СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

В ЧЕТЫРЕХ ЧАСТЯХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ДЖ. БАРВАЙСА

Часть IV

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ И КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА

Перевод с английского
Г. В. Давыдова
Г. Е. Минца

Под редакцией
В. П. Оревкова

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

HANDBOOK OF MATHEMATICAL LOGIC

J. BARWISE (ED.)

NORTH-HOLLAND
PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM NEW YORK OXFORD
1977

Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/Под ред. Дж. Барвайса.— Ч. IV. **Теория доказательств и конструктивная математика:** Пер. с англ. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983 г. — 392 с.

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Последний том «Справочной книги по математической логике» содержит обзоры по наиболее современным направлениям теории доказательств и конструктивной математики. Эти обзоры не претендуют на полное описание новейших достижений теории доказательств. Это было бы очень трудно сделать в рамках одной книги. Составители ограничились обзорами небольшого числа тех областей теории доказательств, которые в последнее время активно развивались и которые тесно переплетаются с другими областями математической логики, алгебры и топологии. В худшем положении оказалась конструктивная математика. В посвященной ей главе 5, написанной А. С. Трулстрой, термин «конструктивная математика» трактуется очень широко: по А. С. Трулстре конструктивная математика включает в себя интуиционизм. Поэтому в главе 5 уделяется много внимания различным современным вариантам интуиционизма, а некоторые важные специфические понятия и результаты собственно конструктивной математики не затронуты.

При переводе было дано несколько добавлений. Они посвящены следующим темам: доказательству теоремы Г. С. Цейтина о непрерывности конструктивных отображений, теореме Эрбрана, построению универсального дерева поиска вывода в арифметике с ω-правилом, ступенчатой семантике А. А. Маркова, иерархии способов пониманий математических суждений, разработанной Н. А. Шаниным, и теореме Л. Э. Я. Брауэра о неподвижной точке для конструктивных отображений квадрата в себя. Все эти добавления затрагивают важные направления и результаты конструктивной математики и теории доказательств,

которые или не были изложены в оригинале, или были изложены недостаточно полно.

В процессе перевода без специальных оговорок и примечаний были исправлены некоторые опечатки и неточности, имевшиеся в оригинале. Все эти поправки, за исключением исправлений мелких опечаток, были согласованы с авторами. При переводе в списки литературы были добавлены новые работы. Все они отмечены знаком *.

В. П. Оревков

ВВЕДЕНИЕ

Математик строит доказательства. Специалист по теории доказательств рассматривает сами доказательства как математические объекты и изучает их с помощью инструментов современной математики.

Теория доказательств началась с программы Гильберта. Идея Гильберта состояла в том, чтобы использовать конкретную, финитистскую природу доказательств для обеспечения простого обоснования математики. Теоремы Гёделя о неполноте нанесли этой программе ошеломляющий удар. Эти теоремы принадлежат к числу наиболее важных в логике и рассматриваются в первой главе, написанной Сморинским.

Разумный выбор тем из теории доказательств оказался более трудным, чем для других областей логики, так как данная область расходится по многим разнообразным направлениям. Мы пытались выбрать вопросы, иллюстрирующие те части теории доказательств, которые хорошо разработаны и имеют отношение к другим частям логики и математики. Читая получившиеся главы, мы можем четко видеть проходящие сквозь них нити, которые кажутся главными заботами нынешней теории доказательств. Мы упомянем две из них.

Одна из важнейших нитей, связывающих теорию доказательств воедино, — это вопрос: «Насколько больше мы знаем об *истинном* суждении после того, как стало известно, что оно *доказуемо* в конкретной теории или имеет доказательство, находящееся в некоторой нормальной форме?» Другая — поиск соотношений между принципами, формулируемыми в математических терминах и в терминах теории доказательств.

Оба эти аспекта теории доказательств красиво иллюстрирует вторая глава, принадлежащая Швихтенбергу. Он показывает читателю, как генценовский метод устранения сечения может быть использован для широкого спектра таких исследований.

Первая из упомянутых выше нитей является центральной для третьей главы, написанной Стетменом. Он излагает пример, показывающий, насколько больше можно узнать из прямого

доказательства теоремы в формальном исчислении равенств, чем мы узнаем из непрямого доказательства.

Четвертая глава, принадлежащая Феферману, рассматривает некоторые формальные теории математических объектов высших типов, функций на натуральных числах, множеств таких функций и т. д. Эти теории должны быть неполны, согласно теореме Гёделя, но эмпирический опыт показывает, что они воплощают естественные математические принципы и достаточно сильны для того, чтобы формализовать в них большие куски математики. Феферман изучает как упомянутые вопросы, так и относительную силу различных теорий с помощью результатов о независимости.

В пятой главе Трулстра изучает конструктивные понятия доказательства. Рассмотрим, например, доказательство формулы $\varphi \vee \psi$ («φ или ψ»). Математик-классик примет доказательство формулы $\varphi \vee \psi$, даже если оно не говорит ему, которая из двух формул в действительности верна. (Возьмем, например, $\varphi \vee \neg\varphi$.) Конструктивист требует бóльшего. Для него доказательство формулы $\varphi \vee \psi$ должно содержать либо доказательство формулы φ, либо доказательство формулы ψ, и он должен быть в состоянии сказать, какая из этих альтернатив имеет место. Однако за такими простыми соображениями скрываются чрезвычайно проблематичные вещи. Изучение конструктивных доказательств порождает несколько конкурирующих и взаимно несравнимых взглядов на конструктивную математику, причем *интуиционизм* — один из наиболее известных среди них.

В шестой главе Фурман обсуждает соотношение между интуиционизмом и понятием *топоса*, происходящим из теории категорий. В главе 8 «Теории моделей», написанной Коком и Рейесом, представлен взгляд специалиста по теории категорий на некоторые части логики. Здесь мы получаем взгляд логика на некоторые части теории категорий. В написанной Барендрегтом седьмой главе обсуждается недавний прогресс в старых поисках последовательной теории самоприменимых функций.

Данная книга заканчивается драматическим финалом в виде восьмой главы, принадлежащей Парису и Харрингтону, которая обсуждает истинное утверждение из конечной комбинаторики, недоказуемое в арифметике Пеано.

А. С. Трулстра

Глава 1

ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ

К. Сморинский

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Программа Гильберта

На рубеже столетия математику преследовали различные трудности, начиная с антиномий и парадоксов и кончая противоречиями как формальными, так и личными. Трудности встречались в математике и раньше, но их удавалось устранить или обойти. Древние греки в конце концов пожали плечами и приняли иррациональные числа; специалисты в области математического анализа избежали парадоксов, связанных с бесконечно малыми величинами, когда сумели, наконец, выделить и строго ввести понятия предела и непрерывности. Даже в теории

*) В параграфах и пунктах, отмеченных звездочкой, рассматриваются более элементарные вопросы.

множеств Цермело предложил решение проблемы парадоксов еще в 1908 г. Прежде чем аксиоматизировать некоторую область математики, мы должны знать, о чем говорим. Поэтому вместо того, чтобы взять в качестве аксиом теории множеств некоторые интуитивно очевидные свойства конечных множеств, некоторые очевидные свойства множества всех подмножеств данного множества и еще несколько очевидных свойств какой-нибудь третьей сущности — процесс, который почти гарантирует противоречие, — Цермело сначала описал кумулятивную иерархию, а затем перечислил аксиомы для этой *единственной* сущности. До последних работ по большим кардиналам все аксиомы, добавленные позднее, были просто очередными свойствами, очевидным образом истинными для этой иерархии, но формально невыводимыми.

Ситуацию, которая возникла затем, социологи описали бы в терминах «культурной отсталости». Несмотря на наличие непротиворечивой теории множеств, математики продолжали беспокоиться о непротиворечивости. Некоторые сомневались даже в непротиворечивости самой арифметики! Ситуацию еще более ухудшали гротескные попытки Л. Э. Я. Брауэра превратить математику в религию.

Когда в 1920 г. Герман Вейль попал в сети брауэровского безумия, Давид Гильберт решил вмешаться. Он заметил (Рид [1], с. 155 (с. 202 русского перевода)): «То, что делают Вейль и Брауэр, есть не что иное, как возрождение идей Кронекера! Они стремятся спасти математику, выбрасывая за борт все, что причиняет беспокойство... Они крушат и рубят науку. Если бы мы приняли такую реформу, которую они предлагают, мы подверглись бы риску потерять бо́льшую часть наших самых ценных сокровищ!»

Неистовство, с которым Гильберт сделал это заявление, весьма легко можно понять, если вспомнить, что Гильберт составил себе имя использованием неконструктивных приемов. Его решение проблемы Гордана в теории инвариантов (Рид [1], гл. V) вызвало у Гордана обвинение в «теологии». Кронекер отказывался верить, что эта теорема, утверждавшая существование объекта, удовлетворяющего некоторому условию, действительно доказана, так как эти объекты не были явно построены. Линдеман называл эти приемы «unheimlich» (жуткими). Поэтому неудивительно, что Гильберт продолжал (Рид [1], с. 157 (с. 204 русского перевода)): «Я уверен, что насколько у Кронекера было мало шансов упразднить иррациональные числа, ... настолько же маловероятен успех Брауэра и Вейля. Брауэр не представляет собой революцию, как это считает Вейль, только повторение попытки организовать Putsch (путч)».

Даже если Гильберт и верил в теорию множеств Цермело, он не мог ее использовать: ведь он должен был не обеспечить математику, а остановить путч. Поэтому Гильберт предложил программу сохранения: чтобы оправдать использование абстрактных методов, он хотел показать как можно более простыми средствами, что абстрактные методы *консервативны*, т. е. что любое конкретное утверждение, которое мы можем вывести посредством таких абстрактных методов, выводимо и без них.

Чтобы разъяснить эти вопросы, мы введем некоторое количество гильбертовского жаргона, точное значение которого Гильберт никогда четко не разъяснял. Во-первых, в области конкретной математики имеются *финитно осмысленные* утверждения и *финитные* средства доказательства. Финитно осмысленные утверждения называются *реальными* утверждениями и они являются (скажем) тождествами вида

$$\forall x\,(fx = gx),$$

где f, g — достаточно простые функции (например, примитивно рекурсивные). Финитные доказательства соответствуют, грубо говоря, вычислениям или комбинаторным манипуляциям. Более сложные утверждения лишь *идеальны* и как таковые не имеют смысла, однако ими можно манипулировать абстрактно — точно так же, как i не является вещественным числом, но с ним можно оперировать алгебраически, свободно используя тот факт, что $i^2 = -1$. Гильберт считал, что точно так же, как использование символа i не ведет к новым алгебраическим тождествам, использование идеальных утверждений и абстрактных рассуждений о них не позволит вывести каких-либо новых реальных утверждений, т. е. таких, которые не были бы уже выводимы финитно. Чтобы опровергнуть Вейля и Брауэра, Гильберт требовал, чтобы последнее свойство консервативности было финитно доказуемо.

Чтобы идеальные утверждения и абстрактные рассуждения допускали финитную трактовку, их нужно было бы закодировать в некоторой формальной системе. Тогда абстрактные рассуждения кодировались бы простыми комбинаторными манипуляциями, и аналогичные простые комбинаторные манипуляции можно было бы использовать для доказательства этой консервативности.

Сейчас можно было бы попытаться проанализировать причины, по которым Гильберт считал, что это может быть сделано, или допущения, необходимо лежащие в основе такой программы. Автор не находит эти вопросы особенно интересными, поэтому мы обойдем их.

Вероятно, в мозгу читателя возник вопрос: «Все это очень хорошо, но причем здесь *непротиворечивость*?» Ведь, как

известно всем, предполагается, что эта глава написана о непротиворечивости. Гильбертовская программа установления непротиворечивости является естественным отпрыском и наследницей гильбертовской программы установления консервативности. На это есть две причины.

(i) Непротиворечивость — это утверждение о том, что некоторая цепочка символов невыводима. Так как выводы — это простые комбинаторные конфигурации, то это утверждение финитно осмыслено и оно должно обладать финитным доказательством.

(ii) Доказательство непротиворечивости формальной системы, кодирующей абстрактные понятия, уже устанавливает результат о консервативности.

Причина (i) непосредственно очевидна, и мы не обсуждаем ее. Причина (ii) особенно важна, и нам придется прокомментировать ее. Пусть **R** обозначает формальную систему, кодирующую реальные утверждения и их финитные доказательства, а **I** — формальную систему, кодирующую идеальные утверждения и абстрактные рассуждения о них. Пусть φ — реальное утверждение $\forall x(fx = gx)$. Если теперь $\mathbf{I} \vdash \varphi$, то имеется вывод d утверждения φ в **I**. Но выводы — это конкретные объекты, и для некоторой реальной формулы $P(x, y)$, кодирующей выводы в **I**, имеет место

$$\mathbf{R} \vdash P(d, \ulcorner\varphi\urcorner),$$

где $\ulcorner\varphi\urcorner$ — некоторый код утверждения φ. Если бы φ было ложно, мы имели бы $f(a) \neq g(a)$ для некоторого a, и, следовательно,

$$\mathbf{R} \vdash P(c, \ulcorner\neg\varphi\urcorner)$$

для некоторого c. В действительности мы имели бы более сильное утверждение

$$\mathbf{R} \vdash fx \neq gx \to P(c_x, \ulcorner\neg\varphi\urcorner)$$

для некоторого c_x, зависящего от x. Но если в **R** доказуема непротиворечивость **I**, то мы видим, что

$$\mathbf{R} \vdash \neg(P(d, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge P(c, \ulcorner\neg\varphi\urcorner)),$$

откуда $\mathbf{R} \vdash fx = gx$ со свободной переменной x, т. е. $\mathbf{R} \vdash \forall x(fx = gx)$.

Приведенное выше рассуждение несколько расплывчато и изобилует дополнительными предположениями. Чтобы сделать его строгим, нам пришлось бы снизойти до элементарных основ кодирования, а это больше, чем мы собираемся сделать в этом параграфе. Предположения о предикате P выявлены в §§ 2 и 3.

Формальный вариант приведенного выше рассуждения описан в § 4.

Рассуждение из предшествующего абзаца очевидным образом подстрекало Гильберта к формулировке его программы установления непротиворечивости: разработать финитные средства доказательства непротиворечивости различных формальных систем, кодирующих абстрактные рассуждения с идеальными утверждениями.

Так как программа установления непротиворечивости была не уже, чем общая программа установления консервативности, и так как она выглядела более доступной, Гильберт сосредоточился на ней, утверждая следующее (Мешковский [1], с. 56):

«Если произвольно заданные аксиомы не противоречат друг другу через свои следствия, тогда они истинны, тогда объекты, определяемые этими аксиомами, существуют. Это для меня — критерий истины и существования».

Резюмируем: гильбертовская программа установления непротиворечивости имела своей целью доказательство непротиворечивости сильных систем финитными средствами. Это решение полностью оправдало бы использование абстрактных понятий. Доказательство успешно отмело бы нападки Брауэра и снова вернуло бы Вейля в строй.

Стыд и позор, что программа не смогла сработать.

§ 2. Теоремы Гёделя

В 1930 г., когда ему не было и 30 лет, Курт Гёдель объявил важный результат: гильбертовская программа установления непротиворечивости не может быть проведена в жизнь. Действительно, он доказал две теоремы, которые тогда считались умеренно разрушительными, и до сих пор вызывают ночные кошмары у нетвердых духом. Приблизительная формулировка этих теорем такова.

Первая теорема о неполноте. *Пусть* **T** *— формальная теория, содержащая арифметику. Тогда имеется предложение* φ, *которое утверждает свою собственную непротиворечивость и таково, что*:

(i) *если* **T** *непротиворечива, то* $\mathbf{T} \not\vdash \varphi$;

(ii) *если* **T** ω*-непротиворечива, то* $\mathbf{T} \not\vdash \neg\varphi$.

Вторая теорема о неполноте. *Пусть* **T** *— непротиворечивая формальная теория, содержащая арифметику. Тогда*

$$\mathbf{T} \not\vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}},$$

где $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ *— предложение, выражающее непротиворечивость теории* **T**.

Вторая теорема очевидным образом разрушает программу установления непротиворечивости. Действительно, если в **R** нельзя доказать даже ее собственную непротиворечивость, то почему можно надеяться, что она докажет непротиворечивость системы **I**? (**R** и **I** описаны в § 1.) Даже первая теорема дает аналогичный эффект, так как: (1) утверждение φ реальное; (2) легко видеть, что φ истинно. ((1) требует изучения построения φ; (2) усматривается из того, что φ утверждает свою недоказуемость и действительно недоказуемо.) Таким образом, первая теорема показывает, что программа установления консервативности не может быть проведена, а значит, то же верно и для программы установления непротиворечивости.

Рассмотрим доказательства этих замечательных теорем.

2.1. Предварительные сведения. Условия в обеих теоремах, предусматривающие, что **T** содержит арифметику, — это просто средство избавиться от непосредственной формулировки требований, которые должны быть выполнены. Это — требования на возможность кодирования, а как показал Гёдель, можно проделать очень большой объем кодирования, используя натуральные числа. Мы отложим до § 3 рассмотрение того, как осуществляется кодирование, и обсудим здесь, *что* и *где* нужно кодировать.

Во всей этой главе **T** обозначает некоторую фиксированную, но произвольную формальную теорию. Из соображений удобства мы будем считать, что кодирование происходит в некоторой фиксированной формальной теории **S** и что **T** содержит **S**. Мы не конкретизируем **S**: обычно в качестве **S** берут некоторую формальную арифметическую систему, хотя зачастую более удобна слабая теория множеств. Смысл выражения «**S** содержится в **T**» лучше пояснить на примере, чем определить. Если **S** есть некоторая формальная арифметическая система, а **T** есть, скажем, **ZF**, то **T** содержит **S** в том смысле, что есть хорошо известное вложение или *интерпретация* теории **S** в **T**. Мы будем иметь в виду вложение именно такого типа.

Так как кодирование должно происходить в **S**, мы должны иметь большой запас констант и замкнутых термов, которые будут использованы в качестве кодов. (Например, в формальной арифметике мы имеем $\overline{0}$, $\overline{1}$, ...) **S** будет также содержать некоторые функциональные символы, описываемые ниже.

Каждой формуле φ в языке теории **T** ставится в соответствие замкнутый терм $\ulcorner\varphi\urcorner$, называемый *кодом* φ.

[N. B. Если φx — формула со свободной переменной x, то $\ulcorner\varphi x\urcorner$ — замкнутый терм, кодирующий формулу φx, причем x рассматривается как *синтаксический объект*, а не как параметр.] Логическим связкам и кванторам соответствуют функциональные символы neg, imp и т. д. такие, что для всех формул φ, ψ

имеет место $\mathbf{S} \vdash \mathrm{neg}(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$, $\mathbf{S} \vdash \mathrm{imp}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) = \ulcorner\varphi \to \psi\urcorner$ и т. д. Особенно важен оператор подстановки, представленный функциональным символом sub. Для формулы φx и терма t с кодом $\ulcorner t\urcorner$

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{sub}(\ulcorner\varphi x\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\varphi t\urcorner.$$

Итерация операции sub дает возможность определить sub_3, sub_4, ... такие, что

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{sub}_n(\ulcorner\varphi x_1 \dots x_n\urcorner, \ulcorner t_1\urcorner, \dots, \ulcorner t_n\urcorner) = \ulcorner\varphi t_1 \dots t_n\urcorner.$$

Наконец, мы закодируем также выводы и имеем бинарное отношение $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y)$ (читается: «x доказывает y» или «x есть доказательство для y») такое, что для замкнутых термов t_1, t_2 соотношение $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(t_1, t_2)$ верно тогда и только тогда, когда t_1 есть код вывода в **T** формулы с кодом t_2. Отсюда следует, что $\mathbf{T} \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(t, \ulcorner\varphi\urcorner)$ для некоторого замкнутого терма t.

Если мы положим

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(y) \leftrightarrow \exists x\, \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y),$$

то получим предикат, утверждающий доказуемость. Однако

$$\mathbf{T} \vdash \varphi \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner), \qquad (*)$$

верно, только если **S** действительно *корректна* (этот термин будет определен позднее). Причина в том, что квантор существования в $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}$ делает это суждение существенно идеальным: в то время как в непротиворечивой теории не могут быть доказуемы ложные реальные суждения $\forall x(fx = gx)$, в ней могут быть доказуемы ложные экзистенциальные суждения $\exists x(fx = gx)$. Таким образом, (*) может опровергаться.

Однако описанное выше кодирование можно провести таким образом, что следующие важные условия выполнены для всех предложений φ:

D1 $\mathbf{T} \vdash \varphi$ влечет $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

D2 $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$.

D3 $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Условия D1 — D3 называются *условиями на отношение выводимости* (короче, *условиями выводимости*).

2.2. Доказательство теоремы о неполноте. Теорема о неполноте зависит от следующего утверждения.

2.2.1. Теорема (лемма о диагонализации). *Пусть φx — формула в языке теории* **T**, *и все ее свободные переменные указаны явно. Тогда имеется предложение ψ такое, что*

$$\mathbf{S} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner).$$

[N. B. Если φ или ψ не принадлежат языку теории $\mathbf{S}$, то мы имеем в виду, что эквивалентность доказана в теории $\mathbf{S}'$, язык которой тот же, что у $\mathbf{T}$, а нелогические аксиомы те же, что в $\mathbf{S}$. Теория $\mathbf{S}'$ консервативна над $\mathbf{S}$.]

Доказательство. Для данной φx пусть $\theta x \leftrightarrow \varphi(\mathrm{sub}(x, x))$ — диагонализация формулы φ. Пусть $m = \ulcorner \theta x \urcorner$ и $\psi = \theta m$. Тогда мы утверждаем, что

$$\mathbf{S} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

Действительно, в $\mathbf{S}$ мы видим, что

$$\psi \leftrightarrow \theta m \leftrightarrow \varphi(\mathrm{sub}(m, m))$$
$$\leftrightarrow \varphi(\mathrm{sub}(\ulcorner \theta x \urcorner, m)) \text{ (так как } m = \ulcorner \theta x \urcorner)$$
$$\leftrightarrow \varphi(\ulcorner \theta m \urcorner) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner). \square$$

Мы применим 2.2.1 к формуле $\neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(x)$.

2.2.2. Теорема (первая теорема о неполноте). *Пусть* $\mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. *Тогда*:

(i) $\mathbf{T} \nvdash \varphi$;

(ii) *при некотором дополнительном предположении* $\mathbf{T} \nvdash \neg \varphi$.

Доказательство. (i) Заметим, что $\mathbf{T} \vdash \varphi$ влечет $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ в силу D1, что влечет $\mathbf{T} \vdash \neg \varphi$ вопреки непротиворечивости теории $\mathbf{T}$.

(ii) Упомянутое дополнительное предположение — это усиление обращения D1, а именно: из $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ следует $\mathbf{T} \vdash \varphi$.

Мы имеем $\mathbf{T} \vdash \neg \varphi$, следовательно, $\mathbf{T} \vdash \neg \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$, так что $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ и, ввиду дополнительного предположения, $\mathbf{T} \vdash \varphi$ снова вопреки непротиворечивости теории $\mathbf{T}$. $\square$

2.2.3. Теорема (вторая теорема о неполноте). *Пусть* $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ *обозначает* $\neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner)$, *где* Λ — *любое удобное противоречивое утверждение. Тогда*

$$\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}.$$

Доказательство. Пусть φ удовлетворяет условию теоремы 2.2.2. Мы покажем, что $\mathbf{S} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$.

Заметим, что $\mathbf{S} \vdash \varphi \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ влечет $\mathbf{S} \vdash \varphi \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner)$, так как $\mathbf{T} \vdash \Lambda \rightarrow \varphi$ влечет $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \rightarrow \varphi \urcorner)$ в силу D1, что влечет $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ по D3.

Но $\varphi \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner)$ — это как раз $\varphi \rightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$, и мы доказали половину эквивалентности.

Обратно, в силу D2, $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$, что влечет $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ в силу D1, D3, так как $\varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. Это дает

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \wedge \neg \varphi \urcorner) \text{ в силу D1, D3}$$

и средств логики, что влечет $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner)$ в силу

D1, D3 и средств логики. С помощью контрапозиции получаем $\mathbf{S} \vdash \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$, а это дает $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \varphi$ в силу определений. $\square$

2.2.4. Следствие. $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{T}+\neg \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}}$.

Доказательство. В силу доказательства теоремы 2.2.3:

(i) $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$,

(ii) $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \leftrightarrow \varphi$.

С помощью D2, D3 отсюда следует, что $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \urcorner)$, так что

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \neg \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \Lambda \urcorner),$$

что дает $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{T}+\neg \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}}$. $\square$

Следствие 2.2.4 — это формализованная вторая теорема о неполноте.

Мы завершим изложение этих доказательств двумя замечаниями.

2.2.5. Замечание. В процессе доказательства второй теоремы о неполноте установлено, что рефлексивное (т. е. содержащее упоминание о себе самом) предложение, утверждающее собственную недоказуемость, эквивалентно предложению, утверждающему, что рассматриваемая система непротиворечива. Следовательно, это предложение *единственно* с точностью до доказуемой эквивалентности.

2.2.6. Замечание. Если читатель сравнит нестрогую формулировку первой теоремы о неполноте, приведенную в начале § 2, с формулировкой 2.2.2 (ii), он заметит, что мы устранили упоминание о ω-непротиворечивости. Мы рассмотрим это понятие в 4.2.

2.3. **Что будет.** Чтобы завершить доказательство теоремы о неполноте, осталось рассмотреть только технику кодирования. Поэтому здесь, видимо, уместно вставить короткое описание оставшейся части главы.

В § 3 мы рассматриваем кодирование и некоторые близкие вопросы. В § 4 касаемся метаматематических свойств, отличных от непротиворечивости; там также излагаются обобщения теорем о неполноте. В § 5 мы приводим два приложения понятий и результатов §§ 2 и 4. Теоремы о неполноте получаются путем формализации синтаксиса; в § 6 мы посмотрим, что получится, если формализовать семантику.

§ 3. Кодирование

Увлекательно разрабатывать подробности кодирования, но их скучно читать. Автор написал этот параграф ради собственной пользы и ничуть не обидится, если читатель его пропустит.

В популярных изложениях мы часто заменяем точные утверждения неточными или даже точными, но ложными. Пример последней ситуации — распространенное утверждение о том, что доказательство второй теоремы о неполноте получается путем формализации доказательства первой. Правильнее было бы сказать, что мы формализуем D1 и D2, а затем сводим вторую теорему к первой. В п. 2.1 мы схитрили в двух местах:

(i) в расплывчатой формулировке того, в каком смысле система **T** содержит **S**;

(ii) в нашем замечании о функции sub.

Мы рассмотрим (i) сейчас, а (ii) в 3.2.2.

В 2.1 мы, походя, заметили, что **T** содержит **S** в том смысле, что имеется некоторое вложение **S** в **T** того же типа, что вложение арифметики в теорию множеств. В обычной математической практике могут быть важны подробности вложения, например непрерывность или гомоморфность. То же верно и здесь. Мы должны знать, например, что подразумевается под $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)\urcorner)$, где φ — формула в языке системы **T**, а $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}$ — формула в языке системы **S**.

Мы предлагаем избавиться от всех этих затруднений, введя более сильные допущения:

(i) язык системы **S** содержится в языке **T**;

(ii) аксиомы системы **S** являются аксиомами **T**.

Допущения (i) и (ii) облегчают жизнь вообще, а при рассмотрении D2 будут действовать буквально как смазка.

Популярные примеры не удовлетворяют этим условиям. Однако если мы определим **T′** как консервативное расширение системы **T**, получаемое добавлением символов и аксиом системы **S**, то обычно можно показать

$$\mathbf{S} \vdash \forall x\, [\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(x) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}'}(x)], \qquad (*)$$

сводя таким образом рассматриваемый случай к обсуждаемому здесь. Теории, для которых (*) неверно, представляют собой патологию, и мы ими не интересуемся.

После того как эти проблемы решены, мы сделаем несколько несущественных дополнительных предположений. Они нужны лишь для того, чтобы уменьшить число случаев, которые придется рассматривать при определении различных функций, представляющих синтаксические операции (ср. 3.2). Вот эти предположения:

(i) Логические связки и кванторы — это в точности $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$.

(ii) **S** и **T** содержат в качестве констант только цифры $\overline{0}$; $\overline{1}$; ... ; $\overline{15}$; ...

(iii) Имеются только числовые переменные.

(iv) **T** содержит бесконечно много n-местных функциональных и предикатных символов для каждого n.

Таким образом, в языке системы **T** имеются:

цифры: $\overline{0}$; $\overline{1}$; ... ; $\overline{15}$; ... ;

числовые переменные: $v_0, v_1, \ldots$;

n-местные функциональные символы: $f_0^n, f_1^n, \ldots$;

n-местные предикатные символы: $R_0^n, R_1^n, \ldots$;

связки: $\neg$, $\rightarrow$;

квантор: $\forall$.

Другие связки и квантор $\exists$ считаются сокращениями.

Мы считаем, что в **S** имеется спаривающая функция $\langle , \rangle$ с обратными к ней функциями π_1, π_2. Используя их, мы следующим образом поставим в соответствие всем основным синтаксическим объектам их коды, которые будут замкнутыми термами:

$$\begin{aligned} \bar{i} &\mapsto \langle \bar{0}, \bar{i} \rangle, & \neg &\mapsto \langle \bar{4}, \bar{4} \rangle, \\ v_i &\mapsto \langle \bar{1}, \bar{i} \rangle, & \rightarrow &\mapsto \langle \bar{5}, \bar{5} \rangle, \\ f_i^n &\mapsto \langle \bar{2}, \langle \bar{n}, \bar{i} \rangle \rangle, & \forall &\mapsto \langle \bar{6}, \bar{6} \rangle. \\ R_i^n &\mapsto \langle \bar{3}, \langle \bar{n}, \bar{i} \rangle \rangle, \end{aligned}$$

Термы и формулы — это конечные последовательности таких символов, а выводы — конечные последовательности формул. Таким образом, в **S** должна быть обеспечена возможность кодирования конечных последовательностей и оперирования с ними. В следующих пунктах мы введем один симпатичный класс функций и рассмотрим их использование для такого кодирования. В 3.2 мы предположим, что эти функции «содержатся в **S**», и закончим кодирование синтаксиса. В 3.3, 3.4 и 3.5 обсуждаются обобщения первой теоремы о неполноте, которые мы можем доказать, если хорошо представляем себе имеющиеся возможности кодирования.

