21.24 (ср. с предложением 21.12). *Структура $\mathscr{P}$ является предструктурой Генкина.*

Доказательство. Пусть ϕ — произвольная оценка на $\mathscr{P}$. Нам нужно только показать, что если $\phi(U) = \langle V, S\rangle$, то $V < S$. Предположим, что все свободные переменные в U находятся среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пусть $U_i = \phi(\alpha_i)$. Тогда $U(U_1, \ldots, U_n) < \phi(U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, согласно предложению 21.23. Из определения отображения ϕ следует, что $U(U_1, \ldots, U_n)$ совпадает с V, откуда (по определению $<$) следует, что $V < S$.

Предложение 21.25 (ср. с предложением 21.13). *Пусть $\mathscr{P}$ — рассматриваемая структура, и пусть ϕ — оценка на $\mathscr{P}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) *$\phi(a) = a$, если a — свободная переменная типа 0;*

(ii) $\phi(\alpha)$ *есть множество P, определенное согласно предложению 21.21, если α — свободная переменная типа >0 (и $\phi(x)$ произвольно, если x — связанная переменная).*

Пусть A — любая формула. Тогда из $v(A)=\mathsf{T}$ следует $\phi(A)=\mathsf{T}$, а из $v(A)=\mathsf{F}$ следует $\phi(A)=\mathsf{F}$.

Доказательство. Для отображения ϕ_1, построенного по оценке ϕ так же, как и в предложении 21.23, имеет место $\alpha=\phi_1(\alpha)$ для всякой свободной переменной α. Таким образом, в силу предложения 21.23 $A<\phi(A)$ (в качестве U_i надо взять α_i). Поэтому доказываемое предложение следует из определения 21.22.

Предложение 21.26. (ср. с предложением 21.14.) *Если секвенция S не выводима без сечений в системе $\mathbf{S}^-$, то найдутся предструктура Генкина $\mathscr{P}$ и оценка ϕ на ней, такие, что $\phi(S)=\mathsf{F}$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 21.14.

Доказательство теоремы 21.15 получается из предложений 21.26 и 21.17 аналогично доказательству теоремы 21.3.

ГЛАВА 4

ИНФИНИТАРНАЯ ЛОГИКА

В этой главе мы изложим теорию доказательств инфинитарной логики. Одна из причин нашего интереса к инфинитарной логике состоит в том, что эта логика дает возможность установить более тесную связь между теорией моделей и теорией доказательств. Теория моделей и теория доказательств связаны друг с другом во многих отношениях. Например, теоремы Крэйга, Бета и Тарского, приведенные в гл. 1, можно рассматривать как теоремы и теории моделей, и теории доказательств. С другой стороны, теория доказательств в некоторой степени уже, чем теория моделей, в том смысле, что теоретико-модельный результат не всегда можно выразить на языке теории доказательств, хотя обратное обычно возможно. Например, в теории доказательств имеется несколько результатов, содержащих часть теоремы Лёвенгейма — Сколема, одной из наиболее фундаментальных теорем в теории моделей. Однако мы не располагаем теоретико-доказательной версией в обычной (финитарной) теории доказательств всей этой теоремы. Если же мы введем в рассмотрение инфинитарную логику с подходящим понятием вывода, то теорему Лёвенгейма — Сколема полностью можно будет сформулировать синтаксически (см. задачу 22.20).

Пусть α — некоторое ординальное число, f — отображение из α в $\{\forall, \exists\}$, и пусть $\boldsymbol{x}_{<\alpha}$ обозначает последовательность $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$. Тогда $\mathsf{Q}^f\boldsymbol{x}_{<\alpha}$ — квантор *арности* α. Если все значения функции f представляют собой $\forall$ или все значения f представляют собой $\exists$, то квантор $\mathsf{Q}^f\boldsymbol{x}_{<\alpha}$ называется *однородным* и обозначается через $\forall\boldsymbol{x}_{<\alpha}$ или $\exists\boldsymbol{x}_{<\alpha}$ соответственно. В противном случае он называется *неоднородным*.

Неоднородные кванторы могут встречаться и в более общей форме (Генкин). Пусть X и Y — непересекающиеся множества связанных переменных, и пусть T — функция, отображающая Y на некоторое подмножество S множества $P(X)$. Этим T, X и Y мы поставим в соответствие квантор $\mathsf{Q}(T, X, Y)$. Для простоты пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — вполне упорядоченные последовательности, составленные из всех элементов X и Y соответственно. Тогда для формулы $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ выражение $\mathsf{Q}(T, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (сокращенно

$\mathrm{Q}^T \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ есть формула, имеющая следующий смысл. По любым заданным значениям переменных $\boldsymbol{x}$ найдутся значения переменных $\boldsymbol{y}$, такие, что

(1) для всякого ординала η значение переменной y_η зависит от значений тех переменных x_ξ, которые входят в $T(y_\eta)$;

(2) для всякого ординала η значение переменной y_η не зависит от тех переменных x_ξ, которые не входят в $T(y_\eta)$;

(3) имеет место $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Другими словами, $\mathrm{Q}^T \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ эквивалентна следующей формуле второго порядка:

$$(\exists f_0, \ldots, f_\eta, \ldots)(\forall \boldsymbol{x})\, A(\boldsymbol{x}, f_0(x_{00}, x_{01}, \ldots), \ldots \\ \ldots, f_\eta(x_{\eta 0}, x_{\eta 1}, \ldots), \ldots),$$

где $x_{\eta 0}, x_{\eta 1}, \ldots$ — элементы множества $T(y_\eta)$. Например, если $X = \{x, y\}$, $Y = \{u, v\}$ и функция T определена так:

$$T(u) = \{x\}, \qquad T(v) = \{y\},$$

то мы получим формулу $\mathrm{Q}(T, X, Y)\, A(X, Y)$, которую обозначим через

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix} A(x, y; u, v).$$

Известно (Мостовский), что этот квантор нельзя выразить через обычные кванторы $\forall$ и $\exists$. Другие примеры такого рода будут приведены ниже.

Мы рассмотрим инфинитарные системы как с однородными, так и с неоднородными кванторами. Системы с однородными кванторами более или менее напоминают финитарные системы первого порядка, природа которых вполне понятна. В случае неоднородных кванторов ситуация более интересная. Одна из наших задач будет состоять в выяснении, подобны ли логики с неоднородными кванторами конечным логикам первого порядка, или же они ближе к конечным логикам второго порядка.

Особый интерес представляет инфинитарная логика с неоднородными кванторами $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x}_{<\alpha}$, такими, что $f(\beta) = \forall$, если β четно, и $f(\beta) = \exists$, если β нечетно. Эта логика связана с *аксиомой детерминированности*, которая имеет много интересных следствий в теории множеств. Аксиома детерминированности утверждает, что для всякого квантора Q^f и для любой формулы ψ истинна в точности одна из двух формул:

$$\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x}_{<\alpha}\, \psi(\boldsymbol{x}_{<\alpha}, \boldsymbol{a}_{<\beta})$$

или

$$\mathrm{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x}_{<\alpha}\, \neg\psi(\boldsymbol{x}_{<\alpha}, \boldsymbol{a}_{<\beta}),$$

где $\bar{f}$ — функция, двойственная функции f, т. е. $\bar{f}(\gamma) = \forall$, если $f(\gamma) = \exists$, и $\bar{f}(\gamma) = \exists$, если $f(\gamma) = \forall$.

С помощью аксиомы детерминированности мы можем установить связь между теорией доказательств и теорией множеств. Например, одно из важных свойств правил вывода состоит в том, что они образуют симметричные пары. Это свойство было существенным при доказательстве теоремы об устранении сечений для **LK**, но оно, очевидно, уже не сохраняется при введении неоднородных кванторов. Поэтому кажется безнадежным ожидать, что для инфинитарной логики с неоднородными кванторами когда-нибудь будет доказана теорема об устранении сечений. Однако в детерминированной логике (она будет определена в § 23; грубо говоря, это инфинитарная логика, в которой выполняется аксиома детерминированности) правила вывода симметричны. Это позволяет надеяться, что для такой логики имеет место теорема об устранении сечений. Известно, однако, что эта теорема не верна для детерминированной логики, в которой символы дизъюнкции и конъюнкции имеют арность $2^{\aleph_0}$, т. е. оперируют с последовательностями длины $2^{\aleph_0}$. Так ли это в случае детерминированной логики, в которой символы дизъюнкции и конъюнкции имеют лишь арность ω?

Существуют два подхода к изучению детерминированной логики: один из них предполагает аксиому выбора, а другой — нет. Без аксиомы выбора некоторые доказательства превращаются в очень тонкие рассуждения. Тем не менее мы можем доказать следующее утверждение, не применяя эту аксиому.

Пусть M — транзитивная модель теории $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC}$, т. е. теории множеств Цермело — Френкеля, пополненной аксиомой зависимого выбора, и пусть M содержит множество всех подмножеств множества ω. Тогда аксиома детерминированности (AD) выполняется в M тогда и только тогда, когда для всякой детерминированной M-определимой логики справедлива теорема об устранении сечений.

Из этой теоремы следует, что между теоремой об устранении сечений и аксиомой детерминированности имеется тесная связь. Кроме того, в LK существует некоторая естественная редукция, дающая основу для доказательства теоремы об устранении сечений. Это наводит на мысль, что, распространив понятие редукции на инфинитарные языки, мы, возможно, сумеем доказать теорему об устранении сечений и вследствие этого больше узнаем об аксиоме детерминированности. Поэтому мы обобщим правило сечения так, чтобы для инфинитарных языков существовала естественная редукция.

Простейшими примерами инфинитарной логики являются системы с пропозициональными связками счетной арности и с кванторами конечной арности. Хотя эти логики представляют большой интерес, мы приведем лишь один результат, относящийся к таким системам (см. задачу 22.21; Лопес-Эскобар). Дополнительную информацию читатель сможет получить в следующей работе: Barwise J., Infinitary logic and admissable sets, *Journal of Symbolic Logic*, **34** (1969).

Инфинитарную логику можно рассматривать как подсистему логики второго порядка, так как определение истинности для любой сколько-нибудь значительной инфинитарной системы можно выразить в подходящей системе второго порядка. Соответствующий пример приводится в задаче 22.27.

При определении инфинитарного языка основной задачей является описание множества переменных, множества констант и правил образования формул. Существуют различные способы определения формул в таком языке.

a) Берутся все формулы, которые определяются индуктивно, исходя из констант и переменных.
b) В качестве „допустимых" формул берется некоторое подмножество множества всех формул, определенных согласно a), причем требуется, чтобы множество допустимых формул было замкнуто относительно подформул.

Всякий раз, когда не оговорено противное, в системах, которые мы будем изучать, формулы определяются согласно a). Обычно принято устанавливать верхние границы для мощности различных множеств символов языка, но мы не всегда будем делать это.

Под *инфинитарным языком* мы понимаем следующее:

1) некоторое множество связанных переменных;
2) некоторое множество свободных переменных;
3) некоторое множество предикатных констант, каждая из которых имеет свою *арность*, т. е. „число" аргументных мест;
4) некоторое множество индивидных констант;
5) некоторое множество логических символов.

Множество логических символов состоит из обычного одноместного знака отрицания $\neg$, обычного двухместного знака импликации $\supset$ и некоторой совокупности знаков дизъюнкций, конъюнкций, кванторов всеобщности и существования, каждый из которых имеет свою *арность*. Однако мы не будем употреблять различные символы для обозначения знаков разной арности. Мы будем использовать только один символ $\bigvee$ для дизъюнкции, один символ $\bigwedge$ — для конъюнкции, один символ $\forall$ — для квантора всеобщности и один символ $\exists$ — для квантора существования. Из контекста всегда будет ясно, какие символы являются „различными". Например, два квантора $\forall$, за которыми следуют последовательности связанных переменных, являются различными символами, если длины этих последовательностей различны, т. е. символы $\forall$ в выражениях $\forall \boldsymbol{x}_{<\alpha}$ и $\forall \boldsymbol{x}_{<\beta}$ различны, если $\alpha \neq \beta$.

То же самое справедливо и для символов $\exists$, $\bigvee$ и $\bigwedge$. Например, символы $\bigwedge$ в формулах $\bigwedge_{\gamma<\alpha} A_\gamma$ и $\bigwedge_{\gamma<\beta} A_\gamma$ различны, если $\alpha \neq \beta$.

В случае, когда формулы определяются согласно b), логические символы языка определяются допустимыми формулами. Например, символ $\bigwedge$ является символом языка, если он входит в некоторую допустимую формулу.

§ 22. Инфинитарная логика с однородными кванторами

В этом параграфе мы опишем инфинитарную логику с однородными кванторами в виде некоторого исчисления генценовского типа. Хотя рассмотрение языков, содержащих функциональные константы, не вызывает особых затруднений, мы будем для простоты изучать только языки без функциональных констант.

Определение 22.1. (1) Язык L состоит из следующих символов:

1) *Логические символы*:

$\neg$ (не),
$\bigwedge$ (конъюнкции арности α для некоторых α),
$\bigvee$ (дизъюнкции арности α для некоторых α),
$\forall$ (кванторы всеобщности арности α для некоторых α),
$\exists$ (кванторы существования арности α для некоторых α).

Мы будем иногда писать $\bigwedge_\beta$ и $\bigvee_\beta$ вместо $\bigwedge_{\beta<\alpha}$ и $\bigvee_{\beta<\alpha}$, если смысл этих выражений ясен из контекста (и особенно в случае, когда $\alpha = \omega$).

2) *Вспомогательные символы*: левая скобка (, правая скобка) и запятая , .

3) *Константы*:

3.1) Индивидные константы: $c_0, c_1, \ldots, c_\xi, \ldots, \xi < \mu$ для некоторого μ.

3.2) Предикатные константы арности α: $p_0^\alpha, p_1^\alpha, \ldots, p_\xi^\alpha, \ldots, \xi < \gamma$ для некоторого γ и некоторых α.

4. *Переменные*:

4.1) Связанные переменные: $x_0, x_1, \ldots, x_\eta, \ldots, \eta < K_1$.

4.2) Свободные переменные: $a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots, \xi < K_2$.

Здесь K_1 и K_2 — ординалы, но они выбираются не произвольным образом. Нам нужно иметь достаточно большой запас связанных и свободных переменных.

Мы поступаем следующим образом. Сначала фиксируем определенное число констант и логических символов. Потом добавляем „достаточно большое“ количество связанных переменных. Затем нам нужна „очень большая“ совокупность свободных переменных. На самом деле мощность множества свободных переменных должна быть такой же, как и мощность множества всех формул.

Конечно, число формул зависит от числа переменных, которые мы имеем. Во всяком случае в теории множеств можно показать, что если фиксировать численность всех символов языка, кроме свободных переменных, то для достаточно большой совокупности свободных переменных количество формул будет совпадать с количеством свободных переменных.

(2) *Терм* — это либо свободная переменная, либо индивидная константа.

(3) *Формулы* и их *внешние логические символы* определяются следующим образом:

(3.1) Если p — предикатная константа арности α и $\{t_\beta\}_{\beta<\alpha}$ — последовательность термов, то $p(t_0, \ldots, t_\beta, \ldots)$ — *атомарная формула*. Атомарная формула не имеет внешнего логического символа.

(3.2) Если A — формула, то $\neg A$ — формула и $\neg$ — ее внешний логический символ.

(3.3) Если символ $\bigwedge$ ($\bigvee$) арности α принадлежит нашему языку и $\{A_\xi\}_{\xi<\alpha}$ — последовательность формул, то $\bigwedge_{\xi<\alpha} A_\xi$ ($\bigvee_{\xi<\alpha} A_\xi$) — формула и ее внешним логическим символом является $\bigwedge$ ($\bigvee$).

(3.4) Пусть квантор $\forall$ ($\exists$) арности β принадлежит нашему языку, A — некоторая формула, $\boldsymbol{a}$ — последовательность свободных переменных длины β, а $\boldsymbol{x}$ — последовательность связанных переменных длины β, ни одна из которых не входит в A. Тогда $\forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ ($\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$) — формула, внешним логическим символом которой является $\forall$ ($\exists$), и $A(\boldsymbol{x})$ — выражение, полученное из A заменой переменных a на соответствующие x во всех вхождениях этих a в A.

Подформулы определяются так же, как и для конечных языков первого порядка: если $A = \bigwedge_{\beta<\alpha} A_\beta$ — формула языка L (L-формула), то каждая формула A_β является подформулой формулы A; если $A = \forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ — некоторая L-формула, то $A(\boldsymbol{s})$ для произвольной последовательности термов $\boldsymbol{s}$ — ее подформула.

Разумеется, язык L должен быть определен так, чтобы каждая подформула любой L-формулы являлась L-формулой. Поскольку формулы определяются индуктивно, свойства формул обычно доказываются трансфинитной индукцией по их построению.

(4) Для того чтобы ввести понятия вывода, мы, как и ранее, используем вспомогательные символы $\rightarrow$ и —. Ниже через Γ, Δ, Π, Λ, Γ_0, $\Gamma_1, \ldots$ обозначены последовательности формул длины $< K^+$, где K — мощность множества всех формул языка L.

Выражение вида $\Gamma \rightarrow \Delta$ называется *секвенцией*. Последовательности формул Γ и Δ называются соответственно *антецедентом* и *сукцедентом* этой секвенции.

(4.1) (Слабое) структурное правило вывода:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma' \rightarrow \Delta'},$$

где каждая входящая в Γ формула входит и в Γ', а каждая входящая в Δ формула входит в Δ'.

(4.2) Логические правила вывода:

$$\neg\text{-слева:}\quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \{A_\lambda\}_{\lambda<\gamma}}{\{\neg A_\lambda\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \rightarrow \Delta}$$

для некоторого $\gamma < K^+$.

$$\neg\text{-справа:}\quad \frac{\{A_\lambda\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \{\neg A_\lambda\}_{\lambda<\gamma}}$$

для некоторого $\gamma < K^+$.

$$\bigwedge\text{-слева:}\quad \frac{\{A_{\lambda,\mu}\}_{\mu<\beta_\lambda,\ \lambda<\gamma},\ \Gamma \rightarrow \Delta}{\{\bigwedge_{\mu<\beta_\lambda} A_{\lambda,\mu}\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \rightarrow \Delta}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где символ $\bigwedge_{\mu<\beta_\lambda}$ принадлежит языку L при любом $\lambda < \gamma$.

$$\bigwedge\text{-справа:}\quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \{A_{\lambda,\mu_\lambda}\}_{\lambda<\gamma}\ \text{для всех}\ \{\mu_\lambda\}_{\lambda<\gamma},\ \mu_\lambda<\beta_\lambda\ (\lambda<\gamma)}{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \{\bigwedge_{\mu<\beta_\lambda} A_{\lambda,\mu}\}_{\lambda<\gamma}}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где символ $\bigwedge_{\mu<\beta_\lambda}$ принадлежит языку L при любом $\lambda < \gamma$.

$$\bigvee\text{-слева:}\quad \frac{\{A_{\lambda,\mu_\lambda}\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \rightarrow \Delta\ \text{для всех}\ \{\mu_\lambda\}_{\lambda<\gamma},\ \mu_\lambda<\beta_\lambda\ (\lambda<\gamma)}{\{\bigvee_{\mu<\beta_\lambda} A_{\lambda,\mu}\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \rightarrow \Delta}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где символ $\bigvee_{\mu<\beta_\lambda}$ принадлежит языку L при любом $\lambda < \gamma$.

$$\bigvee\text{-справа:}\quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \{A_{\lambda,\mu}\}_{\mu<\beta_\lambda,\ \lambda<\gamma}}{\Gamma \rightarrow \Delta,\ \{\bigvee_{\mu<\beta_\lambda} A_{\lambda,\mu}\}_{\lambda<\gamma}}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где символ $\bigvee_{\mu<\beta_\lambda}$ принадлежит языку L при любом $\lambda < \gamma$.

$$\forall\text{-слева:}\quad \frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{t}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}{\{\forall \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где все $\boldsymbol{t}$ суть последовательности произвольных термов подходящей длины.

$$\forall\text{-справа:}\quad \frac{\Gamma \to \Delta,\ \{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}}{\Gamma \to \Delta,\ \{\forall \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где все $\boldsymbol{a}$ суть последовательности различных свободных переменных подходящей длины. Всякая переменная, входящая в эти последовательности, называется *собственной переменной* этого правила. Если переменная a такого правила входит в последовательность $\boldsymbol{a}_\lambda$, то формула $\forall \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ называется *главной формулой* для переменной a, а формула $A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)$ — *боковой формулой* для этой переменной и для главной формулы. *Переменной порядка* μ относительно главной формулы $\forall \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ называется μ-я переменная $a_{\lambda,\mu}$ в последовательности $\boldsymbol{a}_\lambda$.

$$\exists\text{-слева:}\quad \frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}{\{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где все $\boldsymbol{a}$ суть последовательности различных свободных переменных подходящей длины. Всякая переменная, входящая в эти последовательности, называется собственной переменной этого правила. Если собственная переменная a такого правила входит в $\boldsymbol{a}_\lambda$, то формула $\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ называется главной формулой для этой собственной переменной, а формула $A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)$ — боковой формулой для переменной a и для главной формулы. Переменной порядка μ относительно главной формулы $\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ называется μ-я переменная $a_{\lambda,\mu}$ в последовательности $\boldsymbol{a}_\lambda$.

$$\exists\text{-справа:}\quad \frac{\Gamma \to \Delta,\ \{A_\lambda(\boldsymbol{t}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}}{\Gamma \to \Delta,\ \{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}}$$

для некоторого $\gamma < K^+$, где все $\boldsymbol{t}$ суть последовательности произвольных термов подходящей длины.

(4.3) Правило сечения:

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A_1;\ \Gamma \to \Delta,\ A_2;\ \ldots;\ \Gamma \to \Delta,\ A_\lambda;\ \ldots\ (\lambda<\gamma);\ \{A_\lambda\}_{\lambda<\gamma},\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda}$$

для некоторого $\gamma < K^+$.

Полувыводом P называется конечное или бесконечное дерево секвенций, определяемое следующим образом. Самые верхние, т. е. начальные, секвенции имеют вид $D \to D$. Всякая секвенция в P, кроме одной, является верхней секвенцией некоторого применения того или иного правила, и за этой секвенцией следует нижняя секвенция этого применения. Секвенция, расположенная в корне дерева P, называется заключительной секвенцией. Более точно определение полувывода проводится индуктивно следующим образом:

1) Фигура, состоящая из единственной секвенции $D \to D$, есть полувывод.

2) Если каждое P_α является полувыводом с заключительной секвенцией $\Gamma_\alpha \to \Delta_\alpha$ и

$$\frac{\ldots;\ \Gamma_\alpha \to \Delta_\alpha;\ \ldots}{\Gamma \to \Delta}$$

есть непосредственный вывод по одному из правил вывода, то фигура

$$\frac{\ldots;\ P_\alpha;\ \ldots}{\Gamma \to \Delta}$$

есть полувывод.

3) Всякий полувывод получается согласно 1) и 2).

Поскольку полувыводы определяются индуктивно, секвенциям в полувыводе можно поставить в соответствие ординалы так, чтобы ординал, поставленный в соответствие секвенции S_1, был меньше, чем ординал, поставленный в соответствие секвенции S_2, если S_1 — предок секвенции S_2. Поэтому важно отметить, что, хотя полувывод может быть бесконечной фигурой, т. е. дерево может содержать бесконечно много ветвей, всякая последовательность секвенций в этом дереве, идущая вверх от заключительной секвенции или вниз от начальной секвенции, имеет конечную длину.

Полувывод P называется *выводом*, если он удовлетворяет следующим *ограничениям на собственные переменные*.

(I) Если какая-то переменная два или большее число раз входит в P в качестве собственной переменной, то главные формулы для этих собственных переменных должны совпадать и порядок этой собственной переменной относительно каждой главной формулы одинаков в каждом непосредственном выводе в P.

(II) Всякой свободной переменной a в P можно поставить в соответствие некоторое ординальное число $h(a)$, называемое ее *высотой*, так, чтобы высота свободной переменной, входящей в P в качестве собственной, была больше всех высот свободных переменных, содержащихся в главной формуле для этой собственной переменной.

(III) Никакая переменная, входящая в P в качестве собственной переменной, не должна входить в заключительную секвенцию.

Замечание. Ниже приводится другая форма ограничений на собственные переменные при наличии правила сечения.

Если J — непосредственный вывод вида

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \{A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi)\}_{\xi<\alpha}}{\Gamma \to \Delta, \{\forall \boldsymbol{x}_\xi A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi)\}_{\xi<\alpha}}$$

или

$$\frac{\{A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi)\}_{\xi<\alpha}, \Gamma \to \Delta}{\{\exists \boldsymbol{x}_\xi A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi)\}_{\xi<\alpha}, \Gamma \to \Delta,}$$

то в дополнение к (I) должны выполняться следующие условия:

(i) ни один член последовательности $\boldsymbol{a}_\xi$ не входит ниже J в боковые формулы в качестве собственной переменной, а также в главные формулы применений правил $\forall$-справа или $\exists$-слева;

(ii) для всякой пары ξ, η, такой, что $\eta < \xi$, никакой член последовательности $\boldsymbol{a}_\xi$ не входит в $A_\eta(\boldsymbol{a}_\eta)$;

(iii) никакой член последовательности $\boldsymbol{a}_\xi$ не входит ни в $\forall \boldsymbol{x}_\xi A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi)$, ни в $\exists \boldsymbol{x}_\xi A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi)$;

(iv) никакая переменная, входящая в вывод в качестве собственной переменной, не входит в заключительную секвенцию;

(v) если какая-то собственная переменная входит в $A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi)$, то она используется в качестве собственной в J или ниже.

Очевидно, если условия (i) — (v) выполнены, то можно определить „высоту“ так, чтобы после переименования некоторых переменных выполнялось условие (II), и поэтому будут выполняться ограничения на собственные переменные. Обратное можно доказать методом, аналогичным тому, который используется в последней части доказательства предложения 22.25.

Пример 22.2. (1) Ниже приводится не содержащий сечений вывод аксиомы зависимого выбора в инфинитарной логике с однородными кванторами:

$$\begin{array}{c}
F(a_n, a_{n+1}) \to F(a_n, a_{n+1}) \\ \hline
\{F(a_m, a_{m+1})\}_{m<\omega} \to F(a_n, a_{n+1}) \text{ для всякого } n < \omega \\ \hline
\{F(a_m, a_{m+1})\}_{m<\omega} \to \bigwedge_{n<\omega} F(a_n, a_{n+1}) \\ \hline
\{F(a_m, a_{m+1})\}_{m<\omega} \to \exists \boldsymbol{x}_{<\omega} \bigwedge_{n<\omega} F_n \\ \hline
\{F(a_m, a_{m+1})\}_{m<\omega} \to \forall x_0 \exists \boldsymbol{x}_{<\omega} \bigwedge_{n<\omega} F(x_n, x_{n+1}) \\ \hline
\{\exists y F(a_m, y)\}_{m<\omega} \to \forall x_0 \exists \boldsymbol{x}_{<\omega} \bigwedge_{n<\omega} F(x_n, x_{n+1}) \\ \hline
\{\forall x \exists y F(x, y)\}_{m<\omega} \to \forall x_0 \exists \boldsymbol{x}_{<\omega} \bigwedge_{n<\omega} F(x_n, x_{n+1}) \\ \hline
\forall x \exists y F(x, y) \to \forall x_0 \exists \boldsymbol{x}_{<\omega} \bigwedge_{n<\omega} F(x_n, x_{n+1}).
\end{array}$$

Здесь F_0 есть $F(a_0, x_1)$, F_{i+1} есть $F(x_{i+1}, x_{i+2})$ для всякого $i < \omega$ и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. Высоты определяются таким образом: $h(a_m) = m$, $m < \omega$.

(2) Выведем секвенцию

$$\forall x_0 \ldots \left(\neg \bigwedge_n x_{n+1} \in x_n\right), \forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_0),$$

где $\forall y \in x A(y)$ — сокращение для $\forall y (y \in x \supset A(y))$. Для этого докажем выводимость следующих секвенций.

1) $\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_0)$, $a_1 \in a_0$.

Вывод:

$$\dfrac{\dfrac{A(a_0) \to A(a_0) \qquad \dfrac{\dfrac{a_1 \in a_0 \to a_1 \in a_0}{\to a_1 \in a_0,\ a_1 \in a_0 \supset A(a_1)}}{\to a_1 \in a_0,\ \forall y \in a_0 A(y)}}{\forall y \in a_0 A(y) \supset A(a_0) \to A(a_0),\ a_1 \in a_0}}{\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_0),\ a_1 \in a_0.}$$

2) $\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_n)$, $a_{n+1} \in a_n$.

Эта секвенция выводится аналогично секвенции 1).

3) $\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_{n-k})$, $a_{n+1} \in a_n$ для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Индукцией по k построим фигуру, оканчивающуюся секвенцией 3). Поскольку секвенция 2) представляет собой случай $k = 0$, нам нужно только показать, как перейти от k к $k+1$:

$$\dfrac{\dfrac{A(a_{n-(k+1)}) \to A(a_{n-(k+1)}) \qquad \dfrac{\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_{n-k}),\ a_{n+1} \in a_n}{\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to \forall y \in a_{n-(k+1)} A(y),\ a_{n+1} \in a_n}}{\forall y \in a_{n-(k+1)} A(y) \supset A(a_{n-(k+1)}),\ \forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_{n-(k+1)}),\ a_{n+1} \in a_n}}{\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_{n-(k+1)}),\ a_{n+1} \in a_n.}$$

4) $\forall x (\forall y \in x A(y) \supset A(x)) \to A(a_0), \bigwedge_n a_{n+1} \in a_n$.

Из секвенции 3) при $k=n$ мы получаем

$$\frac{\forall x(\forall y\in xA(y)\supset A(x))\to A(a_0),\ a_{n+1}\in a_n}{\forall x(\forall y\in xA(y)\supset A(x))\to A(a_0),\ \bigwedge_n a_{n+1}\in a_n.}$$

Наконец, из секвенции 4) мы получаем

$$5)\ \forall x_0\ldots\left(\neg\bigwedge_n x_{n+1}\in x_n\right),\ \forall x(\forall y\in xA(y)\supset A(x))\to A(a_0).$$

В выводе этой секвенции переменные $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются собственными и $h(a_n)=n$.

(3) Пример Малитца. Малитц нашел контрпример к интерполяционной теореме для однородных инфинитарных языков. Пусть A и B — два вполне упорядоченных множества одного порядкового типа, и пусть F — предикат, определяющий взаимно однозначное сохраняющее порядок отображение множества A на множество B. Легко доказать, что такое отображение единственно. Если бы имела место интерполяционная теорема, то это сохраняющее порядок отображение можно было бы определить в однородном инфинитарном языке без использования предиката F. Однако это невозможно, поскольку длина определяющей формулы устанавливала бы верхнюю границу на порядковый тип множества A, тогда как этот порядковый тип ничем не ограничен. Пусть $\mathrm{Ln}(=,<)$ — формула, выражающая, что отношение $<$ вместе с $=$ является линейным порядком.

Пусть Γ — такая последовательность формул:

$$\mathrm{Ln}(\overset{1}{=},\ \overset{1}{<}),\ \mathrm{Ln}(\overset{2}{=},\ \overset{2}{<}),$$

$$\forall x\forall y\forall u\forall v\,(x\overset{1}{=}y\wedge u\overset{2}{=}v\supset(F(x,u)\equiv F(y,v))),$$

$$\forall x\forall y\forall u\forall v\,(x\overset{1}{=}y\wedge u\overset{2}{=}v\supset(G(x,u)\equiv G(y,v))),$$

$$\forall x\forall y\forall u\forall v\,(F(x,u)\wedge F(y,v)\supset(x\overset{1}{<}y\equiv u\overset{2}{<}v)\wedge(x\overset{1}{=}y\equiv u\overset{2}{=}v)),$$

$$\forall x\forall y\forall u\forall v\,(G(x,u)\wedge G(y,v)\supset(x\overset{1}{<}y\equiv u\overset{2}{<}v)\wedge(x\overset{1}{=}y\equiv u\overset{2}{=}v)).$$

Следует отметить, что все кванторы в Γ являются кванторами всеобщности и расположены в начале формул. Легко доказывается, что верна следующая секвенция:

$$\begin{aligned}\Gamma,\ &\forall x\exists yF(x,y),\ \forall x\exists yG(x,y),\\ &\forall x\exists yF(y,x),\ \forall x\exists yG(y,x),\ F(a,b),\\ &\forall x_0x_1\ldots\neg\bigwedge_n(x_{n+1}\overset{1}{<}x_n)\to G(a,b).\end{aligned}$$

Мы хотим построить вывод этой секвенции без сечений. Пусть T — множество всех конечных последовательностей из символов 1 и 2. Подразумевается, что пустая последовательность тоже принадлежит T. Буквой τ будем обозначать элементы множества T. Множество D свободных переменных определяется следующим образом:

1) $a\in D$ (a есть a^τ, где τ — пустая последовательность).
2) Если $a^\tau\in D$, то $b^{\tau 1}\in D$ и $b^{\tau 2}\in D$.
3) Если $b^\tau\in D$, то $a^{\tau 1}\in D$ и $a^{\tau 2}\in D$.
4) Все элементы множества D получаются согласно 1), 2) и 3).

Множество D состоит из переменных $a, b^1, b^2, a^{11}, a^{12}, a^{21}, a^{22}, b^{111}, a^{112}, \ldots$. Пусть Γ' — последовательность всех формул, получающихся из формул в Γ удалением всех кванторов всеобщности и заменой связанных переменных на переменные множества D. (Из одной формулы получится бесконечно много формул. Конечно, в каждом подстановочном примере вместо одинаковых связанных переменных в данной формуле следует подставлять одинаковые элементы множества D.) Через Δ' обозначим последовательность всех формул вида

$$F(a^\tau, b^{\tau 1}),\ F(a^{\tau 1}, b^\tau),\ G(a^\tau, b^{\tau 2}),\ G(a^{\tau 2}, b^\tau),\ \tau\in T.$$

В следующих ниже леммах мы приведем несколько секвенций, которые выводимы в обычном исчислении предикатов первого порядка и, следовательно, выводимы без сечений в генценовской системе **LK**.

Мы будем говорить, что „секвенция $\Gamma', \Delta'\to b^{\tau 11}\overset{2}{=}b^\tau$ выводима“, если для некоторых конечных подпоследовательностей Γ^* и Δ^* последовательностей Γ' и Δ' соответственно выводима секвенция $\Gamma^*, \Delta^*\to b^{\tau 11}\overset{2}{=}b^\tau$.

Лемма 22.3. *Следующие секвенции выводимы в* **LK**:

1) $\Gamma', \Delta'\to b^{\tau 11}=b^\tau$, *где* $b^{\tau 1}=b^{\tau 2}$ *является сокращением для* $b^{\tau 1}\overset{2}{=}b^{\tau 2}$ *и* $a^{\tau 1}=a^{\tau 2}$ *является сокращением для* $a^{\tau 1}\overset{1}{=}a^{\tau 2}$;
2) $\Gamma', \Delta'\to b^{\tau 22}=b^\tau$;
3) $\Gamma', \Delta'\to a^{\tau 11}=a^\tau$;
4) $\Gamma', \Delta'\to a^{\tau 22}=a^\tau$.

Доказательство. Очевидно, выводима секвенция $\Gamma', F(a^{\tau 1}, b^{\tau 11}), F(a^{\tau 1}, b^\tau)\to b^{\tau 11}=b^\tau$. Отсюда легко следует 1). Выводимость секвенций 2), 3) и 4) доказывается аналогично.

Лемма 22.4. *Следующие секвенции выводимы в* **LK**:

1) $\Gamma', \Delta', b^{\tau}=b^{\tau 12}\to a^{\tau 1}=a^{\tau 2}$;

2) $\Gamma'\,\Delta', a^{\tau}=a^{\tau 12}\to b^{\tau 1}=b^{\tau 2}$.

Доказательство. 1) Из формул $G(a^{\tau 2}, b^{\tau})$, $G(a^{\tau 1}, b^{\tau 12})$, последней формулы в Γ с переменными $a^{\tau 2}, a^{\tau 1}, b^{\tau}, b^{\tau 12}$ вместо x, y, u, v соответственно и из $b^{\tau}=b^{\tau 12}$ следует, что $a^{\tau 1}=a^{\tau 2}$.

Лемма 22.5. *Следующие секвенции выводимы в* **LK**:

1) $\Gamma', \Delta', b^{\tau i 1}=b^{\tau i 2}\to a^{\tau 1}=a^{\tau 2}\ (i=1, 2)$;

2) $\Gamma', \Delta', a^{\tau i 1}=a^{\tau i 2}\to b^{\tau 1}=b^{\tau 2}\ (i=1, 2)$.

Доказательство. При гипотезах Γ' и Δ' имеет место $b^{\tau 11}=b^{\tau 12}\to b^{\tau}=b^{\tau 12}\to a^{\tau 1}=a^{\tau 2}$ (в силу лемм 22.3 и 22.4). В остальных случаях доказательство аналогично.

Лемма 22.6. *Следующая секвенция выводима в* **LK**:

$$\Gamma', \Delta', b^{\tau 1}=b^{\tau 2}\to b^{1}=b^{2}.$$

Доказательство. Применяем индукцию по длине τ и используем лемму 22.5.

Лемма 22.7. *Следующие секвенции выводимы в* **LK**:

1) $\Gamma', \Delta', b^1=b^2\to G(a, b^1)$;

2) $\Gamma', \Delta', b^1<b^2\to a^{12}<a$, *где* $b^{\tau 1}<b^{\tau 2}$ *и* $a^{\tau 1}<a^{\tau 2}$ — *сокращения для* $b^{\tau 1}\overset{2}{<}b^{\tau 2}$ *и* $a^{\tau 1}\overset{1}{<}a^{\tau 2}$ *соответственно*;

3) $\Gamma', \Delta', b^2<b^1\to a^{21}<a$.

Доказательство. Убеждаемся, что выводимы следующие секвенции:

1) $\Gamma', G(a, b^2), b^1=b^2\to G(a, b^1)$;

2) $\Gamma', b^1<b^2, G(a, b^2), G(a^{12}, b^1)\to a^{12}<a$;

3) $\Gamma', b^2<b^1, F(a^{21}, b^2), F(a, b^1)\to a^{21}<a$.

Лемма 22.8. *Следующие секвенции выводимы в* **LK**:

1) $\Gamma', \Delta', b^{\tau 1}=b^{\tau 2}\to G(a, b^1)$;

2) $\Gamma', \Delta', b^{\tau 1}<b^{\tau 2}\to a^{\tau 12}<a^{\tau}$;

3) $\Gamma', \Delta', b^{\tau 2}<b^{\tau 1}\to a^{\tau 21}<a^{\tau}$.

Доказательство. Выводимость секвенции 1) следует из леммы 22.6 и из п. 1) леммы 22.7. Доказательство пп. 2) и 3) проводится аналогично доказательству леммы 22.7.

Определение 22.9. (i) $R^0(\tau)$ означает, что $b^{\tau 1}=b^{\tau 2}$;

(ii) $R^1(\tau)$ означает, что $b^{\tau 1}<b^{\tau 2}$;

(iii) $R^2(\tau)$ означает, что $b^{\tau 2}<b^{\tau 1}$;

(iv) $T_0=\{\tau\in T\mid \tau$ имеет четную длину$\}$.

Лемма 22.10. *Для всякого отображения* $i\colon T_0\to\{0, 1, 2\}$ *выводима без сечений следующая секвенция*:

$$\{R^{i_\tau}(\tau)\}_{\tau\in T_0}, \Gamma', \Delta'\to\bigwedge_n t_{n+1}\overset{1}{<}t_n,\ G(a, b^1),$$

где t_n — *некоторый элемент множества* D *с индексом длины* 2.

Доказательство. Это следует из леммы 22.8.

Лемма 22.11. *Следующая секвенция выводима без сечений*:

$$\Gamma, \Delta', \forall x_0x_1\ldots\neg\bigwedge_n(x_{n+1}\overset{1}{<}x_n)\to G(a, b^1).$$

Доказательство. Это следует из леммы 22.10, поскольку в Γ содержится формула $\forall x\forall y\,(x\overset{2}{<}y\vee x\overset{2}{=}y\vee y\overset{2}{<}x)$.

Теорема 22.12. *Следующая секвенция выводима без сечений*:

$$\Gamma, \Delta, \forall x_0x_1\ldots\neg\bigwedge_n(x_{n+1}\overset{1}{<}x_n), F(a, b)\to G(a, b),$$

где Δ *состоит из формул* $\forall x\exists yF(x, y)$, $\forall x\exists yF(y, x)$, $\forall x\exists yG(x, y)$ *и* $\forall x\exists yG(y, x)$.

Доказательство. Возьмем переменную b^1 вместо b и определим высоты $h(a^{\tau})$ и $h(b^{\tau'})$ как длины последовательностей τ и τ' соответственно. Далее применим лемму 22.11.

Теперь мы введем новое правило сечения, которое больше подходит для инфинитарных языков, чем прежнее. Как мы покажем, новое правило является обобщением прежнего.

Определение 22.13 (правило обобщенного сечения). Пусть $\Gamma\to\Delta$ — секвенция и $\mathcal{F}$ — некоторое множество формул. Пусть $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ обозначает разбиение множества $\mathcal{F}$ (т. е. $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2=\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ пусто). Допустим, что для произвольного разбиения $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ множества $\mathcal{F}$ существует пара множеств $\Phi\subseteq\mathcal{F}_1$ и $\Psi\subseteq\mathcal{F}_2$, таких, что секвенция $\Phi, \Gamma\to\Delta, \Psi$ имеет полувывод. Тогда *правило обобщенного сечения* (о. с.) позволяет нам вывести секвенцию $\Gamma\to\Delta$. Это правило можно выразить следующим образом:

$$\text{о. с.}\ \frac{\Phi, \Gamma\to\Delta, \Psi\ \text{для всех разбиений}\ (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\Gamma\to\Delta}.$$

Предложение 22.14. (1) *Обычное правило сечения является частным случаем правила о. с.*

(2) *Допустимым является следующее правило вывода:*

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\tilde{\Gamma} \to \tilde{\Delta},}$$

где $\tilde{\Gamma}$ *и* $\tilde{\Delta}$ *получаются из* Γ *и* Δ *соответственно заменой некоторых формул их алфавитными вариантами.*

(3) *Допустим, что некоторые (возможно, все) верхние секвенции некоторого обобщенного сечения получены опять же применением правила о. с. Тогда мы можем видоизменить вывод так, чтобы нижняя секвенция получалась в результате одного применения правила о. с.*

(4) *В системах с однородными кванторами правило о. с. является допустимым правилом вывода.*

(5) *Правило о. с. эквивалентным образом можно выразить в такой форме:*

$$\frac{\Phi, \Gamma' \to \Delta', \Psi \text{ для всех разбиений } (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\Gamma \to \Delta,}$$

где $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta' \subseteq \Delta$ *зависят от разбиения* $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, *а* Φ *и* Ψ *имеют такой же смысл, как и раньше.*

Доказательство. (1) Рассмотрим какое-нибудь сечение

$$\frac{\Gamma \to \Delta, D_\mu \text{ для всех } \mu < \lambda; \{D_\mu\}_{\mu<\lambda}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda.}$$

Сначала мы из верхних секвенций применением слабого правила получим секвенции $\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, D_\mu$ и $\{D_\mu\}_{\mu<\lambda}, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda$. Пусть $\mathcal{F}$ есть $\{D_\mu\}_{\mu<\lambda}$, и пусть $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ — некоторое разбиение $\mathcal{F}$.

Случай 1. Множество $\mathcal{F}_2$ непусто. Тогда возьмем в качестве Φ пустое множество, а в качестве Ψ — множество $\{D_\mu\}$, где D_μ — первая формула в $\mathcal{F}_2$.

Случай 2. Множество $\mathcal{F}_2$ пусто. Тогда в качестве Φ возьмем $\mathcal{F}_1$, которое совпадает с $\mathcal{F}$, а в качестве Ψ — пустое множество.

Для любой из таких пар (Φ, Ψ) секвенция $\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi$ является верхней секвенцией в рассматриваемом сечении. По правилу о. с. получаем

$$\frac{\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi \text{ для всех определенных выше пар } (\Phi, \Psi)}{\Gamma \to \Delta}.$$

(2) Покажем, что, если секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима, можно вывести и секвенцию $\tilde{\Gamma} \to \tilde{\Delta}$, где $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Delta}$ получаются из Γ и Δ соответственно простым переименованием некоторых связанных переменных. Если $\tilde{A}$ — алфавитный вариант произвольной формулы A, то легко выводится формула $A \equiv \tilde{A}$. Если секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима, то выводима и секвенция $\{A_\lambda \equiv \tilde{A}_\lambda\}_{\lambda<\mu}, \tilde{\Gamma} \to \tilde{\Delta}$ для некоторых A_λ и $\tilde{A}_\lambda$. Отсюда и из секвенций $\to A_\lambda \equiv \tilde{A}_\lambda$ для всех $\lambda < \mu$ мы получаем по правилу о. с. секвенцию $\tilde{\Gamma} \to \tilde{\Delta}$.

(3) Пусть I — рассматриваемое обобщенное сечение

$$\frac{\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi \text{ для всех подходящих пар } (\Phi, \Psi)}{\Gamma \to \Delta}.$$

Доказательство проводится трансфинитной индукцией по сложности подвывода, оканчивающегося секвенцией $\Gamma \to \Delta$. Допустим, в качестве предположения индукции, что выше I вдоль любой нити секвенций существует не более одного сечения. Пусть $\{(\Phi_\mu, \Psi_\mu)\}_{\mu<\mu_0}$ — перечисление всех пар (Φ, Ψ) в I, и пусть $\mathcal{F}$ — множество всех высекаемых формул. Пусть S_μ обозначает секвенцию $\Phi_\mu, \Gamma \to \Delta, \Psi_\mu$. Пусть $\{I_\iota^\mu\}_{\iota<\nu_\mu}$ — перечисление всех сечений, расположенных выше секвенции S_μ, и пусть для каждой пары (μ, ι) $\mathcal{F}_\iota^\mu$ есть множество высекаемых формул сечения I_ι^μ. Пусть $\{(\Phi_\gamma^{\mu,\iota}, \Psi_\gamma^{\mu,\iota})\}_{\gamma<\delta_\iota^\mu}$ — перечисление пар множеств формул, соответствующих сечению I_ι^μ, а $\Pi_\iota^\mu \to \Lambda_\iota^\mu$ — нижняя секвенция этого сечения.

Для каждого сечения I_ι^μ и для всякого $\gamma < \delta_\iota^\mu$ применим к секвенции $\Phi_\gamma^{\mu,\iota}, \Pi_\iota^\mu \to \Lambda_\iota^\mu, \Psi_\gamma^{\mu,\iota}$ слабое структурное правило:

$$\frac{\Phi_\gamma^{\mu,\iota}, \Pi_\iota^\mu \to \Lambda_\iota^\mu, \Psi_\gamma^{\mu,\iota}}{\Pi_\iota^\mu, \Phi_\gamma^{\mu,\iota} \to \Psi_\gamma^{\mu,\iota}, \Lambda_\iota^\mu.}$$

Затем для каждой комбинации ординалов γ, т. е. $(\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^\iota, \ldots)$, $\gamma^\iota < \delta_\iota^\mu$, копируем (см. определение 2.8 (6)) часть первоначального вывода от секвенции $\Pi_\iota^\mu \to \Lambda_\iota^\mu$ до секвенции S_μ, начиная с полученной выше секвенции $\Pi_\iota^\mu, \Phi_{\gamma^\iota}^{\mu,\iota} \to \Phi_{\gamma^\iota}^{\mu,\iota}, \Lambda_\iota^\mu$ вместо $\Pi_\iota^\mu \to \Lambda_\iota^\mu$. Мы получим секвенцию

$$(*) \qquad \Phi_\mu, \Gamma, \{\Phi_{\gamma^\iota}^{\mu,\iota}\}_{\iota<\nu_\mu} \to \{\Psi_{\gamma^\iota}^{\mu,\iota}\}_{\iota<\nu_\mu}, \Delta, \Psi_\mu$$

для любых μ и комбинаций $(\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^\iota, \ldots)$. Обозначим такую секвенцию через $S_\mu(\{\gamma^\iota\}_{\iota<\nu_\mu})$.

Теперь рассмотрим множество формул $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \bigcup_{\mu,\iota} \mathcal{F}_\iota^\mu$ и произвольное его разбиение, скажем на $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Найдутся $\mu < \mu_0$ и $\{\gamma^\iota\}_{\iota<\nu_\mu}$, такие, что $\Phi_\mu \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}$, $\Psi_\mu \subseteq \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}$, $\Phi_{\gamma^\iota}^{\mu,\iota} \subseteq$

$\subseteq \mathscr{F}^{\mu}_{\iota} \cap \mathscr{F}_1$ и $\Psi^{\mu,\iota}_{\gamma^{\iota}} \subseteq \mathscr{F}^{\mu}_{\iota} \cap \mathscr{F}_2$, так как $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ задают разбиения множеств $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}^{\mu}_{\iota}$. Положим

$$\Phi = \Phi_{\mu} \cup \bigcup_{\iota<\nu_{\mu}} \Phi^{\mu,\iota}_{\gamma^{\iota}}, \quad \Psi = \Psi_{\mu} \cup \bigcup_{\iota<\nu_{\mu}} \Psi^{\mu,\iota}_{\gamma^{\iota}}.$$

Очевидно, что $\Phi \subseteq \mathscr{F}_1$, $\Psi \subseteq \mathscr{F}_2$ и что $\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi$ есть секвенция вида (*). Выше нее нет сечений. Поскольку это верно для каждого разбиения множества $\mathscr{F}_0$, мы получаем

$$\text{о. с.}\ \frac{\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi \text{ для всех подходящих пар } (\Phi, \Psi)}{\Gamma \to \Delta.}$$

(4) Это утверждение легко следует из теоремы о полноте однородной системы (которая будет доказана в теореме 22.17) и того факта, что при применении правила о.с. мы из истинных секвенций получаем истинные.

Утверждение (5) очевидно.

Определение 22.15. Пусть L — инфинитарный язык. Структура $\langle D, \phi\rangle$ для языка L, интерпретация $\mathfrak{J} = (\langle D, \phi\rangle, \phi_0)$ и отношения „формула A языка L выполняется в интерпретации $\mathfrak{J}$“, „формула A истинна в структуре $\langle D, \phi\rangle$“, и аналогичные отношения для секвенций определяются так же, как в определении 8.1.

Предложение 22.16 (непротиворечивость; Маехара — Такеути). *Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная структура для языка* L. *Тогда всякая выводимая секвенция истинна в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Для каждой формулы вида $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$, в которой $\boldsymbol{x}$ имеет длину α и $\boldsymbol{a}$ — в точности все свободные переменные в A, и для всякого $\gamma < \alpha$ мы введем *функцию Сколема* $g^{\gamma}_{A}(\boldsymbol{a})$ и следующим образом определим ее интерпретацию в $\mathscr{A}$:

Если формула $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ выполняется в $\mathscr{A}$ при оценке ϕ_0, то значения этих g^{γ}_{A} должны быть такими, чтобы выполнялась формула

$$A(\boldsymbol{g}^{<\alpha}_{A}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}),$$

где $\boldsymbol{g}^{<\alpha}_{A}(\boldsymbol{a})$ обозначает последовательность $g^{0}_{A}(\boldsymbol{a}), \ldots, g^{\gamma}_{A}(\boldsymbol{a}), \ldots$ $(\gamma < \alpha)$. Пусть 0 — некоторый элемент области структуры $\mathscr{A}$. Если формула $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ не выполняется при оценке ϕ_0 в $\mathscr{A}$, то все $g^{\gamma}_{A}(\boldsymbol{a})$ интерпретируются элементом 0.

Пусть P — некоторый вывод. Все его собственные переменные мы располагаем в виде вполне упорядоченной последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_{\beta}, \ldots$ таким образом, чтобы $h(a_{\beta}) \leqslant h(a_{\gamma})$, если $\beta < \gamma$. Термы t_{β} определяем трансфинитной индукцией по β. Предполагая, что $\boldsymbol{t}_{<\beta}$ уже определено, мы определяем t_{β}

следующим образом. Пусть $\forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ (или $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$) и $A(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})$ — соответственно главная и боковая формулы для переменной a_{β}, и пусть порядок a_{β} относительно этой главной формулы равен γ, т. е. пусть a_{β} совпадает с d_{γ}. Для каждой переменной b_{ν} через s_{ν} обозначим уже определенное t_{γ}, для которого b_{ν} совпадает с a_{γ}, если b_{ν} — собственная переменная; в противном случае пусть это будет сама b_{ν}. Тогда t_{β} определяется как $g^{\gamma}_{\neg A}(\mathrm{s})$ (или $g^{\gamma}_{A}(\mathrm{s})$). В силу ограничения (I) на собственные переменные это определение не зависит от выбора $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Пусть P' — результат подстановки в P терма t_{β} вместо a_{β} для всех β. Нижняя секвенция в P' совпадает с заключительной секвенцией вывода P, так как она не содержит собственных переменных.

Для произвольной оценки на D всякая секвенция S фигуры P' выполняется в структуре $\mathscr{A}$, где все g^{γ}_{A} интерпретируются так, как указано выше. Это можно доказать трансфинитной индукцией по сложности фигуры, расположенной в P над S. Как следствие получаем, что это верно и для заключительной секвенции в P, так как она не содержит собственных переменных. Мы разберем только случаи, когда последним в P применяется правило $\exists$-слева или правило $\forall$-справа (остальные случаи очевидны).

1) Правило $\exists$-слева. Соответствующая часть фигуры P' имеет вид

$$\frac{\ldots, A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s}), \ldots, \Gamma \to \Delta}{\ldots, \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \ldots, \Gamma \to \Delta,}$$

где u_{γ} есть $g^{\gamma}_{A}(\boldsymbol{s})$. Достаточно показать, что секвенция

$$\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \to A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s})$$

выполняется в $\mathscr{A}$, но это следует из определения интерпретации функций g^{γ}_{A}.

2) Правило $\forall$-справа. Соответствующая часть P' имеет вид

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \ldots, A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}), \ldots}{\Gamma \to \Delta, \ldots, \forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \ldots,}$$

где v_{γ} есть $g^{\gamma}_{\neg A}(\boldsymbol{s})$. Поэтому достаточно показать, что секвенция

$$A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \to \forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$$

выполняется в $\mathscr{A}$. Это следует из того, что выполняется секвенция

$$\exists \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \to \neg A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}),$$

что в свою очередь вытекает из определения функций $g^{\gamma}_{\neg A}$.

Теперь мы докажем теорему о полноте вместе с теоремой об устранении сечений для произвольной логики с однородными кванторами. Метод доказательства в основном такой же, как в доказательстве теоремы о полноте в гл. I.

В качестве следствия теоремы о полноте (теорема 22.17) и предложения 22.16 мы получаем теорему об устранении сечений: *всякая выводимая секвенция имеет вывод без сечений.*

Теорема 22.17 (Маехара—Такеути). *Каждая секвенция, истинная во всякой непустой области, выводима без правила сечения.*

Доказательство. Пусть S — произвольная секвенция, и пусть D_0 — произвольное непустое множество, содержащее все свободные переменные и индивидные константы секвенции S. Пусть D — замыкание множества D_0 функциональными символами g_A^γ и $\bar{g}_A^\gamma$ для всех формул A, т. е. пусть D получается из D_0 с помощью всех g_A^γ и $\bar{g}_A^\gamma$. Здесь $\bar{g}_A^\gamma$ обозначает $g_{\neg A}^\gamma$.

Дерево $T(S)$ мы определяем поэтапно.

Этап 0. Записываем секвенцию S.

Этап $n+1$ разобьем на 5 случаев.

(1) $n+1 \equiv 1 \pmod 5$. Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ содержит некоторую формулу, внешним логическим символом которой является $\neg$, мы запишем над $\Pi \to \Lambda$ секвенцию

$$\{D_\mu\}_{\mu<\delta},\ \Pi' \to \Lambda',\ \{C_\lambda\}_{\lambda<\gamma},$$

где $\{\neg C_\lambda\}_{\lambda<\gamma}$ и $\{\neg D_\mu\}_{\mu<\delta}$ — последовательности всех формул в Π и Λ соответственно, внешний логический символ которых есть $\neg$, а Π' и Λ' получаются соответственно из Π и Λ удалением из них всех формул $\neg C_\lambda$ и $\neg D_\mu$.

(2) $n+1 \equiv 2 \pmod 5$. Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ содержит некоторую формулу, внешний логический символ которой есть $\wedge$, мы запишем над $\Pi \to \Lambda$ секвенции

$$\{C_{\mu,\lambda}\}_{\lambda<\gamma_\mu,\,\mu<\gamma},\ \Pi' \to \Lambda',\ \{D_{\sigma,\rho_\sigma}\}_{\sigma<\delta}$$

для всех последовательностей $\{\rho_\sigma\}_{\sigma<\delta}$, таких, что $\rho_\sigma < \nu_\sigma$, где $\left\{\bigwedge_{\lambda<\gamma_\mu} C_{\mu,\lambda}\right\}_{\mu<\gamma}$ и $\left\{\bigwedge_{\rho<\nu_\sigma} D_{\sigma,\rho}\right\}_{\sigma<\delta}$ — последовательности всех формул из Π и Λ соответственно, внешним логическим символом которых является $\wedge$, а Π' и Λ' получаются из Π и Λ соответственно удалением всех формул $\bigwedge_{\lambda<\gamma_\mu} C_{\mu,\lambda}$ и $\bigwedge_{\rho<\nu_\sigma} D_{\sigma,\rho}$.

(3) $n+1 \equiv 3 \pmod 5$. Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ содержит некоторую формулу, внешний логический символ которой есть $\vee$, мы запишем над $\Pi \to \Lambda$ секвенции

$$\{C_{\mu,\lambda_\mu}\}_{\mu<\gamma},\ \Pi' \to \Lambda',\ \{D_{\sigma,\rho}\}_{\rho<\nu_\sigma,\,\sigma<\delta}$$

для всех последовательностей $\{\lambda_\mu\}_{\mu<\gamma}$, таких, что $\lambda_\mu < \gamma_\mu$, где $\left\{\bigvee_{\lambda<\gamma_\mu} C_{\mu,\lambda}\right\}_{\mu<\gamma}$ и $\left\{\bigvee_{\rho<\nu_\sigma} D_{\sigma,\rho}\right\}_{\sigma<\delta}$ — последовательности всех формул из Π и Λ соответственно, внешним логическим символом которых является $\vee$, а Π' и Λ' получаются из Π и Λ соответственно удалением всех формул $\bigvee_{\lambda<\gamma_\mu} C_{\mu,\lambda}$ и $\bigvee_{\rho<\delta_\sigma} D_{\sigma,\rho}$.

(4) $n+1 \equiv 4 \pmod 5$. Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ содержит некоторую формулу, внешний логический символ которой есть $\forall$, мы запишем над $\Pi \to \Lambda$ секвенцию

$$\{A_\lambda(\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu})\}_{\lambda<\gamma,\,\mu},\ \Pi' \to \Lambda',\ \{B_\rho(\boldsymbol{u}_{\rho,\sigma})\}_{\rho<\delta,\,\sigma},$$

где $\{\forall \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\delta}$ и $\{\forall \boldsymbol{y}_\rho B_\rho(\boldsymbol{y}_\rho)\}_{\rho<\delta}$ — последовательности всех формул из Π и Λ соответственно, внешним логическим символом которых является $\forall$, а Π' и Λ' получаются из Π и Λ соответственно удалением всех формул $\forall \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ и $\forall \boldsymbol{y}_\rho B_\rho(\boldsymbol{y}_\rho)$. Кроме того, $\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}$ пробегает все последовательности, составленные из элементов множества D, которые имеют ту же длину, что и $\boldsymbol{x}_\lambda$.

Если $\boldsymbol{u}_{\rho,\sigma}$ есть последовательность $u_{\rho,\sigma,0}, u_{\rho,\sigma,1}, \ldots, u_{\rho,\sigma,\xi}, \ldots$, $\xi < \nu$, причем ν — длина последовательности $\boldsymbol{y}_\rho$, то $u_{\rho,\sigma,\xi}$ обозначает $\bar{g}^\xi_{A_\rho}(\boldsymbol{v}_\rho)$, где $\xi < \nu$ и $\boldsymbol{v}_\rho$ — последовательность свободных переменных в $B_\rho(\boldsymbol{y}_\rho)$.

(5) $n+1 \equiv 0 \pmod 5$. Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ содержит некоторую формулу, внешний логический символ которой есть $\exists$, мы запишем над $\Pi \to \Lambda$ секвенцию

$$\{A_\lambda(\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu})\}_{\gamma<\lambda,\,\mu},\ \Pi' \to \Lambda',\ \{B_\rho(\boldsymbol{u}_{\rho,\sigma})\}_{\rho<\delta,\,\sigma},$$

где $\{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}$ и $\{\exists \boldsymbol{y}_\rho B_\rho(\boldsymbol{y}_\rho)\}_{\rho<\delta}$ — последовательности всех формул из Π и Λ соответственно, внешним логическим символом которых является $\exists$, а Π' и Λ' получаются из Π и Λ соответственно удалением формул $\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ и $\exists \boldsymbol{y}_\rho A_\rho(\boldsymbol{y}_\rho)$. Здесь $\boldsymbol{u}_{\rho,\sigma}$ пробегает все последовательности той же длины, что и $\boldsymbol{y}_\rho$, а если $\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}$ есть $t_{\lambda,\mu,0}, t_{\lambda,\mu,1}, \ldots, t_{\lambda,\mu,\xi}, \ldots, \xi < \eta$, где η — длина последовательности $\boldsymbol{x}_\lambda$, то $t_{\lambda,\mu,\xi}$ обозначает $g^\xi_{A_\lambda}(\boldsymbol{s}_\lambda)$ для $\xi < \eta$, где $\boldsymbol{s}_\lambda$ — последовательность свободных переменных в $A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$.

Пусть S_1 и S_2 — некоторые секвенции в $T(S)$. Секвенция S_2 называется непосредственным предком секвенции S_1, если S_2 — одна из секвенций, записываемых над S_1 в результате применения к S_1 одного из пп. (1) — (5). Ветвью дерева $T(S)$ называется произвольная последовательность секвенций $S = S_0, S_1, \ldots$ (возможно, бесконечная), такая, что S_{n+1} — непосредственный предок секвенции S_n при всех n.

Для всякой секвенции $\Gamma \to \Delta$ возможен один из следующих двух случаев:

Случай 1. В каждой ветви дерева $T(\Gamma \to \Delta)$ существует по крайней мере одна секвенция вида

$$\Gamma_1,\ D,\ \Gamma_2 \to \Delta_1,\ D,\ \Delta_2.$$

В этом случае, видоизменяя подходящим образом дерево $T(S)$ и рассматривая элементы множества $D - D_0$ как свободные переменные, мы можем построить некоторый не содержащий сечений вывод секвенции $\Gamma \to \Delta$. (Доказательство предоставляется читателю.)

Случай 2. Найдется некоторая ветвь B дерева $T(\Gamma \to \Delta)$, не содержащая секвенций вида

$$\Gamma_1,\ D,\ \Gamma_2 \to \Delta_1,\ D,\ \Delta_2.$$

В этом случае мы утверждаем, что существует интерпретация, в которой истинна всякая формула, входящая в Γ, а всякая формула, входящая в Δ, ложна. В оставшейся части доказательства мы фиксируем такую ветвь B и рассматриваем только формулы и секвенции, входящие в B, так что „секвенция" означает уже „секвенция в B".

Сначала заметим, что имеет место следующая

Лемма 22.18. (1) *Если формула $\neg A$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции, то формула A входит в сукцедент (антецедент) некоторой секвенции.*

(2) *Если формула $\bigwedge_{\lambda<\beta} A_\lambda$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции, то для всякого (некоторого) $\lambda < \beta$ формула A_λ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции.*

(3) *Если формула $\bigvee_{\lambda<\beta} A_\lambda$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции, то для некоторого (всякого) $\lambda < \beta$ формула A_λ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции.*

(4) *Если формула $\forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ входит в антецедент некоторой секвенции, то для всякой последовательности $\boldsymbol{t}$ элементов множества D, имеющей ту же длину, что и $\boldsymbol{x}$, формула $A(\boldsymbol{t})$ входит в антецедент некоторой секвенции. Если же формула $\forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ входит в сукцедент некоторой секвенции, то формула $A(\boldsymbol{t})$ входит в сукцедент некоторой секвенции, где t_γ есть $\bar{g}^\gamma_A(\boldsymbol{s})$, а $\boldsymbol{s}$ — последовательность свободных переменных в $A(\boldsymbol{x})$.*

(5) *Если формула $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ входит в антецедент некоторой секвенции, то формула $A(\boldsymbol{t})$ входит в антецедент некоторой секвенции, где t_γ есть $g^\gamma_A(\boldsymbol{s})$, а $\boldsymbol{s}$ — последовательность свободных переменных в $A(\boldsymbol{x})$. Если же формула $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ входит в сукцедент некоторой секвенции, то для произвольной последовательности $\boldsymbol{t}$ элементов множества D, имеющей ту же длину, что и $\boldsymbol{x}$, формула $A(\boldsymbol{t})$ входит в сукцедент некоторой секвенции.*

(6) *Если какая-то формула входит в антецедент некоторой секвенции, то она не входит в сукцедент никакой секвенции.*

Доказательство. Утверждения (1) — (5) легко следуют из определения дерева $T(S)$. Утверждение (6) можно доказать с помощью (1) — (5) трансфинитной индукцией по сложности данной формулы.

Теперь ясно, как следует определить отображение ϕ: для каждого терма $t \in D$ положим $\phi t = t$. Для всякой предикатной константы R формула $R(\boldsymbol{t})$ выполняется в $\langle D, \phi\rangle$, если и только если она входит в антецедент некоторой секвенции. Теорема 22.17 доказана.

Заметим, что в доказательстве теоремы о полноте нам нужна последовательность новых свободных переменных $\boldsymbol{a}$ для каждой подформулы вида $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ заключительной секвенции. Более того, для всякой такой последовательности $\boldsymbol{a}$ нам нужна другая свободная переменная — своя для каждого примера $A(\boldsymbol{a})$. Поэтому понятно, почему нам нужно иметь в наличии такой большой запас доступных свободных переменных или же иметь возможность переименовать имеющиеся свободные переменные.

Вкратце рассмотрим системы с равенством.

Определение 22.19. Инфинитарную логику с однородными кванторами и с равенством мы определяем следующим образом: выделяем некоторую двухместную предикатную константу $=$ и добавляем следующие правила вывода к уже имеющимся:

1) *Первое правило для равенства.* Пусть $\Gamma^{(\boldsymbol{a})}$ обозначает последовательность формул Γ, в которой отмечены некоторые вхождения $\boldsymbol{a}$. Первое правило для равенства имеет вид

$$\frac{\Gamma^{(\boldsymbol{a})} \to \Delta^{(\boldsymbol{a})}}{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b},\ \Gamma^{(\boldsymbol{b})} \to \Delta^{(\boldsymbol{b})}}, \qquad \frac{\Gamma^{(\boldsymbol{a})} \to \Delta^{(\boldsymbol{a})}}{\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a},\ \Gamma^{(\boldsymbol{b})} \to \Delta^{(\boldsymbol{b})}}.$$

Здесь $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ обозначает последовательность $\{a_\lambda = b_\lambda\}_{\lambda<\gamma}$, а $\Gamma^{(\boldsymbol{b})} \to \Delta^{(\boldsymbol{b})}$ обозначает результат замены в $\Gamma^{(\boldsymbol{a})} \to \Delta^{(\boldsymbol{a})}$ отмеченных вхождений a_λ на b_λ для всех $\lambda < \gamma$.

2) *Второе правило для равенства.* Пусть Σ — произвольное множество свободных переменных, и пусть $\tilde{\Sigma}$ — множество всех атомарных формул $a = b$, таких, что a и b принадлежат Σ. Пусть (Φ, Ψ) — произвольное разбиение множества $\tilde{\Sigma}$, т. е. $\Phi \cup \Psi = \tilde{\Sigma}$ и $\Phi \cap \Psi = \varnothing$. Второе правило для равенства имеет вид

$$\frac{\Phi,\ \Gamma \to \Delta,\ \Psi \ \text{ для всех разбиений } (\Phi, \Psi) \text{ множества } \tilde{\Sigma}}{\Gamma \to \Delta.}$$

Для рассматриваемой системы справедливы аналоги предложений 22.16 и 22.17. Доказательства можно получить как частные случаи доказательств соответствующих теорем, приведенных в следующем параграфе.

Задача 22.20. Рассмотрим некоторый конечный язык L первого порядка, имеющий K индивидных констант, где K — некоторый кардинал. Теорема Лёвенгейма — Сколема формулируется следующим образом: пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество L-формул; если $\mathcal{F}$ имеет модель, то $\mathcal{F}$ имеет модель мощности K. Пусть L′ — инфинитарный однородный язык, являющийся расширением языка L (и потому L′ имеет по крайней мере K индивидных констант). Легко видеть, что теорему Лёвенгейма — Сколема можно синтаксически сформулировать следующим образом. Пусть $\Gamma \to \Delta$ — некоторая секвенция языка L, где длины последовательностей Γ и Δ меньше, чем K^+. Если в однородной системе выводима секвенция

$$\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_\xi \ldots \forall y \, (\bigvee_{\xi<K} y = x_\xi), \ \Gamma \to \Delta,$$

то в ней выводима и секвенция $\Gamma \to \Delta$.

Доказать теорему Лёвенгейма — Сколема в синтаксической форме.

[*Указание.* 1) Введем новые константы $\{w_\alpha\}_{\alpha<K}$, и пусть $L_0 = L \cup \{w_\alpha\}_{\alpha<K}$. Рассмотрим замкнутые L_0-формулы вида $\exists x F(x)$. Можно определить некоторую такую нумерацию (с повторениями) этих формул $\{\exists x F_\alpha(x)\}_{\alpha<K}$, что

(i) в $F_\alpha(x)$ не входит ни одна константа w_γ при $\gamma \geqslant \alpha$.