3.1. Примитивно рекурсивное кодирование конечных последовательностей. Примитивно рекурсивные функции — это, грубо говоря, те функции от натуральных чисел, которые могут быть получены путем рекурсии. Конечно, они должны быть получены рекурсией из чего-то, а во избежание мелких неприятностей этот класс должен быть замкнут относительно явных определений.

3.11. Определение. Функция f от натуральных чисел *примитивно рекурсивна*, если ее можно получить за конечное число шагов посредством следующих правил:

(i) $f(x) = 0$;	Нуль
(ii) $f(x) = x + 1$;	Следование
(iii) $f(\boldsymbol{x}) = x_i$;	Проекция

(iv) $f(\boldsymbol{x}) = g(h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_m(\boldsymbol{x}))$; Суперпозиция

(v) $\begin{cases} f(0, \boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \\ f(x+1, \boldsymbol{x}) = h(f(x, \boldsymbol{x}), x, \boldsymbol{x}). \end{cases}$ Рекурсия

3.1.2. Определение. Отношение $R \subseteq \mathbb{N}^n$ примитивно рекурсивно, если его *представляющая функция*

$$\chi_R(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } R(\boldsymbol{x}), \\ 1, & \text{если } \neg R(\boldsymbol{x}), \end{cases}$$

примитивно рекурсивна.

Чтобы облегчить рассмотрение кодирования конечных последовательностей, мы установим несколько простых свойств замкнутости для классов примитивно рекурсивных функций и отношений. Чтобы сделать это, нам нужно несколько функций. Начиная с функции «нуль» и итерируя суперпозицию функции «следование», мы тривиальным образом видим, что все константные функции примитивно рекурсивны. Элементарная школьная математика подсказывает нам, что, итерируя «рекурсию», можно показать примитивную рекурсивность сложения, умножения и возведения в степень. Вычитание выводит нас за пределы области натуральных чисел, однако *усеченное вычитание*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y, \\ 0, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

примитивно рекурсивно. Действительно, мы можем определить его по схеме «рекурсия» равенствами

$$x \dot{-} 0 = x, \qquad x \dot{-} (y+1) = \mathrm{pd}(x \dot{-} y),$$

где pd определяется по «рекурсии» равенствами

$$\mathrm{pd}(0) = 0, \qquad \mathrm{pd}(x+1) = x.$$

Более удобны в обращении функция знака sg и ее дополнение $\overline{\mathrm{sg}}$:

$$\mathrm{sg}(0) = 0, \qquad \mathrm{sg}(x+1) = 1;$$
$$\overline{\mathrm{sg}}(0) = 1, \qquad \overline{\mathrm{sg}}(x+1) = 0.$$

3.1.3. Лемма (определение разбором случаев). *Для примитивно рекурсивных g_1, g_2, h определим функцию f равенствами*

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}), & \text{если } h(\boldsymbol{x}) = 0, \\ g_2(\boldsymbol{x}), & \text{если } h(\boldsymbol{x}) \neq 0. \end{cases}$$

Тогда f примитивно рекурсивна.

Доказательство. $f(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(h(\boldsymbol{x})) + g_2(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{sg}(h(\boldsymbol{x}))$. □

3.1.4. Следствие. *Отношение равенства примитивно рекурсивно.*

Доказательство. Положим $h(x, y) = |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$. □

Отметим, что функции sg и $\overline{\mathrm{sg}}$ использовались в предшествующем доказательстве в несколько логическом стиле. Чтобы проиллюстрировать это далее, допустим, что χ_R, χ_S — представляющие функции отношений R, S. Заметим следующее:

$$\chi_{\neg R}(\boldsymbol{x}) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_R(\boldsymbol{x})),$$
$$\chi_{R \wedge S}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sg}(\chi_R(\boldsymbol{x}) + \chi_S(\boldsymbol{x})),$$
$$\chi_{R \vee S}(\boldsymbol{x}) = \chi_R(\boldsymbol{x}) \cdot \chi_S(\boldsymbol{x}).$$

Если мы определим ограниченные кванторы $\exists y \leqslant x$, $\forall y \leqslant x$, то для отношения $R(y, \boldsymbol{x})$ имеем

$$\chi_{\exists y \leqslant x R}(x, \boldsymbol{x}) = \prod_{y \leqslant x} \chi_R(y, \boldsymbol{x}),$$

$$\chi_{\forall y \leqslant x R} = \chi_{\neg \exists y \leqslant x \neg R}.$$

3.1.5. Лемма. (i) *Пусть функция $g(x, \boldsymbol{x})$ примитивно рекурсивна. Тогда примитивно рекурсивны функции f_1 и f_2 такие, что*

$$f_1(x, \boldsymbol{x}) = \sum_{y \leqslant x} g(y, \boldsymbol{x}), \qquad f_2(x, \boldsymbol{x}) = \prod_{y \leqslant x} g(y, \boldsymbol{x}).$$

(ii) *Если $R(y, \boldsymbol{x})$ — примитивно рекурсивное отношение, то примитивно рекурсивны также отношения S, T такие, что*

$$S(x, \boldsymbol{x}) \leftrightarrow \exists y \leqslant x R(y, \boldsymbol{x}), \qquad T(x, \boldsymbol{x}) \leftrightarrow \forall y \leqslant x R(y, \boldsymbol{x}).$$

Доказательство этой леммы предоставляется читателю.

3.1.6. Определение (ограниченного μ-оператора). Пусть $g(y, \boldsymbol{x})$ — некоторая функция. Определим функцию

$$f(x, \boldsymbol{x}) = \mu y < x [g(y, \boldsymbol{x}) = 0],$$

полагая $f(x, \boldsymbol{x})$ равным наименьшему $y < x$ такому, что $g(y, \boldsymbol{x}) = 0$, если такой y существует, и $f(x, \boldsymbol{x}) = x$ в противном случае.

3.1.7. Лемма. *Если $g(y, \boldsymbol{x})$ примитивно рекурсивна, то таков же и $\mu y < x [g(y, \boldsymbol{x}) = 0]$.*

Доказательство. Положим по определению

$$f_1(x, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists y \leqslant x [g(y, \boldsymbol{x}) = 0], \\ 1, & \text{если } \neg \exists y \leqslant x [g(y, \boldsymbol{x}) = 0]. \end{cases}$$

f_1 примитивно рекурсивна, и мы можем определить функцию

$$f(x, \boldsymbol{x}) = \sum_{y<x} f_1(y, \boldsymbol{x}). \ \square$$

Теперь у нас достаточно инструментов для установления примитивной рекурсивности известной спаривающей функции

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{2}((x+y)^2 + 3x + y)$$

и обратных к ней функций. Мы просто используем ограниченный μ-оператор:

$$\langle x, y\rangle = \mu z < (x+y)^2 + 3x + y + 1\,[2z = (x+y)^2 + 3x + y],$$
$$\pi_1 z = \mu x < z+1\,[\exists y \leqslant z(\langle x, y\rangle = z)],$$
$$\pi_2 z = \mu y < z+1\,[\langle \pi_1 z, y\rangle = z]$$

и тот факт, что $x, y \leqslant \langle x, y\rangle$.

Для кодирования конечных последовательностей мы используем основную теорему арифметики, согласно которой любое натуральное число $\geqslant 2$ имеет единственное представление в виде

$$a = p_{i_0}^{n_0} \dots p_{i_k}^{n_k},$$

где $p_{i_0}, \dots, p_{i_k}$ — различные простые числа и все n_i положительны. Мы имеем следующие определения:

(i) $x \mid y \leftrightarrow \exists z \leqslant y\,(xz = y)$;

(ii) $x < y \leftrightarrow \exists z \leqslant y\,(y = x + z + 1)$;

(iii) x — простое число $\leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge \forall z \leqslant x\,[z \mid y \to z = y \vee z = 1]$;

(iv) $p_n = n$-му простому числу: $p_0 = 2$,

$$p_{n+1} = \mu x < p_n! + 1\,[p_n < x \wedge x \text{ простое}];$$

(v) $a \in \mathrm{Seq} \leftrightarrow a = 1 \vee a > 1 \wedge \forall x \leqslant a\,[p_{x+1} \mid a \to p_x \mid a]$;

(vi) $\mathrm{lh}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \notin \mathrm{Seq} \vee a = 1, \\ \mu x \leqslant a\,[p_x \mid a \wedge p_{x+1} \nmid a], & \text{если } a \in \mathrm{Seq} \wedge a \neq 1; \end{cases}$

(vii) $(a)_x = \mu y \leqslant x+1\,[p_x^{y+1} \mid a \wedge p_x^{y+2} \nmid a]$;

(viii) $a * b = \begin{cases} a \cdot \prod\limits_{x \leqslant \mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+x+1}^{(b)_x+1}, & \text{если } a \neq 1 \wedge b \neq 1, \\ a, & \text{если } b = 1 \wedge a \neq 1, \\ b, & \text{если } a = 1. \end{cases}$

Мы прокомментируем (v)—(viii). Seq обозначает множество номеров последовательностей, т. е. чисел, у которых нет пробелов в списке их простых делителей. Для таких чисел мы имеем

$$a = \prod_{i \leqslant \mathrm{lh}(a)} p_i^{(a)_i+1}.$$

Если a, b — номера последовательностей, кодирующие соответственно $(a_0, \dots, a_m)$, $(b_0, \dots, b_n)$, то $a * b$ — это номер последовательности, кодирующий их соединение $(a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n)$.

Мы пишем $(a_0, \dots, a_n)$ вместо $2^{a_0+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}$. В частности, $(a) = 2^{a+1}$ и $(\ ) = 1$.

Непосредственное применение этих понятий дает следующее утверждение.

3.1.8. Лемма (о возвратной рекурсии). *Пусть g, h примитивно рекурсивны, а f определена равенствами*

$$f(0, \boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \qquad f(x+1, \boldsymbol{x}) = h(\bar{f}(x, \boldsymbol{x}), x, \boldsymbol{x}),$$

где $\bar{f}(x, \boldsymbol{x}) = (f(0, \boldsymbol{x}), \dots, f(x, \boldsymbol{x}))$ — возвратная функция, связанная с f. Тогда f примитивно рекурсивна.

Доказательство. Заметим, что $\bar{f}$ примитивно рекурсивна:

$$\bar{f}(0, \boldsymbol{x}) = 2^{g(\boldsymbol{x})}, \qquad \bar{f}(x+1, \boldsymbol{x}) = \bar{f}(x, \boldsymbol{x}) * (h(\bar{f}(x, \boldsymbol{x}), x, \boldsymbol{x})).$$

Но $f(x, \boldsymbol{x}) = (\bar{f}(x, \boldsymbol{x}))_x$. $\square$

Мы применим эту лемму в следующем пункте, чтобы завершить рассмотрение кодирования.

3.2. Примитивно рекурсивное кодирование синтаксиса. Пока что у нас есть коды для основных синтаксических объектов (переменных, цифр и т. д.) и примитивно рекурсивный метод кодирования конечных последовательностей. Теперь мы соберем то, что имеем, чтобы закодировать более сложные синтаксические объекты.

3.2.1. Определение. Мы следующим образом порождаем коды для сложных термов и формул:

(i) Если $t_1, \dots, t_n$ имеют коды $\ulcorner t_1 \urcorner, \dots, \ulcorner t_n \urcorner$, то

$$\ulcorner f_i^n t_1 \dots t_n \urcorner = (\ulcorner f_i^n \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner, \dots, \ulcorner t_n \urcorner),$$
$$\ulcorner R_i^n t_1 \dots t_n \urcorner = (\ulcorner R_i^n \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner, \dots, \ulcorner t_n \urcorner),$$

где $\ulcorner f_i^n \urcorner$, $\ulcorner R_i^n \urcorner$ — коды, определенные в начале § 3.

(ii) Если φ, ψ имеют соответственно коды $\ulcorner \varphi \urcorner$, $\ulcorner \psi \urcorner$, то

$$\ulcorner \neg \varphi \urcorner = (\ulcorner \neg \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner), \qquad \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner = (\ulcorner \to \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner).$$

(iii) Если φ имеет код $\ulcorner\varphi\urcorner$ и v_i — переменная, то

$$\ulcorner\forall v_i\varphi\urcorner = (\ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner v_i\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner).$$

Замечание. Это дает нам функции neg, imp такие, что $\mathrm{neg}(x) = (\ulcorner\neg\urcorner, x)$, $\mathrm{imp}(x, y) = (\ulcorner\rightarrow\urcorner, x, y)$.

Мы теперь покажем, что сложные синтаксические понятия примитивно рекурсивны.

(i) Представляющая функция для множества термов определяется возвратной рекурсией

$$T(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists i \leqslant x\,[x = \langle 0, i\rangle \vee x = \langle 1, i\rangle], \\ 0, \text{ если } x \in \mathrm{Seq} \wedge \exists n \leqslant x \exists i \leqslant x\,[(x)_0 = \langle 2, \langle n, i\rangle\rangle \\ \qquad\qquad \wedge \mathrm{lh}(x) = n \wedge \forall y < n\,(T((x)_{y+1}) = 0)], \\ 1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

(ii) Аналогично определяется представляющая функция для формул:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \mathrm{Seq} \wedge \exists n \leqslant x \exists i \leqslant x\ [(x)_0 = \langle 3, \langle n, i\rangle\rangle \\ \qquad\qquad \wedge \mathrm{lh}(x) = n \wedge \forall y < n\,(T((x)_{y+1}) = 0)], \\ 0, \text{ если } x \in \mathrm{Seq} \wedge (x)_0 = \ulcorner\neg\urcorner \wedge F((x)_1) = 0 \wedge \mathrm{lh}(x) = 1, \\ 0, \text{ если } x \in \mathrm{Seq} \wedge (x)_0 = \ulcorner\rightarrow\urcorner \\ \qquad\qquad \wedge F((x)_1) = F((x)_2) = 0 \wedge \mathrm{lh}(x) = 2, \\ 0, \text{ если } x \in \mathrm{Seq} \wedge (x)_0 = \ulcorner\forall\urcorner \wedge \exists i \leqslant x\,((x)_1 = \langle 1, i\rangle) \\ \qquad\qquad \wedge F((x)_2) = 0 \wedge \mathrm{lh}(x) = 2, \\ 1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

3.2.2. Sub. В 2.1 мы говорили о некотором операторе или функции подстановки. В действительности нам нужно две такие функции: одна — для подстановки вместо (кода некоторой) свободной переменной (кода некоторого) терма, а другая для подстановки вместо (кода некоторой) свободной переменной (кода некоторой) цифры, которая якобы обозначает то же самое число, которое обозначает данный терм. Первая из этих функций нужна, например, для распознавания аксиом вроде $\forall x\varphi x \rightarrow \varphi t$. Обе они могут быть использованы в лемме о диагонализации, но вторая нужна, если мы хотим иметь бескванторную форму леммы о диагонализации. Другие приложения трудно описать здесь, и мы предоставим функции «говорить самой за себя», когда мы будем применять ее в дальнейшем. Мы определяем первую синтаксическую функцию подстановки с помощью возвратной рекурсии, рассматривая сначала термы, а затем формулы:

$$\mathrm{sub}(\ulcorner v_i\urcorner, i, y) = y,$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner v_j\urcorner, i, y) = \ulcorner v_j\urcorner, \quad j \neq i,$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner f_j^n t_1 \ldots t_n\urcorner, i, y) = (\ulcorner f_j^n\urcorner, \mathrm{sub}(\ulcorner t_1\urcorner, i, y), \ldots, \mathrm{sub}(\ulcorner t_n\urcorner, i, y)),$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner R_j^n t_1 \ldots t_n\urcorner, i, y) = (\ulcorner R_j^n\urcorner, \mathrm{sub}(\ulcorner t_1\urcorner, i, y), \ldots, \mathrm{sub}(\ulcorner t_n\urcorner, i, y)),$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, i, y) = (\ulcorner\neg\urcorner, \mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner, i, y)),$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\rightarrow\psi\urcorner, i, y) = (\ulcorner\rightarrow\urcorner, \mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner, i, y), \mathrm{sub}(\ulcorner\psi\urcorner, i, y)),$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner\forall v_i\varphi\urcorner, i, y) = \ulcorner\forall v_i\varphi\urcorner,$$
$$\mathrm{sub}(\ulcorner\forall v_j\varphi\urcorner, i, y) = (\ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner v_j\urcorner, \mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner, i, y)), \quad j \neq i,$$
$$\mathrm{sub}(x, i, y) = 0, \quad \text{если } x \text{ не имеет ни одного из предшествующих видов.}$$

При таком определении легко видеть, что для любого терма t

$$\mathrm{sub}(\ulcorner\varphi v_i\urcorner, i, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\varphi t\urcorner.$$

Если мы заметим, что v_i входит свободно в φ тогда и только тогда, когда $\mathrm{sub}(\ulcorner\varphi\urcorner, i, \langle 0, i\rangle) \neq \ulcorner\varphi\urcorner$, то мы можем примитивно рекурсивно определить функцию sub, о которой говорилось в 2.1, разбором случаев:

$$\mathrm{sub}(x, i, y) = \begin{cases} \mathrm{sub}(x, i, y), \\ \qquad \text{если } i = \mu j < x\,[v_j \text{ входит свободно в } x], \\ x, \qquad \text{если } i \text{ не существует.} \end{cases}$$

Функции sub_3, sub_4 и т. д. определяются путем итерации.

Вторая важная функция подстановки — это

$$s(x, y) = \mathrm{sub}(x, \langle 0, y\rangle).$$

Она удовлетворяет следующему условию: если в φv_i входит свободно только v_i, а t — замкнутый терм, обозначающий число n, то $s(\ulcorner\varphi v_i\urcorner, t) = \ulcorner\psi\urcorner$, где формула ψ эквивалентна $\varphi\bar{n}$. (Чтобы доказать $\psi \leftrightarrow \varphi\bar{n}$, нам нужно лишь показать, что $t = \bar{n}$, так как в этом случае подстановочность равенства дает $\ulcorner\varphi\bar{n}\urcorner = \ulcorner\psi\urcorner$.) Более того, если φ содержит свободно только v_i, то $s(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ формально является кодом некоторого предложения. Мы часто будем писать $\ulcorner\varphi y\urcorner$ вместо $s(\ulcorner\varphi x\urcorner, y)$.

3.2.3. $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}$. Следующий шаг — определение предиката $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y)$. Вывод формулы φ — это последовательность формул такая, что каждый элемент этой последовательности является либо аксиомой системы **T**, либо логической аксиомой, либо следствием предшествующих членов этой последователь-

ности по некоторому логическому правилу. Можно считать, чт логические аксиомы примитивно рекурсивны в том смысле, чт примитивно рекурсивно множество кодов таких аксиом. М предоставляем читателю проверить это для его любимой аксиоматики. Далее, если умело подобрать аксиомы, то можно счи тать, что единственное правило вывода — это модус поненс

$$\mathrm{MP}\ \frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Мы *предполагаем*, что множество (кодов) аксиом системы **T** примитивно рекурсивно. Таким образом, мы получаем

$$\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y) \leftrightarrow x \in \mathrm{Seq} \wedge \forall i \leqslant \mathrm{lh}(x)\,[(x)_i \text{ — логическая аксиома}$$
$$\vee\ (x)_i \text{ — аксиома системы } \mathbf{T}$$
$$\wedge\ \exists j < i \exists k < i\,((x)_k = \mathrm{imp}((x)_j, (x)_i))] \wedge y = (x)_{\mathrm{lh}(x)};$$
$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(y) \leftrightarrow \exists x\, \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y).$$

3.2.4. S, I: нумерическая представимость. Говорят, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}^n$ *нумерически представляется* или *нумеруется* формулой φ в системе **S**, если мы имеем для всех $m_1, \ldots, m_n$

$Rm_1 \ldots m_n$ истинно тогда и только тогда, когда $\mathbf{S} \vdash \varphi\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n$.

Формула φ *бинумерует* отношение R, если мы имеем также

$Rm_1 \ldots m_n$ ложно тогда и только тогда, когда $\mathbf{S} \vdash \neg\varphi\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n$.

Мы предполагаем, что **S** бинумерует любое примитивно рекурсивное отношение. Чтобы проверить это свойство, достаточно для любой примитивно рекурсивной функции f найти такую формулу φ_f, что доказуемы все числовые примеры определяющих уравнений для f, записанных через φ_f. Например, если f определяется из g, h по схеме «рекурсия», то для любых $m_1, \ldots, m_n$, m должно выполняться

$$\mathbf{S} \vdash \exists! x \varphi_f(\bar{0}, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, x)$$
$$\wedge\ \forall x\,[\varphi_f(\bar{0}, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, x) \to \varphi_g(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, x)],$$
$$\mathbf{S} \vdash \exists! x \varphi_f(\bar{m}+1, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, x) \wedge \forall xy\,[\varphi_f(\bar{m}, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, y)$$
$$\wedge\ \varphi_f(\bar{m}+\bar{1}, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, x) \to \varphi_h(y, \bar{m}, \bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n, x)].$$

Тогда метаматематическая индукция по числу шагов порождения f (и по величине первого аргумента f в случае определения по рекурсии) показывает, что φ_f бинумерует график функции f.

Из того, что **S** бинумерует все примитивно рекурсивные функции (и, следовательно, все примитивно рекурсивные отношения), следует, что бинумеруются все примитивно рекурсивные кодирующие функции, в частности neg, imp, sub, s и $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}$. Этот последний факт позволяет нам проверить D1:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{S} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(t, \ulcorner\varphi\urcorner) \text{ для некоторого замкнутого терма } t$$
$$\Rightarrow \mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Быстрый просмотр доказательства первой теоремы о неполноте показывает, что для ее установления нам не были нужны D2 и D3. Итак, мы привели (за исключением небольших неточностей) полное доказательство этой теоремы.

3.2.5. S, II: D2 и D3. Вторая теорема о неполноте получается не так дешево. Чтобы установить D3, мы должны показать

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(a, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(b, \ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(a * b * (\ulcorner\psi\urcorner), \ulcorner\psi\urcorner)$$

со *свободными* переменными a, b. Для этого требуется много больше, чем просто бинумеруемость примитивно рекурсивных отношений: их представления должны быть доказуемо корректны со свободными переменными. Для этого **S** должна доказывать не только каждый частный случай определяющих равенств для данной примитивно рекурсивной функции, но и сами эти равенства со свободными переменными. Необходимо также, чтобы **S** доказывала индукцию по примитивно рекурсивным отношениям.

Последнее станет ясно, если рассмотреть D2. Условие D2 — это формальный вариант следующего усиления условия D1: если f примитивно рекурсивна, то

$$f m_1 \ldots m_n = m \Rightarrow \mathbf{T} \vdash f\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n = \bar{m}$$
$$\Rightarrow \mathbf{S} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(d(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n), \ulcorner f\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n = \bar{m}\urcorner) \quad (*)$$

для некоторой примитивно рекурсивной функции d. Чтобы убедиться, что такая d существует, заметим, что доказательство равенства $f\boldsymbol{m} = m$ (в **S**, а следовательно, и в **T**) — это почти вычисление, оно будет задано последовательностью равенств и импликаций равенств. Поэтому существование функции d, удовлетворяющей соотношению $(*)$, не слишком удивительно; неудивительно и то, что мы утверждаем истинность импликации

$$\mathbf{S} \vdash f\boldsymbol{x} = y \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(d\boldsymbol{x}, \ulcorner f\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{y}\urcorner). \quad (**)$$

Ее доказательство, слишком длинное для того, чтобы воспроизводить его здесь*), проходит с помощью метаматематической индукции по числу шагов, нужных для порождения f, а также (когда используется схема рекурсии) формальной индукции по

*) См., например, Добавление I в книге Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957. — *Прим. перев.*

примитивно рекурсивному отношению (**). Как только (**) принято, примитивная рекурсивность предиката $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}$ дает

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{x}, \dot{y}) \urcorner),$$

и нужно только применить D1, D3 к верной формуле $\varphi x \to \exists x \varphi x$, чтобы заключить, что D2 верно.

3.2.6. S, III: выбор системы S. В силу предыдущих рассмотрений мы можем адекватно закодировать синтаксис в системе **S**, если **S** допускает представление примитивно рекурсивных функций, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) определяющие равенства для примитивно рекурсивных функций доказуемы со свободными переменными;

(ii) доказуема индукция по примитивно рекурсивным отношениям;

(iii) вычисления почти являются выводами тех равенств, которые они устанавливают.

Мы перечислим три примера таких теорий:

(a) **PRA** — примитивно рекурсивная арифметика. **PRA** содержит цифры $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., и для любой примитивно рекурсивной функции (точнее, для любого определения согласно нашим правилам порождения таких функций) в **PRA** имеется функциональный символ. Кроме некоторых тривиальных аксиом, относящихся к константам и функции следования, аксиомами **PRA** являются определяющие равенства и индукция по бесквантор-ным формулам *).

(b) **PA** — арифметика Пеано. Константами **PA** также являются натуральные числа, но она имеет функциональные символы только для функции следования, сложения и умножения. Аксиомы состоят из тривиальных аксиом, относящихся к константам и функции следования, рекурсивных равенств для сложения и умножения, а также индукции для всех формул языка. Даже доказательство того, что **PA** бинумерует примитивно рекурсивные функции, требует еще одного кодировочного трюка. Наиболее известный прием использует для кодирования конечных последовательностей китайскую теорему об остатках. Условия (i) и (ii) доказываются путем формализации использования кодирования конечных последовательностей и оказываются нетривиальными, поскольку лишь немногие учебники приводят подробности **). Условие (iii) можно обойти, заметив, что представление ПР (примитивно рекурсивной) функции можно записать в виде $\exists x \varphi$, где φ гораздо проще в синтаксическом отношении,

*) Подразумевается, что язык **PRA** содержит кванторы. Поэтому рассматриваемая система является расширением (хотя и консервативным) бескванторных формулировок **PRA**. — *Прим. перев.*

**) См. Добавление II в книге Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957. — *Прим. перев.*

...и соответствующая примитивно рекурсивная функция. Например, в силу теоремы Матиясевича в качестве φ можно взять равенство между двумя многочленами. Таким образом, формализация импликации $\varphi x \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner)$ более проста.

(c) **ZF** — теория множества Цермело — Френкеля. Этот пример и хорош, и плох. Он плох, поскольку проблема кодирования в целом решается в теории множеств легче, чем в арифметической теории. По той же причине это хороший пример.

3.3. Теорема Россера. В силу 3.2 бинумеруемость примитивно рекурсивных отношений в **S** достаточна (как условие на **S**) для первой теоремы о неполноте. Необходимо еще предположить кое-что относительно **T**:

(i) **T** содержит **S**;

(ii) **T** непротиворечива;

(iii) (для второй половины теоремы) все теоремы теории **T**, имеющие вид $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$, истинны.

Теорема Россера позволяет с помощью модификации предиката $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}$ опустить последнее условие корректности, налагаемое на **T**. Положим по определению

$$\mathrm{Prov}^R_{\mathbf{T}}(x, y) \leftrightarrow \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(x, y) \wedge \forall z \leqslant x \forall w \leqslant x\, [\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(z, w) \to y \neq \mathrm{neg}(w) \wedge w \neq \mathrm{neg}(y)],$$

$$\mathrm{Pr}^R_{\mathbf{T}}(y) \leftrightarrow \exists x\, \mathrm{Prov}^R_{\mathbf{T}}(x, y),$$

$$\mathrm{Con}^R_{\mathbf{T}} \leftrightarrow \neg\, \mathrm{Pr}^R_{\mathbf{T}}(\ulcorner \Lambda \urcorner).$$

3.3.1. Теорема Россера. *Пусть* $\mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\, \mathrm{Pr}^R_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. *Тогда*:

(i) $\mathbf{T} \nvdash \varphi$;

(ii) $\mathbf{T} \nvdash \neg \varphi$;

(iii) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Con}^R_{\mathbf{T}}$.

Доказательство. (i) Ввиду непротиворечивости теории **T** формулы $\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}$ и $\mathrm{Prov}^R_{\mathbf{T}}$ бинумеруют одно и то же отношение. Следовательно, верно $\mathrm{D1}^R$, т. е. $\mathbf{T} \vdash \psi \Rightarrow \vdash \mathrm{Pr}^R_{\mathbf{T}}(\ulcorner \psi \urcorner)$. Таким образом, доказательство первой половины теоремы о неполноте дает искомый результат.

(ii) Это следует из (iii).

(iii) Мы предоставляем это читателю, ограничившись замечанием, что **T** непротиворечива и $\mathbf{T} \vdash \neg \Lambda$. □

***3.4. Теория рекурсии.** (Мы отсылаем читателя к главе 1 «Теории рекурсии» за полным изложением теории рекурсии.)

Исторически теория рекурсии развилась из теорем неполноты. После того как мы узнали кое-что из теории рекурсии, естественно оглянуться назад.

3.4.1. Определение. Множество $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{N}$ натуральных чисел *рекурсивно перечислимо* (р. п.), если для некоторого примитивно рекурсивного отношения R имеет место

$$\mathbf{S}x \Leftrightarrow \exists y R x y.$$

Эквивалентное определение таково.

3.4.2. Определение. Множество $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{N}$ является р. п., если $\mathbf{S} = \varnothing$ или $\mathbf{S} = \operatorname{rang}(f)$ — области значений f для некоторой примитивно рекурсивной функции f.

Другое полезное понятие дается следующим определением.

3.4.3. Определение. Множество $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{N}$ *рекурсивно*, если как $\mathbf{S}$, так и $\mathbf{N} - \mathbf{S}$ являются р. п. Функция $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ рекурсивна, если ее график (рассматриваемый как подмножество множества $\mathbf{N}$ с помощью примитивно рекурсивной спаривающей функции) рекурсивен.

Теоретико-рекурсивный аналог первой теоремы о неполноте таков.

3.4.4. Теорема. *Имеется р. п. множество, не являющееся рекурсивным...*

Мы доказываем это с помощью построения нумерации W_0, W_1, ... всех р. п. множеств и рассмотрения р. п. множества K_1 такого, что

$$\forall x y (\langle x, y\rangle \in K_1 \Leftrightarrow x \in W_y).$$

Тогда множество $K = \{x\colon \langle x, x\rangle \in K_1\}$ является р. п. множеством, дополнение которого не р. п. Затем мы доказываем первую теорему о неполноте, устанавливая, что K может быть нумерически представлено в $\mathbf{T}$. Если $\mathbf{T}$ достаточно корректна, это не слишком сложно — мы используем нумерическое представление множества K в $\mathbf{S}$, которое получается из бинумерации того примитивно рекурсивного отношения, проекцией которого является K. Если $\mathbf{T}$ не очень корректна, то нумерическое представление множества K в $\mathbf{S}$ может не быть таковым в $\mathbf{T}$, так как $\mathbf{T}$ может доказывать принадлежность множеству K для бо́льшего количества чисел. Обычно трудности, связанные с нумерическими представлениями в некорректных теориях, обходят с помощью следующего определения.

3.4.5. Определение. Пусть A, $B \subseteq \mathbf{N}$ — дизъюнктные р. п. множества. A и B *эффективно неотделимы*, если имеется рекурсивная функция f такая, что для любых р. п. множеств W_i, W_j из

(i) $W_i \cap W_j = \varnothing$;

(ii) $A \subseteq W_i$, $B \subseteq W_j$

следует $f(i, j) \notin W_i \cup W_j$.

3.4.6. Теорема. *Эффективно неотделимые р. п. множества существуют.*

Мы примем это на веру.

Чтобы доказать ту часть теоремы Россера, которая соответствует первой теореме о неполноте, мы строим формулы φ, ψ, которые нумерически представляют соответственно множества A и B в $\mathbf{S}$ и для которых

$$\mathbf{S} \vdash \forall x \neg(\varphi x \wedge \psi x). \qquad (*)$$

Тогда, если $\mathbf{T}$ — непротиворечивая формальная теория, то можно показать, что множество кодов ее теорем р. п., и мы полагаем по определению

$$W_i = \{n\colon \mathbf{T} \vdash \varphi \bar{n}\}, \quad W_j = \{n\colon \mathbf{T} \vdash \neg \varphi \bar{n}\}.$$

В силу $(*)$ $W_i \cap W_j = \varnothing$. Так как $\mathbf{T}$ содержит $\mathbf{S}$ и φ нумерует A в $\mathbf{S}$, отсюда следует, что $A \subseteq W_i$, $B \subseteq W_j$ и $n_0 = f(i, j) \notin W_i \cup W_j$. Следовательно, $\mathbf{T} \nvdash \varphi \bar{n}_0$, $\neg \varphi \bar{n}_0$.

***3.5. Иерархия формул.** Главная цель этого пункта — зафиксировать терминологию для нескольких следующих ниже пунктов, где обсуждаются более тонкие вопросы.

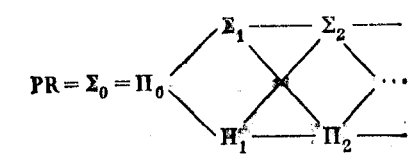
Напомним, что по предположению $\mathbf{S}$ содержит для каждой примитивно рекурсивной функции f некоторую формулу φ_f, представляющую f в строгом смысле из 3.2.5. Формулы φ_f называются *примитивно рекурсивными формулами* или ПР-формулами.

3.5.1. Определение. Формула φ является Σ_n-(соответственно Π_n-) формулой, если для некоторой ПР-формулы ψ

$$\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi,$$

где $Q_i = \exists$ (соответственно $\forall$) и соседние кванторы различны. Мы употребляем запись $\varphi \in \Sigma_n(\Pi_n)$ в двух смыслах: она может означать, что φ является Σ_n-(соответственно Π_n-) формулой или эквивалентна (в S) такой формуле. Класс Σ_n-(Π_n-) формул обозначим через Σ_n (соответственно Π_n).

Таким образом, мы имеем включения



3.5.2. Теорема. *Имеется Σ_n-определение истинности для Σ_n-формул. Иными словами, для каждого n имеется формула*

$\mathrm{Tr}_{\Sigma_n} \in \Sigma_n$, *содержащая свободно только числовую переменную* x *и такая, что для* $\varphi x \in \Sigma_n$

$$\mathbf{S} \vdash \varphi x \leftrightarrow \mathrm{Tr}_{\Sigma_n}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner).$$

Аналогичный результат верен для Π_n.

Мы опустим доказательство, но отметим

3.5.3. Следствие. *Формула* $\mathrm{Tr}_{\Sigma_n}(s(x, x))$ *принадлежит классу* Σ_n, *но не* Π_n.

Доказательство предоставляется читателю в качестве легкого упражнения.

Отсюда следует, что все указанные выше включения собственные. Таким образом, мы имеем настоящую иерархию.

С нашей точки зрения имеется два приложения этой иерархии. Во-первых, так как это — иерархия, то мы можем использовать ее для измерения сложности формул или множеств формул. Такое приложение приведено в § 4. Второе приложение использует не иерархию как таковую, а теорему 3.5.2. Многие теоретико-множественные доказательства можно было бы провести в арифметике, *если бы* имелось определение истинности. Теорема Тарского утверждает, что невозможно определение истинности для языка в целом [докажите в качестве упражнения]. По теореме 3.5.2 имеются частичные определения истинности Tr_0, Tr_1, ... такие, что Tr_n работает до n-го уровня иерархии включительно. Это позволяет формализовать в арифметике определенные конструкции, которые выглядят теоретико-множественными. Одно приложение рассматривается в § 6.

Перед тем, как идти дальше, стоит отметить следующее.

3.5.4. Факт (доказуемая Σ_1 полнота). Если $\varphi \in \Sigma_1$, то

$$\mathbf{S} \vdash \varphi x \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner).$$

Это следует из обсуждения теоремы 3.2.5.

§ 4. Метаматематические свойства, отличные от непротиворечивости

В метаматематическом отношении непротиворечивость — минимальное предположение о теории. Можно желать, чтобы имели место более сильные свойства, например ω-непротиворечивость. Если $\mathbf{T}$ — теория, говорящая о некоторой конкретной алгебраической системе в том смысле, в каком $\mathbf{PA}$ говорит о полукольце натуральных чисел, мы можем хотеть даже большего, например *корректности* (все доказуемое истинно) или *полноты* (для любого суждения доказуемо оно само или его отрицание, следовательно, всё истинное доказуемо).

В данном параграфе мы обсуждаем эти свойства. В 4.1 мы рассматриваем схему корректности, называемую принципом рефлексии, а ω-непротиворечивость рассматривается в 4.2, где выявлено соотношение между ней и более близким интуиции принципом рефлексии. Полнота, которая, как мы знаем, не имеет места, порождает тем не менее непротиворечивые схемы. Они обсуждаются в 4.3.

4.1. Принципы рефлексии. Первая теорема о неполноте доказывается путем рассмотрения предложения, утверждающего свою собственную недоказуемость. При минимальных предположениях ясно, что это предложение должно быть истинным и, следовательно, недоказуемым. Но как обстоит дело с предложением, утверждающим свою собственную *доказуемость*? Истинно оно или ложно? Именно эта проблема привела к следующей важной теореме, характеризующей доказуемые частные случаи принципа рефлексии.

4.1.1. Теорема Лёба. *Пусть* φ *замкнута. Тогда*

$$\mathbf{T} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \text{ в том и только в том случае, когда } \mathbf{T} \vdash \varphi.$$

Доказательство. Импликация в одну сторону очевидна. Чтобы доказать вторую импликацию, допустим $\mathbf{T} \nvdash \varphi$. Тогда $\mathbf{T} + \neg\varphi$ непротиворечива, и мы можем сослаться на вторую теорему о неполноте и заключить, что $\mathbf{T} + \neg\varphi$ не влечет $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}+\neg\varphi}$, т. е. формулу $\neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \neg\varphi \to \Lambda \urcorner)$. Итак,

$$\mathbf{T} + \neg\varphi \nvdash \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Контрапозиция дает $\mathbf{T} \nvdash \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$. □

Как сказано выше, это решает задачу о предложениях, утверждающих свою собственную доказуемость, — такие суждения доказуемы (и, следовательно, эквивалентны между собой, см. также 5.1). Это также обращает наше внимание на следующие схемы.

Локальный принцип рефлексии

$\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})$: $\quad \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\varphi) \to \varphi$, φ замкнута.

Первый равномерный принцип рефлексии

$\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$: $\quad \forall x\, \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner) \to \forall x \varphi x$, φ содержит свободно только x.

Второй равномерный принцип рефлексии

$\mathrm{RFN}'(\mathbf{T})$: $\quad \forall x\, [\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner) \to \varphi x]$, φ содержит свободно только x.

[Здесь следует вставить одно ограничение. Запись $\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner$ указывает, что область значений переменной x состоит из элементов, которые могут быть поименованы с помощью констант. Таким образом, мы требуем, чтобы x в равномерных вариантах

принципа рефлексии была числовой переменной (т. е. переменной для натуральных чисел). В действительности, мы будем считать ниже, что все указанные явно переменные числовые, хотя допускается, чтобы в формулы входили не указываемые явно нечисловые переменные.]

Ясно, что принципы рефлексии — это схематические утверждения о корректности: все доказуемое истинно. Как таковые, они немедленно влекут за собой непротиворечивость, и, таким образом, мы видим, что они невыводимы в **T**. Конечно, теорема 4.1.1 говорит нам еще больше: она характеризует доказуемые частные случаи схемы $\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})$. Тем не менее может быть поучительно переформулировать первую и вторую теоремы о неполноте в терминах принципов рефлексии.

4.1.2. Первая теорема о неполноте. *Для некоторой истинной и недоказуемой* φ

$$\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi.$$

4.1.3. Вторая теорема о неполноте. *Для любой опровержимой* φ

$$\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi.$$

Проверим, что эти утверждения эквивалентны более известным вариантам. Первая теорема о неполноте не представит трудностей, если мы укажем конкретнее, что истинное недоказуемое утверждение, которое мы имеем в виду, — это предложение, утверждающее свою собственную недоказуемость. Тогда теорема 4.1.1 дает просто

$$\mathbf{T} \nvdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\varphi) \to \varphi \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{T} \nvdash \varphi,$$

где левая и правая части эквивалентности — это просто варианты первой теоремы о неполноте. Для получения второй теоремы о неполноте заметим, что для опровержимых φ следующие четыре формулы:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi, \quad \neg\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner), \quad \neg\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\Lambda\urcorner), \quad \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$$

эквивалентны, относительно **T**. Теорема 4.1.1 снова дает эквивалентность двух вариантов.

Таким образом, теорема Лёба является обобщением теорем о неполноте. Хотя уже одно это оправдывает более пристальное внимание к принципам рефлексии, возможно стоит упомянуть еще одну мотивировку. Напомним, что одним из главных стимулов гильбертовской программы установления непротиворечивости был тот факт, что непротиворечивость эквивалентна корректности относительно реальных утверждений. Теперь мы можем выразить это так:

4.1.4. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны относительно* **S**:

(i) $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$;

(ii) $\mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$;

(iii) $\mathrm{RFN}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$;

(iv) $\mathrm{RFN}'_{\Pi_1}(\mathbf{T})$,

где нижний индекс Π_1 *указывает, что формулы* φ *в схеме ограничены классом* Π_1.

Доказательство. Импликации (iv)$\to$(iii)$\to$(ii) довольно очевидны. Импликация (ii)$\to$(i) следует из сделанного выше наблюдения о том, что $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi)$ для любой опровержимой формулы φ, надо только выбирать $\varphi \in \Pi_1$.

(i)$\to$(iv). Пусть $\varphi \in \Pi_1$ содержит свободно только x. Тогда $\neg\varphi x \in \Sigma_1$ и ввиду доказуемой Σ_1-полноты (см. 3.5)

$$\mathbf{S} \vdash \neg\varphi x \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner). \qquad (*)$$

Но

$$\mathbf{S} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner) \to \neg\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner), \qquad (**)$$

так что (*) и (**) в сочетании дают

$$\mathbf{S} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner) \to \varphi x. \quad \square$$

Мы отсылаем заинтересованного читателя к 5.2, где приводятся некоторые приложения теоремы 4.1.4. В данный момент мы используем ее просто как второе оправдание нашего интереса к принципам рефлексии: *непротиворечивость эквивалентна ограниченному принципу рефлексии.*

Решив, что принципы рефлексии достойны изучения, мы можем и начать. Во-первых, заметим, что схемы сформулированы в полной общности. С одной стороны, мы должны ограничиться схемами, так как предложение

$$\forall x\,[\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner) \to \mathrm{Tr}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)],$$

где $\mathrm{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ утверждает, что «φ истинна», не может быть сформулировано в **T**. Действительно, по теореме Тарского об определениях истинности невозможно определение истинности для **T** внутри самой **T** (ср. 3.5). С другой стороны, дополнительные переменные в каждом из вариантов равномерной схемы могут быть слиты с помощью спаривающей функции, что сводит общую схему к двум указанным. Гибридные формулировки, например $\forall x\,[\forall y\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\dot{y}\urcorner) \to \forall y\varphi xy]$. очевидным образом следуют из второго равномерного принципа рефлексии с несколькими переменными. Наконец, мы имеем следующую теорему,

4.1.5. Теорема (Феферман). $\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$ *и* $\mathrm{RFN}'(\mathbf{T})$ *эквивалентны относительно* $\mathbf{S}$.

Доказательство. Очевидно, что частный случай $\forall x\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\forall x\varphi x$ схемы $\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$ следует из соответствующего частного случая схемы $\mathrm{RFN}'(\mathbf{T})$. Обратная импликация требует небольшой (но зачастую полезной) леммы.

4.1.6. Лемма. $\mathbf{S}\vdash\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{y},\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\varphi\dot{x}\urcorner)$.

Доказательство. (a) В силу D1 и D3 имеем

$$\mathbf{S}\vdash\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y,\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{y},\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\varphi\dot{x}\urcorner).$$

(b) Так как $\neg\,\mathrm{Prov}\in\Pi\mathrm{R}$, мы аналогично имеем

$$\mathbf{S}\vdash\neg\,\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y,\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\,\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{y},\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{y},\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\varphi\dot{x}\urcorner).$$

Сочетание (a) и (b) дает лемму.

Для завершения доказательства теоремы 4.1.5 возьмем φ и заметим, что

$$\mathbf{S}\vdash\forall x[\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\varphi x]\leftrightarrow\forall xy[\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y,\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\varphi x].$$

Но правая часть этой эквивалентности выводима в $\mathbf{S}+\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$ в силу леммы 4.1.6. □

Перед тем, как идти дальше, интересно отметить следующий доказуемый частный случай рефлексии:

$$\mathbf{S}\vdash\exists y\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{y},\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)\to\exists y\,\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(y,\ulcorner\varphi\urcorner),\qquad(*)$$

т. е. $\mathbf{S}\vdash\exists y\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(\dot{y},\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)\to\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Утверждение $(*)$ непосредственно следует из леммы 4.1.6 и условия D3, и мы предоставляем его вывод читателю. В силу теоремы 4.1.4 и второй теоремы о неполноте переменная y в правой части (т. е. в заключении) импликации $(*)$ не может в общем случае обозначать тот же код вывода, что и y слева. Мы можем установить это также, сославшись на следующую форму теоремы Лёба со свободными переменными.

4.1.7. Теорема. *Пусть* φ *содержит свободно только* x. *Тогда*

$$\mathbf{T}\vdash\forall x[\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner)\to\varphi x]$$ *в том и только в том случае, когда* $\mathbf{T}\vdash\forall x\varphi x$.

Мы опустим доказательство.

До сих пор мы видели, что использование принципов рефлексии позволяет обобщить теоремы о неполноте, что $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ эквивалентно ограничению схем рефлексии и что $\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$ имеет ту же общность, что $\mathrm{RFN}'(\mathbf{T})$ и дальнейшие схемы с добавочными переменными. Мы должны задать себе простой вопрос: насколько рефлексия усиливает непротиворечивость? Очевидно, что из непротиворечивости не следует корректность; например, $\mathbf{T}=\mathbf{PA}+\neg\,\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ непротиворечива, но не корректна, так как $\neg\,\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ является ложной теоремой теории $\mathbf{T}$. (Однако для той же самой $\mathbf{T}$ верно $\mathbf{T}+\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}\vdash\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$, так как $\mathbf{T}\vdash\neg\,\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$.) Первый шаг представляет собой следующая простая лемма.

4.1.8. Лемма. *Пусть* φ *замкнута. Тогда*:

(i) $\mathbf{T}+\varphi+\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})\vdash\mathrm{Rfn}(\mathbf{T}+\varphi)$;

(ii) $\mathbf{T}+\varphi+\mathrm{RFN}(\mathbf{T})\vdash\mathrm{RFN}(\mathbf{T}+\varphi)$.

Доказательство. Заметим, что для любой ψ мы имеем относительно $\mathbf{S}$ следующее:

$$\mathbf{S}\vdash\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}+\varphi}(\ulcorner\psi\urcorner)\leftrightarrow\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner).\ \square$$

4.1.9. Следствие. *Пусть* φ *замкнута.*

(i) *Пусть* $\mathbf{T}+\varphi$ *непротиворечива. Тогда* $\mathbf{T}+\varphi\nvdash\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})$.

(ii) *Пусть* $\mathbf{T}'$ *— непротиворечивое конечное расширение* $\mathbf{T}$. Тогда $\mathbf{T}'\nvdash\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})$.

(iii) *Если* $\mathbf{T}+\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ *непротиворечива, то* $\mathbf{T}+\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}\nvdash\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})$

***4.1[a]. Соображения иерархии.** В силу следствия 4.1.9 ни $\mathrm{Rfn}(\mathbf{T})$, ни $\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$ не следуют ни из какого конечного множества аксиом, совместимого с $\mathbf{T}$. Мы посвятим оставшуюся часть этого пункта обсуждению одного полезного улучшения этого результата в равномерном случае. С этой целью нам придется использовать понятия и символику иерархии формул (обсуждавшейся в 3.5). Этот материал излагается менее подробно, и при первом чтении его можно опустить.

Пусть $\mathrm{RFN}_{\Pi_k}(\mathbf{T})$ обозначает ограничение схемы $\mathrm{RFN}(\mathbf{T})$ формулами из класса Π_k. Аналогично мы определяем $\mathrm{RFN}_{\Sigma_k}(\mathbf{T})$, $\mathrm{RFN}'_{\Pi_k}(\mathbf{T})$ и $\mathrm{RFN}'_{\Sigma_k}(\mathbf{T})$. Первый результат таков.

4.1.10. Теорема. *Следующие схемы эквивалентны относительно* $\mathbf{S}$ *(для* $k\geqslant 0$*)*:

(i) $\mathrm{RFN}_{\Sigma_k}(\mathbf{T})$;

(ii) $\mathrm{RFN}_{\Pi_{k+1}}(\mathbf{T})$;

(ia) $\mathrm{RFN}'_{\Sigma_k}(\mathbf{T})$;

(iia) $\mathrm{RFN}'_{\Pi_{k+1}}(\mathbf{T})$.

Эквивалентности (x)$\leftrightarrow$(xa), где x есть i или ii, получаются путем более тщательного рассмотрения доказательства теоремы 4.1.5. Импликации (ii)$\to$(i), (iia)$\to$(ia) тривиальны, так

как $\Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1}$. Для получения обратных импликаций мы используем доказуемую замкнутость относительно подстановки чисел: $\mathbf{S} \vdash \mathrm{PR}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \forall x \varphi \dot{x} \urcorner) \to \forall x\, \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner)$.

В терминах рассматриваемой иерархии можно переформулировать лемму 4.1.8.

4.1.11. Теорема. *Пусть φ — замкнутая формула из класса Π_k, и пусть $n \geqslant k$. Тогда*

(i) $\mathbf{S} + \varphi + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_n}(\mathbf{T}) \vdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_n}(\mathbf{T} + \varphi)$;

(ii) $\mathbf{S} + \varphi + \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(\mathbf{T}) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_n}(\mathbf{T} + \varphi)$.

Это усматривается из того, что если $\psi \in \Sigma_n$, то $(\varphi \to \psi) \in \Sigma_n$. Используя Π_k-определение истинности для Π_k-формул, можно показать, что $\mathrm{RFN}'_{\Pi_k}(\mathbf{T})$ можно записать в виде единого Π_k-предложения. Имея это в виду, мы получаем такое утверждение.

4.1.12. Следствие. (i) $\mathbf{T} + \mathrm{RFN}_{\Sigma_{k+1}}(\mathbf{T}) \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_{k+1}}(\mathbf{T} + \mathrm{RFN}_{\Pi_{k+1}}(\mathbf{T}))$, $k \geqslant 0$.

(ii) $\mathbf{T} + \mathrm{RFN}_{\Pi_{k+1}}(\mathbf{T}) \vdash \mathrm{RFN}_{\Pi_{k+1}}(\mathbf{T} + \mathrm{RFN}_{\Pi_k}(\mathbf{T}))$, $k \geqslant 1$.

(iii) *Если* $\mathbf{T} + \mathrm{RFN}_{\Pi_k}(\mathbf{T})$ *непротиворечива, то* $\mathbf{T} + \mathrm{RFN}_{\Pi_k}(\mathbf{T}) \nvdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_k}(\mathbf{T})$, $k \geqslant 1$.

(iii′) *Если* $\mathbf{T} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ *непротиворечива, то*

$$\mathbf{T} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \nvdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(\mathbf{T}).$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют из теорем 4.1.10 и 4.1.11. Утверждения (iii) и (iii′) — простые приложения теорем о неполноте в виде теорем 4.1.2 и 4.1.3.

В силу следствия 4.1.12 схема RFN не следует ни из какого (непротиворечивого) множества своих частных случаев. Следующая теорема Крайзеля и Леви необычайно усиливает это утверждение.

4.1.13. Теорема о существенной неограниченности. *Пусть дано n, и пусть $\mathbf{U}$ — р. п. теория (не обязательно содержащая $\mathbf{S}$) в языке теории $\mathbf{T}$. Если $\mathbf{T} \vdash \mathrm{RFN}(\mathbf{U})$, то ни в каком непротиворечивом расширении теории $\mathbf{U}$ множеством Δ, состоящим из Σ_n-предложений, не выводимы все теоремы теории $\mathbf{T}$. В частности, $\mathbf{T}$ не может быть аксиоматизирована над $\mathbf{U}$ никаким множеством Σ_n-аксиом.*

Доказательство. Пусть Tr_n — Σ_n-определение истинности для Σ_n-формул. Определим ψ, согласно 2.2.1, так, чтобы выполнялось

$$\mathbf{S} \vdash \psi \leftrightarrow \forall x\, [\mathrm{Tr}_n(x) \to \neg\, \mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(\mathrm{imp}(x, \ulcorner \psi \urcorner))].$$

С интуитивной точки зрения ψ выражает свою невыводимость из любого истинного Σ_n-предложения.

(a) Из того, что $\mathbf{T} \vdash \mathrm{RFN}(\mathbf{U})$, следует

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\, [\mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(\mathrm{imp}(x, \ulcorner \psi \urcorner)) \to (\mathrm{Tr}_n(x) \to \psi)].$$

Таким образом,

$$\mathbf{T} \vdash \neg\, \psi \to \forall x\, [\neg\, \mathrm{Tr}_n(x) \vee \neg\, \mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(\mathrm{imp}(x, \ulcorner \psi \urcorner))] \to \forall x\, [\mathrm{Tr}_n(x) \to \neg\, \mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(\mathrm{imp}(x, \ulcorner \psi \urcorner))] \to \psi.$$

Следовательно, $\mathbf{T} \vdash \psi$.

(b) Допустим, что $\Delta \subseteq \Sigma_n$ и $\mathbf{U} + \Delta$ — расширение теории $\mathbf{T}$. Тогда $\mathbf{U} + \Delta \vdash \psi$. Мы покажем теперь, что отсюда следует противоречивость системы $\mathbf{U} + \Delta$. Из того, что $\mathbf{U} + \Delta \vdash \psi$, следует $\mathbf{U} + X \vdash \psi$ для некоторого конечного $X \subseteq \Delta$. Пусть $\varphi = \bigwedge X$. Тогда $\mathbf{U} \vdash \varphi \to \psi$. Но отсюда следует

(i) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner)$.

Так как $\mathbf{T} \vdash \psi$, мы имеем

(ii) $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to \neg\, \mathrm{Tr}_n(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Но $\varphi \in \Sigma_n$ и

(iii) $\mathbf{T} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Tr}_n(\ulcorner \varphi \urcorner)$,

так что (i)—(iii) дают $\mathbf{T} \vdash \neg\, \varphi$. □

Теорема о существенной неограниченности — полезный инструмент для доказательства теорем неограниченности, т. е. результатов вида: аксиоматизация $\mathbf{T}_1$ над $\mathbf{T}_2$ требует сколь угодно сложных формул. Самый основной пример — тот, где $\mathbf{T}_2 = \mathrm{PC}$ (исчисление предикатов).

4.1.14. Определение. Теория $\mathbf{T}$ называется *рефлексивной*, если $\mathbf{T} \vdash \mathrm{RFN}(\mathrm{PC})$, где PC обозначает исчисление предикатов (сформулированное в языке теории $\mathbf{T}$).

Мы заметим, что по лемме 4.1.8 из рефлексивности $\mathbf{T}$ следует, что $\mathbf{T} \vdash \mathrm{RFN}(\mathbf{U})$ для всех конечных подсистем $\mathbf{U}$ теории $\mathbf{T}$. В частности, $\mathbf{T} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{U}}$ для таких $\mathbf{U}$.

4.1.15. Теорема рефлексивности. **PA** *и* **ZF** *рефлексивны.*

Обычное доказательство этой теоремы слишком длинно для того, чтобы приводить его здесь. Для **ZF** мы можем дать следующее простое доказательство. С помощью формализованной индукции по длине вывода получаем

$$\mathbf{ZF} \vdash \forall x\, [\mathrm{Pr}_{\mathrm{PC}}(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner) \to \forall a\, [\mathrm{Trans}(a) \wedge x \in a \to \varphi^{(a)} x]],$$

где $\varphi^{(a)}$ обозначает релятивизацию φ по множеству a, и

$\mathrm{Trans}(a)$ утверждает, что a транзитивно. В силу теоретико-множественного принципа рефлексии имеем

$$\mathbf{ZF} \vdash \forall x\,[\neg\varphi x \to \exists a\,[\mathrm{Trans}(a) \wedge x \in a \wedge \neg\varphi^{(a)}(x)]],$$

откуда

$$\mathbf{ZF} \vdash \forall x\,[\mathrm{Pr}_{\mathbf{PC}}(\ulcorner\varphi\dot{x}\urcorner) \to \varphi x].$$

В качестве следствий мы получаем, что (i) схема индукции в **PA** не следует ни из какого ограниченного множества своих частных случаев и (ii) нельзя ограничить все схемы в **ZF**.

***4.2. ω-непротиворечивость.** Понятие ω-непротиворечивости было введено Гёделем с целью сформулировать предположения, нужные для первой теоремы о неполноте. ω-непротиворечивость теории **T** не является ни оптимальным, ни самым интуитивно понятным достаточным условием для этой теоремы. Тем не менее ее использование в этом месте столь твердо закреплено в литературе, что мы обязаны прокомментировать этот вопрос.

Говоря неформально, ω-непротиворечивость — это условие, которое имеет место для **T**, если следующие два условия не выполняются вместе ни для какой формулы φ:

(i) $\mathbf{T} \vdash \exists x \varphi x$;

(ii) $\mathbf{T} \vdash \neg\varphi\bar{0}, \neg\varphi\bar{1}, \ldots$

Формально ω-непротиворечивость можно представить (с различной степенью общности) посредством (модификаций) следующей схемы.

4.2.1. $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\exists x \varphi x\urcorner) \to \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner)$.

Пусть $1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ обозначает ограничение схемы 4.2.1 формулами $\varphi \in \mathrm{PR}$, содержащими только одну свободную переменную.

4.2.2. Формализованная теорема о неполноте. *Пусть* φ *есть* $\neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. *Тогда*:

(i) $\mathbf{T} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$;

(ii) $\mathbf{T} + 1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$.

Доказательство. Утверждение (i) было установлено в процессе доказательства второй теоремы о неполноте.

Чтобы установить (ii), допустим, что $\varphi = \forall x \psi x$, $\psi \in \mathrm{PR}$. Тогда

$$\mathbf{T} + 1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\neg\varphi) \to \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\dot{x}\urcorner) \to \exists x \neg\psi x$$

в силу доказуемой Σ_1-полноты (3.5.4). Таким образом,

$$\mathbf{T} + 1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \neg\varphi, \qquad (*)$$

$$\mathbf{T} + 1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} + \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner). \qquad (**)$$

Но $1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ влечет $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$, так как утверждает недоказуемость чего-то. Поэтому в силу (i) имеем

$$\mathbf{T} + 1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

что вместе с (**) дает (ii). □

Вероятно, самое важное обстоятельство, которое следует отметить в связи с предыдущим доказательством, состоит в том, что $1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ была использована только для вывода формулы (*): $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \neg\varphi$ для замкнутой $\varphi \in \Pi_1$, т. е. $1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ была использована только для вывода $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathbf{T})$. Обратно, схему $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathbf{T})$ можно использовать для вывода $1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{S} + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathbf{T}) \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\exists x \varphi x\urcorner) \to \exists x \varphi x \to \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner),$$

так как верно $\neg\varphi x \leftrightarrow \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner)$ ввиду доказуемой PR-полноты и того факта, что $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathbf{T})$ влечет $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$.