2) Пусть $\tilde{L} = L' \cup \{w_\alpha\}_{\alpha<K}$, и пусть $R(a)$ обозначает $\bigvee_{\alpha<K}(a = w_\alpha)$. Релятивизация формул (языка $\tilde{L}$) по R (релятивизация формулы A по R обозначается A^R) была определена в § 17: например, $(\exists \boldsymbol{y} A(\boldsymbol{y}))^R$ есть $\exists \boldsymbol{y} (\bigwedge_{\gamma<\delta} R(y_\gamma) \wedge A^R(\boldsymbol{y}))$, где $\boldsymbol{y}$ обозначает $\boldsymbol{y}_{<\delta}$.

3) Очевидно, что $R(w_\gamma)$ выводимо из всякого $\gamma < K$; следовательно, выводимо $(\exists \boldsymbol{x} \forall y (\bigvee_{\beta<K} y = x_\beta))^R$. Таким же методом, что и в теории релятивизации, которая была изложена в § 17 мы можем доказать следующее утверждение:

Пусть $\Pi \to \Lambda$ — какая-то секвенция языка L′. Пусть $\{b_i\}_{i<\beta}$ — последовательность всех свободных переменных в $\Pi \to \Lambda$. Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ выводима в однородной системе (в языке L′), то секвенция

$$\{R(b_i)\}_{i<\beta}, \ \Pi^R \to \Lambda^R$$

выводима в однородной системе с языком $\tilde{L}$, где Π^R получается из Π заменой всякой формулы A в Π на A^R; аналогично получается Λ^R.

4) Полувывод, удовлетворяющий ограничению (I) (см. стр. 217) на собственные переменные, назовем *квазивыводом* (в однородной системе).

Мы можем теперь потребовать, чтобы нумерация формул $\exists x F_\alpha(x)$, кроме указанного в 1) условия (i), удовлетворяла условию

(ii) Существует некоторое упорядоченное по типу ω подмножество множества $\{w_\alpha\}$, скажем $\Sigma = \{w_{\nu_0}, w_{\nu_1}, \ldots\}$, такое, что если Γ^* состоит из всех формул вида $\exists x F_\alpha(x) \supset F_\alpha(w_\alpha)$, где w_α не принадлежит Σ, то для каждой замкнутой формулы A языка L_0 найдется некоторый квазивывод, оканчивающийся секвенцией

$$\Gamma^* \to A \equiv A^R.$$

5) Предположим теперь, что секвенция

$$\exists \boldsymbol{x} \forall y \, (\bigvee_{\alpha<K} y = x_\alpha), \ \Gamma \to \Delta$$

выводима (в однородной системе). Тогда в силу 3) выводима секвенция

$$\{R(b_i)\}_{i<\mu}, \ \Gamma^R \to \Delta^R,$$

где $\{b_i\}_{i<\mu}$ — последовательность свободных переменных в Γ и Δ. Поэтому $\mu \leqslant \omega$. Отождествив b_i с w_{ν_i} в Σ, мы можем считать, что выводима секвенция

$$\{R(w_{\nu_i})\}_{i<\mu}, \ \Gamma^R \{w_{\nu_i}\}_{i<\mu} \to \Delta^R \{w_{\nu_i}\}_{i<\mu},$$

где $\Gamma^R\{w_{\nu_i}\}_{i<\mu}$ и $\Delta^R\{w_{\nu_i}\}_{i<\mu}$ получаются из Γ^R и Δ^R соответственно заменой b_i на w_{ν_i}.

6) Наконец, из 3), 4) и 5) следует, что секвенция

$$\Gamma^*, \ \Gamma\{w_{\nu_i}\} \to \Delta\{w_{\nu_i}\} \quad \text{или} \quad \Gamma^*, \ \Gamma \to \Delta$$

имеет квазивывод. Вспомним, что если $\exists x F(x) \supset F(w)$ принадлежит Γ^*, то w не принадлежит Σ. Рассматривая эти w как свободные переменные, мы получим секвенцию

$$\{\exists y (\exists x F(x) \supset F(y))\}, \ \Gamma \to \Delta,$$

причем формула $\exists y (\exists x F(x) \supset F(y))$ выводима для всякого F. Следовательно, применяя правило сечения, мы получаем $\Gamma \to \Delta$. Если свободные переменные выбирались тщательно, то можно утверждать, что выполнены ограничения (I) и (III) на собственные переменные. В квазивыводе секвенции $\{\exists y\,(\exists x F(x) \supset F(y))\}$, $\Gamma \to \Delta$ переменной w поставим в соответствие высоту r, где $\exists x F(x) \supset F(w)$ есть r-я формула в Γ^*; каждой собственной переменной в квазивыводе из (ii) в 4) поставим в соответствие высоту K, а каждой собственной переменной в выводе, оканчивающемся секвенцией $\{R(b_i)\}$, $\Gamma^R \to \Delta^R$, поставим в соответствие высоту K^+.]

Если нас интересует инфинитарная логика, стоящая ближе к логике первого порядка, можно ограничиться рассмотрением кванторов, которые действуют так же, как в конечном случае. Лопес-Эскобар описал такую систему, обозначив ее через $L_{\omega_1,\omega}$, и доказал для нее теорему о полноте и интерполяционную теорему. Формулировка этих теорем для $L_{\omega_1,\omega}$ не отличается от соответствующих формулировок для системы **LK**. Мы приведем эти результаты в виде задачи.

Задача 22.21 (Лопес-Эскобар). Язык $L_{\omega_1,\omega}$ представляет собой расширение языка системы **LK** и определяется следующим образом. Число констант произвольно, но арность каждой предикатной и каждой функциональной константы конечна. Число переменных счетно. Для простоты в качестве логических символов возьмем только $\neg$, $\bigwedge$ и $\forall$. Формулы определяются, как обычно: например, если A_i $(i < \omega)$ — последовательность формул, то $\bigwedge_{i<\omega} A_i$ — формула. Заметим, что квантор $\forall$ ведет себя так же, как в конечном случае. Секвенции состоят не более чем из счетного числа формул. Начальные секвенции и правила вывода те же, что и у системы **LK**, кроме слабого правила и правил для $\bigwedge$, которые теперь выглядят следующим образом:

$$\text{слабое правило: } \frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi \to \Lambda},$$

где каждая формула из Γ входит в Π, а каждая формула из Δ входит в Λ;

$$\text{правило } \bigwedge\text{-слева: } \frac{A_i,\ \Gamma \to \Delta \text{ для некоторого } i}{\bigwedge_{i<\omega} A_i,\ \Gamma \to \Delta};$$

$$\text{правило } \bigwedge\text{-справа: } \frac{\Gamma \to \Delta,\ A_i \text{ для всех } i}{\Gamma \to \Delta,\ \bigwedge_{i<\omega} A_i}.$$

(1) Доказать полноту этой системы.

(2) Доказать для этой системы интерполяционную теорему; а именно если формула $A \supset B$ выводима и A и B имеют по

крайней мере один общий предикатный символ, то найдется формула C языка $L_{\omega_1,\omega}$, все предикатные символы которой входят и в A и в B, такая, что выводимы $A \supset C$ и $C \supset B$.

(3) Показать, что допустимо следующее правило вывода:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\tilde{\Gamma} \to \tilde{\Delta}},$$

где $\tilde{\Gamma}$ получается из Γ заменой каждой формулы на один из ее алфавитных вариантов (возможно, на саму эту формулу); аналогично получается $\tilde{\Delta}$.

[*Указание* к (1). Непротиворечивость очевидна. Чтобы доказать собственно полноту, можно поступить следующим образом.

1) Если дана некоторая секвенция языка $L_{\omega_1,\omega}$, скажем S, то существует счетное число термов, получающихся из констант, входящих в S, и всех свободных переменных.

2) Пусть дана некоторая секвенция S. Определим S-подформулы так же, как и обычные подформулы формул из S, за исключением следующего случая: если $\forall x A(x)$ — некоторая S-подформула, то для всякого терма s, о котором говорится в 1), $A(s)$ — тоже S-подформула.

3) Существует счетное число S-подформул.

4) По данной секвенции S строим редукционное дерево $T(S)$. Можно считать, что существует счетное число свободных переменных, не входящих в S. Это вместе с построением дерева $T(S)$ гарантирует нам, что на каждом шаге будет оставаться счетное число неиспользованных свободных переменных. В силу 3) можно считать, что все S-подформулы пронумерованы индексами из ω. Дерево $T(S)$ определяем поэтапно (оно будет состоять из S-подформул).

Этап 0. Записываем секвенцию S.

Этап $n+1$. Пусть $\Gamma \to \Delta$ — некоторая верхняя секвенция.

Случай 1. $n+1 \equiv 1 \pmod 5$. Пусть $\{\neg A_i\}_{i=1}^m$ и $\{\neg B_j\}_{j=1}^l$ — все формулы в Γ и Δ соответственно, внешний логический символ которых есть $\neg$ и индексы которых в фиксированной нумерации S-подформул $\leqslant n+1$. Тогда запишем над $\Gamma \to \Delta$ секвенцию $\{B_j\}_{j=1}^l$, $\Gamma' \to \Delta'$, $\{A_i\}_{i=1}^m$, где Γ' получается из Γ удалением $\{\neg A_i\}_{i=1}^m$, а Δ' получается из Δ удалением $\{\neg B_j\}_{j=1}^l$.

Случай 2. $n+1 \equiv 2 \pmod 5$. Пусть $\{\bigwedge_{i<\omega} A_i^j\}_{j=1}^m$ — все формулы в Γ, внешний логический символ которых есть $\bigwedge$ и индексы которых $\leqslant n+1$. Тогда запишем над $\Gamma \to \Delta$ секвенцию

$$\{A_i^1\}_{i\leqslant n}, \ldots, \{A_i^m\}_{i\leqslant n}, \Gamma \to \Delta.$$

Случай 3. $n+1 \equiv 3 \pmod 5$. Пусть $\{\bigwedge_{i<\omega} A_i^j\}_{j=1}^m$ — все формулы в Δ, внешний логический символ которых есть $\bigwedge$ и индексы которых $\leqslant n+1$. Тогда запишем над $\Gamma\to\Delta$ секвенции

$$\Gamma\to\Delta',\ \{A^j_{i_j}\}^m_{j=1}$$

для всех комбинаций индексов $\{i_1, \ldots, i_m\}$.

Случай 4. $n+1\equiv 4 \pmod 5$. Пусть $\{\forall x_i A_i(x_i)\}^m_{i=1}$ — все формулы в Γ, внешний логический символ которых есть $\forall$ и индексы которых $\leqslant n+1$. Пусть $A_i(s^1_i), \ldots, A_i(s^{n+1}_i)$ — первые $n+1$ формул в нашей нумерации, являющиеся S-подформулами формулы $\forall x_i A_i(x_i)$. Запишем над $\Gamma\to\Delta$ секвенцию

$$\{A_i(s^j_i)\}^{j\leqslant n+1}_{i\leqslant m},\ \Gamma\to\Delta.$$

Случай 5. $n+1\equiv 0 \pmod 5$. Пусть $\{\forall x_i A_i(x_i)\}^m_{i=1}$ — все формулы в Δ, внешний логический символ которых есть $\forall$ и индексы которых $\leqslant n+1$. Пусть $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ — первые m свободных переменных, которые не использовались до сих пор. Запишем над $\Gamma\to\Delta$ секвенцию

$$\Gamma\to\Delta',\ \{A_i(a_{j_i})\}^m_{i=1}.$$

На любом этапе, если какая-то формула входит и в антецедент, и в сукцедент рассматриваемой секвенции, то останавливаемся.

5) Пусть $T(S)$ — дерево, определенное в п. 4).

Случай 1. Все ветви конечны. Тогда секвенция S выводима без правила сечения.

Случай 2. Существует некоторая бесконечная ветвь, скажем B. Пусть D — множество всех термов, удовлетворяющих условию, указанному в п. 1). Структуру с областью D и интерпретацию формул определяем обычным образом. Тогда формулы, входящие в антецедент ветви B, будут истинны, а формулы, входящие в сукцедент, ложны. Этим завершается доказательство утверждения (1).

Указание к (2). Из приведенного выше доказательства утверждения (1) следует, что всякая выводимая секвенция выводима и без сечений. Сформулировать интерполяционную теорему для секвенций. Рассматривать только не содержащие сечений выводы и доказать требуемый результат индукции по сложности выводов. Процедура доказательства в точности такая же, как для соответствующей теоремы, относящейся к системе **LK**.

Утверждение (3), очевидно, следует из полноты.]

Задача 22.22 (следствие теоремы Лопес-Эскобара). Допустим, что $\Gamma\to\Delta$ — некоторая выводимая секвенция языка $L_{\omega_1,\omega}$, а Γ и Δ — конечные последовательности. Тогда существует некоторый не содержащий сечений вывод секвенции $\Gamma\to\Delta$, в котором всякая секвенция состоит из конечного числа формул (хотя сам вывод может быть бесконечным).

Задача 22.23. Рассмотрим язык, состоящий из следующих символов:

Предикатная константа: $\in$.

Переменные: $x_0, x_1, \ldots, x_\mu, \ldots, \mu\in \mathrm{On}$.

Логические символы: $\neg$, $\bigwedge$, $\forall$.

Формулы определяются, как обычно. Атомарные формулы имеют вид $x\in y$. Если A — формула, то $\neg A$ — формула. Если A_i, $i<\lambda$, — последовательность формул, где λ — ординал, то $\bigwedge_{i<\lambda}A_i$ — формула. Если $A(\boldsymbol{y})$ — формула, где $\boldsymbol{y}$ — последовательность переменных, ни одна из которых не находится в области действия никакого квантора, то $\forall\boldsymbol{y}A(\boldsymbol{y})$ — формула.

Показать, что определение истинности для этого языка можно провести в некоторой системе теории множеств второго порядка, т. е. в теории ZF, пополненной кванторами второго порядка и некоторыми аксиомами выделения.

[*Указание.* Определение истинности строится так же, как и для **PA** в системе второго порядка. Сначала формальным объектам языка ставятся в соответствие некоторые множества. Множество, поставленное в соответствие формальному символу, назовем гёделизацией этого символа. Если A — формальное выражение, то его гёделизацию обозначим через $\ulcorner A\urcorner$. Например, $\ulcorner\in\urcorner=\langle 0, 0\rangle$, $\ulcorner x_i\urcorner=\langle 1, i\rangle$, $\ulcorner\neg\urcorner=\langle 3, 0\rangle$, $\ulcorner\wedge\urcorner=\langle 5, 0\rangle$, $\ulcorner\forall\urcorner=\langle 7, 0\rangle$, $\ulcorner x\urcorner=\langle 11, x\rangle$, где $\ulcorner x\urcorner$ — имя множества x, $\ulcorner x\in y\urcorner=\langle\ulcorner\in\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner y\urcorner\rangle$, $\ulcorner\bigwedge_{i<\lambda}A_i\urcorner=\langle\ulcorner\bigwedge\urcorner, \langle\ulcorner A_0\urcorner, \ldots, \ulcorner A_i\urcorner, \ldots\rangle\rangle$, $\ulcorner\forall\boldsymbol{y}A(\boldsymbol{y})\urcorner=\langle\ulcorner\forall\urcorner, \langle\ulcorner y_0\urcorner, \ulcorner y_1\urcorner, \ldots\rangle, \ulcorner A(\boldsymbol{y})\urcorner\rangle$. Мы можем затем формально определить понятия „A есть замкнутая формула“ ($\mathrm{cf}(\ulcorner A\urcorner)$) и „сложность формулы A“ ($\mathrm{cm}(\ulcorner A\urcorner)$ — некоторый ординал). Пусть α — свободная переменная второго порядка, и пусть μ — переменная, пробегающая ординалы. Так же как в случае **PA** мы строили формулу $F(\alpha, n)$ (см. определение 18.4), построим формулу $F(\alpha, \mu)$, утверждающую, что α — определение истинности для формул сложности $\leqslant\mu$. Относящаяся к $\forall\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{x})$ часть искомой формулы будет выглядеть так:

$$\forall^{\ulcorner}\forall\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{x})^{\urcorner}[\mathrm{cf}(\ulcorner\forall\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{x})\urcorner)\wedge\mathrm{cm}(\ulcorner\forall\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{x})\urcorner)\leqslant\mu\supset$$

$$\supset(\alpha(\ulcorner\forall\boldsymbol{x}A(\boldsymbol{x})\urcorner)\equiv\forall x\ ((x \text{ есть последовательность}$$

$$\langle x_0, x_1, \ldots\rangle, \text{ упорядоченная по типу } \lambda)\supset$$

$$\supset\alpha(\ulcorner A(x_0, x_1, \ldots)\urcorner)))].$$

Затем определяем $T(a) \Leftrightarrow_{df} \mathrm{cf}(a) \wedge \exists \phi\, (F(\phi, \mathrm{cm}(a)) \wedge \phi(a))$. Теперь надо доказать, что $T(\ulcorner A \urcorner) \equiv A$ для всякой замкнутой формулы A.]

Замечание. Задачу 22.23 можно обобщить на случай, когда имеются предикатные константы $p_0, p_1, \ldots$ и когда кванторы не однородны.

Далее мы покажем, что для любой однородной системы найдется эквивалентная ей однородная система, для которой ограничения на собственные переменные имеют „обычный“ вид, т. е. эти ограничения накладываются на правила вывода, а не на выводы. Для упрощения рассуждений мы возьмем только логические символы $\neg$, $\vee$, $\exists$, а остальные логические символы будем рассматривать как их комбинации.

Определение 22.24. $\forall\exists$-исчисление определяется как однородная система со следующим изменением: правило $\exists$-слева заменяется на

$$\text{правило } \forall\exists\text{:}\quad \frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{b}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta}{\{\forall \boldsymbol{x}_\lambda \exists \boldsymbol{y}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{y}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta},$$

где ни одна из свободных переменных, содержащихся в $\boldsymbol{b}_\lambda$, не должна входить в нижнюю секвенцию.

Каждая переменная в $\boldsymbol{b}_\lambda$ называется собственной переменной. Все переменные в $\boldsymbol{b}_\lambda$ должны быть различны, и ни одна из них не должна входить в $A_{\lambda'}(\boldsymbol{a}_{\lambda'}, \boldsymbol{b}_{\lambda'})$ при $\lambda' < \lambda$.

Других ограничений на собственные переменные не налагается.

Заметим, что квантор $\forall \boldsymbol{x}_\lambda$ может быть пустым.

Предложение 22.25 (Маехара — Такеути). *$\forall\exists$-исчисление эквивалентно однородной системе* (*в том же языке*).

Доказательство. Пусть P — некоторый вывод в $\forall\exists$-исчислении. Каждой свободной переменной мы можем поставить в соответствие некоторую высоту; если b есть μ-я переменная последовательности $\boldsymbol{b}_\lambda$ некоторого применения правила $\forall\exists$, то ее высота равняется $\sup_a(\text{высота } a) + (1+\mu)$, где a пробегает все свободные переменные в A_λ, не входящие в $\boldsymbol{b}_\lambda$, а под sup мы понимаем строгий супремум. Если переменная b не используется как собственная, то ее высота равняется 0. Преобразуем вывод P следующим образом. Если имеется применение правила $\forall\exists$, то заменим его на следующую фигуру:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{b}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta}{\{\exists \boldsymbol{y}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{y}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta}}{\Gamma \to \Delta, \{\neg \exists \boldsymbol{y}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{y}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}}}{\Gamma \to \Delta, \{\exists \boldsymbol{x}_\lambda \neg \exists \boldsymbol{y}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{y}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}}}{\{\neg \exists \boldsymbol{x}_\lambda \neg \exists \boldsymbol{y}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{y}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta.}$$

Легко видеть, что полученная фигура является выводом в однородной системе с теми же высотами, что и в P.

Обратно, пусть P — некоторый вывод в однородной системе, оканчивающийся секвенцией $\Gamma \to \Delta$. Пусть $\{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}$ — перечисление всех главных формул применений правил $\exists$-слева в P, где $\boldsymbol{a}_\lambda$ — последовательность всех свободных переменных в A_λ. Тогда всякое применение правила $\exists$-слева устраняется следующим образом (для простоты мы продемонстрируем случай, когда имеется только одна боковая формула):

$$\frac{A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \Pi \to \Lambda}{\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), \Pi \to \Lambda}$$

заменяется на

$$\cfrac{\cfrac{A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \Pi \to \Lambda}{A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), \Pi \to \Lambda} \qquad \neg \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), \Pi \to \Lambda}{\neg \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \vee A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), \Pi \to \Lambda.}$$

Поскольку при этом не используются новые собственные переменные, в результате мы получим некоторую фигуру, являющуюся выводом как в однородной системе, так и в $\forall\exists$-исчислении. Из этого вывода, оканчивающегося секвенцией

$$\{\neg \exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{x}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{b}_\lambda)\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta,$$

применив правило $\forall\exists$, мы получаем секвенцию

$$\{\forall \boldsymbol{y}_\lambda \exists \boldsymbol{z}_\lambda [\neg \exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{y}_\lambda, \boldsymbol{x}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{y}_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda)]\}_{\lambda<\alpha}, \Gamma \to \Delta.$$

С другой стороны, секвенция

$$\to \forall \boldsymbol{y}_\lambda \exists \boldsymbol{z}_\lambda [\neg \exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{y}_\lambda, \boldsymbol{x}_\lambda) \vee A(\boldsymbol{y}_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda)]$$

выводима с помощью правила $\forall\exists$. Следовательно, секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в $\forall\exists$-исчислении.

Задача 22.26. Компактность системы **LK** (исчисления предикатов первого порядка) синтаксически можно выразить следующим образом. Пусть $\Gamma \to \Delta$ — некоторая секвенция, состоящая из формул системы **LK** и имеющая мощность $\leqslant K$, где K — мощность множества всех формул системы **LK** (в данном языке). Для всякой такой секвенции, выводимой в однородной системе (в соответствующем языке), найдутся конечные подпоследовательности Γ_0 и Δ_0 последовательностей Γ и Δ соответственно, для которых секвенция $\Gamma_0 \to \Delta_0$ выводима в **LK**.

Доказать компактность исчисления предикатов первого порядка в синтаксической форме.

[*Указание.* Пусть $\Gamma \to \Delta$ — секвенция указанного вида, и пусть P — некоторый вывод без сечений этой секвенции.

(*) Для каждой секвенции в P, скажем $\Pi \to \Lambda$, мы можем выбрать некоторую конечную подсеквенцию $\Pi_0 \to \Lambda_0$ (т. е. $\Pi_0 \subseteq \Pi$, $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ и Π_0 и Λ_0 конечны). Если $\Pi \to \Lambda$ — нижняя секвенция какого-нибудь непосредственного вывода, мы можем выбрать конечное число верхних секвенций, соответствующих ей, таким образом, чтобы та часть вывода P, которая состоит из всех выбранных секвенций, соответствующих секвенции $\Pi_0 \to \Lambda_0$, представляла собой квазивывод этой секвенции. В частности, $\Pi \to \Lambda$ может совпадать с $\Gamma \to \Delta$; следовательно, найдется конечная подсеквенция $\Gamma_0 \to \Delta_0$, которая выводима.

Теперь, применив предложение 22.25, мы можем построить некоторый **LK**-вывод секвенции $\Gamma_0 \to \Delta_0$. Утверждение (*) доказывается трансфинитной индукцией по построению подвывода вывода P, оканчивающегося секвенцией $\Pi \to \Lambda$. В случаях, относящихся к правилам $\bigwedge$-справа и $\bigvee$-слева, используется обобщенная лемма Кёнига (предложение 8.16).]

Задача 22.27. Сначала мы определим некоторый формальный инфинитарный язык в теоретико-множественных терминах.

Базисный язык представляет собой упорядоченную тройку $\langle C, P, S\rangle$, где C — некоторое множество индивидных констант, P — некоторое множество предикатных констант, а S — некоторое множество логических символов. Каждый элемент множества P представляет собой упорядоченную пару $\langle A, \alpha\rangle$, где α — ординал, называемый арностью предиката $\langle A, \alpha\rangle$. Всякий элемент множества S либо есть $\neg$, либо имеет вид $\langle \bigwedge, \alpha\rangle$, $\langle \bigvee, \alpha\rangle$, $\langle \forall, \alpha\rangle$ или $\langle \exists, \alpha\rangle$, где α — ординал, называемый арностью символа $\langle \bigwedge, \alpha\rangle$, $\langle \bigvee, \alpha\rangle$, $\langle \forall, \alpha\rangle$ или $\langle \exists, \alpha\rangle$ соответственно. Базисный язык $\langle C, P, S\rangle$, кроме того, удовлетворяет следующим условиям:

1) Множества C, P и S попарно не пересекаются.

2) Символы $\neg$, $\bigwedge$, $\bigvee$, $\forall$ и $\exists$ различны.

Язык L — это упорядоченное множество $\langle C, P, S, B, F\rangle$, где $\langle C, P, S\rangle$ — базисный язык, B и F — некоторые множества связанных и свободных переменных соответственно, причем множества C, P, S, B и F попарно не пересекаются.

Термы, формулы и другие формальные объекты языка L определяются, как обычно. Однако теперь мы сделаем следующее отклонение от предыдущих установок. Мы назовем $\Gamma \to \Delta$

секвенцией языка L, если Γ и Δ — *множества* формул языка L. Это изменение полезно в том случае, когда мы хотим по возможности избежать применений аксиомы выбора.

Деревом называется упорядоченная пара $\langle T, <\rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $T \neq \varnothing$.

2. Отношение $<$ частично упорядочивает множество T.

Запись $s_1 < s_2$ мы будем читать так: „s_1 расположена ниже s_2“ или „s_2 расположена выше s_1“. Существует единственная самая нижняя точка s_0 в T, т. е. существует единственная точка s_0 в T, такая, что

$$\forall s \in T\, (s_0 < s \vee s_0 = s).$$

Эта самая нижняя точка s_0 называется заключительной точкой дерева. Каждая точка, кроме заключительной, имеет единственную точку, расположенную непосредственно ниже нее, т. е.

$$\forall s \in T\, (s \neq s_0 \supset \exists!\, t \in T\; \forall u\, (u < s \equiv (u = t \vee u < t))).$$

Если $s_1 < s_2$ и $\neg \exists s\, (s_1 < s \wedge s < s_2)$, то говорят, что s_2 расположена непосредственно выше s_1. Если $s_1 < s$, то найдется единственная точка s_2, такая, что $s_1 < s_2 \leqslant s$ и s_2 расположена непосредственно выше s_1. Самые верхние точки называются начальными точками.

3. Любое линейно упорядоченное (относительно $<$) подмножество множества T конечно.

Полувывод P в языке L — это функция f, определенная на некотором дереве, значениями которой являются секвенции языка L, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Если s — начальная точка и $f(s)$ имеет вид $\Gamma \to \Delta$, то

$$\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing.$$

Заметим, что начальные секвенции здесь не обязательно должны иметь вид $D \to D$. Это изменение дает нам возможность доказать теорему о полноте с минимальным использованием аксиомы выбора.

2) Пусть $\ldots, s_\alpha, \ldots$ — совокупность всех точек, расположенных непосредственно выше s. Тогда фигура

$$\frac{\ldots,\ f(s_\alpha),\ \ldots}{f(s)}$$

является непосредственным выводом в L.

Выводом в L называется упорядоченная пара $\langle P_0, \prec\rangle$, где P_0 — полувывод в L, а $\prec$ — некоторый фундированный [1])

[1]) Отношение $\prec$ называется фундированным, если не существует бесконечной последовательности $\{a_i\}$, такой, что $a_{i+1} \prec a_i$ при всех i. — *Прим. перев.*

частичный порядок на множестве всех свободных переменных в P_0, удовлетворяющий ограничениям на собственные переменные.

Структуры для языка L определяются обычным способом.

Пусть M — некоторое транзитивное множество, в котором не обязательно выполняется аксиома выбора. Пусть S — некоторая структура для L в M, и пусть A — некоторое предложение языка L. Тогда отношение „S выполняет A в M“, обозначаемое через $S \models^M A$, определяется, как обычно, за исключением случаев, относящихся к $\exists$ и $\forall$. Поскольку $\forall$ определяется как $\neg\exists\neg$, мы приводим определение только для $\exists$.

$$S \models^M \exists x_0 x_1 \ldots A(x_0, x_1, \ldots)$$

означает, что

$$\exists f \in M (S \models^M A(f(0), f(1), \ldots)).$$

Предложение F называется *M-общезначимым*, если для всякой структуры S в M справедливо $S \models^M F$.

Теорема A. *Пусть L — базисный язык, и предположим, что $\forall a \in M (a^\alpha \in M)$ для каждой арности α в L. Если некоторый L-вывод P является элементом множества M, то заключительная секвенция вывода P является M-общезначимой.*

[*Указание.* Следовать доказательству теоремы о корректности со следующими изменениями. С помощью аксиомы выбора ввести функции Сколема. Эти функции могут и не принадлежать M, но последовательности термов, построенных с помощью функций Сколема, по условию теоремы являются элементами множества M в предположении, что их длины представляют собой арности языка L. Поэтому доказательство может быть проведено так же, как и ранее.]

Теорема B. *Пусть L — базисный язык, и пусть λ — первый регулярный кардинал, превосходящий все арности в L. Считаем, что $\lambda > \omega$. Пусть S — некоторая L-секвенция. Если в M выполняются сформулированные ниже 4 условия, то либо S имеет некоторый не содержащий сечений вывод в M, либо S имеет в M контрмодель.*

1) *$L \in M$, $S \in M$ и $\lambda \in M$.*

2) *$\forall a, b \in M (\{a, b\} \in M)$ и $\forall a \in M (\bigcup(a) \in M)$, где $\bigcup(a)$ обозначает объединение элементов множества a.*

3) *В M выполняется аксиома подстановки.*

4) *$\forall a \in M \forall \alpha \in \lambda (a^\alpha \in M)$.*

В случае, когда язык L содержит $=$, добавляется условие, что $P(D \times D) \in M$, где $P(D \times D)$ — множество подмножеств множества $D \times D$, а D — некоторое достаточное множество свободных переменных, причем условие $D \in M$ вытекает из 1)—4).

[*Указание.* Следовать доказательству теоремы о полноте следующим образом.

1) Ввести λ экземпляров связанных переменных в M.

2) Построить в M все атомарные полуформулы.

3) Построить в M все полуформулы без свободных переменных. Здесь мы пользуемся определением по трансфинитной индукции до λ. Это можно сделать в M, поскольку в M выполняется аксиома подстановки.

4) Ввести в M буквы для всех функций Сколема, соответствующих каждой полуформуле без свободных переменных.

5) Построить в M множество D всех свободных переменных как множество всех возможных (функциональных) комбинаций букв для функций Сколема. Здесь мы снова пользуемся определением по трансфинитной индукции до λ.

6) Построить в M редукционное дерево. Это дерево мы определяем в M вплоть до этапа n математической индукцией. Легко показать тогда, что все редукционное дерево принадлежит M.

7) Построить в M контрмодель или не содержащий сечений вывод. Это можно сделать обычным образом.

8) Если L содержит $=$, нам нужно условие $P(D \times D) \in M$, поскольку в аксиоме равенства рассматриваются все возможные разбиения множества свободных переменных.]

В языке, не содержащем символа $\in$, мы можем выразить аксиому выбора в такой форме:

$$\forall x \exists y A(x, y) \to \exists f \forall x A(x, f(x)).$$

Так как сюда входит $\exists f$, эта форма имеет второй порядок. Поскольку некоторые понятия второго порядка можно выразить в инфинитарном языке, естественно задаться вопросом, можно ли в этом языке выразить аксиому выбора. Действительно, некоторая слабая форма этой аксиомы элегантно выражается в инфинитарном языке, а именно аксиома зависимого выбора:

$$\forall x \exists y A(x, y) \to \forall x_0 \exists x_1 x_2 \ldots \bigwedge_{i<\omega} A(x_i, x_{i+1}).$$

Следствие. *Аксиома выбора не выразима ни в каком инфинитарном языке.*

[*Указание.* Допустим, что аксиому выбора можно выразить в некотором инфинитарном языке L. Тогда, поскольку аксиома выбора истинна, должен существовать некоторый вывод P этой аксиомы. Пусть α — достаточно большой ординал, такой, что $L \in R(\alpha)$, $P \in R(\alpha)$ и $\lambda < \alpha$, где $R(\alpha) = \{a \mid \mathrm{rank}(a) < \alpha\}$. Получается противоречие, так как очень легко доказать существование транзитивного множества M со следующими свойствами:

1) аксиома выбора не верна в M;

2) M удовлетворяет условиям теоремы А. (Например, в качестве M можно взять наименьшее транзитивное множество, удовлетворяющее условиям теоремы А и такое, что $R(\alpha) \in M$.)]

§ 23. Детерминированная логика

В этом параграфе мы изучим детерминированную логику с равенством (=) как частный случай инфинитарной логики с неоднородными кванторами. Для упрощения рассуждений мы будем рассматривать только языки, которые не содержат индивидных констант.

Определение 23.1. (1) Под *неоднородным квантором арности* α мы понимаем символ Q^f, где f — некоторое отображение из α в $\{\forall, \exists\}$. Для каждого такого отображения f отображение $\bar{f}$, называемое *двойственным* к f, определяется следующим образом:

(i) область определения отображения $\bar{f}$ та же, что и у f;

(ii) $\bar{f}(\beta) = \forall$ или $\bar{f}(\beta) = \exists$ в зависимости от того, имеет место $f(\beta) = \exists$ или $f(\beta) = \forall$.

Если отображения f и g двойственны друг другу, то Q^f и Q^g называются *двойственными кванторами.*

(2) Под языком L_D мы понимаем язык, получающийся из описанного в § 22 языка заменой в нем кванторов $\forall$ и $\exists$ арности α на неоднородные кванторы Q^f той же арности.

(3) Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая структура для языка L_D. Выполненность и истинность формул (секвенций) в структуре $\mathscr{A}$ определяются так же, как и в определении 22.15. Структура $\mathscr{A}$ называется *детерминированной*, если для каждой формулы A языка L_D в $\mathscr{A}$ истинна в точности одна из двух формул

$$Q^f \boldsymbol{x}_{<\alpha} A(\boldsymbol{x}).$$

$$Q^{\bar{f}} \boldsymbol{x}_{<\alpha} \neg A(\boldsymbol{x}).$$

(4) Логическая система $\mathbf{S}$ в языке L_D называется *детерминированной логикой*, если для любой замкнутой формулы A языка L_D выводимость формулы A в $\mathbf{S}$ эквивалентна истинности A во всякой детерминированной структуре.

В этом параграфе мы определим логическую систему $\mathbf{DL}$ и докажем, что (i) $\mathbf{DL}$ — детерминированная логика; (ii) если формула A выводима в $\mathbf{DL}$, причем неоднородный квантор вводится только один раз — в конце вывода, то A общезначима, и (iii) для системы $\mathbf{DL}$ справедливы некоторые варианты теорем о полноте и об устранении сечений, а также интерполяционной теоремы.

Язык нашей формальной системы $\mathbf{DL}$ представляет собой язык L_D с равенством. Следовательно, мы будем изучать детерминированную логику с равенством. Сначала изменим понятие вывода, определенное в § 22.

Определение 23.2. (1) Правила вывода для = такие же, как в определении 22.19.

(2) Правила вывода для $\forall$ и $\exists$, указанные в определении 22.1, заменяются на следующие.

$$\textit{Правило } Q\textit{-слева:}\quad \frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}{\{Q^{f_\lambda} \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta,}$$

где $\boldsymbol{a}_\lambda$ обозначает последовательность $a_{\lambda,0}, \ldots, a_{\lambda,\alpha}, \ldots$ $(\alpha < \mu_\lambda)$ для некоторого μ_λ. При этом μ-ю переменную $a_{\lambda,\mu}$ этой последовательности мы называем *переменной порядка* μ для $\boldsymbol{a}_\lambda$. Если $f_\lambda(\mu) = \exists$, то переменная $a_{\lambda,\mu}$ называется *собственной переменой* этого правила.

$$\textit{Правило } Q\textit{-справа:}\quad \frac{\Gamma \to \Delta,\ \{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}}{\Gamma \to \Delta,\ \{Q^{f_\lambda} \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma}.}$$

Если $f'_\lambda(\mu) = \forall$, то переменная $a_{\lambda,\mu}$ называется *собственной переменной* этого правила.

Если $a_{\lambda,\mu}$ — собственная переменная любого из этих правил, то $Q^{f_\lambda} \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$ называется *главной формулой* для этой переменной, а также для этого правила. Кроме того, $A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)$ называется *боковой формулой* для формулы $Q^{f_\lambda} \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)$, для собственной переменной $a_{\lambda,\mu}$ и для этого правила.

Если две различные переменные a и b имеют одинаковую главную формулу, то говорят, что переменная a *предшествует* переменной b относительно этой главной формулы, если порядок a меньше порядка b.

(3) Каждый вывод должен удовлетворять следующим *ограничениям на собственные переменные*:

1) Если какая-то свободная переменная входит два или большее число раз в качестве собственной, то каждое вхождение этой переменной должно иметь одну и ту же главную формулу и все они должны иметь одинаковый порядок. Более того, если a входит в две различные боковые формулы $A(\boldsymbol{a}_1)$ и $A(\boldsymbol{a}_2)$ как собственная переменная порядка μ, то переменные $a_{1,\nu}$ и $a_{2,\nu}$ должны совпадать при всех $\nu < \mu$.

2) Каждой свободной переменной a можно подставить в соответствие некоторое ординальное число $h(a)$, называемое *высотой* этой переменной, таким образом, что выполняются следующие свойства:

2.1) Высота $h(a)$ собственной переменой a больше высоты $h(b)$ любой свободной переменной b в главной формуле для собственной переменной a.

2.2) Высота собственной переменной a больше высоты переменной b, если b предшествует переменной a относительно главной формулы для a.

3) Ни одна из переменных, входящих в вывод в качестве собственной переменной, не должна входить в заключительную секвенцию.

Замечание. Следующая ниже ослабленная модификация ограничений 1) — 3) на собственные переменные достаточна для того, чтобы логика была детерминированной.

Заменим вторую часть условия 1) следующим: если $A(\boldsymbol{a})$ — боковая формула для главной формулы $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$, а a_ν и a_μ — собственные переменные для $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$, причем $\nu \neq \mu$, то a_ν и a_μ отличны друг от друга. Если a входит в две различные боковые формулы $A(\boldsymbol{a}_1)$ и $A(\boldsymbol{a}_2)$ в качестве собственной переменной главной формулы $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$, то $a_{1,\nu}$ и $a_{2,\nu}$ совпадают для всякой несобственной переменной $a_{1,\nu}$ формулы $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ при любом ν, меньшем, чем порядок a.

Условие 2.2) заменим следующим. Если a — собственная переменная с главной формулой $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$, то высота a больше высоты b, если b предшествует a относительно главной формулы $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ и b не является собственной переменной этой главной формулы.

Мы будем пользоваться условием 2.2) как в первоначальной форме, так и в новом варианте, выбирая ту форму, которая больше подходит для наших целей.

Пример 23.3. Вывод аксиомы детерминированности. Пусть $\boldsymbol{a}$ обозначает $\boldsymbol{a}_{\lambda<\alpha}$, а $\boldsymbol{b}$ обозначает $\boldsymbol{b}_{\mu<\beta}$. Имеем

$$\begin{array}{l}
A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ \hline
\to A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \neg A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ \hline
\to \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}), \mathrm{Q}^{\bar f} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \\ \hline
\to \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \vee \mathrm{Q}^{\bar f} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}).
\end{array}$$

В этом выводе $h(a_\lambda) = 1 + \lambda$ и $h(b_\mu) = 0$.

Теорема 23.4 (корректность относительно детерминированных структур) *Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая детерминированная структура и секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в детерминированной логике* **DL**. *Тогда секвенция $\Gamma \to \Delta$ истинна в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Возьмем произвольную формулу, начинающуюся с некоторого квантора, скажем

$$\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),$$

где $\boldsymbol{a}$ — последовательность всех свободных переменных в этой формуле и длина $\boldsymbol{x}$ равна α. Для каждого $\gamma < \alpha$ введем функцию Сколема

$$g_A^{f,\gamma}\left(x_{\xi_0}, \ldots, x_{\xi_\mu}, \ldots, \boldsymbol{a}\right) \text{ или } \bar{g}_A^{f,\gamma}\left(x_{\eta_0}, \ldots, x_{\eta_\mu}, \ldots, \boldsymbol{a}\right)$$

в зависимости от того, что имеет место: $f(\gamma) = \exists$ или $f(\gamma) = \forall$, где $\xi_0, \ldots, \xi_\mu, \ldots$ — все ординалы $< \gamma$, для которых $f(\xi) = \forall$, а $\eta_0, \ldots, \eta_\mu, \ldots$ — все ординалы $< \gamma$, для которых $f(\eta) = \exists$. Определим следующую интерпретацию функций $g_A^{f,\gamma}$ и $\bar{g}_A^{f,\gamma}$ в $\mathcal{A}$.

1) Если формула $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ выполняется в $\mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ выполняется и формула $\forall x_{\xi_0} x_{\xi_1} \ldots A(\tilde{x}_0, \ldots, \boldsymbol{a})$, где $\tilde{x}_\gamma$ есть x_γ, если $f(\gamma) = \forall$, и $\tilde{x}_\gamma$ есть $g_A^{f,\gamma}(x_{\xi_0}, \ldots, \boldsymbol{a})$, если $f(\gamma) = \exists$.

Пусть D — универсум структуры $\mathcal{A}$ и 0 — некоторый элемент D. Здесь под $\boldsymbol{a}$ понимается некоторая последовательность элементов D. Если формула $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ не выполняется в $\mathcal{A}$, то все $g_A^{f,\gamma}$ интерпретируются в $\mathcal{A}$ функцией-константой 0.

2) Если формула $\mathrm{Q}^{\bar f} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ выполняется в $\mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ выполняется и формула $\forall x_{\xi_0} x_{\xi_1} \ldots A(\tilde{x}_0, \ldots, \boldsymbol{a})$, где $\tilde{x}_\gamma$ есть x_γ, если $f(\gamma) = \exists$, и $\bar{g}_A^{f,\gamma}(x_{\xi_0}, \ldots, \boldsymbol{a})$, если $f(\gamma) = \forall$.

Если формула $\mathrm{Q}^{\bar f} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ не выполняется в $\mathcal{A}$, то все $\bar{g}_A^{f,\gamma}$ интерпретируются в $\mathcal{A}$ функцией-константой 0.

Пусть теперь P — некоторый вывод в нашей системе. Пусть

$$a_0, a_1, \ldots, a_\beta, \ldots$$

есть список (без повторений) всех свободных переменных в P, причем $h(a_\beta) \leqslant h(a_\gamma)$, если $\beta < \gamma$, где h — функция высоты. Трансфинитной индукцией по β мы определим термы $t_0, t_1, \ldots, t_\beta, \ldots$, соответствующие приведенному выше списку переменных. Считая, что все $\boldsymbol{t}_{<\beta}$ уже определены, определим t_β следующим образом.

Допустим, что $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ — главная формула для переменной a_β и δ — порядок этой переменной. Пусть d — некоторая свободная переменная, предшествующая переменной a_β относительно этой главной формулы. Переменной d мы поставим в соответствие некоторый терм u следующим образом. Если d — не собственная переменная, то u совпадает с d. В противном случае, поскольку $h(d) < h(a_\beta)$ в силу наших ограничений на собственные переменные, d содержится в указанном выше списке собственных переменных как a_γ для некоторого $\gamma < \beta$.

По предположению индукции t_γ уже определено. Тогда u, которое ставится в соответствие переменной d, и есть это t_γ.

Пусть b — некоторая свободная переменная последовательности $\boldsymbol{b}$. Терм s, который ставится в соответствие этому b, определяется таким же способом, что и терм u, сопоставляемый d; напомним, что $h(b) < h(a_\beta)$. Следует заметить, что эти d и b одни и те же у всех боковых формул для переменной a_β в силу ограничений на собственные переменные. Тогда t_β можно определить как $g_A^{f,\delta}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{s})$, если порядок переменной a_β равен δ и $f(\delta)$ есть $\exists$, где $\boldsymbol{u}_1$ — последовательность, составленная из термов u, соответствующих подходящим переменным d.

Аналогично t_β определяется как $\bar{g}_A^{f,\delta}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{s})$, если порядок переменной a_β равен δ и $f(\delta)$ есть $\forall$, где $\boldsymbol{u}_2$ имеет тот же смысл, что и $\boldsymbol{u}_1$.

Подставим теперь $t_0, t_1, \ldots, t_\beta, \ldots$ в P вместо $a_0, a_1, \ldots, a_\beta, \ldots$ соответственно. Пусть P' — полученная таким образом из P фигура. P и P' имеют одинаковые заключительные секвенции, потому что заключительная секвенция вывода P не содержит собственных переменных. Покажем, что каждая секвенция фигуры P' выполнена в $\mathscr{A}$; отсюда будет следовать, что заключительная секвенция в P выполнена в $\mathscr{A}$. Нам нужно только показать, что если верхние секвенции какого-нибудь непосредственного вывода в P' выполнены в $\mathscr{A}$, то нижняя секвенция этого непосредственного вывода также выполнена в $\mathscr{A}$. Мы рассмотрим только применения кванторных правил, поскольку остальные случаи очевидны.

Введение квантора Q-слева в P' имеет следующий вид:

$$3)\quad \frac{\ldots, A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s}), \ldots, \Gamma \to \Delta}{\ldots, \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \ldots, \Gamma \to \Delta,}$$

где u_γ имеет вид $g_A^{f,\gamma}(u_{\xi_0}, \ldots, \boldsymbol{s})$, если $f(\gamma) = \exists$.

Введение квантора Q-справа в P' имеет следующий вид:

$$4)\quad \frac{\Gamma \to \Delta, \ldots, A(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{s}), \ldots}{\Gamma \to \Delta, \ldots, \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \ldots,}$$

где u'_γ имеет вид $\bar{g}_A^{f,\gamma}(u'_{\eta_0}, \ldots, \boldsymbol{s})$, если $f(\gamma) = \forall$.

Для 3) мы должны показать, что выполняется секвенция

$$5)\quad \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \to A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s}).$$

Но это немедленно следует из 1). Для 4) нам нужно показать

$$6)\quad A(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{s}) \to \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}).$$

Допустим, что $\neg \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ истинно в $\mathscr{A}$. Поскольку $\mathscr{A}$ — детерминированная структура, в ней истинно $\mathrm{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$. Следовательно, мы должны показать, что в $\mathscr{A}$ выполняется

$$\mathrm{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \to \neg A(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{s}).$$

Но это следует из 2). Тем самым теорема 23.4 доказана.

Поскольку в этом доказательстве детерминированность структуры $\mathscr{A}$ использовалось только для доказательства п. 6) и так как аксиома детерминированности справедлива для однородных кванторов, получаем

Предложение 23.5. *Пусть P — некоторый вывод в нашей детерминированной логике, причем каждый квантор, вводимый в каком-нибудь сукцеденте этого вывода, является однородным. Тогда заключительная секвенция вывода P общезначима.*

Далее мы докажем два варианта теоремы о полноте.

Теорема 23.6. *Пусть $\Gamma \to \Delta$ — некоторая секвенция. Тогда либо найдется некоторый не содержащий сечений вывод секвенции $\Gamma \to \Delta$ в нашей детерминированной логике, либо в противном случае найдется некоторая структура $\mathscr{A}$ (возможно, не детерминированная), такая, что каждая формула из Γ истинна в $\mathscr{A}$, а каждая формула из Δ в $\mathscr{A}$ ложна.*

Доказательство. Пусть D_0 — произвольное непустое множество, содержащее все свободные переменные, входящие в Γ и Δ. Пусть D — замыкание множества D_0 относительно функций $g_A^{f,\gamma}$ и $\bar{g}_A^{f,\gamma}$ для всех формул A нашего языка, т. е. D порождается из D_0 с помощью всех $g_A^{f,\gamma}$ и $\bar{g}_A^{f,\gamma}$ (в действительности достаточно, чтобы D было замкнуто относительно всех функций $g_A^{f,\gamma}$ и $\bar{g}_A^{f,\gamma}$ для всех подформул A формул из Γ и Δ). В данном доказательстве элементы множества $D - D_0$ рассматриваются как свободные переменные, а элементы D_0 — как индивидные константы. Пусть E — множество всех формул вида $s = t$, где s и t — элементы D. Пусть (Φ, Ψ) — произвольное разбиение множества E, и рассмотрим следующую секвенцию:

0) $\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi$.

Если все секвенции вида 0) выводимы без правила сечения, то секвенция $\Gamma \to \Delta$ также выводима без правила сечения.

Пусть S — секвенция $\Gamma \to \Delta$. Дерево $T(S)$ определим, рассматривая следующие восемь случаев:

1) Самой нижней секвенцией является S.

2) Непосредственными предками секвенции S являются все секвенции вида 0).

3) Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ имеет вид

$$\{\neg C_\lambda\}_{\lambda<\gamma}, \Pi' \to \Lambda', \{\neg D_\mu\}_{\mu<\delta},$$

где Π' и Λ' не содержат формул, внешний логический символ которых есть $\neg$, и построена с помощью п. 2) или п. 8) (последний еще будет определен), то ее непосредственным предком является секвенция

$$\{D_\mu\}_{\mu<\delta}, \Pi' \to \Lambda', \{C_\lambda\}_{\lambda<\gamma}.$$

4) Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ имеет вид

$$\Big\{\bigvee_{\lambda<\alpha_\mu} C_{\mu,\lambda}\Big\}_{\mu<\gamma}, \Pi' \to \Lambda', \Big\{\bigvee_{\rho<\beta_\sigma} D_{\sigma,\rho}\Big\}_{\sigma<\delta},$$

где Π' и Λ' не содержат формул, внешний логический символ которых есть $\bigvee$, и построена с помощью п. 3), то ее непосредственными предками являются секвенции

$$\{C_{\mu,\lambda_\mu}\}_{\gamma<\mu}, \Pi' \to \Lambda', \{D_{\sigma,\rho}\}_{\rho<\beta_\sigma,\, \sigma<\delta}$$

для всех последовательностей $\{\lambda_\mu\}_{\mu<\gamma}$, таких, что $\lambda_\mu < \alpha_\mu$.

5) Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ имеет вид

$$\Big\{\bigwedge_{\lambda<\alpha_\mu} C_{\mu,\nu}\Big\}_{\mu<\gamma}, \Pi' \to \Lambda', \Big\{\bigwedge_{\rho<\beta_\sigma} D_{\rho,\sigma}\Big\}_{\sigma<\delta},$$

где Π' и Λ' не содержат формул, внешним логическим символом которых является $\bigwedge$, и построена с помощью п. 4), то ее непосредственными предками являются секвенции

$$\{C_{\mu,\lambda}\}_{\lambda<\alpha_\mu,\, \mu<\gamma}, \Pi' \to \Lambda', \{D_{\rho_\sigma,\sigma}\}_{\sigma<\delta}$$

для всех последовательностей $\{\rho_\sigma\}_{\sigma>\delta}$, таких, что $\rho_\sigma < \beta_\sigma$.

6) Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ имеет вид

$$\{\mathsf{Q}^{f_\lambda} \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{s}_\lambda)\}_{\lambda<\delta}, \Pi' \to \Lambda,$$

где Π' не содержит формул, внешним логическим символом которых является Q, и построена с помощью 5), то ее непосредственным предком является секвенция

$$\{A_\lambda(\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}, \boldsymbol{s}_\lambda)\}_{\mu,\,\lambda<\delta}, \Pi' \to \Lambda$$

для всех $\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu} \text{ есть } \{t_{\lambda,\mu,0}, \ldots, t_{\lambda,\mu,\nu}, \ldots\}_{\nu<\gamma},$$

где γ — длина последовательности $\boldsymbol{x}_\lambda$; если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — все ординалы $<\gamma$, такие, что $f_\lambda(\xi) = \forall$, а $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — все ординалы $<\gamma$, такие, что $f_\lambda(\eta) = \exists$, то $t_{\lambda,\mu,\xi_0}, t_{\lambda,\mu,\xi_1}, \ldots$ — произвольная последовательность элементов из D и

$$t_{\lambda,\mu,\eta} = g^{f_\lambda,\eta}_{A_\lambda}(t_{\lambda,\mu,\xi_0}, \ldots, \boldsymbol{s}_\lambda)$$

для каждого $\eta = \eta_0, \eta_1, \ldots$.

7) Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ имеет вид

$$\Pi \to \Lambda', \quad \{\mathsf{Q}^{f_\lambda} \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{s}_\lambda)\}_{\lambda<\delta},$$

где Λ' не содержит формул, внешним логическим символом которых является Q, и построена с помощью 6), то ее непосредственным предком является секвенция

$$\Pi \to \Lambda', \{A_\lambda(\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}, \boldsymbol{s}_\lambda)\}_{\mu,\,\lambda<\delta}$$

для всех $\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu} \text{ есть } \{t_{\lambda,\mu,0}, \ldots, t_{\lambda,\mu,\nu}, \ldots\}_{\nu<\gamma},$$

где γ — длина последовательности $\boldsymbol{x}_\lambda$; если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — все ординалы $<\gamma$, такие, что $f_\lambda(\xi) = \forall$, а $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — все ординалы $<\gamma$, такие, что $f_\lambda(\eta) = \exists$, то $t_{\lambda,\mu,\eta_0}, t_{\lambda,\mu,\eta_1}, \ldots$ — произвольная последовательность элементов из D и

$$t_{\lambda,\mu,\xi} = \bar{g}^{f_\lambda,\xi}_{A_\lambda}(t_{\lambda,\mu,\eta_0}, \ldots, \boldsymbol{s}_\lambda).$$

8) Если секвенция $\Pi \to \Lambda$ имеет вид

$$\{s_\lambda = t_\lambda\}_{\lambda<\beta}, \Pi' \to \Lambda,$$

где Π' не содержит формул вида $s = t$, и построена с помощью п. 7), то ее непосредственным предком является секвенция $\Pi^* \to \Lambda^*$, где Π^* и Λ^* — последовательности всех формул, получаемых из формул, содержащихся в Π и Λ соответственно, произвольной перестановкой s_λ и t_λ $(\lambda < \beta)$. (Поэтому Π^* и Λ^*, очевидно, включают в себя Π и Λ соответственно.)

Описание дерева $T(S)$ закончено.

Ветвь дерева $T(S)$ — это бесконечная последовательность секвенций $S = S_0, S_1, S_2, \ldots$, такая, что секвенция S_{n+1} — непосредственный предок секвенции S_n для всех n. Возможны два случая.

Случай 1. В каждой ветви дерева $T(S)$ найдется по крайней мере одна секвенция вида

$$\Gamma_1, D, \Gamma_2 \to \Delta_1, D, \Delta_2 \quad \text{или} \quad \Gamma \to \Delta_1, s = s, \Delta_2.$$

Случай 2. Найдется по крайней мере одна ветвь дерева, в которой нет секвенций вида

$$\Gamma_1, D, \Gamma_2 \to \Delta_1, D, \Delta_2 \quad \text{или} \quad \Gamma \to \Delta_1, s = s, \Delta_2.$$

В случае 1 секвенция S выводима без правила сечения. Для того чтобы доказать это, определим высоту свободных переменных следующим образом:

(1) если a принадлежит D_0, то $h(a)=0$;

(2) если a есть $g_A^{f,\nu}(b_0, \ldots, b_\xi, \ldots)$ или $\bar{g}_A^{f,\nu}(\bar{b}_0, \ldots, b_\xi, \ldots)$, то $h(a)$ равняется супремуму всех $h(b_\xi)+1$.

Легко показывается, что дерево $T(S)$ удовлетворяет условиям 1) и 3), указанным в п. (3) определения 23.2.

В оставшейся части этого доказательства фигуру P мы будем называть *полувыводом*, если она удовлетворяет всем условиям определения вывода 23.2, кроме условия (3). Фигура P называется *квазивыводом*, если она удовлетворяет всем условиям определения вывода, кроме условия 3) п. (3) определения 23.2.

Рассмотрим теперь следующие условия:

(3) P является полувыводом без сечений.

(4) Всякая свободная переменная вывода P входит в $T(S)$ и всякий непосредственный вывод в P, вводящий квантор Q, входит в $T(S)$.

(5) Заключительной секвенцией вывода P является S.

Если P удовлетворяет условиям (3), (4) и (5), то он, очевидно, удовлетворяет и условиям 1) и 2) из п. (3) определения 23.2 и потому является квазивыводом без сечений. Рассмотрим теперь условие C на секвенцию S', состоящее в том, что S' имеет некоторый квазивывод P, удовлетворяющий условиям (3), (4) и (5). Пусть S' — некоторая секвенция в $T(S)$. Легко видеть, что если каждый предок S' удовлетворяет условию C, то S' тоже удовлетворяет этому условию. Допустим, что секвенция S не выводима без правила сечения. Тогда S не удовлетворяет условию C. (Вспомним, что высота уже определена.) Тогда некоторый предок S, скажем S_1, не удовлетворяет этому условию. Повторяя эти рассуждения, мы получим последовательность S, S_1, S_2, ..., где S_{n+1} является предком секвенции S_n и S_n не удовлетворяет условию C при каждом n. А это противоречит исходному допущению случая 1.

В случае 2 мы покажем, что найдется структура $\mathcal{A}$, в которой каждая формула из Γ истинна, а каждая формула из Δ ложна. В оставшейся части этого доказательства мы фиксируем ветвь, которая существует согласно допущению случая 2, и рассматриваем только формулы и секвенции, входящие в эту ветвь, т. е. во всех рассуждениях под секвенцией всегда понимается секвенция из этой ветви. Нам нужно только определить интерпретацию на области D, в которой все секвенции этой ветви были бы ложны.

Лемма 23.7. (1) *Если формула $\neg A$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции, то формула A входит в сукцедент (антецедент) некоторой секвенции.*

(2) *Если формула $\bigvee_{\lambda<\beta} A_\lambda$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции, то формула A_λ для некоторого (для всякого) $\lambda<\beta$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции.*

(3) *Если формула $\bigwedge_{\lambda<\beta} A_\lambda$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции, то формула A_λ для всякого (для некоторого) $\lambda<\beta$ входит в антецедент (сукцедент) некоторой секвенции.*

(4) *Если $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ входит в антецедент некоторой секвенции и $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\xi)=\forall$, а $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\eta)=\exists$, то для произвольной последовательности $t_{\xi_0}, t_{\xi_1}, \ldots$ элементов множества D формула $A(\boldsymbol{t})$ входит в антецедент некоторой секвенции, где $t_\eta = g_A^{f,\eta}(t_{\xi_0}, \ldots, \boldsymbol{s})$ для всякого $\eta=\eta_0, \eta_1, \ldots$.*

(5) *Если $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ входит в сукцедент некоторой секвенции и $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\xi)=\forall$, а $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\eta)=\exists$, то для произвольной последовательности $t_{\eta_0}, t_{\eta_1}, \ldots$ элементов множества D формула $A(\boldsymbol{t})$ входит в сукцедент некоторой секвенции, где $t_\xi = \bar{g}_A^{f,\xi}(t_{\eta_0}, \ldots, \boldsymbol{s})$ для всякого $\xi=\xi_0, \xi_1, \ldots$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 23.8. *Если какая-либо формула входит в антецедент некоторой секвенции, то она не входит в сукцедент никакой секвенции.*

Доказательство проводится трансфинитной индукцией по сложности формул с использованием леммы 23.7.

Лемма 23.9. (1) *Для всякого элемента t множества D формула $t=t$ входит в антецедент некоторой секвенции.*

(2) *Пусть s и t — некоторые элементы из D. Если $s=t$ входит в антецедент некоторой секвенции, то и $t=s$ входит в антецедент некоторой секвенции.*

(3) *Пусть t_1, t_2 и t_3 — некоторые элементы D. Если $t_1=t_2$ и $t_2=t_3$ входят в антецеденты некоторых секвенций, то формула $t_1=t_3$ также входит в антецедент некоторой секвенции.*

(4) *Пусть s_λ, t_λ $(\lambda<\beta)$ — элементы множества D. Если формулы $A(s_0, \ldots, s_\lambda, \ldots)$ и $\{s_\lambda=t_\lambda\}_{\lambda<\beta}$ входят в антецеденты некоторых секвенций, то для всякой последовательности $u_0, \ldots, u_\lambda, \ldots$, такой, что u_λ есть s_λ или t_λ, $A(u_0, \ldots, u_\lambda, \ldots)$ входит в антецедент некоторой секвенции.*

Доказательство. (1) Формула $t=t$ должна содержаться в Φ или Ψ из п. 2) построения дерева $T(S)$. Поскольку формула $t=t$ не может содержаться в Ψ по условию случая 2 (см. стр. 251), она должна входить в Φ.

(2) Пусть $s=t$ входит в антецедент некоторой секвенции, а $t=s$ входит в сукцедент некоторой секвенции; тогда найдется секвенция, содержащая $s=t$ в своем антецеденте и $t=s$ в сукцеденте. Согласно п. 8) построения дерева $T(S)$, должна существовать секвенция вида $\Gamma_1 \to \Delta_1$, $s=s$, Δ_2. Противоречие.

Утверждения (3) и (4) доказываются аналогично.

Согласно лемме 23.9, множество D можно разбить на классы эквивалентности по $=$. Пусть $D_=$ — множество полученных таким образом классов эквивалентности; далее классы из $D_=$ мы будем обозначать их представителями. Определим над $D_=$ некоторую структуру $\mathscr{A}$ следующим образом. Пусть s - некоторая переменная из D. Тогда значение s в структуре $\mathscr{A}$ определяется как класс, представляемый этим s. Если P — предикатная константа, то формула $P(t_0, \ldots, t_\lambda, \ldots)$ по определению истинна в $\mathscr{A}$, если эта формула входит в антецедент некоторой секвенции, и ложна в $\mathscr{A}$ в противном случае. Трансфинитной индукцией по сложности формулы A мы докажем, что A истинна в $\mathscr{A}$, если она входит в антецедент некоторой секвенции, и что A ложна в $\mathscr{A}$, если она входит в сукцедент некоторой секвенции. Мы рассмотрим только случай, когда A имеет вид $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ (остальные случаи проверяются легко).

Случай 1. Формула $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ входит в антецедент некоторой секвенции. В этом случае из предположения индукции и из п. 6) построения дерева $T(S)$ следует, что $A(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$ истинна в $\mathscr{A}$ для всякого $\boldsymbol{t}$, удовлетворяющего следующему условию. Если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\xi) = \forall$, а $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\eta) = \exists$, то $t_\eta = g_A^{f,\eta}(t_{\xi_0}, \ldots, \boldsymbol{s})$ для всякого η. Отсюда следует, что формула $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ истинна в $\mathscr{A}$.

Случай 2. Формула $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ входит в сукцедент некоторой секвенции. В этом случае из предположения индукции и из п. 7) построения дерева $T(S)$ следует, что $A(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$ ложна в $\mathscr{A}$ для всякого $\boldsymbol{t}$, удовлетворяющего следующему условию. Если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\xi) = \forall$, а $\eta_0, \eta_1, \ldots$ — все ординалы, такие, что $f(\eta) = \exists$, то $t_\xi = \bar{g}_A^{f,\xi}(t_{\eta_0}, \ldots \ldots, \boldsymbol{s})$. Отсюда следует, что формула $\neg A(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$ истинна в $\mathscr{A}$ для каждого такого $\boldsymbol{t}$. Поэтому формула $\mathrm{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ истинна в $\mathscr{A}$. Поскольку секвенция $\mathrm{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \to \neg \mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ выполнена во всех структурах, формула $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ ложна в $\mathscr{A}$.

Этим завершается доказательство первого варианта теоремы о полноте.

Прежде чем перейти ко второму варианту теоремы ноте, мы докажем

Предложение 23.10. *Пусть D и D_0 такие же множес в теореме 23.6. Далее, пусть Γ_0 — последовательность в мул вида*

$$\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \vee \mathrm{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}),$$

где $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ — произвольная формула нашего языка и $\boldsymbol{s}$ — вольная последовательность элементов из D. Без потери о можно считать, что никакой элемент из D_0 не испол в качестве собственной переменной ни в каком кваз Пусть теперь $\Gamma \to \Delta$ — некоторая секвенция исходного я пусть $\tilde{\Gamma}$ есть Γ_0, Γ. Тогда либо существует некоторый н жащий сечений квазивывод с заключительной секвенцией либо в противном случае найдется некоторая детермини структура $\mathscr{A}$, такая, что всякая формула из $\tilde{\Gamma}$ выполняе и ни одна формула из Δ не выполняется в $\mathscr{A}$.

Доказательство. Это предложение доказывает логично теореме 23.6, но с заменой „вывод“ и „Γ“ ственно на „квазивывод“ и „$\tilde{\Gamma}$“. Так как $\tilde{\Gamma}$ включает в легко показывается, что $\mathscr{A}$ — детерминированная струк

Теорема 23.11. *Пусть $\Gamma \to \Delta$ — некоторая секвенция либо секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в нашей детерминир логике, либо найдется детерминированная структура $\mathscr{A}$, та каждая формула из Γ выполняется в $\mathscr{A}$ и ни одна ф из Δ не выполняется в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Поскольку каждая формула выводима в нашей детерминированной логике (см. прим секвенция $\Gamma \to \Delta$ получается из $\tilde{\Gamma} \to \Delta$ с помощью прави ния следующим образом:

$$\frac{\to B_0, \ldots \qquad \to B_\beta, \ldots \qquad B_0, \ldots, B_\beta, \ldots, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta,}$$

где $\{B_0, \ldots, B_\beta, \ldots\}$ есть Γ_0. Таким образом, если секвенци имеет некоторый квазивывод, то из этого квазивывода мы получить вывод секвенции $\Gamma \to \Delta$, поскольку $\Gamma \to \Delta$ — се исходного языка. В противном случае предложение 23.1 тирует нам, что найдется детерминированная структ в которой выполняется каждая формула из $\tilde{\Gamma}$, следов каждая формула из Γ, тогда как ни одна формула из не выполняется.

Замечание. Мы не можем усилить теорему 23.11, заменив в ней „выводима“ на „выводима без правила сечения“. Это ясно из следующего примера Гэйла и Стюарта. Пусть α_0 — мощность множества 2^ω (множества всех функций из ω в $\{0, 1\}$) и $f \in 2^\omega$. Пусть $\psi(f)$ по определению есть $\bigwedge\limits_{k<\omega} (a_k = i_k)$, где $i_k = 0$ или 1 в зависимости от того, что имеет место, $f(k) = 0$ или 1. Формула $\psi(f)$ неявно определяет функцию f. Если $A \subseteq 2^\omega$, то множество A неявно определяется формулой $\bigvee_{f \in A} \psi(f)$, где $\bigvee_{f \in A}$ определяется через $\bigvee_{\alpha_0}$. Можно показать, что найдется множество $A \subseteq 2^\omega$, такое, что аксиома детерминированности не выполняется для игры, задаваемой множеством A (доказательство приводится ниже). Если некоторая формула ψ неявно определяет множество A, то секвенция

$$\forall x (x = 0 \vee x = 1) \to 0 = 1,$$
$$\neg(\forall x_0 \exists x_1 \forall x_1 \ \ldots \ \psi(x_0, x_1, \ldots) \vee \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \ \ldots \ \neg\psi(x_0, x_1, \ldots))$$

выводима в нашей детерминированной логике, где ψ строится из символов $0, 1, =, \bigwedge_{\alpha_0}$ и $\bigvee_{\alpha_0}$. Это значит, что секвенция $\forall x (x = 0 \vee x = 1) \to 0 = 1$ выводима в нашей детерминированной логике, если язык содержит символ $\bigvee_{\alpha_0}$, поскольку отрицание последней формулы представляет собой некоторый пример аксиомы детерминированности. Однако эта секвенция не выводима без правила сечения, даже если наш язык содержит $\bigvee_{\alpha_0}$.

Доказательство существования множества A проводится следующим образом. Мы покажем, что найдется некоторое подмножество A множества 2^ω, для которого не существует выигрышной стратегии.

Определение 23.12. (1) Для всякого подмножества A множества 2^ω *игра* $G(A)$ определяется следующим образом. Игрок I и игрок II по очереди выбирают 0 или 1; таким образом,

$$\text{I: } x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2i}, \ldots$$
$$\text{II: } x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2i+1}, \ldots$$

для $i < \omega$.

(2) Последовательность $\langle x_0, x_1, x_2, \ldots \rangle$, порожденная таким способом и называемая *развитием* игры, определяет победителя, а именно: если $\langle x_0, x_1, x_2, \ldots \rangle \in A$, то выигрывает I, в противном случае выигрывает II.

(3) Последовательность $\langle x_0, f_2, f_4, \ldots, f_{2i}, \ldots \rangle$ называется *стратегией* для игрока I, если $x_0 \in \{0, 1\}$ и f_{2i} — функция, определенная на множестве всех кортежей длины i из 0 и 1 и принимающая значения в $\{0, 1\}$.

(4) Пусть $\sigma = \langle x_0, f_2, f_4, \ldots \rangle$ — некоторая стратегия для I, и пусть $x = \langle x_1, x_3, \ldots, x_{2i+1} \rangle$ — функция, отображающая нечетные числа в $\{0, 1\}$. Тогда $\sigma(x)$ определяется так:

$$\sigma(x) = \langle x_0, x_1, f_2(x_1), x_3, f_4(x_1, x_3), \ldots \rangle.$$

(5) Стратегия σ для I называется *выигрышной* стратегией для I, если

$$\forall x \in 2^{\{2i+1 \mid i<\omega\}} \sigma(x) \in A.$$

(6) Последовательность $\langle f_1, f_3, \ldots, f_{2i+1}, \ldots \rangle$ называется *стратегией* для игрока II, если f_{2i+1} — функция, определенная на множестве всех кортежей длины i из 0 и 1 для всякого $i < \omega$.

(7) Пусть $\tau = \langle f_1, f_3, \ldots \rangle$ — некоторая стратегия для II, и пусть $x = \langle x_0, x_2, \ldots, x_{2i}, \ldots \rangle$ — функция, отображающая четные числа в $\{0, 1\}$. Тогда $\tau(x)$ определяется так:

$$\tau(x) = \langle x_0, f_1(x_0), x_2, f_3(x_0, x_2), \ldots \rangle.$$

(8) Стратегия τ для II называется *выигрышной* стратегией для II, если

$$\forall x \in 2^{\{2i \mid i<\omega\}} \tau(x) \notin A.$$

Теорема 23.13 (Гэйл — Стюарт). *В* ZF *можно показать, что если множество* 2^ω *вполне упорядочено, то найдется некоторое подмножество* 2^ω, *скажем* A, *для которого ни* I, *ни* II *не имеют выигрышной стратегии в игре* $G(A)$.