В силу предыдущего абзаца $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathbf{T})$ и $1\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ эквивалентны. Следствие 4.1.12 показывает, что такого поведения можно ожидать лишь в некоторых весьма специальных случаях, ибо легко видеть, что формулировка ω-непротиворечивости в 4.2.1 принадлежит классу Σ_2.

4.2.3. Определение. Мы определим следующие формальные схемы, представляющие ω-непротиворечивость.

Локальная ω-непротиворечивость

ω-$\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$: $\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\exists x \varphi x\urcorner) \to \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner)$, φ содержит свободно только x,

Равномерная ω-непротиворечивость

ω-$\mathrm{CON}_{\mathbf{T}}$: $\forall y\,[\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\exists x \varphi x \dot{y}\urcorner) \to \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\dot{y}\urcorner)]$, φ содержит свободно только x, y.

Глобальная ω-непротиворечивость

ω-$\mathrm{CON}^{\sigma}_{\mathbf{T}}$: $\forall\varphi\,[\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\exists x \varphi x\urcorner) \to \exists x \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\neg\varphi\dot{x}\urcorner)]$,

где $\forall\varphi$ обозначает квантор по кодам формул, содержащим только одну свободную переменную.

Мы спешим подчеркнуть, что, в отличие от ситуации с принципами рефлексии, здесь мы имеем *глобальное* представление данного понятия наряду с локальным и равномерным представлениями. Причина просто в том, что в 4.2.1 мы используем φ только в виде *кода*, а не в качестве подформулы некоторой большой формулы, как это было в случае рефлексии. Поэтому в данном контексте мы можем применить квантор по φ.

Нетрудно видеть, что в **S** имеет место $\omega\text{-}\mathrm{CON}^{\sigma}_{\mathbf{T}} \vdash \omega\text{-}\mathrm{CON}_{\mathbf{T}} \vdash \omega\text{-}\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$. С локальными схемами обычно трудно работать, и

потому мы игнорируем $\omega\text{-Con}_T$. Таким образом, мы интересуемся схемами $\omega\text{-CON}_T^G$, $\omega\text{-CON}_T$ и их иерархическими ограничениями.

4.2.4. Определение. Пусть $k \geqslant 1$. Ограничение схемы $\omega\text{-CON}_T$ формулами $\varphi \in \Sigma_{k-1}$ называется $k\text{-CON}_T$, а соответствующее неформальное понятие — k-непротиворечивостью.

Заметим, что, используя Σ_k-определение истинности для Σ_k-формул, можно установить эквивалентность схемы $(k+1)\text{-CON}_T$ и соответствующего ограничения схемы $\omega\text{-CON}_T^G$ $(\forall \varphi \mapsto \mapsto \forall \varphi \in \Sigma_k)$. Далее, аналогично теореме 4.1.10, схема $k\text{-CON}_T$ эквивалентна соответствующему ограничению для $\varphi \in \Pi_k$.

Следующая теорема характеризует эти понятия в терминах интуитивно более ясных принципов рефлексии.

4.2.5. Теорема. *Относительно системы* S *мы имеем*:

(i) $k\text{-CON}_T \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Pi_{k+1}}(T) \quad (k = 1, 2)$;

(ii) $k\text{-CON}_T \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Pi_k}(T + \mathrm{RFN}_{\Pi_k}(T)) \quad (k \geqslant 2)$;

(iii) $\omega\text{-CON}_T^G \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Pi_3}(T + \mathrm{RFN}(T))$;

(iii′) $\omega\text{-CON}_T^G \leftrightarrow \mathrm{RFN}_{\Pi_3}(T + \omega\text{-CON}_T)$.

Доказательство довольно длинное, и мы опускаем его. Некоторые родственные результаты рассмотрены в главе 2.

В качестве отступления мы хотели бы упомянуть следующее. Иерархия формул может быть в качестве очевидного приложения использована для получения количественных уточнений различных результатов, см., например, 4.1[a]. Теорема 4.2.5 дает приложение другого порядка. Выявление ω-непротиворечивости в виде принципа рефлексии (iii) предполагает понимание выражения «Π_3». Иными словами, мы должны знать кое-что об иерархии формул уже для того, чтобы сформулировать соотношение между ω-непротиворечивостью и корректностью.

4.3. Свойства полноты. Первая теорема о неполноте утверждает, грубо говоря, что непротиворечивые сильные формальные теории неполны. Тем не менее имеются непротиворечивые схемы, утверждающие полноту. Мы рассмотрим только локальные варианты (и этого достаточно).

Синтаксическая полнота

$\mathrm{Syn\,Comp}_T$: $\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \vee \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ для замкнутых φ.

Семантическая полнота

$\mathrm{Sem\,Comp}_T$: $\varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ для замкнутых φ.

ω-полнота

$\omega\text{-Comp}_T$: $\forall x\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \forall x \varphi x \urcorner)$ для φ, содержащих свободно только x.

Без долгих разговоров формулируется

4.3.1. Теорема. *Относительно* S *эквивалентны следующие утверждения*:

(i) $\neg\, \mathrm{Con}_T$;

(ii) $\mathrm{Syn\,Comp}_T$;

(iii) $\mathrm{Sem\,Comp}_T$;

(iv) $\omega\text{-Comp}_T$.

Доказательство. Очевидно, что (i)→(ii), (iii), (iv).

(ii)→(i) Мы обращаемся к формализованной теореме Россера. Если φ есть $\neg\, \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$, то

$$S + \mathrm{Con}_T \vdash \neg\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner), \quad \neg\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner),$$

откуда

$$S + \mathrm{Syn\,Comp}_T \vdash \neg\, \mathrm{Con}_T.$$

(iii)→(i) Здесь мы полагаем $\varphi = \mathrm{Con}_T$ и применяем вторую теорему о неполноте. Мы опускаем подробности, чтобы уделить внимание следующему случаю.

(iv)→(i) Полагаем $\varphi x = \neg\, \mathrm{Prov}_T(x, \ulcorner \Lambda \urcorner)$.

По лемме 4.1.6 имеем

$$S \vdash \forall x\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\, \mathrm{Prov}_T(\dot{x}, \ulcorner \Lambda \urcorner) \urcorner),$$

откуда

$$S + \omega\text{-Comp}_T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \forall x \neg\, \mathrm{Prov}_T(x, \ulcorner \Lambda \urcorner) \urcorner)$$
$$\vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \Lambda \urcorner) \to \Lambda \urcorner) \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \Lambda \urcorner)$$

в силу формализованной теоремы Лёба: $S \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

***4.3[a]. Теорема Кента.** По теореме 4.3.1 (iii) схема $\varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ эквивалентна формуле $\neg\, \mathrm{Con}_T$ и, следовательно, невыводима не только в общем случае, но и при ограничении $\varphi \in \Pi_1$ (а именно, для $\varphi = \mathrm{Con}_T$). Мы знаем также из 3.5.4, что подсхема $\varphi x \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \dot{x} \urcorner)$, $\varphi \in \Sigma_1$, выводима. Следующая теорема Кента показывает, что ситуация даже еще более сложна.

4.3.2. Теорема. *Для любого* n *имеется такое предложение* ψ, *что*:

(i) $S \vdash \psi \to \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \psi \urcorner)$;

(ii) *ни для какого предложения* $\psi \in \Sigma_n$ *не имеет места* $S \vdash \psi \leftrightarrow \psi$.

Доказательство. Прежде всего, пусть χ таково, что ни для какого $\psi \in \Sigma_n$, совместимого с S (т. е. такого, что $S \nvdash \neg \psi$), мы не имеем

$$S + \psi \vdash \chi \quad \text{или} \quad S + \psi \vdash \neg \chi.$$

Для построения такого χ мы воспользуемся приемом из теоремы о существенной неограниченности и положим

$$\chi \leftrightarrow \forall x\,[\mathrm{Tr}_n(x) \to \neg\,\mathrm{Pr}_S^R(\mathrm{imp}(x, \ulcorner\chi\urcorner))], \qquad (*)$$

где Tr_n — это Σ_n-определение истинности для Σ_n-формул. Повторяя доказательство теоремы Россера, мы видим, что $(*)$ опровергается для всех $\psi \in \Sigma_n$, совместимых с $\mathbf{S}$.

Пусть теперь φ будет формулой $\chi \wedge \mathrm{Pr}_S(\Lambda)$. Очевидно, что имеет место (i). Чтобы установить (ii), допустим, что $\mathbf{S} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ для $\psi \in \Sigma_n$. Тогда $\mathbf{S} \vdash \psi \to \varphi$, так что $\mathbf{S} \vdash \neg\psi$, иначе $(*)$ верно. Так как $\neg\varphi$ есть $\neg(\chi \wedge \mathrm{Pr}_S(\ulcorner\Lambda\urcorner))$ и $\mathbf{S} \vdash \neg\varphi$, то $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_S(\ulcorner\Lambda\urcorner) \to \neg\chi$, что противоречит $\neg(*)$, так как $\mathbf{S} + \mathrm{Pr}_S(\ulcorner\Lambda\urcorner)$ непротиворечива. □

§ 5. Два приложения

5.1. Теорема о неподвижной точке. С помощью диагонализации легко найти предложения ψ, χ такие, что

$$\mathbf{S} \vdash \psi \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner), \qquad \mathbf{S} \vdash \chi \leftrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\chi\urcorner).$$

Доказательства второй теоремы о неполноте и теоремы Лёба устанавливают то интересное обстоятельство, что ψ и χ не только единственны, но и определимы явно:

$$\mathbf{S} \vdash \psi \leftrightarrow \mathrm{Con}_T \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\Lambda\urcorner),$$
$$\mathbf{S} \vdash \chi \leftrightarrow \mathrm{t},$$

где t — истина. Более старое доказательство теоремы Лёба использует неподвижную точку

$$\theta \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\theta\urcorner) \to \varphi)$$

для любой данной формулы φ. Несложные алгебраические манипуляции скоро обнаруживают, что

$$\theta \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi),$$

откуда формула θ снова определима явно, на этот раз через остающуюся переменную. Оказывается, что это не изолированные примеры, а частные случаи общего результата.

Чтобы получить простую формулировку этого результата, мы рассмотрим пропозициональный язык с пропозициональными переменными $p, q, r, \ldots$, обычными связками $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, пропозициональными константами t, f (истина и ложь) и модальным оператором $\Box$, который будет обозначать доказуемость. Это будет интерпретированная, а не дедуктивная система. По данному соответствию $p \to \varphi_p$ предложений пропозициональным

переменным мы получаем перевод φ_α для каждой формулы α нашего пропозиционального языка:

$$\varphi_{\alpha\circ\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta, \qquad \circ = \wedge, \vee, \to;$$
$$\varphi_{\neg\alpha} = \neg\varphi_\alpha; \qquad \varphi_{\Box\alpha} = \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi_\alpha\urcorner).$$

Если $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ — формула пропозиционального языка и мы ставим предложения ψ_i в соответствие переменным p_i, то мы будем записывать в виде $\alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ предложение $\varphi_{\alpha(p_1, \ldots, p_n)}$, т. е. результат подстановки каждого ψ_i вместо соответствующей p_i и Pr_T вместо $\Box$.

5.1.1 (теорема де Йонга о неподвижной точке[1])). *Пусть $\alpha(p, q)$ такова, что p встречается только в области действия $\Box$. Тогда для некоторой $\beta(q)$ и всех предложений $\psi_1, \ldots, \psi_n$ языка теории* $\mathbf{T}$

$$\mathbf{S} \vdash \beta(\psi) \leftrightarrow \alpha(\beta(\psi), \psi).$$

Кроме того, с точностью до доказуемого изоморфизма, $\beta(\psi)$ — единственная неподвижная точка формулы α.

Доказательство этого утверждения слишком сложно для того, чтобы воспроизводить его здесь. Однако мы можем доказать следующий частный случай.

5.1.2. Теорема. *Пусть $\alpha(p, q) = \alpha'(\Box\gamma(p, q), q)$, где в формуле $\alpha'(x, y)$ переменная x не встречается в области действия $\Box$. Тогда неподвижные точки формулы α параметрически определяются формулой*

$$\beta(q) = \alpha'[\Box\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q), q].$$

Доказательство. Хотя мы заинтересованы в установлении результата, где переменные q заменены предложениями ψ, пропозициональная запись более удобна. Выражение $\vdash \delta(q) \leftrightarrow \delta'(q)$ понимается соответствующим образом.

Так как имеет место лемма о диагонализации, можно считать, что у нас есть p такое, что $\vdash p \leftrightarrow \alpha(p, q)$. Отсюда будет следовать, что $p \leftrightarrow \beta(q)$.

5.1.3. Лемма. *Для всех r, t, δ имеем $r \leftrightarrow t$, $\Box(r \leftrightarrow t) \vdash \vdash \delta(r) \leftrightarrow \delta(t)$.*

Это получается из условий выводимости индукцией по длине формулы δ. Мы опускаем доказательство.

Чтобы доказать теорему 5.1.2, мы покажем сначала

$$\vdash \Box\gamma(p, q) \leftrightarrow \Box\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q). \qquad (*)$$

[1]) Теперь доказательство теоремы 5.1.1 опубликовано Самбином [1].

Поскольку p — неподвижная точка, то $\vdash p \leftrightarrow \alpha'(\Box\gamma(p, q), q)$. Теперь, так как $\Box\gamma(p, q)$ не входит в α' в область действия $\Box$, имеем

$$\Box\gamma(p, q) \vdash \Box\gamma(p, q) \leftrightarrow \mathrm{t},$$

$$\vdash \alpha'(\Box\gamma, q) \leftrightarrow \alpha'(\mathrm{t}, q) \vdash p \leftrightarrow \alpha'(\mathrm{t}, q). \qquad (**)$$

Условия выводимости дают

$$\Box\gamma(p, q) \vdash \Box\Box\gamma(p, q) \vdash \Box(p \leftrightarrow \alpha'(\mathrm{t}, q)). \qquad (***)$$

Применяя лемму к (**), (***), мы немедленно получаем

$$\Box\gamma(p, q) \vdash \Box\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q),$$

т. е. половину утверждения (*).

Чтобы установить обратную импликацию, допустим $\Box\gamma(p, q) \triangleq \neg\gamma(p, q)$. Тогда получаем

$$\Box\gamma(p, q) \wedge \neg\gamma(p, q) \vdash \neg\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q)$$

с помощью тех же рассуждений, что и выше. Контрапозиция дает

$$\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q) \vdash \Box\gamma(p, q) \to \gamma(p, q),$$

откуда

$$\Box\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q) \to \Box(\Box\gamma(p, q) \to \gamma(p, q)) \to \Box\gamma(p, q).$$

По формализованной теореме Лёба имеем

$$\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

что завершает доказательство утверждения (*).

Для завершения доказательства заметим, что в силу (*)

$$\beta(q) \leftrightarrow \alpha'[\Box\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q), q] \leftrightarrow \alpha'(\Box\gamma(p, q), q) \leftrightarrow p.$$

Последняя эквивалентность верна согласно выбору p. □

5.1.4. Пример. Мы приводим в таблице (i) $\alpha(p, q)$; (ii) $\alpha'(p, q)$; (iii) $\gamma(p, q)$; (iv) $\Box\gamma(\alpha'(\mathrm{t}, q), q)$; (v) $\beta(q)$ и (vi) результат окончательного упрощения формулы из (v):

	(a)	(b)	(c)	(d)
(i)	$\neg\Box p$	$\Box p$	$\Box p \to q$	$\Box(p \to q)$
(ii)	$\neg p$	p	$p \to q$	p
(iii)	p	p	p	$p \to q$
(iv)	$\Box\neg\mathrm{t}$	$\Box\mathrm{t}$	$\Box(\mathrm{t} \to q)$	$\Box(\mathrm{t} \to q)$
(v)	$\neg\Box\neg\mathrm{t}$	$\Box\mathrm{t}$	$\Box(\mathrm{t} \to q) \to q$	$\Box(\mathrm{t} \to q)$
(vi)	$\neg\Box\mathrm{t}$	t	$\Box q \to q$	$\Box q$

5.2. Результаты о консервативности. В этом пункте мы изложим некоторые результаты о консервативности, принадлежащие Крайзелю.

Напомним, что гильбертовская программа установления консервативности требовала доказательства того, что использование идеальных утверждений и абстрактных умозаключений не приводит к новым реальным теоремам. Хотя теоремы о неполноте показали, что это невозможно *в общем случае*, они не исключают возможности успеха в специальных случаях. В действительности мы даже воспользуемся второй теоремой о неполноте для установления одного результата о консервативности.

Сначала мы изложим главный результат.

5.2.1. Теорема о консервативности. *Пусть* $\varphi \in \Pi_1$. *Тогда* $\mathbf{T} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{S} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Pi_1$ и допустим, что $\mathbf{T} \vdash \varphi$. Условие D1 дает $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\varphi)$. Но по теореме 4.1.4 $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ эквивалентна $\mathrm{Rfn}_{\Pi_1}(\mathbf{T})$ относительно $\mathbf{S}$, откуда $\mathbf{S} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi$. □

Два результата, приводимые ниже, являются следствиями из 5.2.1.

5.2.2. Теорема. *Пусть* $\varphi \in \Pi_1$. *Тогда* $\mathbf{T} + \neg\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{T} \vdash \varphi$.

Доказательство.

$$\mathbf{T} + \neg\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{T} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}+\neg\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}} \vdash \varphi \text{ по теореме 5.2.1}$$
$$\Rightarrow \mathbf{T} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi$$

согласно формализованной второй теореме о неполноте (2.2.4). Но мы имеем

$$\mathbf{T} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi, \quad \mathbf{T} + \neg\mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash \varphi, \text{ откуда } \mathbf{T} \vdash \varphi. \quad \square$$

5.2.3. Теорема. *Пусть* $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ *содержат* $\mathbf{S}$, *и пусть*

$$\mathbf{T} \vdash \forall x[\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}'}(x, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(tx, \ulcorner\psi\urcorner)] \qquad (*)$$

для некоторого примитивно рекурсивного терма t. *Тогда* $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}'}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Доказательство. По теореме о консервативности

$$\mathbf{S} + \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \vdash (*) \vdash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}'}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

с помощью контрапозиции. Теперь поглотим $\mathrm{Con}_{\mathbf{T}}$ с помощью $\neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)$ и снова сделаем контрапозицию. □

5.2.4. Следствие (теорема об относительной непротиворечивости). *Пусть* $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ *содержат* $\mathbf{S}$, *и пусть*

$$\mathbf{T} \vdash \forall x[\mathrm{Prov}_{\mathbf{T}'}(x, \ulcorner\Lambda\urcorner) \to \mathrm{Prov}_{\mathbf{T}}(tx, \ulcorner\Lambda\urcorner)]$$

для некоторого примитивно рекурсивного терма t. *Тогда* $\mathbf{S} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{T}} \to \mathrm{Con}_{\mathbf{T}'}$.

Это следствие заслуживает комментариев. Согласно второй теореме о неполноте мы не можем доказывать непротиворечивость сильных теорий внутри слабых теорий. Иногда непротиворечивость сильной теории действительно вызывает сомнения, и мы можем доказать результат об относительной непротиворечивости, например

$$\mathrm{Con}_{\mathbf{ZF}} \to \mathrm{Con}_{\mathbf{ZF}+\neg \mathrm{CH}}. \qquad (**)$$

От гильбертовской программы установления непротиворечивости нам осталось в наследство требование, чтобы доказательство утверждения (**) проводилось в такой слабой системе, в какой это вообще возможно. С эпистемологической точки зрения нет нужды проводить доказательство утверждения (**), скажем, в **PRA**. Действительно, ценность (**) целиком зависит от принятия системы **ZF**, и мы можем с тем же успехом доказать (**) в последней теории, что технически проще. Однако мы можем избежать философской перебранки, так как в силу следствия 5.2.4, если это вообще сделано, отсюда автоматически следует, что (**) может быть доказано в более слабой теории, а именно в **PRA**. Таким образом, здесь не о чем спорить.

В предыдущем абзаце мы указали, как один из результатов о консервативности заставил исчезнуть потенциальную философскую проблему. Обычно ценность результатов о консервативности состоит в том, что они позволяют нам использовать более сильный аппарат для сокращения доказательств и сохранять нашу энергию. Мы отсылаем читателя к главе 3 за количественной информацией.

*§ 6. Формализованная теорема о полноте

Имеется несколько дальнейших вопросов, которые можно было бы рассмотреть. Тесные связи между принципами индукции и принципами рефлексии (часто носящие неправильное название «доказательства непротиворечивости») обсуждаются в главе 2. Можно рассмотреть попытки пополнения формально неполной теории путем повторного добавления принципов рефлексии. Другой круг вопросов составляют приложения принципов рефлексии в теории доказательств.

Мы рассмотрим формализованную теорему о полноте и применим ее, чтобы дать теоретико-модельные доказательства теорем о неполноте.

В § 6 мы полагаем $\mathbf{S} = \mathbf{PA}$.

***6.1. Теорема Гильберта — Бернайса о полноте.** Формализация в **PA** генкинского доказательства полноты исчисления предикатов дает следующее утверждение.

6.1.1. Теорема Гильберта — Бернайса о полноте. *Пусть теория* **U** *имеет примитивно рекурсивное множество аксиом. Тогда имеется множество* Tr_M *формул из класса* Δ_2 *такое, что в* $\mathbf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathbf{U}}$ *можно доказать, что это множество определяет модель теории* **U**:

$$\mathbf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathbf{U}} \vdash \forall x\,(\mathrm{Pr}_{\mathbf{U}}(x) \to \mathrm{Tr}_M(x)).$$

Поясним это. Говорят, что формула φ принадлежит классу Δ_n, если ее можно записать и в виде Σ_n-, и в виде Π_n-формулы. Теорема 6.1.1 утверждает, что с точностью до $\mathrm{Con}_{\mathbf{U}}$ мы можем доказать в **PA** существование модели для **U**, определение истинности для которой принадлежит классу Δ_2.

Смысл всего этого лучше всего виден из описания доказательства, которое является просто арифметизацией соответствующего теоретико-множественного доказательства. Мы добавляем к языку теории **U** бесконечное примитивно рекурсивное множество новых констант $c_0, c_1, \ldots$ и аксиомы

$$\exists x \varphi x \to \varphi(c_{\ulcorner \varphi \urcorner}) \qquad (*)$$

для каждой формулы φ. Затем мы перечисляем все предложения $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ этого расширенного языка и определяем полную теорию, исходя из **U** и добавляя на n-м шаге φ_n или $\neg\varphi_n$ в зависимости от того, совместима φ_n с тем, что было выбрано до этого момента, или нет. Эту конструкцию легко описать внутри **PA**. В предположении $\mathrm{Con}_{\mathbf{U}}$ мы можем также доказать, что она никогда не обрывается. Результирующее множество предложений образует полную теорию, которая в силу аксиом (*) образует модель теории **U**. Непосредственное рассмотрение показывает, что определение истинности для этой модели принадлежит классу Δ_2.

6.2. Теоремы о неполноте. Скотт первым заметил, что можно дать теоретико-модельное доказательство первой теоремы о неполноте.

6.2.1. Первая теорема о неполноте. *Имеется предложение* φ *такое, что* (i) $\mathbf{PA} \nvdash \varphi$ *и* (ii) $\mathbf{PA} \nvdash \neg\varphi$.

Доказательство. Допустим, что **PA** полна. Тогда, так как все теоремы **PA** верны, $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$, и мы можем применить теорему 6.1.1 для получения формулы Tr_M, которая дает определение истинности для некоторой модели теории **PA**. Выберем φ так, чтобы выполнялось

$$\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Tr}_M(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

Мы утверждаем, что $\mathbf{PA} \nvdash \varphi$, $\mathbf{PA} \nvdash \neg\varphi$. Действительно, если $\mathbf{PA} \vdash \varphi$, то $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Tr}_M(\ulcorner \varphi \urcorner)$, следовательно, $\mathbf{PA} \vdash \neg\varphi$. Аналогично $\mathbf{PA} \vdash \neg\varphi$ влечет $\mathbf{PA} \vdash \varphi$. □

Мы обсудим это доказательство несколько позже. Сначала мы хотим доказать вторую теорему о неполноте. Для этого нам нужна кое-какая терминология.

6.2.2. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели теории **PA**. Если $\mathfrak{M}$ определима в $\mathfrak{N}$ (даже в том слабом смысле, что атомарные отношения модели $\mathfrak{M}$ определимы в $\mathfrak{N}$), то мы пишем $\mathfrak{M} <_d \mathfrak{N}$.

Теорема Гильберта — Бернайса о полноте немедленно дает следующий факт. Если $\mathfrak{N} \models \mathbf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$, то имеется $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} <_d \mathfrak{N}$.

Полезность этого понятия иллюстрируется следующим утверждением.

6.2.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели* **PA** *и $\mathfrak{M} <_d \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M}$ является (и притом определимым образом) концевым расширением модели $\mathfrak{N}$, т. е. имеется единственное $\mathfrak{N}$-определимое изоморфное вложение модели $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ как начального сегмента модели $\mathfrak{M}$.*

Доказательство проходит непосредственно. $0_{\mathfrak{N}}$, очевидно, отображается на $0_{\mathfrak{M}}$. Продолжаем это отображение, скажем F, с помощью соотношения

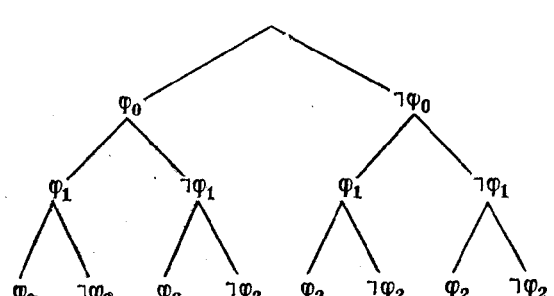
$$F(S_{\mathfrak{N}}x) = S_{\mathfrak{M}}(Fx),$$

где S с нижним индексом обозначают функцию следования в соответствующей модели. Рекурсивные равенства в $\mathfrak{M}$ и индукция в $\mathfrak{N}$ позволяют проверить, что F — изоморфизм модели $\mathfrak{N}$ на начальный сегмент модели $\mathfrak{M}$.

Используя эту лемму, мы изложим принадлежащее Крайзелю доказательство следующего утверждения.

6.2.4. Вторая теорема о неполноте. $\mathbf{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ — перечисление предложений языка, описанного в доказательстве теоремы 6.1.1. На это доказательство можно смотреть как на попытку выбрать бесконечный непротиворечивый путь через следующее дерево:



Мы можем предположить для определенности, что выбирается самый левый непротиворечивый путь. Выберем формулу φ такую, что $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$, для определения истинности $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}}$ в рассматриваемой модели. Пусть $\varphi = \varphi_{n_0}$ в упомянутом перечислении. Наше дерево до уровня n_0 абсолютно, т. е. оно одно и то же в любой модели. (Замечание. Это неверно для бесконечного дерева просто из-за того, что любая нестандартная модель $\mathfrak{M}$ будет кодировать уровни для формул φ_N, у которых N является нестандартным целым числом. Но конечные деревья фиксированы.)

Допустим, что $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$. Пусть $\mathfrak{N}_0 \models \mathbf{PA}$. Тогда имеется модель $\mathfrak{N}_1$, определимая в $\mathfrak{N}_0$, т. е. такая, что $\mathfrak{N}_1 <_d \mathfrak{N}_0$. Но $\mathfrak{N}_1$ — также модель для $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ и имеется $\mathfrak{N}_2 <_d \mathfrak{N}_1$. Повторяя этот процесс, мы получаем бесконечную последовательность

$$\mathfrak{N}_0 >_d \mathfrak{N}_1 >_d \mathfrak{N}_2 >_d \ldots$$

такую, что (скажем)

$$\mathfrak{N}_0 \models \varphi_{n_0}, \quad \mathfrak{N}_1 \models \neg\varphi_{n_0}, \quad \mathfrak{N}_2 \models \varphi_{n_0}, \ \ldots$$

Мы сейчас используем эту конструкцию, чтобы вывести противоречие. Для данной модели $\mathfrak{N}_i$ пусть $\varphi^i = \langle \varphi_0^{e_{0i}}, \varphi_1^{e_{1i}}, \ldots, \varphi_{n_0}^{e_{n_0 i}} \rangle$ обозначает часть пути, использованную при построении модели $\mathfrak{N}_{i+1}$, где $\varphi_j^0 = \varphi_j$, $\varphi_j^1 = \neg\varphi_j$ и $e_{ji} \in \{0, 1\}$. Напомним, что φ^i — самый левый непротиворечивый путь (с точки зрения) модели $\mathfrak{N}_i$.

Используя либо тот факт, что $\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}$ принадлежит классу Σ_1 и Σ_1-предложения сохраняются при концевых расширениях, либо главу 2 и тот факт, что

$$\mathbf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \vdash \forall\psi(\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner) \to \mathrm{Tr}_M(\ulcorner\psi\urcorner)),$$

мы видим, что φ^{i+1} никогда не лежит левее, чем φ^i. Действительно, как только $\mathfrak{N}_i$ скажет, что некоторая последовательность противоречива, так и каждая результирующая $\mathfrak{N}_j$ также будет утверждать ее непротиворечивость. Иначе говоря, большие модели могут давать возможность новых доказательств (даже для противоречий), например, с помощью нестандартных аксиом, закодированных с помощью бесконечных натуральных чисел, но они не могут стирать старых доказательств.

Итак, φ^{i+1} не может лежать левее φ^i. Далее, $\varphi^{i+1} \neq \varphi^i$, ибо

$$\varphi_{n_0}^{e_{n_0, i+1}} = \varphi_{n_0}^{1-e_{n_0, i}} \leftrightarrow \neg\varphi_{n_0}^{e_{n_0, i}}.$$

Таким образом, путь φ^{i+1} лежит правее φ^i.

Но дерево, определенное формулами $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n_0}$, конечно, и имеется только 2^{n_0+1} различных путей через это дерево. Это

противоречит допущению $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$, исходя из которого мы получим бесконечную последовательность путей φ^0, φ^1, ... □

***6.3. Комментарии.** Получив теоремы 6.2.1 и 6.2.4, мы прошли полный круг: мы вернулись к результатам, с которых мы начали эту главу. Новые доказательства несколько отличаются от первоначальных, и стоит провести несколько сравнений.

Сначала обсудим вид независимых предложений, которые получаются из двух доказательств первой теоремы о неполноте. «То» предложение, которое утверждает свою собственную недоказуемость:

(i) единственно с точностью до доказуемой эквивалентности;

(ii) принадлежит классу Π_1 и, следовательно, истинно.

«То» предложение, которое утверждает свою ложность в построенной модели:

(i′) не единственно, так как, если $\varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Tr}_M(\ulcorner \varphi \urcorner)$, то

$$\neg \varphi \leftrightarrow \mathrm{Tr}_M(\ulcorner \neg \varphi \urcorner);$$

(ii′) принадлежит классу Δ_2, и в силу (i′) нет очевидного способа решить, истинно оно или ложно.

Ситуацию (ii′) можно обойти следующим образом. Одно из предложений φ, $\neg\varphi$ истинно. Пусть $\exists x \forall y \psi xy$ — Σ_2-форма того из них, которое истинно. Тогда для некоторого n истинно $\chi = \forall y \psi \bar{n} y$. Но $\mathbf{PA} \nvdash \chi$, так как тогда мы имели бы $\mathbf{PA} \vdash \exists x \forall y \psi xy$. Но $\mathbf{PA} \nvdash \neg\chi$, так как χ истинно.

Данное здесь теоретико-модельное доказательство первой теоремы о неполноте аналогично классическому доказательству, ибо, как только мы предложим полноту, Tr_M совпадает с $\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}$. Теоретико-модельное доказательство второй теоремы о неполноте радикально отличается от классического, и мы отметим некоторые различия в типе информации, которую они дают.

(i) Классическое доказательство сразу дает формализованный вариант $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}} \rightarrow \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}+\neg \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}}$. Далее, оно непосредственно применимо к более слабым теориям вроде **PRA**.

(ii) В то время как классическое доказательство дает существование *некоторой* модели, в которой опровергается $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$, теоретико-модельное доказательство показывает, что для любого представления генкинской конструкции (заданного кодированием, перечислением φ_0, φ_1, ... и т. д.) имеется число m такое, что для любой модели $\mathfrak{M}$ системы **PA** последовательность

$$\mathfrak{N} \succ_{\mathrm{d}} \mathfrak{N}_1 \succ_{\mathrm{d}} \ldots, \qquad (*)$$

определенная данным представлением, должна оборваться после менее чем m шагов на модели, в которой $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ ложна. (Разумеется, в силу классического доказательства имеется представление генкинской конструкции с очень короткой последовательностью (*) — надо просто положить $\varphi_0 = \neg \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$. Приведенное доказательство работает для всех нумераций φ_0, ...)

Ниже приводится очень субъективная выборка из многих статей по теме этой главы. Она включает несколько статей, содержание которых не рассматривалось.

ЛИТЕРАТУРА

Гёдель (Gödel K.)
1. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. — Monatsh. Math. Phys., 1931, **38**, S. 173—198.

Гильберт и Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)
1. Grundlagen der Mathematik, I. — 2nd ed. — Berlin: Springer, 1970. [Русский перевод: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1983.]

Ерослов (Jeroslow R. G.)
1. Redundancies in the Hilbert — Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem. — J. Symbolic Logic, 1973, **38**, p. 359—367.

Кент (Kent C. F.)
1. The relation of A to Prov $\ulcorner A \urcorner$ in the Lindenbaum sentence algebra. — J. Symbolic Logic, 1973, **38**, p. 295—298.

Крайзель и Леви (Kreisel G., Levy A.)
1. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1968, **14**, S. 97—142.

Крайзель и Такеути (Kreisel G., Takeuti G.)
1. Formally self-referential propositions in cut-free classical analysis and related systems. — Dissertationes Math., 1974, **118**, p. 1—50.

Лёб (Löb M. H.)
1. Solution of a problem of Leon Henkin. — J. Symbolic Logic, 1955, **20**, p. 115—118.

Мешковский (Meschkowski H.)
1. Hundert Jahre Mengenlehre. — München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 1973.

Рид (Reid C.)
1. Hilbert. — Berlin: Springer, 1970. [Русский перевод: Рид К. Гильберт. — М.: Наука, 1977.]

Россер (Rosser J. B.)
1. Extensions of some theorems of Gödel and Church. — J. Symbolic Logic, 1936, **1**, p. 87—91.

Самбин (Sambin G.)
1. An effective fixed-point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras. — Studia Logica, 1976, **35**, p. 345—361.

Сморинский (Smorynski C.)
1. ω-consistency and reflection. — In: Colloque international de logique, Clermont-Ferrand, 1975. CNRS, 1978, p. 167—181.

Соловей (Soloway R.)
1. Provability interpretations of modal logic. — Israel J. Math., 1976, **25**, p. 287—304.

Феферман (Feferman S.)
1. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. — J. Symbolic Logic, 1962, **27**, p. 259—316.

Хазенъегер (Hasenjaeger G.)
1. Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. — J. Symbolic Logic, 1953, **18**, p. 42—48.

Глава 2

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ: НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ УСТРАНЕНИЯ СЕЧЕНИЯ

Гельмут Швихтенберг

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

1.1. Теория доказательств началась с *программы Гильберта*, которая предусматривала элементарные доказательства непротиворечивости для формализованных математических теорий **S**. Эквивалентным образом (при весьма общих условиях, обсуждаемых в главе 1) эту программу можно сформулировать следующим образом. Если дана формализация в **S** некоторого абстрактного доказательства для некоторого элементарного утверждения φ (например, доказательство в аксиоматической теории множеств формулы $n + m = m + n$, где m, n — *переменные* для натуральных чисел), всегда ли отсюда можно получить элементарными средствами, что φ истинно? Или, точнее, можно ли дать элементарное доказательство схемы

$$\exists x\, \mathrm{Der}_{\mathbf{S}}(x, \ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi, \qquad (*)$$

где $\mathrm{Der}_{\mathbf{S}}(\cdot, \cdot)$ — каноническое представление предиката выводимости в **S**, а φ пробегает формулы, соответствующие элементарным утверждениям? Согласно хорошо известной второй теореме Гёделя о неполноте, обсуждавшейся в главе 1, схема $(*)$ невыводима в **S**, если **S** достаточно сильна. Так как мы ожидаем, что сильная теория **S** содержит по крайней мере формализацию «элементарных» доказательств, можно по справедливости сказать, что это опровергает программу Гильберта в ее первоначальной форме. Однако мы можем также пытаться обобщить (первоначально весьма расплывчатую) концепцию элементарного доказательства, а затем искать такое доказательство утверждения $(*)$, не формализуемое в **S**. В действительности такова была реакция Гильберта на результат Гёделя (ср. введение в книге Гильберта и Бернайса [1]). Мы не будем здесь рассматривать исследования по программе Гильберта в этом направлении (ср., например, Шютте [1]), а сосредоточимся вместо этого на менее тонких вопросах, которые тесно связаны с программой Гильберта и возникли в связи с ней.

1.1.1. Теория **S** называется *консервативной* над теорией **T**, если любая формула из $L(\mathbf{T})$ (языка теории **T**), выводимая в **S**, выводима уже в **T**. Отметим, что это было бы (при весьма общих условиях) следствием выводимости схемы $(*)$ в **T**. Имеются многочисленные важные и нетривиальные примеры теорий **S**, консервативных над подтеорией **T**. Некоторые из них обсуждаются в главах 4 и 5. Мы дадим здесь очень простой пример и покажем, что логика первого порядка консервативна над своей частью, которая использует только формулы ограниченной сложности (ср. 2.8).

1.1.2. Схема $(*)$ (в которой φ считается теперь произвольной) дает, в общем случае, собственное расширение **S**. Однако $(*)$ имеет метаматематический характер, и о ее математической силе судить трудно. Поэтому можно интересоваться *эквивалентной формулировкой схемы* $(*)$, *имеющей ясный математический смысл*. Ответ на этот вопрос был дан для широкого многообразия теорий **S**. Мы ограничимся здесь базисным примером, а именно, классической арифметикой **Z**, и докажем, что в этом случае (некоторый вариант схемы) $(*)$ эквивалентен схеме трансфинитной индукции до ε_0.

1.2. Нашим вторым исходным пунктом является вопрос, который лишь сравнительно недавно привлек внимание специалистов по теории доказательств (Крайзель [2]): «*Насколько больше мы знаем, доказав теорему ограниченными средствами, чем в случае, когда известно лишь, что она истинна*?» Опять-таки мы ограничимся обсуждением базисного примера, когда «ограниченные средства» обозначают средства, формализуемые в арифметике **Z**. Мы получим полный ответ на этот вопрос, принадлежащий Крайзелю [1]. Для некоторых подсистем анализа мы также можем получить удовлетворительные ответы на вопросы обсуждавшегося выше типа: мы отсылаем читателя к главе 4.

1.3. С более технической точки зрения мы даем обзор некоторых элементарных приложений одного из основных средств теории доказательств — метода устранения сечения. Этот метод принадлежит Генцену и был позднее развит, в частности, Шютте [1] и Тейтом [1]. Другие методы, часто используемые в теории доказательств, достаточно освещены в других главах этого тома. Особенно важен принадлежащий Гёделю [1]

метод функциональной интерпретации, который рассматривается в главе 5.

1.4. Теперь мы подробно опишем содержание этой главы.

В § 2 мы доказываем *теорему об устранении сечения* для логики первого порядка. В качестве следствия мы получаем результат о консервативном расширении, упомянутый выше. Доказательство основной теоремы об устранении сечения построено таким образом, что его можно легко обобщить на многие другие случаи, где применяется устранение сечения, в частности на все случаи, рассмотренные здесь.

В § 3 мы обсуждаем для арифметики **Z** доказуемость и недоказуемость начальных случаев трансфинитной индукции. Результат (принадлежащий Генцену [1]) хорошо известен: если дано естественное вполне упорядочение $\prec$ по типу ε_0, то по отношению к $\prec$ трансфинитная индукция доказуема до любого ординала $<\varepsilon_0$, но не до самого ε_0.

Невыводимость в $\mathbf{Z}_0$ трансфинитной индукции до ε_0 будет следовать также из второй теоремы Гёделя о неполноте вместе с тем фактом, что трансфинитной индукции до ε_0 хватает, чтобы доказать принцип рефлексии для **Z** и, следовательно, непротиворечивость **Z** (ср. § 5). Здесь мы даем прямое доказательство этого результата о невыводимости, использующее устранение сечения. В техническом отношении это дает легкий и убедительный пример полезности бесконечных (инфинитарных) выводов и силы метода устранения сечения в применении к инфинитарным выводам.

В § 4 мы беремся за вопрос из п. 1.2. Сначала мы рассматриваем частный случай $\forall\exists$-формул. Допустим, что $\forall n\exists m\varphi(n, m)$ с бескванторной $\varphi(n, m)$ выводима в **Z**. Мы покажем, что тогда мы можем найти функцию F, удовлетворяющую $\forall n\varphi(n, F(n))$, которая имеет несколько ограниченную скорость роста: F можно определить с помощью примитивно рекурсивных операций и α-рекурсии для $\alpha < \varepsilon_0$.

Затем мы обращаемся к общему случаю произвольных **Z**-формул. На первый взгляд обобщение результата для $\forall\exists$-формул кажется невозможным, так как $\forall n\exists m\forall k(T(n, n, k)\rightarrow\rightarrow T(n, n, m))$ выводимо (в классической логике, а следовательно, и) в **Z**, но нет рекурсивной функции F, удовлетворяющей $\forall n\forall k(T(n, n, k)\rightarrow T(n, n, F(n))$, так как это противоречило бы рекурсивной неразрешимости $\exists kT(n, n, k)$, где T — клиниевский T-предикат. Однако такое обобщение имеется: это так называемая интерпретация отсутствием контрпримера, введенная Крайзелем [1]. Чтобы объяснить ее, рассмотрим сначала формулу указанного выше вида, т. е. $\psi = \forall n\exists m\forall k\varphi(n, m, k)$, где $\varphi(n, m, k)$ — бескванторная формула. Ее отрицание эквивалентно формуле $\exists n\forall m\exists k\neg\varphi(n, m, k)$, а следовательно (с использованием аксиомы выбора), также и $\exists n\exists f\forall m\neg\varphi(n, m, f(m))$; можно считать, что такие n, f дают контрпример к данной формуле ψ. Поэтому один из способов выразить содержание ψ — это сказать, что такого контрпримера нет, т. е. что для любых n, f мы имеем $\exists m\varphi(n, m, f(m))$ (эта формула — эрбрановская нормальная форма формулы ψ), т. е. имеется функционал F такой, что имеет место $\forall n\forall f\varphi(n, F(n, f), f(F(n, f)))$. Добавочная информация, которую мы получаем из того факта, что ψ выводима в **Z**, состоит в том, что можно найти такой функционал F, имеющий несколько ограниченную сложность: F может быть определен с помощью примитивно рекурсивных операций (в смысле Клини [2]) и α-рекурсий для некоторого $\alpha < \varepsilon_0$ или, как мы будем говорить, E является $<\varepsilon_0$-рекурсивным.

В общем случае пусть ψ — произвольная формула, и пусть $\psi_{\text{н}} = \exists m\psi^{\text{н}}(n, m, f)$ — ее эрбрановская нормальная форма, которая выводима в **Z** тогда и только тогда, когда выводима ψ. (Мы используем f для обозначения конечных последовательностей функциональных переменных, а n, m — для конечных последовательностей числовых переменных.) Результат теперь состоит в том, что из выводимости ψ в **Z** мы можем заключить, что имеются $<\varepsilon_0$-рекурсивные функционалы **F**, удовлетворяющие $\forall n\forall f\psi^{\text{н}}(n, \mathbf{F}(n, f), f)$. Мы докажем также, что этот результат неулучшаем в том смысле, что никакой меньший класс функционалов не достаточен.

Это доказательство содержит новое обстоятельство: оно использует тот факт, что процедура устранения сечения для бесконечных выводов является эффективной операцией. Точнее, мы показываем, что для естественного кодирования бесконечных выводов процедура устранения сечения может быть задана примитивно рекурсивной функцией.

В § 5 мы возвращаемся к вопросу, заданному в 1.1.2, и доказываем сформулированный там результат (принадлежащий Крайзелю и Леви [1]). Доказательство состоит в формализации рассуждения из § 4, т. е. устранения сечения для кодов бесконечных выводов.

Благодарности. Часть этого параграфа основана на других источниках, включая Тейт [1] (доказательство теоремы об устранении сечения в § 2) и Шютте [1] (приводимое в § 3 доказательство невыводимости в **Z** трансфинитной индукции до ε_0). Я хотел бы также поблагодарить С.-Фефермана, Г. Крайзеля, Р. Стетмена и А. Трулстру за многочисленные полезные комментарии и предложения; в частности, идея доказательства интерпретации отсутствием контрпримера с помощью устранения сечения принадлежит Г. Крайзелю.

§ 2. Устранение сечения для логики первого порядка

Мы доказываем базисную теорему об устранении сечения принадлежащим Генцену методом, который оказывается центральным в нашей дальнейшей работе: почти все результаты, упомянутые в § 1, будут получены с помощью обобщений этого метода. В техническом отношении мы будем весьма близко следовать Тейту [1], за единственным исключением: мы всегда будем избегать бесконечных формул (и позднее будем использовать бесконечные выводы только там, где они кажутся существенными).

2.1. Мы используем обычный *язык* логики первого порядка в следующем упрощенном варианте: формулы строятся из атомарных формул и их отрицаний посредством $\wedge$, $\vee$, $\forall x$, $\exists x$. Отрицание $\neg\varphi$ формулы φ — это *по определению* формула, получаемая из φ так:

(i) перед каждой атомарной формулой вставляется $\neg$;

(ii) знаки $\wedge$, $\vee$, $\forall x$, $\exists x$ заменяются соответственно на $\vee$, $\wedge$, $\exists x$, $\forall x$;

(iii) двойные отрицания стираются.

Такая трактовка отрицания возможна из-за того, что мы везде принимаем классическую логику. Заметим, что $\neg\neg\varphi$ совпадает с φ, $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$. Мы определяем $\varphi \to \psi$ обычным образом как $\neg\varphi \vee \psi$ и $\varphi \leftrightarrow \psi$ как $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Определим $|\varphi|$ (*длину* φ) следующим образом:

(i) $|\varphi| = |\neg\varphi| = 0$ для атомарных φ;

(ii) $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi \vee \psi| = \sup(|\varphi|, |\psi|) + 1$;

(iii) $|\forall x\varphi(x)| = |\exists x\varphi(x)| = |\varphi(x)| + 1$.

Отметим, что $|\neg\varphi| = |\varphi|$.

2.2. Логические правила. Мы будем выводить конечные множества формул, обозначаемые через Γ, Δ, $\Gamma(a), \ldots$. Подразумеваемый смысл Γ — дизъюнкция формул из Γ. Мы используем обозначения

$$\Gamma, \varphi \quad \text{для} \quad \Gamma \cup \{\varphi\},$$
$$\Gamma, \Delta \quad \text{для} \quad \Gamma \cup \Delta.$$

(i) *Нормальные правила*:

A $\quad \Gamma, \varphi, \neg\varphi$, если φ — атомарная формула;

$$\wedge\ \frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi};$$

$$\vee_0 = \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \varphi \vee \psi}, \qquad \vee_1 = \frac{\Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \vee \psi};$$

$$\forall\ \frac{\Gamma, \varphi(x)}{\Gamma, \forall x\varphi(x)},$$ если x не входит свободно в Γ (x называется собственной переменной правила $\forall$);

$$\exists\ \frac{\Gamma, \varphi(s)}{\Gamma, \exists x\varphi(x)}.$$

(ii) *Правило сечения*:

$$\text{сечение}\ \frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}.$$

Главные формулы (г. ф.) в аксиоме A — это φ и $\neg\varphi$. В $\wedge$, $\vee_i$, $\forall$, $\exists$ г. ф. суть $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\forall x\varphi(x)$, $\exists x\varphi(x)$ соответственно. Сечение не имеет г. ф. *Малая формула* (м. ф.) в посылке Γ, φ правила $\wedge$ есть φ, а в посылке Γ, ψ — это ψ. В посылке правил $\vee_0$, $\vee_1$, $\forall$ и $\exists$ м. ф. суть φ, ψ, $\varphi(x)$ и $\varphi(s)$ соответственно. М. ф. в посылке Γ, φ сечения есть φ, а в посылке $\Gamma, \neg\varphi$ есть $\neg\varphi$. Поэтому любое правило (точнее, применение правила) имеет вид

$$\frac{\Gamma, \varphi_i \quad \text{для всех} \quad i < k}{\Gamma, \Delta} \qquad (*)$$

($0 \leqslant k \leqslant 2$), где Δ состоит из г. ф., а φ_i есть м. ф. из i-й посылки. Формулы из Γ называются *боковыми формулами* (б. ф.)*) правила $(*)$.

Выводы строятся в форме дерева обычным образом. Точнее, они определяются следующей индукцией. Рассмотрим правило $(*)$ указанного выше типа и допустим, что даны выводы d_i его посылок Γ, φ_i. Тогда $d = ((d_i)_{i<k}, (\varphi_i)_{i<k}, \Delta, \Gamma)$ есть вывод заключения Γ, Δ правила $(*)$. Это правило называется *последним правилом* (точнее, *применением правила*) в d. Выводы d_i называются *прямыми подвыводами* d. Мы пишем $d \vdash \Gamma$, если d есть вывод (множества формул) Γ, и $\vdash \Gamma$, если имеется вывод для Γ.

Длина $|d|$ вывода d индуктивно определяется как $\sup_{i<k}(|d_i| + 1)$, если d_i, $i < k$, — прямые подвыводы d. Следовательно, $|d| = 0$, если d не имеет прямых подвыводов. *Ранг сечений* $\rho(d)$ вывода d также определяется индуктивно. Пусть d_i, $i < k$, — прямые подвыводы d. Если последнее правило в d есть сечение с м. ф. φ и $\neg\varphi$, то полагаем $\rho(d) = \sup(|\varphi| + 1, \sup_{i<k} \rho(d_i))$. В противном случае $\rho(d) = \sup_{i<k} \rho(d_i)$. Заметим, что $\rho(d) = 0$, если d свободен от сечений.

Удобно воспользоваться понятиями свободного и связанного вхождения переменной в выводы. Свободное вхождение пере-

*) В литературе распространен и другой вариант терминологии: м. ф. называется боковой формулой, а б. ф. — параметрическими формулами. — *Прим. ред.*

менной x внутри некоторого вхождения формулы в вывод d называется *связанным* в d, если «ниже» этого вхождения x используется как собственная переменная некоторого применения правила $\forall$; в противном случае это вхождение x называется *свободным* в d. Мы используем обозначения d, $d(x)$, ... для выводов, причем подразумевается, что могут быть и другие свободные переменные, отличные от указанных явно.

2.3. Пусть d, Γ получается из вывода d путем добавления Γ к боковым формулам всех применений правил в d. Легко видеть, что d, Γ — снова вывод при условии, что никакая свободная переменная из Γ не связана в d. Можно считать, что последнее условие всегда выполнено, если мы отождествим выводы, различающиеся лишь заменой связанных переменных. Таким образом, имеет место

2.3.1. Лемма об уточнении. *Если* $d \vdash \Delta$, *то* d, $\Gamma \vdash \Gamma, \Delta$, *причем* $|d, \Gamma| = |d|$, $\rho(d, \Gamma) = \rho(d)$.

2.4. Пусть $d(s)$ обозначает результат подстановки s вместо всех свободных вхождений x в $d(x)$ (отметим, что могут быть нужны некоторые замены связанных переменных в $d(x)$). Тогда, очевидно, справедлива

2.4.1. Лемма о подстановке. *Если* $d(x) \vdash \Gamma(x)$, *то* $d(s) \vdash \Gamma(s)$, *причем* $|d(s)| = |d(x)|$ *и* $\rho(d(s)) = \rho(d(x))$*).

2.5. Лемма об обращении. (i) *Если* $d \vdash \Gamma$, $\varphi_0 \wedge \varphi_1$, *то можно найти* $d_i \vdash \Gamma$, φ_i $(i = 0,1)$, *причем* $|d_i| \leqslant |d|$ *и* $\rho(d_i) \leqslant \rho(d)$.

(ii) *Если* $d_1 \vdash \Gamma$, $\forall x \psi(x)$, *то можно найти*

$$d_0 \vdash \Gamma, \psi(x), \quad \textit{причем} \quad |d_0| \leqslant |d| \text{ и } \rho(d_0) \leqslant \rho(d).$$

Доказательство. Доказательства (i) и (ii) проводятся почти одинаково индукцией по $|d|$. Ограничимся (ii). Пусть φ есть $\forall x \psi(x)$. Мы можем предполагать $\varphi \notin \Gamma$, так как иначе достаточно применить утончение, взяв d, $\psi(x)$.

Случай 1. φ не является г. ф. последнего правила в d. Это правило имеет вид

$$\frac{\Lambda, \varphi, \psi_j \quad \text{для всех } j < k}{\Lambda, \varphi, \Delta}$$

с м. ф. ψ_j, б. ф. Δ и $\Gamma = \Lambda, \Delta$. По индукционному предположению $\vdash \Lambda, \psi(x), \psi_j$ для всех $j < k$ с длиной $< |d|$ и степенью сечений $\leqslant \rho(d)$. Результат следует отсюда по правилу

$$\frac{\Lambda, \psi(x), \psi_j \quad \text{для всех } j < k}{\Lambda, \psi(x), \Delta}.$$

Случай 2. φ есть г. ф. последнего правила в d. Заменяя d в случае необходимости на d, φ, мы можем считать, что φ есть б. ф. в последнем правиле d. Итак, это правило имеет вид

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi(x)}{\Gamma, \varphi}$$

с м. ф. $\psi(x)$, г. ф. φ и б. ф. Γ, φ. По индукционному предположению $\vdash \Gamma$, $\psi(x)$ с длиной $< |d|$ и рангом сечений $\leqslant \rho(d)$. Это завершает доказательство. □

2.6. Лемма о редукции. *Пусть* $d_0 \vdash \Gamma, \varphi$ *и* $d_1 \vdash \Delta, \neg\varphi$ *оба с рангами сечений* $\rho(d_i) \leqslant |\varphi|$. *Тогда можно найти* $d \vdash \Gamma, \Delta$ *с* $|d| \leqslant |d_0| + |d_1|$ *и* $\rho(d) \leqslant |\varphi|$.

Разумеется, мы могли бы вывести Γ, Δ применением правила сечения, но тогда результатирующий вывод имел бы ранг сечений $|\varphi| + 1$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по $|d_0| + |d_1|$. Так как $|\varphi| = |\neg\varphi|$ и $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$, то лемма симметрична по отношению к двум данным выводам.

Случай 1. Либо φ не есть г. ф. в последнем правиле из d_0, либо $\neg\varphi$ не есть г. ф. в последнем правиле из d_1. Ввиду симметрии допустим первое. Тогда последнее правило в d_0 имеет вид

$$\frac{\Lambda, \varphi, \psi_i \quad \text{для всех } i < k}{\Lambda, \varphi, \Theta}$$

с м. ф. ψ_i, г. ф. Θ, б. ф. Λ, φ и $\Gamma = \Lambda, \Theta$. По индукционному предположению $\vdash \Lambda, \Delta, \psi_i$ для всех $i < k$ с длиной $< |d_0| + |d_1|$ и рангом сечения $\leqslant |\varphi|$. Нужный результат получается теперь по правилу

$$\frac{\Lambda, \Delta, \psi_i \quad \text{для всех } i < k}{\Lambda, \Delta, \Theta}.$$

Случай 2. φ есть г. ф. в последнем правиле из d_0, и $\neg\varphi$ есть г. ф. в последнем правиле из d_1.

Случай 2.1. φ или $\neg\varphi$ — атомарная формула. Тогда последние (и единственные) правила в d_0 и d_1 — применения правила A и, следовательно, Γ, Δ — также применение правила A.

Случай 2.2. φ или $\neg\varphi$ есть дизъюнкция $\varphi_0 \vee \varphi_1$. По симметрии мы будем считать, что такова φ, так что $\neg\varphi$ есть $\neg\varphi_0 \wedge \neg\varphi_1$.

*) Здесь подразумевается, что в случае возникновения коллизий происходит переименование связанных переменных как в обычном смысле, так и в смысле п. 2.2. В первом случае выводимая секвенция может измениться.— *Прим. ред.*

Заменяя в случае необходимости d_0 на d_0, φ, мы можем считать, что φ есть б. ф. последнего правила в d_0. Поэтому это правило имеет вид

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi_i}{\Gamma, \varphi}.$$

По индукционному предположению $\vdash \Gamma, \Delta, \varphi_i$ с длиной $< |d_0| + |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant \varphi$. По лемме обращения $\vdash \Delta, \neg\varphi_i$ с длиной $\leqslant d_1 < |d_0| + |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$. Результат следует отсюда путем применения правила сечения.

Случай 2.3. φ или $\neg\varphi$ имеет вид $\exists x \psi(x)$. Снова мы можем допустить первое (так что $\neg\varphi$ есть $\forall x \neg \psi(x)$), а также что φ есть г. ф. последнего правила в d_0. Таким образом, это правило имеет вид

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi(s)}{\Gamma, \varphi}.$$

По индукционному предположению $\vdash \Gamma, \Delta, \psi(s)$ с длиной $< |d_0| + |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$. По лемме об обращении $\vdash \Delta, \neg\psi(a)$ с длиной $\leqslant |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$. По лемме о подстановке $\vdash \Delta, \neg\psi(s)$ также с длиной $\leqslant |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$. Нужный результат следует отсюда путем применения правила сечения. □

2.7. Теорема об устранении сечения. *Если* $d \vdash \Gamma$ *и* $\rho(d) > 0$, *то мы можем найти* $d' \vdash \Gamma$ *с* $\rho(d') < \rho(d)$ *и* $|d'| \leqslant 2^{|d|}$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по $|d|$. Мы можем считать, что последнее правило в d — сечение

$$\frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}$$

с $|\varphi| + 1 = \rho(d)$, так как иначе нужный результат получается по индукционному предположению (с использованием того факта, что наши правила имеют конечное число посылок). Итак, допустим это. Пусть $d_0 \vdash \Gamma, \varphi$ и $d_1 \vdash \Gamma, \neg\varphi$ — прямые подвыводы d. По индукционному предположению мы имеем $d_0' \vdash \Gamma, \varphi$ и $d_1' \vdash \Gamma, \neg\varphi$, оба с рангом сечений $\rho(d_i') \leqslant |\varphi|$ и длиной $|d_i'| \leqslant 2^{|d_i|}$. Нужный результат следует теперь по лемме о редукции, так как

$$|d_0'| + |d_1'| \leqslant 2^{\sup(|d_0|, |d_1|)+1} = 2^{|d|}. \quad \square$$

Пусть $2_0^\xi = \xi$, $2_{k+1}^\xi = 2^{2_k^\xi}$.

2.7.1. Следствие. *Если* $d \vdash \Gamma$, *то мы можем найти свободный от сечения* $d^* \vdash \Gamma$ *с* $|d^*| \leqslant 2_{\rho(d)}^{|d|}$.