Доказательство. Легко видеть, что верны утверждения

1. Мощность множества всех стратегий для I равна α_0.
2. Мощность множества всех стратегий для II равна α_0.
3. Если σ — некоторая стратегия для I, то мощность множества $\{(\sigma, \tau) \mid \tau \text{ — стратегия для II}\}$ равна α_0.
4. Если τ — некоторая стратегия для II, то мощность множества $\{(\sigma, \tau) \mid \sigma \text{ — стратегия для I}\}$ равна α_0.

Пусть $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_\alpha, \ldots, \alpha < \alpha_0$ и $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_\alpha, \ldots, \alpha < \alpha_0$ — перечисление всех стратегий для I и II соответственно. Трансфинитной индукцией по α определим развития

$$x^\alpha = \langle x_0^\alpha, x_1^\alpha, \ldots, x_i^\alpha, \ldots \rangle \quad \text{и} \quad y^\alpha = \langle y_0^\alpha, y_1^\alpha, \ldots, y_i^\alpha, \ldots \rangle,$$

где $x_i^\alpha, y_i^\alpha = 0$ или 1.

(1) $x^0 = (\sigma_0, \tau_0)$.

(2) $y^0 = (\sigma_0, \tau_\beta)$, где β — наименьший ординал, такой, что $(\sigma_0, \tau_\beta) \neq x^0$.

(3) $S_\alpha = \{x^\beta \mid \beta < \alpha\}$ и $T_\alpha = \{y^\beta \mid \beta < \alpha\}$.

(4) $x^\alpha = (\sigma_\beta, \tau_\beta)$, где β — наименьший ординал, такой, что $(\sigma_\beta, \tau_\alpha) \notin S_\alpha \cup T_\alpha$.

(5) $y^\alpha = (\sigma_\alpha, \tau_\beta)$, где β — наименьший ординал, такой, что $(\sigma_\alpha, \tau_\beta) \notin S_\alpha \cup T_\alpha$ и $(\sigma_\alpha, \tau_\beta) \neq x^\alpha$.

Очевидно, что если $\alpha < \alpha_0$, то $S_\alpha \cap T_\alpha = \varnothing$, $\overline{\overline{S}}_\alpha < \alpha_0$ и $\overline{\overline{T}}_\alpha < \alpha_0$. Положим

$$A = \bigcup_{\alpha < \alpha_0} S_\alpha.$$

Мы утверждаем, что для этого множества A ни I, ни II не имеют выигрышной стратегии. Допустим, что I имеет некоторую выигрышную стратегию, скажем σ_α. Пусть β — наименьший ординал, такой, что

$$(\sigma_\alpha, \tau_\beta) \notin S_\alpha \cup T_\alpha \wedge (\sigma_\alpha, \tau_\beta) \neq x^\alpha.$$

Тогда $(\sigma_\alpha, \tau_\beta) = y^\alpha \notin A$, а это и значит, что II имеет выигрышную стратегию. Противоречие.

Для того чтобы доказать интерполяционную теорему, нам нужны следующие понятия.

Определение 23.14. Пусть P — некоторый полувывод без сечений, и пусть I — применение некоторого правила вывода в P. Пусть A — некоторая формула в одной из верхних секвенций I, и пусть B — некоторая формула в нижней секвенции I. Формулу B назовем *преемником* формулы A в следующих пяти случаях:

Случай 1. Если I — применение структурного правила

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi \to \Lambda},$$

A — формула из $\Gamma(\Delta)$, а B — первая формула в $\Pi(\Lambda)$, совпадающая с A.

Случай 2. Если I — применение логического правила

$$\frac{\Pi,\ \Gamma \to \Delta,\ \Lambda}{\Pi',\ \Gamma \to \Delta,\ \Lambda'},$$

где I применяется к формулам из Π и Λ, A находится в $\Gamma(\Lambda)$, а B — соответствующая формула в $\Gamma(\Lambda)$.

Случай 3. Если I — применение логического правила, A — его боковая формула, B — соответствующая главная формула.

Случай 4. Если I — применение первого правила для равенства (см. определение 22.19) и формула A входит в $\Gamma^{(a)}(\Delta^{(a)})$, а B — соответствующая формула в $\Gamma^{(b)}(\Delta^{(b)})$.

Случай 5. Если I — применение второго правила для равенства (см. определение 22.19) и формула A входит в $\Gamma(\Delta)$, а B — соответствующая формула в $\Gamma(\Delta)$.

Интерполяционную теорему мы формулируем здесь следующим образом.

Теорема 23.15 (интерполяционная теорема для однородных языков). *Если секвенция $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2$ общезначима и не содержит неоднородных кванторов, то найдется формула C, такая, что обе секвенции*

$$\Gamma_1 \to \Delta_1,\ C \quad \text{и} \quad C,\ \Gamma_2 \to \Delta_2$$

общезначимы и каждая входящая в C свободная переменная или предикатная константа, отличная от $=$, входит как в Γ_1, Δ_1, так и в Γ_2, Δ_2. (Формула C может содержать неоднородные кванторы, а также логические связки и кванторы, арность которых больше, чем арности соответствующих логических символов в исходном языке.)

Доказательство состоит из нескольких частей.

1. Сначала мы введем две вспомогательные системы.

Определение 23.16. Будем говорить, что вывод P в нашей детерминированной логике удовлетворяет условию (Q), если всякое применение правила Q-справа либо является однородным, либо имеет вид

$$\text{(Q)} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta,\ A(\boldsymbol{d})}{\Gamma \to \Delta,\ \mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})},$$

где никакая собственная переменная, встречающаяся в P выше секвенции $\Gamma \to \Delta,\ \mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$, не входит в эту секвенцию.

Предложение 23.17. *Если секвенция S имеет вывод, удовлетворяющий условию* (Q), *то секвенция S общезначима.*

Доказательство. Определим функции $g^{f_i}_A{}^{\nu}$ и $\bar{g}^{f_i}_A{}^{\nu}$ так же, как и в доказательстве теоремы 23.4, за исключением того, что функции $\bar{g}^{f_i}_A{}^{\nu}$ определяются теперь только для однородных f. Определим затем подстановку так же, как и в теореме 23.4, за исключением того, что все собственные переменные применений правил вида (Q) остаются незамещенными. Тогда вывод P преобразуется в P'. Нам нужно показать, что каждая секвенция S' в P' выполняется в $\mathscr{A}$. Это доказывается трансфинитной индукцией по сложности полувывода секвенции S. Мы можем повторить все рассуждения из доказательства теоремы 23.4, за исключением следующего случая. Пусть секвенция S получается в результате применения кванторного правила I:

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})}{\Gamma \to \Delta,\ \mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})},$$

где Q^f — неоднородный квантор. Чтобы проиллюстрировать доказательство, допустим, что $\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x}$ имеет вид $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots$

и $\boldsymbol{d}$ есть $d_0, d_1, d_2 \ldots$. Так как I удовлетворяет условию (Q) и $h(d_0) < h(d_1) < h(d_2) < \ldots$, то секвенция $(\Gamma \to \Delta,\ A(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}))'$ имеет вид

$$(*) \qquad \Gamma' \to \Delta',\ A(d_0,\ t_1(d_0, \boldsymbol{s}),\ d_2,\ t_3(d_0, d_2, \boldsymbol{s}),\ \ldots,\ \boldsymbol{s}).$$

Из предположения индукции вытекает, что секвенция $(*)$ выполняется в $\mathscr{A}$ для всякой последовательности $d_0, d_2, d_4, \ldots$ элементов из $\mathscr{A}$. Следовательно, секвенция $\Gamma' \to \Delta',\ \mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ также выполняется в $\mathscr{A}$.

Теперь мы рассмотрим другую логическую систему — ограниченную однородную систему **RHS**.

Определение 23.18. Фигура P называется выводом в системе **RHS**, если P удовлетворяет следующим условиям:

1) Все кванторы в P имеют вид $\exists$.

2) P удовлетворяет всем условиям определения вывода в детерминированной логике, кроме условия (3) определения 23.2.

3) Всякое применение правила в P, вводящего квантор Q в антецеденте, имеет следующий вид:

$$\frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}{\{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta,}$$

где никакая переменная из $\boldsymbol{a}_\lambda$ не входит в нижнюю секвенцию.

Тогда мы имеем следующее

Предложение 23.19. *Если секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в* **RHS** *и для всех переменных в $\Gamma \to \Delta$ определена высота (см. определение 23.2), то существует вывод P' в* **RHS**, *оканчивающийся секвенцией $\Gamma \to \Delta$, для которого высоты определены таким образом, что каждая свободная переменная секвенции $\Gamma \to \Delta$ имеет в нем ту же высоту, что и в исходном выводе.*

Доказательство. Мы можем считать, что одна и та же собственная переменная нигде не используется дважды (в противном случае можно переименовать некоторые собственные переменные). Тогда легко, начиная снизу, определить высоты свободных переменных.

2. Далее мы докажем следующую лемму.

Лемма 23.20. *Пусть P — вывод без сечений секвенции $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2$ в однородной системе (см. определение 22.1), удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) *Каждый квантор в P имеет вид $\exists$.*

(2) *Всякое применение кванторного правила в P является введением квантора $\exists$ в сукцеденте.*

Тогда найдутся не содержащие сечений выводы P_1 и P_2 в системе **RHS** *и формула C, удовлетворяющие следующим условиям:*

(2.1) *Вывод P_1 оканчивается секвенцией $C, \Gamma_1 \to \Delta_1$, а вывод P_2 — секвенцией $\Gamma_2 \to \Delta_2, C$.*

(2.2) *Каждая свободная переменная или предикатная константа в C, кроме $=$, входит и в Γ_1, Δ_1, и в Γ_2, Δ_2.*

Доказательство проводится трансфинитной индукцией по сложности вывода P.

Случай 1. P состоит из одной начальной секвенции. Тогда лемма очевидна.

Случай 2. Последний непосредственный вывод в P имеет вид

$$\frac{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to \Delta_1',\ \{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\beta_1},\ \Delta_2',\ \{B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu)\}_{\mu<\beta_2}}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to \Delta_1',\ \{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\beta_1},\ \Delta_2',\ \{\exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu)\}_{\mu<\beta_2},}$$

где Δ_1 есть $\Delta_1', \{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\beta}$ и Δ_2 есть $\Delta_2', \{\exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu)\}_{\mu<\beta_2}$. По предположению индукции существует формула $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, для которой в **RHS** выводимы секвенции

$$C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\ \Gamma_1 \to \Delta_1',\ \{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\beta_1}$$

и

$$\Gamma_2 \to \Delta_2',\ \{B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu)\}_{\mu<\beta_2},\ C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Кроме того, каждая свободная переменная и предикатная константа в $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ либо совпадает с $=$, либо содержится и в $\Gamma_1, \Delta_1', \{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\beta_1}$, и в $\Gamma_2, \Delta_2', \{B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu)\}_{\mu<\beta_2}$. Здесь $\boldsymbol{a}$ — последовательность всех свободных переменных в $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, не входящих в Γ_1, Δ_1, а $\boldsymbol{b}$ — последовательность всех свободных переменных в $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, не входящих в Γ_2, Δ_2. Тогда искомой формулой C является $\exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} C'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\forall$ рассматривается как сокращение для $\neg \exists \neg$.

Случай 3. Последний непосредственный вывод в P имеет вид

$$\frac{\Gamma_1'^{(a)},\ \Gamma_2'^{(a)} \to \Delta_1^{(a)},\ \Delta_2^{(a)}}{\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2,\ \Gamma_1'^{(b)},\ \Gamma_2'^{(b)} \to \Delta_1^{(b)},\ \Delta_2^{(b)},}$$

где Γ_1 есть $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1, \Gamma_1'^{(b)}$ и Γ_2 есть $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2, \Gamma_2'^{(b)}$. Это применение можно разбить на два: сначала подставить $\boldsymbol{b}_1$ вместо $\boldsymbol{a}_1$, затем подставить $\boldsymbol{b}_2$ вместо $\boldsymbol{a}_2$. Поэтому мы можем считать, что последовательность формул $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1$ пустая, т. е. совершается только подстановка $\boldsymbol{b}_2$ вместо $\boldsymbol{a}_2$. По предположению индукции найдется формула $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, для которой показываемая лемма справедлива применительно к секвенции $\Gamma_1'^{(a)},\ \Gamma_2'^{(a)} \to \Delta_1^{(a)},\ \Delta_2^{(a)}$, где $\boldsymbol{a}$ — последовательность, состоящая из всех переменных формулы $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, не входящих в Γ_1, Δ_1, а $\boldsymbol{b}$ — последовательность всех переменных этой формулы, не входящих в Γ_2, Δ_2. Если существует единственное i, такое, что $a_{2,\mu}$ является i-й переменной в $\boldsymbol{a}$, то $\breve{a}_{2,\mu}$ мы определим как i-ю переменную в $\boldsymbol{x}$. В противном случае $\breve{a}_{2,\mu}$ мы определим как $a_{2,\mu}$. Теперь в качестве формулы C возьмем $\exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} (\bigwedge_\mu \breve{a}_{2,\mu} = \breve{b}_{2,\mu} \wedge C'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$.

Случай 4. Последний непосредственный вывод в P имеет вид

$$\frac{\Phi, \Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2, \Psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2} \quad \text{для всех разбиений } (\Phi, \Psi).$$

По предположению индукции существуют формулы $C_{(\Phi, \Psi)}$, такие, что в **RHS** выводимы секвенции $C_{(\Phi, \Psi)}$, $\Gamma_1 \to \Delta_1$ и Φ, $\Gamma_2 \to \Delta_2$, Ψ, $C_{(\Phi, \Psi)}$. Поэтому секвенции

$$\bigvee_{(\Phi, \Psi)} C_{(\Phi, \Psi)}, \ \Gamma_1 \to \Delta_1$$

и

$$\Gamma_2 \to \Delta_2, \quad \bigvee_{(\Phi, \Psi)} C_{(\Phi, \Psi)}$$

также выводимы в **RHS**. Пусть $\boldsymbol{a}$ — последовательность всех свободных переменных в формуле $\bigvee_{(\Phi, \Psi)} C_{(\Phi, \Psi)}$, не входящих в Γ_2, Δ_2, и пусть $\boldsymbol{b}$ — последовательность тех же переменных, но не входящих в Γ_1, Δ_1. Формулу $\bigvee_{(\Phi, \Psi)} C_{(\Phi, \Psi)}$ мы обозначим через $C'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Тогда в качестве C возьмем $\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} C'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Замечание. В лемме 23.20 условие (1) не является существенным ограничением на вывод P, поскольку квантор $\forall$ можно выразить через $\neg$ и $\exists$. Заметим также, что всякий подвывод P; т. е. всякая часть P, состоящая из всех секвенций, расположенных выше данной секвенции, включая и ее, является выводом в системе **RHS**, поскольку P не содержит собственных переменных.

3. Пусть Γ_1, $\Gamma_2 \to \Delta_1$, Δ_2 — секвенция, о которой говорится в условии доказываемой теоремы. Существует некоторый вывод P секвенции Γ_1, $\Gamma_2 \to \Delta_1$, Δ_2 в однородной системе. Из доказательства теоремы о полноте видно, что вывод P можно выбрать так, чтобы выполнялось следующее условие:

3.1. Если некоторая переменная входит в две различные боковые формулы в качестве собственной переменной, то эти две формулы одинаковы.

Более того, без потери общности мы можем предположить, что P удовлетворяет также и следующим условиям:

3.2. Каждый квантор в P имеет вид $\exists$.

3.3. Высота всякой свободной переменной в Γ_1, $\Gamma_2 \to \Delta_1$, Δ_2 меньше высоты любой собственной переменной в P.

3.4. Высоты любых двух различных переменных в P различны.

Пусть $\Pi \to \Lambda$ — некоторая секвенция в P; через $\Phi(\Pi, \Lambda)$ обозначим последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_\mu, \ldots$, состоящую из всех формул A_μ, имеющих вид $\neg \exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}) \vee A(\boldsymbol{a})$, где $\exists \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ — главная формула некоторого применения правила $\exists$-слева выше $\Pi \to \Lambda$ и $A(\boldsymbol{a})$ — соответствующая боковая формула. Заменив секвенцию $\Pi \to \Lambda$ на $\Phi(\Pi, \Lambda)$, $\Pi \to \Lambda$ и вставив несколько подходящих применений структурных правил, мы получим новую фигуру P', для которой выполняются следующие условия:

1) P' удовлетворяет условиям (1) и (2) леммы 23.20.

2) Заключительная секвенция фигуры P' имеет вид (ср. с доказательством предложения 22.25)

$$\{\neg \exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda)\}, \ \Gamma_1,$$

$$\{\neg \exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu \boldsymbol{d}_\mu) \vee B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu)\}, \ \Gamma_2 \to \Delta_1, \ \Delta_2.$$

3) Высота любой переменной $c_{\lambda,\alpha}$ меньше, чем высота каждой из $a\lambda$, β. Высота любой переменной $d_{\mu,\alpha}$ меньше, чем высота каждой из $b\mu$, β.

4) Всякая свободная переменная или предикатная константа, входящая в $\exists \boldsymbol{z}_\lambda \exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda)$ и отличная от $=$, входит и в Γ_1, Δ_1, а каждая свободная переменная или предикатная константаа, отличная от $=$ и входящая в $\exists \boldsymbol{z}_\mu \exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu, \boldsymbol{z}_\mu)$, входит и в Γ_2, Δ_2.

5) Переменные $a_{\lambda,\alpha}$ и $b_{\mu,\beta}$ различны. (В противном случае мы можем изменить фигуру P' так, чтобы она удовлетворяла этому условию, поскольку вывод P удовлетворяет условию 3.1.)

Применив лемму 23.20, найдем формулу $C(\boldsymbol{a})$, для которой верны такие утверждения:

(a) Секвенции

$$C(\boldsymbol{a}), \ \{\neg \exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda)\}, \ \Gamma_1 \to \Delta_1$$

и

$$\{\neg \exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu) \vee B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu)\}, \quad \Gamma_2 \to \Delta_2, \quad C(\boldsymbol{a})$$

выводимы в **RHS**. Пусть Q_1 и Q_2 — выводы этих секвенций в **RHS**.

(b) Каждая свободная переменная или предикатная константа, кроме $=$, входящая в $C(\boldsymbol{a})$, входит также и в $\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda)\}$, Γ_1, Δ_1, и в $\{B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu)\}$, Γ_2, Δ_2.

(c) $\boldsymbol{a}$ — последовательность всех свободных переменных в $C(\boldsymbol{a})$, которые не входят ни в Γ_1, Δ_1, ни в Γ_2, Δ_2 и вполне упорядочены согласно своим высотам.

4. Рассмотрим следующую фигуру:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C(\boldsymbol{a}),\ (\neg\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda)),\ \Gamma_1 \overset{Q_1}{\to} \Delta_1}{C(\boldsymbol{a}),\ \{\exists \boldsymbol{x}'_\lambda(\neg\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{x}'_\lambda, \boldsymbol{c}_\lambda))\},\ \Gamma_1 \to \Delta_1}}{C(\boldsymbol{a}),\ \{\forall \boldsymbol{z}_\lambda \exists \boldsymbol{x}'_\lambda(\neg\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{x}'_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda))\},\ \Gamma_1 \to \Delta_1}}{\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} C(\boldsymbol{x}),\ \{\forall \boldsymbol{z}_\lambda \exists \boldsymbol{x}'_\lambda(\neg\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda) \vee A_\lambda(\boldsymbol{x}'_\lambda, \boldsymbol{z}_\lambda))\},\ \Gamma_1 \to \Delta_1,}$$

где f определено следующим образом:

(d) Если a_α совпадает с $b_{\mu,\gamma}$ для некоторого γ, то $f(\alpha) = \exists$.

(e) Если a_α совпадает с $a_{\lambda,\gamma}$ для некоторого γ, то $f(\alpha) = \forall$.

(f) Если a_α содержится в Γ_1, Δ_1, но не содержится в Γ_2, Δ_2, то $f(\alpha) = \forall$.

(g) Если a_α содержится в Γ_2, Δ_2, но не содержится в Γ_1, Δ_1, то $f(\alpha) = \exists$.

(h) Если не имеют место случаи (d)—(g), то $f(\alpha) = \exists$.

Высоты для свободных переменных в $\boldsymbol{a}_\lambda$, $\boldsymbol{c}_\lambda$, $C(\boldsymbol{a})$, Γ_1, Δ_1 определяются так же, как в P. Высоты всех остальных переменных в Q_1, согласно предложению 23.19, можно определить так, что вся фигура станет выводом в детерминированной логике. Это означает, что секвенция $\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} C(\boldsymbol{x})$, $\Gamma_1 \to \Delta_1$ общезначима. Секвенция $\Gamma_2 \to \Delta_2$, $\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} C(\boldsymbol{x})$ также общезначима, что легко вытекает из существования следующего вывода, удовлетворяющего условию (Q) (см. определение 23.14):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg\exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu) \vee B_\mu(\boldsymbol{b}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu)\},\ \Gamma_2 \overset{Q_2}{\to} \Delta_2,\ C(\boldsymbol{a})}{\{\exists \boldsymbol{y}'_\mu(\neg\exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu, \boldsymbol{d}_\mu) \vee B_\mu(\boldsymbol{y}'_\mu, \boldsymbol{d}_\mu))\},\ \Gamma_2 \to \Delta_2,\ C(\boldsymbol{a})}}{\{\forall \boldsymbol{z}_\mu \exists \boldsymbol{y}'_\mu(\neg\exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu, \boldsymbol{z}_\mu) \vee B_\mu(\boldsymbol{y}'_\mu, \boldsymbol{z}_\mu))\},\ \Gamma_2 \to \Delta_2,\ C(\boldsymbol{a})}}{\{\forall \boldsymbol{z}_\mu \exists \boldsymbol{y}'_\mu(\neg\exists \boldsymbol{y}_\mu B_\mu(\boldsymbol{y}_\mu, \boldsymbol{z}_\mu) \vee B_\mu(\boldsymbol{y}'_\mu, \boldsymbol{z}_\mu))\},\ \Gamma_2 \to \Delta_2,\ \mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} C(\boldsymbol{x}).}$$

Тем самым теорема 23.15 доказана.

Используя тот же метод, мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 23.21 (ср. с теоремой 23.15). *Пусть каждый квантор в секвенции Γ_1, $\Gamma_2 \to \Delta_1$, Δ_2 является однородным, причем эта секвенция общезначима и не содержит $=$, и пусть Γ_1, Δ_1 и Γ_2, Δ_2 имеют по крайней мере одну общую предикатную константу. Тогда найдется формула C, такая, что обе секвенции C, $\Gamma_1 \to \Delta_1$ и $\Gamma_2 \to \Delta_2$, C общезначимы и каждая свободная переменная или предикатная константа, входящая в C, содержится и в Γ_1, Δ_1, и в Γ_2, Δ_2.*

Замечание 23.22. В теоремах 23.15 и 23.21 мы можем добавить условие, что формула C содержит только один неоднородный квантор вначале.

Замечание 23.23. Для примера Малитца (см. § 22) изоморфизм между порядками $\overset{1}{<}$ и $\overset{2}{<}$ мы можем выразить следующей формулой:

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \ldots \Big(\bigwedge_i x_i \overset{1}{<} a \supset \bigwedge_i y_i \overset{2}{<} b \wedge \bigwedge_i \bigwedge_j ((x_i \overset{1}{<} x_j \equiv y_i \overset{2}{<} y_j) \wedge$$
$$\wedge\ (x_i \overset{1}{=} x_j \equiv y_i \overset{2}{=} y_j))\Big) \wedge$$
$$\wedge \forall y_1 \exists x_1 \forall y_2 \exists x_2 \ldots \Big(\bigwedge_i y_i \overset{2}{<} b \supset \bigwedge_i x_i \overset{1}{<} a \wedge \bigwedge_i \bigwedge_j ((x_i \overset{1}{<} x_j \equiv y_i \overset{2}{<} y_j) \wedge$$
$$\wedge\ (x_i \overset{1}{=} x_j \equiv y_i \overset{2}{=} y_j))\Big).$$

Порядковый тип элемента a в смысле $(\overset{1}{=}, \overset{1}{<})$ обозначим через $|a|_1$, а порядковый тип элемента b в смысле $(\overset{2}{=}, \overset{2}{<})$ — через $|a|_2$. Тогда $|a|_1 \leqslant |b|_2$ эквивалентно формуле

$$(*) \quad \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \ldots \Big(\bigwedge_i x_i \overset{1}{<} a \supset \bigwedge_i y_i \overset{2}{<} b \wedge \bigwedge_i \bigwedge_j ((x_i \overset{1}{<} x_j \equiv y_i \overset{2}{<} y_j) \wedge$$
$$\wedge\ (x_i \overset{1}{=} x_j \equiv y_i \overset{2}{=} y_j))\Big).$$

Это легко доказывается трансфинитной индукцией по $|a|_1$ следующим образом.

Пусть $A(a, b)$ обозначает формулу $(*)$. Допустим, что для каждого $c \overset{1}{<} a$ и каждого d формула $A(c, d)$ эквивалентна $|c|_1 \leqslant |d|_2$. Допустим также, что выполняется $A(a, b)$. Тогда для всякого $a_1 \overset{1}{<} a$ существует такой b_1, что выполняется $A(a_1, b_1)$, так как $\bigwedge_{i \geqslant 2}(x_i \overset{1}{<} a_1)$ влечет $\bigwedge_{i \geqslant 2}(x_i \overset{1}{<} a)$, и потому для x_2, y_2, ..., выбранных для пары (a_1, b_1) в $A(a, b)$, мы имеем $\bigwedge_{i \geqslant 2}(y_i \overset{2}{<} b_1)$. Тогда, сделав в $A(a, b)$ подходящие подстановки, мы получим $A(a_1, b_1)$. Поскольку $a_1 \overset{1}{<} a$, то в силу предположения индукции мы имеем $|a_1|_1 \leqslant |b_1|_2 < |b|_2$. Следовательно, $|a|_1 \leqslant |b|_2$.

Обратное очевидно.

Аксиома детерминированности (AD) представляет собой очень сильную аксиому, имеющую многочисленные интересные и важные приложения. Еще больше интересных следствий в математике имеет эта аксиома вместе с аксиомой зависимого выбора

DC $\qquad \forall x \exists y R(x, y) \to \forall x_0 \exists x_1 \exists x_2 \ldots \bigwedge_i R(x_i, x_{i+1}).$

В отличие от аксиомы выбора AC, которая также имеет важные применения в математике, статус аксиомы AD еще не установлен. Мы не знаем, совместима ли она с аксиомами теории множеств. Мы также не знаем, совместимы ли аксиомы AD и DC. Нам известно, что, хотя AD и влечет аксиому счетного выбора, она не совместима с полной аксиомой выбора. Если бы оказалось, что аксиома AD не совместима с теорией множеств, мы бы, конечно, перестали интересоваться ею. Но даже доказательства совместимости не было бы достаточно для наших целей, поскольку, чтобы извлечь из AD пользу для математики, нам нужно иметь транзитивную модель для $ZF + AD$, содержащую в качестве своего элемента множество-степень $P(\omega)$. На самом деле нам бы хотелось иметь транзитивную модель для $ZF + AD + DC$, которая содержала бы $P(\omega)$ в качестве своего элемента.

Относительно существования таких моделей нам известно следующее. Пусть $L_\beta(P(\omega))$ — множество, полученное из $P(\omega)$ путем β-кратной трансфинитной итерации восьми гёделевских основных операций, и пусть α — наименьшее β, такое, что $L_\beta(P(\omega))$ — модель для ZF. Тогда, как мы знаем, если существует транзитивная модель для $ZF + AD$, содержащая $P(\omega)$, то $L_\alpha(P(\omega))$ — модель для AD. Но нам известно также, что в $L_\alpha(P(\omega))$ выполняется аксиома DC.

Таким образом, имеются три возможности:

1) Аксиома AD не совместима с теорией множеств.

2) Аксиома AD совместима с теорией множеств, но не существует транзитивной модели для $ZF + AD$, содержащей $P(\omega)$.

3) $L_\alpha(P(\omega))$ является моделью для AD.

Если бы оказалось, что имеет место 1) или 2), то мы бы больше не интересовались аксиомой AD. Все наши надежды возлагаются на третью возможность, которая, как мы предполагаем, имеет место на самом деле. Однако мы не можем пока доказать, что $L_\alpha(P(\omega))$ является нужной моделью. Более того, в настоящее время, по-видимому, нет метода, который позволил бы решить этот вопрос. Поскольку эта гипотеза имеет важное значение, аксиома AD заслуживает тщательного изучения. В качестве вклада в это изучение мы установим связь между этой аксиомой и теоремой об устранении сечений.

Пусть M — некоторая транзитивная модель для $ZF + DC$, которая содержит $P(\omega)$. Модель M может быть множеством или собственно классом. Хотя у нас нет оснований предполагать, что в M выполняется аксиома AC, мы можем считать, что она выполняется в универсуме V всех множеств. Используя AC в V, мы докажем, что AD выполняется в модели M тогда и только тогда, когда для всякой M-определимой детерминированной логики справедлива теорема об устранении сечений. Для доказательства нам понадобятся следующие определения.

Определение 23.24. Мы говорим, что множество A *не более чем континуально* в M, если $A \in M$, $A \neq \varnothing$ и в M существует функция f, такая, что f отображает $P(\omega)$ на A.

Ясно, что если A и B — непустые множества из M и $B \subseteq A$, то B не более чем континуально в M при условии, что A не более чем континуально в M.

Поскольку M — модель, содержащая $P(\omega)$, то для всякого языка L, имеющего не более $\aleph_1$ символов, мы можем каждому символу и каждой формуле этого языка поставить в соответствие некоторую гёделизацию в M. Это дает нам возможность отождествить совокупности символов и формул языка с соответствующими множествами в M. Зная, что такое отождествление можно осуществить, мы будем говорить о множествах символов языка как о множествах в M. Помня об этом соглашении, мы введем понятие M-определимой детерминированной логики.

Определение 23.25. Язык L для *M-определимой детерминированной логики* состоит из следующих символов:

1) *Свободные переменные*: свободная переменная a_s для каждого s из $P(\omega)$.

2) *Связанные переменные*: $x_0, x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, \alpha < \omega_1$.

3) *Индивидные константы*: некоторое не более чем континуальное в M множество индивидных констант, содержащее $0, 1, 2, \ldots$.

4) *Предикатные константы*: некоторое не более чем континуальное в M множество индивидных констант. Арность каждой предикатной константы не больше ω.

5) *Логические символы*:

$=$ (равенство),

$\neg$ (не),

$\bigwedge$ (конъюнкции арности α для $\alpha \leqslant \omega$),

$\bigvee$ (дизъюнкции арности α для $\alpha \leqslant \omega$),

Q^f (неоднородные кванторы арности α для $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$).

Заметим, что множество свободных переменных не более чем континуально в M. Кроме того, поскольку $P(\omega)$ принадлежит M, $\omega_1 = \omega_1^M$, т. е. ординал ω_1 является M-абсолютным.

Формулы языка L мы определим следующим образом.

Пусть R — некоторая предикатная константа или символ $=$, и пусть R имеет арность α. Пусть $\{t_i\}_{i<\alpha}$ — произвольная последовательность термов. Тогда $R(t_0, t_1, \ldots)$ — атомарная формула.

Пусть A — формула. Тогда $\neg A$ — формула.

Пусть $\{A_i\}_{i<\alpha}$ — последовательность формул. Тогда $\bigwedge_{i<\alpha} A_i$ и $\bigvee_{i<\alpha} A_i$ — формулы.

Пусть $A(\boldsymbol{a})$ — формула, где $\boldsymbol{a}$ — последовательность свободных переменных $\{a_i\}_{i<\alpha}$, причем $\alpha \leqslant \omega$. Пусть $\boldsymbol{x}$ — последовательность связанных переменных $\{x_i\}_{i<\alpha}$, и пусть f отображает α в $\{\forall, \exists\}$. Тогда $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ — формула, где $A(\boldsymbol{x})$ получается из $A(\boldsymbol{a})$ заменой некоторых вхождений a_i на x_i для всякого i.

Пусть Γ и Δ — не более чем континуальные множества формул. Тогда выражение $\Gamma \to \Delta$ называется секвенцией.

Отметим, что мы не можем считать Γ и Δ вполне упорядоченными, так как не предполагается, что в M верна аксиома выбора.

Следствие 23.26. (1) *Если язык L фиксирован, то множество всех L-формул не более чем континуально.*

(2) *Для любой данной L-формулы число переменных, констант и логических символов, входящих в нее, не более чем континуально.*

Когда мы рассматриваем какие-то множества формул или множества свободных переменных, нам следует помнить, что они являются всего лишь множествами, т. е. они могут и не быть вполне упорядоченными.

Лемма 23.27. (1) *Рассмотрим какое-нибудь дерево высоты ω, у которого из каждого узла исходит ω ветвей. Это дерево можно отождествить с множеством ω^ω, которое не более чем континуально.*

(2) *Пусть α — некоторый не более чем континуальный ординал. Рассмотрим какое-нибудь дерево высоты ω, из каждого узла которого исходит α ветвей. Тогда это дерево можно отождествить с множеством α^ω, которое не более чем континуально.*

Определение 23.28. Выводы и правила вывода для M-определимой детерминированной логики определяются следующим образом.

1) Начальными секвенциями являются: логические начальные секвенции; секвенции вида $\to t = t$, где t — произвольный терм; секвенции вида $i = j \to$, где $i \neq j$ и $i, j < \omega$; секвенции вида $\to t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $\ldots$, где t — произвольный терм.

2) Правила вывода совпадают с правилами вывода для детерминированной логики, которые мы уже приводили. Следует помнить, что формулы в секвенциях образуют множества, которые не обязательно вполне упорядочены. Например, правило $\bigvee$-справа выглядит следующим образом:

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ \{A_{\lambda, i_\lambda}\}_{i_\lambda < \alpha_\lambda}}{\Gamma \to \Delta,\ \left\{\bigvee_{i<\alpha_\lambda} A_{\lambda, i}\right\}},$$

где $\alpha_\lambda \leqslant \omega$ и λ пробегает некоторое не более чем континуальное множество.

3) Фигура P называется *выводом в* M, если P принадлежит M и является выводом в обычном смысле, за исключением того, что понятие высоты нужно заменить на отношение $\prec$, удовлетворяющее следующим условиям:

3.1) Допустим, что a — собственная переменная в P и b — свободная переменная, входящая в главную формулу для a. Тогда $b \prec a$.

3.2) Допустим, что a — некоторая собственная переменная, $A(\boldsymbol{a})$ — ее боковая формула, $\mathrm{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x})$ — ее главная формула, и допустим, что a соответствует квантору $f(i)$. Если переменная b тоже входит в $\boldsymbol{a}$ и b соответствует квантору $f(j)$, где $j < i$, то $b \prec a$.

Ограничение на собственные переменные состоит просто в том, что отношение $\prec$ должно быть фундированным. Если $b \prec a$, то мы будем говорить, что *a зависит от b*.

Замечание. Формула, выражающая свойство „отношение $\prec$ фундировано“, является M-абсолютной, потому что всякое счетное подмножество свободных переменных (в V) является счетным подмножеством множества $P(\omega)$, а $P(\omega)$ принадлежит модели M, и, следовательно, это множество свободных переменных является счетным подмножеством в M.

Перед тем как перейти к дальнейшим рассуждениям, заметим, что в качестве индексов для свободных переменных, скажем s в a_s, где $s \in P(\omega)$, мы можем и будем использовать подмножества четных чисел. Таким образом, мы сможем беспрепятственно вводить новые свободные переменные.

Лемма 23.29. *Рассмотрим какое-нибудь счетное множество свободных переменных, скажем $\tilde{A} = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots\}$, где $\tilde{A}$ принадлежит M и $\ldots \prec a_{s_2} \prec a_{s_1}$ (в V). Определим отношение $R(a, b)$*

следующим образом:

$$R(a, b) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} a \in \tilde{A} \supset (b \in \tilde{A} \wedge b \prec a).$$

Тогда в M справедливо $\forall x_0 \exists x_1 x_2 \ldots \bigwedge_i R(x_i, x_{i+1})$.

Доказательство. Легко видеть, что в M имеет место $\forall x \exists y R(x, y)$; отсюда по аксиоме DC получается требуемая формула.

Определение 23.30. Квантор Q в формуле A называется *существенно сукцедентным*, если он находится в области действия четного числа знаков $\neg$. Секвенция $\Gamma \to \Delta$ называется *сукцедентно-однородной*, если каждый существенно сукцедентный квантор любой формулы из Δ является однородным и каждый не существенно сукцедентный квантор любой формулы из Γ также является однородным.

В следующем предложении мы предполагаем, что в языке L нет индивидных констант, отличных от символов 0, 1, 2, ... Это упрощает рассуждения.

Предложение 23.31. (1) *Если аксиома* AD *выполняется в M, то все выводимые в M-определимой детерминированной логике секвенции M-общезначимы, т. е. истинны в любой M-определимой структуре.*

(2) *Если какая-то секвенция имеет вывод, в котором все секвенции являются сукцедентно-однородными, то она M-общезначима.*

Отметим, что в (2) мы не предполагаем, что в M выполняется AD.

Доказательство. Допустим, что P — некоторый вывод секвенции $\Gamma \to \Delta$. Пусть $\prec$ — фундированное отношение между свободными переменными этого вывода. Этим свободным переменным мы можем поставить в соответствие ординалы таким образом, чтобы при $a \prec b$ ординал переменной a был меньше ординала переменной b. Начнем с тех переменных, которые не зависят ни от каких других переменных, и поставим им в соответствие значение 0. Затем поставим в соответствие ординал 1 тем переменным, которые зависят только от тех переменных, ординал которых равен 0. Продолжая таким образом, мы сможем поставить в соответствие ординалы всем переменным из P. В самом деле, допустим, что существуют переменные в P, которым в ходе этого процесса не были сопоставлены ординалы. Пусть $\tilde{A}$ — множество таких переменных. Тогда по лемме 23.29

$$\forall x_0 \exists x_1 x_2 \ldots \bigwedge_i (x_i \in \tilde{A} \supset (x_{i+1} \in \tilde{A} \wedge x_{i+1} \prec x_i)).$$

Поскольку $\tilde{A}$ непусто, это означает, что существует бесконечная последовательность $\{a_i\}_i$ элементов из $\tilde{A}$, такая, что $a_{i+1} \prec a_i$, а это противоречит фундированности отношения $\prec$.

Ординалы, поставленные в соответствие переменным вывода P указанным выше способом, будут называться высотами (этих переменных). Легко видеть, что они удовлетворяют условиям о высотах в первоначальном смысле.

Рассмотрим какую-нибудь M-определимую структуру $\mathscr{A}$. Заметим, что натуральные числа в $\mathscr{A}$ не обязательно являются натуральными числами в абсолютном смысле. Тем не менее они находятся во взаимно однозначном соответствии с настоящими натуральными числами. Поэтому мы можем предположить (без потери общности), что универсумом структуры $\mathscr{A}$ является ω и что константы 0, 1, 2, ... нашего языка интерпретируются естественным образом; таким образом, $\mathscr{A} = \langle \omega, 0, 1, 2, \ldots \rangle$.

Рассмотрим теперь все формулы и подформулы в P и соответствующие им функции Сколема $g_A^{f_i \, \nu}$ и $\bar{g}_A^{f_i \, \nu}$, определенные так же, как и выше. Пусть $\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ — некоторая формула, и предположим, что в $\boldsymbol{a}$ входят все свободные переменные этой формулы. Если $g_A^{f_i \, \nu}$ рассматривается как функция от $\boldsymbol{x}$ или от некоторых переменных из $\boldsymbol{x}$, тогда как $\boldsymbol{a}$ фиксируется, то она принадлежит M. Если же $g_A^{f_i \, \nu}$ рассматривается как функция от $\boldsymbol{x}$ и от некоторых переменных из $\boldsymbol{a}$, то нет гарантии, что эта функция принадлежит M. Несмотря на это, последующие рассуждения мы можем полностью провести в M, поскольку как только переменным из $\boldsymbol{a}$ приписаны определенные значения, функция $g_A^{f_i \, \nu}$ становится элементом модели M и символ $T_A^{f_i \, \nu}$ используется только в этом смысле. Мы построим такие функции и подставим их значения на собственных переменных вместо этих переменных. Полученная фигура P' может не быть элементом M, но каждая формула в P' станет формулой модели M, как только будут вычислены значения этих функций.

Процесс получения фигуры P' и задание интерпретации всех $g_A^{f_i \, \nu}$ и $\bar{g}_A^{f_i \, \nu}$ проводятся для утверждения (1) параллельно доказательству теоремы 23.4, а для утверждения (2) параллельно доказательству предложения 23.5. Аналогичным способом мы можем показать, что для произвольной секвенции вывода P', скажем для $\Gamma \to \Delta$: либо в Γ найдется формула, которая в $\mathscr{A}$ ложна, либо в Δ найдется формула, которая в $\mathscr{A}$ истинна. Для п. 6) доказательства теоремы 23.4 нам нужна была детерминированность структуры $\mathscr{A}$. Детерминированность структуры $\mathscr{A}$ является следствием того факта, что в M выполняется аксиома AD. Поскольку замена собственных переменных не меняет заключительной секвенции, это означает, что заключительная секвенция истинна в $\mathscr{A}$.

Определение 23.32. Обобщенное сечение называется *несущественным*, если все его высекаемые формулы представляют собой равенства, т. е. имеют вид $t_1 = t_2$; в противном случае обобщенное сечение называется *существенным*.

Всюду далее в оставшейся части этой главы под выводом без сечений мы будем подразумевать вывод, имеющий лишь несущественные обобщенные сечения.

Предложение 23.33. (1) *Если аксиома* AD *выполняется в* M, *то все* M*-общезначимые секвенции выводимы без сечений.*

(2) *Если секвенция* $\Gamma \to \Delta$ *сукцедентно-однородна и общезначима, то* $\Gamma \to \Delta$ *выводима без сечений.*

Доказательство. Мы следуем доказательству теоремы 23.6. Как было указано ранее, можно считать, что индексы свободных переменных представляют собой подмножества четных чисел; таким образом, мы можем вводить, когда это необходимо, новые свободные переменные. Пусть

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{\forall x\,(x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots)\},$$

и пусть $\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ — произвольная формула в $\Gamma \to \Delta$. Для каждой такой формулы введем функциональный символ $g_A^{f_i\gamma}$ (интерпретируемый как функция Сколема) для каждого x_γ в $\boldsymbol{x}$, если формула $\mathsf{Q}^f \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ существенно антецедентна, и символ $\bar{g}_A^{f_i\gamma}$, если она существенно сукцедентна. Пусть D — множество термов, порождаемых из индивидных констант и свободных переменных этими функциями Сколема. По лемме 23.27 множество всех подформул указанных формул не более чем континуально, и поэтому D не более чем континуально, поскольку индивидные константы и свободные переменные образуют некоторое множество D_0, которое не более чем континуально, а каждый этап применения функций Сколема увеличивает это множество не более чем на континуум, и нам нужно применить функции Сколема ω_1 раз (точнее, α раз для всех $\alpha < \omega_1$).

Термы в $D - D_0$ мы рассматриваем как свободные переменные и отождествляем их со свободными переменными, которые были сохранены (поэтому может случиться так, что одному терму в $D - D_0$ соответствует больше одной такой переменной). Между свободными переменными из $D - D_0$ можно определить естественный порядок $\prec$: если s входит в t, то $s \prec t$. Легко

показать, что $\prec$ — фундированное отношение и что $\prec$ — элемент модели M.

Итак, мы сделали все приготовления, нужные для доказательства полноты в теореме 23.6. В этом доказательстве в редукциях, касающихся кванторов, мы использовали подходящие термы из $D - D_0$.

Поскольку все термы в D принадлежат M, очевидно, что полученные таким образом (при построении дерева) секвенции являются элементами M и что они состоят не более чем из континуума формул. Например, в п. 6) доказательства теоремы 23.6 для термов $\boldsymbol{t}_{\lambda,\mu}$ имеется не более чем $(2^\omega)^\omega$ возможностей, т. е. не более чем континуум.

Случай 1. Каждая ветвь дерева $T(\tilde{\Gamma} \to \Delta)$ содержит секвенцию вида

$$\ldots D \ldots \to \ldots D \ldots \quad \text{или} \quad \ldots \to \ldots s = s \ldots .$$

Как и раньше, рассмотрим условие C. Для того чтобы показать, что секвенция $\tilde{\Gamma} \to \Delta$ удовлетворяет условию C, сделаем следующее. Пусть S', S'', ... обозначают секвенции в $T(\tilde{\Gamma} \to \Delta)$; определим такое отношение $R(S', S'')$:

$$\begin{aligned} R(S', S'') \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} (S' \in T(\tilde{\Gamma} \to \Delta) \wedge (S' \text{ не удовлетворяет условию C}) \supset \\ \supset S'' \in T(\tilde{\Gamma} \to \Delta) \wedge (S'' \text{ не удовлетворяет условию C}) \wedge \\ \wedge (S'' \text{ — непосредственный предок секвенции } S'). \end{aligned}$$

Если мы предположим, что $\tilde{\Gamma} \to \Delta$ не удовлетворяет условию C, то $\forall S' \exists S'' R(S', S'')$ истинно в M, и потому по аксиоме DC

$$\forall S_0 \exists S_1 S_2 \ldots \bigwedge_i R(S_i, S_{i+1}).$$

Взяв в качестве S_0 секвенцию $\tilde{\Gamma} \to \Delta$, заключаем, что существует бесконечная ветвь, которая не удовлетворяет условию C в противоречие с допущением случая 1.

Случай 2. Не имеет места случай 1. В этом случае мы можем построить для $\tilde{\Gamma} \to \Delta$ контрпример тем же способом, что и раньше. Вспомним, что область D принадлежит M. Следовательно, тот факт, что некоторая формула входит в антецедент или сукцедент, можно выразить в M.

Для доказательства утверждения (1) нам нужно показать, что секвенция $\mathsf{Q}^{\bar{f}} \boldsymbol{x} \neg A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) \to \mathsf{Q}^f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$ истинна во всякой M-структуре (см. случай 2 в конце доказательства теоремы 23.6). Это верно, поскольку в M выполняется AD. При доказательстве утверждения (2) этот случай не возникает, так как данная секвенция является сукцедентно-однородной.

Итак, мы получили некоторый вывод без сечений секвенции

$$\forall x (x=0 \lor x=1 \lor \ldots), \Gamma \to \Delta.$$

Поскольку имеет место

$$\dfrac{\dfrac{\to a=0,\ a=1,\ \ldots}{\to a=0 \lor a=1 \lor \ldots}}{\to \forall x (x=0 \lor x=1 \lor \ldots),}$$

мы получаем по правилу сечения секвенцию

$$\Gamma \to \Delta.$$

Однако это последнее сечение можно легко устранить.

Теорема 23.34. *Аксиома AD выполняется в модели M тогда и только тогда, когда для M-определимой детерминированной логики справедлива теорема об устранении сечений.*

Доказательство. 1. Допустим, что для M-определимой детерминированной логики справедлива теорема об устранении сечений, но аксиома AD в M не выполняется, а именно существует множество A в M, такое, что $A \subseteq \omega^\omega$ и AD не верна для A. Будем рассматривать A как предикатный символ. Пусть $i_0, i_1, \ldots$ — индивидные константы, каждая из которых может интерпретироваться любым из чисел $0, 1, \ldots$. Рассмотрим теперь два множества атомарных предложений:

$$\Gamma_0 = \{A(i_0, i_1, \ldots) \mid A(i_0, i_1, \ldots) \text{ истинно, где } A \text{ и } i_0, i_1, \ldots \text{ интерпретируются, как указано выше}\}$$

и

$$\Delta_0 = \{A(i_0, i_1, \ldots) \mid A(i_0, i_1, \ldots) \text{ ложно}\}.$$

Мы убедимся ниже, что обе секвенции

(1) $\forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \ldots A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots),\ \Gamma_0 \to \Delta_0$

и

(2) $\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 \ldots \neg A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots),\ \Gamma_0 \to \Delta_0$

общезначимы. Тогда, поскольку обе эти секвенции сукцедентно-однородны, из утверждения (2) предложения 23.33 следует, что эти секвенции выводимы без сечений.

Случай 1. A интерпретируется множеством, отличным от данного A. Тогда, поскольку $\Gamma_0 \cup \Delta_0$ исчерпывает все возможности для $A(i_0, i_1, \ldots)$, существует по крайней мере одна последовательность $(i_0, i_1, \ldots)$, такая, что либо предложение $A(i_0, i_1, \ldots)$ принадлежит Γ_0 и ложно, либо оно принадлежит Δ_0 и истинно. Следовательно, секвенция $\Gamma_0 \to \Delta_0$ истинна, откуда вытекает, что обе эти секвенции истинны.

Случай 2. A интерпретируется данным множеством A. Тогда формулы

$$\forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \ldots A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$$

и

$$\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 \ldots \neg A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$$

ложны; поэтому обе эти секвенции истинны.

Из (1) и (2) мы получаем, что секвенция

$$\forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \ldots A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots) \lor \lor \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 \ldots \neg A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots),\ \Gamma_0 \to \Delta_0$$

выводима в M-определимой детерминированной логике. С другой стороны, в этой же системе выводима и секвенция

$$\to \forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \ldots A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots) \lor \lor \exists x_0 \forall x_0 \exists x_1 \forall y_1 \ldots \neg A(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots).$$

Поэтому по правилу сечения выводима секвенция $\Gamma_0 \to \Delta_0$, но это невозможно. Следовательно, аксиома AD должна выполняться в M.

2. Если AD выполняется в M, то в силу утверждения (1) предложения 23.33 и утверждения (1) предложения 23.31 справедлива теорема об устранении сечений.

Теорема 23.34 доказана.

Теперь мы укажем некоторую связь между теоремой об устранении сечений и инфинитарным пропозициональным исчислением **IPC** — бескванторным фрагментом инфинитарной логики. Система **IPC** является одновременно как детерминированной логикой, так и обычной инфинитарной логикой. Следовательно, всякая выводимая в **IPC** секвенция общезначима.

Пусть Γ_0 — некоторое множество бескванторных предложений. Хорошо известно, что если Γ_0 непротиворечиво (относительно **IPC**), то Γ_0 имеет модель.

Предложение 23.35. *Пусть M — указанная выше модель. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(1) *Для M-определимой детерминированной логики справедлива теорема об устранении сечений.*

(2) *Пусть Γ_0 — некоторое множество бескванторных предложений, и допустим, что Γ_0 принадлежит M. Если Γ_0 непротиворечиво относительно* **IPC**, *то Γ_0 непротиворечиво и относительно M-определимой детерминированной логики.*

Доказательство. Очевидно, из (1) вытекает (2). Допустим, что теорема об устранении сечений не верна. Тогда по теореме 23.34 в M найдется некоторый контрпример для AD, скажем $A \subseteq \omega^\omega$. В доказательстве этой теоремы множество формул $\Gamma_0 \cup \neg\Delta_0$, где $\neg\Delta_0$ состоит из всех формул вида $\neg B$ для B из Δ_0, непротиворечиво относительно **IPC**, так как моделью может служить множество A. С другой стороны, секвенция $\Gamma_0 \to \Delta_0$ выводима в M-определимой детерминированной логике, и поэтому $\Gamma_0 \cup \neg\Delta_0$ противоречиво относительно детерминированной логики.

Задача 23.36. Снова примем AC и будем считать, что антецеденты и сукцеденты секвенций вполне упорядочены. Рассмотрим следующий язык:

1. Индивидные константы: 0, 1, 2, ...
2. Связанные переменные: $x_0, x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \omega_1)$.
3. Свободные переменные: $a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots$ $(\alpha < 2^{\aleph_0})$.
4. Предикатные константы: $=$ и $R_1, R_2, R_3, \ldots$, где R_i является i-местной константой.
5. Логические символы: $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \mathsf{Q}_1, \mathsf{Q}_2$.

Под термом мы понимаем индивидную константу или свободную переменную.

Формулы и их порядки определим одновременно следующим образом. (Порядок формулы будет представлять собой натуральное число.)

1. Если t_i — терм при любом $i < n$, то $t_0 = t_1$ и $R_n(t_0, \ldots, t_{n-1})$ — атомарная формула, и порядок атомарной формулы равен 0.
2. Если A — формула, то и $\neg A$ — формула. Порядок формулы $\neg A$ совпадает с порядком формулы A.
3. Если A_i — формула при любом $i < \omega$ и существует максимум порядков формул A_i $(i < \omega)$, то $\bigwedge_{i<\omega} A_i$ и $\bigvee_{i<\omega} A_i$ — формулы и порядок их совпадает с максимумом порядков формул A_i $(i < \omega)$.
4. Если $A(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ $(i < \omega)$ — формула и $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ $(i < \omega)$ — различные связанные переменные, не входящие в $A(a_0, a_1, \ldots)$, то

$$\forall x_0 x_1 \ldots A(x_0, x_1, \ldots) \quad \text{и} \quad \exists x_0 x_1 \ldots A(x_0, x_1, \ldots)$$

— формулы и порядок этих формул равен $n+1$, где n — порядок формулы $A(a_0, a_1, \ldots)$.
5. Если $A(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ $(i < \omega)$ — формула, не имеющая вхождений символов Q_1 и Q_2, а $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ $(i < \omega)$ — различные связанные переменные, не входящие в $A(a_0, a_1, \ldots)$, то $\mathsf{Q}_i x_0 x_1 \ldots A(x_0, x_1, \ldots)$ $(i = 1, 2)$ — формулы и порядок этих формул равен $n+1$, где n — порядок формулы $A(a_0, a_1, \ldots)$.

Выражения $\mathsf{Q}_1 x_0 x_1 x_2 \ldots$ и $\mathsf{Q}_2 x_0 x_1 x_2 \ldots$ также обозначаются через $\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \ldots$ и $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \ldots$ соответственно.

Всякая секвенция имеет вид

$$A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots \to B_0, B_1, \ldots, B_\beta, \ldots,$$

где все A_α и B_β — формулы, а α и β пробегают множество ординалов, меньших, чем α_0 и β_0 соответственно, где α_0 и β_0 — некоторые счетные ординалы.

Правила вывода такие же, как и в § 22, за исключением того, что теперь требуется, чтобы длины секвенций были счетными. Конечно, кванторы $\forall, \exists, \mathsf{Q}_1, \mathsf{Q}_2$ можно было бы выразить через неоднородные кванторы Q^f подходящего вида.

Нелогические начальные секвенции имеют следующий вид:

1. $\to t = t$, где t — произвольный терм.
2. $i = j \to$, где i и j — различные индивидные константы.
3. $\to t = 0, t = 1, t = 2, \ldots$, где t — произвольный терм.

Доказать следующую теорему.

Теорема 23.37. *Проективная детерминированность*[1]) *имеет место тогда и только тогда, когда каждая секвенция, выводимая в описанной выше системе, выводима в ней без сечений*

Доказательство проводится так же, как для теоремы 23.34.

§ 24. Общая теория неоднородных кванторов

Проблема полноты логических систем — интересная и важная проблема. Здесь многое уже известно, но имеются и открытые вопросы. Мы знаем, например, что логика первого порядка полна, тогда как логика второго порядка неполна. Относительно инфинитарных языков нам известно, что однородные системы являются полными, а полны ли неоднородные системы — открытый вопрос.

Неполнота логической системы всегда является неисправимым недостатком. В системах второго и высших порядков этот недостаток мы могли частично компенсировать сильной зависимостью от аксиом выделения и аксиомы выбора. Однако в инфинитарных языках у нас нет аксиом выделения, а в детерминированной логике имеет место даже отрицание аксиомы выбора. Поэтому возникает естественный вопрос: существуют ли в инфинитарных языках полезные аналоги аксиом выделения и аксиомы выбора? В этом параграфе мы изучим такие аналоги. Для этого мы разовьем общую теорию неоднородных

[1]) Проективная детерминированность означает, что аксиома AD верна для всех проективных множеств $A \subseteq \omega^\omega$. — *Прим. перев.*

кванторов, частный вид которых составляют кванторы Q^f в детерминированной логике.

Система, которую мы опишем, представляется нам очень полезной. Вопрос о том, как расширить эту систему до полной, является открытым. Перед тем как приступить к определениям, нам бы хотелось сделать несколько замечаний относительно этой системы. Одно из них состоит в том, что в правилах введения квантора справа и слева мы не имеем двойственности, присущей конечным языкам и детерминированной логике. Мы будем предполагать, что формальные объекты нашей системы вполне упорядочены, но это допущение делается только для удобства и не существенно для теории. Для дальнейшего упрощения мы всегда будем опускать индивидные и функциональные константы, если не оговорено противное. Наконец, отметим, что мы не будем оговаривать количество связанных и свободных переменных. Понятно, что сначала мы образуем достаточный запас связанных переменных. Зафиксировав число связанных переменных, мы затем добавляем достаточный запас свободных переменных. Для объяснения того, что значит „достаточный запас", мы отсылаем читателя к рассуждениям, приведенным после определения 22.1.

Определение 24.1. (1) Под языком $\mathrm{L}(J)$ с неоднородными кванторами, где J — некоторое множество функций, отображающих β в $P(\alpha)$ для некоторых α и β, мы понимаем следующую совокупность символов:

1) *Переменные*:
   1.1) свободные переменные: $a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots$;
   1.2) связанные переменные: $x_0, x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$.
2) *Предикатные константы* арности α для некоторых α:
$$P_0^\alpha, P_1^\alpha, \ldots, P_\xi^\alpha, \ldots .$$
3) *Логические символы*:
   $\neg$ (отрицание),
   $\supset$ (импликация),
   $\bigvee$ (дизъюнкции арности α для некоторых α),
   $\bigwedge$ (конъюнкции арности α для некоторых α),
   $\forall$ (кванторы всеобщности арности α для некоторых α),
   $\exists$ (кванторы существования арности α для некоторых α),
4) *Неоднородные кванторы*: квантор Q^T для каждого T из J.
5) *Вспомогательные символы*: (,).

(2) Формулы языка $\mathrm{L}(J)$ определяются обычным образом, но с некоторыми изменениями, а именно:

(2.1) Если связка $\bigvee(\bigwedge)$ арности α принадлежит $\mathrm{L}(J)$ и A_μ, $\mu<\alpha$, — последовательность формул, то $\bigvee_{\mu<\alpha}A_\mu\ (\bigwedge_{\mu<\alpha}A_\mu)$ — формула.

(2.2) Пусть T — некоторая функция из J. Тогда для некоторых α и β T отображает β в $P(\alpha)$. Пусть $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — формула, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — последовательности свободных переменных длин α и β соответственно. Предполагаем, что некоторые (возможно, ни одно) вхождения переменных из $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отмечены. Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — последовательности длины α и β соответственно, состоящие из связанных переменных, которые не входят в $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Тогда $\mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — формула.

(3) Как и раньше, мы предполагаем, что совокупность формул языка $\mathrm{L}(J)$ замкнута относительно подстановок.

(4) Пусть K — мощность множества формул языка. Секвенция $\Gamma\to\Delta$ определяется как обычно, причем длины последовательностей Γ и Δ должны быть меньше, чем K^+.

Пример 24.2. Рассмотрим язык $\mathrm{L}(J)$, имеющий счетное число свободных переменных (упорядоченных по типу ω), логические символы которого имеют конечную арность, а множество J произвольно. Это значит, что пропозициональные связки действуют так же, как и для обычных, конечных языков, и имеется ω свободных переменных. Мы будем считать, что имеется ω связанных переменных и единственная предикатная константа $=$. Пусть T — функция из $\{0, 1\}$ в $P(\{0, 1\})$, такая, что $T(0)=\{0\}$ и $T(1)=\{1\}$. Тогда
$$(a_0=a_1\equiv b_0=b_1)\wedge b_0\neq c$$
— формула этого языка, которую мы обозначим через $A(a_0, a_1, b_0, b_1)$, причем предполагается, что все вхождения переменных a_0, a_1, b_0, b_1 отмечены. Поэтому
$$\mathsf{Q}^T(x_0, x_1; y_0, y_1)\,A(x_0, x_1, y_0, y_1)$$
— также формула. Мы собираемся описать некоторую систему, в которой эта формула означает, что для всякого x_0 найдется y_0, зависящее только от x_0, и для всякого x_1 найдется y_1, зависящее только от x_1, такие, что имеет место $A(x_0, x_1, y_0, y_1)$. Такие кванторы, называемые *зависимыми* кванторами, были впервые предложены Генкиным.

Определение 24.3. Правила вывода описываемой системы те же, что и в определении 22.1, но с некоторыми изменениями. Мы отметим только самые главные отличия.

1) Правила $\bigwedge$-слева, $\bigwedge$-справа, $\bigvee$-слева и $\bigvee$-справа в п. (4.2) определения 22.1 допускаются только для конъюнкций и дизъюнкций, которые принадлежат языку $\mathrm{L}(J)$, т. е. только для значений β_λ арностей конъюнкций и дизъюнкций, которые принадлежат $\mathrm{L}(J)$.

2) Правила для кванторов здесь совсем другие.

2.1) Q-*слева*:

$$\frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda,\ \boldsymbol{b}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma\to\Delta}{\{\mathrm{Q}^{T_\lambda}(\boldsymbol{x}_\lambda;\ \boldsymbol{y}_\lambda)\,A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda,\ \boldsymbol{y}_\lambda\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma\to\Delta,}$$

где переменные из $\boldsymbol{b}_\lambda$ не входят в $A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda,\ \boldsymbol{y}_\lambda)$. Если $\boldsymbol{a}_\lambda$ и $\boldsymbol{b}_\lambda$ имеют типы α_λ и β_λ соответственно, то T_λ — функция из J, отображающая β_λ в $P(\alpha_\lambda)$.

Всякая переменная последовательности $\boldsymbol{b}_\lambda$, скажем b, называется *собственной переменной* этого правила, $A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda,\ \boldsymbol{b}_\lambda)$ — *боковой формулой* для переменной b, а $\mathrm{Q}^{T_\lambda}(\boldsymbol{x}_\lambda;\ \boldsymbol{y}_\lambda)\,A(\boldsymbol{x}_\lambda,\ \boldsymbol{y}_\lambda)$ — *главной формулой* для b.

2.2) Q-*справа*:

$$\frac{\Gamma\to\Delta,\ \{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda,\ \boldsymbol{b})\}_{\lambda<\gamma}}{\Gamma\to\Delta,\ \{\mathrm{Q}^{T_\lambda}(\boldsymbol{x}_\lambda;\ \boldsymbol{y}_\lambda)\,A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda,\ \boldsymbol{y}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},}$$

где если $\boldsymbol{a}_\lambda$ и $\boldsymbol{b}_\lambda$ имеют типы α_λ и β_λ соответственно, то T_λ — функция из J, отображающая β_λ в $P(\alpha_\lambda)$.

Каждая переменная последовательности $\boldsymbol{a}_\lambda$, скажем a, называется *собственной переменной* этого правила, $A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda,\ \boldsymbol{b}_\lambda)$ — боковой формулой для переменной a и $\mathrm{Q}^{T_\lambda}(\boldsymbol{x}_\lambda;\ \boldsymbol{y}_\lambda)\,A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda,\ \boldsymbol{y}_\lambda)$ — главной формулой для a.

3) Правило сечения заменяется на правило обобщенного сечения (о.с.).

Определение 24.4. Выводы в рассматриваемой системе определяются обычным образом, т. е. как деревья, состоящие из секвенций, для которых должны выполняться следующие *ограничения на собственные переменные*:

1) Если какая-то свободная переменная b используется в качестве собственной более чем один раз, то главные формулы для всех этих b должны быть одинаковыми.

2) Допустим, что $A(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_1)$ и $A(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_2)$ — главные формулы некоторых применений правила Q-слева, в которых b — собственная переменная.

2.1) Если b является α-й переменной в $\boldsymbol{b}_1$, то b является α-переменной и в $\boldsymbol{b}_2$.

2.2) Пусть $a_{1,\lambda}$ и $a_{2,\lambda}$ обозначают λ-е переменные в $\boldsymbol{a}_1$ и в $\boldsymbol{a}_2$ соответственно. Допустим, что b является α-й переменной и в $\boldsymbol{b}_1$, и в $\boldsymbol{b}_2$. Тогда для всякого λ из $T(\alpha)$ переменные $a_{1,\lambda}$ и $a_{2,\lambda}$ совпадают.

Пусть a — свободная переменная, представляющая собой $a_{1,\lambda}$ или $a_{2,\lambda}$, где $\lambda\in T(\alpha)$, или же некоторую свободную переменную в главной формуле для переменной b. Тогда мы будем говорить, что b зависит от a, и писать в этом случае $a\prec b$.

Замечание 24.5. Из указанных выше ограничений не вытекает, что последовательности $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$, о которых говорится в п. 2), идентичны. Не гарантируется также, что совпадают $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Даже если окажется, что $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ совпадают, то $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ могут не совпадать. Например, возможно, что $a_{1,\lambda}$ и $a_{2,\lambda}$ различаются, если ни одна переменная в $\boldsymbol{b}_1$ не зависит от $a_{1,\lambda}$ и ни одна переменная в $\boldsymbol{b}_2$ не зависит от $a_{2,\lambda}$.

3) Все боковые формулы для любой собственной переменной применения правила Q-справа совпадают.

В этом случае зависимость определяется только между собственными переменными и свободными переменными главной формулы. Пусть a — некоторая собственная переменная в $\boldsymbol{a}$, и пусть c — некоторая свободная переменная в $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. Тогда a зависит от c, т. е. $c\prec a$.

4) Никакая собственная переменная не входит в заключительную секвенцию вывода.

5) Мы будем писать $a\prec b$ также в случае, если найдется конечная последовательность свободных переменных $a_0,\ \ldots,\ a_n$, такая, что $a_0=a$, $a_n=b$ и $a_i\prec a_{i+1}$ для $0\leqslant i\leqslant n-1$ в смысле пп. 2) и 3). Тогда отношение $\prec$ является частичным вполне-упорядочением, т. е. не существует циклов $a_1\prec a_2\prec\ldots\prec a_1$ и не существует бесконечной убывающей последовательности переменных $\{a_i\}_{i<\omega}$.

5) Запись $a_1\preceq a_2$ будет означать, что или $a_1\prec a_2$, или a_1 и a_2 совпадают. Существует вполне-упорядочение всех боковых формул применений правила Q-справа в выводе P, скажем $\{A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi,\ \boldsymbol{b}_\xi)\}_\xi$, которое удовлетворяет следующим ниже условиям, причем одна и та же формула $A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi,\ \boldsymbol{b}_\xi)$ может входить в P в нескольких местах.

Пусть $\mathrm{Q}^{T_\xi}(\boldsymbol{x}_\xi;\boldsymbol{y}_\xi)\,A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi,\ \boldsymbol{y}_\xi)$ — главная формула для некоторой собственной переменной и $A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi,\ \boldsymbol{b}_\xi)$ — соответствующая боковая формула.

6.0) Если $b_{0,\sigma}$ является σ-й переменной в $\boldsymbol{b}_0$, то множество

$$\{e\mid e\preceq b_{0,\sigma}\text{ и } e \text{ — собственная переменная некоторого применения правила Q-справа}\}$$

является подмножеством множества

$$\{a_{0,\lambda}\mid a_{0,\lambda}\text{ есть }\lambda\text{-я переменная из } a_0 \text{ и } \lambda\in T_0(\sigma)\},$$

и если c — свободная переменная формулы A_0, не входящая ни в $\boldsymbol{a}_0$, ни в $\boldsymbol{b}_0$, то ни для какой собственной переменной $\boldsymbol{e}$ при $e\preceq c$ в P нет применений правила Q-справа.

6.ξ) Если $b_{\xi,\beta}$ является α-й переменной последовательности $\boldsymbol{b}_\xi$, то множество

$$\{e \mid e \preceq b_{\xi,\alpha} \text{ и } e \text{ — собственная переменная некоторого применения правила Q-справа}\}$$

является подмножеством множества

$$\bigcup_{\eta<\xi} \boldsymbol{a}_\eta \cup \{a_{\xi,\lambda} \mid \lambda \in T_\xi(\alpha)\}.$$

Кроме того, если c — свободная переменная в A_ξ, не входящая в $\boldsymbol{a}_\xi$ и в $\boldsymbol{b}_\xi$, то множество

$$\{e \mid e \preceq c \text{ и } e \text{ — собственная переменная некоторого применения правила Q-справа}\}$$

является подмножеством множества $\bigcup_{\eta<\xi} \boldsymbol{a}_\xi$.

Соглашение об обозначениях. Для относительно простых кванторов мы будем использовать интуитивно более наглядные обозначения. Например, через

$$\begin{pmatrix} \forall x\ \exists u \\ \forall y\ \exists w \end{pmatrix} A(x, y, u, w)$$

будем обозначать формулу $\mathrm{Q}^T(xy;\ uw)\, A(x, y, u, w)$, где $T(0) = \{0\}$ и $T(1) = \{1\}$. Квантор $\mathrm{Q}^T(x_0x_1 \ldots;\ )$ можно обозначать обычным образом через $\forall x_0x_1 \ldots$, а квантор $\mathrm{Q}^T(\ ;\ x_0x_1 \ldots)$ — через $\exists x_0x_1 \ldots$.

Пример 24.6. Примеры выводов с неоднородными кванторами.

1) Секвенция

$$\begin{pmatrix} \forall x\ \exists u \\ \forall y\ \exists w \end{pmatrix} ((x = y \equiv u = w) \wedge u \neq a) \to \exists z_0 z_1 \ldots \bigwedge_{i \neq j} (z_i \neq z_j)$$

является выводимой.