2.8. В этом и следующем пунктах мы докажем два важных следствия теоремы об устранении сечения.

Определим отношение «ψ есть подформула φ» как наименьшее транзитивное и рефлексивное отношение со свойствами:

(i) φ_0, φ_1 — подформулы формул $\varphi_0 \wedge \varphi_1$, $\varphi_0 \vee \varphi_1$;

(ii) $\varphi(s)$ — подформула формул $\forall x \varphi(x)$, $\exists x \varphi(x)$.

Следующее утверждение очевидно.

2.8.1. Свойство подформульности. *Пусть* d — *свободный от сечения вывод множества* Γ. *Тогда любая формула, встречающаяся в* d, *является подформулой какой-то формулы из* Γ.

Следовательно, из теоремы об устранении сечения мы можем заключить, что *для любого* $d \vdash \Gamma$ *мы можем найти* $d^* \vdash \Gamma$, *содержащий только подформулы формул из* Γ.

2.9. Теорема Эрбрана*). *Пусть* $d \vdash \exists x \varphi(x)$ *с бескванторной* $\varphi(x)$. *Тогда мы можем найти термы* $s_0, \ldots, s_{n-1}$ *и вывод* $d_0 \vdash \varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_{n-1})$.

Доказательство. Можно считать, что d свободен от сечения. Следовательно, в силу свойства подформульности любое применение правила $\exists$ в d имеет г. ф. $\exists x \varphi(x)$. Пусть $s_0, \ldots, s_{n-1}$ — все термы такие, что $\varphi(s_i)$ является м. ф. такого применения $\exists$. Добавим теперь $\varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_{n-1})$ к боковым формулам любого применения правила в d и вычеркнем из d все вхождения $\exists x \varphi(x)$. Легко видеть, что полученный объект — это (по существу) требуемый вывод. □

§ 3. Трансфинитная индукция

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать классическую арифметику **Z**. Мы начнем с обсуждения трансфинитной индукции, в частности с вопроса о том, какие начальные случаи трансфинитной индукции выводимы в **Z**. С помощью обобщения метода устранения сечения из § 2 мы покажем, что трансфинитная индукция до ε_0 невыводима в **Z**. Это дает точную границу, так как легко видеть, что для любого $\alpha < \varepsilon_0$ трансфинитная индукция до α доказуема в **Z** (ср. Шютте [1] или главу 4).

3.1. Чтобы уточнить обозначения, мы опишем наш вариант арифметики **Z**, который в действительности представляет собой обычную арифметику плюс свободные переменные для множеств

*) В действительности теорема Эрбрана дает выводимое множество бескванторных формул по любой (а не только чисто экзистенциальной) формуле. См. Добавление 2. — *Прим. перев.*

и функций. Итак, мы имеем переменные для чисел (числовые переменные), для множеств, и при каждом $n > 0$ — переменные для n-местных функций (счетное множество для каждого сорта). Они обозначаются соответственно посредством k, m, n, p, посредством X, Y, Z и посредством f, g, h. *Термы* системы **Z** строятся из константы 0 (для числа 0) и числовых переменных с помощью функционального символа S (для функции следования), $+$ $\cdot$ и функциональных переменных. *Атомарные формулы* системы **Z** имеют вид $s = t$, $s < t$ или $s \in X$, где s, t — термы, а X — переменная для множеств. Формулы строятся из них обычным образом с использованием кванторов только по числовым переменным.

Аксиомы системы **Z** — это обычные аксиомы для 0, S, $<$ ($\neg n < 0$, $m < Sn \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$), $+$, $\cdot$, равенства и схема индукции

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(Sn)) \to \forall n \varphi(n),$$

где $\varphi(n)$ — произвольная формула языка, возможно, содержащая добавочные переменные. Теоремы **Z** — это формулы, выводимые из аксиом с помощью классической логики.

Различные множества и функции, о которых нам хотелось бы говорить в арифметике, можно вводить *в расширениях* **Z** *с помощью определений* (которые, тем самым, консервативны). Имеется один из типов таких определений, в котором мы особенно заинтересованы, а именно так называемые рекурсивные расширения **Z**. Такое расширение происходит, когда:

(i) мы вводим новый символ M для множества с определяющей аксиомой $n \in M \leftrightarrow \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — бескванторная формула или

(ii) мы вывели $\exists m \varphi(\boldsymbol{n}, m, \boldsymbol{f})$ с бескванторной $\varphi(\boldsymbol{n}, m, \boldsymbol{f})$ и затем вводим новый функциональный символ F с определяющими аксиомами

$$\varphi(\boldsymbol{n}, F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}), \boldsymbol{f}), \qquad m < F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}) \to \neg \varphi(\boldsymbol{n}, m, \boldsymbol{f}).$$

Система $\mathbf{Z}'$ называется *рекурсивным расширением* **Z**, если она получается из **Z** конечной последовательностью таких расширений с помощью определений. Рекурсивные расширения системы **Z** также будут обозначаться через **Z**.

Можно показать, что любая примитивно рекурсивная функция может быть введена в рекурсивном расширении **Z** (ср. Шенфилд [1]). Обратно, любая такая функция наверняка рекурсивна. Мы точно выясним в § 4, какие рекурсивные функции могут быть введены в рекурсивных расширениях **Z**.

Очевидно, что **Z** является консервативным расширением своей части, не содержащей переменных для функций или для множеств или тех и других. Эти подсистемы также будут обозначаться через **Z**.

3.2. Естественные вполне упорядочения порядкового типа ε_0. Как хорошо известно, ординалы $< \varepsilon_0$ могут быть построены из 0 посредством ординальных функций $\alpha + \beta$ и ω^α. Это построение однозначно, если пользоваться канторовской нормальной формой (ср. Бахман [1], Такеути [1]). Следовательно, ординалы $< \varepsilon_0$ можно рассматривать как финитные объекты и они могут быть закодированы натуральными числами. Легко выбрать эти коды таким образом, что:

(i) кодирование дает взаимно однозначное отображение $\alpha \mapsto \ulcorner \alpha \urcorner$ ординалов $< \varepsilon_0$ на натуральные числа;

(ii) отношение $n \prec m$, соответствующее отношению «меньше» между ординалами $< \varepsilon_0$, примитивно рекурсивно;

(iii) теоретико-числовые функции, соответствующие ординальным функциям $\alpha + \beta$, ω^α и их обращениям, примитивно рекурсивны. (Ср. Крайзель [4], Приложение I. — *Прим. перев.*)

Очевидно, что любые два кодирования со свойствами (i)—(iii) будут примитивно рекурсивно изоморфны. Любое из соответствующих $\prec$-отношений между натуральными числами называется *естественным вполне упорядочением порядкового типа* ε_0. Мы выберем одно из них, обозначим его через $\prec$ и зафиксируем его для дальнейшего. Мы пишем $n \preccurlyeq m$ вместо $n \prec m \vee n = m$.

3.3. Пусть $\mathrm{Prog}(X)$ («X прогрессивен») обозначает формулу

$$\forall n(\forall m(m \prec n \to m \in X) \to n \in X).$$

Аксиома трансфинитной индукции до ε_0 — это формула

$\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}(X)$ $\qquad \mathrm{Prog}(X) \to \forall n(n \in X).$

Здесь $m \prec n$ обозначает $\langle m, n \rangle \in M$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — одна из обычных примитивно рекурсивных спаривающих функций и M — символ для примитивно рекурсивного множества номеров пар $\langle m, n \rangle$ таких, что имеет место $m \prec n$.

3.3.1. Теорема (Генцен [1]). $\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}(X)$ *невыводима в арифметике* **Z**.

Доказательство этой теоремы займет оставшуюся часть § 3. В общих чертах оно проходит следующим образом. Сначала мы погружаем **Z** в «полуформальную» систему $\mathbf{Z}_\infty$, в которой индукция заменяется правилом с бесконечным числом посылок, так называемым ω-*правилом*:

$$\frac{\Gamma, \Delta(\bar{i}_0, \ldots, \bar{i}_{k-1}) \qquad \text{для всех } i_0, \ldots, i_{k-1} < \omega}{\Gamma, \Delta(n_0, \ldots, n_{k-1})},$$

где $\bar{i}$ — i-я цифра, т. е. $S^i 0$. С помощью небольшого обобщения рассуждения из § 2 мы получаем теорему об устранении сечения

для $\mathbf{Z}_\infty$, которая дает границу на длину свободного от сечения вывода в терминах длины и ранга сечений вывода, с которого мы начали. В частности, если мы начали с (образа в $\mathbf{Z}_\infty$) некоторого $\mathbf{Z}$-вывода, то эта длина будет $<\varepsilon_0$. Затем мы расширим $\mathbf{Z}$ еще одним инфинитарным правилом, так называемым *правилом прогрессивности*, которое ввел Шютте:

$$\text{Prog}\qquad \frac{\Gamma,\ \overline{i}\in X \quad \text{для всех } i<j}{\Gamma,\ s\in X},$$

где s — замкнутый терм с числовой величиной j. Легко видеть, что в $\mathbf{Z}_\infty+\text{Prog}$ можно дать вывод $\text{Prog}(X)$ и что этот вывод имеет конечную длину. И снова теорема об устранении сечения с теми же ординальными границами верна для $\mathbf{Z}_\infty+\text{Prog}$. Допустим теперь, что $\text{TI}_{\varepsilon_0}(X)$ выводима в $\mathbf{Z}$. Так как $\text{Prog}(X)$ выводима в $\mathbf{Z}_\infty+\text{Prog}$ с выводом конечной длины, мы можем заключить, что формула $n\in X$ (с переменной n) выводима без сечения в $\mathbf{Z}_\infty+\text{Prog}$ с длиной $\alpha<\varepsilon_0$ (т. е. с выводом длины α). Следовательно, $\overline{\ulcorner\alpha+1\urcorner}\in X$ также выводима в $\mathbf{Z}_\infty+\text{Prog}$ с длиной α. Но это — противоречие, так как из вида правил системы $\mathbf{Z}_\infty+\text{Prog}$ немедленно следует, что любой вывод без сечения формулы $\overline{\ulcorner\beta\urcorner}\in X$ имеет длину β.

3.4. Устранение сечения для $\mathbf{Z}_\infty$

3.4.1. Описание $\mathbf{Z}_\infty$. *Язык* системы $\mathbf{Z}_\infty$ тот же, что у $\mathbf{Z}$. Мы можем считать здесь, что у нас нет функциональных переменных. Мы используем обозначения § 2 для понятий, связанных с выводами.

Конечное множество Δ формул называется $\mathbf{Z}_\infty$*-аксиомой*, если Δ состоит из атомарных формул или их отрицаний, не содержащих числовых переменных, причем $\forall\Delta$ (дизъюнкция формул из Δ) является тавтологическим следствием*) частных случаев бескванторных аксиом системы $\mathbf{Z}$.

Нормальные правила $\mathbf{Z}_\infty$ — это

$$\text{A}\qquad \Gamma,\ \Delta, \text{ если } \Delta \text{ есть } \mathbf{Z}_\infty\text{-аксиома},$$

правила $\wedge$, $\vee_0$, $\vee_1$, $\forall$, $\exists$, перечисленные в § 2, и ω-правило

$$\frac{\Gamma,\ \Delta(i) \quad \text{для всех } i}{\Gamma,\ \Delta(n)}.$$

Далее, имеем в $\mathbf{Z}_\infty$ *правило сечения*, сформулированное в § 2.

Отметим, что в ω-правиле мы разрешаем, чтобы список n был пустым. Допускается также, чтобы в $\Delta(n)$ ни одна переменная из n в действительности не входила свободно. В этих случаях заключение ω-правила совпадает с посылкой (посылками). Такое применение ω-правила называется *несобственным*.

Главными формулами (г. ф.) в A являются все формулы из Δ. В ω-правиле г. ф. являются все формулы из $\Delta(n)$. *Малыми формулами* (м. ф.) в i-й посылке ω-правила являются все формулы из $\Delta(\overline{i})$. Поэтому любое применение правила имеет теперь вид

$$\frac{\Gamma,\ \Delta_i \quad \text{для всех } i<\alpha}{\Gamma,\ \Delta} \qquad (*)$$

$(0\leqslant\alpha\leqslant\omega)$, где Δ состоит из г. ф., а Δ_i состоит из м. ф. в i-й посылке. Формулы из Γ снова называются *боковыми формулами* (б. ф.) правила $(*)$.

Выводы теперь будут бесконечными; они определяются так же, как в 2.2. (В случае ω-правила мы должны добавить информацию о переменных n.) Также и другие понятия, введенные в 2.2, в частности *длина* $|d|$ и *ранг сечений* $\rho(d)$ вывода d, переносятся на бесконечные выводы с теми же самыми определениями. Отметим, что $|d|$ теперь — счетный ординал, а $\rho(d)\leqslant\omega$. Мы ограничимся выводами с конечным числом свободных и связанных переменных. Множество переменных, свободных в выводе d, обозначается через $\text{Var}(d)$.

3.4.2. Лемма о вложении. *Для любой формулы φ, выводимой в $\mathbf{Z}$, имеем $\mathbf{Z}_\infty$-вывод $d\vdash\varphi$ с длиной $|d|<\omega\cdot 2$ и рангом сечений $\rho(d)<\omega$.*

Это свойство легко усмотреть для аксиом системы $\mathbf{Z}$ (в случае индукции нужно использовать ω-правило*)) и оно сохраняется при применении логических правил.

*) То есть имеются частные случаи аксиом $A_1,\ldots,A_n$ такие, что $\wedge A_i\to\forall\Delta$ является тавтологией. — *Прим. перев.*

*) Если ввести обозначения

$$\text{Prg}\underset{\text{def}}{=}\forall n\,(\neg\varphi(n)\vee\varphi(Sn)),\qquad I\underset{\text{def}}{=}\neg(\varphi(0)\wedge\text{Prg})\vee\forall n\varphi(n),$$

то вывод аксиомы индукции I в $\mathbf{Z}_\infty$ будет иметь вид

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{d_i}{\neg(\varphi(0)\wedge\text{Prg}),\ \varphi(i)}}{I,\ \varphi(\overline{i}) \text{ для всех } i}\,\omega}{I,\ \varphi(n)}\,\forall}{I,\ \forall n\varphi(n)}\,\vee_1}{I}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{d_0}{\neg\varphi(0),\ \varphi(0)}\quad \cfrac{\neg\varphi(\overline{i}),\ \varphi(\overline{i})\quad \neg\varphi(S\overline{i}),\ \varphi(S\overline{i})}{d_i\colon\ \neg\varphi(0)\vee\neg\text{Prg},\ \varphi(\overline{i})\ \neg\varphi(\overline{i}),\ \neg\text{Prg},\ \varphi(S\overline{i})}\,\vee}{\neg\varphi(0)\vee\neg\text{Prg},\ \neg\varphi(0),\ \neg\text{Prg},\ \varphi(S\overline{i})}\,\text{сеч.}}{d_{i+1};\ \neg\varphi(0)\vee\neg\text{Prg},\ \varphi(S\overline{i})}\,\vee_{0,1},$$

где d_0 есть вывод $\cfrac{\neg\varphi(0),\ \varphi(0)}{\neg\varphi(0)\vee\neg\text{Prg},\ \varphi(0)}\,\vee_0$, а d_{i+1} приведено выше. — *Прим. перев.*

3.4.3. Мы обобщим теперь на $\mathbf{Z}_\infty$ доказательство теоремы об устранении сечения, данное в § 2 для логики первого порядка. Очевидно, имеет место

Лемма об утончении. *Если* $d \vdash \Delta$, *то* d, $\Gamma \vdash \Gamma, \Delta$, *причем* $|d, \Gamma| = |d|$, $\rho(d, \Gamma) = \rho(d)$ *и* $\mathrm{Var}(d, \Gamma) = \mathrm{Var}(d) \cup V$, *где* V *— множество переменных, свободных в* Γ.

Заметим, что любой замкнутый терм s имеет числовое значение (величину) i, причем $s = \bar{i}$ есть $\mathbf{Z}_\infty$-аксиома.

Лемма об оценке. *Пусть* s, t *— замкнутые термы, имеющие одно и то же значение* i. *Если* $d \vdash \Gamma(s)$, *то мы можем найти* $d_0 \vdash \Gamma(t)$ *с* $|d_0| = |d|$, $\rho(d_0) = d$ *и* $\mathrm{Var}(d_0) = \mathrm{Var}(d)$.

Легко видеть, что это верно для частных случаев правила A и сохраняется другими правилами.

Лемма о подстановке. *Если* $d(n) \vdash \Gamma(n)$, *то* $d(s) \vdash \Gamma(s)$, *причем* $|d(s)| \leqslant |d(n)|$, $\rho(d(s)) \leqslant \rho(d(n))$ *и* $\mathrm{Var}(d(s)) \subseteq (\mathrm{Var}(d) - \{n\}) \cup V$, *где* V *— множество переменных, свободных в* s.

Доказательство проводится индукцией по $|d(n)|$. Единственный случай, требующий специального рассмотрения, — это случай, когда последним правилом в $d(n)$ является ω-правило вида

$$\frac{\Gamma(n, m, p), \Delta(\bar{i}, \bar{j}, p) \text{ для всех } i, j}{\Gamma(n, m, p), \Delta(n, m, p)},$$

где m, p содержат все переменные, свободные в $s = s(m, p)$ (но $\Gamma(n, m, p)$, $\Delta(n, m, p)$ могут содержать свободные переменные, отличные от указанных явно). По индукционному предположению

$$\vdash \Gamma(\bar{l}, m, \bar{k}), \Delta(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \quad \text{для всех } i, j, k$$

с длиной $< |d(n)|$ и рангом сечений $\leqslant \rho(d(n))$. Из части этих выводов мы получаем по лемме об оценке

$$\vdash \Gamma(s(\bar{j}, \bar{k}), m, \bar{k}), \Delta(s(\bar{j}, \bar{k}), \bar{j}, \bar{k}) \text{ для всех } j, k,$$

не увеличивая длины или ранга сечений. Нужный результат получается отсюда применением ω-правила. □

Лемма об обращении. (i) *Если* $d \vdash \Gamma$, $\varphi_0 \wedge \varphi_1$, *то мы можем найти* $d_i \vdash \Gamma$, φ_i $(i = 0, 1)$ *с* $|d_i| \leqslant |d|$, $\rho(d_i) \leqslant \rho(d)$ *и* $\mathrm{Var}(d_i) \subseteq \mathrm{Var}(d)$.

(ii) *Если* $d \vdash \Gamma$, $\forall n \psi(n)$, *то мы можем найти* $d_0 \vdash \Gamma$, $\psi(n)$, *причем* $|d_0| < |d|$, $\rho(d_0) \leqslant \rho(d)$ *и* $\mathrm{Var}(d_0) \subseteq \mathrm{Var}(d) \cup \{n\}$.

Доказательства утверждений (i) и (ii) почти одинаковы, оба они проводятся индукцией по $|d|$. Ограничимся (ii). Единственный подслучай, не встречавшийся в 2.5, — это случай, когда последним в d применяется ω-правило. Тогда это применение правила имеет вид

$$\frac{\Lambda(m), \varphi(m), \Delta(\bar{i}), \varphi(\bar{i}) \quad \text{для всех } i}{\Lambda(m), \Delta(m), \varphi(m)}$$

с м.ф. $\Delta(\bar{i})$, $\varphi(\bar{i})$, г.ф. $\Delta(m)$, $\varphi(m)$, б.ф. $\Lambda(m)$, $\varphi(m)$ и $\Gamma(m) \equiv \Lambda(m)$, $\Delta(m)$, $\varphi \equiv \varphi(m)$. Два применения индукционного предположения дают

$$\vdash \Lambda(m), \psi(n, m), \Delta(\bar{i}), \psi(n, \bar{i}) \text{ для всех } i$$

с длиной $< |d|$ и рангом сечений $\leqslant \rho(d)$. Нужный результат получается отсюда применением ω-правила.

Лемма о редукции. *Пусть* $d \vdash \Gamma$, φ *и* $d_1 \vdash \Delta$, $\neg\varphi$, *причем для обоих выводов ранг сечений* $\rho(d_i) \leqslant |\varphi|$. *Тогда можно найти* $d \vdash \Delta$, Γ *такой, что* $\rho(d) \leqslant |\varphi|$,

$$|d| \leqslant |d_0| \# |d_1| \quad \text{и} \quad \mathrm{Var}(d) \subseteq \mathrm{Var}(d_0) \cup \mathrm{Var}(d_1).$$

Здесь $\#$ обозначает натуральную (или гессенберговскую сумму ординалов*) (ср. Бахман [1]). Операция $\#$ строго монотонна по обоим аргументам.

Доказательство проводится индукцией по $|d_0| \# |d_1|$. Снова единственный (под)случай, не встречающийся в 2.6, — это случай, когда φ — г.ф. последнего правила в d_0, $\neg\varphi$ — г.ф. последнего правила в d_1, и последнее правило в d_0 или d_1 — применение ω-правила. Ввиду симметрии допустим первое. Мы можем также, заменяя в случае необходимости d_0 на d_0, φ, считать, что φ есть б.ф. последнего правила в d_0. Таким образом, это правило имеет вид

$$\frac{\Lambda(m), \varphi(m), \Theta(\bar{i}), \varphi(\bar{i}) \quad \text{для всех } i}{\Lambda(m), \Theta(m), \varphi(m)}$$

с м.ф. $\Theta(\bar{i})$, $\varphi(\bar{i})$, г.ф. $\Theta(m)$, $\varphi(m)$, б.ф. $\Lambda(m)$, $\varphi(m)$ и $\Gamma(m) \equiv \Lambda(m)$, $\Theta(m)$, $\varphi \equiv \varphi(m)$. По лемме о подстановке $\vdash \Gamma(\bar{i})$, $\varphi(\bar{i})$ для всех i с длиной $< |d_0|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$, а также $\vdash \Delta(\bar{i})$, $\neg\varphi(\bar{i})$ для всех i с длиной $\leqslant |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$. По индукционному предположению $\vdash \Gamma(\bar{i})$, $\Delta(\bar{i})$ для всех i с длиной $< |d_0| \# |d_1|$ и рангом сечений $\leqslant |\varphi|$. Нужный результат получается применением ω-правила. Это завершает доказательство леммы.

*) Если $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$, $\beta = \omega^{\alpha_{n+1}} + \ldots + \omega^{\alpha_m}$, $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, $\alpha_{n+1} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m$, то $\alpha \# \beta = \omega^{\alpha_{i_1}} + \ldots + \omega^{\alpha_{i_m}}$, где $(i_1, \ldots, i_m)$ — перестановка $(1, \ldots, m)$ такая, что $\alpha_{i_1} \geqslant \alpha_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{i_m}$. — *Прим. перев.*

Пусть $\varepsilon(\alpha)$ — это α-е ε-число *).

Теорема об устранении сечения. (i) *Если* $d \vdash \Gamma$ *и* $\rho(d) = \zeta + 1$, *то можно найти* $d' \vdash \Gamma$ *такой, что* $\rho(d') \leqslant \zeta$, $|d'| \leqslant 2^{|d|}$ *и* $\mathrm{Var}(d') \subseteq \mathrm{Var}(d)$.

(ii) *Если* $d \vdash \Gamma$ *и* $\rho(d) = \omega$, *то можно найти* $d' \vdash \Gamma$ *такой, что* $\rho(d') = 0$, $|d'| \leqslant \varepsilon(|d|)$ *и* $\mathrm{Var}(d') \subseteq \mathrm{Var}(d)$.

Доказательство. (i), как в 2.7.

(ii) Индукцией по $|d|$. Мы можем предположить, что последнее правило в d — сечение

$$\frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma},$$

так как в противном случае нужный результат получается по индукционному предположению. Итак, предположим это. По индукционному предположению имеем $d_0 \vdash \Gamma, \varphi$ и $d_1 \vdash \Gamma, \neg\varphi$, причем оба вывода свободны от сечений и имеют длины $|d_i| < \varepsilon(|d|)$. Нужный результат получается тогда путем $|\varphi|$-кратного применения (i).

Следствие. *Если* $d \vdash \Gamma$, *то можно найти свободный от сечения* $d^* \vdash \Gamma$ *с* $|d^*| \leqslant 2_{\rho(d)}^{|d|}$, *если* $\rho(d) < \omega$, *и* $|d^*| \leqslant \varepsilon(|d|)$, *если* $\rho(d) = \omega$.

3.5. Теорема об устранении сечения для $\mathbf{Z}_\omega + \mathbf{Prog}$. Мы добавляем к $\mathbf{Z}_\omega$ следующее *правило прогрессивности*:

$$\mathbf{Prog} \qquad \frac{\Gamma, \overline{i} \in X \quad \text{для всех } i < j}{\Gamma, s \in X}$$

для замкнутого терма s со значением j.

Г. ф. в Prog является $s \in X$, а м. ф. в i-й посылке является $\overline{i} \in X$. Теперь все определения, леммы и доказательства из п. 3.4 переносятся почти дословно. Нужно лишь несколько расширить часть доказательства леммы редукции, относящуюся к случаю, когда φ есть г. ф. последнего правила в d_0, $\neg\varphi$ есть г. ф. последнего правила в d_1 и φ атомарна. Пусть это последнее правило есть Prog в d_0 и A в d_1. Мы можем считать, что φ есть б. ф. последнего правила в d_0, следовательно, оно имеет вид

$$\frac{\Gamma, s \in X, \overline{i} \in X \quad \text{для всех } i < j}{\Gamma, s \in X}, \quad s \text{ — замкнутый терм}$$

со значением j.

Последнее (и единственное) правило в d_1 есть применение Δ, $\neg(s \in X)$ правила A. Теперь легко видеть, что либо (i) $t \in X$

*) β называется ε-числом, если $\omega^\beta = \beta$. — *Прим. перев.*

содержится в Δ для некоторого замкнутого терма t со значением j, либо

(ii) уже само Δ есть применение правила A.

В последнем случае результат получается применением утончения. В первом случае мы имеем по индукционному предположению $\vdash \Gamma, \Delta, t \in X, \overline{i} \in X$ для всех $i < j$ с длиной $< |d_0|$ и рангом сечений 0. Нужный результат получается с помощью правила Prog.

3.6. Невыводимость $\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}(X)$ в Z.

3.6.1. Лемма. *В* $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$ *можно вывести* $\mathrm{Prog}(X)$ *с конечной длиной и рангом сечений.*

Мы приведем неформальное рассуждение, которое можно легко преобразовать в вывод в $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$.

Напомним, что $\mathrm{Prog}(X) \equiv \forall n(\forall m(m < n \to m \in X) \to n \in X)$. Для любого $i < j$ имеем $\forall m(m < j \to m \in X) \to \overline{i} \in X$. Следовательно, по правилу прогрессивности, $\forall m(m < \overline{j} \to m \in X) \to \overline{j} \in X$. Отсюда $\mathrm{Prog}(X)$ получается по ω-правилу.

3.6.2. Лемма. *Пусть* d *— свободный от сечения вывод множества формул* $\overline{\ulcorner\beta_1\urcorner} \in X, \ldots, \overline{\ulcorner\beta_k\urcorner} \in X$ *в* $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$. *Тогда* d *имеет длину* $\geqslant \min(\beta_1, \ldots, \beta_k)$.

Это непосредственно следует из вида правил системы $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$ с помощью индукции по $|d|$. Весь вывод должен состоять из применений правила Prog и несобственных применений ω-правила.

3.6.3. Допустим теперь, что $\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}(X)$ выводима в Z. Напомним, что $\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}(X) \equiv \mathrm{Prog}(X) \to \forall n(n \in X)$. В силу 3.4.2 и 3.6.1 мы имеем тогда $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$-вывод формулы $n \in X$ (с переменной n) с длиной $< \omega \cdot 2$ и конечным рангом сечений. По теореме об устранении сечения для $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$ мы получаем вывод без сечений формулы $n \in X$ в $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$ с длиной $\alpha < \varepsilon_0$. Следовательно, по лемме подстановки мы имели бы также вывод без сечения формулы $\overline{\ulcorner\alpha + 1\urcorner} \in X$ в $\mathbf{Z}_\omega + \mathrm{Prog}$ с длиной α. Это противоречит 3.6.2.

§ 4. Оценки, получаемые из доказательств теорем существования

Мы переходим теперь к вопросу: «Насколько больше мы знаем, если доказали теорему ограниченными средствами, чем в случае, когда нам известно только, что она истинна?» Как и раньше, мы ограничимся арифметикой Z, где можно получить удовлетворительный ответ. Резюме результатов см. в п. 1.4. Используя терминологию п. 3.1, мы можем суммировать результаты также следующим образом. Мы покажем, что функционал F

уровня $\leqslant 2$ (т. е. имеющий числа и функции в качестве аргументов) может быть введен в рекурсивном расширении $\mathbf{Z}$ тогда и только тогда, когда F является $<\varepsilon_0$-рекурсивным, т. е. F можно определить с помощью примитивно рекурсивных схем (в смысле Клини) и α-рекурсий для $\alpha < \varepsilon_0$.

4.1. $<\varepsilon_0$-рекурсивные функционалы. Функционал F уровня $\leqslant 2$ называется *примитивно рекурсивным в смысле Клини* тогда и только тогда, когда его можно определить посредством приводимых ниже схем (i)—(v). Здесь $\boldsymbol{n} = n_0, \ldots, n_{p-1}$ — последовательность числовых переменных и $\boldsymbol{f} = f_0, \ldots, f_{q-1}$ — последовательность переменных для функций.

(i) (тождество) $F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}) = n_i$ (для $i < p$).

(ii) (применение функции к аргументу) $F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}) = f_i(n_{j_0}, \ldots, n_{j_{k-1}})$ для $i < q$ и $j_0, \ldots, j_{k-1} < p$.

(iii) (функция следования) $F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}) = n_i + 1$ (для $i < p$).