Доказательство. Выводимость секвенции

(1) $$\{(c_{k+j} = c_k \equiv c_{k+j+1} = a_k) \wedge c_{k+j+1} \neq c_0\}_{k,\, j<\omega} \to \bigwedge_{i \neq j} (c_i \neq c_j)$$

очевидна. Из (1) по правилу Q-справа, не используя собственных переменных, получаем

(2) $$\{(c_{k+j} = c_k \equiv c_{k+j+1} = a_k) \wedge c_{k+j+1} \neq c_0\}_{k,\, j<\omega} \to \exists z_0 z_1 \ldots \bigwedge_{i \neq j} (z_i \neq z_j).$$

Рассмотрим формулу $(c_{k+j} = c_k \equiv c_{k+j+1} = a_k) \wedge c_{k+j+1} \neq c_0$, которую обозначим через $A(c_{k+j}, c_k, c_{k+j+1}, a_k)$ (т. е. c_0 в A не отмечено). Положим $T(0) = \{0\}$ и $T(1) = \{1\}$. Тогда $\mathrm{Q}^T(xy;\ uw)\, A(x, y, u, w)$ представляет собой

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists w \end{pmatrix} ((x = y \equiv u = w) \wedge u \neq c_0).$$

Это верно для всех пар (k, j); поэтому, применив ко всем формулам в антецеденте секвенции (2) правило Q-слева, а затем сокращение, мы получим

$$\mathrm{Q}^T(xy;\ uw)\, A(x, y, u, w) \to \exists z_0 z_1 \ldots \bigwedge_{i \neq j} (z_i \neq z_j).$$

Заменив c_0 на a, мы приходим к нужной секвенции. Чтобы удостовериться, что мы действительно получили вывод, проверим, что выполнены условия 1) — 6) из определения 24.4. Так как имеется только одна главная формула, то условие 1) очевидно. Также очевидно и 2.1), поскольку все c являются первыми, а все a — вторыми собственными переменными во всех боковых формулах. Для проверки 2.2) положим $b = c_{k+j+1}$. Тогда $T(0) = \{0\}$ и 0-я переменная в (c_{k+j}, c_k), т. е. c_{k+j}, однозначно задается по b. Аналогично проводятся рассуждения для a_k. Поскольку в применении правила Q-справа нет собственных переменных, мы не беспокоимся об условии 3). Так как собственными переменными являются лишь c_{k+j+1} и a_k, а не c_0, условие 4) очевидно. Что касается условия 5), то соотношения $c_{k+j} \prec c_{k+j+1}$, $c_k \prec a_k$, $c_0 \prec c_{k+j+1}$, $c_0 \prec a_k$ исчерпывают все отношения зависимости между свободными переменными вывода. Легко видеть, что отношение $\prec$ есть частично вполнеупорядочение. Ясно, что условие 6) выполняется.

2) Секвенция

$$\forall x \exists y A(x, y),\ \forall x \forall y (A(x, y) \supset y \neq c_0),$$
$$\forall x \forall y \forall u \forall v (A(x, u) \wedge A(y, v) \supset (x = y \equiv u = v)) \to$$
$$\to \begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix} ((x = y \equiv u = v) \wedge u \neq c_0)$$

выводима.

Доказательство. Очевидно, выводима секвенция

$$A(a, c),\ A(b, d),\ A(a, c) \supset c \neq c_0,$$
$$A(a, c) \wedge A(b, d) \supset (a = b \equiv c = d) \to$$
$$\to (a = b \equiv c = d) \wedge c \neq c_0.$$

Мы можем ввести в антецеденте кванторы $\forall$ для всех переменных, кроме c_0. Пусть $B(a, b, c, d)$ обозначает формулу $(a = b \equiv c = d) \wedge c \neq c_0$. Пусть $T(0) = \{0\}$ и $T(1) = \{1\}$. Тогда $\mathrm{Q}^T(xy;\ uv)\, B(x, y, u, v)$ — формула в сукцеденте.

Кроме того, условие 5) о собственных переменных выполнено очевидным образом. Поскольку имеется только одна боковая формула во введении квантора Q справа, легко видеть, что выполняется и 6).

Определение 24.7. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая структура для нашего языка. Пусть Φ — оценка на $\mathscr{A}$. Отношение „формула A выполнена в структуре $\mathscr{A}$ при оценке Φ" определяется, как обычно. Мы говорим, что формула $Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ выполняется, если справедливо следующее. Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют длины α и β соответственно, и пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — новые свободные переменные, соответствующие этим $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Существует последовательность функций $\boldsymbol{f}$, соответствующая последовательности переменных $\boldsymbol{b}$ и такая, что для каждой последовательности $\boldsymbol{d}$ длины α, составленной из элементов структуры $\mathscr{A}$, формула $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ выполняется в $\mathscr{A}$ при оценке Φ', где

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{d}}) \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{d}})$ — последовательность, γ-м членом которой является $f_\gamma(d_{\xi_0}, d_{\xi_1}, \ldots, d_{\xi_i}, \ldots)$, и $T(\gamma) = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots\}$.

Теорема 24.8 (корректность системы неоднородных кванторов). *Каждая теорема нашей системы неоднородных кванторов общезначима.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 23.4. Пусть даны некоторый вывод P в этой системе, структура $\mathscr{A}$ и оценка на $\mathscr{A}$. Возьмем произвольную формулу из антецедента какой-нибудь секвенции, начинающуюся с квантора, скажем

$$Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}),$$

где $\boldsymbol{c}$ — последовательность всех свободных переменных в этой формуле, а длины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равны α и β соответственно. Для каждого $\gamma < \beta$ введем функцию Сколема

$$g_A^{T,\gamma}(x_{\xi_0}, x_{\xi_1}, \ldots, \boldsymbol{c}),$$

где $x_{\xi_0}, x_{\xi_1}, \ldots$ — все переменные из $\boldsymbol{x}$, такие, что $\xi_i \in T(\gamma)$. Функция $g_A^{T,\gamma}$ интерпретируется следующим образом относительно структуры $\mathscr{A}$. Если формула $Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ выполняется в $\mathscr{A}$, то в $\mathscr{A}$ выполняется и

$$(+) \qquad \forall \boldsymbol{x} A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{c}),$$

где γ-м членом последовательности $\boldsymbol{y}'$ является $g_A^{T,\gamma}(x_{\xi_0}, x_{\xi_1}, \ldots, \boldsymbol{c})$. Если же формула $Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ не выполняется в $\mathscr{A}$, то все $g_A^{T,\gamma}$ интерпретируются постоянными функциями, принимающими некоторое выделенное значение из универсума структуры $\mathscr{A}$.

Вполне упорядочим все собственные переменные для применений правила Q-справа в P так, чтобы a предшествовала b в этом упорядочении, если $a \prec b$ (b зависит от a):

$$b_0, b_1, \ldots, b_\delta, \ldots.$$

Трансфинитной индукцией по δ определим термы $t_0, t_1, \ldots, t_\delta, \ldots$. Считая, что все $\boldsymbol{t}_{<\delta}$ уже определены, мы покажем, как определить t_δ.

Допустим, что главной формулой для b_δ является $Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$, и пусть d — переменная в боковой формуле для b_δ, соответствующая некоторой переменной из $\boldsymbol{x}$ и такая, что $d \prec b_\delta$. Если d не является собственной переменной никакого применения правила Q-слева, то определим u, соответствующее переменной d, как d; в противном случае d входит в указанный выше список собственных переменных и поэтому представляет собой $b_\varkappa$, $\varkappa < \delta$, поскольку $d \prec b_\delta$. Следовательно, $t_\varkappa$ уже определен, и возьмем его в качестве u. Пусть c — некоторая свободная переменная из $\boldsymbol{c}$. Терм s, соответствующий переменной c, определяется как u, соответствующее переменной d; вспомним, что, согласно ограничению на собственные переменные, $c \prec b_\delta$. Следует заметить, что эти d и c одни и те же для всех боковых формул переменной b_δ в силу ограничения на собственные переменные. Тогда t_δ можно определить как $g_A^{T,\lambda}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s})$. Из определения вытекает, что для некоторой переменной в t_δ, скажем d, выполняется $d \prec b_\delta$. Подставим теперь в P вместо $b_0, b_1, \ldots, b_\delta, \ldots$ соответственно $t_0, t_1, \ldots, t_\delta, \ldots$. Пусть P' — фигура, полученная таким образом из P.

Пусть $\{A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi, \boldsymbol{b}_\xi, \boldsymbol{c}_\xi)\}_\xi$ — вполне-упорядочение боковых формул применений правила Q-справа в P, удовлетворяющее условиям, указанным в п. 6) определения 24.4, где $\boldsymbol{c}_\xi$ — последовательность всех свободных переменных в A_ξ, не входящих в $\boldsymbol{a}_\xi$ и $\boldsymbol{b}_\xi$.

Подстановку термов вместо собственных переменных, соответствующих введениям квантора Q справа в P', определим следующим образом.

Допустим, что подстановка уже выполнена на ξ-м этапе и привела к фигуре P_ξ.

Применив эту подстановку к $\{A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi, \boldsymbol{b}_\xi, \boldsymbol{c}_\xi)\}_\xi$, мы получим некоторые формулы в P', которые обозначим через $\{A_\xi(\boldsymbol{a}_\xi, \boldsymbol{b}'_\xi, \boldsymbol{c}'_\xi)\}_\xi$. Здесь $\boldsymbol{b}'_\xi$ и $\boldsymbol{c}'_\xi$ — термы, которые могут содержать много свободных переменных. Согласно п. 6) из определения 24.4, термы $b'_{\xi,\sigma}$ и $c'_{\xi,\sigma}$ удовлетворяют следующему условию:

(*) Собственные переменные применений правила Q-справа, содержащиеся в $b'_{\xi,\sigma}$, образуют подмножество множества

$$\bigcup_{\eta<\xi} \boldsymbol{a}_\eta \cup \{a_{\xi,\lambda_0}, a_{\xi,\lambda_1}, \ldots\},$$

где

$$\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\} = T_\xi(\sigma),$$

и любая собственная переменная, соответствующая применению Q-справа и содержащаяся в $c'_{\xi,\sigma}$, является собственной переменной для $\boldsymbol{a}_\eta$ при некотором $\eta < \xi$.

Трансфинитной индукцией по ξ определим теперь подстановку элементов структуры $\mathscr{A}$ вместо $\boldsymbol{a}_\xi$.

Допустим, что мы уже определили подстановку для собственных переменных из $\boldsymbol{a}_\eta$, $\eta < \xi$. Рассмотрим этап ξ. Для каждого $a_{\xi,\gamma}$ в $\boldsymbol{a}_\xi$ определим соответствующее $a^*_{\xi,\gamma}$.

Случай 1. $Q^{T_\xi}(\boldsymbol{x}_\xi; \boldsymbol{y}_\xi)\tilde{A}_\xi(\boldsymbol{x}_\xi, \boldsymbol{y}_\xi)$ истинна, где $\tilde{A}_\xi(\boldsymbol{x}_\xi, \boldsymbol{y}_\xi)$ получается из $A_\xi(\boldsymbol{x}_\xi, \boldsymbol{y}_\xi)$ подстановками на этапах, предшествующих этапу ξ. Пусть k_0 — некоторый выделенный элемент данной структуры $\mathscr{A}$. Тогда $a^*_{\xi,\gamma}$ интерпретируем как k_0.

Случай 2. $Q^{T_\xi}(\boldsymbol{x}_\xi; \boldsymbol{y}_\xi)\tilde{A}_\xi(\boldsymbol{x}_\xi, \boldsymbol{y}_\xi)$ ложна. Далее мы будем опускать нижний индекс ξ, когда он не нужен.

По предположению истинна формула $\neg Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\tilde{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, т. е. истинна $\exists \boldsymbol{x} \neg \tilde{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$, независимо от того, как интерпретируется функция $\boldsymbol{f}$, где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ обозначает последовательность

$$f_0(\boldsymbol{x}_0), f_1(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f_\sigma(\boldsymbol{x}_\sigma), \ldots \quad (\sigma < \beta),$$

причем $\boldsymbol{x}_\sigma$ есть $x_{\sigma_0}, x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_i}$ и $T(\sigma) = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots\}$. Формула $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ превращается в $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, где u_σ — терм, который может содержать некоторые незамещенные a в качестве свободных переменных. В силу (*) свободные переменные в u_σ образуют некоторое подмножество множества $\boldsymbol{a}_\sigma = \{a_{\sigma_0}, a_{\sigma_1}, \ldots, a_{\sigma_i}, \ldots\}$, где

$$\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots\} = T(\sigma).$$

Следовательно, мы можем положить $f_\sigma(\boldsymbol{a}_\sigma) = u_\sigma$. Поскольку для этой интерпретации функций f_σ формула $\exists \boldsymbol{x} \neg \tilde{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ истинна, найдутся некоторые значения для переменных из $\boldsymbol{a}$ (обозначим их через $\boldsymbol{a}^*$), для которых имеет место $\neg \tilde{A}(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^*))$. После того как выполнены эти подстановки, все собственные переменные заменяются на соответствующие g_A и $\boldsymbol{a}^*$. Полученную фигуру мы обозначим через P^*.

Теперь мы можем показать, что каждая секвенция в P^* истинна. Поскольку заключительная секвенция не содержит собственных переменных, отсюда следует, что заключительная секвенция вывода P истинна.

Для доказательства того, что каждая секвенция из P^* истинна в $\mathscr{A}$ при данной оценке, мы разберем только три главных случая.

1) Последним применено правило обобщенного сечения:

$$\frac{\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi \text{ для всех подходящих } (\Phi, \Psi)}{\Gamma \to \Delta}$$

и $\mathscr{F}$ есть множество высекаемых формул.

Пусть $\mathscr{F}_1$ — множество всех формул из $\mathscr{F}$, которые истинны а $\mathscr{F}_2$ — множество остальных формул. Если для некоторых $\Phi \subseteq \mathscr{F}_1$ и $\Psi \subseteq \mathscr{F}_2$ секвенция $\Phi, \Gamma \to \Delta, \Psi$ выводима, то по предположению индукции она истинна, причем формулы из Φ истинны, а из Ψ ложны. Следовательно, должна быть истинна и секвенция $\Gamma \to \Delta$.

2) Последним применено правило Q-слева:

$$\frac{\{\tilde{A}'(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})\}, \Gamma \to \Delta}{\{Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})A'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}, \Gamma \to \Delta.}$$

Достаточно показать, что если $Q^T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})A'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ истинно, то истинно и $\tilde{A}'(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})$. А это очевидно, поскольку интерпретация функций $g_A^{T,\gamma}$ была выбрана именно так (см. (+) в определении $g_A^{T,\gamma}$).

3) Последним применено правило Q-справа:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \{A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})\}}{\Gamma \to \Delta, \{Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}.}$$

Достаточно показать, что если $Q^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ложно, то ложно и $A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})$, но это тоже очевидно, поскольку так были выбраны значения a^*_γ.

Так как однородная система является подсистемой системы, удовлетворяющей условию (Q) (см. определение 23.16), из предложения 22.14 вытекает, что однородная система является подсистемой неоднородной системы.

Неоднородные кванторы, даже в конечном случае, сильнее, чем однородные кванторы.

Предложение 24.9. *Неоднородный квантор*

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix}$$

(см. пример 24.6) нельзя выразить через (конечные) кванторы первого порядка.

Доказательство. Рассмотрим формулу вида

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix} ((x = y \equiv u = v) \wedge A(x, y, u, v)),$$

в которой

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix}$$

является единственным квантором. В системе второго порядка с функциональными кванторами и с аксиомой выбора формула (1) эквивалентна следующим:

$$\exists f \exists g \forall x \forall y ((x = y \equiv f(x) = g(y)) \wedge A(x, y, f(x), g(y)));$$

$$\exists f \exists g (\forall x \forall y (x = y \equiv f(x) = g(y)) \wedge \forall x \forall y A(x, y, f(x), g(y)));$$

$$\exists f \forall x \forall y A(x, y, f(x), f(y)).$$

Пусть $A(x, y, f(x), f(y))$ есть формула

$$y = x + 1 \supset f(y) < f(x).$$

Тогда формула $\exists f \forall x \forall y A(x, y, f(x), f(y))$ выражает свойство „отношение $<$ не является фундированным“. Хотя множество натуральных чисел и является фундированным относительно обычного отношения $<$, оно не является таким относительно двойственного к нему „нестандартного“ порядка. Поскольку в каждой из этих структур выполняются одни и те же предложения первого порядка, мы заключаем, что формулу (1) нельзя выразить через однородные кванторы первого порядка.

Предложение 24.9 объясняет нам, почему мы имеем разные ограничения на собственные переменные в случае введения квантора в антецеденте и в случае введения его в сукцеденте. Если бы мы пользовались одинаковыми ограничениями на собственные переменные в сукцеденте и в антецеденте, то имели бы

$$\neg \begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix} A(x, y, u, v) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists x & \forall u \\ \exists y & \forall v \end{pmatrix} \neg A(x, y, u, v).$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} \exists x & \forall u \\ \exists y & \forall v \end{pmatrix} \neg A(x, y, u, v) \leftrightarrow \exists x \exists y \forall u \forall v \neg A(x, y, u, v).$$

Поэтому мы бы имели

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists u \\ \forall y & \exists v \end{pmatrix} A(x, y, u, v) \leftrightarrow \forall x \forall y \exists u \exists v A(x, y, u, v),$$

что противоречит предложению 24.9.

Пример 24.10. Пусть $S(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$ — некоторая формула со свободными переменными $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots,$ и пусть $S_n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ обозначает формулу

$$\exists x_{n+1} \forall y_{n+1}, \ldots, S(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots).$$

Тогда выводима секвенция

$$\exists u_1 \forall v_1 \ldots \Big(\bigvee_n S_n(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)\Big) \to$$
$$\to \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n \ldots S(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots).$$

Прежде всего, поскольку легко выводится

$$S_{n-1}(a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}) \equiv \exists x_n \forall y_n S_n(a_1, \ldots, b_{n-1}, x_n, y_n),$$

мы можем с помощью сечений отождествлять формулы

$$S_{n-1}(a_1, \ldots, b_{n-1}) \quad \text{и} \quad \exists x_n \forall y_n S_n(a_1, \ldots, b_{n-1}, x_n, y_n).$$

Для каждого n рассмотрим сначала фигуру P_n, оканчивающуюся секвенцией

$$S_n(a_1, b_1 \ldots, a_n, b_n) \to S_0.$$

В качестве примера приведем P_3:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S_3(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots) \to S_3(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)}{S_3(\ldots) \to \exists x_3 \forall y_3 S_3(a_1, b_1, a_2, b_2, x_3, y_3)}}{S_3(\ldots) \to \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 \forall y_3 S_3(a_1, b_1, x_2, y_2, x_3, y_3)}}{S_3(\ldots) \to \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 \forall y_3 S_3(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3).}$$

Важно отметить, что секвенцию $S_3(\ldots) \to S_0$ мы выводим не за один шаг. Теперь имеем

$$\dfrac{\dfrac{P_n,\ n < \omega}{\bigvee_n S_n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \to S_0}}{\exists u_1 \forall v_1 \ldots (\bigvee_n S_n(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)) \to S_0.}$$

Легко видеть, что выполняются ограничения на собственные переменные. Фигуры P_n построены таким образом, что все боковые формулы для собственной переменной b_i совпадают. Кроме того, $\{S_n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)\}_{n>0}$ является требуемой нумерацией боковых формул, соответствующих введениям квантора $\mathbf{Q}$ справа.

Пример 24.11. Чтобы привести следующий пример, нам нужны некоторые вспомогательные определения. Рассмотрим квантор $\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют длины α и β соответственно. Допустим, что каждое из α и β можно разбить на два множества: $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ соответственно, т. е. $\alpha=\tilde{\alpha}_1\cup\tilde{\alpha}_2$ и $\beta=\tilde{\beta}_1\cup\tilde{\beta}_2$, где $\tilde{\alpha}_1\cap\tilde{\alpha}_2=\varnothing$, $\tilde{\beta}_1\cap\tilde{\beta}_2=\varnothing$ и, кроме того,

(1) $T(\gamma)\subseteq\tilde{\alpha}_1$, если $\gamma\in\tilde{\beta}_1$;

(2) $T(\gamma)\subseteq\tilde{\alpha}_2$, если $\gamma\in\tilde{\beta}_2$.

Если мы вполне упорядочим каждое из множеств $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ и рассмотрим ограничения функции T на $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ соответственно, то мы получим такие функции T_1 и T_2, что

$$\forall\gamma\in\tilde{\beta}_1\,(T_1(\gamma)=T(\gamma)\subseteq\tilde{\alpha}_1)\quad\text{и}\quad\forall\gamma\in\tilde{\beta}_2\,(T_2(\gamma)=T(\gamma)\subseteq\tilde{\alpha}_2).$$

Допустим, что формулу $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ можно представить в виде $A'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2)$, где $(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)$ — разбиение последовательности $\boldsymbol{x}$, соответствующее разбиению $(\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2)$, а разбиение $(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2)$ — разбиение последовательности $\boldsymbol{y}$, соответствующее разбиению $(\tilde{\beta}_1,\ \tilde{\beta}_2)$. Покажем теперь, что при этих условиях выводима эквивалентность

$$\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\longleftrightarrow\mathrm{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{y}_1)\,\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2).$$

Допустим, что формулу $A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ можно записать в виде $A'(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)$ в соответствии с разбиением $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$.

1) Имеем вывод

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A'(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)\to A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{y}_2)\to A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}}{\mathrm{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{y}_1)\,\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2)\to A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}}{\mathrm{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{y}_1)\,\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2)\to\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}.$$

Во введении квантора Q^{T_2} переменные из $\boldsymbol{b}_2$ зависят от всех переменных из $\boldsymbol{a}_1$ и из $\boldsymbol{b}_1$, а также от некоторых переменных из $\boldsymbol{a}_2$ (это определяется функцией T_2).

2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\to A'(\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \boldsymbol{d}_1,\ \boldsymbol{d}_2)}{A(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\to\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{d}_1,\ \boldsymbol{y}_2)}}{A(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d})\to\mathrm{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{y}_1)\,\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2)}}{\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\to\mathrm{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{y}_1)\,\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)\,A'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2)}.$$

Из разбиения переменных, очевидно, следует, что переменные из $\boldsymbol{d}_1$ не зависят от переменных из $\boldsymbol{c}_2$, и поэтому циклов не возникает.

Легко видеть, что ограничение 6) на собственные переменные выполнено; остальные ограничения также очевидны.

Упражнение 24.12. Показать, что выводима следующая секвенция:

$$\exists x_1P_1(x_1),\ \forall x_1\forall y_1\exists x_2(P_1(x_1)\supset P_2(x_1,\ y_1,\ x_2)),\ \ldots,$$
$$\forall x_1\ldots y_{n-1}\exists x_n(P(x_1)\wedge P_2(x_1,\ y_1,\ x_2)\wedge\ldots\wedge P_{n-1}(x_1,\ y_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\supset$$
$$\supset P_n(x_1,\ \ldots,\ y_{n-1},\ x_n)),\ \ldots,$$
$$\forall x_1y_1\ \ldots\ \Big(\bigwedge_n P_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\supset S(x_1,\ y_1,\ \ldots)\Big)\to$$
$$\to\exists x_1\forall y_1\exists x_2\forall y_2\ \ldots\ S(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots).$$

[*Указание.* Легко видеть, что выводима секвенция

$$P_1(a_1),\ P_1(a_1)\supset P_2(a_1,\ b_1,\ a_2),\ \ldots,$$
$$\bigwedge_n P_n(a_1,\ \ldots,\ b_{n-1},\ a_n)\supset S(a_1,\ b_1,\ \ldots)\to S(a_1,\ b_1,\ \ldots).$$

Отсюда следует выводимость требуемой секвенции.]

Нашу систему неоднородных кванторов мы можем улучшить следующим образом.

Определение 24.13 (ср. с определениями 24.3 и 24.4).

(1) Добавим в п. 2) определения 24.4 следующее условие. Если $A(\boldsymbol{a}_1)$ и $A(\boldsymbol{a}_2)$ — боковые формулы для собственной переменной a некоторого применения однородного правила Q-справа и a является α-й переменной в $\boldsymbol{a}_1$, то a является α-й переменной и в $\boldsymbol{a}_2$.

К определению отношения $\prec$ добавляется следующее условие. Если a — собственная переменная, соответствующая некоторому применению однородного правила Q-справа, и b — свободная переменная, входящая в главную формулу для a, то $b\prec a$, т. е. a зависит от b.

(2) Пункт 3) определения 24.4 следует читать так: «все боковые формулы для любой собственной переменной применения неоднородного правила Q-справа совпадают».

(3) В п. 6) определения 24.4. следует читать «неоднородное правило Q-справа» вместо «правило Q-справа».

(4) Допустим, что квантор $\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ можно расщепить на $\mathrm{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{y}_1)$ и $\mathrm{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}_2;\ \boldsymbol{y}_2)$ в смысле примера 24.11. Мы будем сокращенно обозначать эти кванторы через Q, Q_1 и Q_2.

Введем теперь новое правило вывода:

$$\dfrac{\Gamma_1,\ \{\mathrm{Q}_1^\alpha\mathrm{Q}_2^\alpha A_\alpha(\boldsymbol{x}^\alpha,\ \boldsymbol{y}^\alpha)\}_\alpha,\ \Gamma_2\to\Delta_1,\ \{\mathrm{Q}_1^\beta\mathrm{Q}_2^\beta B_\beta(\boldsymbol{u}^\beta,\ \boldsymbol{v}^\beta)\}_\beta,\ \Delta_2}{\Gamma_1,\ \{\mathrm{Q}^\alpha(\boldsymbol{x}^\alpha;\ \boldsymbol{y}^\alpha)\,A(\boldsymbol{x}^\alpha,\ \boldsymbol{y}^\alpha)\}_\alpha,\ \Gamma_2\to\Delta_1,\ \{\mathrm{Q}^\beta(\boldsymbol{u}^\beta;\ \boldsymbol{v}^\beta)\,B(\boldsymbol{u}^\beta,\ \boldsymbol{v}^\beta)\}_\beta,\ \Delta_2.}$$

Полученная новая система имеет то преимущество, что некоторые выводы значительно упрощаются, даже если они не содержат сечений.

Пример 24.14. Игра называется *открытой*, если победитель определяется после конечного числа шагов. Пусть $Y(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$ обозначает игру, в которой игроки I и II по очереди выбирают члены последовательностей $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ и победитель определен. Тогда игра является открытой, если

$$(1)\quad Y(a_1, b_1, \ldots) \to \bigvee_n (\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots) Y(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots).$$

В нашей новой системе имеется простой вывод того факта, что открытая игра является детерминированной, т. е. что из (1) следует

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \ldots Y(x_1, y_1, \ldots) \vee \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \ldots \neg Y(x_1, y_1, \ldots).$$

Секвенция

$$(2)\quad \forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \ldots Y(x_1, y_1, \ldots)$$

выводима для каждого n:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Y(a_1, \ldots, b_n, a^n_{n+1}, b^n_{n+1}, \ldots) \to Y(a_1, \ldots, b_n, a^n_{n+1}, \ldots)}{\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots) \to \forall x_{n+1} \exists y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots)}}{\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, \ldots) \to \exists y_n (\forall x_{n+1} \exists y_{n+1} \ldots) Y(a_1, \ldots, a_n, y_n, x_{n+1}, \ldots)}}{\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, \ldots) \to \exists y_n \forall x_{n+1} \exists y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, a_n, y_n, x_{n+1}, \ldots)}}{\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, \ldots) \to \forall x_n (\exists y_n \forall x_{n+1} \exists y_{n+1} \ldots) Y(a_1, \ldots, b_{n-1}, x_n, y_n, \ldots)}}{\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, \ldots) \to \forall x_n \exists y_n \forall x_{n+1} \exists y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_{n-1}, x_n, y_n, \ldots)}$$

$$\vdots$$

$$\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, \ldots) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \ldots Y(x_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots).$$

Заметим, что наше новое правило вывода применяется несколько раз. Из (2) по правилу $\bigvee$-слева получаем

$$(3)\quad \bigvee_n \forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots Y(x_1, y_1, \ldots).$$

Поэтому имеем

$$\dfrac{Y(a_1, b_1, \ldots) \supset \bigvee_n \forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(a_1, \ldots, b_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots Y(x_1, y_1, \ldots),\ \neg Y(a_1, b_1, \ldots)}{\forall v_1 w_1 \ldots \left(Y(v_1, w_1, \ldots) \supset \bigvee_n (\forall x_{n+1} y_{n+1} \ldots Y(u_1, w_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots))\right) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots Y(x_1, y_1, \ldots) \vee \exists x_1 \forall y_1 \ldots \neg Y(x_1, y_1, \ldots).}$$

В этом выводе боковыми формулами, соответствующими применениям неоднородных правил Q-справа, являются

$$Y(a_1, \ldots, b_n, a^n_{n+1}, \ldots),\ \neg Y(a_1, \ldots, b_n, a_{n+1}, \ldots)$$

с собственными переменными $a^n_{n+1}, a^n_{n+2}, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ соответственно. Собственными переменными однородных квантификаций являются $a_1, a_2, \ldots$. Занумеруем боковые формулы применений правила Q-справа в таком порядке:

$$\neg Y(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots),\quad \{Y(a_1, \ldots, b_n, a^n_{n+1}, \ldots)\}_n.$$

Теперь можно проверить, что выполняются ограничения на собственные переменные (см. определение 24.4). Мы проверим лишь условие 6). Здесь A_0 обозначает формулу $\neg Y(a_1, b_1, \ldots)$, каждое a_i удовлетворяет необходимому условию и в п. 6.0) a_i используется в качестве собственной переменной в некотором применении однородного кванторного правила.

Если e — собственная переменная неоднородного правила Q-справа и $e \prec a_i$, то e совпадает с одним из $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Обозначив $\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_i \forall y_i \ldots$ через $Q^{T_0}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})$, получим, что b_j $(1 \leqslant j \leqslant i-1)$ является j-й собственной применения к A_0 правила Q-справа и $j \in T_0(i)$. Рассмотрим свойство 6. n), где $n \geqslant 1$. Пусть A_n обозначает $Y(a_1, \ldots, b_n, a^n_{n+1}, \ldots)$. Допустим, что d — одна из переменных

$$a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, b^n_{n+1}, b^n_{n+2}, \ldots.$$

Если переменная d используется в качестве собственной переменной в применении неоднородного правила Q-справа, то она совпадает с одной из $b_1, \ldots, b_n$, ее боковой формулой является A_0 и $0 < n$. Поскольку b^n_j при $j = n+1, n+2, \ldots$ не используется в качестве собственной переменной, отношение $e \prec b^n_j$ никогда не имеет места. Далее, пусть c — одна из переменных $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$. Если c представляет собой a_i, то первой возможностью для собственной переменной e, соответствующей неоднородному правилу Q-справа и такой, что $e \prec a_i$, является одна из переменных $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Эти переменные являются собственными для A_0. Поскольку $b_1, \ldots, b_{i-1}$ не зависят ни от каких переменных, то этим завершается проверка ограничений на собственные переменные.

Пример 24.15. Приведем другое доказательство детерминированности открытой игры. Пусть открытая игра выражается формулой $\bigvee_m Y_m(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m)$. Докажем, что эта игра детерминированна. Пусть $Y_k\ (a_1, \ldots, b_k)$ есть $Y_k\ (a_1, \ldots, b_m, a^m_{m+1}, \ldots, b^m_k)$, если $1 \leqslant m \leqslant k$. Имеем вывод

$$\begin{array}{l}
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to Y_m(a_1, \ldots, b_m) \\ \hline
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \bigvee_k Y_k\left(a_1, \ldots, b_m, a^m_{m+1}, \ldots, b^m_k\right) \\ \hline
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \forall x_{m+1} \exists y_{m+1} \ldots \bigvee_k Y_k(a_1, \ldots b_m, x_{m+1}, \ldots, y_k) \\ \hline
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \exists y_m (\forall x_{m+1} \exists y_{m+1} \ldots) \bigvee_k Y_k(a_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, y_k) \\ \hline
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \exists y_m \forall x_{m+1} \exists y_{m+1} \ldots \bigvee_k Y_k(a_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots, y_k) \\ \hline
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \forall x_m (\exists y_m \forall x_{m+1} \exists y_{m+1} \ldots) \bigvee_k Y_k(a_1, \ldots, x_m, y_m, x_{m+1}, \ldots, y_k) \\ \hline
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \forall x_m \exists y_m \forall x_{m+1} \exists y_{m+1} \ldots \bigvee_k Y_k(a_1, \ldots, x_m, y_m, x_{m+1}, \ldots, y_k) \\ \hline
\vdots \\
Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots \bigvee_k Y_k(x_1, \ldots y_k) \\ \hline
\bigvee_m Y_m(a_1, \ldots, b_m) \to \forall x_1 \exists y_1 \ldots \bigvee_k Y_k(x_1, y_1, \ldots, y_k) \\ \hline
\to \forall x_1 \exists y_1 \ldots \bigvee_k Y_k(x_1, y_1, \ldots, y_k), \neg \bigvee_m Y_m(a_1, b_1, \ldots, b_m) \\ \hline
\to \forall x_1 \exists y_1 \ldots \bigvee_k Y_m(x_1, y_1, \ldots, y_m), \exists x_1 \forall y_1 \ldots \neg \bigvee_m Y_m(x_1, y_1, \ldots, y_m).
\end{array}$$

Боковые формулы применений неоднородных правил Q-справа можно перечислить в следующем порядке:

$$\neg \bigvee_m Y_m(a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m), \left\{ \bigvee_n Y_n\left(a_1, \ldots, b_m, a^m_{m+1}, \ldots, b^m_n\right) \right\}_m$$

с собственными переменными b_1, b_2 для первой формулы и $a^m_{m+1}, a^m_{m+2}, \ldots$ для $\bigvee_k Y_k\left(a_1, \ldots, b_m, a^m_{m+1}, \ldots\right)$. Читателю остается проверить, что выполняются ограничения на собственные переменные.

Пример 24.16.

$$\begin{array}{l}
A(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots) \to A(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots) \\ \hline
\exists x_2 \forall y_2 \ldots A(a_1, b_1, x_2, y_2, \ldots) \to \exists x_1 \forall y_1 \ldots A(x_1, y_1, \ldots) \\ \hline
\neg \exists x_1 \forall y_1 \ldots A(x_1, y_1, \ldots) \to \neg \exists x_2 \forall y_2 \ldots A(a_1, b_1, x_2, y_2, \ldots) \\ \hline
\neg \exists x_1 \forall y_1 \ldots A(x_1, y_1, \ldots) \to \exists y_1 \neg \exists x_2 \forall y_2 \ldots A(a_1, b_1, x_2, y_2, \ldots) \\ \hline
\neg \exists x_1 \forall y_1 \ldots A(x_1, y_1, \ldots) \to \forall x_1 \exists y_1 \neg \exists x_2 \forall y_2 \ldots A(x_1, y_1, \ldots).
\end{array}$$

Замечание. Существуют секвенции, которые выводимы без сечений в нашей новой системе, но требуют применения правила сечения в старой системе. Например, рассмотрим секвенцию

$$\to (\forall x \exists y) A(x, y), (\exists x \forall y) \neg A(x, y).$$

Здесь $(\forall x \exists y)$ и $(\exists x \forall y)$ рассматриваются как неоднородные кванторы, тогда как каждый из $\forall x \exists y$ и $\exists x \forall y$ состоит из двух однородных кванторов.

(1) Эта секвенция выводима с помощью правила сечения в старой системе:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a, b) \to A(a, b)}{\forall x \exists y A(x, y) \to (\forall x \exists y) A(x, y)}}{\to \forall x \exists y A(x, y) \vee \exists x \forall y \neg A(x, y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A(c, d) \to \neg A(c, d)}{\exists x \forall y \neg A(x, y) \to (\exists x \forall y) \neg A(x, y)}}{\begin{array}{l}\forall x \exists y A(x, y) \vee \exists x \forall y \neg A(x, y) \to \\ \to (\forall x \exists y) A(x, y), (\exists x \forall y) \neg A(x, y)\end{array}}}{\to (\forall x \exists y) A(x, y), (\exists x \forall y) \neg A(x, y).}$$

(2) Эту секвенцию нельзя вывести в старой системе без правила сечения, поскольку, если мы предположим, что такой вывод без сечений имеется, то секвенция

$$\to \ldots A(a_\alpha, b_\alpha), \ldots, \neg A(c_\beta, d_\beta)$$

выводима для некоторых свободных переменных. Тогда для некоторых α и β переменная a_α совпадает с c_β, а b_α — с d_β. Следовательно, в секвенции

$$\to \ldots A(a, b), \ldots, \neg A(a, b)$$

обе переменные a и b являются собственными для некоторого применения неоднородного правила Q-справа. Но отсюда вытекает, что формулы $A(a, b)$ и $\neg A(a, b)$ нельзя упорядочить.

(3) Эта секвенция выводима в нашей новой системе без правила сечения:

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\to A(a, b), \neg A(a, b) \\ \hline \hline
\to \forall x \exists y A(x, y), \exists x \forall y \neg A(x, y) \\ \hline
\to (\forall x \exists y) A(x, y), (\exists x \forall y) \neg A(x, y).
\end{array}$$

Предложение 24.17. *Всякий вывод в детерминированной логике, удовлетворяющей условию (Q) из определения 23.16, является выводом и в (расширенной) неоднородной системе.*

Доказательство. Допустим, что некоторый вывод P в данном языке L детерминированной логики удовлетворяет условию (Q). Определим язык L (J): берем логические символы в точности той же самой арности, что и в L, а J определяем следующим образом. Пусть $\mathrm{Q}^f z$ — некоторый квантор детерминированной логики.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — последовательность всех переменных из $\boldsymbol{z}$, для которых f принимает значение $\forall$, и $\boldsymbol{y}$ — последовательность всех переменных из $\boldsymbol{z}$, для которых f принимает значение $\exists$. Пусть y есть β-я переменная из $\boldsymbol{y}$ и $\alpha \in T(\beta)$, если и только если α-я переменная в $\boldsymbol{x}$ предшествует переменной y в $\boldsymbol{z}$. Такая функция T принадлежит множеству J. Следовательно, квантор $\mathsf{Q}^f\boldsymbol{z}$ мы можем выразить в виде $\mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$. Таким образом, формулы вывода P можно рассматривать как формулы языка $\mathrm{L}(J)$.

Переименовав (если необходимо) переменные в P, мы в силу (Q) можем считать, что выполняется следующее условие:

(*) Если

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\Gamma \to \Delta,\ \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

есть применение неоднородного правила Q-справа, то никакая собственная переменная в P, использовавшаяся выше секвенции $\Gamma \to \Delta,\ \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, не встречается ниже этой секвенции.

Для того чтобы убедиться, что P является выводом в неоднородной системе, достаточно проверить, выполняются ли ограничения на собственные переменные в определениях 24.4 и 24.14. Сформулированные там условия 1), 2) и 4) представляют собой в точности условия, которым удовлетворяет P. В силу (Q) выполняется и условие 3). Допустим, что в P имеет место $c \prec a$. Тогда высота переменной c меньше высоты переменной a; поэтому условие 5) очевидно.

Нумерацию боковых формул в применениях неоднородного правила Q-справа мы можем определить таким образом, что она будет удовлетворять ограничению 6) на собственные переменные. Пусть J_1 и J_2 — два применения неоднородного правила Q-справа в P, причем J_1 расположено выше J_2 и J_1 и J_2 имеют соответственно вид

$$J_1\quad \frac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\Gamma_1 \to \Delta_1\, \mathsf{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$$

и

$$J_2\quad \frac{\Gamma_2 \to \Delta_2,\ B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})}{\Gamma_2 \to \Delta_2,\ \mathsf{Q}^{T_2}(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{y}')\, B(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{e}),}$$

где $\boldsymbol{e}$ — последовательность переменных, не входящих в $\boldsymbol{c}$ и в $\boldsymbol{d}$. Допустим, что d содержится в $\boldsymbol{d}$ (или в $\boldsymbol{e}$), a' — некоторая собственная переменная в P и $a' \prec d$ (или $a' \prec e$). Так как из (*) следует, что d (или e) не используется в качестве собственной переменной выше секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1,\ \mathsf{Q}^{T_1}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то переменная a' не может входить в $\boldsymbol{a}$. Подходящая нумерация боковых формул в P получится, если их пронумеровать, начиная снизу.

Теперь мы докажем интерполяционную теорему для некоторых подсистем неоднородных систем.

Определение 24.18. Пусть q — произвольный символ и A — некоторая формула. Мы говорим, что вхождение q в A является *положительным* или *отрицательным* в зависимости от того, четно или нечетно число символов $\neg$, в области действия которых находится это q. Под $A \supset B$ понимается $\neg A \vee B$. Мы говорим, что символ q входит положительно в секвенцию $\Gamma \to \Delta$, если он входит положительно в Δ или отрицательно в Γ, и что символ q входит отрицательно в $\Gamma \to \Delta$, если он входит отрицательно в Δ или положительно в Γ.

Секвенция $\Gamma \to \Delta$ называется *негативной*, если все неоднородные кванторы в нее входят отрицательно.

Предложение 24.19. (1) *В нашей старой системе каждая негативная секвенция либо выводима без сечений, либо имеет контрмодель.*

(2) *Для негативных секвенций справедлива интерполяционная теорема. Допустим, что $\Gamma \to \Delta$ — общезначимая негативная секвенция и $[\{\Gamma_1; \Delta_1\}, \{\Gamma_2; \Delta_2\}]$ — некоторое разбиение секвенции $\Gamma \to \Delta$, такое, что $\{\Gamma_1, \Delta_1\}$ и $\{\Gamma_2; \Delta_2\}$ имеют по крайней мере один общий предикатный символ. Тогда найдется формула C (не обязательно негативная), такая, что секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1$, C и C, $\Gamma_2 \to \Delta_2$ общезначимы и все предикатные символы и свободные переменные, содержащиеся в C, входят в $\{\Gamma_1; \Delta_1\}$ и в $\{\Gamma_2; \Delta_2\}$.*

Доказательство. (1) Это утверждение можно доказать аналогично другим теоремам о полноте, строя редукционное дерево по данной секвенции. Заметим, что на этапе, относящемся к неоднородным кванторам, редукция проводится только в антецеденте.

(2) По техническим причинам будем считать, что все однородные кванторы имеют вид $\exists$. Это ограничение не существенно. Следуя определению 23.18, мы скажем, что фигура P является выводом в системе **RHS′**, если P удовлетворяет следующим условиям:

(i) P удовлетворяет всем условиям определения вывода в нашей системе, кроме ограничений на собственные переменные.

(ii) Кванторы вводятся только с помощью правила $\exists$-слева:

$$\frac{\{A_\lambda(\boldsymbol{a}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta}{\{\exists \boldsymbol{x}_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda)\}_{\lambda<\gamma},\ \Gamma \to \Delta,}$$

где никакая переменная из $\boldsymbol{a}_\lambda$ не входит в нижнюю секвенцию.

Заметим, что вывод P может содержать неоднородные кванторы, но они должны вводиться либо начальными секвенциями, либо ослаблениями. Тогда способом, аналогичным использовавшемуся в доказательстве теоремы 23.19, мы можем доказать следующее. Пусть P — вывод в системе $\mathbf{RHS}'$, оканчивающийся секвенцией $\Gamma \to \Delta$, и допустим, что для свободных переменных в $\Gamma \to \Delta$ определено некоторое фундированное отношение $<_0$. Тогда $<_0$ можно продолжить до отношения зависимости для собственных переменных вывода P.

Лемма 24.20. *Пусть P — не содержащий сечений вывод секвенции $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2$, в котором каждый однородный квантор имеет вид $\exists$ и каждое применение правила, вводящего квантор, является применением правила, вводящего $\exists$ в сукцеденте. Допустим также, что $\{\Gamma_1; \Delta_1\}$ и $\{\Gamma_2; \Delta_2\}$ имеют хотя бы один общий предикатный символ. Тогда найдутся не содержащие сечений выводы P_1 и P_2 в системе $\mathbf{RHS}'$ и формула C, такие, что заключительной секвенцией вывода P_1 является*

$$C, \Gamma_1 \to \Delta_1,$$

заключительной секвенцией вывода P_2 является

$$\Gamma_2 \to \Delta_2, C$$

и все свободные переменные и предикатные символы в C являются общими для $\{\Gamma_1; \Delta_1\}$ и $\{\Gamma_2; \Delta_2\}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 23.20.

Вернемся теперь к доказательству предложения 24.19 (2), которое мы проведем тем же способом, что и в части 3 доказательства теоремы 23.15.

Рассмотрим какой-нибудь не содержащий сечений вывод P_1 секвенции $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2$. Ограничения на собственные переменные для такого вывода можно выразить в терминах некоторого фундированного отношения $<$. Фиксируем такое отношение $<$. Можно считать, что каждый однородный квантор в P имеет вид $\exists$, что неоднородные кванторы вводятся только в антецеденте и что входящие в $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2$ свободные переменные не зависят ни от каких переменных вывода P. Пусть $\{\mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d})\}$ — нумерация всех главных формул, соответствующих введениям слева квантора Q (неоднородного квантора Q или однородного квантора $\exists$) в данном выводе, потомки которых содержатся в Γ_1 или Δ_1. Аналогично определяем нумерацию $\{\mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}')\}$ для Γ_2 и Δ_2. Тогда мы можем построить

некоторый вывод P' секвенции

$$\{\neg \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) \vee A(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})\},$$
$$\{\neg \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}') \vee B(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}')\}, \Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2,$$

такой, что (i) каждый однородный квантор в P' имеет вид $\exists$; (ii) единственным правилом, вводящим квантор, является правило $\exists$-справа; (iii) $c, d < a$ для любых a из $\boldsymbol{a}$, c из $\boldsymbol{c}$ и d из $\boldsymbol{d}$; (iv) $e, d' < b$ для любых b из $\boldsymbol{b}$, e из $\boldsymbol{e}$ и d' из $\boldsymbol{d}'$; (v) каждая свободная переменная из $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ входит в Γ_1 или Δ_1; (vi) каждая свободная переменная из $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ входит в Γ_2 или Δ_2 и (vii) переменные, входящие в $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, различны между собой. (Мы пользовались не вполне корректными обозначениями, например использовали одинаковые буквы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в различных кванторах. Тем не менее смысл указанных выше выражений очевиден.)

Тогда по лемме 24.20 найдется формула C, такая, что секвенции

$$C, \{\neg \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) \vee A(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})\}, \Gamma_1 \to \Delta_1$$

и

$$\{\neg \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) \vee B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})\}, \Gamma_2 \to \Delta_2, C$$

выводимы в $\mathbf{RHS}'$ и C удовлетворяет соответствующим условиям. Пусть $\boldsymbol{f}$ — последовательность всех свободных переменных в C, не входящих одновременно и в $\{\Gamma_1; \Delta_1\}$, и в $\{\Gamma_2; \Delta_2\}$. Полагаем, что переменные в $\boldsymbol{f}$ упорядочены так, что если f_1 предшествует f_2, то не имеет места $f_2 < f_1$ ($<$ — отношение, определенное для исходного вывода P). Пусть P_1 и P_2 — выводы в $\mathbf{RHS}'$ двух указанных выше секвенций, и пусть $<_1$ и $<_2$ — отношения зависимости для свободных переменных в заключительных секвенциях выводов P_1 и P_2 соответственно, индуцированные отношением $<$ (для P). Тогда мы можем продолжить эти отношения на множество всех переменных. Обозначим эти продолженные отношения через $<_{P_1}$ и $<_{P_2}$:

Рассмотрим далее следующие квазивыводы P_1' и P_2':

$$\begin{array}{r} P_1 \\ \vdots \\ C(\boldsymbol{f}), \{\forall \boldsymbol{z} \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})(\neg \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \vee A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}))\}, \Gamma_1 \to \Delta_1 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{r} P_2 \\ \vdots \\ \{\forall \boldsymbol{z} \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})(\neg \mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \vee B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}))\}, \Gamma_2 \to \Delta_2, C(\boldsymbol{f}). \end{array}$$

Имеются три вида переменных, входящих в $\boldsymbol{f}$: те, что входят в $\boldsymbol{a}$, те, что входят в $\boldsymbol{b}$, и остальные. Первые переменные, последовательность которых мы обозначим через $\boldsymbol{f}_1$, являются собственными в P_1'; вторые, последовательность которых обозначим через $\mathfrak{f}_2$, являются собственными в P_2', а последовательность третьих мы обозначим через $\mathfrak{f}_3$. Определим функцию T', ставящую в соответствие переменным из $\mathfrak{f}_2$ некоторые подмножества из $\mathfrak{f}_1$, так, чтобы она удовлетворяла отношению зависимости $<$. Заметим, что выводима формула

$$\forall \boldsymbol{z} \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v})(\neg \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) \vee A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{z})).$$

Следовательно, мы получаем

$$\begin{array}{r} P_1' \\ \Downarrow \\ \forall \boldsymbol{w} \mathrm{Q}^{T'}(\boldsymbol{w}_1;\ \boldsymbol{w}_2)\, C(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}),\ \Gamma_1 \to \Delta_1, \end{array}$$

где $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ и $\boldsymbol{w}$ подставлены вместо $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_3$ соответственно. Аналогично мы получаем

$$\begin{array}{l} P_2' \\ \Downarrow \\ \Gamma_2 \to \Delta_2,\ \forall \boldsymbol{w} \mathrm{Q}^{T'}(\boldsymbol{w}_1;\ \boldsymbol{w}_2)\, C(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}). \end{array}$$

Поскольку мы можем считать, что собственные переменные вывода формулы

$$\forall \boldsymbol{z} \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v})(\neg \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) \vee A(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{z}))$$

отличны от собственных переменных из P_1', мы естественным образом продолжаем $<_{P_1}$ на весь вывод секвенции

$$\forall \boldsymbol{w} \mathrm{Q}^{T'}(\boldsymbol{w}_1;\ \boldsymbol{w}_2)\, C(\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}),\ \Gamma_1 \to \Delta_1.$$

Легко показывается, что при этом получится отношение зависимости; на самом деле именно так была выбрана функция T'. Аналогичным образом мы продолжаем отношение $<_{P_2}$.

Даже имея в наличии новое правило вывода, едва ли можно ожидать, что для всей системы справедлива теорема об устранении сечений. Построение полной системы с неоднородными кванторами — трудная проблема. Задача еще более усложнится, если мы захотим построить полную систему без правила сечения. Это ясно видно из следующего примера.

Пример 24.21. Рассмотрим секвенцию

$$\{c_i \neq c_j\}_{i \neq j,\ i,\ j < \omega} \to \begin{pmatrix} \forall a & \exists u \\ \forall b & \exists v \end{pmatrix} ((a = b \equiv u = v) \wedge u \neq c_0).$$

Эта секвенция выводима в нашей системе. В самом деле, легко выводится секвенция

$$\{c_i \neq c_j\}_{i \neq j},\ \bigwedge_i (a = c_i \supset u = c_{i+1}) \wedge \Bigl(\bigwedge_i a \neq c_i \supset u = a\Bigr),$$
$$\bigwedge_i (b = c_i \supset v = c_{i+1}) \wedge \Bigl(\bigwedge_i b \neq c_i \supset v = b\Bigr) \to$$
$$\to (a = b \equiv u = v) \wedge u \neq c_0.$$

Отсюда вытекает, что выводима секвенция

$$\forall a \exists u \Bigl(\bigwedge_i (a = c_i \supset u = c_{i+1}) \wedge \Bigl(\bigwedge_i a \neq c_i \supset u = a\Bigr)\Bigr),$$
$$\forall b \exists v \Bigl(\bigwedge_i (b = c_i \supset v = c_{i+1}) \wedge \Bigl(\bigwedge_i b \neq c_i \supset v = b\Bigr)\Bigr),\ \{c_i \neq c_j\}_{i \neq j} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} \forall a & \exists u \\ \forall b & \exists v \end{pmatrix} ((a = b \equiv u = v) \wedge u \neq c_0).$$

С другой стороны, секвенции

$$\to \forall a \exists u \Bigl(\bigwedge_i (a = c_i \supset u = c_{i+1}) \wedge \Bigl(\bigwedge_i a \neq c_i \supset u = a\Bigr)\Bigr)$$

и

$$\to \forall b \exists v \Bigl(\bigwedge_i (b = c_i \supset v = c_{i+1}) \wedge \Bigl(\bigwedge_i b \neq c_i \supset v = b\Bigr)\Bigr)$$

также выводимы в нашей системе. Следовательно, по правилу сечения выводима секвенция

$$\{c_i \neq c_j\}_{i \neq j} \to \begin{pmatrix} \forall a & \exists u \\ \forall b & \exists v \end{pmatrix} ((a = b \equiv u = v) \wedge u \neq c_0).$$

Если же мы к приведенному выше выводу, содержащему сечение, применим редукцию генценовского типа, определенную ранее для конечных языков, мы получим похожую на вывод фигуру

$$\frac{\begin{array}{l} \{c_i \neq c_j\}_{i \neq j} \to \{(a = b \equiv c_{i+1} = c_{j+1}) \wedge c_{i+1} \neq c_0\}_{i,\ j}, \\ \qquad \{(a = b \equiv a = c_{j+1}) \wedge a \neq c_0\}_j, \\ \qquad \{(a = b \equiv c_{i+1} = b) \wedge c_{i+1} \neq c_0\}_i, \\ \qquad (a = b \equiv a = b) \wedge a \neq c_0 \end{array}}{\{c_i \neq c_j\}_{i \neq j} \to \begin{pmatrix} \forall a & \exists v \\ \forall b & \exists v \end{pmatrix} ((a = b \equiv u = v) \wedge u \neq c_0).}$$

Очевидно, что в этой фигуре собственным переменным a и b соответствует много боковых формул. Следовательно, она не может быть выводом в нашем смысле.

Из этого примера мы видим, что вряд ли нашу систему можно расширить так, чтобы эта фигура стала выводом в ней, и, следовательно, мало надежды на то, что будет построена полная система без правила сечения.

Хотя наша система и не полна, можно доказать для нее слабую полноту. Для доказательства мы используем еще более общую формулировку правила обобщенного сечения, которую мы назовем правилом *сильно обобщенного сечения* (с. о. с). Пусть $\mathscr{F}$ — непустое множество формул. Допустим, что для произвольного его разбиения, скажем $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$, найдутся подмножества множеств $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, скажем Φ и Ψ соответственно, и подмножества множеств Γ и Δ, скажем Γ' и Δ' соответственно, такие, что выводимо $\Phi, \Gamma' \to \Delta', \Psi$. Тогда отсюда можно вывести $\Gamma \to \Delta$. Мы также допускаем случай, когда некоторые формулы из Γ (или Δ) входят в Γ' (соответственно в Δ') несколько раз.

Очевидно, что правило с. о. с. является обобщением правила о. с. и включает в себя два правила: собственно правило сечения и правило ослабления.

Предложение 24.22. *Рассмотрим язык* L *с неоднородными кванторами, который содержит индивидные константы* $c_0, c_1, \ldots, c_\alpha, \ldots, \alpha < K$, *и логические символы* $\bigwedge_{\alpha<K}$ *и* $\bigvee_{\alpha<K}$, *где* K — *некоторый ординал. Эта система, пополненная аксиомами*

$$\to t = c_0,\ t = c_1, \ldots, t = c_\alpha, \ldots \quad (\alpha < K)$$

для произвольных термов t, *является полной. Если какая-то секвенция выводима в этой системе, то она выводима и без существенных сечений.*

Доказательство. Пусть θ — порядковый тип множества I, и пусть τ обозначает множество $\{c_0, c_1, \ldots, c_\alpha, \ldots\}$. Рассмотрим произвольную формулу языка L вида $\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Пусть α — ординал, и допустим, что $T(\alpha)$ имеет тип β_α относительно обычного порядка на ординалах. Пусть f^α — некоторая функция, отображающая τ^{β_α} (декартову степень множества τ) в τ, и пусть $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ и т. д. — последовательности (подходящих типов) элементов из τ. Допустим, что для каждого $\alpha < \theta$ задана последовательность $\boldsymbol{m}^\alpha = (m_{\gamma_0}, m_{\gamma_1}, \ldots)$, где $T(\alpha) = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots\}$. Тогда $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})$ будет обозначать последовательность, составленную из последовательностей $f^0(\boldsymbol{m}^0), f^1(\boldsymbol{m}^1), \ldots, f^\alpha(\boldsymbol{m}^\alpha), \ldots$. Наконец, пусть L$'$ — расширенный язык, в котором имеются символы $\bigvee_{\boldsymbol{f}}$ и $\bigwedge_{\boldsymbol{m}}$, где $\boldsymbol{f}$ (в $\bigvee_{\boldsymbol{f}}$) пробегает все последовательности функций, определенных, как указано выше, а $\boldsymbol{m}$ (в $\bigwedge_{\boldsymbol{m}}$) пробегает все последовательности элементов τ, определенные, как указано выше. В случае когда в язык включены эти символы, «выводимость» будет означать «выводимость в системе с языком L$'$». Заметим, что L$'$ представляет собой расширение языка L.

При этих условиях мы покажем сначала, что выводима секвенция

$$(1) \qquad \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \bigvee_{\boldsymbol{f}} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})).$$

Формулу $\bigwedge_\beta (a_\beta = m_\beta)$ сокращенно обозначим через $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m}$. Пусть $\boldsymbol{g}$ — произвольная, но фиксированная последовательность функций, определенная так же, как выше была определена последовательность $\boldsymbol{f}$, и пусть $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}$ обозначает произвольную, но фиксированную последовательность подходящей длины, составленную из элементов множества τ, которые выбраны для $\boldsymbol{f}$. Пусть

$$(2) \qquad \ldots, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})), \ldots \to \ldots, A(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}})), \ldots$$

— некоторая секвенция, где $\boldsymbol{g}$ фиксировано, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{f}$ пробегают все возможные значения, а $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{f}}$ выбирается произвольно; если $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$, то $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}$. Тогда секвенция (2) выводима.

Допустим теперь, что язык L$'$ имеет достаточное число свободных переменных, чтобы можно было провести последующие рассуждения. Для каждого $\alpha < \theta$ и каждого $\boldsymbol{n}$ выберем некоторую свободную переменную $a_{\alpha, \boldsymbol{n}}$ языка L$'$. Тогда секвенция

$$(3) \qquad \to a_{\alpha, \boldsymbol{n}} = c_0, \quad a_{\alpha, \boldsymbol{n}} = c_1, \ldots$$

является аксиомой. Мы предполагаем, что можем выбрать различные переменные для различных пар $(\alpha, \boldsymbol{n})$. Для каждого c существует последовательность $\boldsymbol{g}$, такая, что $g^\alpha(\boldsymbol{n}^\alpha) = c$. Поэтому для произвольно выбранной последовательности констант $(c_{\sigma_0}, c_{\sigma_1}, \ldots)$ длины θ из секвенции (2) с такой последовательностью $\boldsymbol{g}$ следует секвенция

$$(4) \qquad \ldots, a_{\alpha, \boldsymbol{n}} = c_{\sigma_0},\ a_{1, \boldsymbol{n}} = c_{\sigma_1}, \ldots, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}), \ldots \qquad \ldots, A(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}), \ldots,$$

где $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}$ — последовательность $a_{0, \boldsymbol{n}}, a_{1, \boldsymbol{n}}, \ldots$. Тогда применив правило сильно обобщенного сечения к (3) и (4), мы получим секвенцию

$$(5) \qquad \ldots, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}), \ldots \to \ldots, A(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}})), \ldots$$

для всевозможных комбинаций $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{f}}$. Следовательно, из (5) получаем

$$\ldots, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}), \ldots \to \ldots, \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})), \ldots$$

или

$$(6) \qquad \ldots, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}), \ldots \to \bigvee_{\boldsymbol{f}} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})).$$

Наконец, введя в (6) кванторы, мы получим секвенцию

$$\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \to \bigvee_{\mathfrak{f}} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})),$$

т. е. (1). Поскольку мы выбрали различные свободные переменные для различных пар $(\alpha,\ \boldsymbol{n})$, очевидно, что ограничения на собственные переменные выполнены.

В выводе секвенции (1) правило сильно обобщенного сечения применялось только к атомарным формулам.

Далее, мы хотим доказать обратную к (1) секвенцию в виде

(7) $$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n})),\ \bigvee_{\mathfrak{f}} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})) \to \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Во-первых, мы имеем для всяких $\mathfrak{f}$ и $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{b} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n}),\ A(\boldsymbol{n},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{n})) \to A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$$

и

$$\to a_\alpha = c_0,\ a_\alpha = c_1,\ \ldots .$$

Следовательно, в силу правила сильно обобщенного сечения,

$$\bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{b} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n})),\ \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})) \to A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}).$$

Отсюда получаем

$$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n})),\ \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})) \to A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$$

и

(8) $$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n})),\ \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})) \to \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Поскольку (8) имеет место для каждого $\mathfrak{f}$, отсюда следует

(9) $$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n})),\ \bigvee_{\mathfrak{f}} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} A(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})) \to \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),$$

т. е. секвенция (7).

С другой стороны, секвенция

(10) $$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n}))$$

выводится для всякого $\mathfrak{f}$ следующим образом. Для произвольных $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$ выводима секвенция

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \mathfrak{f}(\boldsymbol{n}) = \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \to \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})).$$

Кроме того, имеем

$$\to a_\alpha = c_0,\ a_\alpha = c_1,\ \ldots \text{ для всякого } \alpha.$$

Поэтому по правилу сильно обобщенного сечения получаем

$$\to \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{m}} (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{m})).$$

Отсюда следует секвенция (10).

Ограничения на собственные переменные в выводах секвенций (1) и (7) проверяются легко.

Примененный выше метод мы можем распространить дальше. Пусть A — формула вида $\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. Тогда множество формул

$$\Big\{\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \supset \boldsymbol{y} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{n}))\Big\}_{\mathfrak{f}}$$

в (7), соответствующее этой формуле A, мы обозначим через $\Phi(A)$. Заметим, что $\Phi(A)$ в действительности зависит только от длины последовательности $\boldsymbol{x}$; следовательно, не имеет значения, какие переменные содержит формула A.

Лемма 24.23. *Пусть $B_1,\ B_2,\ \ldots$ — все подформулы формулы A указанного выше вида. Тогда существует бескванторная формула $\tilde{A}$ (в расширенном языке), такая, что $\tilde{A}$ содержит в точности те же свободные переменные, что и A, а секвенции*

(11) $$\Phi(B_1),\ \Phi(B_2),\ \ldots,\ A \to \tilde{A} \ \text{ и } \ \Phi(B_1),\ \Phi(B_2),\ \ldots,\ \tilde{A} \to A$$

выводимы без существенных сечений.

Доказательство проводится трансфинитной индукцией по сложности формулы A. Мы рассмотрим только случай, когда A имеет вид $\mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\,A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ (остальные случаи очевидны). Чтобы вывести первую секвенцию, мы поступим следующим образом. Рассмотрим формулу $A(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e})$, где $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{e}$ — новые свободные переменные. Тогда по предположению индукции найдется бескванторная формула $\tilde{A}(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e})$, такая, что секвенция

$$\Phi(B_1),\ \ldots,\ A(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e}) \to \tilde{A}(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e})$$

выводима без сечений. Следовательно, по тем же причинам, что и для указанной выше секвенции (2), секвенция

$$\Phi(B_1),\ \ldots,\ A(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})),\ \ldots \to \ldots,\ \tilde{A}(\boldsymbol{m}_{\mathfrak{f}},\ \mathfrak{f}(\boldsymbol{m}_{\mathfrak{f}})),\ \ldots$$

выводима без сечений. Отсюда вытекает выводимость первой из секвенций (11).

Чтобы вывести вторую секвенцию, начнем с секвенции

$$\Phi(B_1),\ \ldots,\ \tilde{A}(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e}) \to A(\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e}).$$

Отсюда мы без сечений получаем

$$\Phi(B_1), \ldots, a=n, a=n \supset b=f(n), \tilde{A}(n, f(n)) \to A(a, b).$$

Далее, следуя доказательству выводимости секвенции (7), мы получим не содержащий сечений вывод секвенции

$$\Phi(A), \Phi(B_1), \ldots, \tilde{A} \to A.$$

Пусть теперь дана произвольная общезначимая секвенция языка L, скажем

$$A_0, A_1, \ldots, \to B_0, B_1, \ldots .$$

Попытаемся вывести ее. Поскольку наша система в языке L′ является непротиворечивой, из того, что данная секвенция и секвенция (11) общезначимы, следует, что общезначима и секвенция

$$\Phi, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots \to \tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \ldots, \tag{12}$$

где Φ состоит из формул вида

$$\forall x \exists y \bigwedge_n (x=n \supset y=f(n)).$$

Поэтому секвенция (12) выводима (без существенных сечений) в однородном фрагменте нашей расширенной системы.

С другой стороны, секвенции $\Phi, A_\alpha \to \tilde{A}_\alpha$ и $\Phi, \tilde{B}_\beta \to B_\beta$ выводимы в нашей системе с языком L′ без существенных сечений. Теперь, применив правило сильно обобщенного сечения с высекаемыми формулами

$$\Phi, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \ldots, \tag{13}$$

мы получим данную секвенцию.

Следовательно, осталось показать, что это существенное сечение в построенном выводе данной секвенции можно устранить (в языке L′). Если мы покажем это, то данная секвенция языка L может быть выведена в исходной системе в языке L без существенных сечений.

В доказательстве теоремы об устранении сечений мы воспользуемся доказательством, изложенным выше.

Доказательство проводится с помощью обобщенных генценовских редукций. Для упрощения рассуждений мы предположим, что язык L не содержит функциональных символов. Будет также предполагаться, что начальные секвенции состоят лишь из атомарных формул. Теорему об устранении сечений мы докажем в следующей форме.

(∗) Пусть P — некоторый вывод (в языке L′), такой, что

(i) вдоль любой ветви, состоящей из секвенций, имеется не более одного существенного о. с.;

(ii) главные формулы применений кванторных правил, являющиеся предками высекаемых формул, имеют вид

$$\exists y \bigwedge_m (a=m \supset y=f(m))$$

или

$$\forall x \exists y \bigwedge_m (x=m \supset y=f(m)),$$

а боковые формулы этих применений имеют вид

$$\bigwedge_m (a=m \supset b=f(m)) \quad \text{(в антецеденте)},$$

$$\bigwedge_m (a=m \supset f(n)=f(m)) \quad \text{(в сукцеденте)},$$

или

$$\exists y \bigwedge_m (x=m \supset y=f(m)),$$

соответственно (см. (13)).

Пусть S: $\Gamma \to \Delta$ есть нижняя секвенция применения с. о. с. Перечислим некоторые особенности проводимой редукции.

(iii) Секвенция S и все ее потомки не меняются.

(iv) Либо устраняется с.о.с., по которому в P получена секвенция S, либо устраняются некоторые секвенции вида $\ldots D \ldots \to \ldots D \ldots$, либо устраняются некоторые введения логических символов выше S, либо существенное о.с. передвигается вверх на один шаг.

Пусть $\mathcal{F}$ — множество высекаемых формул в с.о.с. над S. Редукция определяется в зависимости от номера этапа $k \pmod{10}$.

$k \equiv 0 \pmod{10}$. Среди верхних секвенций рассматриваемого сечения ищем секвенцию вида

$$\ldots, D, \ldots \to \ldots, D, \ldots \quad \text{или} \quad \ldots \to \ldots, a=a, \ldots . \tag{$*$}$$

Допустим, что такая секвенция найдется. В последующих рассуждениях случаи с меньшими номерами разбираются прежде случаев, имеющих больший номер.

Случай 1. Некоторая такая формула D из (∗) входит и в Γ, и в Δ. Заменим часть вывода, расположенную над S, выводом

$$\frac{D \to D}{\overline{\Gamma \to \Delta}} \quad \text{(без сечений)}.$$

Случай 2. Равенство $a=a$ из (∗) входит в Δ. Преобразуем фигуру вывода над S в

$$\frac{\to a=a}{\ldots \to \ldots, a=a, \ldots,}$$

Случай 3. Никакая такая формула D не входит ни в Γ, ни в Δ. Такой случай невозможен, поскольку тогда формула D должна принадлежать и $\mathscr{F}_1$, и $\mathscr{F}_2$ при некотором разбиении $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ множества $\mathscr{F}$.

Случай 4. Формула D входит в Γ, но не входит в Δ. Тогда формула D в сукцеденте является высекаемой, а эта же формула в актецеденте таковой не является. Удалим все верхние секвенции, которые содержат D в сукцеденте. Если D входит в антецедент одной из оставшихся секвенций (если такие секвенции существуют), то рассматриваем D как формулу в Γ. Сделаем то же самое для всех таких D.

Таким образом, множество высекаемых формул теперь будет равняться $\mathscr{F}$ — {все такие D}, и поэтому случай 4 можно устранить.

Случай 5. Формула D входит в Δ, но не входит в Γ. Редукция определяется так же, как и для случая 4.

$k \equiv 1 \pmod{10}$. Среди верхних секвенций существует некоторая секвенция вида

$$\ldots \to \ldots, t = c_0, \ldots, t = c_1, \ldots, t = c_\alpha, \ldots \quad (\alpha < K).$$

Если все эти формулы $t = c_\alpha$ входят в Δ, то секвенцию $\Gamma \to \Delta$ можно получить так:

$$\frac{\to t = c_0,\ t = c_1,\ \ldots,\ t = c_\alpha,\ \ldots}{\Gamma \to \Delta}$$

и, следовательно, без сечений. В противном случае поступим следующим образом. Пусть G — множество всех высекаемых формул вида $t = c_\alpha$, и пусть H — множество остальных высекаемых формул. Пусть $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ — некоторое разбиение множества $\mathscr{F}$. Тогда найдутся некоторые множества $\Phi_1 \subseteq \mathscr{F}_1 \cap G$, $\Psi_1 \subseteq \mathscr{F}_1 \cap H$, $\Phi_2 \subseteq \mathscr{F}_2 \cap G$ и $\Psi_2 \subseteq \mathscr{F}_2 \cap H$, такие, что

$$\Phi_1,\ \Psi_1,\ \Gamma' \to \Delta',\ \Phi_2,\ \Psi_2$$

— одна из верхних секвенций рассматриваемого сечения.

Рассмотрим все разбиения $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ с одними и теми же множествами $G_1 = \mathscr{F}_1 \cap G$ и $G_2 = \mathscr{F}_2 \cap G$. Тогда для всякого такого разбиения найдутся множества Ψ_1 и Ψ_2, такие, что секвенция

$$G_1,\ \Psi_1,\ \Gamma' \to \Delta',\ G_2,\ \Psi_2$$

выводима без сечений и без увеличения числа непосредственных выводов. Следовательно, применив к H правило с.о.с., мы получим

$$G_1,\ \Gamma \to \Delta,\ G_2.$$

Это верно для всевозможных разбиений множества G; поэтому, применив правило с.о.с. к G, мы получим $\Gamma \to \Delta$. Последнее применение правила с.о.с. здесь рассматривается как применение слабого правила. Таким образом, этот случай можно устранить.

$k \equiv 2$. Допустим, что существуют высекаемые формулы, внешним логическим символом которых является $\neg$. (Если таких формул нет, переходим к следующему этапу.) Возьмем произвольную верхнюю секвенцию

$$S_0:\ \ldots,\ \neg A,\ \ldots,\ \Gamma_0 \to \Delta_0,\ \ldots,\ \neg B,\ \ldots,$$

где $\neg A$, $\neg B$, ... — высекаемые формулы, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta$. Пусть Q_0 — подвывод вывода P, оканчивающийся секвенцией S_0. Тогда, слегка видоизменив Q_0, мы получим вывод секвенции

$$S_0':\ \ldots,\ B,\ \ldots,\ \Gamma_0 \to \Delta_0,\ \ldots,\ A,\ \ldots,$$

не увеличивая сложность вывода. Вспомним, что Q_0 не содержит существенных сечений. Заменим каждую формулу в $\mathscr{F}$ с внешним логическим символом $\neg$, скажем $\neg A$, на A и таким образом получим множество $\mathscr{F}'$. Тогда произвольное разбиение множества $\mathscr{F}'$, скажем $(\mathscr{F}_1', \mathscr{F}_2')$, естественным образом индуцирует некоторое разбиение множества $\mathscr{F}$, скажем $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. Если секвенция S_0 указанного выше вида является верхней секвенцией, соответствующей разбиению $(\mathscr{F}_1', \mathscr{F}_2')$, то секвенция S_0' соответствует разбиению $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. Таким образом, выводимы посылки правила с. о. с. применительно к множеству $\mathscr{F}'$. С помощью этого правила мы получаем секвенцию S. В этом случае устраняются некоторые непосредственные выводы, вводящие символ $\neg$.

$k \equiv 3$. Рассмотрим все формулы из $\mathscr{F}$, внешним логическим символом которых является $\bigwedge$. Пусть S_0 — некоторая верхняя секвенция рассматриваемого сечения,

$$S_0:\ \ldots \bigwedge_i C_i,\ \ldots,\ \Gamma_0 \to \Delta_0,\ \ldots,\ \bigwedge_j A_j,\ \ldots,\ \bigwedge_h B_h,\ \ldots,$$

где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta$, а $\bigwedge_i C_i$ и т. д. — лишь некоторые высекаемые формулы, внешним логическим символом которых является $\bigwedge$.

Пусть Q_0 — подвывод, оканчивающийся секвенцией S_0. Тогда, видоизменив очевидным образом Q_0, мы можем построить квазивывод секвенции

$$\ldots,\ \{C_i\}_i,\ \ldots,\ \Gamma_0 \to \Delta_0,\ \ldots,\ A_j,\ \ldots,\ B_h,\ \ldots$$

для каждой комбинации индексов $(\ldots, j, \ldots, h, \ldots)$. Пусть $\mathscr{F}'$ — множество формул, получаемое из множества $\mathscr{F}$ заменой в нем всех формул вида $\bigwedge_i C_i$ на

$$\{C_0, C_1, \ldots, C_i, \ldots\}.$$

Пусть $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$ — разбиение множества $\mathcal{F}'$, такое, что (i) $\bigwedge_i C_i$ принадлежит $\mathcal{F}_2$, если $\bigwedge_i C_i$ принадлежит $\mathcal{F}$ и хотя бы одно C_i принадлежит $\mathcal{F}'_2$; (ii) $\bigwedge_i C_i$ принадлежит $\mathcal{F}_1$, если все $C_0, C_1, \ldots, C_i, \ldots$ принадлежат $\mathcal{F}'_1$; (iii) все остальные формулы принадлежат $\mathcal{F}_1$ (или $\mathcal{F}_2$), если и только если они принадлежат $\mathcal{F}'_1$ (соответственно $\mathcal{F}'_2$). Существует некоторая верхняя секвенция, соответствующая разбиению $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$,

$$\bigwedge_i C_i, \ldots, \Gamma_0 \to \Delta_0, \ldots, \bigwedge_j A_j, \ldots, \bigwedge_h B_h, \ldots.$$

Тогда, как было показано выше, мы можем преобразовать ее в

$$\ldots \{C_i\}_i, \ldots, \Gamma_0 \to \Delta_0, \ldots, A_j, \ldots, B_h, \ldots$$

для каждой комбинации индексов $(\ldots, j, \ldots, h, \ldots)$. Так как $\bigwedge_i C_i$ принадлежит $\mathcal{F}_1$ только тогда, когда все C_i принадлежат $\mathcal{F}'_1$, то

$$\ldots, \{C_i\}_i, \ldots, \subseteq \mathcal{F}'_1 \quad \text{и} \quad \ldots, A_j, \ldots, B_h, \ldots \subseteq \mathcal{F}'_2.$$

Это рассуждение справедливо для любого разбиения множества $\mathcal{F}'$. Поэтому к $\mathcal{F}'$ можно применить правило с. о. с.

$k \equiv 4$. Редукция для $\bigvee$ определяется аналогично.

$k \equiv 5$. Рассмотрим все формулы в $\mathcal{F}$, начинающиеся с кванторов. Если некоторая такая формула входит в антецедент какой-нибудь секвенции, то боковая формула, соответствующая введению этого квантора, имеет либо вид

1) $$\bigwedge_m (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})),$$

либо вид

2) $$\exists y \bigwedge_m (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})).$$

Если же такая формула входит в сукцедент, то соответствующая боковая формула имеет либо вид

3) $$\bigwedge_m (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})),$$

либо вид

4) $$\exists y \bigwedge_m (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} \supset \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})).$$

Если имеют место случаи 1) и 3), то вместо $\boldsymbol{b}$ подставим $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ произвольно; если же имеют место 2) и 4), то ничего не меняем. В первом случае заменим первоначальную формулу на 3), а во втором случае заменим ее на 2). Если имеются другие формулы, содержащие $\boldsymbol{b}$, то они также заменяются на $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$. Очевидно, что по любому данному разбиению нового множества высекаемых формул можно получить индуцированное разбиение первоначального множества.

$k \equiv 6$. Допустим, что $\Phi, \Gamma_0 \to \Delta_0, \Psi$ — некоторая верхняя секвенция рассматриваемого сечения. Пусть $\neg A, \ldots$ суть все формулы в Γ_0, внешним логическим символом которых является $\neg$, и пусть $\tilde{\Gamma}$ — множество остальных формул в Γ_0. Формулы $\neg B, \ldots$ и множество $\tilde{\Delta}$ определяются аналогично. Тогда мы можем построить некоторый квазивывод секвенции

$$\Phi, \tilde{\Gamma}, B, \ldots \to \tilde{\Delta}, A, \ldots, \Psi,$$

сложность которого не больше сложности квазивывода секвенции $\Phi, \Gamma_0, \to \Delta_0, \Psi$. Применив правило с. о. с. к тем же высекаемым формулам, мы получим секвенцию $\Gamma' \to \Delta'$, где Γ' получается из Γ заменой некоторых формул $\neg A$ на B, и Δ' определяется аналогично. Поэтому мы получаем

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma' \to \Delta'}}{\overline{\Gamma \to \Delta,}}$$

где $=\!=\!=$ здесь обозначает применение двух правил: $\neg$-слева и $\neg$-справа. В этом случае устраняются некоторые применения логического правила (вводящие символ $\neg$), расположенные выше рассматриваемого с. о. с.

$k \equiv 7$. Пусть $\Phi, \Gamma_0 \to \Delta_0, \Psi$ — некоторая верхняя секвенция. Рассмотрим все формулы в Δ_0, внешним логическим символом которых является $\bigwedge$, скажем $\ldots, \bigwedge_i A_i, \ldots, \bigwedge_j B_j, \ldots$, и пусть $\tilde{\Delta}_0$ обозначает множество остальных формул в Δ_0. Для всякой комбинации индексов $(\ldots, i, \ldots, j, \ldots)$ мы можем построить квазивывод секвенции

$$\Phi, \Gamma_0 \to \tilde{\Delta}_0, \ldots, A_i, \ldots, B_j, \ldots, \Psi.$$

Следовательно, по правилу с. о. с. мы получаем секвенцию

$$\Gamma' \to \tilde{\Delta}, \ldots, A_i, \ldots, B_j, \ldots,$$

из которой мы можем затем вывести $\Gamma \to \Delta$.

$k \equiv 8$. Рассматриваем формулы в Γ_0, внешним логическим символом которых является $\bigwedge$.

$k \equiv 9$. Пусть $\Phi, \Gamma_0 \to \Delta_0, \Psi$ — некоторая верхняя секвенция рассматриваемого сечения. Пусть $\mathsf{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots$ суть все формулы в Γ_0, внешний логический символ которых имеет вид Q^T, и пусть $\tilde{\Gamma}_0$ состоит из остальных формул в Γ_0. Пусть

$\mathrm{Q}^{T'}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})\, B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \ldots$ — все формулы в Δ_0, внешний логический символ которых имеет вид $\mathrm{Q}^{T'}$, и пусть $\tilde{\Delta}_0$ состоит из остальных формул в Δ_0. Тогда мы можем построить некоторый квазивывод секвенции

$$\Phi, \tilde{\Gamma}_0, \{A(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})\}_{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}}, \ldots \to \{B(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{t}_i)\}_i, \ldots, \tilde{\Delta}_0, \Psi$$

для некоторых $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s}$ и i. Применяя правило с. о. с., получаем

$$\tilde{\Gamma}, \{A(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})\}_{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}}, \ldots \to \{B(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{t}_i)\}_i, \ldots, \tilde{\Delta}.$$

Вводя с обеих сторон кванторы, мы можем вывести секвенцию $\Gamma \to \Delta$. Поскольку ограничения на собственные переменные налагаются на весь вывод, очевидно, что те свойства, которыми обладает вывод P, выполняются и для новой фигуры.

Описание редукции окончено.

Возьмем произвольное применение правила, не являющегося слабым, т. е. вводящего некоторый логический символ. Главные формулы такого применения являются либо высекаемыми формулами, либо формулами секвенции $\Gamma \to \Delta$. Пусть $\mathscr{L}$ — некоторая нить секвенций, которой принадлежит нижняя секвенция этого применения. Так как число непосредственных выводов вдоль любой нити конечно и поскольку редукционный процесс уменьшает число применений логических правил, расположенных выше данного с. о. с., рассматриваемое применение в конце концов либо будет устранено, либо окажется ниже с. о. с. Поэтому через конечное число шагов вдоль любой нити секвенций не окажется применений правила с. о. с. Следовательно, мы получим некоторый не содержащий сечений вывод данной секвенции.

Замечание. Для каждой функции f из τ^β в τ введем соответствующий фукциональный символ $\bar{f}$. Пусть $A(\bar{f})$ — множество предложений вида $\bar{f}(\boldsymbol{n}) = m$, где $f(\boldsymbol{n}) = m$. Из секвенций

$$A(\bar{f}), \boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})) \to A(\boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})) \text{ для всех } \boldsymbol{n},$$
$$\to a_\alpha = c_0, a_\alpha = c_1, \ldots \text{ для всех } a_\alpha \text{ из } \boldsymbol{a}$$

мы можем по правилу с. о. с. вывести секвенцию

$$A(\bar{f}), \ldots, A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}))\ldots \to A(\boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})),$$

где $\boldsymbol{n}$ пробегает всевозможные последовательности констант. Это верно для каждой последовательности функций $\boldsymbol{f}$; поэтому мы получаем секвенцию (7) в виде

$$\ldots, A(\bar{f}), \ldots, \bigwedge_{\boldsymbol{n}} A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})) \to \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

или

$$\ldots, A(\bar{f}), \ldots, \bigvee_{\boldsymbol{f}} \bigwedge_{\boldsymbol{n}} A(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})) \to \mathrm{Q}^T(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})\, A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Проведя такие же рассуждения, как и раньше, мы получим, что если $\Gamma \to \Delta$ является общезначимой секвенцией исходного языка, то секвенция

$$\ldots, A(\bar{f}), \ldots, \Gamma \to \Delta$$

выводима без сечений. Такая формулировка для некоторых целей может быть более удобной.

ЧАСТЬ III

ПРОБЛЕМЫ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Теперь мы перейдем к изучению доказательств непротиворечивости и их применений. Сначала рассмотрим теорию ординальных диаграмм, которая, как мы увидим, будет играть главную роль в нашем исследовании. Излагаемая здесь теория ординальных диаграмм несколько отличается от первоначального варианта этой теории, опубликованного в более ранних статьях автора. Однако эти две формулировки, по существу, эквивалентны как по своей силе, так и по своим наиболее важным свойствам. Внесенные изменения облегчают наше изучение этого вопроса.

Мы считаем важным, чтобы проблемы непротиворечивости формулировались на подходящей философской основе. Вопрос о том, какая основа является подходящей, мы обсудим в следующей главе. В последние годы появилась тенденция изучать основания математики в направлении, которое можно было бы назвать „квазиоснованиями". Мы полагаем, что это направление является неудачным. В гл. 5 мы объясним, что мы понимаем под квазиоснованиями и почему мы возражаем против такого направления в изучении оснований математики. Читатель может ознакомиться с разнообразными точками зрения на проблемы непротиворечивости в статьях по теории доказательств в сборнике: *Intuitionism and proof theory*, eds. Kino, Myhill and Vesley (North-Holland, Amsterdam, 1970).

ГЛАВА 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

§ 25. Введение

Эта глава посвящена проблемам непротиворечивости систем арифметики второго порядка. Перед тем как взяться за эти проблемы, мы бы хотели привлечь внимание читателя к следующим двум обстоятельствам.

1. Математики обладают чрезвычайно хорошей интуицией относительно мира натуральных чисел в том виде, как его представляет себе бесконечный разум. Следовательно, вопрос о непротиворечивости натуральных чисел не является особенно важным вопросом. Напротив, мир множеств мы можем представить себе лишь с помощью нашего воображения и только через наш математический опыт. Поэтому проблема непротиворечивости аксиом выделения является серьезной и важной для оснований математики.

2. Термин „непротиворечивость" используется как одно из ключевых слов в основаниях математики. Основной смысл этого понятия состоит в том, что нельзя вывести противоречие. Конечно, это самая большая гарантия существования нашего воображаемого мира бесконечного разума. Но иногда нам хотелось бы знать больше. Например, тот факт, что в рассматриваемой теории противоречие не возникает, не объясняет значение фразы типа „эта теорема доказывается с помощью аксиомы выделения". Неконструктивные доказательства не проливают свет на этот вопрос. С другой стороны, конструктивное доказательство подкрепляет нашу интуицию и придает теореме дополнительный смысл. В частности, конструктивное доказательство теоремы об устранении сечений усилило бы наше доверие к аксиомам выделения и поэтому придало бы нам большую уверенность относительно нашего воображаемого мира множеств.

В этой главе мы будем интересоваться арифметикой второго порядка. Аксиомы выделения для нее имеют следующий вид:

$$\text{правило } \forall\text{-слева: } \frac{F(V),\ \Gamma \to \Delta}{\forall\phi F(\phi),\ \Gamma \to \Delta},$$

$$\text{правило } \exists\text{-справа: } \frac{\Gamma \to \Delta,\ F(V)}{\Gamma \to \Delta,\ \exists\phi F(\phi)}.$$

В любом не содержащем сечений выводе наши аксиомы выделения, грубо говоря, означают, что мы можем ввести новую переменную ϕ, чтобы обозначить данный абстракт V, и затем использовать сокращения $\forall\phi F(\phi)$ или $\exists\phi F(\phi)$ вместо

$$F(\phi_1) \wedge \ldots \wedge F(\phi_n) \quad \text{или} \quad F(\phi_1) \vee \ldots \vee F(\phi_n).$$

Подробнее мы это обсудим позже. Укажем, что аналогичная интерпретация справедлива в системах высшего порядка, хотя ситуация там гораздо сложнее.

Наше изучение мы начнем с теории модуляций, которая позволяет нам высказать главное наше возражение против „практических" оснований. Для любой данной формулы A мы определим ее левую и правую модуляции. Определение проводится индукцией по числу логических символов в A. Предположим, что такими символами являются $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\forall$. В каждом случае *левая модуляция* формулы A определяется как некоторая формула вида $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$, где $A_1, \ldots, A_m$ — какие-то *левые атомарные модуляции* формулы A, а *правая модуляция* формулы A — как некоторая формула вида $B_1 \vee \ldots \vee B_n$, где $B_1, \ldots, B_n$ — какие-то *правые атомарные модуляции* формулы A. Требуется также, чтобы если A' является модуляцией формулы A, то каждая свободная переменная в A' входила в A.

Определение 25.1. (1) Если A — атомарная формула, то ее левая и правая (атомарные) модуляции совпадают с A.

(2) Если формула A имеет вид $\neg B$, то ее левые атомарные модуляции имеют вид $\neg B'$, где B' — любая правая модуляция формулы B; правые атомарные модуляции формулы A имеют вид $\neg B''$, где B'' — любая левая модуляция формулы B.

(3) Если формула A имеет вид $B \wedge C$, то ее левые атомарные модуляции имеют вид $B' \wedge C'$, где B' и C' — левые модуляции формул B и C соответственно. Правые атомарные модуляции формулы A имеют вид $B'' \wedge C''$, где B'' и C'' — правые модуляции формул B и C соответственно. Атомарные модуляции формул вида $B \vee C$ определяются аналогично.

(4) Пусть формула A имеет вид $\forall x F(x)$ и t — произвольный терм, никакая свободная переменная которого не входит в $\forall x F(x)$. Тогда $\forall x_1 \ldots \forall x_n G$ — левая атомарная модуляция формулы A, если G — левая модуляция формулы $F(t)$, а кванторы $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ связывают все свободные переменные терма t. Правая атомарная модуляция формулы $\forall x F(x)$ имеет вид $\forall x G(x)$, где a не входит в $F(x)$ и $G(a)$ — правая модуляция формулы $F(a)$.

(5) Если формула A имеет вид $\forall \phi F(\phi)$ и V — произвольный абстракт, никакая свободная переменная которого не входит в $\forall \phi F(\phi)$, то $\forall \phi_1 \ldots \forall \phi_n \forall x_1 \ldots \forall x_m G$ — левая атомарная модуляция формулы A, где G — некоторая левая модуляция формулы $F(V)$, а кванторы $\forall \phi_1 \ldots \forall \phi_n \forall x_1 \ldots \forall x_m$ связывают все свободные переменные, входящие в V. Более точно, пусть $V = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a_1, \ldots, a_m)$, где все свободные переменные отмечены, и пусть $\beta_1, \ldots, \beta_n, b_1, \ldots, b_m$ — свободные переменные, не содержащиеся в $F(V)$. Пусть $G'(\beta_1, \ldots, \beta_n, b_1, \ldots, b_m)$ — левая модуляция формулы $F(V(\beta_1, \ldots, \beta_n, b_1, \ldots, b_m))$, такая, что $G'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a_1, \ldots, a_m)$ совпадает с G. Тогда под $\forall \phi_1 \ldots \forall \phi_n \forall x_1 \ldots \forall x_m G$ мы понимаем формулу

$$\forall \phi_1 \ldots \forall \phi_n \forall x_1 \ldots \forall x_m G'(\phi_1, \ldots, \phi_n, x_1, \ldots, x_m).$$

Правая атомарная модуляция формулы $\forall \phi F(\phi)$ имеет вид $\forall \phi F'(\phi)$, где α не входит в $F(\phi)$ и $F'(\alpha)$ — некоторая правая модуляция формулы $F(\alpha)$.

Предложение 25.2. *Пусть α и β — либо некоторые свободные переменные, либо некоторые константы. Если $A'(\alpha)$ — модуляция (левая или правая) формулы $A(\alpha)$, то $A'(\beta)$ — также модуляция (соответственно левая или правая) формулы $A(\beta)$.*

Предложение 25.3. *Если A' — некоторая левая модуляция формулы A, то выводима секвенция $A \to A'$. Если A'' — некоторая правая модуляция формулы A, то выводима секвенция $A'' \to A$.*

Доказательство. Мы рассмотрим только первую часть самого важного случая (5), т. е. когда A имеет вид $\forall \phi F(\phi)$ (остальные случаи легкие). Тогда A' имеет вид $A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n$, где каждое A'_i есть левая атомарная модуляция формулы A. Достаточно показать выводимость $A \to A'_i$ для всякого i. Пусть A'_i имеет вид $\forall \phi_1 \ldots \forall \phi_l \forall x_1 \ldots \forall x_m G$, где G — левая модуляция формулы $F(V)$. Допустим, что выводима секвенция $F(V) \to G$. Тогда имеем

$$\cfrac{\cfrac{F(V) \to G}{\forall \phi F(\phi) \to G}}{\forall \phi F(\phi) \to \forall \phi_1 \ldots \forall \phi_l \forall x_1 \ldots \forall x_m G.}$$

Ограничения на собственные переменные выполнены.

Определение 25.4. (1) Секвенция $A'_1, \ldots, A'_n \to B'_1, \ldots, B'_m$ называется *модуляцией* секвенции $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$, если A'_i — некоторая левая модуляция формулы A_i для каждого i, а B'_j — некоторая правая модуляция формулы B_j для каждого j.

(2) Пусть P — некоторый вывод без сечений. Для каждой секвенции $\Pi \to \Lambda$ в P индукцией по числу непосредственных выводов, расположенных в P над $\Pi \to \Lambda$, мы определим некоторую модуляцию $\Pi' \to \Lambda'$ этой секвенции. Секвенция $\Pi' \to \Lambda'$ называется *P-модуляцией* секвенции $\Pi \to \Lambda$ и определяется так, что если $\Pi \to \Lambda$ имеет вид $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$, то $\Pi' \to \Lambda'$ есть $A'_1, \ldots, A'_m \to B'_1, \ldots, B'_n$, где A'_i — некоторая левая модуляция формулы A_i, а B_j — некоторая правая модуляция формулы B_j.

Точное определение мы приведем только для некоторых типичных случаев.

1) Если $\Pi \to \Lambda$ — начальная секвенция в P, то $\Pi' \to \Lambda'$ совпадает с $\Pi \to \Lambda$.

2) Последним применяется правило перестановки слева:

$$\frac{\Gamma, C, D, \Xi \to \Delta}{\Gamma, D, C, \Xi \to \Delta,}$$

Если секвенция $\Gamma', C', D', \Xi' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $\Gamma, C, D, \Xi \to \Delta$, то секвенция $\Gamma', D', C', \Xi' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $\Gamma, D, C, \Xi \to \Delta$.

3) Последним применяется правило ослабления слева:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{C, \Gamma \to \Delta.}$$

Если секвенция $\Gamma' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $\Gamma \to \Delta$, то секвенция $C', \Gamma' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $C, \Gamma \to \Delta$.

4) Последним применяется правило сокращения слева:

$$\frac{C, C, \Gamma \to \Delta}{C, \Gamma \to \Delta.}$$

Если секвенция $C_1, C_2, \Gamma' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $C, C, \Gamma \to \Delta$, то секвенция $C_1 \wedge C_2, \Gamma' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $C, \Gamma \to \Delta$.

Последним применяется правило сокращения справа:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, C, C}{\Gamma \to \Delta, C.}$$

Если секвенция $\Gamma' \to \Delta', C_1, C_2$ является P-модуляцией секвенции $\Gamma \to \Delta, C, C$, то секвенция $\Gamma' \to \Delta', C_1 \vee C_2$ является P-модуляцией секвенции $\Gamma \to \Delta, C$.

5) Последним применяется правило второго порядка $\forall$-слева:

$$\frac{F(V), \Gamma \to \Delta}{\forall\phi F(\phi), \Gamma \to \Delta.}$$

Если секвенция $G, \Gamma' \to \Delta'$ является P-модуляцией секвенции $F(V), \Gamma \to \Delta$, то секвенция

$$\forall\phi_1 \ldots \forall\phi_n \forall x_1 \ldots \forall x_m G, \Gamma' \to \Delta'$$

является P-модуляцией секвенции $\forall\phi F(\phi), \Gamma \to \Delta$, где кванторы $\forall\phi_1 \ldots \forall\phi_n \forall x_1 \ldots \forall x_m$ связывают все свободные переменные, входящие в абстракт V.

6) Последним применяется правило второго порядка $\forall$-справа:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, F(\alpha)}{\Gamma \to \Delta, \forall\phi F(\phi).}$$

Допустим, что $\Gamma' \to \Delta', F'(\alpha)$ есть P-модуляция верхней секвенции. Тогда секвенция $\Gamma' \to \Delta', \forall\phi F'(\phi)$ является P-модуляцией нижней секвенции.

Предложение 25.5. *Пусть P — некоторый не содержащий сечений вывод секвенции $\Gamma \to \Delta$, и пусть секвенция $\Gamma' \to \Delta'$ является*

P-модуляцией секвенции $\Gamma \to \Delta$. Тогда найдется некоторый не содержащий сечений предикативный вывод секвенции $\Gamma' \to \Delta'$.

Доказательство. Это предложение непосредственно следует из определения 25.4. В самом деле, согласно определению 25.4, если S_2 — нижняя секвенция для S_1 (и S), то секвенцию S_2', т. е. P-модуляцию секвенции S_2, можно вывести из S_1' (и S') без применений сечений и непредикативных аксиом выделения. Последнее, очевидно, вытекает из определения P-модуляции (случай 5) определения 25.4. Из п. 5) определения 25.1 следует, что во всяком применении правила $\forall$-справа выполняется ограничение на собственную переменную.

Наша теория модуляций, в частности предложение 25.5, выявляет одну важную причину нашего интереса к выводам без сечений, а именно: вывод без сечений той или иной теоремы дает нам возможность придать этой теореме интерпретацию, исключающую расселовский порочный круг. Разумеется, каждая теорема имеет столько интерпретаций, не содержащих порочного круга, сколько она имеет выводов без сечений, и разные интерпретации отдельной теоремы определяют разные интерпретации всей теории.

Если бы мы имели некоторый единообразный „метод“, который бы позволял преобразовывать каждый формальный вывод в вывод без сечений, то этот „метод“ определял бы некоторую интерпретацию математики, не содержащую расселовского порочного круга. Следовательно, создание такого метода должно стать делом первостепенной важности.

Конечно, мы предпочли бы иметь интерпретацию, которая была бы по возможности ближе к первоначальному (естественному) смыслу. Следовательно, теорему об устранении сечений следует доказывать с помощью некоторой „устраняющей“ процедуры, которая сохраняет, насколько возможно, смысл первоначальных выводов.

Именно в этом вопросе мы не согласны с возникшей в недавнее время тенденцией изучения оснований математики в направлении, для которого мы выбрали название „квазиоснования“. Проиллюстрируем нашу точку зрения на примере.

Анализ можно рассматривать с различных точек зрения. Одна из точек зрения состоит в том, что анализ является теорией. Другая точка зрения состоит в том, что анализ представляет собой не систему аксиом, а некоторую совокупность результатов. Эта вторая точка зрения и поднимает проблему квазиоснований.

Задача квазиоснований состоит в том, чтобы развивать некоторого рода квазианализ, т. е. искать совокупность теорем, аналогичную данной совокупности теорем анализа, но которая на самом деле состоит из более слабых результатов, чем данные теоремы.

Нам хочется отметить два момента, объясняющих, почему мы не считаем „квазиоснования“ правильным направлением в исследовании оснований математики. Во-первых, когда получают совокупность результатов, которая „аналогична“ данному множеству теорем анализа, не совсем ясно, какие метаматематические заключения отсюда можно извлечь и какая теория получилась. А во-вторых, и это гораздо важнее, наша теория модуляций показывает, что задачи квазиоснований в принципе решены: если мы хотим получить „квазиоснования“ для определенной совокупности результатов, мы просто начинаем с предикативных аксиом выделения и развиваем модуляции этих результатов. Конечно, результаты, которые мы получим, будут не классическими теоремами, а всего лишь их модуляциями. Однако, как мы уже показали, эти модуляции представляют собой более сильные результаты, чем соответствующие теоремы классической математики.

Поэтому предикативные аксиомы выделения мы можем рассматривать как нечто действительно важное. Теоремы классической математики являются просто приближениями более сильных теорем. Следовательно, пока нас интересуют „практические“ основания, нам не нужно доказывать теорему об устранении сечений; нам надо лишь обосновать предикативные выделения. После того как это сделано, задача состоит в построении достаточных и подходящих для наших целей модуляций.

Мы, однако, защищаем другую точку зрения, согласно которой конструктивное доказательство теоремы об устранении сечений является делом первостепенной важности. Действительно, только через конструктивное доказательство устранимости сечений теория модуляций может по настоящему стать значительной теорией в мире предикативной математики. Доказательство теоремы об устранении сечений, приведенное в гл. 3, является теоретико-множественным и поэтому бесполезно для нашей цели.

§ 26. Ординальные диаграммы

В этом параграфе мы изложим теорию ординальных диаграмм, которая, как мы ранее указывали, будет играть основную роль в нашем изучении проблем непротиворечивости. Для каждой пары непустых вполне упорядоченных множеств I и A мы определим множество ординальных диаграмм, основанное на I и A. Одновременно мы определим понятие связной ординальной диаграммы.

Определение 26.1. Пусть I и A — некоторые непустые вполне упорядоченные множества, причем 0 — наименьший элемент в I. Систему *ординальных диаграмм*, основанную на I и A, мы определяем индуктивно следующим образом:

1) 0 — *связная* ординальная диаграмма.

2) Пусть i — некоторый элемент из I, a — элемент из A, и пусть α — произвольная ординальная диаграмма. Тогда (i, a, α) — *связная* ординальная диаграмма.

3) Пусть $n \geqslant 2$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — связные ординальные диаграммы. Тогда $\alpha_1 \# \alpha_2 \# \ldots \# \alpha_n$ — *несвязная* ординальная диаграмма.

Для удобства в рассуждениях, касающихся ординальных диаграмм, мы будем использовать буквы i, j, k и т. д. для обозначения элементов множества I, буквы a, b, c и т. д. для обозначения элементов множества A, а буквы α, β, γ и т. д. для обозначения ординальных диаграмм. Далее, под „ординальной диаграммой“ понимается „ординальная диаграмма, основанная на I и A“.

Определение 26.1 описывает индуктивную процедуру построения ординальных диаграмм. Если ординальная диаграмма γ участвует в построении диаграммы α, мы назовем γ *ординальной поддиаграммой* диаграммы α. Но из определения ясно, что ординальная диаграмма γ может участвовать в построении диаграммы α на нескольких различных этапах этого построения. Иногда бывает важно различать такие вхождения одной и той же диаграммы γ. Для этой цели мы будем использовать обозначение $\bar{\gamma}$, подразумевая под этим определенное вхождение диаграммы γ, а не только саму ординальную диаграмму γ. Таким образом, запись $\bar{\gamma} = \bar{\beta}$ означает, что не только $\gamma = \beta$, но и что $\bar{\gamma}$ и $\bar{\beta}$ обозначают одно и то же вхождение некоторой ординальной диаграммы.

Определение 26.1 (1) Каждая из связных ординальных диаграмм $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ является *компонентой* несвязной ординальной диаграммы $\alpha_1 \# \ldots \# \alpha_n$.

(2) Каждая связная ординальная диаграмма α имеет только одну компоненту, а именно саму себя.

Определение 26.3. Пусть $l(\alpha)$ — общее число пар скобок ( ) и знаков $\#$ в α. Тогда

$$l(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) =_{\mathrm{df}} l(\alpha) + l(\beta) + \ldots + l(\gamma).$$

Определение 26.4. *Равенство* ординальных диаграмм мы определяем индукцией по $l(\alpha, \beta)$ следующим образом:

(1) $0 = 0$.

(2) Пусть α имеет вид (i, a, γ). Тогда $\alpha = \beta$, если и только если β имеет вид (i, a, δ), где $\gamma = \delta$.

(3) Пусть α имеет вид $\alpha_1 \# \ldots \# \alpha_m$, и пусть β имеет вид $\beta_1 \# \ldots \# \beta_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — связные диаграммы. Тогда $\alpha = \beta$, если и только если $m = n$ и существует некоторая перестановка множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, скажем $\{j_1, \ldots, j_m\}$, такая, что

$$\alpha_1 = \beta_{j_1}, \ \alpha_2 = \beta_{j_2}, \ \ldots, \ \alpha_m = \beta_{j_m}.$$

Легко можно доказать, что $=$ является отношением эквивалентности. Отметим также, что $\alpha = 0$ или $0 = \alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда α совпадает с 0.

Определение 26.5. (1) Рассмотрим некоторое вхождение $\overline{(i, a, \gamma)}$ в α. Если $\bar{\beta}$ — вхождение диаграммы β в γ, то говорят, что вхождения элементов i и a в $\overline{(i, a, \gamma)}$ *связаны с* $\bar{\beta}$ в α. Мы также будем говорить, что вхождение пары (i, a) в $\overline{(i, a, \gamma)}$ связано с $\bar{\beta}$.

(2) Пусть $\bar{\beta}$ — некоторое вхождение диаграммы β в α, и пусть j — некоторый элемент из I. Если для каждого входящего в α и связанного с $\bar{\beta}$ элемента i из I мы имеем $i \geqslant j$, то вхождение $\bar{\beta}$ называется *j-активным* в α.

(3) Связные j-активные вхождения ординальных поддиаграмм в диаграмму α называются *j-полуфрагментами* диаграммы α.

(4) Пусть $\overline{(i, a, \gamma)}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α для некоторого $j > i$. Тогда вхождение $\bar{\gamma}$ в $\overline{(i, a, \gamma)}$ называется *i-фрагментом* диаграммы α. Если в диаграмме α имеется некоторый i-фрагмент, то i будем называть *индексом* этой диаграммы.

Заметим, что связные i-фрагменты диаграммы α являются частным случаем ее i-полуфрагментов. Если i-фрагменты диаграммы α являются вхождениями собственных ординальных поддиаграмм в α, то i-полуфрагменты диаграммы α могут и совпадать с α.

Для дальнейшего мы введем специальный символ ∞, который присоединим к I и будем рассматривать как максимальный элемент расширенного множества.

Определение 26.6. (1) Положим $\tilde{I} = I \cup \{\infty\}$. Порядок на $\tilde{I}$ такой же, как и на I, причем ∞ — максимальный элемент в $\tilde{I}$.

(2) Если $i \in \tilde{I}$ и $j \in I$, то i называется *верхним индексом* элемента j относительно $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, если либо i есть ∞, либо $i > j$ и i является индексом хотя бы одного из $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$.

(3) Через $j_0(j, \alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ обозначим наименьший верхний индекс элемента j относительно $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$.

(4) Через $\iota(j, \alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ обозначим число верхних индексов j относительно $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ в случае, когда j принадлежит I; если же j есть ∞, то это число полагается равным 0.

(5) *Внешним индексом* ординальной диаграммы (i, a, α) называется i.

(6) Пара (i, a), где $i \in I$ и $a \in A$, называется *значением*. Множество значений упорядочивается лексикографически.

(7) Значение (i, a) называется *внешним значением* диаграммы (i, a, α).

Заметим, что значения не являются вхождениями.

Для каждого i из $\tilde{I}$ мы сейчас определим порядок $<_i$ на множестве ординальных диаграмм (основанных на I и A). Определение проводится трансфинитной индукцией по $\omega \cdot l(\alpha, \beta) + \iota(i, \alpha, \beta)$.

Определение 26.7. (1) $0 <_i \beta$, если $\beta \neq 0$.

(2) Если α имеет вид $\alpha_1 \# \ldots \# \alpha_m$ и β имеет вид $\beta_1 \# \ldots \# \beta_n$, где $m + n > 2$, то $\alpha <_i \beta$, если выполняется одно из следующих условий:

i) Существует q, такое, что $1 \leqslant q \leqslant n$ и $\alpha_p <_i \beta_q$ для всех p, таких, что $1 \leqslant p \leqslant m$.

ii) $m = 1$, $n > 1$ и $\alpha_1 = \beta_q$ для некоторого q, такого, что $1 \leqslant q \leqslant n$.

iii) $m > 1$, $n > 1$, и существуют q и p, такие, что $1 \leqslant q \leqslant m$, $1 \leqslant p \leqslant n$, $\alpha_q = \beta_p$ и $\alpha_1 \# \ldots \# \alpha_{q-1} \# \alpha_{q+1} \# \ldots \# \alpha_m < _i \beta_1 \# \ldots \# \beta_{p-1} \# \beta_{p+1} \# \ldots \# \beta_n$.

(3) Если α и β — связные диаграммы, $i \neq \infty$ и $j = j_0(i, \alpha, \beta)$ (см. п. (3) определения 26.6), то $\alpha <_i \beta$, если выполняется одно из следующих условий:

i) Существует i-фрагмент $\bar{\sigma}$ диаграммы β, такой, что $\alpha \leqslant_i \sigma$, т. е. $\alpha <_i \sigma$ или $\alpha = \sigma$.

ii) $\alpha <_j \beta$, и для каждого i-фрагмента $\bar{\delta}$ диаграммы α имеет место $\delta <_i \beta$.

(4) Пусть $\alpha = (j, a, \gamma)$ и $\beta = (k, b, \delta)$.

Тогда $\alpha <_\infty \beta$, если

i) $j < k$ (в I), либо

ii) $j = k$ и $a < b$ (в A), либо

iii) $j = k$, $a = b$ и $\gamma <_j \delta$.

Предложение 26.8. *Для всякого i из $\tilde{I}$ отношение $<_i$ определено корректно и представляет собой линейный порядок на множестве ординальных диаграмм, основанных на I и A.*

Доказательство. Индукцией по $\omega \cdot l(\alpha, \beta, \gamma) + \iota(i, \alpha, \beta, \gamma)$ и $\omega \cdot l(\alpha, \beta) + \iota(i, \alpha, \beta)$ соответственно мы можем одновременно доказать, что

I) если $\alpha <_i \beta$ и $\beta <_i \gamma$, то $\alpha <_i \gamma$;
II) если $\alpha = \beta$ и $\beta <_i \gamma$, то $\alpha <_i \gamma$, а если $\alpha <_i \beta$ и $\beta = \gamma$, то $\alpha <_i \gamma$;
III) имеет место в точности одно из трех соотношений: $\alpha <_i \beta$, $\alpha = \beta$ или $\beta <_i \alpha$.

Если $l(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ или $l(\alpha, \beta) = 0$ соответственно, то $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и потому I), II) и III) тривиально выполняются. Для $l(\alpha, \beta, \gamma) > 0$ и $l(\alpha, \beta) > 0$ мы приведем лишь доказательства свойств I) и III) в некоторых типичных случаях. Будем считать, что α, β и γ имеют вид (j, a, α'), (k, b, β') и (m, c, γ') соответственно.

(1) $\iota(i, \alpha, \beta, \gamma) = \iota(i, \alpha, \beta) = 0$, и поэтому $i = \infty$.

I) Пусть $\alpha <_\infty \beta$ и $\beta <_\infty \gamma$. Из определения отношения $<_\infty$ вытекает, что $j \leqslant m$ и $a \leqslant c$. Если $j < m$ или $a < c$, то $\alpha <_\infty \gamma$. Если $j = m$ и $a = c$, то $j = k = m$ и $a = b = c$; поэтому $\alpha' <_j \beta'$ и $\beta' <_j \gamma'$. Тогда по предположению индукции $\alpha' <_j \gamma'$, откуда следует $\alpha <_\infty \gamma$.

III) Пусть $\alpha \neq \beta$. Тогда $(j, a) \neq (k, b)$ или $(j, a) = (k, b)$ и $\alpha' \neq \beta'$. Если $(j, a) \neq (k, b)$, то $\alpha <_\infty \beta$ или $\beta <_\infty \alpha$ по определению отношения $<_\infty$. Если же $(j, a) = (k, b)$, то по предположению индукции $\alpha' <_j \beta'$ или $\beta' <_j \alpha'$, и поэтому или $\alpha <_\infty \beta$, или $\beta <_\infty \alpha$.

(2) $\iota(i, \alpha, \beta, \gamma) > 0$ и $\iota(i, \alpha, \beta) > 0$ соответственно.

I) Рассмотрим только один случай: существует некоторый i-фрагмент диаграммы β, скажем $\bar{\sigma}$, такой, что $\alpha \leqslant_i \sigma$ и $\beta <_{i_0} \gamma$, где $i_0 = j_0(i, \beta, \gamma)$, и для всякого i-фрагмента ординала β, скажем $\bar{\delta}$, имеет место $\delta <_i \gamma$. Тогда $\alpha \leqslant_i \sigma$, $\sigma <_i \gamma$ и $l(\alpha, \sigma, \gamma) < l(\alpha, \beta, \gamma)$. Следовательно, по предположению индукции $\alpha <_i \gamma$.

III) Допустим, что $\alpha \nleqslant_i \beta$, т. е. $\alpha \neq \beta$ и не имеет место $\alpha <_i \beta$. Тогда

(*) для каждого i-фрагмента $\bar{\sigma}$ диаграммы β имеет место $\alpha \nleqslant_i \sigma$, откуда по предположению индукции следует $\sigma <_i \alpha$.

Пусть $i_0 = j_0(i, \alpha, \beta)$. Если $\beta <_{i_0} \alpha$, то, согласно (*) и определению 26.7, имеем $\beta <_i \alpha$. Если же $\beta \nless_{i_0} \alpha$, то, поскольку $\iota(i_0, \alpha, \beta) < \iota(i, \alpha, \beta)$, из предположения индукции следует, что $\alpha <_{i_0} \beta$. Если для каждого i-фрагмента $\bar{\delta}$ диаграммы α имеет место $\delta <_i \beta$, то $\alpha <_i \beta$. Но это противоречит нашему исходному предположению. Следовательно, найдется i-фрагмент $\bar{\delta}$ диаграммы α, такой, что $\beta \leqslant_i \delta$. Но тогда по определению 26.7 $\beta <_i \alpha$.

Предложение 26.9. *Если $\bar{\sigma}$ — некоторый i-фрагмент диаграммы α, то $\sigma <_i \alpha$.*

Доказательство. Если σ связно, то, согласно п. (3) i) определения 26.7, применительно к σ и к той компоненте диаграммы α, в которой $\bar{\sigma}$ является i-фрагментом, имеем $\sigma <_i \alpha$. Если же σ не связно, то для всякой компоненты δ диаграммы σ в силу (2) ii) определения 26.7 имеет место $\delta <_i \sigma$, и поэтому, согласно (3) i) того же определения, $\delta <_i \alpha$. Тогда из (2) i) следует, что $\sigma <_i \alpha$.

Предложение 26.10. *Пусть α — некоторая связная ординальная диаграмма, и пусть $\bar{\beta}$ — некоторый ее собственный i-полуфрагмент. Тогда $\beta <_j \alpha$ для каждого $j \leqslant i$.*

Доказательство проводится индукцией по $\omega \cdot l(\alpha, \beta) + \iota(j, \alpha, \beta)$ при каждом $j \leqslant i$.

1. Если $\beta = 0$, то $\beta <_j \alpha$ для всех j.

2. Допустим, что $\alpha = (k, b, \gamma)$ и β — некоторая компонента диаграммы γ. Тогда $i \leqslant k$, и поскольку γ входит в диаграмму α как ее k-фрагмент, то, согласно предложению 26.9, имеем $\beta \leqslant_k \gamma <_k \alpha$. Следовательно, $\beta <_k \alpha$. Если $j < k$, то всякий j-фрагмент диаграммы β является j-фрагментом диаграммы α. Но отсюда вытекает, что для каждого j-фрагмента $\bar{\sigma}$ диаграммы β имеет место $\sigma <_j \alpha$, и, следовательно $\beta <_j \alpha$ (это устанавливается индукцией по $\iota(j, \alpha, \beta)$).

3. Допустим, что $\alpha = (k, b, \gamma)$ и β не является компонентой γ. Тогда $k \geqslant i$ и найдется некоторая компонента диаграммы γ, скажем δ, такая, что β входит в γ как i-полуфрагмент диаграммы δ. Тогда по индуктивному предположению $\beta <_j \delta$ для всех $j \leqslant i$. Но, согласно определению, $\delta \leqslant_j \gamma$ и $\gamma <_j \alpha$ для каждого $j \leqslant k$; тогда, согласно п. 2 и определению 26.7 (2), имеем $j \leqslant i$. Следовательно, если $j \leqslant i$, то $\beta <_j \delta$.

Предложение 26.11. *Если диаграмма β имеет некоторое i-активное вхождение в диаграмму α, являющееся ее собственной ординальной поддиаграммой, то $\beta <_j \alpha$ для каждого $j \leqslant i$.*

Доказательство. Применяем предложение 26.10 к каждой компоненте такого вхождения диаграммы β.

Определение 26.12. Пусть α — некоторая ординальная диаграмма, и пусть i — некоторый элемент из $\tilde{I}$. Тогда запись $[\alpha]_i = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]_i$ будет означать, что диаграммы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ являются компонентами диаграммы α и

$$\alpha_1 \geqslant_i \alpha_2 \geqslant_i \ldots \geqslant_i \alpha_m.$$

Определение 26.13. Через $O(I, A)$ будем обозначать структуру, состоящую из множества ординальных диаграмм, основанных на I и A, и порядков $<_i$ для всех i из $\tilde{I}$.

Как обычно, мы будем использовать $O(I, A)$ и для обозначения универсума этой структуры, т. е. множества ординальных диаграмм, основанных на I и A.

Следующая наша цель — дать неконструктивное доказательство достижимости для $<_i$.

Теорема 26.14. *Для каждого i из $\tilde{I}$ отношение $<_i$ вполне упорядочивает множество $O(I, A)$.*

Доказательство. Эта теорема будет доказываться в виде серии лемм с помощью понятия $<_i$-достижимости ординальных диаграмм.

Определение 26.15. Пусть α имеет вид $\alpha_1 \# \alpha_2 \# \ldots \# \alpha_m$ и β имеет вид $\beta_1 \# \beta_2 \# \ldots \# \beta_n$. Через $\alpha \# \beta$ обозначим ординальную диаграмму

$$\alpha_1 \# \alpha_2 \# \ldots \# \alpha_m \# \beta_1 \# \beta_2 \# \ldots \# \beta_n.$$

Определение 26.16. (1) Пусть B — некоторое подмножество $O(I, A)$, и пусть i — некоторый элемент из $\tilde{I}$. Ординальная диаграмма α называется *$<_i$-достижимой в B*, если α принадлежит B и не существует бесконечной (строго) убывающей (относительно $<_i$) последовательности элементов множества B, начинающейся с α.

(2) Диаграмма α называется *$<_i$-достижимой* если она является $<_i$-достижимой в $O(I, A)$.

Определение 26.17. Для каждого i из I мы определяем некоторое подмножество F_i множества $O(I, A)$.

(1) $F_0 = O(I, A)$.

(2) $F_{i+1} = \{\alpha \in F_i \mid$ для каждого i-фрагмента σ диаграммы α диаграмма δ является $<_i$-достижимой в $F_i\}$,

где $i+1$ обозначает следующий за i элемент в I.

(3) $F_i = \bigcap_{j<i} F_j$, если i — предельный элемент в I.

Из этого определения, очевидно, следует, что если $\alpha \in F_i$, то $\alpha \in F_j$ для всех $j \leqslant i$.

Лемма 26.18. *Пусть B — некоторое множество ординальных диаграмм, и пусть i — некоторый элемент из I. Если каждый элемент из B является $<_i$-достижимым, то B вполне упорядочено отношением $<_i$.*

Лемма 26.18 гарантирует нам, что для таких множеств B можно пользоваться трансфинитной индукцией по $<_i$.

Лемма 26.19. *Если каждая связная ординальная диаграмма является $<_i$-достижимой, то любая ординальная диаграмма $<_i$-достижима.*

Доказательство. Достаточно доказать следующее:

(*) если существует бесконечная (строго) $<_i$-убывающая последовательность ординальных диаграмм, начинающаяся с α, то существует бесконечная $<_i$-убывающая последовательность связных ординальных диаграмм, начинающихся с α_1, где $[\alpha]_i = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]_i$.

Пусть C — множество всех связных ординальных диаграмм. Утверждение (*) мы докажем трансфинитной индукцией по α_1 относительно порядка $<_i$ в C с помощью леммы 26.18. Пусть $\{\beta_n\}$ — некоторая $<_i$-убывающая последовательность, причем $\beta_1 = \alpha$.

1) Если все компоненты диаграммы α равны 0, то все компоненты каждой из диаграмм $\beta_1, \beta_2, \ldots$ равны 0. Следовательно, число компонент от члена к члену в бесконечной последовательности $\{\beta_n\}$ должно уменьшаться. Поскольку это невозможно, диаграмма α должна иметь ненулевую компоненту. Допустим, что $\alpha_1 > 0$.

2) Допустим, что $m = 1$. Тогда $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 >_i \beta_2 >_i \ldots$.

Если α_1 — предельный элемент множества C (относительно порядка $<_i$, релятивизованного к C), то найдется связная ординальная диаграмма β, такая, что $\alpha_1 >_i \beta >_i \beta_2 >_i \ldots$. Тогда по предположению индукции (примененному к β) мы можем построить некоторую $<_i$-убывающую последовательность связных ординальных диаграмм, начинающуюся с β. Добавив к этой последовательности в качестве первого члена α_1, мы получим $<_i$-убывающую последовательность связных ординальных диаграмм, начинающуюся с α_1.

3) Допустим, что $m = 1$ и α_1 — следующий за β элемент в C (в предположении, что такой случай возможен). Тогда $\sigma = \beta \# \# \beta \# \ldots \# \beta >_i \beta_2 >_i \ldots$ и $\beta <_i \alpha$. Следовательно, по предположению индукции мы можем построить некоторую бесконечную $<_i$-убывающую последовательность элементов C, начинающуюся с β. Добавив к этой последовательности в качестве первого члена α_1, мы получим искомую последовательность.

4) Допустим, что $m > 1$ и найдется n, такое, что β_n не содержит α_1 в качестве своей компоненты. Пусть $[\beta_n]_i = [\beta_1^n, \ldots, \beta_l^n]_i$. Тогда $\beta_1^n <_i \alpha_1$. По предположению индукции существует $<_i$-убывающая последовательность связных ординальных диаграмм, начинающаяся с β_1^n. К этой последовательности мы добавляем α_1 в качестве первого члена и получаем искомую последовательность.

5) Допустим, что $m > 1$ и для каждого n β_n содержит α_1 в качестве своей компоненты (а следовательно, в качестве максимальной компоненты). Утверждение (*) для этого случая мы

докажем индукцией по числу вхождений диаграммы α_1 в α. Пусть $\nu(\alpha)$ — это число вхождений. Для каждого n пусть β_n' обозначает ординальную диаграмму, полученную из β_n удалением всех вхождений диаграммы α_1. Диаграмму α' определим аналогично: $\alpha'=\alpha_2 \# \ldots \# \alpha_m$. Если $\nu(\alpha)=1$, то α' не имеет вхождений диаграммы α_1, и потому по предположению индукции существует $<_i$-убывающая последовательность элементов из C, начинающаяся с α_2. Добавив α_1 к этой последовательности, мы получим искомую последовательность. Если же $\nu(\alpha)>1$, то $0<\nu(\alpha')<\nu(\alpha)$. Если существует n, такое, что $\nu(\beta_n')=0$, то к $\{\beta_n'\}$ применяем 4). Полученная последовательность начинается с α_1. Если же такого n не существует, то по предположению индукции мы можем применить 5) и построить искомую последовательность, начинающуюся с $\alpha_2 (=\alpha_1)$. Лемма доказана.

Следствие 26.20. *Пусть $[\alpha]_i=[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]_i$. Тогда диаграмма α является $<_i$-достижимой в том и только в том случае, когда каждая из диаграмм $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ является $<_i$-достижимой в C.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Допустим, что диаграмма α не является $<_i$-достижимой. Тогда, согласно (*) в доказательстве леммы 26.19, α_1 не является $<_i$-достижимой в C.

Лемма 26.19 означает следующее: чтобы показать, что отношение $<_i$ вполне упорядочивает $O(I, A)$, достаточно показать, что не существует бесконечной убывающей (относительно $<_i$) последовательности связных ординальных диаграмм.

Лемма 26.21. *Ординальная диаграмма α принадлежит F_i тогда и только тогда, когда каждая ее компонента принадлежит F_i.*

Доказательство проводится трансфинитной индукцией по i. Если $i=0$, то лемма очевидна. Допустим, что $\alpha\in F_{i+1}$, но некоторая компонента α, скажем β, не принадлежит F_{i+1}. Если $\beta\notin F_i$, то по предположению индукции $\alpha\in F_i$. Но это невозможно, так как из $\alpha\in F_{i+1}$ вытекает $\alpha\in F_1$. Следовательно, $\beta\in F_i$ и найдется некоторый i-фрагмент $\bar\sigma$ диаграммы β, такой, что диаграмма σ не является $<_i$-достижимой в F_i. Но такой i-фрагмент диаграммы β является также и i-фрагментом диаграммы α. Поскольку отсюда вытекает, что $\alpha\notin F_{i+1}$, получаем противоречие.

Допустим, что все компоненты диаграммы α принадлежат F_{i+1}. Пусть $\bar\sigma$ — некоторый i-фрагмент этой диаграммы. Тогда $\bar\sigma$ является i-фрагментом одной из компонент диаграммы α и диаграмма σ $<_i$-достижима в F_i. Следовательно, $\alpha\in F_{i+1}$.

Для предельных элементов I утверждение леммы очевидным образом следует из предположения индукции.

Лемма 26.22. *Если существует бесконечная последовательность $\{\alpha_n\}$ связных диаграмм, которая строго убывает относительно $<_0$, то существует бесконечная последовательность $\{\beta_n\}$ связных ординальных диаграмм, такая, что*

1) $\beta_n\in F_1$ *для всех* n;
2) *если* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\in F_1$, *то* $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \ldots, \alpha_h=\beta_h$;
3) *если* $\alpha_1=\beta_2, \ldots, \alpha_h=\beta_h$ *и* $\alpha_{h+1}\neq\beta_{h+1}$, *то найдется некоторое вхождение диаграммы* β_{h+1} *в* α_{h+1}, *т. е.* β_{h+1} *является ординальной поддиаграммой диаграммы* α_{h+1};
4) *последовательность* $\{\beta_n\}$ *строго убывает относительно* $<_0$ *и* $<_1$.

Доказательство. Допустим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_h\in F_1$ и $\alpha_{h+1}\notin F_1$, где $h\geqslant 0$. Тогда пусть $\beta_1=\alpha_1, \ldots, \beta_h=\alpha_h$. Поскольку $\alpha_{h+1}\notin F_1$, найдется некоторый 0-фрагмент диаграммы α_{h+1}, скажем $\bar\gamma$, для которого диаграмма γ не является $<_0$-достижимой. Тогда по следствию 26.20 диаграмма γ имеет компоненту γ_0, не являющуюся $<_0$-достижимой. Если $\gamma\in F_1$, то пусть β_{h+1} есть γ_0. Если же $\gamma_0\notin F_1$, то существует некоторый 0-фрагмент диаграммы γ_0, скажем $\bar\delta$, для которого диаграмма δ не является $<_0$-достижимой. За конечное число таких шагов мы можем дойти до связной ординальной поддиаграммы β_{h+1} диаграммы α_{h+1}, а тогда $\beta_{h+1}<_0\alpha_{h+1}$, $\beta_{h+1}\in F_1$ и β_{h+1} не является $<_0$-достижимой. Из этого последнего свойства диаграммы β_{h+1} и следствия 26.20 вытекает, что существует бесконечная убывающая последовательность связных ординальных диаграмм, начинающаяся с β_{h+1}, скажем $\beta_{h+1}>_0\beta_{h+2}'>_0\beta_{h+3}'>_0\ldots$. Тогда последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}', \ldots$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\{\alpha_n\}$, а именно она является бесконечной убывающей последовательностью связных ординальных диаграмм.

Применяя затем эту же процедуру к полученной последовательности многократно, мы получим любой член искомой последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots$.

Очевидно, условия 1) — 3) выполнены. Ясно также, что $\{\beta_n\}$ является строго убывающей последовательностью относительно $<_0$. Покажем теперь, что $\{\beta_n\}$ — убывающая последовательность относительно $<_1$. Допустим, например, что $\beta_1<_1\beta_2$. Поскольку диаграммы β_1 и β_2 являются связными, отсюда следует, что если $\beta_2<_0\beta_1$, то найдется 0-фрагмент $\bar\delta$ диаграммы β_1, такой, что $\beta_2\leqslant_0\delta$. Но так как $\beta_1\in F_1$, то диаграмма δ является $<_0$-достижимой, а β_2 — нет. Поскольку это невозможно, то из $\beta_2 < <_0 \beta_1$ следует $\beta_2 <_1 \beta_1$.

Аналогичным образом мы можем показать, что для каждого l из $\beta_{l+1} <_0 \beta_l$ следует $\beta_{l+1} <_1 \beta_l$.

Лемма 26.23. *Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечная строго $<_i$-убывающая последовательность связных элементов множества F_i, то существует последовательность $\{\beta_n\}$ связных ординальных диаграмм, для которой выполняются следующие условия:*

1) $\beta_n \in F_{i+1}$ *для всякого* n;
2) *если* $\alpha_1, \ldots, \alpha_h \in F_{i+1}$, *то* $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_h = \beta_h$;
3) *если* $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_h = \beta_h$ *и* $\alpha_{h+1} \neq \beta_{h+1}$, *то* β_{h+1} *является (связной) ординальной поддиаграммой диаграммы* α_{h+1};
4) *последовательность* $\{\beta_n\}$ *строго убывает относительно* $<_i$ *и* $<_{i+1}$.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 26.22.

Лемма 26.24. *Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечная последовательность связных ординальных диаграмм, строго убывающая относительно $<_0$. Тогда для каждого i мы можем построить последовательность $\{\alpha_n^i\}_n$ связных ординальных диаграмм из F_i, такую, что*

1) $\alpha_n^0 = \alpha_n$ *для всех* n;
2) *последовательность* $\{\alpha_n^i\}_n$ *строго убывает относительно* $<_i$;
3) *если* $\alpha_1^i = \alpha_1^{i+1}, \ldots, \alpha_h^i = \alpha_h^{i+1}$ *и* $\alpha_{h+1}^i \neq \alpha_{h+1}^{i+1}$, *то* α_{h+1}^{i+1} *является связной ординальной поддиаграммой диаграммы* α_{h+1}^i *и, следовательно,* $l(\alpha_{h+1}^{i+1}) < l(\alpha_{h+1}^i)$;
4) *если* i — *предельный элемент в* I, *то*

$$\forall p \exists j \in I [j < i \wedge \forall l [j \leqslant l < i \supset [\alpha_p^i = \alpha_p^l]]].$$

Доказательство. Если $\alpha_n^0 = \alpha_n$ для всех n, то условия 1) и 2), очевидно, выполнены. Допустим, что мы уже построили последовательность $\{\alpha_n^i\}_n$. Тогда по лемме 26.23 существует последовательность $\{\alpha_n^{i+1}\}_n$ связных элементов множества F_{i+1}, строго убывающая относительно $<_i$ и $<_{i+1}$; если $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_h^i \in F_{i+1}$, то $\alpha_1^{i+1} = \alpha_1^i, \ldots, \alpha_h^{i+1} = \alpha_h^i$; если $h+1$ есть первый номер, такой, что $\alpha_{h+1}^{i+1} \neq \alpha_{h+1}^i$, то α_{h+1}^{i+1} является (связной) ординальной поддиаграммой диаграммы α_{n+1}^i.

Следовательно, нам нужно беспокоиться только в случае, когда i — некоторый предельный элемент в I. Допустим, что для всякого $k < i$ последовательность $\{\alpha_n^k\}_n$ уже определена так, что выполняются нужные условия. Мы утверждаем, что тогда

$$(*) \qquad \forall h \exists j \in I [j < i \wedge \forall k [j \leqslant k < i \supset \alpha_h^k = \alpha_h^j]].$$

Допустим, что это не так. Тогда

$$\exists h \forall j \in I [j < i \supset \exists k [j \leqslant k < i \wedge \alpha_h^k \neq \alpha_h^j]].$$

Следовательно, существует наименьшее h с таким свойством. Поэтому мы можем найти некоторую бесконечную последовательность индексов j, скажем $j_1, j_2, \ldots, j_p, \ldots$, такую, что

$$\alpha_h^{j_p} = \alpha_h^{j_p+1} = \alpha_h^{j_p+2} = \ldots = \alpha_h^{j_{p+1}} \neq \alpha_h^{j_{p+1}+1}.$$

Это возможно, потому что если мы положим $j = j_p$, то наименьшее k, такое, что $j < k < i$ и $\alpha_h^k \neq \alpha_h^j$, не является предельным элементом (в силу утверждения 4) этой леммы, примененного к предельным элементам, которые меньше i). Пусть $j_{p+1} + 1$ и есть это наименьшее k. Тогда в силу 3)

$$l\left(\alpha_h^{j_{p+1}+1}\right) < l\left(\alpha_h^{j_{p+1}}\right) = l\left(\alpha_h^{j_p+1}\right).$$

Таким образом, мы получим бесконечную убывающую последовательность натуральных чисел. Но это невозможно; следовательно, утверждение (*) должно быть верным.

Если мы определим последовательность $\{\alpha_h^i\}_h$, положив $\alpha_h^i = \alpha_h^j$ для подходящего j_h, то будет верно 4). Кроме того, для каждого $k < i$ $\alpha_h^j \in F_k$ и $\alpha_h^i = \alpha_h^j \in \bigcap_{k<i} F_k = F_i$, т. е. $\alpha_h^i \in F_i$.

Теперь докажем, что последовательность $\{\alpha_h^i\}_h$ является $<_i$-убывающей. Для каждого $h = 1, 2, 3, \ldots$ из построения $\{\alpha_h^i\}_h$ вытекает, что найдутся индексы j_h и j_{h+1}, для которых $\alpha_h^i = \alpha_h^k$ для всякого k, такого, что $j_h \leqslant k < i$, и $\alpha_{h+1}^i = \alpha_{h+1}^k$ для всякого k, такого, что $j_{h+1} \leqslant k < i$. Положим $j_0 = \max(j_h, j_{h+1})$. Тогда $\alpha_h^i = \alpha_h^k$ и $\alpha_{h+1}^i = \alpha_{h+1}^k$ для каждого k, такого, что $j_0 \leqslant k \leqslant i$. Следовательно, по предположению индукции $\alpha_{h+1}^i <_k \alpha_h^i$ для всех таких k. Допустим, что $\alpha_h^i <_i \alpha_{h+1}^i$. Тогда для всякого k, такого, что $j_0 \leqslant k < i$, должно найтись k', такое, что $k \leqslant k' < i$ и существует некоторый k'-фрагмент диаграммы α_h^i, скажем $\bar{\gamma}$, для которого $\alpha_{h+1}^i \leqslant_{k'} \gamma$. Но, поскольку число индексов диаграммы α_0^i конечно, существует максимальный индекс в α_h^i, скажем k_0. Тогда, если $k_0 < k < i$ (такое k существует), мы не можем получить $\alpha_{h+1}^i <_k \alpha_h^i$. Пришли к противоречию; поэтому $\alpha_{h+1}^i <_i \alpha_h^i$.

Определение 26.25. Пусть $F_\infty = \bigcap_{j \in I} F_j$, если порядковый тип множества I представляет собой предельный ординал, и

$$F_\infty = \{\alpha \in F_i \mid \text{для каждого } i\text{-фрагмента } \bar{\delta} \text{ диаграммы } \alpha \text{ диаграмма } \delta \text{ является } <_i\text{-достижимой в } F_i\},$$

если i — наибольший элемент множества I.

Ясно, что если $\alpha \in F_\infty$, то $\alpha \in F_i$ для всякого i.

Лемма 26.26. *Допустим, что существует бесконечная последовательность связных ординальных диаграмм, строго убывающая относительно $<_0$. Тогда существует последовательность связных ординальных диаграмм из F_∞, строго убывающая относительно $<_\infty$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 26.24 с ∞ вместо i. Если I имеет максимальный элемент, то проходит первая половина этого доказательства, а если I не имеет последнего элемента, то вторая.

Лемма 26.27. *Если существует последовательность связных ординальных диаграмм из F_j, строго убывающая относительно $<_j$, то найдется последовательность связных ординальных диаграмм из F_∞, которая строго убывает относительно $<_\infty$.*

Доказательство проводится аналогично лемме 26.24, но с F_j вместо F_0.

Лемма 26.28. *Каждый элемент множества F_∞ является $<_\infty$-достижимым в F_∞.*

Доказательство. Допустим, что это не так, т. е. существует последовательность $\{\alpha_n\}$ элементов F_∞, которая строго убывает относительно $<_\infty$. Можно считать, что диаграммы α_n являются связными (в силу леммы 26.19). Вспомним, что в определении отношения $<_\infty$ ординальные диаграммы сначала сравниваются по их внешним значениям (i, a). Поскольку эти значения вполне упорядочены (см. пп. (5) и (6) определения 26.6), всякая убывающая последовательность значений конечна. Таким образом, начиная с некоторого n, внешние значения диаграмм α_n стабилизируются и становятся равными, скажем, (i, a). Тогда диаграммы α_n для всех бо́льших n сравниваются по их i-фрагментам. Если i — максимальный элемент в I, то $\alpha_n \in F_\infty$ означает, что если $\bar{\delta}$ является i-фрагментом диаграммы α_n, то диаграмма δ является $<_i$-достижимой в F_i. Если i не есть максимальный элемент в I, то $\alpha_n \in F_{i+1}$, и, следовательно, если $\bar{\delta}$ есть i-фрагмент диаграммы α_n, то диаграмма δ i-достижима в F_i. Следовательно, сравнение диаграмм α_n относительно $<_\infty$ сводится к сравнению их i-фрагментов, которые $<_i$-достижимы в F_i. Но поскольку не существует бесконечной убывающей последовательности таких i-фрагментов (см. лемму 26.18), последовательность $\{\alpha_n\}$ не может быть строго убывающей относительно $<_\infty$.

Теперь мы докажем, что для каждого i имеет место $F_i = F_0 = O(I, A)$ и что всякая ординальная диаграмма $<_i$-достижима в F_i, а следовательно, просто i-достижима.

Лемма 26.29. *$F_i = O(I, A)$ и каждая ординальная диаграмма $<_i$-достижима для всех i из I.*

Доказательство. По определению имеем $F_0 = O(I, A)$. Допустим, что существует бесконечная последовательность связных ординальных диаграмм, строго убывающая относительно $<_0$. Тогда по лемме 26.26 существует бесконечная последовательность связных элементов из F_∞, убывающая относительно $<_\infty$. Но это противоречит лемме 26.28. Значит, такой последовательности не существует. Поэтому, согласно лемме 26.19, все ординальные диаграммы $<_0$-достижимы.

Допустим, что $F_i = O(I, A)$ и что $<_i$-достижимость всех ординальных диаграмм уже доказана. Тогда для всякого элемента F_i каждый из его i-фрагментов $<_i$-достижим, и потому $F_{i+1} = F_i = O(I, A)$. Используя леммы 26.27, 26.28 и 26.19, аналогичным образом мы можем показать, что каждая ординальная диаграмма $<_{i+1}$-достижима в F_{i+1} и, следовательно, $<_{i+1}$-достижима. Для предельных j имеем $F_j = \bigcap_{i<j} F_i = O(I, A)$ в силу предположения индукции. Тот факт, что каждая ординальная диаграмма является $<_j$-достижимой, можно доказать так же, как и для $i+1$. Это доказательство верно также и в случае, когда $i+1$ или j равняется ∞.

Обращая предыдущие рассуждения, мы получим принадлежащее Кино до некоторой степени конструктивное доказательство, которое мы вкратце изложим ниже. Но сначала приведем несколько предварительных лемм.

Лемма 26.30. *Если диаграммы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются $<_i$-достижимыми в F_i, то диаграмма $\alpha_1 \# \alpha_2 \# \ldots \# \alpha_n$ также $<_i$-достижима в F_i.*

Доказательство. Релятивизуем доказательство леммы 26.19 к множеству F_i.

Лемма 26.31. *Пусть β — некоторый элемент множества F_i, и пусть $\bar{\gamma}$ — некоторый его i-полуфрагмент. Тогда $\gamma \in F_i$.*

Доказательство. (Применяем транфинитную индукцию по i.) Для $i = 0$ утверждение очевидно. Если i — предельный элемент, то утверждение следует из предположения индукции, так как при $j < i$ всякий i-полуфрагмент является j-полуфрагментом. Если $i = j + 1$, то в силу условия $\beta \in F_i$ имеем $\beta \in F_j$, и для всякого j-фрагмента диаграммы β, скажем $\bar{\delta}$, диаграмма δ является $<_j$-достижимой в F_j, откуда вытекает, что $\delta \in F_j$. Если $\bar{\gamma}$ — некоторый i-полуфрагмент диаграммы β, то он является и ее j-полуфрагментом, и потому $\gamma \in F_j$. Пусть $\bar{\delta}$ — некоторый j-фрагмент диаграммы γ. Тогда $\bar{\delta}$ является и j-фрагментом диаграммы β, а значит, диаграмма δ $<_j$-достижима в F_j. Следовательно, согласно определению, имеем $\gamma \in F_i$.

Теперь мы приступим к доказательству достижимости.

Лемма 26.32. *Если некоторая диаграмма α из F_{i+1} является $<_{i+1}$-достижимой в F_{i+1}, то она будет $<_i$-достижимой в F_i.*

Доказательство. Применяем трансфинитную индукцию по $<_{i+1}$ для тех ординальных диаграмм, которые $<_{i+1}$-достижимы в F_{i+1}. (См. лемму 26.18.)

Рассмотрим произвольную диаграмму β в F_i, для которой $\beta <_i \alpha$. Мы докажем, что эта диаграмма $<_i$-достижима в F_i, и, следовательно, диаграмма α является i-достижимой в F_i. Отметим, что, согласно определению, $\alpha \in F_i$.