(iv) (подстановка) $F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}) = G(H_0(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}), \ldots, H_{k-1}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}), K_0(\cdot, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}), \ldots, K_{l-1}(\cdot, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{f}))$.

(v) (примитивная рекурсия) $F(0, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = G(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{f})$,

$$F(n+1, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = H(F(n, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}), n, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}).$$

В (iv) $K_j(\cdot, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{f})$ означает $\lambda x K_j(x, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{f})$. Заметим, что $F(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{f})$ — всегда натуральное число.

Пусть α — ординал $<\varepsilon_0$, и пусть $\prec$ — естественное вполне упорядочение порядкового типа ε_0 (ср. 3.2). Под α-рекурсией понимаем следующую схему:

(vi) (α-рекурсия). Для $n < \ulcorner\alpha\urcorner$

$$F(n, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = G(n, \boldsymbol{m}, (F \restriction n)(\cdot, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}), \boldsymbol{f}),$$

где

$$(F \restriction n)(i, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = \begin{cases} F(i, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}), & \text{если } i < n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для $\ulcorner\alpha\urcorner \leqslant n$ полагаем $F(n, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = 0$.

Функционал F уровня $\leqslant 2$ называется *$<\varepsilon_0$-рекурсивным* тогда и только тогда, когда F можно определить посредством примитивно рекурсивных операций (i)—(v) и α-рекурсий для $\alpha < \varepsilon_0$. Класс $<\varepsilon_0$-рекурсивных функционалов уровня $\leqslant 2$ обозначается через $\mathrm{Rec}_{<\varepsilon_0}$.

4.2. Теорема (Крайзель [1]). *Если $\forall n \exists m \varphi(n, m)$ выводима в $\mathbf{Z}$, причем $\varphi(n, m)$ — бескванторная формула и не имеет свободных переменных, кроме тех, что указаны явно, то можно найти функцию $F \in \mathrm{Rec}_{>\varepsilon_0}$ такую, что имеет место $\forall n \varphi(n, F(n))$.*

4.2.1. Мы сначала наметим доказательство. Пусть дан вывод формулы $\forall n \exists m \varphi(n, m)$, или, эквивалентным образом, $\exists m \varphi(n, m)$. Следуя 3.4.2, мы можем преобразовать этот $\mathbf{Z}$-вывод в бесконечный $\mathbf{Z}_\infty$-вывод $d(n) \vdash \exists m \varphi(n, m)$ длины $|d(n)| < \omega \cdot 2$ и конечного ранга сечений. Далее, следуя 3.4.3, мы можем преобразовать $d(n)$ в свободный от сечений $\mathbf{Z}_\infty$-вывод $d^*(n) \vdash \exists m \varphi(n, m)$ с длиной $|d^*(n)| < \varepsilon_0$. По лемме о подстановке из 3.4.3 мы получаем для любого i некоторый $\mathbf{Z}_\infty$-вывод $d^*(i) \vdash \exists m \varphi(\overline{i}, m)$ также с длиной $|d^*(i)| \leqslant \overline{d}(n) < \varepsilon_0$. Теперь из вида нормальных правил системы $\mathbf{Z}_\infty$ ясно, что $d^*(i)$ содержит только подформулы (ср. 2.8) формулы $\exists m \varphi(\overline{i}, m)$. Мы можем считать, что $d^*(\overline{i})$ не содержит свободных переменных (иначе подставим 0 вместо всех переменных, свободных в $d^*(\overline{i})$). Следовательно, все применения ω-правила в $d^*(\overline{i})$ должны быть несобственными (ср. 3.4.1), и поэтому их можно с тем же успехом вычеркнуть. Это дает свободный от сечения вывод $d^{**} \vdash \exists m \varphi(\overline{i}, m)$, который не содержит ω-правила. К d^{**} мы применим то же рассуждение, что и в доказательстве теоремы Эрбрана 2.9, и получим замкнутые термы $s_0, \ldots, s_{k-1}$ и вывод множества $\varphi(\overline{i}, s_0), \ldots, \varphi(\overline{i}, s_{k-1})$. Хотя бы одна из этих формул должна быть истинна. Значением функции F, которую мы должны построить, для аргумента i будет (например) наименьшее из числовых значений тех s_j, для которых истинна формула $\varphi(\overline{i}, s_j)$.

Остается еще показать, что F является $<\varepsilon_0$-рекурсивной. Для этого мы воспользуемся «эффективным» вариантом введенной выше конструкции, где мы работаем с кодами $\mathbf{Z}_\infty$-выводов вместо использования самих $\mathbf{Z}_\infty$-выводов.

4.2.2. Коды $\mathbf{Z}_\infty$-выводов. Эти коды будут натуральными числами. Они определяются индуктивно, соответственно индуктивному построению $\mathbf{Z}_\infty$-выводов. Это индуктивное определение тривиально для финитных (конечных) правил A, $\wedge$, $\vee_0$, $\vee_1$, $\forall$, $\exists$, сечение. Однако в случае ω-правила возникает трудность, так как в общем случае мы имеем бесконечно много посылок. Идея состоит в том, чтобы предположить, что коды посылок можно перечислить с помощью примитивно рекурсивной функции и использовать код (или примитивно рекурсивный индекс) такой перечисляющей функции для построения кода вывода в целом. Другое существенное требование состоит в том, чтобы наши коды содержали достаточную информацию о кодируемом выводе. В частности, если число u кодирует вывод d, то мы должны иметь возможность примитивно рекурсивно получить из u следующие данные:

(i) название последнего правила в d, его г. ф., м. ф. и б. ф. (а следовательно, и его заключение);

(ii) границу на длину $|d|$;
(iii) границу на ранг сечений $\rho(d)$;
(iv) границу на (конечное) множество переменных, свободных в d.

Соответствующие примитивно рекурсивные функции мы обозначим через $\mathrm{Rule}(u)$, $p.f.(u)$, $m.f.(u)$, $s.f.(u)$, $\mathrm{End}(u)$, $|u|$, $\mathrm{Rank}(u)$ и $\mathrm{Var}(u)$. Мы не будем выписывать все пункты индуктивного определения предиката $u \in \mathrm{Code}$ (u есть *код* некоторого $\mathbf{Z}_\infty$-вывода), а приведем два примера, соответствующих правилу сечения и ω-правилу.

Сечение. Если $u, v \in \mathrm{Code}$, $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \Gamma, \varphi \urcorner$, $\mathrm{End}(v) = \ulcorner \Gamma, \varphi \urcorner$ и $|u|, |v| < a$, то $\langle \ulcorner \text{Сечение} \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \Gamma \urcorner, a, u, v \rangle \in \mathrm{Code}$.

ω-правило. Если для любого i $[e](i) = u_i \in \mathrm{Code}$, $\mathrm{End}(u_i) = \ulcorner \Gamma, \Delta(\bar{i}) \urcorner$, $|u_i| < a$, $\mathrm{Rank}(u_i) \leqslant k$ и $\mathrm{Var}(u_i) \subseteq {}^{\#}b$, то $\langle \ulcorner \omega \urcorner, \ulcorner \Delta(n) \urcorner, \ulcorner n \urcorner, \ulcorner \Gamma \urcorner, a, k, b, e \rangle \in \mathrm{Code}$.

Здесь $[e]$ обозначает примитивно рекурсивную функцию, кодируемую числом e, $\ulcorner \dots \urcorner$ обозначает, как обычно, естественный код финитного объекта ... ; отношению $\subseteq^{\#}$ соответствует (при подходящем кодировании конечных множеств переменных) отношение $\subseteq$; $\langle x_0, \dots, x_{l-1} \rangle$ — примитивно рекурсивное кодирование конечных последовательностей натуральных чисел с примитивно рекурсивными обращениями $(x)_i$, т. е. $(\langle x_0, \dots, x_{l-1} \rangle)_i = x_i$ для $i < l$. Мы также опустим (тривиальные) примитивно рекурсивные определения функций $\mathrm{Rule}(u)$, ..., упомянутых выше.

4.2.3. Легко видеть, что все $\mathbf{Z}_\infty$-выводы, получаемые при вложении $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}_\infty$ (ср. 3.4.2), могут быть закодированы, и что любой такой код имеет длину $|u| < \omega \cdot 2$.

4.2.4. Мы покажем теперь, что операциям на $\mathbf{Z}_\infty$-выводах, описанным в 3.4.3 (утончение, подстановка и т. д.), соответствуют примитивно рекурсивные функции на кодах. Это будет следовать из очевидного применения теоремы Клини [1] о примитивной рекурсии. Леммы формулируются в том порядке, в котором их можно доказать. Мы наметим доказательство только для одной из них (типичный пример).

Лемма об утончении. *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Weak *такую, что для любого $u \in \mathrm{Code}$ и любого Γ справедливо следующее*:

(i) $\mathrm{Weak}(u, \ulcorner \Gamma \urcorner) = u_0 \in \mathrm{Code}$;
(ii) $\mathrm{End}(u_0) = \ulcorner \Gamma, \Delta \urcorner$, если $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \Delta \urcorner$;
(iii) $|u_0| = |u|$;
(iv) $\mathrm{Rank}(u_0) = \mathrm{Rank}(u)$;
(v) $\mathrm{Var}(u_0) = \mathrm{Var}(u) \cup {}^{\#}V^{\#}$,

где V — множество переменных, свободных в Γ.

Лемма об оценке. *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Eval *такую, что для любого $u \in \mathrm{Code}$, любых $\Gamma(n)$, переменной n и замкнутых термов s, t с одинаковым значением верно следующее*:

(i) $\mathrm{Eval}(u, \ulcorner \Gamma(n) \urcorner, \ulcorner n \urcorner, \ulcorner s \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = u_0 \in \mathrm{Code}$;
(ii) $\mathrm{End}(u_0) = \ulcorner \Gamma(t) \urcorner$, *если* $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \Gamma(s) \urcorner$;
(iii) $|u_0| = |u|$;
(iv) $\mathrm{Rank}(u_0) = \mathrm{Rank}(u)$;
(iv) $\mathrm{Var}(u_0) = \mathrm{Var}(u)$.

Лемма о подстановке. *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Sub *такую, что для любого $u \in \mathrm{Code}$, любой переменной n и терма s верно следующее*:

(i) $\mathrm{Sub}(u, \ulcorner n \urcorner, \ulcorner s \urcorner) = u_0 \in \mathrm{Code}$;
(ii) $\mathrm{End}(u_0) = \ulcorner \Gamma(s) \urcorner$, *если* $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \Gamma(n) \urcorner$;
(iii) $|u_0| \leqslant |u|$;
(iv) $\mathrm{Rank}(u_0) \leqslant \mathrm{Rank}(u)$;
(v) $\mathrm{Var}(u_0) \subseteq {}^{\#}(\mathrm{Var}(u) - {}^{\#}\{n\}^{\#}) \cup {}^{\#}V^{\#}$,

где V — множество переменных, свободных в s.

Для доказательства следует построить (опять с помощью теоремы о примитивной рекурсии) примитивно рекурсивную функцию, соответствующую замене связанных переменных в $\mathbf{Z}_\infty$-выводе.

Лемма об обращении. (1) *Мы имеем примитивно рекурсивные функции* Inv_i $(i = 0, 1)$ *такие, что для любого $u \in \mathrm{Code}$ и конъюнкции $\varphi_0 \overset{\cdot}{\wedge} \varphi_1$ верно следующее*:

(i) $\mathrm{Inv}_i(u, \ulcorner \varphi_0 \wedge \varphi_1 \urcorner) = u_i \in \mathrm{Code}$;
(ii) $\mathrm{End}(u_i) = \ulcorner \Gamma, \varphi_i \urcorner$, *если* $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \Gamma, \varphi_0 \wedge \varphi_1 \urcorner$,

где $\varphi_0 \overset{\cdot}{\wedge} \varphi_1$ не принадлежит Γ;
(iii) $|u_i| \leqslant |u|$;
(iv) $\mathrm{Rank}(u_i) \leqslant \mathrm{Rank}(u)$;
(v) $\mathrm{Var}(u_i) \subseteq {}^{\#}\mathrm{Var}(u)$.

(2) *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Inv *такую, что для любого $u \in \mathrm{Code}$ и формулы $\forall n \psi(n)$ верно следующее*:

(i) $\mathrm{Inv}(u, \ulcorner \forall n \varphi(n) \urcorner) = u_0 \in \mathrm{Code}$;
(ii) $\mathrm{End}(u_0) = \ulcorner \Gamma, \psi(n) \urcorner$, *если* $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \Gamma, \forall n \psi(n) \urcorner$,

причем $\forall n \psi(n)$ не принадлежит Γ;
(iii) $|u_0| \leqslant |u|$;
(iv) $\mathrm{Rank}(u_0) \leqslant \mathrm{Rank}(u)$;
(v) $\mathrm{Var}(u_0) \subseteq {}^{\#}\mathrm{Var}(u) \cup {}^{\#}\{n\}^{\#}$.

Лемма о редукции. *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Red *такую, что для любых* $u_0, u_1 \in \mathrm{Code}$ *и формулы* φ *такой, что* $\mathrm{Rank}(u_i) \leqslant |\varphi|$ $(i = 0, 1)$, *имеет место следующее*:

(i) $\mathrm{Red}(u_0, u_1, \ulcorner\varphi\urcorner) = u \in \mathrm{Code}$;

(ii) $\mathrm{End}(u) = \ulcorner\Gamma, \Delta\urcorner$, *если* $\mathrm{End}(u_0) = \ulcorner\Gamma, \varphi\urcorner$,

где φ *не принадлежит* Γ, *и* $\mathrm{End}(u_1) = \ulcorner\Delta, \neg\varphi\urcorner$, *причем* $\neg\varphi$ *не принадлежит* Δ;

(iii) $\mathrm{Rank}(u) \leqslant |\varphi|$;

(iv) $|u| \leqslant \xi_0 \# \xi_1$, *если* $|u_i| = \xi_i$;

(v) $\mathrm{Var}(u) \subseteq {}^{\#}\mathrm{Var}(u_0) \cup {}^{\#}\mathrm{Var}(u_1)$.

Теорема об устранении сечения. *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Elim *такую, что для любого* $u \in \mathrm{Code}$ *такого, что* $\mathrm{Rank}(u) = k + 1$, *верно следующее*:

(i) $\mathrm{Elim}(u) = u' \in \mathrm{Code}$;

(ii) $\mathrm{End}(u') = \mathrm{End}(u)$;

(iii) $|u'| \leqslant \ulcorner 2^{\xi}\urcorner$, где $\ulcorner\xi\urcorner = |u|$;

(iv) $\mathrm{Rank}(u') \leqslant k$;

(v) $\mathrm{Var}(u') \subseteq {}^{\#}\mathrm{Var}(u)$.

Доказательство. По теореме о примитивной рекурсии мы можем следующим образом определить примитивно рекурсивную функцию Elim с кодом e.

Случай 1. $\mathrm{Rule}(u) = \ulcorner$сечение$\urcorner$. Пусть м. ф. $(u) = \{\varphi, \neg\varphi\}^{\#}$.

Подслучай 1.1. $|\varphi| + 1 < \mathrm{Rank}(u)$. Положим $\mathrm{Elim}(u) = \langle (u)_0, (u)_1, (u)_2, \ulcorner 2^{\xi}\urcorner, \mathrm{Elim}((u)_4), \mathrm{Elim}((u)_5)\rangle$, где $\ulcorner\xi\urcorner = (u)_3$.

Подслучай 1.2. $|\varphi| + 1 = \mathrm{Rank}(u)$. Положим $\mathrm{Elim}(u) = \mathrm{Red}(\mathrm{Elim}((u)_4), \mathrm{Elim}((u)_5), \ulcorner\varphi\urcorner)$.

Случай 2. $\mathrm{Rule}(u) = \ulcorner\omega\urcorner$. Положим $\mathrm{Elim}(u) = \langle (u)_0, \ldots, (u)_3, \ulcorner 2^{\xi}\urcorner, k, (u)_6, e'\rangle$, где $\ulcorner\xi\urcorner = (u)_4$ и $e' = e'(e, u)$ — код последовательности $\mathrm{Elim}([(u)_7](n))$ как примитивно рекурсивной функции от n; e' примитивно рекурсивна как функция от e и u. Другие случаи рассматриваются аналогично. С помощью $\prec$-индукции по $|u|$ можно легко доказать, что $\mathrm{Elim}(u)$ обладает требуемыми свойствами. □

4.2.Б. Теперь мы докажем теорему 4.2, следуя наброску в 4.2.1. Итак, пусть дан **Z**-вывод формулы $\exists m \varphi(n, m)$ и пусть u — код соответствующего $\mathbf{Z}_\infty$-вывода (ср. 4.2.3). Следовательно, $|u| = \ulcorner\xi\urcorner \prec \ulcorner\omega \cdot 2\urcorner$. С помощью конечного числа применений теоремы об устранении сечения из 4.2.4 мы получаем код u^* свободного от сечения $\mathbf{Z}_\infty$-вывода формулы $\exists m \varphi(n, m)$, причем

$u^* \leqslant \ulcorner 2^{\xi}\urcorner_{\mathrm{Rank}(u)}$. Тогда $\mathrm{Sub}(u^*, \ulcorner n\urcorner, \ulcorner\overline{i}\urcorner)$ — код некоторого $\mathbf{Z}_\infty$-вывода формулы $\exists m \varphi(\overline{i}, m)$. Мы можем считать, что $\mathrm{Var}(\mathrm{Sub}(u^*, \ulcorner n\urcorner, \ulcorner\overline{i}\urcorner)) = \varnothing^{\#}$ (в противном случае применяем $\mathrm{Sub}(\cdot, m, 0)$ к каждой переменной $m \in {}^{\#}\mathrm{Var}(\mathrm{Sub}(u^*, \ulcorner n\urcorner, \ulcorner\overline{i}\urcorner))$. Следовательно, $\mathbf{Z}_\infty$-вывод, кодируемый числом $\mathrm{Sub}(u^*, \ulcorner n\urcorner, \ulcorner\overline{i}\urcorner)$, содержит только несобственные применения ω-правила, которые можно вычеркнуть. Однако функция F_0, соответствующая этому вычеркиванию, не примитивно рекурсивна, а лишь $<\varepsilon_0$-рекурсивна: в случае $\mathrm{Rule}(v) = \ulcorner\omega\urcorner$ мы должны положить $F_0(v) = F_0([(v)_6](0))$, а нам известно лишь, что $|[(v)_6](0)| < |v|$. Теперь из кода $F_0(\mathrm{Sub}(u^*, \ulcorner n\urcorner, \ulcorner\overline{i}\urcorner))$ мы легко можем примитивно рекурсивно получить все (замкнутые) термы $s_0, \ldots, s_{k-1}$, используемые в применениях правила $\exists$ в соответствующем выводе. Мы знаем, что по крайней мере одна из формул $\varphi(\overline{i}, s_j)$ должна быть истинна, так как мы получаем вывод множества $\varphi(\overline{i}, s_0), \ldots, \varphi(\overline{i}, s_{k-1})$ с помощью того же рассуждения, что и в доказательстве теоремы Эрбрана 2.9. Это завершает доказательство теоремы 4.2.

4.3. Мы обратимся теперь к обобщению теоремы 4.2 на произвольные **Z**-формулы. Для того чтобы сформулировать результат, нам нужно понятие *эрбрановской нормальной формы* φ_H формулы φ, которое мы и введем.

Общее определение φ_H в достаточной мере разъясняется следующим примером. Пусть $\varphi \equiv \exists n \forall m \exists k \forall p \psi(n, m, k, p)$. Тогда $\varphi_H \equiv \exists n \exists k \psi(n, f(n), k, g(n, k))$ с функциональными переменными f, g. Легко показать, что $\varphi \to \varphi_H$ выводима (чисто логическими средствами, а значит, и) в **Z**, а также что если φ_H выводима в **Z**, то и φ выводима (ср. Шенфилд [1]).

В общем случае для произвольной предваренной формулы φ эрбрановская нормальная форма φ_H получается из φ путем (i) вычеркивания всех кванторов всеобщности в префиксе φ и (ii) замены каждой переменной m, связанной в φ квантором всеобщности, на $f(\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ — список всех переменных, предшествующих m в префиксе формулы φ и связанных кванторами существования, а f — новая функциональная переменная. Следовательно, φ_H имеет вид $\exists m \varphi^H$, где φ^H — бескванторная формула, и в общем случае содержит новые функциональные переменные. И снова $\varphi \to \varphi_H$ выводима (логическими средствами, а значит, и) в **Z**, и если φ_H выводима в **Z**, то и φ выводима.

4.4. Теорема (Крайзель [1]). *Пусть* φ *— формула, выводимая в* **Z** *и не содержащая переменных для множеств. Пусть* $\varphi_H \equiv \exists m \varphi^H(f, \boldsymbol{n}, m)$ *— ее эрбрановская нормальная форма. Тогда мы можем найти* $<\varepsilon_0$*-рекурсивные функционалы* $\boldsymbol{G}$ *такие, что для любых функций* $\boldsymbol{F}$ *и чисел* i *верно* $\varphi^H(\boldsymbol{F}, i, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}, i))$.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $\varphi_H \equiv \exists m \varphi^H(f, n, m)$, где φ^H — бескванторная формула и не содержит свободных переменных, отличных от указанных явно. Так как φ, по предположению, выводима в **Z**, мы знаем, что и φ_H выводима в **Z**. Мы должны построить функцию $G \in \mathrm{Rec}_{<\varepsilon}$ такую, что для любой функции F и числа i верно $\varphi^H(F, i, G(F, i))$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 4.2; нам нужно только релятивизировать его по данной функции F.

Мы введем сначала релятивизацию $\mathbf{Z}_\omega(F)$ системы $\mathbf{Z}_\omega$. Язык системы $\mathbf{Z}_\omega(F)$ — это язык **Z** без переменных для множеств, содержащий ровно одну выделенную функциональную переменную f. Конечное множество Δ формул называется $\mathbf{Z}_\omega(F)$-аксиомой, если Δ состоит из атомарных формул и их отрицаний, не содержит числовых переменных, причем $\bigvee\Delta$ является тавтологическим следствием частных случаев бескванторных аксиом системы **Z** и дополнительных аксиом $f(\bar{j}) = \bar{k}$ для всех j, k таких, что $F(j) = k$. Правила системы $\mathbf{Z}_\omega(F)$ те же, что и правила системы $\mathbf{Z}_\omega$.

Рассмотрение устранения сечения для $\mathbf{Z}_\omega$ в 3.4 переносится на $\mathbf{Z}_\omega(F)$ почти без изменений. Для леммы об оценке нужно лишь заметить, что любой терм $s(f)$ без числовых переменных имеет числовое значение i при оценке $f \mapsto F$ и $s(f) = \bar{i}$ есть $\mathbf{Z}_\omega(F)$-аксиома. Теперь доказательство теоремы 4.2 можно приспособить к нашему случаю почти буквально, сделав лишь два изменения.

(1) В определении кодов для $\mathbf{Z}_\omega(F)$-выводов мы заменяем $[e](i)$ на $[e](F, i)$; теперь $[e]$ обозначает e-й примитивно рекурсивный функционал (в смысле Клини).

2) Функции Weak, Eval, Sub, Inv_i, Inv, Red, Elim, F_0 следует заменить функционалами с дополнительным аргументом F. Это завершает доказательство теоремы 4.4. □

4.5. Мы сформулируем теперь обращение теоремы 4.4 (а следовательно, и теоремы 4.2) и наметим его доказательство.

Теорема. *Пусть F — $<\varepsilon_0$-рекурсивный функционал. Тогда F можно ввести в некотором рекурсивном расширении* **Z**.

4.5.1. Для доказательства нам нужно одно вспомогательное понятие: модуль непрерывности функционала F. Мы сейчас введем это понятие.

Во-первых, заметим, что $<\varepsilon_0$-рекурсивный функционал $F(n, f)$ является непрерывным в том смысле, что он зависит только от конечной части значений своих аргументов, являющихся функциями (функциональных аргументов). Эквивалентным образом F непрерывен в дискретной топологии на $\mathbb{N}$ и соответствующей топологии произведения на пространствах-произ-

ведениях. Это легко установить индукцией по построению $<\varepsilon_0$-рекурсивных функционалов. Функционал M_F называется модулем непрерывности для F тогда и только тогда, когда для любых n, f значение $M_F(n, f)$ кодирует некоторое конечное множество S натуральных чисел такое, что для любых двух наборов функций f и f', совпадающих на $\bigcup_k S^k$, имеем $F(n, f) = F(n, f')$.

4.5.2. Мы докажем следующее обобщение теоремы 4.5.

Теорема. *Пусть F — $<\varepsilon_0$-рекурсивный функционал. Тогда мы можем построить $<\varepsilon_0$-рекурсивный модуль непрерывности M_F для F, причем как F, так и M можно ввести в некотором рекурсивном расширении системы* **Z**.

Замечание. Тот факт, что $<\varepsilon_0$-рекурсивный функционал F имеет $<\varepsilon_0$-рекурсивный модуль непрерывности, был впервые доказан Крайзелем в лекциях (1971/72 г.); другие доказательства имеются у Трулстры [1] и Швихтенберга [1].

Доказательство проводится индукцией по построению $<\varepsilon_0$-рекурсивных функционалов. Мы рассматриваем только случай α-рекурсии, так как остальные случаи либо проще, либо вообще тривиальны. Итак, пусть

$$F(n, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = G(n, \boldsymbol{m}, (F \restriction n)(\cdot, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}), \boldsymbol{f}).$$

По индукционному предположению мы можем считать, что уже введены (в некотором рекурсивном расширении **Z**) функционал G и модуль непрерывности M_G для G.

Мы покажем сначала, как можно ввести F. Основной прием состоит в том, чтобы ввести сначала не сам F, а другой функционал, который ставит в соответствие аргументу n, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{f}$ некоторое вычисление u функционала F для этого аргумента. Здесь u называется вычислением функционала F для аргумента n, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{f}$, если имеет место следующее:

(i) u — финитная функция с областью определения $\{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, где $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} = n$;

(ii) $u(a_i) = G(a_i, \boldsymbol{m}, (u \restriction a_i), f)$ для $i < k$, где $u \restriction a_i$ определяется соотношением

$$(u \restriction a_i)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x = a_j \text{ для некоторого } j < i, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

(iii) $M_G(a_i, \boldsymbol{m}, (u \restriction a_i), \boldsymbol{f}) \cap \{x \mid x < a_i\} \subseteq \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$ для $i < k$.

Заметим, что все условия (i)—(iii) бескванторные и не содержат F. Теперь в **Z** можно доказать утверждение $\forall n \forall \boldsymbol{m} \forall \boldsymbol{f} \exists u$ (u есть вычисление F для аргумента n, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{f}$) с помощью α-индукции по n. Чтобы усмотреть это, заметим, что добавление к **Z** арифметической аксиомы выбора и логики второго порядка (но

не схемы индукции для логики второго порядка) дает консервативное расширение **Z**. Это можно доказать либо непосредственно, используя метод, намеченный в 5.5.1 главы 4, либо вывести из гораздо более сильного результата в 8.7 главы 4. Следовательно, можно ввести соответствующий функционал, дающий u как функционал от n, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{f}$, а исходя из него, легко определить F явно. Далее, из условий (i)—(iii) и того факта, что M_G есть модуль непрерывности для G, можно вывести (в **Z**) определяющие равенства для F.

Теперь M_F можно определить через F с помощью следующей α-рекурсии:

$$M_F(n, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}) = S^{\#} \cup^{\#} \bigcup_{\substack{a < n \\ a \in S}} M_F(a, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}),$$

где

$$S^{\#} = M_G(n, \boldsymbol{m}, (F \restriction n)(\cdot, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{f}), \boldsymbol{f}).$$

Следовательно, в силу только что приведенного рассуждения, M_F тоже можно ввести. С помощью α-индукции по n можно показать в **Z**, что M_F есть модуль непрерывности для F, если использовать определяющие равенства для F и тот факт, что M_G есть модуль непрерывности для G.

§ 5. Трансфинитная индукция и принцип рефлексии

5.1. Теперь мы рассмотрим **Z** без переменных для множеств и функций. Равномерный принцип рефлексии для **Z** — это схема

RP $$\mathrm{Der}(x, \ulcorner \varphi(\dot{n}) \urcorner) \to \varphi(n),$$

где $\mathrm{Der}(x, y)$ — примитивно рекурсивный предикат, который верен тогда и только тогда, когда x кодирует некоторый **Z**-вывод $d \vdash \varphi$ и $y = \ulcorner \varphi \urcorner$, а $\ulcorner \varphi(\dot{n}) \urcorner$ — примитивно рекурсивная функция от n, значением которой является код формулы, получаемой из $\varphi(n)$ подстановкой цифр $\overline{n}$ вместо переменных n, т. е. $\ulcorner \varphi(\dot{n}) \urcorner = \mathrm{Subst}(\ulcorner \varphi(n) \urcorner, \ulcorner n \urcorner, \mathrm{Num}(n))$ для очевидных примитивно рекурсивных функций Subst и Num. Далее мы будем считать, что x не входит свободно в $\varphi(n)$. Отметим, что из RP тривиально следует непротиворечивость **Z**, т. е. формула $\forall x \neg \mathrm{Der}(x, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Схема трансфинитной индукции до ε_0 в **Z** — это

$\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$ $$\forall n(\forall m(m < n \to \varphi(m)) \to \varphi(n)) \to \forall n \varphi(n).$$

5.2. Теорема (Крайзель и Леви [1]). **Z** *вместе со схемой* RP *эквивалентна* **Z** *вместе со схемой* $\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$.