Пусть $\Gamma (= \Gamma_\beta)$ обозначает множество ординальных поддиаграмм диаграммы β, определяемое индуктивно следующим образом:

1) Каждая компонента диаграммы β принадлежит Γ.
2) Если $\gamma \in \Gamma$, то каждая компонента каждого i-фрагмента диаграммы γ принадлежит Γ.
3) Множеству Γ принадлежат только те диаграммы, которые удовлетворяют условиям 1) и 2).

Из этого определения и из леммы 26.31, очевидно, следует что

(*) $$\Gamma \subseteq F_i.$$

Теперь мы хотим индукцией по $l(\gamma)$ доказать, что

(**) каждая диаграмма γ из Γ является $<_i$-достижимой в F_i и принадлежит Γ_{i+1}.

Допустим, что мы доказали (**). Тогда, в частности, каждая компонента диаграммы β окажется $<_i$-достижимой в F_i. Поэтому, согласно лемме 26.30, $<_i$-достижимой в F_i окажется диаграмм β. Тем самым лемма 26.32 будет доказана.

Теперь мы вернемся к доказательству утверждения (**). Если диаграмма $\gamma \in \Gamma$ минимальна в том смысле, что не имеет i-фрагментов, то из $\gamma \in F_i$ вытекает $\gamma \in F_{i+1}$. В силу (*) $\gamma \in F_i$.

Случай 1. $\gamma <_{i+1} \alpha$. Тогда диаграмма γ является $<_{i+1}$-достижимой в F_{i+1}. Следовательно, в силу предположения индукции она $<_i$-достижима в F_i.

Случай 2. $\alpha <_{i+1} \gamma$ и $\gamma \leqslant_i \beta <_i \alpha$. Тогда найдется i-фрагмент $\bar{\sigma}$ диаграммы α, такой, что $\gamma \leqslant_i \sigma$. Но, так как $\alpha \in F_{i+1}$, то диаграмма σ является $<_i$-достижимой в F_i, и потому $<_i$-достижимой будет и γ.

Если диаграмма $\gamma \in \Gamma$ не минимальна, то пусть δ — произвольная компонента некоторого ее i-фрагмента. Тогда по предположению индукции $\delta \in \Gamma$; поэтому диаграмма δ $<_i$-достижима в F_i. Следовательно, в силу леммы 26.30, если $\bar{\tau}$ — некоторый i-фрагмент диаграммы γ, то диаграмма τ является $<_i$-достижимой в F_i. Но это означает, что $\gamma \in F_{i+1}$. Рассматривая снова указанные выше случаи 1 и 2, мы можем заключить, что диаграмма γ является $<_i$-достижимой в F_i.

Лемма 26.33. *Пусть i — некоторый предельный элемент. Тогда*

$$\forall j < i \forall \beta [(\text{диаграмма } \beta \text{ является } <_j\text{-достижимой в } F_j) \supset$$
$$\supset \forall k < j\ (\text{диаграмма } \beta \text{ является } <_k\text{-достижимой в } F_k)] \supset$$
$$\supset \forall k < i \forall \alpha [(\text{диаграмма } \alpha \text{ является } <_i\text{-достижимой в } F_i) \supset$$
$$\supset (\text{диаграмма } \alpha \text{ является } <_k\text{-достижимой в } F_k)].$$

Доказательство. Применяем трансфинитную индукцию по элементам множества F_i, которые $<_i$-достижимы в F_i. (См. лемму 26.18.)

Пусть i_0 — наибольший индекс диаграммы α, который меньше i (см. п. (4) определения 26.5) в предположении, что такой индекс существует. Тогда достаточно показать, что если верна посылка доказываемой леммы, то

(*) для каждого k, такого, что $i_0 < k < i$, всякая $<_i$-достижимая в F_i диаграмма α является $<_k$-достижимой в F_k.

Если такого i_0 не существует, то утверждение (*) мы доказываем для всех $k < i$. В самом деле, если утверждение (*) справедливо и $k \leqslant i_0$, то существует j, такое, что $k \leqslant i_0 < j < i$ (поскольку i — предельный элемент) и диаграмма α является $<_j$-достижимой в F_j. Поэтому, согласно посылке нашей леммы, диаграмма α $<_k$-достижима в F_k. Утверждение (*) мы можем доказать трансфинитной индукцией по таким α относительно порядка $<_i$.

Мы можем считать, что такое i_0 существует. Заметим, что для всяких k и j, для которых $i_0 < k < i$ и $k \leqslant j \leqslant i$, если $\beta <_k \alpha$, то $\beta <_j \alpha$, потому что не существует h-фрагмента диаграммы α при $k \leqslant k < i$. Чтобы доказать утверждение (*) для любого α, возьмем произвольный элемент β из F_k, такой, что

$\beta <_k \alpha$. Достаточно показать, что всякая такая диаграмма β является $<_k$-достижимой в F_k. Мы докажем, что

(**) если $\bar{\gamma}$ является k-полуфрагментом диаграммы β, то диаграмма γ принадлежит F_i и $<_j$-достижима в F_j для всех j, таких, что $k \leqslant j < i$.

Как частный случай утверждения (**) получаем, что диаграмма β является $<_k$-достижимой в F_k. Мы знаем также, что для всякого $\bar{\gamma}$, для которого выполняется (**), $\gamma \in F_k$, потому что $\beta \in F_k$ (см. лемму 26.31).

Пусть $\bar{\gamma}$ — некоторый минимальный k-полуфрагмент диаграммы β, т. е. γ не содержит k-полуфрагментов; тогда $\gamma \in F_i$, потому что $\gamma \in F_k$ и γ не имеет j-полуфрагментов ни при каком j между k и i.

Случай 1. $\gamma <_i \alpha$. Тогда диаграмма γ является $<_i$-достижимой в F_i, поскольку $<_i$-достижимой является α, и по предположению индукции γ будет $<_j$-достижимой для всех j, таких, что $k \leqslant j < i$.

Случай 2. $\alpha <_i \gamma$. Тогда $\alpha <_j \gamma$ для каждого j, такого, что $i_0 < j < i$. В частности, $\alpha <_k \gamma$. Но поскольку $\bar{\gamma}$ является k-полуфрагментом диаграммы β, то $\gamma \leqslant_k \beta <_k \alpha$. Так как налицо противоречие, этот случай невозможен.

Пусть теперь $\bar{\gamma}$ — некоторой k-полуфрагмент диаграммы β, не являющийся минимальным. Тогда $\gamma \in F_k$. Пусть $k \leqslant j \leqslant i$, и пусть $\bar{\delta}$ — некоторый j-фрагмент диаграммы γ. Тогда $\bar{\delta}$ является k-полуфрагментом β, и поэтому по предположению индукции диаграмма δ (принадлежит F_i и) является $<_j$-достижимой в F_j. Это верно для каждого такого j. Поэтому из $\gamma \in F_k$ вытекает $\gamma \in F_i$. Снова рассматривая указанные выше случаи 1 и 2, мы можем доказать, что диаграмма γ является $<_j$-достижимой в F_j для всех j, таких, что $k \leqslant j < i$. Лемма доказана.

Лемма 26.34. *Для каждого i из I и всякой диаграммы α из $<_i$-достижимости диаграммы α в F_i следует, что $\forall j < i$ [α является $<_j$-достижимой в F_j].*

Доказательство. Применяем трансфинитную индукцию по i. Допустим, что диаграмма α является $<_i$-достижимой в F_i. Если $i = k + 1$, то по лемме 26.32 она $<_k$-достижима в F_k. Поэтому, согласно предположению индукции, она $<_j$-достижима в F_j для всех $j < k$.

Допустим, что i — предельный элемент. Для каждого $k < i$ в силу индуктивного предположения лемма справедлива. Это значит, что выполняется посылка леммы 26.33. Следовательно, выполняется и заключение этой леммы. Но это и есть утверждение, которое нам нужно доказать.

Лемма 26.35 (см. лемму 26.28). *Каждый элемент множества F_∞ является $<_\infty$-достижимым в F_∞.*

Лемма 26.36. *Каждый элемент множества F_∞ является $<_i$-достижимым для всякого i из I.*

Доказательство. Каждая ординальная диаграмма из F_∞ является $<_\infty$-достижимой согласно лемме 26.35. Поэтому в силу леммы 26.34 она $<_i$-достижима в F_i для каждого i из I.

Лемма 26.37. *Каждая ординальная диаграмма из F_j является $<_j$-достижимой в F_j для всякого j, и поэтому, в частности, множество F_j вполне упорядочено отношением $<_j$.*

Доказательство. Пусть α — произвольный элемент из F_j.

Случай 1. Множество I не имеет максимального элемента. Пусть i — некоторый элемент из I, который больше всех элементов этого множества, входящих в α. Тогда $(i, 0, 0) \in F_\infty$ и $\alpha <_j (i, 0, 0)$. По лемме 26.36 диаграмма $(i, 0, 0)$ является $<_j$-достижимой в F_j, и потому $<_j$-достижимой является и α.

Случай 2. Множество I имеет максимальный элемент, а множество A — нет. Пусть i — наибольший элемент из I, входящий в α, и пусть a — некоторый элемент A, который больше любого элемента A, входящего в α. Тогда $(i, a, 0) \in F_\infty$ и $\alpha <_j (i, a, 0)$. По лемме 25.36 диаграмма $(i, a, 0)$ является $<_j$-достижимой, и, следовательно, $<_j$-достижимой является и α.

Случай 3. Оба множества I и A имеют максимальные элементы. Пусть i и a — наибольшие элементы соответственно в I и в A. Тогда найдется диаграмма β вида

$$(i, a, (i, a, \ldots, (i, a, 0) \ldots)),$$

такая, что $\alpha <_j \beta$. Если мы сможем показать, что $\beta \in F_\infty$, то из леммы 26.36 будет следовать, что диаграмма β является $<_j$-достижимой в F_j. В свою очередь отсюда следует, что диаграмма α является $<_j$-достижимой в F_j, а это и требуется доказать.

Если $\beta = (i, a, 0)$, то очевидно, что $\beta \in F_\infty$. Допустим, что

$$\beta_0 = (i, a, \ldots (i, a, 0) \ldots) \in F_\infty.$$

Тогда, согласно лемме 26.36, диаграмма β_0 является $<_i$-достижимой в F_i. Следовательно, по определению $\beta = (i, a, \beta_0) \in F_\infty$.

Частным случаем леммы 26.37 является следующая

Теорема 26.38. *Каждая ординальная диаграмма $<_0$-достижима.*

Замечание. В качестве другого доказательства леммы 26.37 в случае 3 можно указать следующее. Пусть a_0 — некоторый новый символ. Определим $\tilde{A}$ как множество $A \cup \{a_0\}$, причем $\tilde{A}$ упорядочено так же, как и A, а a_0 больше всех элементов A. Определим систему $O(I, \tilde{A})$ и порядок $\tilde{<}_i$ на ней для каждого i

из $\tilde{I}$. Тогда $O(I, A)$ является подсистемой системы $O(\tilde{I}, \tilde{A})$ и порядок $\tilde{<}_i$ является продолжением порядка $<_i$.

Пусть i — наибольший элемент I, входящий в α. Тогда $\alpha_0 \tilde{<}_0 (i, a_0, 0)$ и диаграмма $(i, a_0, 0)$ является $\tilde{<}_0$-достижимой в $O(\tilde{I}, \tilde{A})$. Следовательно, диаграмма α является $\tilde{<}$-достижимой в $O(\tilde{I}, \tilde{A})$. Но отсюда вытекает, что α является и $<_0$-достижимой (в $F_0 = O(I, A)$).

Если применять такой метод, то леммы 26.36 и 26.37 нам будут нужны лишь в следующей ослабленной формулировке.

Лемма 26.39 (ср. с леммой 26.36). *Каждый элемент F_∞ является $<_0$-достижимым.*

Лемма 26.40 (ср. с леммой 26.37). *Каждая ординальная диаграмма $<_0$-достижима.*

Доказательство достижимости сильно зависит от множеств F_i, которые являются в высшей степени абстрактными понятиями. Если надо как-то обосновать это доказательство, то определение множества F_i следует интерпретировать таким образом: $\alpha \in F_{i+1}$, если и только если можно конкретно убедиться, что $\alpha \in F_i$ и для каждого i-фрагмента $\bar{\delta}$ диаграммы α диаграмма δ является $<_i$-достижимой в F_i. (Можно конкретно убедиться, что диаграмма δ является $<_i$-достижимой в F_i.)

Одна из трудностей в нашей системе ординальных диаграмм состоит в том, что отношения порядка $<_i$ определяются индукцией по $\omega \cdot l(\alpha, \beta) + \iota(i, \alpha, \beta)$, и поэтому структура этих отношений не представляется ясно. Следовательно, задача, как сделать доказательство достижимости более наглядным, имеет очень важное значение, если мы собираемся утверждать, что система ординальных диаграмм представляет хорошую основу для изучения оснований математики.

Нам хотелось бы подчеркнуть, что ни первое, ни второе из приведенных выше доказательств достижимости не является по-настоящему конструктивным. Более конструктивное доказательство мы приведем в статьях „Фундаментальные последовательности ординальных диаграмм“ и „Доказательство достижимости ординальных диаграмм“, которые скоро будут опубликованы.

Чтобы объяснить эти затруднения, нам хотелось бы пересмотреть некоторые идеи в доказательстве достижимости ординалов до ε_0, которое было изложено в гл. 2. В этой главе использовались некоторые полезные приемы. Например, каждому ординалу $\alpha < \varepsilon_0$ мы могли поставить в соответствие некоторое натуральное число n так, что $\omega_n \leqslant \alpha < \omega_{n+1}$. Это число n (так сказать, *высота* ординала α) грубо указывает „размер“ этого ординала. Для двух ординалов $\alpha, \beta < \varepsilon_0$ отношение $\alpha < \beta$ мы

определяем так: сначала сравниваем высоту ординала α с высотой ординала β, а затем, если α и β имеют одинаковые высоты и $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$ и $\beta = \omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_m}$, где $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ и $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_m$, то сравниваем α_1 с β_1, α_2 с β_2 и т. д.

Теория аппроксимаций, соответствующая этому подходу для ординальных диаграмм, довольно запутанна, но мы изложим ее в оставшейся части этого параграфа, хотя это не обязательно делать именно в конце.

Имеется и другая трудность. Последовательность ординалов $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ называется фундаментальной для α, если α является пределом этой последовательности. В гл. 2 мы имели простой единообразный метод построения фундаментальных последовательностей для данного $\alpha < \varepsilon_0$. Однако для ординальных диаграмм построение фундаментальных последовательностей и доказательство их основных свойств весьма сложны. Тем не менее все эти идеи необходимы для доказательства достижимости в стиле гл. 2.

Главная проблема конструктивной математики заключается в сложности выражений и описаний в рассуждениях. Это вызвано тем, что в конструктивной математике нам надо постоянно учитывать тонкие различия.

Сущность теории аппроксимаций состоит в следующем. По данному элементу j из I и данной связной ординальной диаграмме α мы определим (n, k)-ю j-аппроксимацию диаграммы α для $n, k = 0, 1, 2, \ldots$ и убедимся, что эти аппроксимации дают хороший критерий, позволяющий сравнивать ординальные диаграммы относительно j.

Теперь для каждого $j \in I$ и каждой связной ненулевой ординальной диаграммы α определим j-оценки и j-аппроксимации этой диаграммы.

Определение 26.41. (1) Если (i, a) — внешнее значение некоторой связной ординальной диаграммы, то i называется ее *внешним индексом.*

(2) Пусть $\bar{\gamma}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α, где внешний индекс диаграммы γ меньше j. Тогда мы скажем, что $\bar{\gamma}$ является *j-ядром* диаграммы α. Вхождение $\bar{0}$ мы также назовем j-ядром.

Определение 26.42. Пусть $v_0(j, \alpha)$ обозначает максимум внешних значений ординальных диаграмм, соответствующих j-фрагментам диаграммы α. Тогда $v_0(j, \alpha)$ называется *нулевой j-оценкой* диаграммы α.

Заметим, что каждая связная ординальная диаграмма $\alpha \neq 0$ имеет нулевую j-оценку.

Предложение 26.43. *Пусть* β *и* α — *некоторые ненулевые связные ординальные диаграммы. Если* $v_0(j, \beta) < v_0(j, \alpha)$, *то* $\beta <_j \alpha$.

Доказательство. Пусть $v_0(j, \alpha) = (i, a)$. Для любого j-полуфрагмента $\bar{\delta}$ диаграммы α имеет место $\delta \leqslant_j \alpha$ (см. предложение 26.10). Следовательно, достаточно показать, что $\beta <_j (i, a, \gamma)$ для любого j-полуфрагмента диаграммы α, имеющего вид $\overline{(i, a, \gamma)}$ (т. е. если внешнее значение соответствующей ординальной диаграммы равно (i, a)). На самом деле мы покажем, что

(*) $\eta <_m (i, a, \gamma)$ для всех $m \geqslant j$ и каждого j-полуфрагмента $\bar{\eta}$ диаграммы β.

Тогда, в частности, мы будем иметь $\beta <_j (i, a, \gamma)$.

Доказательство утверждения (*) проводится индукцией по $l(\eta)$. Заметим, что $v_0(j, \eta) \leqslant v_0(j, \beta) < (i, a)$.

(1) $\bar{\eta}$ является j-ядром диаграммы β. Тогда η либо есть 0, либо имеет вид (k, b, η'), где $k < j$. Очевидно, что $\eta <_m (i, a, \gamma)$ для каждого $m \geqslant j$.

(2) η имеет вид (k, b, η'), где $k \geqslant j$. Так как $(k, b) < (i, a)$, $\eta <_m (j, a, \gamma)$ при $m > k$. Пусть $j \leqslant m \leqslant k$, и пусть $\bar{\delta}$ — некоторый m-фрагмент вхождения $\bar{\eta}$. Пусть $\bar{\delta}_0$ — любая компонента вхождения $\bar{\delta}$. Тогда $\bar{\delta}_0$ является полуфрагментом диаграммы β; следовательно, по предположению индукции $\delta_0 <_m (i, a, \gamma)$. Отсюда вытекает, что $\delta <_m (i, a, \gamma)$, и поэтому индукцией по $\iota(m, \eta)$ получаем $\eta <_m (i, a, \gamma)$ для всех m, для которых $j \leqslant m \leqslant k$.

Определение 26.44. (1) Пусть α — некоторая связная ординальная диаграмма, и пусть $(i, a) = v_0(j, \alpha)$. Рассмотрим любой j-полуфрагмент диаграммы α, внешнее значение которого равно (i, a), скажем $\overline{(i, a, \gamma)}$. Пусть $\overline{\text{apr}(0, j, \alpha)}$ обозначает наибольшую (относительно порядка $<_i$) такую диаграмму (i, a, γ). Всякое j-активное вхождение диаграммы $\text{apr}(0, j, \alpha)$, скажем $\overline{\text{apr}(0, j, \alpha)}$, будем называть *нулевой* j-*аппроксимацией* диаграммы α.

Мы будем через α_0 сокращенно обозначать $\text{apr}(0, j, \alpha)$. Разумеется, может быть много вхождений диаграммы α_0, не являющихся нулевыми j-аппроксимациями диаграммы α. Однако мы не интересуемся такими вхождениями. Поэтому для удобства будем впредь использовать символы $\bar{\alpha}_0$ и $\overline{\text{apr}(0, j, \alpha)}$ только для обозначения вхождений, являющихся нулевыми j-аппроксимациями диаграммы α.

(2) Если некоторый j-полуфрагмент диаграммы α, скажем $\bar{\eta}$, не содержит $\bar{\alpha}_0$, т. е. j-активных вхождений диаграммы $\text{apr}(0, j, \alpha)$, и не содержится ни в каком $\bar{\alpha}_0$, то мы говорим, что $\bar{\eta}$ *j-пропускает* $\bar{\alpha}_0$. В тех случаях, когда известно, чему равно j, мы будем говорить просто, что $\bar{\eta}$ *пропускает* $\bar{\alpha}_0$.

Лемма 26.45. (1) $\overline{\text{apr}(0, j, \alpha)}$ *является j-полуфрагментом диаграммы* α.

(2) *Пусть* $\bar{\alpha}' = \overline{(i, a, \delta)}$ — *некоторый j-полуфрагмент диаграммы α, внешнее значение которого равно (i, a) и который отличен от $\bar{\alpha}_0$. Тогда $\alpha' <_i \alpha_0$, и поэтому $\delta <_i \gamma$ (где $\alpha_0 = (i, a, \gamma)$). Отсюда вытекает, что $\alpha' <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant i$.*

(3) *Если $\bar{\eta}$ — некоторое j-ядро диаграммы α, не совпадающее с $\bar{\alpha}_0$, то $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant j$.*

(4) *Если некоторый j-полуфрагмент $\bar{\eta}$ диаграммы α j-пропускает $\bar{\alpha}_0$, то $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \leqslant j$.*

(5) *Пусть $(i, a) = v_0(j, \alpha)$ и $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots, \bar{\delta}_m$ суть все j-полуфрагменты диаграммы α. Тогда*

$$\alpha_0 = \text{apr}(0, j, \alpha) = \max_{<_{i+1}} (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m).$$

Доказательство. (3) Пусть $\eta = (k, b, \eta')$ и $k < j$. Если $j \leqslant i$, то очевидно, что $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant j$. Допустим, что $j > i$. Тогда $\alpha = \alpha_0$ и нет других j-ядер, кроме α_0.

(4) (i) $\bar{\eta}$ является j-ядром диаграммы α. Тогда, согласно (3), $\eta <_m \alpha$ для всех $m \leqslant j$.

(ii) Пусть $\eta = (k, b, \eta')$, где $k \geqslant j$. Если $(k, b) = (i, a)$, то в силу (2) $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant i$. При $j \geqslant i$ это ясно. Пусть $j < i$. Пусть $j \leqslant m < i$ и $\bar{\delta}$ — произвольная компонента некоторого m-фрагмента диаграммы η. Тогда $\bar{\delta}$ является j-фрагментом диаграммы α, который j-пропускает $\bar{\alpha}_0$. Следовательно, по предположению индукции $\delta <_m \alpha_0$ для всех $m \leqslant j$. Индукцией по $\iota(m, n)$ мы можем затем доказать, что $\eta <_m \alpha_0$. Если $(k, b) < (i, a)$, то $\eta <_m \alpha$ для всех $m > k$. Пусть $j \leqslant m \leqslant k$, и пусть $\bar{\delta}$ — некоторая компонента какого-либо m-фрагмента диаграммы η. Тогда, согласно предположению индукции, $\delta <_m \alpha_0$. Отсюда в свою очередь следует, что $\eta <_m \alpha_0$.

Предложение 26.46. *Пусть α и β — связные ординальные диаграммы, где $v_0(j, \alpha) = v_0(j, \beta) = (i, a)$ и $\text{apr}(0, j, \beta) <_i \text{apr}(0, j, \alpha)$. Тогда $\beta <_j \alpha$.*

Доказательство. Поскольку $\bar{\alpha}_0$ является j-полуфрагментом диаграммы α, достаточно показать, что $\beta <_j \alpha_0$, так как тогда $\beta <_j \alpha_0 \leqslant_j \alpha$. Мы можем легко показать, что

(1) Если $\bar{\eta}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы β, то $v_0(j, \eta) \leqslant (i, a)$.

Кроме того, если $v_0(j, \eta) = (i, a)$, то $\text{apr}(0, j, \eta) <_i \alpha_0$ и

(2) для любых двух ординальных диаграмм вида (i, a, δ) и (i, a, γ) из $(i, a, \delta) <_i (i, a, \gamma)$ следует $(i, a, \delta) <_m (i, a, \gamma)$ для всех $m \geqslant i$.

Опираясь на (1) и (2), индукцией по $l(\eta)$ мы докажем утверждение

(3) для любого j-полуфрагмента $\bar{\eta}$ диаграммы β имеет место $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant j$.

Как частный случай утверждения (3) мы имеем $\beta <_j \alpha_0$.

1) $\bar{\eta}$ является j-ядром диаграммы β. Тогда η есть 0 или η имеет вид (k, b, η'), где $k < j$. При этом $(k, b) \leqslant (i, a)$. Если $(k, b) < (i, a)$, то $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m > k$ и поэтому для всех $m \geqslant j$. Если $(k, b) = (i, a)$, то $\eta \leqslant_i \beta_0 <_i \alpha_0$, и потому, согласно (2), $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant i$. Поскольку $k = i$ и $k < j$, мы имеем $j > i$. Значит, $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant j$.

2) η имеет вид (k, b, η'), где $k \geqslant j$ и $(k, b) < (i, a)$. Очевидно, если $m > k$, то $\eta <_m \alpha_0$. Пусть $j \leqslant m \leqslant k$, и пусть $\bar{\delta}$ — произвольная компонента некоторого m-фрагмента диаграгмы η. Тогда по предположению индукции $\sigma <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant j$. Следовательно, индукцией по $\iota(m, \eta)$ получаем $\eta <_m \alpha_0$ для всех m, таких, что $j \leqslant m \leqslant k$.

3) η имеет вид (i, a, η'). Поскольку $\eta \leqslant_i \beta_0 <_i \alpha_0$, из (2) следует, что $\eta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant i$. Если $j \geqslant i$, то все доказано. Допустим, что $j < i$. Рассмотрим любое m, такое, что $j \leqslant m < i$, и допустим, что $\bar{\delta}$ является компонентой некоторого m-фрагмента диаграммы η. Тогда по предположению индукции $\delta <_m \alpha_0$ для всех $m \geqslant j$. Отсюда следует, что $\eta <_m \alpha_0$ для всех таких m.

Предложение 26.47. *Пусть $\bar{\eta}$ — некоторый j-фрагмент диаграммы α, содержащий $\bar{\alpha}_0$. Допустим, кроме того, что для всякого вхождения $\bar{\alpha}_0$ в $\bar{\eta}$ найдется некоторое вхождение какого-нибудь элемента из I, меньшего, чем i, и связанного с $\bar{\alpha}_0$. Пусть $\bar{\alpha}_0^1, \bar{\alpha}_0^2, \ldots, \bar{\alpha}_0^m$ суть все такие вхождения диаграммы α_0 в $\bar{\eta}$, и пусть q_k — наименьший такой элемент множества I, связанный с вхождением $\bar{\alpha}_0^k$. Положим $q = q(\eta) = \max(q_1, \ldots, q_m)$. Тогда $\eta <_p \alpha_0$ для каждого p, такого, что $q < p \leqslant i$.*

Доказательство. Сначала заметим, что $q \geqslant j$. Поскольку $\bar{\mu}$ является j-полуфрагментом диаграммы α, легко можно показать, что $v_0(p, \eta) \leqslant v_0(j, \alpha) (= (i, a))$ для каждого $p \geqslant j$ и, в частности, для всех p, таких, что $q < p \leqslant i$. Кроме того, $v_0(p, \alpha_0) = (i, a)$ и $\operatorname{apr}(0, p, \alpha_0) = \alpha_0$. Поэтому, если $v_0(p, \eta) < (i, a)$, то согласно предложению 26.43, $\eta <_p \alpha_0$. Допустим, что $v_0(p, \eta) = (i, a)$. Тогда $\operatorname{apr}(0, p, \eta) <_i \alpha_0 = \operatorname{apr}(0, p, \alpha_0)$, так как $\bar{\alpha}^0$ не является p-активным в $\bar{\eta}$ (см. утверждение (2) леммы 26 45). Поэтому $\eta <_p \alpha_0$.

Определение 26.48. Пусть $\bar{\gamma}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α, для которого в γ имеется некоторое вхождение $\bar{\alpha}_0$, являющееся j-полуфрагментом диаграммы γ и такое, что i — единственный элемент из I, который входит в γ и является связанным с $\bar{\alpha}_0$. (А именно такое вхождение $\bar{\alpha}_0$ является i-активным в $\bar{\gamma}$.) Пусть $\operatorname{apr}(1, j, \alpha)$ обозначает наибольшую (относительно $<_i$) среди таких диаграмм γ. Всякое такое вхождение диаграммы $(1, j, \alpha)$ называется *первой j-аппроксимацией* диаграммы α.

Диаграмму $\operatorname{apr}(1, j, \alpha)$ мы будем сокращенно обозначать через α_1. В дальнейшем через $\bar{\alpha}_1$ и $\operatorname{apr}(1, j, \alpha)$ мы будем обозначать только вхождения, являющиеся первыми j-аппроксимациями диаграммы α.

Отметим, что, согласно определению, возможно равенство $\alpha_0 = \alpha_1$.

Лемма 26.49. *Пусть $v_0(j, \alpha) = (i, a)$, $\alpha_0 = \operatorname{apr}(0, j, \alpha)$ и $\alpha_1 = \operatorname{apr}(1, j, \alpha)$.*

(1) *Если $\bar{\alpha}_1$ строго содержит некоторое $\bar{\alpha}_0$, то $j \leqslant i$ и $\alpha_0 <_k \alpha_1$ для каждого $k \leqslant i$.*

(2) *Если (i, b, δ) — некоторая ординальная поддиаграмма диаграммы α_1, такая, что δ содержит вхождение $\bar{\alpha}_0$, являющееся i-активным, то $b < a$.*

(3) *Если вхождение $\bar{\alpha}_1$ является „максимальным“ в том смысле, что (k, c, γ) является j-полуфрагментом диаграммы α, где $\bar{\alpha}_1$ — некоторая компонента вхождения $\bar{\gamma}$, то $k < i$.*

Определение 26.50. Пусть $\bar{\eta}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α. Если $\bar{\eta}$ не содержит $\bar{\alpha}_1$, не содержится в $\bar{\alpha}_1$ и не содержится строго ни в каком $\bar{\alpha}_0$, то говорят, что $\bar{\eta}$ *j-пропускает* $\bar{\alpha}_1$. В тех случаях, когда известно, чему равно j, мы будем говорить просто, что $\bar{\eta}$ *пропускает* $\bar{\alpha}_1$.

Предложение 26.51. *Если некоторый j-полуфрагмент $\bar{\eta}$ диаграммы α пропускает $\bar{\alpha}_1$, то $\eta <_k \alpha_1$ для всех k, таких, что $j \leqslant k \leqslant i$.*

Доказательство. Применяем индукцию по $l(\eta)$.

1) $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\alpha}_0$. Тогда $\eta <_k \alpha_0$ для всех $k \geqslant j$ в силу утверждения (4) леммы 26.45. Если $j \leqslant k \leqslant i$, то $\alpha_0 <_k \alpha_1$ (см. утверждение (1) леммы 26.49), и поэтому $\eta <_k \alpha_1$.

2) $\eta = \alpha_0 <_k \alpha$, если $j \leqslant k \leqslant i$.

3) $\bar{\eta}$ содержит $\bar{\alpha}_0$ и i — единственный элемент из I, который входит в η и является связанным с $\bar{\alpha}_0$. Тогда $\eta <_i \alpha_1$ согласно

определению α_1. Пусть $j \leqslant k < i$, и пусть $\bar{\delta}$ — произвольная компонента некоторого k-фрагмента в $\bar{\eta}$. Если $\bar{\delta}$ пропускает α_0 или содержит $\bar{\alpha}_0$, то $\bar{\delta}$ пропускает $\bar{\alpha}_1$, откуда по предположению индукции $\delta <_k \alpha_1$; если же $\bar{\delta}$ содержится в $\bar{\alpha}_0$, то $\bar{\delta}$ является k-фрагментом диаграммы α_0, и поэтому $\delta <_k \alpha_0 <_k \alpha_1$. Итак, $\delta <_k \alpha_1$ во всех случаях, откуда индукцией по $\iota(k, \eta)$ получаем $\eta <_k \alpha_1$.

4) $\bar{\eta}$ содержит $\bar{\alpha}_0$, и для каждого вхождения $\bar{\alpha}_0$ найдется элемент множества I, некоторое вхождение которого в η связано с $\bar{\alpha}_0$ и который меньше, чем i. Согласно предложению 26.47, имеем $\eta <_i \alpha_0 <_i \alpha_1$. Если k удовлетворяет условию $j \leqslant k < i$, то отсылаем к случаю 3).

Предложение 26.52. *Пусть α и β — связные ординальные диаграммы и $v_0(j, \alpha) = v_0(j, \beta) = (i, a)$. Пусть $\alpha_0 = \operatorname{apr}(0, j, \alpha) = \operatorname{apr}(0, j, \beta) = \beta_0$, $\alpha_1 = \operatorname{apr}(1, j, \alpha)$ и $\beta_1 = \operatorname{apr}(1, j, \beta)$. Если $\beta_1 <_i \alpha_1$, то $\beta <_j \alpha$.*

Доказательство. Для того чтобы при указанных допущениях было $\beta_1 <_i \alpha_1$, $\bar{\alpha}_1$ должно строго содержать $\bar{\alpha}_0$. Поэтому $j \leqslant i$. Мы покажем, что для всякого j-полуфрагмента диаграммы β, скажем $\bar{\eta}$, который либо содержит $\bar{\beta}_0$, либо пропускает $\bar{\beta}_0$, верно

$$(*) \qquad \eta <_k \alpha_1 \text{ для всех } k, \text{ таких, что } j \leqslant k \leqslant i.$$

В частности, $\beta <_j \alpha_1 \leqslant_j \alpha$. Доказательство утверждения $(*)$ проводится индукцией по $l(\eta)$.

1) $\eta = \beta_0$ или $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\beta}_0$. Тогда $\eta \leqslant_k \beta_0 = \alpha_0 <_k \alpha_1$, если $j \leqslant k \leqslant i$.

2) $\bar{\eta}$ строго содержит $\bar{\beta}_0$, и найдется $\bar{\beta}_0$, такое, что единственным элементом множества I, некоторое вхождение которого в $\bar{\eta}$ связано с $\bar{\beta}_0$, является i. Тогда, согласно определению β_1, имеем $\eta \leqslant_i \beta_1 <_i \alpha_1$. Пусть $j \leqslant k < i$, и пусть $\bar{\delta}$ — произвольная компонента некоторого k-фрагмента в $\bar{\eta}$. Тогда $\bar{\delta}$ либо пропускает $\bar{\beta}_0$ и в этом случае в силу 1) $\delta <_k \alpha_1$, либо $\bar{\delta}$ содержит $\bar{\beta}_0$, откуда по предположению индукции вытекает $\delta <_k \alpha_1$, либо $\bar{\delta}$ является k-полуфрагментом в $\bar{\beta}_0$ и, следовательно, δ имеет k-активное вхождение в $\bar{\alpha}_1$, откуда $\delta <_k \alpha_1$. Во всех случаях $\delta <_k \alpha_1$. Поэтому, применив индукцию по $\iota(k, \eta)$, можно доказать, что $\eta <_k \alpha_1$.

Определение 26.53. Пусть $v_0(j, \alpha) = (i, a)$, $\operatorname{apr}(0, j, \alpha) = \alpha_0$ и $\operatorname{apr}(1, j, \alpha) = \alpha_1$. Для удобства обозначений положим $i_0 = i_1 = i$.

Допустим, что мы уже определили пары, состоящие из j-полуфрагментов диаграммы α и элементов множества I, входящих в α, скажем (α_0, i_0), (α_1, i_1), ..., (α_n, i_n), которые удовлетворяют следующим условиям:

(*) i) Для каждого m при $1 \leqslant m < n$ имеет место $j \leqslant i_{m+1} < i_m$.

ii) Для каждого $m \geqslant 1$ i_{m+1} равняется максимальному k, для которого найдется j-полуфрагмент диаграммы α, имеющий вид $\overline{(k, b, \gamma)}$, причем $\bar{\alpha}_m$ является компонентой в $\bar{\gamma}$.

(iii) Пусть $\bar{\eta}$ обозначает любой j-полуфрагмент диаграммы α, такой, что $\bar{\eta}$ содержит $\bar{\alpha}_m$ и все элементы множества I, входящие в $\bar{\eta}$ и связанные с $\bar{\alpha}_m$, не меньше, чем i_{m+1}. Тогда α_{m+1} является максимальным (в смысле порядка $<_{i_{m+1}}$) среди этих η, а $\bar{\alpha}_{m+1}$ обозначает такое вхождение диаграммы α_{m+1}.

Теперь следующим образом определим пару (α_{n+1}, i_{n+1}) (при условии что $\bar{\alpha}_n$ не совпадает с α). Элемент i_{n+1} определим как i_{m+1} в п. ii) условия $(*)$, в котором вместо m следует взять n, а $\bar{\alpha}_{n+1}$ определим как $\bar{\alpha}_{m+1}$ в п. iii) условия $(*)$, где опять вместо m следует взять n.

При этом вхождение $\bar{\alpha}_n$ мы будем называть *n-й j-аппроксимацией* диаграммы α и обозначать через $\operatorname{apr}(n, j, \alpha)$, т. е. $\alpha_n = \operatorname{apr}(n, j, \alpha)$. Положим $v_n(j, \alpha) = i_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если $\bar{\alpha}_n = \alpha$, то аппроксимацию $\bar{\alpha}_{n+1}$ определять не надо. Однако мы будем употреблять запись $v_{n+1}(j, \beta) < v_{n+1}(j, \alpha)$ и для выражения того факта, что $v_{n+1}(j, \alpha)$ определено, а $v_{n+1}(j, \beta)$ — нет.

Следствие 26.54. (1) *Пусть $\overline{(p, e, \xi)}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α, в котором $\bar{\alpha}_n$ является компонентой вхождения $\bar{\xi}$. Тогда $p < i_n$.*

(2) $j \leqslant i_{n+1} < i_n$.

(3) *Найдется по крайней мере одно $\bar{\alpha}_n$, которое входит в $\overline{(i_{n+1}, b, \gamma)}$ как компонента диаграммы γ и которое является j-полуфрагментом диаграммы α при условии, что $\alpha_n \neq \alpha$.*

Определение 26.55. Пусть $\bar{\eta}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α. Мы скажем, что $\bar{\eta}$ *j-пропускает* α_n, если $\bar{\eta}$ не содержится ни в каком $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\eta}$ не содержит никакого $\bar{\alpha}_n$ и $\bar{\eta}$ не содержится строго ни в одном из $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}$.

Предложение 26.56. I^n. *Пусть $\bar{\eta}$ — некоторый j-полуфрагмент диаграммы α, содержащий $\bar{\alpha}_n$. Допустим, что для каждого вхождения $\bar{\alpha}_n$ в $\bar{\eta}$ найдется элемент множества I, некоторое вхождение которого в $\bar{\eta}$ связано с $\bar{\alpha}_n$ и который меньше, чем i_{n+1}. Пусть $\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m$ — все вхождения $\bar{\alpha}_n$ в $\bar{\eta}$, и пусть q_k — наименьший элемент из I, который входит в $\bar{\eta}$, причем это вхождение связано с $\bar{\alpha}_n^k$. Пусть $q = q_n(\bar{\eta}) = \max(q_1, \ldots, q_m)$. Тогда для каждого p, такого, что $q < p \leqslant i_n$, верно $\eta <_p \alpha_n$. (Заметим, что $j \leqslant q < i_{n+1}$.)*

II^{n+1}. *Если $\bar{\eta}$ j-пропускает $\bar{\alpha}_{n+1}$, то $\bar{\eta} <_p \alpha_{n+1}$ для всякого p, такого, что $j \leqslant p \leqslant i_{n+1}$.*

III^{n+1}. *Пусть α и β — некоторые связные ординальные диаграммы, и допустим, что $\overline{\mathrm{apr}(n, j, \alpha)}$, $\overline{\mathrm{apr}(n, j, \beta)}$ и $\overline{\mathrm{apr}(n+1, j, \alpha)}$ определены. Допустим также, что $\alpha_n = \mathrm{apr}(n, j, \alpha) = \mathrm{apr}(n, j, \beta) = \beta_n$ (и потому $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$).*

(1) Если $v_{n+1}(j, \beta) = i'_{n+1} < i_{n+1} = v_{n+1}(j, \alpha)$, то $\beta <_j \alpha$.

(2) Если

$$v_{n+1}(j, \beta) = v_{n+1}(j, \alpha) = i_{n+1}$$

и

$$\beta_{n+1} = \mathrm{apr}(n+1, j, \beta) <_{i_{n+1}} \mathrm{apr}(n+1, j, \alpha) = \alpha_{n+1},$$

то $\beta <_j \alpha$.

Доказательство. (Применяем индукцию по n.) Заметим, что справедливость утверждений I^0, II^0, II^1, III^0 и III^1 была установлена ранее (см. предложение 26.47, лемму 26.45, предложения 26.51, 26.43 и 26.46). Сначала мы докажем утверждение I^n в предположении, что доказано III^r для всех r, таких, что $1 \leqslant r \leqslant n$. Затем мы докажем II^{n+1} с помощью I^n и II^n. Наконец, мы докажем III^{n+1} с помощью II^n и II^{n+1}.

I^n. Для всякого p, $j \leqslant p \leqslant i_n$, и всякого r, $0 \leqslant r \leqslant n$, имеет место $v_r(p, \alpha_n) = v_r(j, \alpha_n) = v_r(j, \alpha)$; кроме того, $\mathrm{apr}(r, p, \alpha_n) = \mathrm{apr}(r, j, \alpha_n) = \mathrm{apr}(r, j, \alpha)$. Пусть теперь $q < p \leqslant i_n$. Тогда для некоторого r, $0 \leqslant r \leqslant n$, имеет место $\mathrm{apr}(0, p, \eta) = \mathrm{apr}(0, p, \alpha_n), \ldots, \mathrm{apr}(r-1, p, \eta) = \mathrm{apr}(r-1, p, \alpha_n)$ и либо $v_r(p, \eta) < v_r(p, \alpha_n)$, либо $v_r(p, \eta) = v_r(p, \alpha_n) (= i_r)$ и $\mathrm{apr}(r, p, \eta) <_{i_r}$

$<_{i_r} \mathrm{apr}(r, p, \alpha_n) (= \alpha_r)$. Отсюда, применив III^r к p, получаем $\eta <_p \alpha_n$ для всякого такого p.

II^{n+1}. Применяем индукцию по $l(\eta)$.

1) $\bar{\eta}$ совпадает с $\bar{\alpha}_n$ или j-пропускает α_n. Тогда, согласно II^n, $\eta \leqslant_p \alpha_n <_p \alpha_{n+1}$, если $j \leqslant p \leqslant i_{n+1}$.

2) $\bar{\eta}$ собственно содержит $\bar{\alpha}_n$ и существует вхождение $\bar{\alpha}_n$ в $\bar{\eta}$, такое, что все элементы множества I, вхождения которых в $\bar{\eta}$ связаны с $\bar{\alpha}_n$, не меньше i_{n+1}. Тогда, согласно определению диаграммы α_{n+1}, $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}$. Пусть $j \leqslant p < i_{n+1}$, и пусть $\bar{\delta}$ — некоторая компонента какого-нибудь p-фрагмента в $\bar{\eta}$. Тогда $\bar{\delta}$ либо пропускает $\bar{\alpha}_n$, либо является p-полуфрагментом в $\bar{\alpha}_n$. Следовательно, $\delta <_p \alpha_n <_p \alpha_{n+1}$. Тогда, применив индукцию по $\iota(p, \eta)$, получаем $\eta <_p \alpha_{n+1}$ для всех таких p.

3) $\bar{\eta}$ собственно содержит $\bar{\alpha}_n$, и для всякого вхождения $\bar{\alpha}_n$ в $\bar{\eta}$ существует элемент I, который меньше, чем i_{n+1}, и имеет вхождение в η, являющееся связанным с $\bar{\alpha}_n$. Согласно I^n, имеем $\eta <_p \alpha_n$, если $(q <) i_{n+1} \leqslant p \leqslant i_n$. В частности, $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_n <_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}$. Пусть $j \leqslant p < i_{n+1}$, и пусть $\bar{\delta}$ — некоторая компонента какого-нибудь p-фрагмента в $\bar{\eta}$. Тогда, применив индукцию по $l(\eta)$, как и в 2), получим $\delta <_p \alpha_{n+1}$, откуда вытекает, что $\eta <_p \alpha_{n+1}$ для всех таких p.

III^{n+1}. (1) Пусть $\bar{\xi} = \overline{(i_{n+1}, b, \gamma)}$ — любой j-полуфрагмент диаграммы α, внешний индекс которого равен i_{n+1}, и $\bar{\gamma}$ содержит $\bar{\alpha}_n$ в качестве компоненты. Мы покажем, что для каждого j-полуфрагмента $\bar{\eta}$ диаграммы β, который либо j-пропускает $\bar{\beta}_n$, либо содержит $\bar{\beta}_n$, имеет место $\eta <_p \xi$ при $j \leqslant p \leqslant i_{n+1}$. В частности, мы получим $\beta <_j \xi \leqslant_j \alpha$.

1) $\bar{\eta}$ совпадает с $\bar{\beta}_n$ или $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\beta}_n$. Тогда, согласно II^n, $\eta \leqslant_p \beta_n$. Поэтому $\eta \leqslant_p \beta_n = \alpha_n <_p \xi$.

2) $\bar{\eta}$ собственно содержит $\bar{\beta}_n$. Вспомним, что $\bar{\beta}_n$ входит в $\bar{\eta}$ следующим образом. Существует некоторый j-полуфрагмент в $\bar{\eta}$, скажем $\overline{(k, c, \rho)}$, где $\bar{\beta}_n$ входит в $\bar{\rho}$ в качестве компоненты и $j \leqslant k \leqslant i'_{n+1} < i_{n+1}$.

Мы можем показать, что

(*) Найдется такое натуральное число r, что $0 \leqslant r \leqslant n$,

$$\mathrm{apr}(r-1, i_{n+1}, \eta) = \alpha_{r-1} (= \mathrm{apr}(r-1, i_{n-1}, \xi))$$

и либо

$$v_r(i_{n+1}, \eta) < i_r,$$

либо

$$v_r(i_{n+1}, \eta) = i_r \text{ и } \mathrm{apr}(r, i_{n+1}, \eta) <_{i_r} \alpha_r (= \mathrm{apr}(r, i_{n+1}, \xi)).$$

Применив (*) и III^r к η, ξ и i_{n+1}, мы получим, что $\eta <_{i_{n+1}} \xi$. Пусть $j \leqslant p < i_{n+1}$, и пусть $\bar{\delta}$ — некоторая компонента какого-нибудь p-фрагмента в $\bar{\eta}$. Если $\bar{\delta}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\bar{\eta}$, то, согласно предположению индукции, $\delta <_p \xi$. Если же $\bar{\delta}$ является p-полуфрагментом в $\bar{\beta}_r$ для некоторого r, где $0 \leqslant r \leqslant n$, то $\delta <_p \beta_r \leqslant_p \beta_n = \alpha_n <_p \xi$. Во всех случаях $\delta <_p \xi$, откуда, применив индукцию по $\iota(p, \eta)$, получаем $\eta <_p \xi$.

Утверждение (*) является частным случаем следующего утверждения.

(**) Пусть $\bar{\eta}$ — произвольный j-полуфрагмент диаграммы β, строго содержащий $\bar{\beta}_n$. Пусть m — любой элемент из I, такой, что $m > i'_{n+1} (= v_{n+1}(j, \beta))$. Тогда существует такое натуральное число r, что $0 \leqslant r \leqslant n$, $\operatorname{apr}(r-1, m, \eta) = \beta_{r-1} (= \alpha_{r-1})$ и либо $v_r(m, \eta) < i_r = v_r(j, \beta)$, либо $v_r(m, \eta) = i_r$ и $\operatorname{apr}(r, m, \eta) <_{i_r} \beta_r (= \alpha_r)$. (Заметим, что $m > i'_{n+1}$ включает случай, когда $m = i_{n+1}$.) В том случае, когда $r = 0$, имеем $v_r(m, \eta) < (i, a) = v_r(m, \beta)$ или $v_r(m, \eta) = (i, a)$ и $\operatorname{apr}(0, m, \eta) <_i \beta_0$.

Утверждение (**) мы докажем следующим образом. Так как $m \geqslant j$, то $v_0(m, \eta) \leqslant v_0(j, \beta) (= (i, a))$. Если имеет место строгое неравенство, то все доказано. Если же имеет место равенство, то рассмотрим $r = 1$. Повторяя те же рассуждения, допустим, что мы уже получили, что $\operatorname{apr}(n-1, m, \eta) = \beta_{n-1}$ и $v_n(m, \eta) = i_n$. Тогда диаграмма (n, m, η) должна содержать $\bar{\beta}_{n-1}$. Отсюда из того, что $m > i'_{n+1}$, и из того, что $\bar{\eta}$ строго содержит $\bar{\beta}_n$, вытекает, что $\operatorname{apr}(n, m, \eta) \neq \beta_n$. Поэтому, согласно определению $\operatorname{apr}(n, j, \eta) (= \beta_n)$, имеем $\operatorname{apr}(n, m, \eta) <_i \beta_n$.

(2) Мы покажем, что

(***) для всякого j-полуфрагмента $\bar{\eta}$ диаграммы β, который либо пропускает $\bar{\beta}_{n+1}$, либо совпадает с $\bar{\beta}_{n+1}$, либо строго содержит $\bar{\beta}_{n+1}$, имеет место $\eta <_p \alpha_{n+1}$ при любом p, таком, что $j \leqslant p \leqslant i_{n+1}$.

Как частный случай утверждения (***) мы получим $\beta <_j <_j \alpha_{n+1} \leqslant_j \alpha$. Утверждение (***) доказывается индукцией по $l(\eta)$.

1) $\bar{\eta}$ совпадает с $\bar{\beta}_{n+1}$ или пропускает $\bar{\beta}_{n+1}$. Тогда в силу II^{n+1} имеем $\eta \leqslant_{i_{n+1}} \beta_{n+1} <_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}$. Проводя рассуждения, аналогичные тем, что проводились раньше, мы можем индукцией по $\iota(p, \eta)$ доказать, что $\eta <_p \alpha_{n+1}$ при условии, что $j \leqslant p < i_{n+1}$.

2) $\bar{\eta}$ строго содержит $\bar{\beta}_{n+1}$, и существует вхождение $\bar{\beta}_n$ в $\bar{\eta}$ такое, что каждый элемент множества I, который входит в $\bar{\eta}$, причем это вхождение связано с $\bar{\beta}_n$, не меньше i_{n+1}. Тогда, согласно определению $\bar{\beta}_{n+1}$, имеем

$$\eta <_{i_{n+1}} \beta_{n+1} <_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}.$$

Тот факт, что при $j \leqslant p < i_{n+1}$ имеет место $\eta <_p \alpha_{n+1}$, можно показать так же, как и раньше.

3) $\bar{\eta}$ собственно содержит $\bar{\beta}_{n+1}$, и для каждого вхождения $\bar{\beta}_n$ в $\bar{\eta}$ существует элемент из I, который входит в $\bar{\eta}$, причем это вхождение связано с $\bar{\beta}_n$, и который меньше i_{n+1}. Тогда, согласно I^n, выполняется $\eta <_p \beta_n$ при $q < p \leqslant i_n$, где $j \leqslant q < i_{n+1}$. Следовательно, положив $p = i_{n+1}$, мы получим

$$\eta <_{i_{n+1}} \beta_n <_{i_{n+1}} \beta_{n+1} <_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}.$$

Если $j \leqslant p < i_{n+1}$, то, как и раньше, доказываем, что $\eta <_p \alpha_{n+1}$.

Теперь мы усовершенствуем эти аппроксимации. Индукцией по k определим $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ таким образом, что $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ будет i_{n+1}-полуфрагментом в $\bar{\alpha}_{n+1}$.

Определение 26.57. Пусть $\bar{\alpha}_{(n, 0)}$ обозначает любое вхождение $\bar{\alpha}_n$, являющееся i_{n+1}-активным в $\bar{\alpha}_{n+1}$.

Допустим, что $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ уже определено так, что $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ является i_{n+1}-полуфрагментом в $\bar{\alpha}_{n+1}$. Допустим, что $\alpha_{(n, k)} \neq \alpha_{n+1}$. Пусть $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_m$ суть все вхождения i_{n+1}-полуфрагментов в $\bar{\alpha}_{n+1}$, которые строго содержат некоторое вхождение $\bar{\alpha}_{(n, k)}$. Положим

$$\alpha_{(n, k+1)} = \max_{<_{i_{n+1}+1}} (\gamma_1, \ldots, \gamma_m).$$

Тогда $\bar{\alpha}_{(n, k+1)}$ означает любое такое вхождение $\alpha_{(n, k+1)}$ в $\bar{\alpha}_{n+1}$. Заметим, что, хотя указанные выше вхождения $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_m$ определены относительно некоторого вхождения $\bar{\alpha}_{n+1}$, диаграммы $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ задаются однозначно по α_{n+1}. То же самое верно и для диаграммы $\alpha_{(n, k+1)}$.

Вхождение $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ называется *(n, k)-й j-аппроксимацией* диаграммы α и обозначается через $\operatorname{apr}\overline{((n, k), j, \alpha)}$.

Предложение 26.58. *Либо $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ совпадает с $\bar{\alpha}_{n+1}$, либо $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ входит в $\overline{(i_{n+1}, c, \delta)}$ как некоторая компонента вхождения $\bar{\delta}$.*

Доказательство. Допустим, что $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ входит в $\overline{(p, c, \delta)}$ в качестве некоторой компоненты вхождения $\bar{\delta}$. Тогда, согласно определению $\bar{\alpha}_{n+1}$, имеем $p \leqslant i_{n+1}$. Если $p > i_{n+1}$, то $p \geqslant i_{n+1} + 1$, и, следовательно, вхождение $\bar{\alpha}_{(n, k)}$ в $\bar{\delta}$ является $(i_{n+1}+1)$-полуфрагментом вхождения $\overline{(p, c, \delta)}$. Поэтому $\alpha_{(n, k)} <_{i_{n+1}+1} (p, c, \delta)$.

Кроме того, $(\overline{p,\ c,\ \delta})$ содержит некоторые вхождения диаграммы $\bar{\alpha}_{(n,\,k-1)}$ в качестве i_{n+1}-полуфрагментов, и, следовательно, согласно определению $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$, имеем $(p,\ c,\ \delta) <_{i_{n+1}+1} \alpha_{(n,\,k)}$. Получили противоречие. Следовательно, $p = i_{n+1}$.

Определение 26.59. Мы говорим, что некоторый i_{n+1}-фрагмент в $\bar{\alpha}_{n+1}$, скажем $\bar{\eta}$, *j-пропускает* $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$, если он не содержит никакого вхождения $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$, не содержится в $\bar{\alpha}_{n+1}$ и не содержится ни в каком вхождении $\bar{\alpha}_{(m,\,p)}$, где $(m,\ p) < (n,\ k)$.

Заметим, что при $k = 0$ возможно, что $\bar{\eta}$ j-пропускает $\bar{\alpha}_{(n,\,0)}$, но не пропускает $\bar{\alpha}_n$.

Предложение 26.60. *Допустим, что $\bar{\eta}$ является i_{n+1}-полуфрагментом в $\bar{\alpha}_{n+1}$, который j-пропускает $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$. Тогда* $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

Доказательство. Применим индукцию по k, а внутри нее — индукцию по $l(\eta)$.

$k = 0$. $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\alpha}_{(n,\,0)}$.

1) $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\alpha}_n$. Тогда, согласно утверждению II^n предложения 26.56, имеем $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_n\ (= \alpha_{(n,\,0)})$.

2) $\bar{\eta}$ содержит $\bar{\alpha}_n$. Тогда для каждого j-активного вхождения $\bar{\alpha}_n$ в η найдется элемент из I, который входит в $\bar{\eta}$, причем это вхождение связано с $\bar{\alpha}_n$, и меньше i_{n+1}. Поэтому, согласно утверждению I^n предложения 26.56, имеем $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_n = \alpha_{(n,\,0)}$.

$k > 0$. $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$.

1) $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\alpha}_{(n,\,k-1)}$. Тогда, согласно предположению индукции, $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k-1)}$. Но $\bar{\alpha}_{(n,\,k-1)}$ является i_{n+1}-полуфрагментом в $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$ (по определению). Поэтому $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

2) $\bar{\eta}$ совпадает с $\bar{\alpha}_{(n,\,k-1)}$. Тогда $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

3) $\bar{\eta}$ строго содержит $\bar{\alpha}_{(n,\,k-1)}$. Тогда, согласно определению $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$, $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$. Пусть $\bar{\delta}$ — некоторая компонента какого-нибудь i_{n+1}-фрагмента в $\bar{\eta}$. Так как $\bar{\delta}$ пропускает $\bar{\alpha}_{(n,\,k)}$, то по предположению индукции $\delta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

Предложение 26.61. *Допустим, что для α и β определены аппроксимации*

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \overline{\mathrm{apr}\,(n+1,\ j,\ \alpha)}, \quad \bar{\beta}_{n+1} = \overline{\mathrm{apr}\,(n+1,\ j,\ \beta)},$$

$$\bar{\alpha}_{(n,\,k)} = \overline{\mathrm{apr}\,((n,\ k),\ j,\ \alpha)}, \quad \bar{\beta}_{(n,\,k)} = \overline{\mathrm{apr}\,((n,\ k),\ j,\ \beta)}.$$

Если

$\beta_{(n,\,k-1)} = \alpha_{(n,\,k-1)}$, $v_{n+1}(j,\ \beta) = v_{n+1}(j,\ \alpha) = i_{n+1}$ *и* $\beta_{(n,\,k)} <_{i_{n+1}+1} \alpha_{(n,\,k)}$,

то $\beta_{n+1} <_{i_{n+1}} \alpha_{n+1}$, *а следовательно, и* $\beta <_j \alpha$.

Доказательство. Во-первых, мы утверждаем, что

(1) $\beta_{(n,\,k)} <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

Но это утверждение является частным случаем следующего утверждения.

(2) Для всякого i_{n+1}-полуфрагмента $\bar{\gamma}$ диаграммы $\beta_{(n,\,k)}$, который либо содержит $\bar{\beta}_{(n,\,k-1)}$, либо j-пропускает $\bar{\beta}_{(n,\,k-1)}$, справедливо $\gamma <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

Мы докажем (2) индукцией по $l(\gamma)$.

1) $\bar{\gamma}$ совпадает с $\bar{\beta}_{(n,\,k-1)}$. Тогда $\gamma = \alpha_{(n,\,k-1)} <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

2) $\bar{\gamma}$ опускает $\bar{\beta}_{(n,\,k-1)}$. Тогда, согласно предложению 26.60, $\gamma <_{i_{n+1}} \beta_{(n,\,k-1)}$ и потому $\gamma <_{i_{n+1}} \beta_{(n,\,k-1)} = \alpha_{(n,\,k-1)} <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

3) $\bar{\gamma}$ строго содержит $\bar{\beta}_{(n,\,k-1)}$. Пусть γ имеет вид $(p,\ c,\ \gamma')$, где $p \geqslant i_{n+1}$. Тогда, согласно определению аппроксимации $\bar{\beta}_{(n,\,k)}$, $\gamma \leqslant_{i_{n+1}+1} \beta_{(n,\,k)}$, и, значит, согласно условию доказываемого предложения, имеем

$$\gamma \leqslant_{i_{n+1}} \beta_{(n,\,k)} <_{i_{n+1}+1} \alpha_{(n,\,k)}.$$

Пусть $\bar{\delta}$ — некоторая компонента какого-нибудь i_{n+1}-фрагмента в $\bar{\gamma}$. Если $\bar{\delta}$ удовлетворяет тому же условию, что и $\bar{\gamma}$, то, согласно предположению индукции, $\delta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$. Другая возможность состоит в том, что $\bar{\delta}$ есть некоторое $\bar{\beta}_{(m,\,p)}$, где $(m,\ p) < (n,\ k-1)$. Поэтому $\delta = \beta_{(m,\,p)} = \alpha_{(m,\,p)} <_i \alpha_{(n,\,k)}$. Отсюда следует, что $\gamma <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

Чтобы завершить доказательство этого предложения, нам нужно только показать, что

(3) для любого i_{n+1}-фрагмента $\bar{\eta}$ вхождения $\bar{\beta}_{n+1}$, который либо пропускает $\bar{\beta}_{(n,\,k)}$, либо содержит $\bar{\beta}_{(n,\,k)}$, имеет место $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

Это утверждение докажем индукцией по $l(\eta)$.

1) $\bar{\eta}$ совпадает с $\bar{\beta}_{(n,\,k)}$. В силу (1) $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n\ k)}$.

2) $\bar{\eta}$ пропускает $\bar{\beta}_{(n,\,k)}$. Согласно предложению 26.60, $\eta <_{i_{n+1}} \beta_{(n,\,k)} <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,\,k)}$.

3) $\bar{\eta}$ строго содержит $\bar{\beta}_{(n,\,k)}$. Пусть η имеет вид $(p,\ c,\ \eta')$,

где $p \geqslant i_{n+1}$. По определению $\bar\beta_{(n,k)}$ имеем $\eta <_{i_{n+1}+1} \beta_{(n,k)}$ и потому

$$\eta <_{i_{n+1}+1} \beta_{(n,k)} <_{i_{n+1}+1} \alpha_{(n,k)}.$$

Отсюда таким же образом, как и в п. 3) доказательства утверждения (2), следует, что $\eta <_{i_{n+1}} \alpha_{(n,k)}$.

На этом завершается наше изложение теории аппроксимаций. Как мы уже убедились, эта теория дает критерий, позволяющий сравнивать ординальные диаграммы.

§ 27. Доказательство непротиворечивости арифметики второго порядка с аксиомой Π_1^1-выделения

Следующая лемма, касающаяся системы ординальных диаграмм $O(\omega+1, \omega^3)$, существенна для доказательства непротиворечивости, излагаемого в этом параграфе.

Лемма 27.1 (основная лемма). *Пусть p — некоторое натуральное число, и пусть γ и δ — ординальные диаграммы, для которых существуют две конечные последовательности ординальных диаграмм $\gamma_0=\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ и $\delta_0=\delta, \delta_1, \ldots, \delta_m$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *Каждая диаграмма γ_i, $i<m$, имеет вид $(k, 0, \gamma_{i+1})$ для некоторого натурального $k \geqslant p$ или $(\omega, a+1, \gamma_{i+1} \# \eta)$.*

(2) *Каждая диаграмма δ_i, $i<m$, имеет вид $(k, 0, \delta_{i+1})$ или $(\omega, a+1, \delta_{i+1} \# \eta)$ в зависимости от того, имеет γ_i вид $(k, 0, \gamma_{i+1})$ или $(\omega, a+1, \gamma_{i+1} \# \eta)$.*

(3) *$\delta_m <_j \gamma_m$ для всякого j, такого, что $p \leqslant j \leqslant \omega$.*

(4) *Для всякого j, такого, что $p \leqslant j < \omega$, и для каждого j-фрагмента $\bar\alpha$ диаграммы δ_m существует j-фрагмент $\bar\beta$ диаграммы γ_m, для которого $\alpha \leqslant_j \beta$.*

Тогда для всякого j, такого, что $p \leqslant j \leqslant \omega$, верно $\delta <_j \gamma$, а для всякого j, $p \leqslant j < \omega$, и для каждого j-фрагмент $\bar\alpha$ диаграммы δ найдется j-фрагмент $\bar\beta$ диаграммы γ, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$.

Доказательство. Применяем двойную индукцию по m и по $n = \iota(j, \gamma, \delta)$.

1. Если $m=0$, то заключение легко следует из условий (3) и (4).

2. Допустим, что $m>0$, $\gamma=(k, 0, \gamma_1)$ и $\delta=(k, 0, \delta_1)$, где $k \geqslant p$.

2.1. Тогда, согласно предположению индукции, $\delta_1 <_k \gamma_1$, так что $\delta <_\infty \gamma$.

2.2. Если $k < j \leqslant \omega$, то $\delta <_j \gamma$, поскольку γ и δ не имеют q-фрагментов при $q \geqslant j$ и так как, согласно 2.1, $\delta <_\infty \gamma$.

2.3. Если $j=k$, то из 2.2 вытекает, что если $\delta_1 <_j \gamma$, то $\delta <_j k$. Так как $\delta_1 <_j \gamma_1$ и из условия, что $\bar\gamma_1$ является j-фрагментом диаграммы γ, следует $\gamma_1 <_j \gamma$, то в силу предположения индукции по m мы имеем $\delta_1 <_j \gamma$.

2.4. Если $p \leqslant j < k$, то $\delta <_{j_1} \gamma$, где $j_1 = \iota(j, \gamma, \delta)$. Следовательно, если для каждого j-фрагмента $\bar\alpha$ диаграммы δ имеет место $\alpha <_j \gamma$, то $\delta <_j \gamma$. Допустим, что $\bar\alpha$ является j-фрагментом диаграммы δ. Тогда $\bar\alpha$ является j-фрагментом и диаграммы δ_1, и, согласно предположению индукции по m, существует j-фрагмент $\bar\beta$ диаграммы γ_1, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$. Кроме того, β является также j-фрагментом диаграммы γ. Следовательно $\alpha \leqslant_j \beta <_j \gamma$.

3. Допустим, что $m>0$, $\gamma=(\omega, c+1, \gamma_1 \# \eta)$ и $\delta=(\omega, c+1, \delta_1 \# \eta)$.

3.1. Так как, согласно предположению индукции по m, имеем $\delta_1 <_\omega \gamma_1$, то $\delta <_\omega \gamma$.

3.2. Если $j=\omega$, то достаточно показать, что $\delta_1 \# \eta <_\omega \gamma$, т. е. что $\delta_1 <_\omega \gamma$ и $\eta <_\omega \gamma$. Так как $\overline{\gamma_1 \# \eta}$ есть ω-фрагмент диаграммы γ и $\delta_1 <_\omega \gamma_1$, то $\delta_1 <_\omega \gamma$ и $\eta <_\omega \gamma$.

3.3. Если $p \leqslant j < \omega$, то, применив предположение индукции по n, получаем $\delta <_{j_1} \gamma$, где $j_1 = \iota(j, \gamma, \delta)$. Поэтому если для каждого j-фрагмента $\bar\alpha$ диаграммы δ имеет место $\alpha <_j \gamma$, то $\delta <_j \gamma$. Пусть $\bar\alpha$ — некоторый j-фрагмент диаграммы δ. Тогда $\bar\alpha$ является j-фрагментом либо диаграммы δ_1, либо диаграммы η. В первом случае, применив предположение индукции по m, получаем, что существует j-фрагмент $\bar\beta$ диаграммы γ_1, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$. Более того, $\bar\beta$ является j-фрагментом диаграммы γ. Следовательно, $\alpha <_j \gamma$. Если же $\bar\alpha$ является j-фрагментом диаграммы η, то $\bar\alpha$ является j-фрагментом и диаграммы γ и потому $\alpha <_j \gamma$.

Теперь мы приступим к доказательству непротиворечивости некоторой системы арифметики второго порядка. Чтобы упростить рассуждения, в качестве исходных логических символов мы будем использовать только $\neg$, $\wedge$ и $\forall$. Остальные символы будут употребляться как сокращения.

Определение 27.2. (1) Язык, формулы, абстракты, секвенции и выводы в арифметике второго порядка такие же, как и в определении 18.1.

(2) Полуформулы и полуабстракты — это выражения, построенные так же, как формулы и абстракты соответственно, но в них могут свободно входить связанные переменные. Внеш-

ний логический символ полуформулы или полуабстракта определяется, как обычно.

(3) Пусть A — некоторая полуформула или полуабстракт, пусть $\forall\phi B$ — некоторая полуформула в A, и пусть $\#$ — внешний квантор $\forall$ в $\forall\phi B$, т. е. квантор $\forall$, предшествующий ϕ. Пусть G — произвольный символ в B. Тогда мы говорим, что $\#$ *связывает* G (а G *связывается* этим $\#$) в A. Если G является квантором $\forall$ по переменной второго порядка в B и G связывает ϕ в B, то мы говорим, что $\#$ *действует* на G в A.

(4) Пусть $\#$ — некоторый квантор $\forall$ по переменной второго порядка в A. Мы говорим, что квантор $\#$ *изолирован* в A, если выполняются следующие условия.

(4.1) Никакой квантор $\forall$ по переменной второго порядка не действует на $\#$.

(4.2). Квантор $\#$ не действует ни на какой квантор $\forall$ по переменной второго порядка.

(5) Полуформула или полуабстракт A называется *изолированным*, если каждый квантор $\forall$ по переменной второго порядка в A изолирован.

Легко доказывается следующее предложение.

Предложение 27.3. *Класс изолированных формул* (*абстрактов*) *является классом* Π_1^1 *в широком смысле* (см. п. (3) определения 18.1). *Следовательно, если* V — *изолированный абстракт и* $F(\alpha)$ *изолировано, то и* $F(V)$ *изолировано.*

Из предложения 27.3 видно, что, когда мы изучаем изолированные формулы, то, по существу, имеем дело с Π_1^1-формулами.

Определение 27.4. Под *изолированной системой натуральных чисел* (**INN**) мы понимаем систему арифметики второго порядка (см. определение 18.1), у которой индукционные формулы произвольны, т. е. система обладает полной индукцией, а абстракты в применениях правила $\forall$-слева, обозначенные буквой V в п. (1) определения 18.1, должны быть изолированными, т. е. система имеет, так сказать, „изолированное выделение".

Настоящий параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 17.5. *Система* **INN** *непротиворечива.*

Доказательство. Эту теорему мы докажем с помощью системы ординальных диаграмм $O(\omega+1, \omega^3)$. Доказательство будет излагаться поэтапно. Мы перенесем сюда многие понятия, относящиеся к арифметике первого порядка, например понятия явного и неявного пучка или формулы, заключительной части вывода, граничного применения правила и т. д.

Определение 27.6. Пусть A — некоторая формула. Через $\gamma(A)$ обозначим *сложность* формулы A, определяемую следующим образом:

1) $\gamma(A)=0$, если A — изолированная формула.

В следующих пунктах предполагается, что формула A не является изолированной.

2) Если A имеет вид $\neg B$, то $\gamma(A)=\gamma(B)+1$.
3) Если A имеет вид $B\wedge C$, то $\gamma(A)=\max(\gamma(B), \gamma(C))+1$.
4) Если A имеет вид $\forall x G(x)$, то $\gamma(A)=\gamma(G(a))+1$.
5) Если A имеет вид $\forall\phi F(\phi)$, то $\gamma(A)=\gamma(F(\alpha))+1$.
6) Сложность абстракта $\{x_1, \ldots, x_n\} H(x_1, \ldots, x_n)$ определяется как $\gamma(H(a_1, \ldots, a_n))$.

Предложение 27.7. *Если* V — *изолированный абстракт, то* $\gamma(F(V))=\gamma(F(\alpha))$.

Доказательство. Если $\gamma(F(\alpha))=0$, то предложение очевидно (см. предложение 27.3). Если же $\gamma(F(\alpha))\neq 0$, то это предложение мы докажем индукцией по числу логических символов в $F(\alpha)$. Мы рассмотрим только случай, когда $F(\alpha)$ имеет вид $\forall\phi G(\phi, \alpha)$ (в других случаях рассуждения аналогичны). По предположению индукции $\gamma(G(\beta, V))=\gamma(G(\beta, \alpha))$. Отсюда вытекает, что

$$\gamma(F(V))=\gamma(G(\beta, V))+1=\gamma(G(\beta, \alpha))+1=\gamma(F(\alpha)).$$

Предложение 27.8. *Если* V — *изолированный абстракт и* $\gamma(F(V))>0$, *то* $\gamma(\forall\phi F(\phi))=\gamma(F(V))+1$.

Доказательство. Пусть V — изолированный абстракт и $\gamma(F(V))>0$. Согласно предложению 27.7, имеем $\gamma(F(\alpha))>0$, т. е. формула $F(\alpha)$ не изолирована. Следовательно, формула $\forall\phi F(\phi)$ также не является изолированной. Тогда $\gamma(\forall\phi F(\phi)) = \gamma(F(\alpha))+1=\gamma(F(V))+1$.

Определение 27.9. Пусть A — какое-то вхождение некоторой формулы в вывод P в системе **INN**. *Ранг* вхождения A относительно P, обозначаемый $r(A; P)$ или просто $r(A)$, определим как $\omega^2\cdot\gamma(A)+\omega\cdot m_1+m_0$, где m_1 — число свободных переменных второго порядка, которые используются в качестве собственных переменных в применениях правила второго порядка $\forall$-справа, расположенных ниже секвенции, содержащей A, а m_0 — число логических символов в A.

Чтобы доказать теорему 27.5, мы изменим понятие вывода в **INN**, добавив следующее правило подстановки.

Определение 27.10. *Правило подстановки* в **INN** задается следующей схемой:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m}{A_1\binom{\alpha}{V}, \ldots, A_n\binom{\alpha}{V} \to B_1\binom{\alpha}{V}, \ldots, B_m\binom{\alpha}{V}},$$

где α — свободная переменная второго порядка и V — некоторый изолированный абстракт, имеющий то же число аргументных мест, что и α. Переменная α здесь называется *собственной переменной* подстановки. Эта схема, по существу, является в системе **INN** излишней, но ее введение помогает нам при проведении редукций выводов в **INN**.

Определение 27.11. Мы говорим, что применение J правила подстановки или правила $\forall$-справа второго порядка *нарушает* полуформулу A, если собственная переменная применения J связывается некоторым квантором $\forall$ второго порядка в A.

Определение 27.12. Пусть P — некоторый вывод в **INN**. Мы назовем P *выводом с уровнями*, если выполняются следующие условия:

1) Каждая подстановка применяется в заключительной части, и ниже подстановок нет применений правила индукции.

2) Каждой полуформуле A (или подстановке J) в P поставлено в соответствие некоторое ординальное число $\leqslant \omega$, обозначаемое через $d(A; P)$ (соответственно $d(J; P)$), называемое *уровнем* полуформулы A (соответственно подстановки J) в выводе P и удовлетворяющее условиям 2.1)—2.9). Вместо $d(A; P)$ (или $d(J; P)$) мы часто будем писать для краткости $d(A)$ (соответственно $d(J)$).

2.1) Если A — явная полуформула, то $d(A) = 0$. Допустим, что A — неявная полуформула.

2.2) Если A не является изолированной, то $d(A) = \omega$. Допустим, что A изолирована.

2.3) $d(A) = 0$, если A не содержит логических символов.

2.4) $d(A) = d(B) + 1$, если A имеет вид $\neg B$.

2.5) $d(A) = \max(d(B), d(C))$, если A имеет вид $B \wedge C$.

2.6) $d(A) = d(B(x)) + 1$, если A имеет вид $\forall x B(x)$.

2.7) $d(A) = \max_J (d(F(\phi)), d(J)) + 1$, если A имеет вид $\forall \phi F(\phi)$, где J пробегает множество всех подстановок в P, которые нарушают $\forall \phi F(\phi)$.

2.8) $d(B) < d(J)$ для каждой неявной формулы B в верхней секвенции применения J.

2.9) $0 < d(J) < \omega$.

Определение 27.13. Пусть P — некоторый вывод с уровнями, и пусть S — некоторая секвенция в P. Тогда *i-резольвентой* секвенции S назовем верхнюю секвенцию самой верхней подстановки, которая применяется ниже S и уровень которой не больше, чем i, если такая существует; в противном случае i-резольвентой секвенции S назовем заключительную секвенцию вывода P.

Определение 27.14. Рассмотрим систему ординальных диаграмм $O(\omega + 1, \omega^3)$. Каждой секвенции некоторого вывода с уровнями мы поставим в соответствие некоторую ординальную диаграмму из $O(\omega + 1, \omega^3)$ следующим образом.

1) Начальным секвенциям ставится в соответствие ординальная диаграмма 0.

2) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения J слабого структурного правила, то секвенции S_2 ставится в соответствие та же ординальная диаграмма, что и секвенции S_1.

3) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения правила $\neg$ (справа или слева), $\wedge$-слева, $\forall$ (справа или слева) первого порядка, $\forall$-справа второго порядка или явного применения правила $\forall$-слева второго порядка, то секвенции S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\omega, 0, \sigma)$, где σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

4) Если S_1 и S_2 — верхние секвенции, а S — нижняя секвенция применения правила $\wedge$-справа, то секвенции S ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\omega, 0, \sigma_1 \# \sigma_2)$, где σ_1 и σ_2 — ординальные диаграммы секвенций S_1 и S_2 соответственно.

5) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции неявного применения правила $\forall$-слева второго порядка, имеющего вид

$$\frac{F(V), \Gamma \to \Delta}{\forall \phi F(\phi), \Gamma \to \Delta,}$$

то секвенции S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\omega, r(F(V)) + 2, \sigma)$, где σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

6) Если S_1 и S_2 — верхние секвенции, а S — нижняя секвенция некоторого сечения, то секвенции S ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\omega, m + 1, \sigma_1 \# \sigma_2)$, где m — ранг высекаемой формулы относительно рассматриваемого вывода, а σ_1 и σ_2 — ординальные диаграммы секвенций S_1 и S_2 соответственно.

7) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторой подстановки уровня i, то секвенции S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(i, 0, \sigma)$, где σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

8) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения правила индукции, то секвенции S_2 ставится в соответствие диаграмма $(\omega, m+2, \sigma)$, где m — ранг индукционной формулы относительно рассматриваемого вывода и σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

9) Ординальная диаграмма, которая ставится в соответствие заключительной секвенции вывода P с уровнями, называется ординальной диаграммой этого вывода.

Ординальная диаграмма секвенции S в выводе P будет обозначаться через $O(S; P)$ или просто $O(S)$; ординальная диаграмма вывода P будет обозначаться через $O(P)$.

Определение 27.15. Определим понятие *редукции вывода*.

1) Пусть $S_1, \ldots, S_m$ и S — некоторые секвенции. Секвенция S *редуцируема* к $S_1, \ldots, S_m$, если S выводима без сечений в предположении, что $S_1, \ldots, S_m$ выводимы без сечений.

2) Пусть $P_1, \ldots, P_m$ и P — некоторые выводы с уровнями. Мы говорим, что вывод P *редуцируется* к $P_1, \ldots, P_m$, если выполняются следующие условия:

2.1) Ординальная диаграмма каждого P_i меньше ординальной диаграммы вывода P (в смысле порядка $<_0$).

2.2) Заключительная секвенция вывода P редуцируема к заключительным секвенциям выводов $P_1, \ldots, P_m$.

(1) Подготовка к редукции. Допустим, что секвенция $\rightarrow$ выводима в **INN**. Мы редуцируем вывод P секвенции $\rightarrow$ в некоторый другой вывод этой секвенции. Затем трансфинитной индукцией по $<_0$ мы можем доказать, что в **INN** существует некоторый вывод секвенции $\rightarrow$, заключительная часть которого совпадает с ним самим. Следуя методу доказательства непротиворечивости системы **PA**, мы могли бы устранить сечения из полученного таким образом вывода. Но это невозможно.

Без потери общности мы можем считать, что все свободные переменные, использующиеся в выводе в качестве собственных, отличны друг от друга и никакая из них не входит в секвенции, расположенные ниже того применения правила, в котором она является собственной.

Пусть P — некоторый вывод секвенции $\rightarrow$.

1) Добавим следующие правила вывода, которые будем называть *правилами замещения терма*:

$$\text{слева: } \frac{\Gamma_1,\ F(s),\ \Gamma_2 \rightarrow \Delta}{\Gamma_1,\ F(t),\ \Gamma_2 \rightarrow \Delta}, \qquad \text{справа: } \frac{\Gamma \rightarrow \Delta_1,\ F(s),\ \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1,\ F(t),\ \Delta_2},$$

где s и t — термы, не содержащие никаких свободных переменных и выражающие одно и то же число. (Эти правила вывода излишни для исходной системы.)

Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения правила замещения терма, то секвенции S_2 ставится в соответствие такая же ординальная диаграмма, что и секвенции S_1.

3) В выводе P подставим 0 вместо каждой свободной переменной первого порядка, кроме тех переменных, которые используются в качестве собственных. После этой подстановки вывод остается правильно построенным выводом, и ни его заключительная секвенция, ни его ординальная диаграмма не изменяются.

(2) Допустим, что вывод P содержит в своей заключительной части некоторое применение правила индукции. Так как в P проведена только что описанная в 3) подстановка, вывод P в своей заключительной части не содержит свободных переменных первого порядка, кроме тех, которые используются в качестве собственных. Пусть J — некоторое самое нижнее применение правила индукции в заключительной части вывода P:

$$\begin{array}{c} Q(a) \\ \vdots\,\mu \\ J\quad \dfrac{A(a),\ \Gamma \rightarrow \Delta,\ A(a')}{A(0),\ \Gamma \rightarrow \Delta,\ A(t)} \\ \vdots \\ \rightarrow, \end{array}$$

где t не содержит свободных переменных и $Q(a)$ — вывод верхней секвенции применения J. Из вывода P мы получим некоторый новый вывод P', заменив в нем J следующим образом.

Случай 1. $t = 0$. Заменим ту часть вывода P, которая расположена над секвенцией $A(0),\ \Gamma \rightarrow \Delta,\ A(t)$ (включая и ее), на

$$\cfrac{\cfrac{A(0) \rightarrow A(0)}{\text{несколько ослаблений и перестановок}}}{\cfrac{A(0),\ \Gamma \rightarrow \Delta,\ A(0)}{A(0),\ \Gamma \rightarrow \Delta,\ A(t).}}$$

Поскольку секвенции $A(0),\ \Gamma \rightarrow \Delta,\ A(t)$ ставится в соответствие ординальная диаграмма 0, очевидно, что $O(P') <_0 O(P)$.

Случай 2. $t \neq 0$. Тогда $t = n$ для некоторого нумерала n. Рассмотрим следующий вывод P':

$$
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{\underset{\mu}{\overset{Q(0)}{\vdots}}}{A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(0')}
\qquad
\cfrac{\underset{\mu}{\overset{Q(0')}{\vdots}}}{A(0'),\ \Gamma \to \Delta,\ A(0'')}
}{A(0),\ \Gamma,\ \Gamma \to \Delta,\ \Delta,\ A(0'')}
}{\text{несколько перестановок и сокращений}}
}{A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(0'')}
\qquad
\cfrac{\underset{\mu}{\overset{Q(0'')}{\vdots}}}{A(0''),\ \Gamma \to \Delta,\ A(0''')}
}{A(0),\ \Gamma,\ \Gamma \to \Delta,\ \Delta,\ A(0''')}
}{\cfrac{\text{несколько перестановок и сокращений}}{A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(0''')}}
$$

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\cfrac{\cfrac{A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(n)}{A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t)}}{} \\
\vdots \\
\to .
\end{array}
$$

Каждой подстановке в P' сопоставим тот же уровень, что и соответствующей подстановке в P. Легко видеть, что P' является выводом с уровнями и оканчивается секвенцией $\to$.

Тот факт, что $O(P') <_0 O(P)$, доказывается следующим образом. Сначала сравним

$$\mu_0 = O(A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t);\ P) = (\omega,\ r(A(a);\ P) + 2,\ \mu)$$

и

$$\mu_1 = O(A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(0'');\ P') = (\omega,\ r(A(0');\ P) + 1,\ \mu \# \mu).$$

Так как $r(A(0);\ P) = r(A(0);\ P')$, то $\underline{\mu_1 <_\infty \mu_0}$. Единственным ω-фрагментом диаграммы μ_1 является $\mu \# \mu$. Так как $\bar{\mu}$ является ω-фрагментом диаграммы μ_0, то $\mu \# \mu <_\omega \mu_0$. Таким образом, $\mu_1 <_\omega \mu_0$. Над применением правила индукции нет подстановок, поэтому имеем

$$O(A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t);\ P') <_j O(A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t);\ P)$$

для всякого j, где $j = \infty$ или $j \leqslant \omega$. Пусть $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_m\}$ и $\{\delta_0, \ldots, \delta_m\}$ — последовательности ординальных диаграмм, такие, что

i) $\gamma_m = O(A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t);\ P)$;

ii) $\delta_m = O(A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t);\ P')$;

iii) $\gamma_{m-1}, \ldots, \gamma_0$ суть ординальные диаграммы секвенций из P, расположенных ниже $A(0),\ \Gamma \to \Delta,\ A(t)$ в таком порядке,

и

iv) $\delta_{m-1}, \ldots, \delta_0$ суть ординальные диаграммы соответствующих секвенций в P'.

Тогда эти последовательности ординальных диаграмм удовлетворяют условиям леммы 27.1. Таким образом, согласно этой основной лемме, положив p равным 0, мы получаем $\delta_0 <_0 \gamma_0$ или $O(P') <_0 O(P)$.

(3) Вследствие редукции, описанной в (2), мы можем теперь считать, что вывод не содержит в своей заключительной части применений правила индукции и, следовательно, не содержит свободных переменных. Допустим, что в заключительную часть вывода P входит некоторая начальная секвенция вида $s = t$, $A(s) \to A(t)$. Выберем какую-нибудь такую секвенцию. Тогда найдутся нумералы m и n, равные соответственно s и t. Либо секвенция $m = n \to$, либо секвенция $\to m = n$ является математической начальной секвенцией.

Случай 1. Секвенция $m = n \to$ является аксиомой. Тогда заменим выбранную нами начальную секвенцию на

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{m = n \to}{\text{ослабления и перестановка}}}{m = n,\ A(m) \to A(n)}}{\text{замещения термов}}}{s = t,\ A(s) \to A(t).}
$$

Это преобразование не изменяет ординальной диаграммы.

Случай 2. Секвенция $m = n \to$ не является аксиомой. Тогда заменим выбранную нами начальную секвенцию на

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(m) \to A(n)}{\text{замещения термов}}}{A(s) \to A(t)}}{s = t,\ A(s) \to A(t).}
$$

(4) Согласно (3), мы можем предполагать, что в заключительной части вывода P нет применений правила индукции, а также аксиом равенства. Допустим, что заключительная часть вывода P содержит логические начальные секвенции. Допустим далее, что начальная секвенция $D \to D$ расположена в заключительной части вывода P, который имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{c}
\cfrac{\underset{\mu}{\vdots} \atop \Gamma \to \Delta,\ \tilde{D} \qquad \overset{D \to D}{\vdots} \atop \tilde{D},\ \Pi \to \Lambda_1, \tilde{D}, \Lambda_2}{\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda_1,\ \tilde{D},\ \Lambda_2} \\
\vdots \\
\to ,
\end{array}
$$

где две формулы $\tilde{D}$ в правой верхней секвенции сечения обозначают потомков формул D, входящих в явно выписанную начальную секвенцию.

Рассмотрим вывод P' следующего вида:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mu \\ \Gamma \to \Delta,\ \tilde{D} \\ \hline \text{несколько ослаблений и перестановок} \\ \hline \Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda_1,\ \tilde{D},\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \to, \end{array}$$

где каждой подстановке в P' сопоставляется тот же уровень, что и соответствующей подстановке в P. Тогда

$$O(\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda_1,\ \tilde{D},\ \Lambda_2;\ P) = (\omega,\ r(\tilde{D})+1,\ \mu \# \nu).$$

С другой стороны,

$$O(\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda_1,\ \tilde{D},\ \Lambda_2;\ P') = \mu <_j (\omega,\ r(\tilde{D})+1,\ \mu \# \nu)$$

для всех $j \leqslant \omega$, и если $j < \omega$, то каждый j-фрагмент $\bar{\beta}$ диаграммы μ является также j-фрагментом диаграммы $(\omega,\ r(\tilde{D})+1,\ \mu \# \nu)$. Таким образом, согласно лемме 27.1, имеем $O(P') <_0 O(P)$.

Если вывод P имеет вид

$$\begin{array}{cc} D \to D & \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_1,\ \tilde{D},\ \Gamma_2 \to \Delta,\ \tilde{D} & \tilde{D},\ \Pi \to \Lambda \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\Gamma_1,\ \tilde{D},\ \Gamma_2,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{\to,} \end{array}$$

то редукция проводится аналогично.

(5) В дополнение к условию, указанному в (3), мы можем считать, что заключительная часть вывода P не содержит логических начальных секвенций. Пусть Q — некоторый вывод с уровнями, который не обязательно оканчивается секвенцией $\to$, но который удовлетворяет тем же условиям, что и P. Вывод Q^*, получающийся из Q устранением ослаблений в его заключительной части, мы можем определить индукцией по числу непосредственных выводов в заключительной части вывода Q так же, как и для системы **PA**. Мы рассмотрим только случай, когда последним в Q применяется правило подстановки, скажем

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma\binom{\alpha}{V} \to \Delta\binom{\alpha}{V}},$$

где Γ и Δ означают последовательности $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$ соответственно, $\Gamma\binom{\alpha}{V}$ и $\Delta\binom{\alpha}{V}$ означают $A_1\binom{\alpha}{V}, \ldots, A_m\binom{\alpha}{V}$ и $B_1\binom{\alpha}{V}, \ldots, B_n\binom{\alpha}{V}$ соответственно, и фигура Q_0^*, где Q_0 — вывод верхней секвенции, оканчивается секвенцией $\Gamma^* \to \Delta^*$. Тогда Q^* имеет вид

$$\begin{array}{c} Q_0^* \\ \vdots \\ \Gamma^* \to \Delta^* \\ \hline\hline \Gamma^*\binom{\alpha}{V} \to \Delta^*\binom{\alpha}{V}. \end{array}$$

Если заключительная часть вывода P содержит ослабления, мы можем редуцировать вывод P к выводу P^*, причем каждая подстановка в P^* имеет тот же уровень, что и соответствующая подстановка в P.

(6) В дальнейшем мы будем считать, что заключительная часть вывода с уровнями не содержит применений логических правил или правила индукции, ослаблений и аксиом, отличных от математических. Более того, мы можем предполагать, что вывод не совпадает со своей заключительной частью, поскольку, если он совпадает со своей заключительной частью, то мы можем из него устранить сечения, как упоминалось в начале этапа (1).

Пусть P — некоторый вывод с уровнями. Напомним определение подходящего сечения: сечение (точнее, применение правила сечения) в заключительной части вывода P с уровнями называется подходящим, если обе его высекаемые формулы имеют предков, являющихся главными формулами граничных применений некоторых правил (на самом деле логических). В точности таким же образом, как и для системы **PA**, мы можем показать, что при этих условиях в заключительной части вывода P имеется подходящее сечение.

Пусть теперь P — некоторый вывод с уровнями, оканчивающийся секвенцией $\to$, и пусть J — некоторое подходящее сечение в P. Чтобы определить понятие существенной редукции, нам нужно в отдельности рассмотреть несколько случаев (в зависимости от вида внешнего логического символа высекаемой формулы сечения J).

(7) Сначала мы рассмотрим случай, когда внешним логическим символом высекаемой формулы в J является квантор $\forall$ второго порядка. Пусть вывод P имеет следующий вид:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\overset{\lambda}{\vdots}\\
J_0\ \dfrac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ F_1(\alpha)}{S_1\quad \Gamma_1 \xrightarrow{(\omega,\,0,\,\lambda)} \Delta_1,\ \forall\phi F_1(\phi)}\\
\overset{\tau}{\vdots}\\
S_2\quad \Gamma \to \Delta_2,\ \forall\phi F(\phi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overset{\mu}{\vdots}\\
\dfrac{F_2(V),\ \Pi_1 \to \Lambda_1}{S_3\quad \forall\phi F_2(\phi),\ \Pi_1 \xrightarrow{(\omega,\,n+2,\,\mu)} \Lambda_1}\\
\overset{\rho}{\vdots}\\
S_4\quad \forall\phi F(\phi),\ \Pi_2 \to \Lambda_2
\end{array}
}{S_5\quad \Gamma_2,\ \Pi_2 \xrightarrow{(\omega,\,m+1,\,\tau\,\#\,\rho)} \Delta_2,\ \Lambda_2}\ J
$$

$$
\begin{array}{c}
\overset{\nu}{\vdots}\\
S_6\quad \Gamma_3 \to \Delta_3\\
\overset{\sigma}{\vdots}\\
\to\ ,
\end{array}
$$

где $m = r(\forall\phi F(\phi))$, $n = r(F_2(V))$ и секвенция S_6: $\Gamma_3 \to \Delta_3$ является i-резольвентой секвенции S_5: $\Gamma_2, \Pi_2 \to \Delta_2, \Lambda_2$, причем $i = d(\forall\phi F_1(\phi))$. Здесь нам следует отметить, что i-резольвента $\Gamma_3 \to \Delta_3$ будет использоваться только в случае, когда формула $\forall\phi F(\phi)$ изолирована.

Случай 1. Формула $\forall\phi F(\phi)$ изолирована.

Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 обозначают следующие секвенции (в приведенной выше фигуре):

$$S_1:\ \Gamma_1 \to \Delta_1,\ \forall\phi F_1(\phi), \qquad S_2:\ \Gamma_2 \to \Delta_2,\ \forall\phi F(\phi),$$

$$S_3:\ \forall\phi F_2(\phi),\ \Pi_1 \to \Lambda_1, \qquad S_4:\ \forall\phi F(\phi),\ \Pi_2 \to \Lambda_2.$$

Следует отметить, что формулы $\forall\phi F_1(\phi)$ и $\forall\phi F_2(\phi)$ совпадают с самой формулой $\forall\phi F(\phi)$ с точностью до замещений термов, т. е. к этим двум формулам не применяются никакие подстановки, поскольку, если бы существовала некоторая подстановка уровня k, применявшаяся к $\forall\phi F_1(\phi)$ между S_1 и S_2, то эта подстановка нарушила бы формулу $\forall\phi F_1(\phi)$. Но тогда отсюда вытекало бы, что $k < i$, в противоречии с п. 2.8) определения 27.12. Таким образом, формула $\forall\phi F_1(\phi)$ совпадает с $\forall\phi F(\phi)$ с точностью до замещений термов. По той же причине $\forall\phi F_2(\phi)$ совпадает с $\forall\phi F(\phi)$ с точностью до замещений

термов. В J_0 имеем $d(F_1(\phi)) < i\ (= d(\forall\phi F_1(\phi)))$. Пусть P' — следующая фигура:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\overset{\lambda'}{\vdots}\\
\dfrac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ F_1(\alpha)}{S_1'\quad \Gamma_1 \to F_1(\alpha),\ \Delta_1,\ \forall\phi F_1(\phi)}\\
\overset{\tau'}{\vdots}\\
S_2'\quad \Gamma_2 \to F(\alpha),\ \Delta_2,\ \forall\phi F(\phi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overset{\mu}{\vdots}\\
\dfrac{F_2(V),\ \Pi_1 \to \Lambda_1}{S_3\quad \forall\phi F_2(\phi),\ \Pi_1 \to \Lambda_1}\\
\overset{\rho}{\vdots}\\
S_4\quad \forall\phi F(\phi),\ \Pi_2 \to \Lambda_2
\end{array}
}{S_5'\quad \Gamma_2,\ \Pi_2 \xrightarrow{(\omega,\,m+1,\,\tau'\,\#\,\rho)} F(\alpha),\ \Delta_2,\ \Lambda_2}
$$

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\overset{\theta}{\vdots}\\
S_6'\ J_1\ \dfrac{\Gamma_3 \to \Delta_3,\ F(\alpha)}{S_7\quad \Gamma_3 \xrightarrow{(i,\,0,\,\theta)} \Delta_3,\ F(V)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overset{\mu}{\vdots}\\
S_3'\quad F(V),\ \Pi_1 \to \Lambda_1
\end{array}
}{
\dfrac{\Gamma_3,\ \Pi_1 \xrightarrow{(\omega,\,n+1,\,(i,\,0,\,\theta)\,\#\,\mu)} \Delta_3,\ \Lambda_1}{S_8\quad \forall\phi F(\phi),\ \Pi_1,\ \Gamma_3 \to \Delta_3,\ \Lambda_1}
}
$$

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\overset{\tau}{\vdots}\\
S_2\quad \Gamma_2 \to \Delta_2,\ \forall\phi F(\phi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overset{\rho'}{\vdots}\\
S_9\quad \forall\phi F(\phi),\ \Pi_2,\ \Gamma_3 \to \Delta_3,\ \Lambda_2
\end{array}
}{
\dfrac{\Gamma_2,\ \Pi_2,\ \Gamma_3 \xrightarrow{(\omega,\,m+1,\,\tau\,\#\,\rho')} \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Lambda_2}{S_{10}\quad \Gamma_2,\ \Pi_2,\ \Gamma_3 \to \Delta_3,\ \Delta_2,\ \Lambda_2}
}
$$

$$
\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\Gamma_3,\ \Gamma_3 \to \Delta_3,\ \Delta_3}{S_{11}\quad \Gamma_3 \to \Delta_3}\,\nu'\\
\overset{\sigma'}{\vdots}\\
\to\ ,
\end{array}
$$

где J_1 — подстановка с собственной переменной α и уровень этой подстановки равен i. Каждой подстановке в этом выводе, отличной от J_1, сопоставим такой же уровень, что и соответствующей подстановке в P. Здесь нам следует отметить, что в верхней секвенции подстановки J_1 потомком формулы $F_1(\alpha)$ из секвенции $\Gamma_1 \to \Delta_1, F_1(\alpha)$ является $F(\alpha)$. Как было замечено, ни одна подстановка не нарушает формулу $F(\alpha)$ между секвенциями $\Gamma_1 \to \Delta_1, F(\alpha)$ и $\Gamma_2, \Pi_2 \to \Delta_2, \Lambda_2$ в выводе P. Если бы между секвенциями $\Gamma_2, \Pi_2 \to \Delta_2, \Lambda_2$ и $\Gamma_3 \to \Delta_3$ имелась бы такая подстановка уровня k, то она бы нарушила формулу $\forall\phi F(\phi)$, т. е. было бы $k < i$. Но это противоречит тому факту, что секвенция $\Gamma_3 \to \Delta_3$ является i-резольвентой секвенции $\Gamma_2, \Pi_2 \to \Delta_2, \Lambda_2$.

Мы покажем, что фигура P' является выводом с уровнями. Для этого достаточно показать, что $d(F_1(\alpha);\ P') < i$. Если формула $F_1(\alpha)$ нарушается (в P') каким-нибудь применением правила, отличным от J_1, то соответствующее применение правила в P нарушает формулу $F_1(\alpha)$. Подстановка J_1 не нарушает формулу $F(\alpha)$, так как в противном случае внешний квантор $\forall$ в формуле $\forall\phi F_1(\phi)$ действовал бы на какой-то другой квантор $\forall$ второго порядка в формуле $\forall\phi F_1(\phi)$. Но это противоречит тому, что формула $\forall\phi F_1(\phi)$ изолирована. Поэтому $d(F_1(\alpha);\ P') = d(F_1(\alpha);\ P) < i$.

Чтобы доказать, что $O(P') <_0 O(P)$, или $\sigma' <_0 \sigma$, мы сначала покажем, что $\nu' <_j \nu$ при $j \leqslant \omega$ и что для любого j при $0 \leqslant j < i$ и любого j-фрагмента $\bar{\eta}$ диаграммы ν' найдется j-фрагмент $\bar{\xi}$ диаграммы ν, такой, что $\eta \leqslant_j \xi$. Это доказывается ниже (см. (7.5)).

(7.1) Для любого $j \leqslant \omega$ имеет место $\tau' <_j \tau$, где $\tau = O(S_2;\ P)$ и $\tau' = O(S_2;\ P')$. Если $j < \omega$ и $\bar{\alpha}$ — произвольный j-фрагмент диаграммы τ, то существует j-фрагмент $\bar{\beta}$ диаграммы τ, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$.

Доказательство. Так как выше S_1 нет подстановок, то, согласно основной лемме при $p = 0$, достаточно показать, что $\lambda' <_j (\omega, 0, \lambda)$ для всех $j \leqslant \omega$.

1) Пусть $j = \omega$. Тогда $\lambda' \leqslant_\omega \lambda$ по определению P'. Очевидно, что $\lambda <_\omega (\omega, 0, \lambda)$. Следовательно, $\lambda' <_\omega (\omega, 0, \lambda)$.

2) Пусть $j < \omega$. Так как в λ' нет j-фрагментов, то $\lambda' <_j (\omega, 0, \lambda)$, если $\lambda' <_\omega (\omega, 0, \lambda)$. Но, согласно 1), $\lambda' <_\omega (\omega, 0, \lambda)$.

(7.2) Для каждого $j \leqslant \omega$ имеет место $\theta <_j \nu$. Если $j < \omega$, то для каждого j-фрагмента $\bar{\alpha}$ диаграммы θ найдется j-фрагмент $\bar{\beta}$ диаграммы ν, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$.

Доказательство. Согласно основной лемме при $p = 0$, достаточно доказать следующее:

1) $(\omega, m+1, \tau' \# \rho) <_j (\omega, m+1, \tau \# \rho)$ для всех $j \leqslant \omega$ и

2) для каждого $j < \omega$ и для каждого j-фрагмента $\bar{\alpha}$ диаграммы τ' существует j-фрагмент $\bar{\beta}$ диаграммы τ, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$.

Но 2) представляет собой часть утверждения (7.1). Следовательно, нам нужно доказать только 1). Мы это сделаем индукцией по общему числу индексов, больших, чем j (верхних индексов для j), в диаграммах $(\omega, m+1, \tau' \# \rho)$ и $(\omega, m+1, \tau \# \rho)$.

i) Поскольку $\tau' <_\omega \tau$, из (7.1) следует, что

$$(\omega, m+1, \tau' \# \rho) <_\infty (\omega, m+1, \tau \# \rho).$$

ii) Если $j = \omega$, то в силу (7.1) $\tau \# \rho <_\omega \tau \# \beta$. Поскольку $\tau \# \rho <_\omega (\omega, m+1, \tau \# \rho)$, утверждение 1) следует из i).

iii) Если $j < \omega$, то, по предположению индукции и согласно i), имеем

$$(\omega, m+1, \tau' \# \rho) <_{j_1} (\omega, m+1, \tau \# \rho),$$

где $j_1 = j_0(j, (\omega, m+1, \tau' \# \rho), (\omega, m+1, \tau \# \rho))$. Пусть $\bar{\alpha}$ — некоторый j-фрагмент диаграммы $(\omega, m+1, \tau \# \rho)$. Тогда $\bar{\alpha}$ является также j-фрагментом диаграммы $\tau' \# \rho$. Если $\bar{\alpha}$ — некоторый j-фрагмент диаграммы τ', то, согласно (7.1), $\alpha <_j (\omega, m+1, \tau \# \rho)$. Если же α является j-фрагментом диаграммы ρ, то $\bar{\alpha}$ является и j-фрагментом диаграммы $(\omega, m+1, \tau \# \rho)$, и потому $\alpha <_j (\omega, m+1, \tau \# \rho)$. Таким образом,

$$(\omega, m+1, \tau' \# \rho) <_j (\omega, m+1, \tau \# \rho).$$

(7.3) $O(S_8;\ P') <_j O(S_3;\ P)$ при $i < j \leqslant \omega$ или $j = \infty$.

Доказательство проводится индукцией по $\iota(j, O(S_3), O(S_8))$. Имеем $O(S_3) = (\omega, n+2, \mu)$ и $O(S_8) = (\omega, n+1, (i, 0, \nu) \# \mu)$.

1) Так как $n+1 < n+2$, то $O(S_8) <_\infty O(S_3)$.

2) Если $j = \omega$, то, поскольку $\mu <_\infty O(S_3)$ и $O(S_8) <_\infty O(S_3)$, достаточно доказать, что $(i, 0, \theta) <_\infty O(S_3)$. Но, очевидно, это имеет место, так как в $(i, 0, \theta)$ нет ω-фрагментов и $(i, 0, \theta) <_\infty$ $<_\infty O(S_3)$.

3) Если $i < j < \omega$, то $O(S_8) <_j O(S_3)$, потому что ни в $(i, 0, \theta)$, ни в μ нет j-фрагментов, и, согласно 2), имеем $O(S_8) <_\omega O(S_3)$.

(7.4) Если $i < j \leqslant \omega$, то $\rho' <_i \rho$. Если $i < j < \omega$, то для каждого j-фрагмента $\bar{\alpha}$ диаграммы ρ' существует j-фрагмент $\bar{\beta}$ диаграммы ρ, такой, что $\alpha \leqslant_j \beta$.

Доказательство. Положим в основной лемме величины p, γ и δ равными соответственно $i+1$, $O(S_4)$ $(=\rho)$ и $O(S_9)$ $(=\rho')$. Пусть γ_0 $(=O(S_4))$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ $(=O(S_3))$ — последовательность различных ординальных диаграмм секвенций от S_4 до S_3 в P, а δ_0 $(=O(S_9))$, $\delta_1, \ldots, \delta_m$ $(=O(S_8))$ — последовательность различных ординальных диаграмм секвенций от S_9 до S_8 в P'. Тогда доказываемое утверждение вытекает из основной леммы и из (7.3). Здесь следует вспомнить, что в $O(S_8)$ нет j-фрагментов при $i < j < \omega$.

(7.5) $\nu' <_j \nu$ при $j \leqslant \omega$.

Доказательство. Сначала мы покажем, что $\nu' <_j \nu$ при любом j, $i<j\leqslant\omega$. Пусть p — произвольное натуральное число, $i<p\leqslant\omega$, и пусть $p\leqslant j\leqslant\omega$. Возьмем в качестве γ, δ и p в основной лемме $O(S_6)$ $(=\nu)$, $O(S_4)$ $(=\nu')$ и 0 соответственно. Пусть $\gamma_0(=O(S_6)), \ldots, \gamma_m(=O(S_5))$ — последовательность различных ординальных диаграмм секвенций, расположенных от S_6 до S_5 в P, и пусть

$$\delta_0(=O(S_{11})),\ \ldots,\ \delta_m(=O(S_{10}))$$

— последовательность различных ординальных диаграмм секвенций, расположенных от S_{11} до S_{10} в P'. Тогда нам надо только доказать, что для $O(S_5)$ и $O(S_{10})$ выполнены условия главной леммы. Мы докажем это индукцией по $\iota(j, O(S_5), O(S_{10}))$, где $O(S_5)=(\omega, m+1, \tau\#\rho)$ и $O(S_{10})=(\omega, m+1, \tau\#\rho')$.

1) Согласно (7.4), $\rho'<_\omega\rho$. Следовательно, $O(S_{10})<_\infty O(S_5)$. В следующих ниже пп. 2) и 3) мы предполагаем, что $O(S_{10})<_j O(S_5)$, где $j_1=j_0(j, O(S_5), O(S_{10}))$.

2) Если $j=\omega$, то $O(S_{10})<_\omega O(S_5)$ при условии, что $\tau\#\rho'<_\omega <_\omega O(S_5)$ и $O(S_{10})<_\infty O(S_5)$. Но это следует из (7.4) и 1).

3) Если $p\leqslant j<\omega$, то $O(S_{10})<_j O(S_5)$ при условии, что для каждого j-фрагмента $\bar\alpha$ диаграммы $O(S_{10})$ выполняется $\alpha < <_j O(S_5)$. Пусть $\bar\alpha$ — некоторый j-фрагмент диаграммы $O(S_{10})$, т. е. $\tau\#\rho'$. Если $\bar\alpha$ является j-фрагментом диаграммы τ, то $\bar\alpha$ является и j-фрагментом диаграммы $O(S_5)$. Следовательно, $\alpha<_j O(S_5)$. Если же $\bar\alpha$ является j-фрагментом диаграммы ρ', то $\alpha<_j O(S_5)$ в силу (7.4).

Установив, что $\nu'<_j\nu$ при $i<j\leqslant\omega$, рассмотрим теперь какой-нибудь i-фрагмент диаграммы ν'. Если этот фрагмент не совпадает с $\bar\theta$, то он является и i-фрагментом диаграммы ν. Если же он совпадает с $\bar\theta$, то неравенство $\theta<_i\nu$ уже установлено в (7.2). При $j<i$ пусть $\bar\alpha$ — некоторый j-фрагмент диаграммы ν'. Легко можно показать, что существует некоторое вхождение α в диаграмму ν, являющееся j-фрагментом этой диаграммы. Поэтому $\alpha<_j\nu$. Таким образом, $\nu'<_j\nu$ для любого $j\leqslant i$. Тем самым полностью доказано, что $\nu'<_j\nu$ для всех $j\leqslant\omega$.

Далее вспомним, что секвенция $\Gamma_3\to\Delta_3$ либо является заключительной секвенцией, либо является верхней секвенцией некоторой подстановки уровня $k_0<i$. Если имеет место первый случай, то $\nu'<_0\nu$ означает, что $\alpha'<_0\sigma$. Допустим, что имеет место второй случай. Тогда $\alpha'<_0\sigma$ следует из (7.5) согласно основной лемме; заметим, что при этом k_0, как указано выше, невозможно, чтобы $\bar\theta$ было i-фрагментом какой-нибудь диаграммы, заключенной между ν' и α'.

Случай 2. Формула $\forall\phi F(\phi)$ не является изолированной. Пусть P'' — вывод следующего вида:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1\to\Delta_1,\ F_1(V)\end{matrix}}{\text{несколько перестановок и ослабление}}}{\Gamma_1\to F_1(V),\ \Delta_1,\ \forall\phi F_1(\phi)}\\ \vdots\\ \Gamma_2\to F(V),\ \Delta_2,\ \forall\phi F(\phi)\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \forall\phi F(\phi),\ \Pi_2\to\Lambda_2\end{matrix}}{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2,\ \Pi_2\to F(V),\ \Delta_2,\ \Lambda_2}{\text{несколько перестановок}}}{\Gamma_2,\ \Pi_2\to\Delta_2,\ \Lambda_2,\ F(V)}}
\quad
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_2\to\Delta_2,\ \forall\phi F(\phi)\end{matrix}\quad\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ F_2(V),\ \Pi_1\to\Lambda_1\end{matrix}}{\text{несколько перестановок и ослабление}}}{\forall\phi F_2(\phi),\ \Pi_1,\ F_2(V)\to\Lambda_1}\\ \vdots\\ \forall\phi F(\phi),\ \Pi_2,\ F(V)\to\Lambda_2\end{matrix}}{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2,\ \Pi_2,\ F(V)\to\Delta_2,\ \Lambda_2}{\text{несколько перестановок}}}{F(V),\ \Gamma_2,\ \Pi_2\to\Delta_2,\ \Lambda_2}}
}{\Gamma_2,\ \Pi_2,\ \Gamma_2,\ \Pi_2\to\Delta_2,\ \Lambda_2,\ \Delta_2,\ \Lambda_2}}{\text{несколько перестановок и сокращений}}}{\begin{matrix}\Gamma_2,\ \Pi_2\to\Delta_2,\ \Lambda_2\\ \vdots\ \sigma''\\ \to,\end{matrix}}
$$

где каждой подстановке сопоставляется тот же уровень, что и соответствующей подстановке в P, и вывод секвенции $\Gamma_1\to\Delta_1$, $F_1(V)$ в P'' получается из вывода секвенции $\Gamma_1\to\Delta_1(\alpha)$ в P подстановкой всюду V вместо α. Поскольку абстракт V изолированный, имеем, согласно предложению 27.7, $\gamma(G(V))= =\gamma(G(\alpha))$. Поэтому ординальная диаграмма секвенции $\Gamma_1\to\Delta_1$, $F_1(V)$ не больше, чем λ, в смысле порядка $<_j$ для каждого j.

Ясно, что фигура P'' является выводом с уровнями. Поскольку $r(F(V))<r(\forall\phi F(\phi))$, легко видеть, что $\sigma''<_0\sigma$.

(8) Теперь мы рассмотрим случай, когда внешним логическим символом высекаемой формулы в J является $\wedge$. Пусть вывод P имеет следующий вид:

$$
\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1\to\Delta_1,\ A_1\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_2\to\Delta_2,\ B_1\end{matrix}}{\Gamma_1,\ \Gamma_2\to\Delta_1,\ \Delta_2,\ A_1\wedge B_1}\\ \vdots\\ \Gamma_3\to\Delta_3,\ A\wedge B\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A_2,\ \Pi_1\to\Lambda_1\end{matrix}}{A_2\wedge B_2,\ \Pi_1\to\Lambda_1}\\ \vdots\\ A\wedge B,\ \Pi_2\to\Lambda_2\end{matrix}}{\begin{matrix}\Gamma_3,\ \Pi_3\to\Delta_3,\ \Lambda_2\\ \vdots\\ \to.\end{matrix}}
$$

Ясно, что этот вывод можно редуцировать к выводу P' следующего вида:

$$
\dfrac{\vdots \atop \Gamma_1 \to \Delta_1, A_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to A_1, \Delta_1, \Delta_2, A_1 \wedge B_1}\ \text{несколько перестановок и ослабление}
\qquad
\dfrac{\vdots \atop A_2, \Pi_1 \to \Lambda_1}{A_2 \wedge B_2, \Pi_1, A_2 \to \Lambda_1}\ \text{несколько перестановок и ослабление}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\vdots \atop \Gamma_3 \to A, \Delta_3, A \wedge B \qquad \vdots \atop A \wedge B\ \Pi_2 \to \Lambda_2}{\Gamma_3, \Pi_2 \to A, \Delta_3, \Lambda_2}}{\Gamma_3, \Pi_2 \to \Delta_3, \Lambda_2, A}\ \text{несколько перестановок}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\vdots \atop \Gamma_3 \to \Delta_3, A \wedge B \qquad \vdots \atop A \wedge B, \Pi_2, A \to \Lambda_2}{\Gamma_3, \Pi_2, A \to \Delta_3, \Lambda_2}}{A, \Gamma_3, \Pi_2 \to \Delta_3, \Lambda_2}\ \text{несколько перестановок}
}{\Gamma_3, \Pi_2, \Gamma_3, \Pi_2 \to \Delta_3, \Lambda_2, \Delta_3, \Lambda_2}
}{\Gamma_3, \Pi_2 \to \Delta_3, \Lambda_2}\ \text{несколько перестановок и сокращений}
$$

$$\vdots$$

$$\to.$$

Каждой подстановке в P' сопоставляется тот же уровень, что и соответствующей подстановке в P. Таким образом, P' — это вывод с уровнями, ординальная диаграмма которого меньше, чем у вывода P.

(9) Оставшиеся случаи, т. е. случай, когда внешним логическим символом высекаемой формулы в J является $\neg$, и случай, когда внешним логическим символом высекаемой формулы является квантор $\forall$ первого порядка, рассматриваются так же, как и предыдущие случаи.

Тем самым теорема 27.5 доказана.

§ 28. Доказательство непротиворечивости системы с индуктивными определениями

В этом параграфе мы докажем непротиворечивость системы, полученной из системы **INN** добавлением к ней индуктивных определений по Π_1^1-формулам. Эту систему мы назовем *системой с изолированными индуктивными определениями* и обозначим через **IID**.

Определение 28.1. Система **IID** получается из системы **INN** следующей модификацией:

1) Язык системы **IID** содержит одноместный примитивно рекурсивный предикат I и двухместный примитивно рекурсивный предикат $<^*$, причем $<^*$ вполне упорядочивает множество $\{a \mid I(a)\}$.

2) Язык системы **IID** содержит трехместные предикатные символы $A_0, A_1, \ldots$, причем, если s и t — термы, а V — абстракт, то $A_n(s, t, V)$ при $n = 0, 1, \ldots$ — атомарная формула.

3) Если $\forall \phi B$ — некоторая полуформула системы **IID**, то мы говорим, что внешний квантор $\forall$ *действует* на A_n в B, если ϕ содержится в аргументе предиката A_n, т. е. если A_n входит в B в виде $A_n(a, b, V)$ и ϕ входит в V.

4) Полуформулу (или абстракт) A системы **IID** назовем *изолированной*, если ни один квантор $\forall$ второго порядка не действует в A ни на какой другой квантор $\forall$ второго порядка и ни на один из символов $A_0, A_1, \ldots$.

5) Начальными секвенциями системы **IID** являются те же секвенции, что и для **INN** (с учетом формул, содержащих символы A_n), а также секвенции следующего вида:

$$I(s),\ A_n(s, t, V) \to G_n(s, t, V, \{x, y\}(A_n(x, y, V) \wedge x <^* s)),$$

$$I(s),\ G_n(s, t, V, \{x, y\}(A_n(x, y, V) \wedge x <^* s)) \to A_n(s, t, V)$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Каждое $G_n(a, b, \alpha, \beta)$ здесь — произвольная изолированная формула, не содержащая ни одного из символов $A_n, A_{n+1}, \ldots$, а V — произвольный абстракт, который может содержать квантор $\forall$ второго порядка и символы $A_n, A_{n+1}, \ldots$.

6) Правила вывода для системы **IID** те же, что и для **INN**.

Цель настоящего параграфа — доказать непротиворечивость системы **IID**.

Теорема 28.2. *Система* **IID** *непротиворечива.*

Доказательство. Эту теорему мы докажем с помощью системы ординальных диаграмм

$$O(\omega^{I_\infty} + 1,\ \omega^{I_\infty} \cdot \omega \cdot \omega^{I_\omega}),$$

где $I_\infty = (2 \cdot |I| + 1)$, а $|I|$ обозначает порядковый тип множества I относительно $<^*$. Эта теорема доказывается так же, как и теорема 27.5, и поэтому мы приведем только новые аспекты доказательства.

Предложение 28.3. *Пусть $F(\alpha)$ и V — соответственно некоторая изолированная формула и некоторый изолированный абстракт. Тогда $F(V)$ — изолированная формула.*

Доказательство проводится индукцией по числу n логических символов, содержащихся в формуле $F(\alpha)$. Если $n = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $n > 0$. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от вида внешнего логического символа в $F(\alpha)$. Мы разберем только случай, когда $F(\alpha)$ имеет вид $\forall \phi G(\alpha, \phi)$ (остальные случаи разбираются аналогично). По предположению индукции формула $G(V, \beta)$, где β — свободная переменная второго порядка, не входящая в V, является изолированной. Нам надо лишь показать, что внешний квантор $\forall$ в формуле $\forall \phi G(V, \phi)$ не действует ни на один квантор $\forall$ второго порядка и на формулы $A_0, A_1, \ldots$. Но это очевидно, поскольку формулы $\forall\phi G(\alpha, \phi)$ и $G(V, \beta)$ являются изолированными.

Определим теперь несколько вполне упорядоченных систем.

Определение 28.4. (1) Пусть $|I|$ — ординал вполне-упорядочения $<^*$. Далее, пусть $\tilde{I} = \{\tilde{i} \mid i \in I\}$, и пусть $I_* = I \cup \tilde{I}$. Тогда множество I_* вполне упорядочено отношением $<_*$, которое определяется следующим образом:

(1.1) если $i \in I$, то $i <_* \tilde{i}$;
(1.2) если $i <^* j$, то $i <_* j$;
(1.3) если $i <^* j$, то $\tilde{i} <^* \tilde{j}$;
(1.4) если $i <^* j$, то $\tilde{i} <_* j$;
(1.5) если $i <^* j$, то $i <_* \tilde{j}$.

Ординал порядка $<_*$ равняется $2 \cdot |I|$.

(2) Пусть n — натуральное число. Тогда положим $I_n = \{(i, n) \mid i \in I_*\} \cup \{\infty_n\}$, а отношение $<_n$, вполне упорядочивающее множество I_n, определим следующим образом:

(2.1) если $i <_* j$, то $(i, n) <_n (j, n)$;
(2.2) если $i \in I_*$, то $(i, n) <_n \infty_n$.

(3) Пусть $I_\infty = I_0 \cup I_1 \cup \ldots$, а отношение $<_\infty$, вполне упорядочивающее множество I_∞, определим следующим образом:

(3.1) если $i \in I_n$, $j \in I_m$ и $n < m$, то $i <_\infty j$;
(3.2) если $i < j$ в I_n для некоторого n, то $i <_\infty j$.

Порядковый тип отношения $<_\infty$ равен $(2 \cdot |I| + 1) \cdot \omega$.

Определение 28.5. Пусть A — некоторая формула. *Индекс* предикатного символа A_n в формуле A, обозначаемый через $g(A_n : A)$, — это элемент множества I_∞, определяемый следующим образом:

1) Если формула $A_n(s, t, V) \wedge s <^* i$ входит в A, где $I(i)$ выводимо и либо s — некоторая переменная, либо s — некоторый нумерал, для которого выводимо $\neg I(s)$ или $i \leqslant^* s$, то положим $g(A_n : A) = (i, n)$.

2) Если $A_n(j, t, V)$ входит в A, где $I(j)$ выводимо и не имеет места 1), то $g(A_n : A) = (\tilde{j}, n)$.

3) Если A_n входит в A и ни 1), ни 2) не применимо, то $g(A_n : A) = \infty_n$.

Предложение 28.6. *Пусть B и C — две произвольные формулы, в которые входят A_m и A_n соответственно. Тогда $g(A_m : B) <_\infty g(A_n : C)$, если $m < n$.*

Определение 28.7. *Сложность* $\gamma(A)$ формулы или абстракта A — это некоторое ординальное число, меньшее, чем ω^{I_∞}, и определяемое следующим образом (здесь $<$ обозначает порядок на ω^{I_∞}):

1) Если A изолировано, то $\gamma(A) = 0$.

В следующих ниже пп. 2) — 6) предполагается, что A не изолировано.

2) Если A имеет вид $\neg B$, то $\gamma(A) = \gamma(B) = 1$.

3) Если A имеет вид $A_n(s, t, V) \wedge s <^* i$, то $\gamma(A) = \gamma(V) + \omega^{g(A_n : A)+1}$. Если A имеет вид $B \wedge C$, но не имеет только что указанного вида, то $\gamma(A) = \max(\gamma(B), \gamma(C)) + 1$.

4) Если A имеет вид $\forall x G(x)$, то $\gamma(A) = \gamma(G(a)) + 1$.

5) Если A имеет вид $\forall\phi F(\phi)$, то $\gamma(A) = \gamma(F(\alpha)) + 1$.

6) Если A имеет вид $A_n(s, t, V)$, то $\gamma(A) = \gamma(V) + \omega^{g(A_n : A)}$.

7) Если A имеет вид $\{x_1, \ldots, x_n\} B(x_1, \ldots, x_n)$, то $\gamma(A) = \gamma(B(a_1, \ldots, a_n))$.

Предложение 28.8. *Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\} H(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый абстракт, и пусть $s_1, \ldots, s_n$ — произвольные термы. Тогда*

$$\gamma(H(s_1, \ldots, s_n)) \leqslant \gamma(\{x_1, \ldots, x_n\} H(x_1, \ldots, x_n)).$$

Лемма 28.9. *Пусть $G(\beta, \alpha)$ — некоторая изолированная формула (в которую, кроме отмеченных, могут входить и другие свободные переменные второго порядка), не содержащая символов $A_n, A_{n+1}, \ldots$. Далее, пусть s — некоторая константа, для которой выводимо $I(s)$, а V — произвольный абстракт не являющийся изолированным. Тогда имеет место*

$$\gamma\big(G\big(V, A_n^s(V)\big)\big) \leqslant \gamma(V) + \sum_{l=1}^{k} \omega^{g(A_{j_l} : B_l)} + m$$

для некоторых $j_1, \ldots, j_k \leqslant n$, некоторых формул $B_1, \ldots, B_k$ и некоторого натурального числа m, где $g\big(A_{j_l} : B_l\big) < g(A_n : A)$ при $l \leqslant k$ и $A_n^s(V)$ является сокращением для $\{x, y\}(A_n(x, y, V) \wedge x <^* s)$.

Доказательство. Индукция по построению G.

Предложение 28.10. *Пусть s — некоторая константа, для которой выводимо $I(s)$, и V — абстракт, не являющийся изолированным. Если $G_n(a, b, \alpha, \beta)$ — такая же формула, как и в определении 28.1, то*

$$\gamma\big(G_n\big(s, t, V, A_n^s(V)\big)\big) < \gamma(A_n(s, t, V)).$$

Доказательство. Согласно лемме 28.9, имеем

$$\gamma\big(G\big(V, A_n^s(V)\big)\big) \leqslant \gamma(V) + \sum_{l=1}^{k} \omega^{g(A_{j_l} : B_l)} + m,$$

где $g(A_{j_l}:B_l) < g(A_n:A)$ и $m < \omega$. С другой стороны,

$$\gamma(A_n(s,\ t,\ V)) = \gamma(V) + \omega^{g(A_n:A_n)}.$$

Отсюда следует доказываемое предложение.

Добавим теперь к системе **IID** правило подстановки (см. определение 27.10).

Определение 28.11. Будем говорить, что применение J правила подстановки или правила $\forall$-справа *нарушает* некоторую полуформулу A, если собственная переменная применения J содержится в области действия квантора $\forall$ второго порядка или в аргументе предиката A_n, входящего в A.

Вывод с уровнями мы определяем как вывод, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Каждая подстановка расположена в заключительной части, и правило индукции нигде не применяется ниже подстановки.

2) Каждой полуформуле или абстракту A и каждой подстановке J в заключительной части мы можем сопоставить некоторый элемент множества $\omega^{I_\infty}+1$, называемый *уровнем* A или J (обозначение: $d(A)$ или $d(J)$), так, чтобы выполнялись следующие условия:

2.1) Если A — явная формула, то $d(A)=0$.

2.2) Если A — неявная и неизолированная формула, то $d(A)=\omega^{I_\infty}$.

2.3) Пусть A — неявная изолированная формула.

2.3.1) $d(A)=0$, если A не содержит логических символов и символов $A_0,\ A_1,\ \ldots$.

2.3.2) $d(A)=d(B)+1$, если A имеет вид $\neg B$.

2.3.3) $d(A)=\max_J(d(V),\ d(J))+\omega^{g(A_n:A)}+1$, если A имеет вид $A_n(s,\ t,\ V)\land s<^*i$, где J пробегает множество всех подстановок, нарушающих A.

$d(A)=\max(d(B),\ d(C))+1$, если A имеет вид $B\land C$ и не имеет только что указанного вида.

2.3.4) $d(A)=d(B(x))+1$, если A имеет вид $\forall xB(x)$.

2.3.5) $d(A)=\max_J(d(F(\phi)),\ d(J))+1$, если A имеет вид $\forall\phi F(\phi)$, где J пробегает множество всех подстановок, нарушающих $\forall\phi F(\phi)$.

2.3.6) $d(A)=\max_J(d(V),\ d(J))+\omega^{g(A_n:A_n)}$, если A имеет вид $A_n(s,\ t,\ V)$, где J пробегает множество всех подстановок, нарушающих A.

3) $d(A)=d(B)$, если A — абстракт вида $\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}B$.

4) Если J — некоторая подстановка, расположенная в заключительной части, то $d(B)<d(J)$ для каждой формулы B в верхней секвенции подстановки J.

5) Если J — некоторая подстановка, то $0<d(J)<\omega^{I_\infty}$.

Лемма 28.12. *Пусть $G(\beta,\ \alpha)$ — изолированная формула, свободными переменными второго порядка которой являются только β и α, и пусть она не содержит ни одного из символов $A_n,\ A_{n+1},\ \ldots$. Допустим также, что i — некоторая константа, для которой выводимо $I(i)$. Если V — изолированный абстракт, то*

$$d(G(V,\ A_n^i(V)))\leqslant\max_J(d(V),\ d(J))+\sum_{l=1}^{k}\omega^{g(A_{j_l}:B_l)}+m$$

для некоторых $j_1,\ \ldots,\ j_k\leqslant n$, некоторых формул $B_1,\ \ldots,\ B_k$ и некоторого числа $m<\omega$, где $g(A_{j_l}:B_l)<_\infty g(A_n:A_n)$ и J пробегает по всем подстановкам, влияющим на V.

Предложение 28.13. *Допустим, что $A_n(i,\ t,\ V)$ — изолированная формула, т. е. V — изолированный абстракт, и что i — некоторая константа, для которой выводимо $I(i)$. Если секвенция*

$$I(i),\ A_n(i,\ t,\ V)\to G_n(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V))$$

или

$$I(i),\ G_n(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V))\to A_n(i,\ t,\ V)$$

является начальной секвенцией в некотором выводе с уровнями, в котором формула $A_n(i,\ t,\ V)$ является неявной, то

$$d(G_n(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)))<d(A_n(i,\ t,\ V)).$$

Доказательство. Это предложение является частным случаем леммы 28.12.

Определение 28.14. Пусть A — некоторая полуформула или абстракт. *Норма* $n(A)$ полуформулы (абстракта) A — это некоторый элемент множества ω^{I_∞}, определяемый следующим образом:

1) Если A не содержит логических символов и предикатов $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$, то $n(A)=0$.

2) Если A имеет вид $\neg A$, то $n(A)=n(B)+1$.

3) Если A имеет вид $A_n(s,\ t,V)\ \land s<^*i$, то $n(A)=n(V)+\omega^{g(A_n:A)}+1$. Если A имеет вид $B\land C$ и не имеет указанного только что вида, то $n(A)=\max(n(B),\ n(C))+1$.

4) Если A имеет вид $\forall xB(x)$, то $n(A)=n(B(a))+1$.

5) Если A имеет вид $\forall\phi B(\phi)$, то $n(A)=n(F(\alpha))+1$.

6) Если A имеет вид $A_n(s,\ t,\ V)$, то $n(A)=n(V)+\omega^{g(A_n:A)}$.

7) Если A имеет вид $\{x_1,\ \ldots,\ x_m\}\ H(x_1,\ \ldots,\ x_m)$, то $n(A)=n(H(a_1,\ \ldots,\ a_m))$.

Лемма 28.15. *Если $G(\beta,\ \alpha)$ не содержит предикатов $A_m,\ A_{m+1},\ \ldots$, i — некоторая константа, для которой выводимо $I(i)$,* (*и если V — произвольный абстракт, то*

$$n\left(G\left(V,\ A_m^i(V)\right)\right) \leqslant n(V) + \sum_{l=1}^{k} \omega^{\gamma(A_{j_l} : B_l)} + m_0,$$

где $j_l \leqslant m$, $g(A_{j_l} : B_l) < g(A_m : A_m)$ *и* $m_0 < \omega$).

Предложение 28.16. *Если*

$$I(i),\ G_m\left(i,\ t,\ V,\ A_m^i(V)\right) \to A_m(i,\ t,\ V)$$

или

$$I(i),\ A_m(i,\ t,\ V) \to G_m\left(i,\ t,\ V,\ A_m^i(V)\right)$$

является начальной секвенцией нашей системы и i — некоторая константа, для которой выводимо $I(i)$, то

$$n\left(G_m\left(i,\ t,\ V,\ A_m^i(V)\right)\right) < n\left(A_m(i,\ t,\ V)\right).$$

Доказательство. Это предложение является частным случаем леммы 28.15.

Определение 28.17. Пусть $N(I_\infty) = \omega^{I_\infty} \times \omega \times \omega^{I_\infty}$ и $\prec$ — лексикографический порядок на $N(I_\infty)$. *Рангом* формулы A в данном выводе (обозначаемым через $r(A)$) назовем упорядоченную тройку $\langle\gamma(A),\ a,\ n(A)\rangle$, где a — число собственных переменных в A, соответствующих применениям правила второго порядка $\forall$-справа в этом выводе ниже A; таким образом, $r(A)$ — элемент множества $N(I_\infty)$.

Предложение 28.18. *Если*

$$I(i),\ A_n(i,\ t,\ V) \to G_n\left(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)\right)$$

или

$$I(i),\ G_n\left(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)\right) \to A_n(i,\ t,\ V)$$

является начальной секвенцией в некотором выводе с уровнями и i — некоторая константа, для которой выводимо $I(i)$, то

$$r\left(G_n\left(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)\right)\right) \prec r\left(A_n(i,\ t,\ V)\right).$$

Определение 28.19. Каждой секвенции некоторого вывода P с уровнями следующим образом поставим в соответствие некоторый элемент системы $O\left(\omega^{I_\infty} + 1,\ \omega^{I_\infty} \times \omega \times \omega^{I_\infty}\right)$. Через ξ мы обозначим ω^{I_∞}, т. е. максимальный элемент в $\omega^{I_\infty} + 1$.

1.1) Начальным секвенциям вида

$$D \to D, \quad s = t,\ A(s) \to A(t)$$

и математическим начальным секвенциям ставится в соответствие ординальная диаграмма $(0,\ 0,\ 0)$.

1.2) Начальным секвенциям вида

$$I(i),\ A_n(i,\ t,\ V) \to G_n(i,\ t,\ V,\ \{x,\ y\}(A_n(x,\ y,\ V) \wedge x <^* i))$$

и

$$I(i),\ G_n(i,\ t,\ V,\ \{x,\ y\}(A_n(x,\ y,\ V) \wedge x <^* i)) \to A_n(i,\ t,\ V)$$

ставится в соответствие ординальная диаграмма $r(A_n(i,\ t,\ V))$.

2) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения слабого структурного правила, то секвенции S_2 ставится в соответствие та же ординальная диаграмма, что и секвенции S_1.

3) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения одного из правил $\neg$-слева, $\neg$-справа, $\wedge$-слева, $\forall$-слева или $\forall$-справа первого порядка, $\forall$-справа второго порядка или явного применения правила $\forall$-слева второго порядка, то секвенции S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\xi;\ \langle 0,\ 0,\ 0\rangle,\ \sigma)$, где σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

4) Если S_1 и S_2 — верхние секвенции, а S — нижняя секвенция некоторого применения правила $\wedge$-справа, то секвенции S ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\xi,\ \langle 0,\ 0,\ 0\rangle,\ \sigma_1 \# \sigma_2)$, где σ_1 и σ_2 — ординальные диаграммы секвенций S_1 и S_2 соответственно.

5) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции неявного применения правила $\forall$-слева второго порядка вида

$$\frac{F(V),\ \Gamma \to \Delta}{\forall\phi F(\phi),\ \Gamma \to \Delta,}$$

то секвенция S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\xi,\ \langle\mu,\ k,\ \nu \# 0 \# 0\rangle,\ \sigma)$, где σ — ординальная диаграмма секвенции S_1 и $\langle\mu,\ k,\ \nu\rangle = r(F(V))$.

6) Если S_1 и S_2 — верхние секвенции, а S — нижняя секвенция некоторого сечения, то секвенции S ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\xi,\ \langle\mu,\ k,\ \nu \# 0\rangle,\ \sigma_1 \# \sigma_2)$, где $\langle\mu,\ k,\ \nu\rangle$ — ранг высекаемой формулы, а σ_1 и σ_2 — ординальные диаграммы секвенций S_1 и S_2 соответственно.

7) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторой подстановки J, то секвенции S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(d(J),\ \langle 0,\ 0,\ 0\rangle,\ \sigma)$, где σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

8) Если S_1 и S_2 — соответственно верхняя и нижняя секвенции некоторого применения правила индукции, то секвенции S_2 ставится в соответствие ординальная диаграмма $(\xi,\ \langle\mu,\ k,\ \nu \# 0 \# 0\rangle,\ \sigma)$, где $\langle\mu,\ k,\ \nu\rangle$ — ранг индукционной формулы и σ — ординальная диаграмма секвенции S_1.

9) Ординальной диаграммой вывода P называется ординальная диаграмма, поставленная в соответствие заключительной секвенции вывода P.

Допустим, что секвенция $\to$ выводима в рассматриваемой системе. Вывод P секвенции $\to$ мы редуцируем в другой вывод этой секвенции. Эта редукция будет проводиться так же, как и в § 27. Мы можем считать, что заключительная часть вывода P не содержит свободных переменных первого порядка, аксиом вида $m = n$, $A(m) \to A(n)$ и $D \to D$, применений правила индукции и ослаблений; мы также предполагаем, что правило замещения терма уже введено. Допустим, что заключительная часть вывода P содержит некоторую начальную секвенцию вида 5) из определения 28.1, скажем

$$(*)\quad I(i),\ A_n(i,\ t,\ V) \to G_n(i,\ t,\ V,\ \{x,\ y\}(A_n(x,\ y,\ V) \wedge x <^* i)),$$

причем без потери общности можно считать, что i и t — нумералы. Тогда либо $I(i) \to$, либо $\to I(i)$ является начальной секвенцией. Абстракт $\{x, y\}(A_n(x,\ y,\ V) \wedge x <^* i)$ мы сокращенно обозначим через $A_n^i(V)$.

Случай 1. Секвенция $I(i) \to$ является начальной. Заменим $(*)$ следующим выводом:

$$\dfrac{\dfrac{I(i)\to}{\text{ослабления и перестановка}}}{I(i),\ A_n(i,\ t,\ V) \to G_n\big(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)\big).}$$

Ординальная диаграмма у этого вывода меньше, чем у $(*)$. Поэтому вывод P, очевидно, редуцируется к выводу, полученному в результате этой замены.

Случай 2. Секвенция $\to I(i)$ является начальной. Поскольку каждая формула в P является неявной, существует некоторое сечение J, высекаемая формула которого есть некоторый потомок формулы $A_n(i,\ t,\ V)$ в $(*)$. Пусть P имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cc}
A_n(i,\ t,\ V) \to A_n(i,\ t,\ V) & I(i),\ A_n(i,\ t,\ V \to G_n\big(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)\big) \\
\vdots\,\sigma_1 & \vdots\,\sigma_2
\end{array}$$

$$J\ \dfrac{\Gamma \to \Delta,\ A_n(i,\ t,\ V) \qquad A_n(i,\ t,\ V),\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda}\,\sigma$$

$$\vdots$$

$$\to,$$

где $A_n(i,\ t,\ V) \to A_n(i,\ t,\ V)$ не обязательно входит в P. Следует заметить, что к формуле $A_n(i,\ t,\ V)$ не применяется никакая подстановка. Действительно, если бы существовала такая подстановка J_0, то она бы нарушала формулу $A_n(i,\ t,\ V)$, т. е. мы имели бы $d(J_0) < d(A_n(i,\ t,\ V))$. Но это противоречит п. 4) определения 28.11.

Рассмотрим следующий вывод P':

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{I(i),\ A_n(i,t,V) \to G_n\big(i,t,V,A_n^i(V)\big)}{A_n(i,t,V),\ I(i) \to G_n\big(i,t,V,A_n^i(V)\big)} & G_n\big(i,t,V,A_n^i(V)\big) \to G_n\big(i,t,V,A_n^i(V)\big) \\
\vdots\,\sigma_1' & \vdots\,\sigma_2'
\end{array}$$

$$\dfrac{\to I(i) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\ I(i) \to \Delta,\ G_n\big(i,t,V,A_n^i(V)\big) \qquad G_n\big(i,t,V,A_n^i(V)\big),\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ I(i),\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda}}{\text{несколько перестановок}}}{I(i),\ \Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda}}{\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda}\,\sigma'$$

$$\vdots$$

$$\to.$$

Каждая подстановка в P' имеет тот же уровень, что и соответствующая подстановка в P. Тогда в силу предложения 28.10 P' — вывод с уровнями. Кроме того, имеем

$$\sigma = (\xi,\ \langle\mu,\ j,\ \lambda \# 0\rangle,\ \sigma_1 \# \sigma_2)$$

и

$$\sigma' = (\xi,\ \langle 0,\ 0,\ 0 \# 0\rangle,\ (0,\ 0,\ 0) \# (\xi,\ \langle\nu,\ k,\ \delta \# 0\rangle,\ \sigma_1' \# \delta_2')),$$

где $\langle\mu,\ j,\ \lambda\rangle = r(A_n(i,\ t,\ V))$ и $\langle\nu,\ k,\ \delta\rangle = r\big(G_n\big(i,\ t,\ V,\ A_n^i(V)\big)\big)$. Из предложения 28.18 вытекает, что $\sigma' <_l \sigma$ (при $l \leqslant \xi$), откуда следует, что ординальная диаграмма вывода P' меньше ординальной диаграммы вывода P. Таким образом, P редуцируется к P'. (Относительно вычисления ординальных диаграмм см. § 27.)

Допустим, что заключительная часть вывода P не содержит применений логических правил, правила индукции, ослаблений и начальных секвенций, не являющихся математическими. Если P содержит какой-нибудь логический символ, мы можем так же, как и в 26.16, найти в P некоторое подходящее сечение и таким же образом, как и в § 27, определить существенную редукцию.

В дополнение к материалу этого параграфа, а также предыдущего мы изложим общую теорию сложности. Будем рассматривать язык второго порядка.

Определение 28.20. Функция γ, определенная на полуформулах и абстрактах, значениями которой являются ординалы, называется *монотонной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\gamma(\neg A) \geqslant \gamma(A)$.
2) $\gamma(A \wedge B) \geqslant \max(\gamma(A),\ \gamma(B))$.
3) $\gamma(\forall x G(x) \geqslant \gamma(G(x))$.
4) $\gamma(\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}\ H(x_1,\ \ldots,\ x_n)) = \gamma(H(x_1,\ \ldots,\ x_n))$.

5) $\gamma(\forall\phi F(\phi)) \geqslant \gamma(F(\phi))$.

6) Если A — алфавитный вариант B, то $\gamma(A)=\gamma(B)$.

7) Если $\gamma(V)=0$ и $\gamma(\forall\phi F(\phi))>0$, то $\gamma(\forall\phi F(\phi))>\gamma(F(V))$.

Мы скажем, что формула (абстракт) A *γ-проста*, если $\gamma(A)=0$. Применение правила второго порядка $\forall$-слева, скажем

$$\frac{F(V),\ \Gamma\to\Delta}{\forall\phi F(\phi),\ \Gamma\to\Delta,}$$

назовем *γ-простым*, если абстракт V является γ-простым; это применение назовем *строго γ-простым*, если и абстракт V, и формула $\forall\phi F(\phi)$ являются γ-простыми.

Вывод P в системе $\mathbf{G^1LC}$ назовем (*строго*) *γ-простым*, если каждое неявное применение правила второго порядка $\forall$-слева в P является (строго) γ-простым.

Предложение 28.21. *Допустим, что γ — некоторая монотонная функция и что для каждого строго γ-простого вывода справедлива теорема об устранении сечений. Тогда теорема об устранении сечений справедлива и для каждого γ-простого вывода.*

Доказательство. Ранг формулы A в некотором выводе определим как $\omega^2\cdot\gamma(A)+\omega\cdot m+l$, где m — число собственных переменных, соответствующих применениям правила $\forall$-справа второго порядка, расположенным ниже A, и l — число логических символов в A. Ранг формулы A мы будем обозначать через $r(A)$. Пусть P — некоторый γ-простой вывод и J — некоторое сечение в P. Сечение J называется γ-простым, если высекаемая формула этого сечения является γ-простой. Ранг $r(J)$ сечения J определяется как ранг высекаемой формулы в J. Ранг $r(P)$ вывода P определяется как $\Sigma_J\omega^{r(J)}$, где J пробегает по всем сечениям в P, не являющимся γ-простыми; мы будем предполагать, что слагаемые $\omega^{r(J)}$ в сумме расположены в порядке убывания.

Если $r(P)=0$, то каждая неявная формула в P является γ-простой; в частности, главная формула каждого неявного применения правила $\forall$-слева является γ-простой, а это означает, что вывод P является строго γ-простым. Следовательно, по условию для P справедлива теорема об устранении сечений. Допустим теперь, что $r(P)>0$; тогда в P найдется некоторое сечение J, не являющееся γ-простым и такое, что каждое сечение, расположенное выше J, является γ-простым. Мы рассмотрим лишь случай, когда высекаемая формула имеет вид $\forall\phi F(\phi)$ (остальные случаи разбираются легко):

$$J\ \frac{\Gamma\to\Delta,\ \forall\phi F(\phi)\qquad \forall\phi F(\phi),\ \Pi\to\Lambda}{\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda}\ .$$

Пусть P_0 — вывод, оканчивающийся секвенцией $\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda$. Пусть A означает левую высекаемую формулу сечения J, а B — правую высекаемую формулу этого сечения. Можно считать, что самый верхний предок формулы $A(B)$, который совпадает с $A(B)$, является главной формулой некоторого применения логического правила и $F(\alpha)$ — боковая формула этого применения, относящегося к A. Заменив предок формулы A, совпадающий с A, на формулу $F(\alpha)$, мы получим вывод P_1, оканчивающийся секвенцией $\Gamma\to\Delta,\ F(\alpha)$.

Пусть $\Pi_1\to\Lambda_1$ — произвольная секвенция, расположенная выше правой верхней секвенции сечения J. Мы можем построить некоторый вывод, оканчивающийся секвенцией вида $\Pi_1^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda_1$, где Π_1^* получается из Π_1 устранением всех предков формулы B, идентичных ей самой. Это можно сделать индукцией по числу применений правил в выводе, оканчивающемся секвенцией $\Pi_1\to\Lambda_1$. Допустим, например, что $\Pi_1\to\Lambda_1$ является нижней секвенцией некоторого сечения

$$\frac{\Pi_2\to\Lambda_1,\ D\qquad D,\ \Pi_3\to\Lambda_3}{\Pi_2,\ \Pi_3\to\Lambda_2,\ \Lambda_3,}$$

где Π_2, Π_3 есть Π_1, а Λ_2, Λ_3 есть Λ_1. Искомый вывод строится следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{\Pi_2^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda_2,\ D\qquad D,\ \Pi_3^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda_3}{\Pi_2^*,\ \Gamma,\ \Pi_3^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda_2,\ \Delta,\ \Lambda_3}}{\Pi_2^*,\ \Pi_3^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3.}$$

Другой пример: пусть $\Pi_1\to\Lambda_1$ — нижняя секвенция некоторого применения правила $\forall$-слева второго порядка, главная формула которого является предком формулы B, идентичным B:

$$\frac{F(V),\ \Pi_2\to\Lambda_1}{\forall\phi F(\phi),\ \Pi_2\to\Lambda_1,}$$

где $\forall\phi F(\phi)$, Π_2 есть Π_1. Рассмотрим следующий вывод:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Delta,\ F(V)\qquad F(V),\ \Pi_2^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda_1}{\Gamma,\ \Pi_2^*\to\Delta,\ \Delta,\ \Lambda}}{\Pi_2^*,\ \Gamma\to\Delta,\ \Lambda,}$$

где вывод $\Gamma\to\Delta,\ F(V)$ получается из P_1 подстановкой всюду V вместо α.

Взяв в качестве $\Pi_1\to\Lambda_1$ секвенцию $\forall\phi F(\phi),\ \Pi\to\Lambda$, мы получим $\Pi,\ \Gamma\to\Delta$ и, следовательно, $\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda$. Ранг полученного таким образом вывода Q меньше, чем $r(P_0)$, поскольку по условию имеем $\gamma(F(V))<\gamma(\forall\phi F(\phi))$. Заменив теперь P_0

на Q в P, мы получим некоторый вывод с той же заключительной секвенцией, но ранг которого меньше, чем ранг вывода P. Тогда по предположению индукции в нем можно устранить сечения.

Определение 28.22. Некоторое множество $\mathcal{F}$ полуформул и абстрактов называется *замкнутым*, если выполняются следующие условия:

1) Если A — атомарная формула, то A принадлежит $\mathcal{F}$.
2) Если $\neg B$ принадлежит $\mathcal{F}$, то B принадлежит $\mathcal{F}$.
3) Если $B \wedge C$ принадлежит $\mathcal{F}$, то B и C принадлежат $\mathcal{F}$.
4) Если $\forall x F(x)$ принадлежит $\mathcal{F}$, то $F(s)$ принадлежит $\mathcal{F}$ для каждого полутерма s.
5) Если $\forall \phi F(\phi)$ принадлежит $\mathcal{F}$, то $F(\alpha)$ принадлежит $\mathcal{F}$ для каждой переменной α второго порядка.
6) Если $\{x_1, \ldots, x_n\} H(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathcal{F}$, то $H(\alpha_1, \ldots, a_n)$ принадлежит $\mathcal{F}$ для всяких $a_1, \ldots, a_n$; если $H(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит $\mathcal{F}$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n$, то $\{x_1, \ldots, x_n\} H(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathcal{F}$.
7) Если B и C — арифметические варианты друг друга, то B принадлежит $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда C принадлежит $\mathcal{F}$.
8) Если $F(\alpha)$ и V принадлежат $\mathcal{F}$, то $F(V)$ принадлежит $\mathcal{F}$.

По данному множеству $\mathcal{F}$ мы определим некоторую функцию γ, которую назовем *функцией, задаваемой* множеством $\mathcal{F}$.

(1) $\gamma(A) = 0$, если A принадлежит $\mathcal{F}$. Допустим, что A не принадлежит $\mathcal{F}$.
(2) $\gamma(A) = \gamma(B) + 1$, если A имеет вид $\neg B$.
(3) $\gamma(A) = \max(\gamma(B), \gamma(C)) + 1$, если A имеет вид $B \wedge C$.
(4) $\gamma(A) = \gamma(F(x)) + 1$, если A имеет вид $\forall x F(x)$.
(5) $\gamma(A) = \gamma(F(\phi)) + 1$, если A имеет вид $\forall \phi F(\phi)$.
(6) $\gamma(\{x_1, \ldots, x_n\} H(x_1, \ldots, x_n)) = \gamma(H(x_1, \ldots, x_n))$.

Тем же способом, что и при доказательстве предложения 27.7, мы легко можем доказать следующее

Предложение 28.23. *Допустим, что множество $\mathcal{F}$ замкнуто и γ есть функция, задаваемая множеством $\mathcal{F}$. Если V принадлежит $\mathcal{F}$, то $\gamma(F(\alpha)) = \gamma(F(V))$.*

Предложение 28.24. *Допустим, что $\mathcal{F}$ замкнуто и γ есть функция, задаваемая множеством $\mathcal{F}$. Тогда функция γ монотонна.*

Доказательство. Это предложение немедленно следует из определения функции γ и из предложения 28.23.

ГЛАВА 6

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

§ 29. Доказуемые вполне-упорядочения

Мы рассмотрим здесь доказуемые вполне-упорядочения относительно системы **INN** и покажем, что всякое такое упорядочение имеет порядковый тип, меньший, чем порядковый тип системы ординальных диаграмм $O(\omega + 1, \omega^3)$ относительно отношения $<_0$. Мы заимствуем из § 13 значительную часть рассуждений. Результаты, которые мы получим, с небольшими модификациями можно распространить и на систему **IID**.

Определение 29.1. Пусть $<\cdot$ — некоторый рекурсивный линейный порядок на натуральных числах, являющийся на самом деле вполне-упорядочением. (Без потери общности можно предположить, что отношение $<\cdot$ определено на всех натуральных числах и наименьшим элементом относительно порядка $<\cdot$ является 0.) Мы будем использовать символ $<\cdot$ также и для обозначения формулы системы **INN**, выражающей отношение $<\cdot$.

Пусть $\mathbf{TI}(<\cdot)$ — формула, выражающая принцип трансфинитной индукции по $<\cdot$, а именно

$$\forall \phi (\forall x (\forall y (y <\cdot x \supset \phi(y)) \supset \phi(x)) \supset \forall x \phi(x)),$$

причем $A \supset B$ следует рассматривать как сокращение для $\neg(A \wedge \neg B)$. Если формула $\mathbf{TI}(<\cdot)$ выводима в **INN**, мы будем говорить, что отношение $<\cdot$ является *доказуемым вполне-упорядочением* относительно **INN**.

Предположим, что уже проведена арифметизация системы ординальных диаграмм $O(\omega + 1, \omega^3)$. Мы будем одинаково обозначать объект и его арифметизацию.

Теорема 29.2. *Пусть $<_0$ — вполне-упорядочение системы ординальных диаграмм $O(\omega + 1, \omega^3)$ относительно 0. (Вспомним, что непротиворечивость системы* **INN** *была доказана индукцией по $<_0$.) Если $<\cdot$ — некоторое доказуемое вполне-упорядочение относительно* **INN**, *то существует рекурсивная функция, отображающая множество натуральных чисел на некоторый начальный отрезок упорядочения $<_0$ и сохраняющая порядок. То есть существует рекурсивная функция $\mathfrak{f}$, такая, что $a <\cdot b$ тогда* *и только тогда, когда* $f(a) <_0 f(b)$, *и существует ординальная диаграмма* μ *из* $O(\omega+1, \omega^3)$, *такая, что* $f(a) <_0 \mu$ *для каждого* a.

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 13.4; здесь мы только укажем, как надо видоизменить это доказательство с тем, чтобы рассуждения годились для системы **INN**.

(1) Понятие **TJ**-вывода (для **INN**) определяется так же, как и в 13.1); в частности, **TJ**-начальные секвенции имеют вид

$$\forall x\,(x \mathrel{<\!\cdot} t \supset \varepsilon(x)) \to \varepsilon(t),$$

а заключительные секвенции имеют вид

$$\to \varepsilon(m_1),\ \ldots,\ \varepsilon(m_n).$$

(2) Ординал $|m|_{<\cdot}$ и заключительное число **TJ**-вывода определяются так же, как и в 13.1).

(3) В пп. 13.2) и 13.5) просто вместо **PA** нужно читать **INN**. Однако основную лемму мы сформулируем заново.

Лемма 29.3 (основная лемма; ср. с леммой 13.5). *Заключительное число всякого* **TJ**-*вывода не больше, чем порядковый тип его ординальной диаграммы* (*относительно* $<_0$).

(4) Ординальные диаграммы ставятся в соответствие секвенциям **TJ**-выводов так же, как и для системы **INN**: **TJ**-начальным секвенциям сопоставляется ординальная диаграмма

$$(\omega, 0, (\omega, 0, (\omega, 0, (\omega, 0, (\omega, 0, 0)))))$$

(см. п. 13.6)).

(5) Доказательство утверждений с 13.7) по 13.11) протекает, как и раньше.

(6) В п. 13.12) ординальная диаграмма приведенного там вывода теперь имеет вид

$$(\omega, 0, (\omega, 0, (\omega, 0, 0 \# (\omega, 0, 0)))).$$

Она меньше, чем ординальная диаграмма соответствующей **TJ**-начальной секвенции. В силу этого после очевидных изменений вывод P становится **TJ**-выводом P' с заключительной секвенцией

$$\to \varepsilon(m),\ \varepsilon(m_1),\ \ldots,\ \varepsilon(m_n),$$

где $\to \varepsilon(m_1), \ldots, \varepsilon(m_n)$ — заключительная секвенция вывода P. Ординальная диаграмма вывода P' меньше, чем у вывода P, и заключительное число вывода P' равно $|m|_{<\cdot}$.

(7) Как и в 13.13), мы получаем следующую теорему в стиле Генцена.

Теорема 29.4 (ср. с теоремой 13.6). *Порядковый тип отношения* $\mathrel{<\!\cdot}$ *меньше, чем порядковый тип системы* $O(\omega+1, \omega^3)$ *относительно* $<_0$.

(8) Как и в 13.14), мы можем для всякого k определить вывод P_k, заключительное число которого равно $|k|_{<\cdot}$. Тогда функцию h мы определим так же, как и в 13.15), где $+$ обозначает ординальную сумму.

(9) Для того чтобы можно было утверждать, что функция h рекурсивна и что справедливо утверждение 13.16), нам нужно показать следующее:

1) Ординальная сумма $+$ ординальных диаграмм является рекурсивной функцией.

2) Если две ординальные диаграммы μ и ν являются связными (т. е. последней операцией, использованной при образовании μ и ν, не была $\#$) и $\mu <_0 \nu$, то $\mu + \nu = \nu$.

(10) Из (9) мы заключаем, что функция h рекурсивна и что справедливо утверждение 13.16). Отсюда вытекает, что функция h сохраняет порядок.

§ 30. Аксиома Π^1_1-выделения и ω-правило

Для системы **INN** можно доказать результат, аналогичный тому, что был сформулирован в задаче 13.9, т. е. доказать устранимость сечений в некоторой системе с конструктивным ω-правилом. Напомним некоторые определения, которые были приведены в гл. 2.

Определение 30.1. (1) Предположим, что имеется некоторая стандартная гёделева нумерация аксиом и конечных правил вывода. Бесконечное правило индукции или ω-*правило* задается следующей схемой:

$$\frac{\overset{P_0}{\vdots}\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{P_n}{\vdots}\qquad}{\Gamma \to \Delta,\ A(0)\ \ldots \qquad \ldots\ \Gamma \to \Delta,\ A(n)\ \ldots}\Bigg/ \;$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ A(0)\ \ldots \qquad \ldots\ \Gamma \to \Delta,\ A(n)\ \ldots}{\Gamma \to \Delta,\ \forall x A(x).}$$

Здесь вывод P_n определен для каждого натурального числа n и оканчивается секвенцией $\Gamma \to \Delta, A(n)$. Выводу P_n ставится в соответствие некоторый гёделев номер $\ulcorner P_n \urcorner$. Если существует рекурсивная функция f, такая, что $f(n) = \ulcorner P_n \urcorner$ для каждого n, то ω-правило называется *конструктивным*, и всему выводу ставится в соответствие число $3 \cdot 5^e$, где e — гёделев номер функции f, т. е. $\{e\}(n) = \ulcorner P_n \urcorner$. Пусть **S** — произвольная логическая система. Всякий вывод в системе, получаемой из системы **S** добавлением к ней конструктивного ω-правила, называется ω-*выводом* в **S**.

(2) Пусть $S(a)$ и $a \lessdot b$ — некоторые примитивно рекурсивные предикаты, такие, что отношение $\lessdot$ вполне упорядочивает множество $\{a \mid S(a)\}$, причем первым элементом в смысле $\lessdot$ является 0. Теоретико-числовая функция Ψ называется $\lessdot$-*рекурсивной*, если она задается следующей схемой:

(i) $f(a) = a + 1$;

(ii) $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$;

(iii) $f(a_1, \ldots, a_n) = a_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$;

(iv) $f(a_1, \ldots, a_n) = g(\lambda_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \lambda_m(a_1, \ldots, a_n))$, где функции g и $\lambda_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$ являются $\lessdot$-рекурсивными;

(v) $f(0, a_2, \ldots, a_n) = g(a_2, \ldots, a_n)$,

$$f(a+1, a_2, \ldots, a_n) = \lambda(a, f(a, a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n),$$

где функции g и λ являются $\lessdot$-рекурсивными;

(vi) $f(0, a_2, \ldots, a_n) = g(a_2, \ldots, a_n)$,

$$f(a+1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \lambda(a, f(\tau^*(a, a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n),$$

где функции g, λ и τ являются $\lessdot$-рекурсивными и

$$\tau^*(a, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \begin{cases} \tau(a, a_2, \ldots, a_n), & \text{если } \tau(a, a_2, \ldots, a_n) \lessdot a + 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Всякий вывод в системе **INN**, заключительная секвенция которого не содержит свободных переменных, мы преобразуем в некоторый вывод с той же заключительной секвенцией в системе с конструктивным ω-правилом. При доказательстве непротиворечивости системы **INN** в § 27 мы определили понятие редукции вывода секвенции $\rightarrow$. Это понятие можно легко распространить на произвольный вывод, заключительная секвенция которого не содержит свободных переменных.

Определение 30.2. (1) Через $O(\mathbf{INN})$ обозначим систему ординальных диаграмм $O(\omega + 1, \omega^3)$, примененную для доказательства непротиворечивости системы **INN**, а через $\prec$ — отношение, вполне упорядочивающее ее (а именно $<_0$).

(2) Для всякой ординальной диаграммы α и каждого натурального числа i следующим образом определим диаграмму $\alpha^{(i)}$: $\alpha^{(0)} = \alpha$ и $\alpha^{(i+1)} = \alpha^{(i)} \# \alpha$.

(3) Для всякой ординальной диаграммы μ и каждого натурального числа m положим $\langle \mu, m \rangle =_{\mathrm{df}} (0, 0, \mu \# 0)^{(m)}$.

Допуская некоторую вольность, мы будем для выводов, ординальных диаграмм и отношения $\prec$ использовать те же обозначения, что и для их гёделевых номеров.

Секвенциям в выводах мы поставим в соответствие те же ординальные диаграммы, что и в § 27, и ординальной диаграммой вывода P мы назовем пару $\langle \mu, m \rangle$, где μ — ординальная диаграмма, поставленная в соответствие его заключительной секвенции, а m — число свободных переменных первого порядка в его заключительной части (обозначаемое $m(P)$). Если ординальная диаграмма вывода P меньше, чем ординальная диаграмма вывода Q, то мы будем писать $\ulcorner P \urcorner \prec \ulcorner Q \urcorner$ или просто $P \prec Q$.

Замечание. Может так случиться, что при определении редукции нам нужно будет взять самое нижнее применение правила, удовлетворяющее некоторому условию. Такое применение может определяться неоднозначно; однако мы можем считать, что применения правил представлены своими гёделевыми номерами, и затем выбрать требуемое применение с наименьшим гёделевым номером.

Теорема 30.3. *Существует $\prec$-рекурсивная функция f, такая что для каждого вывода P в* **INN**, *заключительная секвенция которого не содержит свободных переменных первого порядка, $f(\ulcorner P \urcorner)$ есть гёделев номер некоторого ω-вывода, имеющего ту же заключительную секвенцию, что и у вывода P, и не содержащего сечений, а также применений правила индукции и правила первого порядка $\forall$-справа.*

Доказательство. Пусть P — некоторый вывод, не содержащий свободных переменных первого порядка. Трансфинитной индукцией по ординальной диаграмме вывода P определим редукции $r(P)$ и $q(i, P)$ для всякого $i < \omega$, а также преобразование $f(\ulcorner P \urcorner)$.

1) Заключительная часть вывода P содержит некоторое применение правила индукции или явное применение логического правила.

1.1) Заключительная часть вывода P содержит некоторую свободную переменную первого порядка, которая не используется в качестве собственной. Определим $r(P)$ как вывод, получаемый из P подстановкой 0 вместо каждой из таких переменных. Очевидно, что $r(P) \prec P$. Значение $f(P)$ положим равным $f(r(P))$.

1.2) Заключительная часть вывода P не содержит свободных переменных первого порядка, не используемых в качестве собственных. Пусть J — самое нижнее из применений правила индукции или (явных) применений логических правил. Рассмотрим несколько случаев.

1.2.1) J есть применение правила индукции. Пусть $r(P)$ — вывод, получаемый из P применением к J редукции (2) из § 27, и пусть $f(P)$ равняется $f(r(P))$. Тогда $r(P) \prec P$.

1.2.2) J есть явное применение логического правила.

1.2.2.1) J не является применением правила первого порядка $\forall$-справа. Поскольку все случаи разбираются одинаково, мы рассмотрим лишь случай, когда J есть применение правила $\wedge$-слева. Пусть P имеет вид

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A, \Gamma \to \Delta \\ \hline A \wedge B, \Gamma \to \Delta \\ \vdots \\ \Gamma_0 \to \Delta_0. \end{array}$$

Тогда $r(P)$ определим как вывод

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A, \Gamma \to \Delta \\ \hline \text{несколько перестановок и ослабление} \\ \hline A \wedge B, \Gamma, A \to \Delta \\ \vdots \\ \Gamma_0, A \to \Delta_0. \end{array}$$

Поскольку $r(P) \prec P$, значение $f(r(P))$ уже определено, согласно предположению индукции. Тогда $f(P)$ определим как следующий вывод:

$$\begin{array}{c} f(r(P))\left\{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_0, A \to \Delta_0 \end{array}\right. \\ \hline \text{несколько перестановок} \\ \hline A, \Gamma_0 \to \Delta_0 \\ \hline A \wedge B, \Gamma_0 \to \Delta_0 \\ \hline \text{несколько перестановок и сокращение} \\ \hline \Gamma_0 \to \Delta_0. \end{array}$$

Эту фигуру мы обозначим через $g(f(r(P)))$.

1.2.2.2) J представляет собой применение правила первого порядка $\forall$-справа. Пусть P имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cc} & \vdots \\ & \Gamma \to \Delta, A(a) \\ \cline{2-2} J & \Gamma \to \Delta, \forall x A(x) \\ & \vdots \\ & \Gamma_0 \to \Delta_0. \end{array}$$

Для каждого i рассмотрим вывод (обозначаемый $q(i, P)$):

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \to \Delta, A(i) \\ \hline \text{несколько перестановок и ослабление} \\ \hline \Gamma \to A(i), \Delta, \forall x A(x) \\ \vdots \\ \Gamma_0 \to A(i), \Delta_0, \end{array}$$

где вывод секвенции $\Gamma \to \Delta, A(i)$ получается из вывода верхней секвенции применения J подстановкой нумерала i вместо переменной a. Очевидно, что $q(i, P) \prec P$ для всякого нумерала i. Таким образом, значение $f(q(i, P))$ уже определено для каждого i. В качестве $f(P)$ возьмем вывод

$$\begin{array}{cc} & f(q(i,P))\left\{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_0 \to A(i), \Delta_0 \end{array}\right. \\ \cline{2-2} & \text{несколько перестановок} \\ \cline{2-2} & \ldots \quad \Gamma_0 \to \Delta_0, A(i) \quad \ldots \quad \text{для каждого } i \\ \cline{2-2} \omega\text{-правило} & \Gamma_0 \to \Delta_0, \forall x A(x) \\ \cline{2-2} & \text{несколько перестановок и сокращение} \\ \cline{2-2} & \Gamma_0 \to \Delta_0. \end{array}$$

2) Заключительная часть вывода P не содержит применений правила индукции и явных применений логических правил, но содержит некоторую явную логическую начальную секвенцию. Тогда из нее можно получить заключительную секвенцию вывода P с помощью нескольких ослаблений и перестановок. Пусть $f(P)$ есть один из таких выводов.

3) Заключительная часть вывода P не содержит применений правила индукции, логических правил и явных логических начальных секвенций. Через $r(P)$ обозначим вывод, получающийся из P применением редукций с (1) по (9) из § 27 с сохранением явных ослаблений. Тогда $r(P) \prec P$. Поскольку редукции не изменяют заключительной секвенции, то в качестве $f(P)$ возьмем $f(r(P))$.

Многие понятия мы отождествили с их гёделевыми номерами, например „вывод P“ иногда означает его гёделев номер. Таким образом, функции r, q, g и f можно рассматривать как теоретико-числовые. Очевидно, что функции r, q и g мы можем взять примитивно рекурсивными. Пусть $P(a)$ — примитивно рекурсивный предикат, утверждающий, что a — некоторый вывод в системе **INN**, заключительная секвенция которого не содержит свободных переменных первого порядка.

Определим отношения P_0, P_1, P_2, и P_3.

$P_0(m) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} P(m)$ и выполняется одно из условий 1.1), 1.2.1) или 2).

$P_1(m) \Longleftrightarrow_{\mathrm{df}} P(m)$ и заключительная часть вывода m содержит явное применение логического правила, отличного от правила $\forall$-справа первого порядка, и к которому применяется редукция.

$P_2(m) \Longleftrightarrow_{\mathrm{df}} P(m)$ и редукция применяется к некоторому применению правила $\forall$-справа, расположенному в заключительной части вывода m.

$$P_3(m) \Longleftrightarrow_{\mathrm{df}} \neg (P_0(m) \vee P_1(m) \vee P_2(m)).$$

Очевидно, отношения P_0, P_1, P_2 и P_3 являются примитивно рекурсивными, причем в силу доказательства непротиворечивости для них выполняются следующие свойства:

$$\forall x \exists ! i\, (i \leqslant 3 \text{ и } P_i(x));$$
$$P_0(m) \Rightarrow r(m) \prec m;$$
$$P_1(m) \Rightarrow r(m) \prec m;$$
$$P_2(m) \Rightarrow \forall n\, (q(n, m) \prec m).$$

С помощью теоремы о рекурсии мы покажем, что функция f рекурсивна и даже $\prec$-рекурсивна. Действительно, имеем

$$f_0(e, m) \simeq \begin{cases} \{e\}(r(m)), & \text{если } P_0(m), \\ g(\{e\}(r(m))), & \text{если } P_1(m), \\ 3 \cdot 5^{S_1^2(c_0,\, e,\, m)}, & \text{если } P_2(m), \\ m, & \text{если } P_3(m), \end{cases}$$

где c_0 — общерекурсивный номер функции $\lambda n, e, m\, \{e\}(q(n, m))$ (т. е. номер функции $\{e\}(q(n, m))$ как функции от аргументов n, e, m, см. С. Клини, Введение в математику, ИЛ, М., 1957, стр. 306). Согласно теореме о рекурсии (см. § 66 упомянутой книги), существует число c, такое, что $f_0(c, m) \simeq \{c\}(m)$. Тогда функцию f определим так: $f(m) \simeq \{c\}(m)$, т. е.

$$f(m) \simeq \begin{cases} f(r(m)), & \text{если } P_0(m), \\ g(f(r(m))), & \text{если } P_1(m), \\ 3 \cdot 5^{S_1^2(c_0,\, c,\, m)}, & \text{если } P_2(m), \\ m & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, функция f частично рекурсивна. Трансфинитной индукцией по $\prec$ мы легко можем показать, что функция f всюду определена. Легко также видеть, что функция f является $\prec$-рекурсивной, вывод $f(P)$ имеет ту же заключительную секвенцию, что и вывод P, и $f(P)$ не содержит сечений, применений правила индукции, а также свободных переменных первого порядка. Теорема доказана.

Определение 30.4. Теоретико-числовая функция $f(a_1, \ldots, a_n)$ называется *доказуемо рекурсивной* в **INN**, если в **INN** выводима следующая секвенция:

$$\rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y),$$

где формула T_n выражает примитивно рекурсивный предикат Клини T_n (ср. также с § 13; содержащееся в § 13 определение мы можем легко распространить на случай нескольких переменных x) и e есть гёделев номер функции f.

Как применение нашей техники мы можем дать другое доказательство одной теоремы, первоначально доказанной Кино. Эта теорема является аналогом утверждения задачи 13.8.

Теорема 30.5. *Пусть ψ — некоторая доказуемо рекурсивная функция в* **INN**. *Тогда найдется ординальная диаграмма μ системы O* (**INN**), *такая, что функция ψ является $\prec^{\mu}$-рекурсивной, где $\prec^{\mu}$ — ограничение отношения $\prec$ множеством диаграмм, которые $\prec \mu$.*

Доказательство. Без потери общности мы можем предположить, что ψ — функция одного аргумента. Пусть e — гёделев номер функции ψ, такой, что секвенция $\rightarrow \forall x \exists y T_1(e, x, y)$ выводима в **INN**. Пусть P — некоторый вывод секвенции $\rightarrow \exists y T_1(e, a, y)$ и μ — его ординальная диаграмма. Определим P_m как вывод, получаемый из вывода P подстановкой в него нумерала m вместо a. Процедура получения P_m из P является примитивно рекурсивной. К каждому выводу P_m применим преобразование f из предыдущей теоремы. Тогда $f(P_m)$ — вывод без сечений. Поскольку вывод P не содержит никаких применений правила $\forall$-справа первого порядка (которое является единственным правилом, индуцирующим применение ω-правила в преобразованном выводе), трансфинитной индукцией легко доказывается, что вывод $f(P_m)$ не содержит применений ω-правила. Просматривая вывод $f(P_m)$, мы можем примитивно рекурсивным образом указать некоторый нумерал n, удовлетворяющий $T_1(e, m, n)$. Так как $\psi(m) = U(n)$ и функция f в силу теоремы 30.3 является $\prec^{\mu}$-рекурсивной, то функция ψ тоже $\prec^{\mu}$-рекурсивна.

В защиту конструктивного бесконечного правила мы можем привести следующие аргументы. Многие теоремы в теории доказательств для систем первого порядка следуют из теоремы об устранении сечений. Это верно также для тех систем высших порядков, для которых теорема об устранении сечений доказывается конструктивно. Однако если мы захотим рассмотреть какое-нибудь расширение арифметики, то невозможно будет устранить все сечения из-за того факта, что формальные выводы содержат применения правила математической индукции. Шютте ввел в рассмотрение ω-правило и доказал устранимость всех применений правил сечения и индукции в арифметике первого порядка. Это отличная идея, и результат этот можно рассматривать как некоторое усиление теоремы об устранении сечений при наличии правила индукции. Однако, поскольку объектом нашего исследования являются конечные выводы, было бы лучше, если бы мы смогли так ограничить ω-правило, чтобы рассматриваемые бесконечные выводы обладали некоторыми важными свойствами конечных выводов. По этой причине мы и рассматриваем конструктивное ω-правило.

Адекватность конструктивного ω-правила была доказана Шёнфилдом для арифметики первого порядка и Такахаси для арифметики второго порядка. Следовательно, конструктивное ω-правило достаточно сильно математически.

§ 31. Принципы рефлексии

Определение 31.1. (1) Пусть **P** есть система **PA**, пополненная свободными переменными второго порядка, которые рассматриваются как параметры.

(2) Для удобства будем считать, что язык системы **INN** содержит индивидные константы 0, 1; функциональные константы $+$, $\cdot$; предикатные константы $=$, $<$; в качестве логических символов мы будем использовать знаки $\wedge$, $\supset$ и $\exists$ наравне с $\neg$, $\wedge$ и $\forall$.

(3) Формула первого порядка с параметрами второго порядка $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ называется *рудиментарной* в $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, если каждый квантор (первого порядка) в ней является ограниченным, т. е. все кванторы входят в нее в виде $\forall x (x < s \supset \ldots)$ или $\exists x (x < s \wedge \ldots)$, где s — некоторый терм. Такие кванторы мы будем обозначать через $\forall x < s (\ldots)$ и $\exists x < s (\ldots)$ соответственно.

Предположим, что имеется некоторая стандартная гёделева нумерация выражений системы **INN** и относящихся к ней понятий. В силу п. (2) определения 31.1 мы можем считать, что математические начальные секвенции здесь такие же, как в определении 9.3. Целью этого параграфа является доказательство принципа рефлексии в следующей форме.

Теорема 31.2 (Такеути и Ясуги). *Пусть формула $R(\alpha, a, b)$ рудиментарна в α, и пусть $\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN}))$ — формула, выражающая трансфинитную индукцию по $O(\mathbf{INN})$ для Σ_1^0-формул (т. е. формул вида $\exists x A(x, a)$, где A рекурсивна и не содержит параметров второго порядка). Тогда в системе **P** выводима секвенция*

$$\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \forall x \exists y R(\alpha, x, y) \urcorner) \to \forall x \exists y R(\alpha, x, y),$$

*где $\ulcorner A \urcorner$ — гёделев номер формулы A и $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ означает „формула A выводима в **INN**“.*

Для того чтобы доказать эту теорему, заметим сначала, что справедливо следующее предложение.

Предложение 31.3 *Пусть $R(a, \alpha)$ — рудиментарная в α формула с одной свободной переменной a первого порядка, и пусть формула $\exists x R(x, \alpha)$ выводима в **INN**. Тогда существует вывод в **INN** этой формулы, не содержащий существенных сечений и применения правила индукции. Более того, это можно доказать с помощью системы ординальных диаграмм $O(\mathbf{INN})$.*

Это предложение можно сформулировать и для нескольких параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ вместо одного α.

Пусть S означает секвенцию $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ системы **INN**. Мы говорим, что секвенция S обладает свойством $\mathscr{P}$, если выполняются следующие условия:

p1. S не содержит свободных переменных первого порядка.

p2. Каждая формула A_i при $1 \leqslant i \leqslant m$ рудиментарна в α.

p3. Каждая формула B_j при $1 \leqslant j \leqslant n$ рудиментарна в α или имеет вид $\exists x R'(x, \alpha)$, где формула $R'(a, \alpha)$ рудиментарна в α.

Предложение 31.3 мы докажем в следующей форме.

Предложение 31.4. *С помощью системы ординальных диаграмм $O(\mathbf{INN})$ мы можем определить некоторую редукцию, такую, что если секвенция S обладает свойством $\mathscr{P}$ и выводима в **INN**, то ее вывод можно редуцировать в некоторый другой вывод, не содержащий существенных сечений и применений правила индукции.*

Предложение 31.3 является частным случаем этого предложения.

Доказательство. В большей своей части доказательство протекает так же, как и в § 27. Введем новое правило вывода — правило *ограниченной квантификации*, которое для краткости будем называть правилом о. к.:

$$\text{о. к.}\quad \frac{\Gamma \to \Delta,\ (0 < k \supset S(0)) \wedge\ \ldots\ \wedge (k-1 < k \supset S(k-1))}{\Gamma \to \Delta,\ \forall x (x < k \supset S(x)),}$$

где k — некоторый нумерал, формула $S(a)$ рудиментарна, а формулы

$$(0 < k \supset S(0)) \wedge \ldots \wedge (k-1 < k \supset S(k-1)) \text{ и } \forall x (x < k \supset S(x))$$

называются соответственно боковой и главной формулами этого правила вывода.

Правило о. к. мы будем рассматривать не как логическое правило вывода, а как структурное правило. (Легко видеть, что нижнюю секвенцию правила о. к. можно вывести из верхней секвенции без существенных сечений и применений правила индукции). Нижней секвенции правила о. к. ставится в соответствие та же ординальная диаграмма, что и верхней.

Вывод P мы называем здесь *выводом с уровнями*, если все применения правила о. к. в нем являются явными и расположены в заключительной части и P является выводом с уровнями в смысле § 27.

Определим редукцию вывода P секвенции, обладающей свойством $\mathscr{P}$. Под редукционным шагом мы понимаем процедуру, уменьшающую ординальную диаграмму вывода, вместе с одной или несколькими предыдущими вспомогательными процедурами, которые не изменяют ординальной диаграммы вывода. (См. доказательство теоремы 30.3.)

Случай 1. Вывод P содержит в своей заключительной части явное применение правила индукции или некоторого логического правила. Рассмотрим несколько случаев, соответствующих виду правила, применяемого в P последним.

Подслучай 1. Это есть правило индукции. Поступаем так же, как и в § 27.

Подслучай 2. Это есть явное применение логического правила, отличного от правила $\forall$-справа для переменной первого порядка. Поскольку все относящиеся сюда случаи разбираются более и менее одинаково, мы приведем лишь один пример. Если P имеет вид

$$\begin{array}{c}\Gamma \to \Delta,\ F(t) \\ \hline \Gamma \to \Delta,\ \exists x F(x) \\ \vdots \\ \Gamma_0 \to \Delta_0,\end{array}$$

то мы редуцируем его к выводу P':

$$\begin{array}{c}\Gamma \to \Delta,\ F(t) \\ \hline \text{ослабление и несколько перестановок} \\ \hline \Gamma \to F(t),\ \Delta,\ \exists x F(x) \\ \vdots \\ \Gamma_0 \to F(t),\ \Delta_0.\end{array}$$

Заключительная секвенция этого вывода, очевидно, обладает свойством $\mathscr{P}$, и P' имеет меньшую ординальную диаграмму, чем P; поэтому вывод P' можно преобразовать в некоторый вывод, не содержащий существенных сечений и применений правила индукции. Добавив затем несколько явных применений подходящих правил, мы получим секвенцию $\Gamma_0 \to \Delta_0$.

Подслучай 3. Вывод P завершается явным применением правила $\forall$-справа для переменной первого порядка:

$$\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \to \Delta,\ b < t \supset \tilde{R}(b, \alpha) \\ \hline \Gamma \to \Delta,\ \forall y\,(y < t \supset \tilde{R}(y, \alpha)) \\ \vdots \\ \Gamma_0 \to \Delta_1,\ \forall y\,(y < s \supset \tilde{R}'(y, \alpha)),\ \Delta_2,\end{array}$$

где $\tilde{R}(b, \alpha)$ рудиментарно в α, терм t не содержит переменных, а s и $\tilde{R}'(y, \alpha)$ получаются из t и $\tilde{R}(y, \alpha)$ соответственно с помощью нескольких замещений термов (быть может ни одного). Пусть $t = n$ для некоторого нумерала n. Если $n = 0$, то $s = 0$, и тогда P редуцируется к выводу

$$\begin{array}{c} c < s \to \\ \hline\hline \Gamma_0 \to \Delta_1,\ \forall y\,(y < s \supset \tilde{R}'(y, \alpha)),\ \Delta_2.\end{array}$$

Если $n > 0$, то пусть P_k для каждого $k < n$ означает вывод

$$\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \to \Delta,\ k < n \supset \tilde{R}(k, \alpha) \\ \hline\hline \Gamma \to k < n \supset \tilde{R}(k, \alpha),\ \Delta,\ \forall y\,(y < n \supset \tilde{R}(y, \alpha)) \\ \vdots \\ \Gamma_0 \to k < n \supset \tilde{R}'(k, \alpha),\ \Delta_1,\ \forall y\,(y < s \supset \tilde{R}'(y, \alpha)),\ \Delta_2,\end{array}$$

где $\Gamma \to \Delta,\ k < n \supset \tilde{R}(k, \alpha)$ — заключительная секвенция вывода, полученного из вывода секвенции $\Gamma \to \Delta,\ b < t \supset \tilde{R}(b, \alpha)$ подстановкой k вместо b. Каждой подстановке в выводе P_k ставится в соответствие тот же уровень, что и соответствующей подстановке в P. Тогда вывод P редуцируется к выводам $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, поскольку фигура

$$\begin{array}{ll} & P_0 \qquad P_1 \qquad \ldots \qquad P_{n-1} \\ \hline\hline \text{о. к.} & \Gamma_0 \to \Delta',\ (0 < n \supset \tilde{R}'(0, \alpha)) \wedge (1 < n \supset \tilde{R}'(1, \alpha)) \wedge \ldots \wedge (n-1 < n \supset \tilde{R}'(n-1, \alpha)) \\ \hline & \Gamma_0 \to \Delta',\ \forall y\,(y < n \supset \tilde{R}'(y, \alpha)) \\ \hline\hline & \Gamma_0 \to \Delta_1,\ \forall y\,(y < s \supset \tilde{R}'(y, \alpha)),\ \Delta_2,\end{array}$$

где Δ' означает $\Delta_1,\ \forall y\,(y < s \supset \tilde{R}'(y, \alpha)),\ \Delta_2$, является выводом с той же заключительной секвенцией, что и вывод P.

Случай 2. Вывод P не содержит в своей заключительной части явных применений логических правил и применений правила индукции, но содержит некоторую аксиому вида $s = t,\ A(s) \to A(t)$. Проводим редукцию так же, как и в § 27.

Случай 3. Вывод P не содержит в своей заключительной части явных применений логических правил, применений правила индукции и аксиом вида $s=t,\ A(s)\to A(t)$, но содержит либо явную логическую аксиому, либо неявную логическую аксиому вида $D\to D$, например

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\to\Delta,\ \tilde{D}\end{matrix}\qquad \begin{matrix}D\to D\\ \vdots\\ \tilde{D},\ \Pi\to\Lambda_1,\ \tilde{\tilde{D}},\ \Lambda_2\end{matrix}}{\begin{matrix}\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda_1,\ \tilde{\tilde{D}},\ \Lambda_2\\ \vdots\\ \Gamma_0\to\Delta_0,\end{matrix}}$$

где формулы $\tilde{D}$ и $\tilde{\tilde{D}}$ в правой верхней секвенции сечения являются п`томками вхождений формулы D соответственно в антецедент и сукцедент секвенции $D\to D$. Если имеет местс первый случай, то заключительная секвенция вывода P получается из указанной аксиомы с помощью ослаблений, перестановок и применений правила о. к. Если же имеет место второй случай и формулы $\tilde{D}$ и $\tilde{\tilde{D}}$ одинаковы с точностью до замещений термов, то мы применяем соответствующую редукцию из § 27. В противном случае формулы $\tilde{D}$ и $\tilde{\tilde{D}}$ имеют соответственно вид

$(s_0<s\supset S(s_0))\wedge\ldots\wedge(s_{n-1}<s\supset S(s_{n-1}))$ и $\forall y\,(y<t\supset S'(y))$,

где $s=n$ и $t=n$ для некоторого нумерала n, $s_i=i$ $(i<n)$ и $S'(y)$ либо совпадает с полуформулой $S(y)$, либо получается из нее некоторыми замещениями термов. Тогда вывод P редуцируется к выводу

$$\begin{array}{l}
\qquad\vdots\\
\qquad\Gamma\to\Delta,\ \tilde{D}\\
\hline\hline
\qquad\Gamma\to\Delta,\ (0<n\supset S'(0))\wedge\ldots\wedge(n-1<n\supset S'(n-1))\\
\hline
\text{о. к.}\quad\Gamma\to\Delta,\ \forall y\,(y<n\supset S'(y))\\
\hline\hline
\Gamma,\ \Pi\to\Delta,\ \Lambda_1,\ \tilde{\tilde{D}},\ \Lambda_2\\
\quad\vdots\\
\quad\Gamma_0\to\Delta_0.
\end{array}$$

Случай 4. Устранение ослаблений в заключительной части вывода P определяется, как обычно. Вывод, полученный из P в результате этого, обозначается через P^* (см. стр. 362). Если в некотором выводе Q последним применяется правило о. к.

$$Q\quad \dfrac{Q_0\left\{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma\to\Delta,\ (0<k\supset S(0))\wedge\ldots\wedge(k-1<k\supset S(k-1))\end{matrix}\right.}{\Gamma\to\Delta,\ \forall y<kS(y),}$$

то редукция определяется следующим образом.

Если Q_0^* имеет вид $\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma^*\to\Delta^*\end{matrix}$, то Q^* совпадает с Q_0^*. Если же Q_0^* имеет вид

$$\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma^*\to\Delta^*,\ (0<k\supset S(0))\wedge\ldots\wedge(k-1<k\supset S(k-1)),\end{matrix}$$

то Q^* есть

$$\dfrac{Q_0^*}{\Gamma^*\to\Delta^*,\ \forall y<kS(y).}$$

Случай 5. Теперь мы предположим, что заключительная часть вывода не содержит никаких применений логических правил, правила индукции, ослаблений, а также начальных секвенций, кроме математических начальных секвенций, но может содержать некоторые применения правила о. к. Мы можем также предположить, что вывод отличается от своей заключительной части, поскольку, если весь вывод совпадает со своей заключительной частью, то заключительную секвенцию можно вывести из математических начальных секвенций с помощью правила о. к., перестановок, сокращений и несущественных сечений, и потому применения правила о. к. можно устранить без привлечения существенных сечений и правила индукции. Устранение существенных сечений и существенная редукция проводятся, как обычно, поскольку все применения правила о. к. являются явными.

Итак, предложение 31.4 доказано.

Рассмотрим некоторую арифметизацию системы **INN** в системе **P**. Введем следующие обозначения:

$\mathrm{Pf}(\ulcorner P\urcorner)$ означает, что „P — некоторый вывод в системе **INN**“;

$\mathrm{Prov}(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner S\urcorner)$ означает „P — некоторый вывод секвенции S“;

$\mathrm{Prov}(\ulcorner S\urcorner)$ означает „секвенция S выводима“;

$\mathrm{Prov}(\ulcorner A\urcorner)$ означает „$\mathrm{Prov}(\ulcorner\to A\urcorner)$“;

$\mathrm{Pf}^*(\ulcorner P\urcorner)$ означает „P — вывод без существенных сечений и применений правила индукции“;

$\mathrm{Prov}^*(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner S\urcorner)$ означает „P — вывод секвенции S, не содержащий существенных сечений и применений правила индукции“;

$\mathrm{Prov}^*(\ulcorner S\urcorner)$ означает „секвенция S выводима без существенных сечений и применений правила индукции“;

$\mathrm{Prov}^*(\ulcorner A\urcorner)$ означает „$\mathrm{Prov}^*(\ulcorner\to A\urcorner)$“.

Следует отметить, что при предположениях, сделанных в этом параграфе, система **INN** является аксиоматизируемой, т. е. множество схем математических начальных секвенций конечно.

Предложение 31.5. *Пусть формула $R(a, \alpha)$ рудиментарна в α. Тогда в системе* **P** *выводима секвенция*

$$\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \exists y R(y, \alpha)\urcorner) \to \mathrm{Prov}^*(\ulcorner \exists y R(y, \alpha)\urcorner).$$

Доказательство. Это предложение мы докажем путем арифметизации доказательства предложения 31.3. Мы только набросаем доказательство достаточности принципа $\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN}))$.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть p — гёделев номер некоторого вывода P в **INN**. Тогда пусть

$\mathrm{ends}(p)$ — гёделев номер заключительной секвенции вывода P;

$Q(p)$ истинно, если и только если заключительная секвенция вывода P обладает свойством $\mathscr{P}$;

$C(p)$ истинно, если и только если P — вывод, не содержащий существенных сечений и применений правил индукции;

$\tilde{o}(p) =_{\mathrm{df}} o(p) \# 0^{(p-1)}$, где $o(p)$ — ординальная диаграмма вывода P, а $0^{(p-1)}$ определяется так же, как и в определении 30.2 (2). Отметим, что $\tilde{o}(p)$ — ординальная диаграмма из системы $O(\mathbf{INN})$ и что все эти функции и предикаты примитивно рекурсивны.

Теперь, исходя из доказательства предложения 31.4, мы построим некоторую примитивно рекурсивную функцию r следующим образом. Пусть p — гёделев номер некоторого вывода P. Если $C(p) \vee \neg Q(p)$, то положим $r(p) = p$. Если же $\neg C(p) \wedge Q(p)$, то положим $r(p)$ равным гёделеву номеру вывода, получающегося в результате редукции вывода P. Тогда функция r примитивно рекурсивна и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\tilde{o}(r(p)) < \tilde{o}(p)$, если $\neg C(p) \wedge Q(p)$;

2) $\tilde{o}(r(p)) = \tilde{o}(p)$, если $C(p)$.

Определим функцию $\tilde{r}(a, b)$ так:

$$\tilde{r}(0, p) = p; \quad \tilde{r}(n+1, p) = r(\tilde{r}(n, p)).$$

Функция $\tilde{r}(a, b)$ также примитивно рекурсивна. Наконец, положим

$$p \lessdot q \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \tilde{o}(p) < \tilde{o}(q).$$

Тогда $\lessdot$ есть примитивно рекурсивное вполне-упорядочение натуральных чисел. Кроме того, порядковый тип отношения $\lessdot$ равен порядковому типу системы $O(\mathbf{INN})$. Поэтому к порядку $\lessdot$ можно применить трансфинитную индукцию с индукционной формулой $Q(p) \supset \exists n C(r(n, p))$, которая эквивалентна Σ_1^0-формуле $\exists n (Q(p) \supset C(r(n, p)))$.

Определение 31.6. (1) Мы говорим, что некоторая формула системы **INN** обладает свойством (Q), если она не содержит кванторов второго порядка и свободных переменных первого порядка.

Для каждой формулы A, обладающей свойством (Q), мы определим понятие подформулы формулы A следующим образом: A является подформулой формулы A; если $B \wedge C$ является подформулой формулы A, то B и C также подформулы A; если $\neg C$ — подформула A, то и C — подформула A; если $\forall x B(x)$ — подформула A, то формула $B(n)$ является подформулой A для каждого нумерала n. Очевидно, что каждая подформула формулы A обладает свойством (Q).

(2) Для подформул формулы A, а также для секвенций, состоящих только из таких подформул, мы можем дать определение истинности T_A. Это определение истинности представляет собой арифметическую формулу с параметрами (т. е. свободными переменными) второго порядка.

Предложение 31.7. *Пусть A — некоторая формула, обладающая свойством* (Q). *Тогда в* **P** *выводимы следующие формулы:*

(1) $\mathrm{T}_A(\ulcorner \neg B\urcorner) \equiv \neg \mathrm{T}_A(\ulcorner B\urcorner)$ *для каждой подформулы B формулы A.*

(2) $\mathrm{T}_A(\ulcorner B \vee C\urcorner) \equiv \mathrm{T}_A(\ulcorner B\urcorner) \vee \mathrm{T}_A(\ulcorner C\urcorner)$ *для каждой пары B, C подформул формулы A.*

(3) $\mathrm{T}_A(\ulcorner \forall x_i B(x_i)\urcorner) \equiv \forall x \mathrm{T}_A(\ulcorner B(n(x))\urcorner)$ *для каждой подформулы $\forall x_i B(x_i)$ формулы A; здесь $n(a)$ обозначает a-й нумерал.*

(4) $\mathrm{T}_A(\ulcorner B(n(b_1), \ldots, n(b_k))\urcorner) \supset B(b_1, \ldots, b_k)$, *где $B(0, \ldots, 0)$ — произвольная подформула формулы A, такая, что для некоторых связанных переменных $y_1, \ldots, y_k$ $B(y_1, \ldots, y_k)$ входит в A.*

(5) $\mathrm{P}_A(a) \wedge \mathrm{Prov}^*(a) \supset \mathrm{T}_A(a)$, *где $\mathrm{P}_A(a)$ означает „a — гёделев номер некоторой секвенции, состоящей из подформул формулы A“.*

Доказательство. Утверждения (1)—(4) можно доказать тем же способом, что и аналогичные утверждения для определения истинности в случае **PA**.

Для доказательства (5) предположим, что $\mathrm{P}_A(a)$ и $\mathrm{Prov}^*(a)$, и пусть P — некоторый вывод, такой, что $\mathrm{Prov}^*(\ulcorner P\urcorner, a)$. Индукцией по числу непосредственных выводов в P, используя (1)—(4), мы можем доказать, что в **P** выводима секвенция

$$\mathrm{T}_A(\ulcorner \Gamma(n(c_1), \ldots, n(c_k)) \to \Delta(n(c_1), \ldots, n(c_k))\urcorner),$$

где $n(c)$ обозначает c-й нумерал, а $\Gamma \to \Delta$ — заключительная секвенция вывода P.

Доказательство теоремы 31.2. Возьмем в предложении 31.7 в качестве A формулу $\forall x \exists y R(x, y, \alpha)$, и пусть $\mathrm{T}(a)$ обозначает $\mathrm{T}_A(a)$. Тогда в **P** выводима секвенция

(1) $\mathrm{Prov}(\ulcorner \forall x \exists y R(x, y, \alpha)\urcorner) \to \forall a \mathrm{Prov}(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner)$.

Согласно предложению 31.5, для всякой свободной переменной a в **P** выводима секвенция

(2) $\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner) \to$
$\to \mathrm{Prov}^*(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner)$.

В силу предложения 31.7 в **P** выводимы следующие секвенции:

(3) $\mathrm{Prov}^*(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner) \to \mathrm{T}(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner)$,

поскольку в **P** выводимо $P_A(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner)$;

(4) $\forall a \mathrm{T}(\ulcorner \exists y R(n(a), y, \alpha)\urcorner) \to \mathrm{T}(\ulcorner \forall x \exists y R(x, y, \alpha)\urcorner)$;

(5) $\mathrm{T}(\ulcorner \forall x \exists y R(x, y, \alpha)\urcorner) \to \forall x \exists y R(x, y, \alpha)$.

Утверждение доказываемой теоремы следует из (1) — (5).

Несколько модифицируя доказательство этой теоремы, мы можем доказать принцип равномерной рефлексии.

Теорема 31.8. *В* **P** *выводима секвенция*

$\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN})) \to$
$\to \forall m(\mathrm{Prov}(\ulcorner \forall x \exists y R(x, y, \alpha, n(m))\urcorner) \supset \forall x \exists y R(x, y, \alpha, m))$.

Доказательство. Сначала заметим, что в **P** выводима секвенция

$\mathrm{Ind}_1(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \exists x R'(x, \alpha, n(m)\urcorner) \to$
$\to \mathrm{Prov}^*(\ulcorner \exists x R'(x, \alpha, n(m))\urcorner)$,

которая получается из секвенции предложения 31.5 заменой формулы $\exists y R(y, \alpha)$ на $\exists x R'(x, \alpha, n(m))$. Взяв в предложении 31.7 в качестве A формулу $\forall z \forall x \exists y R'(x, y, \alpha, z)$, мы получим, что выводимы секвенции (1) — (5), приведенные в доказательстве теоремы 31.2, если вместо $\forall x \exists y R(x, y, \alpha)$ в них подставить $\forall x \exists y R'(x, y, \alpha, n(m))$. Из этого замечания легко следует доказываемая теорема.

Пусть теперь $B(\alpha)$ — произвольная формула системы **P**, имеющая вид

(*) $\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$,

где $B_0(\alpha, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ — бескванторная формула, свободными переменными которой являются только $\alpha, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$.

Подформулы формулы $B(\alpha)$ определяются согласно определению 31.6.

Предложение 31.9. *По данной формуле $B(\alpha)$ вида (*) мы можем дать определение истинности $\mathrm{T}_{B(\alpha)}$ в* **P** *для подформул формулы $B(\alpha)$ с помощью некоторой Σ^0_{2n}-формулы с параметром α второго порядка. Очевидно, что предикат $\mathrm{T}_{B(\alpha)}$ можно распространить на секвенции, состоящие из подформул формулы $B(\alpha)$.*

Определение 31.10. Пусть $B(\alpha)$ — формула вида (*). Условие $\mathscr{S}_{B(\alpha)}$ определим следующим образом. Пусть $\ulcorner S\urcorner$ означает гёделев номер секвенции S. Приводимые ниже предложения, взятые в кавычки, означают, что на самом деле имеется в виду их арифметизация соответствующими формулами. Введем следующие обозначения:

$\mathscr{S}_1(B(\alpha); \ulcorner S\urcorner)$: „каждая формула секвенции S является подформулой формулы $B(\alpha)$“.

$\mathscr{S}_2(\ulcorner S\urcorner)$: „каждая формула в антецеденте секвенции S является бескванторной“.

$\mathscr{S}_3(B(\alpha); \ulcorner S\urcorner)$: $\neg \mathrm{T}_{B(\alpha)}(\ulcorner S\urcorner)$.

$\mathscr{S}_{B(\alpha)}(\ulcorner S\urcorner)$: $\mathscr{S}_1(B(\alpha); \ulcorner S\urcorner) \wedge \mathscr{S}_2(\ulcorner S\urcorner) \wedge \mathscr{S}_3(B(\alpha); \ulcorner S\urcorner)$.

Всюду далее $B(\alpha)$ будет произвольной, но фиксированной формулой вида (*). Для простоты вместо $\mathrm{T}_{B(\alpha)}$ и $\mathscr{S}_{B(\alpha)}$ мы будем сокращенно писать T и $\mathscr{S}$ соответственно.

Предложение 31.11. *Секвенция*

$\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(p, \ulcorner B(\alpha)\urcorner),\ \neg \mathrm{T}(\ulcorner B(\alpha)\urcorner) \to$
$\to \exists q \leqslant \cdot\ p(\mathrm{Pf}^*(q) \wedge \mathscr{S}(\mathrm{ends}(q)))$

выводима в **P**, *где отношение $<\cdot$, вполне упорядочивающее натуральные числа, было определено при доказательстве предложения 31.5, а $\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN}))$ — схема, позволяющая применять к Σ^0_{2n+1}-формулам трансфинитную индукцию по $<\cdot$.*

Это предложение является непосредственным следствием утверждения

(**) секвенция $\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN})),\ \mathscr{S}(\ulcorner S\urcorner),\ \mathrm{Prov}(p, \ulcorner S\urcorner) \to$
$\to \exists q \leqslant \cdot\ p(\mathrm{Pf}^*(q) \wedge \mathscr{S}(\mathrm{ends}(q)))$ выводима в **P**.

Поэтому мы докажем утверждение (**). Оно доказывается применением принципа $\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN}))$ к следующей формуле:

(1) $\mathscr{S}(\mathrm{ends}(p)) \wedge \mathrm{Pf}(p) \supset \exists q \leqslant \cdot\ p(\mathrm{Pf}^*(q) \wedge \mathscr{S}(\mathrm{ends}(q)))$.

Поскольку формулы T и $\mathscr{S}$ принадлежат классам Σ^0_{2n} и Π^0_{2n} соответственно, индукционная формула является Σ^0_{2n+1}-формулой с параметром α.

Для того чтобы доказать (1), очевидно, достаточно показать

(2) $\mathscr{S}(\mathrm{ends}(p)) \wedge \mathrm{Pf}(p) \wedge \neg \mathrm{Pf}^*(p) \supset$
$\supset \exists q(\mathscr{S}(\mathrm{ends}(q)) \wedge \mathrm{Pf}^*(q) \wedge q <\cdot\ p)$,

поскольку, если $\mathrm{Pf}^*(p)$, то мы можем взять в качестве q в (1) само p.

Предположим, что $\mathscr{S}(\mathrm{ends}(p)) \wedge \mathrm{Pf}(p) \wedge \neg \mathrm{Pf}^*(p)$, и найдем q, удовлетворяющее (2). Это делается тем же способом, что и в доказательстве непротиворечивости системы **INN**, хотя, строго говоря, все рассуждения теперь надо проводить в арифметизованном языке.

Пусть P — вывод с гёделевым номером p.

1) Проводим такую же, как и в § 27, подготовку к редукции.

2) Если в заключительной части вывода P имеется явное применение логического правила или применение правила индукции, то доказательство проводится в зависимости от вида самого нижнего из применений таких правил в P.

2.1) Последним таким применением является применение правила $\forall$-справа первого порядка. Пусть P имеет вид

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\Gamma \to \Delta,\ \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, t_i, y_i, \ldots, x_n, y_n) \\
\hline\hline
\Gamma \to \Delta,\ \exists x_i \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_n, y_n) \\
\vdots \\
\Pi \to \Lambda_1,\ \exists x_i \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_n, y_n),\ \Lambda_2.
\end{array}$$

Заметим, что t_i — замкнутый терм, построенный из 0, 1, $+$ и $\cdot$. Поэтому терм t_i можно вычислить, и он равен некоторому нумералу m_i. Вывод P редуцируется к следующему выводу:

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\Gamma \to \Delta,\ \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, t_i, y_i, \ldots, x_n, y_n) \\
\hline\hline
\Gamma \to \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, m_i, y_i, \ldots, x_n, y_n),\ \Delta, \\
\qquad\qquad \exists x_i \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_n, y_n) \\
\vdots \\
\Pi \to \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1 \ldots, m_i, y_i, \ldots, x_n, y_n),\ \Lambda_1, \\
\qquad \exists x_i \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_n, y_n),\ \Lambda_2.
\end{array}$$

Из

$$\neg \mathrm{T}(\ulcorner \exists x_i \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_n, y_n)\urcorner)$$

вытекает

$$\neg \mathrm{T}(\ulcorner \forall y_i \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, m_i, y_i, \ldots, x_n, y_n)\urcorner).$$

2.2) Последним применением, удовлетворяющим указанному выше условию, является применение правила первого порядка $\forall$-справа. Пусть P имеет вид

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\Gamma \to \Delta,\ \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, a, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n) \\
\hline
\Gamma \to \Delta,\ \forall y_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n) \\
\vdots \\
\Pi \to \Lambda_1,\ \forall y_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n),\ \Lambda_2.
\end{array}$$

Этот вывод редуцируется к такому выводу:

$$\begin{array}{l}
(l_i) \\
\vdots \\
\Gamma \to \Delta,\ \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, l_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n) \\
\hline\hline
\Gamma \to \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, l_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n),\ \Delta, \\
\qquad\qquad \forall y_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, t_1, s_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n) \\
\vdots \\
\Pi \to \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, l_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n),\ \Lambda_1, \\
\qquad \forall y_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n),\ \Lambda_2,
\end{array}$$

где (l_i) означает подстановку нумерала l_i в вывод вместо свободной переменной a, причем l_i выбран так, что справедливо

$$\mathrm{T}(\ulcorner \forall x_{i+1} \ldots \forall x_n \exists y_n \neg B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, l_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n)\urcorner)$$

в предположении, что верно

$$\neg \mathrm{T}(\ulcorner \forall y_i \exists x_{i+1} \ldots \exists x_n \forall y_n B_0(\alpha, m_1, l_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n)\urcorner)$$

или

$$\exists y \mathrm{T}(\ulcorner \forall x_{i+1} \ldots \forall x_n \exists y_n \neg B_0(\alpha_1, m_1, l_1, \ldots, n(y), x_{i+1}, \ldots, x_n, y_n)\urcorner),$$

где $n(y)$ означает y-й нумерал.

2.3) Во всех остальных случаях последнего применения логического правила доказательство проводится легко. В силу того что $\mathscr{S}_1(B(\alpha), \mathrm{ends}(p))$ и $\mathscr{S}_2(\mathrm{ends}(p))$ в заключительной части нет применений правил первого порядка $\forall$-слева и $\exists$-слева.

2.4) Последним применением является применение правила индукции. В этом случае доказательство проходит так же, как и в § 27.

3) Теперь мы можем предположить, что в заключительной части вывода P нет явных применений логических правил и применений правила индукции. Далее мы можем в точности следовать доказательству непротиворечивости, приведенному в § 27. Таким образом, утверждение (**) можно считать доказанным.

Предложение 31.12. *В* **P** *выводима секвенция*

$$\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner B(\alpha)\urcorner),\ \neg \mathrm{T}(\ulcorner B(\alpha)\urcorner) \to$$

где $B(\alpha)$ — *произвольная формула вида* (*).

Доказательство. Из определения предиката T вытекает, что выводима секвенция $\mathrm{Pf}^*(q) \to \mathrm{T}(\mathrm{ends}(q))$. Но это противоречит $\mathscr{S}_3(\mathrm{ends}(q), B(\alpha))$. Поэтому доказываемое предложение следует из предложения 31.11.

Теперь мы можем привести другую форму принципа рефлексии для **INN**.

Теорема 31.13. (Такеути и Ясуги). *Для произвольного арифметического предложения $A(\alpha)$ с параметром α второго порядка в* **P** *выводима секвенция*

$$\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner A(\alpha)\urcorner) \to A(\alpha),$$

где принцип $\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN}))$ *применяется к формулам системы* **P**, *т. е. к арифметическим формулам с параметрами второго порядка.*

Доказательство. Хорошо известно, что для некоторой формулы $B(\alpha)$ вида $(*)$ в **P** выводима формула

(1) $$A(\alpha) \equiv B(\alpha).$$

Из предложений 31.12 и 31.7 следует выводимость в **P** секвенций

(2) $$\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner A(\alpha)\urcorner) \to T_{B(\alpha)}(\ulcorner B(\alpha)\urcorner)$$

и

(3) $$T_{B(\alpha)}(\ulcorner B(\alpha)\urcorner) \to B(\alpha).$$

Известно также, что в **P** выводима формула

(4) $$\mathrm{Prov}(\ulcorner A(\alpha)\urcorner) \equiv \mathrm{Prov}(\ulcorner B(\alpha)\urcorner).$$

Тогда из (1) — (4) следует утверждение теоремы.

Здесь мы тоже можем доказать принцип равномерной рефлексии.

Теорема 31.14. *В* **P** *выводима секвенция*

$$\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN})) \to \forall m(\mathrm{Prov}(\ulcorner A(\alpha,\ n(m))\urcorner) \supset A(\alpha,\ m)),$$

где принцип $\mathrm{Ind}_2(O(\mathbf{INN}))$ *применяется к формулам системы* **P**

Доказательство. Эта теорема доказывается с помощью некоторой модификации предыдущей теоремы, аналогично тому, как была доказана теорема 31.8. Сначала применим приведенное в доказательстве предложения 31.11 утверждение $(**)$ к $\ulcorner A(\alpha,\ n(m))\urcorner$ вместо $\ulcorner B(\alpha)\urcorner$. Затем в качестве $B(\alpha)$ возьмем формулу $\forall z A(\alpha,\ z)$ и рассмотрим определение истинности для нее. После этих изменений оставшаяся часть доказательства теоремы 31.13 проходит полностью.

Теперь мы приведем другую формулировку принципа рефлексии для формул вида $\forall\phi\ A(\phi)$, где $A(\alpha)$ — арифметическая в α формула. Мы сформулируем его в виде принципа равномерной рефлексии.

Теорема 31.15. *Пусть $A(\alpha,\ a)$ — арифметическая в α формула, и пусть A не содержит отличных от α и a свободных переменных. Тогда в* **INN** *выводима секвенция*

(1) $$\mathrm{Ind}'(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \forall\phi A(\phi,\ n(a))\urcorner) \to \forall\phi A(\phi,\ a),$$

где принцип Ind' *применяется к Σ_3^0-формулам с параметрами второго порядка.*

Доказательство. Сначала, слегка расширив язык системы, как указано в определении 31.1, получим, что существует бескванторная формула $R(\alpha,\ b,\ c,\ a)$, для которой в **INN** выводима формула

(2) $$\forall\phi A(\phi,\ a) \equiv \forall\phi\exists x\forall y R(\phi,\ x,\ y,\ a).$$

Тогда из (2) вытекает, что в **INN** выводима формула

(3) $$\mathrm{Prov}(\ulcorner \forall\phi A(\phi, n(a))\urcorner) \equiv \mathrm{Prov}(\ulcorner \forall\phi\exists x\forall y R(\phi,\ x,\ y,\ n(a))\urcorner).$$

Наконец, (2) и (3) гарантируют нам, что для того, чтобы вывести (1), нам надо только вывести в **INN** секвенцию

(4) $$\mathrm{Ind}'(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \exists x\forall y R(\alpha,\ x,\ y,\ n(a))\urcorner) \to \exists x\forall y R(\alpha,\ x,\ y,\ a).$$

Но (4) следует из

(5) $$\mathrm{Ind}'(O(\mathbf{INN})),\ \mathrm{Prov}(\ulcorner \exists x\forall y R(\alpha,\ x,\ y,\ n(a))\urcorner),\ \neg T(\ulcorner \exists x\forall y R(\alpha,\ x,\ y,\ n(a))\urcorner) \to .$$

А выводимость секвенции (5) доказывается так же, как и предложение 31.11.

Заметим, что T является определением истинности для формулы $\exists x\forall y R(\alpha,\ x,\ y,\ a)$, так что мы можем считать, что T является Σ_2^0-формулой с параметром α. Но отсюда вытекает, что принцип $\mathrm{Ind}'(O(\mathbf{INN}))$ применяется к Σ_3^0-формулам с параметром α.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Г. ТАКЕУТИ
ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Научный редактор Г. М. Цукерман
Младший научный редактор Э. Г. Иванова
Художник В. И. Шаповалов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 1082

Сдано в набор 31.01.78. Подписано к печати 24.10.78. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 13 бум. л. 26 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 24,19. Изд. № 1/9533. Зак. 1052. Тираж 14 000 экз. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Мир»
195271, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
«Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»
готовится к выпуску

Перечислительные задачи комбинаторного анализа: Сб. статей 1975—1977. Пер. с англ. Сост. С. В. Яблонский, 18 л., 1 р. 70 к. План 1979 г., № 39.

Сборник статей по теории перечисления — одному из наиболее стройных разделов комбинаторного анализа, методы и результаты которого широко применяются не только в математике, но и в других областях науки — экономике, физике, химии. По своей тематике сборник близок к известной советскому читателю книге Ф. Харари, Э. Палмера «Перечисление графов» (М., Мир, 1976). В нем представлены классические работы по теории перечислений (Редфилда, Пойа, Оттера) и наиболее важные современные направления и результаты (Де Брёйна, Рота, Бендера и др.).

Книга полезна всем специалистам по дискретной математике, а также научным работникам, инженерам, аспирантам и студентам, использующим методы комбинаторного анализа.

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Заблаговременно оформляйте заказы на интересующие Вас книги. Заказы принимаются в магазинах, торгующих научно-технической литературой.