Доказательство. Мы начнем с более легкой части и покажем, что $\mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$ выводима в **Z** + RP. Итак, пусть дана $\varphi(n)$. Обозначим через $\psi(k)$ формулу

$$\forall n(\forall m(m < n \to \varphi(m)) \to \varphi(n)) \to \forall n(n < F(k) \to \varphi(n)),$$

где $F(k) = \ulcorner \omega_k \urcorner$, $\omega_0 = 1$, $\omega_{i+1} = \omega^{\omega_i}$. Так как $\mathbf{Z} \vdash \forall m \exists k m < F(k)$, то достаточно вывести $\psi(k)$ в **Z** + RP. Теперь из доказательства трансфинитной индукции до ω_k в **Z**, данного Генценом [1] (или Добавление VI в книге Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957), можно извлечь примитивно рекурсивную функцию G такую, что $\mathbf{Z} \vdash \forall k \mathrm{Der}(G(k), \ulcorner \psi(\dot{k}) \urcorner)$. Отсюда и из RP мы получаем $\psi(k)$, что и требовалось.

Доказательство обратного утверждения займет оставшуюся часть этого пункта. Мы должны показать, что RP выводим в $\mathbf{Z} + \mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$. Поэтому допустим $\mathrm{Der}(x, \varphi(\dot{n}))$. Следующая лемма выводима в **Z** (ср. 4.2.3 и 5.2.2).

Лемма о вложении. *Мы имеем примитивно рекурсивную функцию* Emb *такую, что для любых* x, y, *удовлетворяющих* $\mathrm{Der}(x, y)$, *имеет место*:

(i) $\mathrm{Emb}(x) = u_x \in \mathrm{Code}$;
(ii) $\mathrm{End}(u_x) = y$;
(iii) $|u_x| < \ulcorner \omega \cdot 2 \urcorner$.

Кроме того, теорема об устранении сечения из 4.2.4 выводима в $\mathbf{Z} + \mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$ (ср. 5.2.2). Следовательно, мы можем доказать в $\mathbf{Z} + \mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$, что имеется $u_x^* \in \mathrm{Code}$ (зависящее примитивно рекурсивно от x) такое, что $\mathrm{End}(u_x^*) = \ulcorner \varphi(\dot{n}) \urcorner$ и $\mathrm{Rank}(u_x^*) = 0$.

В 5.2.1 мы дадим внутри **Z** частичное определение истинности Tr_q, обладающее следующим характеристическим свойством: для любой формулы $\psi(n)$ с глубиной гнездности*) кванторов $\mathrm{QD}(\psi(n)) \leqslant q$ мы можем доказать в **Z**

$$\mathrm{Tr}_q(\ulcorner \psi(\dot{n}) \urcorner) \leftrightarrow \psi(n).$$

Далее, следующая лемма очевидным образом верна (использовать $<$-индукцию по $|u|$) и выводима в $\mathbf{Z} + \mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$ (ср. 5.2.2).

Лемма об истине. *Для любого* $u \in \mathrm{Code}$ *такого, что* $\mathrm{Rank}(u) = 0$ *и* $\mathrm{End}(u) = \ulcorner \psi \urcorner$, *где* $\mathrm{QD}(\psi) \leqslant q$, *мы имеем* $\mathrm{Tr}_q(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Конкретизируя это для $u = u_x^*$, получаем $\mathrm{Tr}_q(\ulcorner \varphi(\dot{n}) \urcorner)$ в $\mathbf{Z} + \mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$ и, следовательно, $\vdash \varphi(n)$.

5.2.1. Мы определим для любого $q \geqslant 0$ множество Tr_q, которое должно давать частичное определение истинности для всех **Z**-формул φ с глубиной гнездности кванторов $\mathrm{QD}(\varphi) \leqslant q$.

*) Глубина гнездности — это максимальное число вложенных подформул, начинающихся с кванторов. — *Прим. перев.*

Отметим сначала, что мы легко можем ввести (в рекурсивном расширении **Z**) функцию Val такую, что для любого терма $s(n)$ в **Z** выводимо $\mathrm{Val}(\ulcorner s(\dot{n})\urcorner) = s(n)$.

Определение. Tr_q определяется следующим образом:

(i) $\mathrm{Tr}_q(\ulcorner P s_0(\dot{n}) \ \dots \ s_{p-1}(\dot{n})\urcorner) \leftrightarrow P(\mathrm{Val}(\ulcorner s_0(\dot{n})\urcorner), \ \dots$ $\dots, \mathrm{Val}(\ulcorner s_{p-1}(\dot{n})\urcorner))$, если P — предикатный символ или переменная для множеств.

(ii) $\mathrm{Tr}_q(\ulcorner \varphi_0 \wedge \varphi_1\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Tr}_q(\ulcorner \varphi_0\urcorner) \wedge \mathrm{Tr}_q(\ulcorner \varphi_1\urcorner)$, если $\mathrm{QD}(\varphi_i) \leqslant q$. Аналогично для $\vee$.

(iii) $\mathrm{Tr}_q(\ulcorner \forall n \varphi(n)\urcorner) \leftrightarrow \forall n \, \mathrm{Tr}_{q-1}(\ulcorner \varphi(\dot{n})\urcorner)$, если $q \geqslant 1$ и $\mathrm{QD}(\varphi(n)) \leqslant q - 1$. Аналогично для $\exists$.

Лемма. $\mathrm{Tr}_q(\ulcorner \varphi(\dot{n})\urcorner) \leftrightarrow \varphi(n)$ *выводимо в* **Z**, *если* $\mathrm{QD}(\varphi(n)) \leqslant q$.

Доказательство, использующее индукцию по $|\varphi(n)|$, очевидно.

5.2.2. Мы покажем теперь, что лемма о вложении и лемма об истине, сформулированные в 5.2, а также леммы в 4.2.4 до теоремы об устранении сечения включительно выводимы в $\mathbf{Z} + \mathrm{TI}_{\varepsilon_0}$. Единственное обстоятельство, нуждающееся в проверке, — это возможность сформулировать все эти леммы в языке **Z**. После этого формализация доказательств — рутинная задача. Единственное возможное препятствие на пути к такой формулировке — наличие индуктивно определяемого понятия кода $\mathbf{Z}_\infty$-вывода (ср. 4.2.2) во всех этих элементах. Мы покажем сейчас, как это понятие можно представить в чисто универсальной форме (т. е. в виде $\forall x \varphi(x)$ с примитивно рекурсивной $\varphi(x)$).

Бесконечные $\mathbf{Z}_\infty$-выводы можно рассматривать как фундированные деревья, в каждом узле которых либо вообще нет ветвления (например, в самом нижнем узле) и приписано правило A, либо имеется 1-кратное ветвление (соответствующее правилам $\vee_i$, $\forall$, $\exists$), либо 2-кратное ветвление (соответствующее правилам $\wedge$, сечение), либо ω-кратное ветвление (соответствующее ω-правилу). Тогда можно считать, что любой код u $\mathbf{Z}_\infty$-вывода d получается индуктивно путем приписывания кода соответствующего подвывода каждому узлу дерева, соответствующего d. Следовательно, свойство $u \in \mathrm{Code}$ эквивалентно наличию у u такого фундированного генеалогического дерева. Но последний факт легко записать в чисто универсальной форме. Нужно выразить, что в любом узле (номере конечной последовательности) n это дерево локально корректно, т. е. что код u_n, приписанный этому узлу (u_n можно легко определить индукцией по n), и все его предшественники $u_{n*\langle i\rangle}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют отношению, приведенному в определении кодов $\mathbf{Z}_\infty$-выводов. Фундированность тогда получается автоматически, так как потребовано, в частности, $|u_{n*\langle i\rangle}| < |u|$, а отношение $\prec$ есть вполне упорядочение.

ЛИТЕРАТУРА

Бахман (Bachmann H.)
1. Transfinite Zahlen. — Berlin: Springer, 1955.

Генцен (Gentzen G.)
1. Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfallen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. — Math. Ann., 1943, **119**, S. 140—161.

Гёдель (Gödel K.)
1. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkts. — Dialectica, 1958, **12**, p. 280—287. [Русский перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 299—310.]

Гильберт, Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)
1. Grundlagen der Mathematik, I. — Berlin: Springer, 1934. [Русский перевод: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1983.]

Клини (Kleene S. C.)
1. Extension of an effectively generated class of functions by enumeration. — Colloq. Math., 1958, **7**, p. 67—78.
2. Recursive functionals and quantifiers of finite type I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, p. 1—52.

Крайзель (Kreisel G.)
1. On the interpretation of non-finitist proofs II. — J. Symbolic Logic, 1952, **17**, p. 43—58.
2. Mathematical significance of consistency proofs. — J. Symbolic Logic, 1958, **23**, p. 155—182.
3. A survey of proof theory. — J. Symbolic Logic, 1968, **33**, p. 321—388.
4. Wie die Beweistheorie zu ihren Ordinalzahlen kam und kommt. — Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1977, **78**, № 4, S. 177—223.

Крайзель и Леви (Kreisel G., Levy A.)
1. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1968, **14**, p. 97—142.

Такеути (Takeuti G.)
1. Proof theory. — Amsterdam: North-Holland, 1975. [Русский перевод: Такеути Г. Теория доказательств. — М.: Мир, 1978.]

Тейт (Tait W. W.)
1. Normal derivability in classical logic. — In: The syntax and semantics of infinitary languages/Ed. J. Barwise. Berlin: Springer, 1968, p. 204—236.

Трулстра (Troelstra A. S., ed.)
1. Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. — Berlin: Springer, 1973.

Швихтенберг (Schwichtenberg H.)
1. Einige Anwendungen von unendlichen Termen und Wertfunktionalen: Habilitationsschrift. — Münster, 1973.
2. Elimination of higher type levels in definitions of primitive recursive functionals by means of transfinite recursion. — In: Logic Colloqium 73/Ed. H. E. Rose and J. C. Shepherdson. Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 279—303.

Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. Mathematical Logic. — N. Y.: Addison-Wesley, 1967. [Русский перевод: Шенфилд Дж. Математическая логика. — М.: Мир, 1975.]

Шютте (Schutte K.)
1. Beweistheorie. — Berlin: Springer, 1960,

Глава 3

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА И ГЕНЦЕНОВСКОЕ ПОНЯТИЕ ПРЯМОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Ричард Стетмен

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

1.1. Чтобы объяснить результаты и методы, характерные для теории доказательств, мы рассмотрим здесь заново один частный случай приводимого ниже следствия теоремы о полноте.

Теорема. *Если* $G(x_1, \ldots, x_n)$ *— бескванторная формула логики предикатов и формула* $\exists x_1 \ldots x_n G(x_1, \ldots, x_n)$ *общезначима, то имеются термы* t_j^i *для* $1 \leqslant i \leqslant m$ *и* $1 \leqslant j \leqslant n$ *такие, что общезначима* $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant m} G(t_1^i, \ldots, t_n^i)$.

Этот результат известен в литературе как теорема Эрбрана для экзистенциальных формул; см., например, теорему 2.9 главы 2.

1.2. Имеется рекурсивный метод перехода от любого вывода формулы $\exists x_1 \ldots x_n G(x_1, \ldots, x_n)$ в исчислении предикатов к списку термов и выводу формулы $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant m} G(t_1^i, \ldots, t_n^i)$. Существование этого метода, а также частично рекурсивного метода, не зависящего от вывода, следует из корректности и полноты правил. Несуществование рекурсивного метода, зависящего только от формулы, следует из рекурсивной неразрешимости проблемы общезначимости.

1.3. Структурная теория доказательств использует эти соображения как общеориентирующие, а для получения более удовлетворительных результатов вводит различия следующих типов.

(i) Рассматриваются не произвольные бескванторные G, а лишь некоторые подклассы. Например, в языке полугрупп мы выбираем те формулы, которые естественным образом выражают условие равенства двух слов (термов) в определенной конечно порожденной конечно представленной полугруппе с сокращением. Более общо, если $A_1, \ldots, A_p$ — фиксированные простые (атомарные) формулы, а $I_1, \ldots, I_q$ — фиксированные импликативные формулы такие, что $I_j = P_1^j \to (\ldots (P_{r(j)}^j \to C^j) \ldots)$ для простых P_i^j и C^j, то мы рассматриваем совокупность L формул G вида $\left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} A_i \wedge \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant q} I_j \wedge \bigwedge_{1 \leqslant k \leqslant m} B_k\right) \to B_{m+1}$, где B_i — простые формулы, не содержащие $x_1, \ldots, x_n$.

(ii) Рассматриваются не произвольные корректные и полные правила, а только правила, приспособленные к математическому содержанию совокупности L. В только что приведенном примере, если $R_1, \ldots, R_m$ — определяющие соотношения, то равенство $w_1 = w_2$, если оно верно, выводимо из $R_1, \ldots, R_m$, аксиом ассоциативности $((ab)c) = (a(bc))$ и аксиомы тождества $a = a$ с помощью правила подстановки равных термов вместо друг друга вместе с законами сокращения

$$\frac{(ab) = (ac)}{b = c} \quad \text{и} \quad \frac{(ba) = (ca)}{b = c}.$$

Более общо, если $\exists x_1 \ldots x_n G(x_1, \ldots, x_n)$ общезначима для формулы G из L, то B_{m+1} выводима по правилам

$$\frac{\theta P_1^j \ldots \theta P_{r(j)}^j}{\theta C^j}$$

из $B_1, \ldots, B_m$ вместе с аксиомами θA_i для каждой подстановки θ вместо $x_1, \ldots, x_n$. Это — простое следствие теоремы Генцена об устранимости сечения.

(iii) Рассматривается не только сложность термов t_j^i, но и соотношение между длинами выводов и выбором соответствующих t_j^i.

В частности, ставятся следующие вопросы.

(a) Какие подстановки θ нужны, чтобы вывести B_{m+1} из $B_1, \ldots, B_m$?

(b) Как длина вывода формулы B_{m+1} из $B_1, \ldots, B_m$ связана со сложностью соответствующих θ?

(c) Каков наиболее эффективный порядок применений правил?

Следует отметить, что (a), (b) и (c) ни в коем случае не являются тривиальными, даже если общезначимость формул из L рекурсивно разрешима. Для изучения эффективности разрешающих процедур используются методы теории доказательств.

1.4. Главная цель структурной теории доказательств — сделать объектом изучения различия между доказательствами, о которых раньше судили согласно «эстетическим критериям

элегантности или удобства». Одно из таких различий, привлекшее большое внимание, связано с «прямотой». Для наших целей доказательство прямое, если оно не содержит более сложных термов, чем те, которые встречаются в доказываемой теореме. Если прямые правила формализуемы в приведенной выше системе правил для L, то уже этот факт дает ответ на вопрос (a). В частности, такие прямые доказательства могут быть результатами работы некоторой полной процедуры поиска вывода, похожей по типу на так называемые семантические таблицы.

В 1961 г. Крайзель и Тейт [1] сформулировали исчисление равенств для формализации понятия вычисления, исходящего из равенств, которые определяют значения теоретико-числовых функций. Это исчисление K связано указанным выше образом с некоторым множеством J аксиом (изящную формулировку см. в книге Крайзеля и Кривина [1], упражнение 8, с. 48). Используя эту связь, Крайзель и Тейт показали, что K полно в том смысле, что если общезначима импликация $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) \rightarrow E_{m+1}$, где E_i — равенства, то E_{m+1} выводимо из $E_1, \ldots, E_m$. Мы попытаемся ответить на вопросы (a), (b) и (c) для K. Одна из вещей, которые докажем, — формализуемость в K прямых «вычислений».

1.5. Крайзель и Тейт в действительности дали два доказательства полноты, и оба эти доказательства поучительны. Первое, теоретико-модельное, доказательство упомянуто выше. Рассмотрим двусортный язык первого порядка, соответствующий алгебраическим системам $\langle \mathbb{N}, F, =, 0, s\rangle$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а F — совокупность теоретико-числовых функций, содержащая функцию, тождественно равную 0, функцию следования s и замкнутая относительно явных определений (λ-абстракции). Пусть J — следующая совокупность аксиом:

(1) $x = x$,
(2) $(fx = gx \wedge x = y) \rightarrow fy = gy$,
(3) $(fx = gx \wedge y = x) \rightarrow fy = gy$,
(4) $sx = sy \rightarrow x = y$,
(5) $0 = sx \rightarrow y = z$,
(6_n) $x = s^n x \rightarrow y = z$,

где $s^1 = s$ и $s^{k+1} = ss^k$. Члены совокупности J, очевидно, общезначимы на совокупности алгебраических систем $\langle \mathbb{N}, F, =, 0, s\rangle$. Кроме того, если мы рассматриваем общие модели (т. е. модели в обычном смысле) совокупности J, и $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) \rightarrow E_{m+1}$ не общезначима, то она имеет контрмодель вида $\langle \mathbb{N}, F, =, 0, s\rangle$. В частности, входящие в E_i переменные для функций можно интерпретировать как финитные функции (равные 0 всюду вне некоторого конечного множества); таким образом, мы имеем для K разрешимость и полноту.

1.6. Второе доказательство проходит путем формализации в K особенно элементарной разрешающей процедуры для общезначимости импликаций $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) \rightarrow E_{m+1}$. Эта формализация приводит к полной процедуре поиска вывода, а анализ доказательства дает ответ на вопросы (a) и (c), а именно:

a) Если $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) \rightarrow E_{m+1}$ общезначима и $E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ выполнима, то имеется прямое вычисление равенства E_{m+1} из системы $E_1, \ldots, E_m$, имеющее длину $\leqslant 2^{kp}$, где p — количество вхождений нелогических символов в $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) \rightarrow E_{m+1}$ (если $E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ невыполнима, то верен аналогичный результат, но не обязательно для E_{m+1}).

(c) Общезначимость импликации $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_m \rightarrow E_{m+1})$ можно распознать на детерминированной машине Тьюринга за полиномиальное время (полиномиальное число шагов от длины кода этой формулы).

Здесь следует отметить, что граница 2^{kp} относится к вычислениям, представленным как деревья, в узлах которых расположены равенства; если отождествлять разные вхождения одного и того же равенства, то вычисления можно закодировать как последовательности равенств, что дает границу kp^2.

Мы изложим второе доказательство Крайзеля и Тейта.

1.7. Чтобы дать ответ на вопрос (b), мы проанализируем вычисления в K по аналогии с генценовским рассуждением об устранении сечения. В частности, мы покажем, что если отдельные применения правил в данном выводе «вполне проанализированы», то эти применения можно переставить так, чтобы получить прямое вычисление. Точнее, мы докажем следующее:

(b) Если в вычислении T равенства E_{m+1} (исходя) из системы $E_1, \ldots, E_m$:

(i) правила, соответствующие аксиомам (5) и (6_n), не используются вообще;

(ii) каждое применение правила подстановки равных вместо равных (соответствующего аксиомам (2) и (3)) заменяет не более одного вхождения,

то имеется прямой вывод длины $\leqslant kp^2$ равенства E_{m+1} из $E_1, \ldots, E_m$. Здесь p — длина *) T.

§ 2. Предварительные соображения

2.1. Мы рассматриваем равенства E между индивидными термами $a, b, c, \ldots$, возможно, содержащими функциональные переменные, и конечные системы S таких равенств.

2.2. Символика. Мы записываем в виде $[\ldots]$ $(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ операцию одновременной подстановки термов a_i вместо x_i в $[\ldots]$. Подстановки θ могут подставлять функцио-

*) То есть число вхождений символов в T. — *Прим. ред.*

нальные термы $\lambda x_1 \ldots x_n a$ вместо n-местных функциональных переменных f согласно определениям $\theta(fa_1 \ldots a_n) = (\theta f)(\theta a_1) \ldots (\theta a_n)$ и $(\lambda x_1 \ldots x_n a) b_1 \ldots b_n = a(b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n)$.

2.3. Определение. Функция M из множества термов в неотрицательные целые числа называется *мерой*, если $M(a) \leqslant M(b) \Rightarrow M(c(a/x)) \leqslant M(c(b/x))$, причем, если x действительно входит в c, то $M(a) \leqslant M(c(a/x))$.

Если M — мера, то мы полагаем $M(a = b) =_{\text{df}} M(a) + M(b)$ и $M(S) =_{\text{df}} \sum_{E \in S} M(E)$. Длина является мерой: здесь $\text{lh}\, a$ равна по определению числу вхождений символов в a.

2.4. Определение. Подстановка θ называется *непроективной*, если из $\theta f = \lambda x_1 \ldots x_n a$ следует, что каждая из x_i действительно входит в a.

Отметим, что если M — мера и θ непроективна, то функция M^*, определенная равенством $M^*(a) = M(\theta a)$, является мерой.

2.5. Определение. Система равенств S называется *простой*, если каждое равенство в S имеет один из видов $x = 0$, $x_1 = x_2$, $x_1 = sx_2$ или $x_{m+1} = fx_1 \ldots x_m$.

2.6. Определение. Исчисление K Крайзеля и Тейта состоит из аксиом $a = a$, правила подстановки равных

$$(1) \qquad \frac{E(a/x) \qquad a \doteq b}{E(b/x)},$$

где $a \doteq b$ обозначает как $a = b$, так и $b = a$, а также правил:

$$(2) \qquad \frac{sa = sb}{a = b},$$

$$(3) \qquad \frac{0 = sa}{b = c},$$

$$(4_n) \qquad \frac{a = s^n a}{b = c}.$$

Исчисление, состоящее только из правила (1), будет называться H. Оно соответствует аксиомам (1), (2) и (3) системы J.

2.7. Определение. Вычисления в K и H — это бинарные деревья равенств, построенные из допущений и аксиом согласно правилам. Читателю понятно, что́ такое K- или H-вычисление равенств E (исходя) из системы S.

2.8. Определение. *Длина* вычисления T — это количество вхождений равенств в T.

2.9. Определение. T называется *сингулярным*, если для каждого применения правила (1) в T переменная x входит в T ровно один раз.

2.10. Определение. Пусть дано вычисление T. Тогда переброс — это замена подвычисления

$$\dfrac{\dfrac{T_1 \qquad T_2}{E(a/x,\ b/y) \qquad a \doteq c} \qquad T_3}{\dfrac{E(c/x,\ b/y) \qquad b \doteq d}{E(c/x,\ d/y)}} \quad \text{на} \quad \dfrac{\dfrac{T_1 \qquad T_3}{E(a/x,\ b/y) \qquad b \doteq d} \qquad T_2}{\dfrac{E(a/x,\ d/y) \qquad a \doteq c}{E(c/x,\ d/y)}},$$

а *сдвиг* — это замена подвычисления

$$\dfrac{\dfrac{T_1 \qquad T_2}{E(a/x) \qquad a \doteq c(b/y)} \qquad T_3}{\dfrac{E(c(b/y)/x) \qquad b \doteq d}{E(c(d/y)/x)}} \quad \text{на} \quad \dfrac{T_1 \qquad \dfrac{T_2 \qquad T_3}{a \doteq c(b/y) \qquad b \doteq d}}{\dfrac{E(a/x) \qquad a \doteq c(d/y)}{E(c(d/y)/x)}}$$

или

$$\dfrac{\dfrac{T_1 \qquad T_2}{E(b(a/x)/y) \qquad a \doteq c} \qquad T_3}{\dfrac{E(b(c/x)/y) \qquad b(c/x) \doteq d}{E(d/y)}} \quad \text{на} \quad \dfrac{T_1 \qquad \dfrac{T_3 \qquad T_2}{b(c/x) \doteq d \qquad c \doteq a}}{\dfrac{E(b(a/x)/y) \qquad b(a/x) \doteq d}{E(d/y)}}.$$

Движение — это переброс или сдвиг, и мы говорим, что T_1 *сводится* к T_2, если T_2 получается из T_1 в результате последовательности движений.

2.11. Отметим, что если T_1 сингулярно, и T_1 сводится к T_2 или T_2 сводится к T_1, то:

(i) T_2 сингулярно и, сверх того,

(ii) любая комбинация двух применений правил в T_1, сгруппированная влево *), подпадает под определение движения;

(iii) любая комбинация двух применений правил в T_1, сгруппированная вправо, возникает из какого-либо пункта определения сдвига.

Отметим далее, что если T сингулярно, то:

(a) имеется T_R такое, что T сводится к T_R и любая последовательность движений, начинающаяся с T_R, есть последовательность перебросов;

(b) имеется T_L такое, что T_L сводится к T и каждая последовательность движений, кончающаяся T_L, есть последовательность перебросов.

Это можно усмотреть, измеряя «левость» вычисления T n-кой $(k_1, \ldots, k_n)$, где k_i — длина i-го (слева направо) максимального пути в T при их лексикографическом упорядочении. Последовательность перебросов, за которой следует сдвиг, всегда уменьшает левость, если все они применяются к правилам «на» самом

*) Точнее говоря, левая посылка одного применения правила является заключением другого. — *Прим. ред.*

левом пути некоторого подвычисления в T. Вычисление T_R можно получить, итерируя эту процедуру при каждой возможности. T_L можно получить, обращая ее (минус перебросы) при каждой возможности.

2.12. Если T — сингулярное H-вычисление, то любое подвычисление, входящее в T_R, имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) \quad a_1 \doteq b_1}\,T_1}{E(b_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)}}{\vdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E(b_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) \quad a_n \doteq b_n}\,T_n}{E(b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n)}},$$

а T_L имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{E_1 \quad E_2}{E_3}}{\vdots}}{\dfrac{E_n \quad E_{n+1}}{E_{n+2}}}.$$

Если T — сингулярное H-вычисление, то это применимо к тем максимальным фрагментам вычислений T_R и T_L, которые являются H-вычислениями. Эти максимальные фрагменты называются H-фрагментами.

2.13. Определение. Если M — мера, то мы говорим, что вычисление T равенства E, исходя из S, является *M-прямым*, если для любого терма b, входящего в T, имеется терм c, входящий в E или S, такой, что $M(b) \leqslant M(c)$.

2.14. Соглашение. Мы считаем, что индивидные переменные пробегают натуральные числа, а функциональные переменные — теоретико-числовые функции. 0 и s обозначают соответственно нуль и функцию следования.

2.15. Определение. Говорят, что импликация $\bigwedge S \to E$ *аналитическая*, если она общезначима, а $\bigwedge S$ выполнима.

Конечно, если $\bigwedge S$ невыполнима, следует ожидать не наличия lh-прямых вычислений для всех E, исходя из S, а лишь таких вычислений для некоторого частного случая посылки в (3) или (4_n), т. е. для $0 = st$ или $t = s^n t$. Возьмем, например,

$$S_n =_{\text{df}} \{x_1 = sx_n,\ x_2 = sx_1,\ \ldots,\ x_n = sx_{n-1}\} \quad \text{и} \quad E =_{\text{df}} 0 = s0.$$

Имея это в виду, мы ограничимся системой K без правил (3) и (4_n), по-прежнему обозначая эту систему через K. K полна в том смысле, что если $\bigwedge S \to E$ аналитична, то E выводимо из S.

§ 3. Прямые вычисления

3.1. Предложение. *Допустим, что S проста и M есть мера. Тогда*:

(i) *если $\bigwedge S \to x = y$ аналитична, то имеется M-прямое вычисление равенства $x = y$ из S длины $\leqslant 2^{3k}$, где k — число переменных, входящих в S;*

(ii) *если $\bigwedge S$ невыполнима, то имеется M-прямое вычисление равенства $x = s^p x$ (или $0 = sx$) из S длины $\leqslant 2^{4k}$, где $p \leqslant \leqslant \operatorname{card}(S)$, k — число переменных, входящих в S, и x входит в S.*

Доказательство. Мы действуем по индукции, строя на стадии n некоторую совокупность C_n вычислений членов некоторого множества S_n, исходя из S, и некоторое вычисление T_n. Вычисления, принадлежащие C_n, используются для построения T_n, которое имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_1 = y_1 \quad T_1^*}{x_2 = y_2}}{\vdots}}{\dfrac{x_n = y_n \quad T_n^*}{x_{n+1} = y_{n+1}}},$$

где каждое из T_i^* — это вычисление, исходя из S. Это конструкция должна остановиться при некотором n_0, не превосходящем числа переменных, входящих в S.

Стадия 1. Положим $S_1 =_{\text{df}} S \cup \{x = x : x \text{ входит в } S\}$, $C_1 = {}_{\text{df}} S_1$, $x_1 =_{\text{df}} x$, $y_1 =_{\text{df}} y$ и $T_1 =_{\text{df}} x = y$.

Стадия $n+1$. Случай 1. В S_n имеются $a = c$ и $b = c$ такие, что переменная a отлична от b и $M(a) \leqslant M(b)$. Выбираем из C_n вычисления T_a и T_b равенств $a = c$ и $b = c$ соответственно. Полагаем

$$S_{n+1} =_{\text{df}} S_n(a/b), \quad x_{n+1} =_{\text{df}} x_n(a/b), \quad y_{n+1} =_{\text{df}} y_n(a/b),$$

$$T_n^* =_{\text{df}} \dfrac{\dfrac{T_b \quad T_a}{b = a}}{},$$

$$C_{n+1} =_{\text{df}} \left\{ \dfrac{\dfrac{T \quad T_n^*}{E(a/b)}}{} : T \text{ есть вывод } E \text{ из } S \text{ в } C_n \right\}$$

и

$$T_{n+1} =_{\mathrm{df}} \frac{T_n \qquad T_n^*}{x_{n+1} = y_{n+1}}.$$

Случай 2. Случай 1 не имеет места, но в S_n есть равенства $c = sa$ и $c = sb$ такие, что переменная a отлична от b и $M(a) \leqslant M(b)$. Выберем из C_n вычисления T_a и T_b равенств $c = sa$ и $c = sb$ соответственно. Положим

$$S_{n+1} =_{\mathrm{df}} S_n(a/b), \quad x_{n+1} =_{\mathrm{df}} x_n(a/b), \quad y_{n+1} =_{\mathrm{df}} y_n(a/b),$$

$$T_n^* =_{\mathrm{df}} \frac{\dfrac{T_a \qquad T_b}{sb = sa}}{b = a},$$

$$C_{n+1} =_{\mathrm{df}} \left\{ \frac{T \qquad T_n^*}{E(a/b)} : T \text{ есть вычисление } E \text{ из } S \text{ в } C_n \right\}$$

и

$$T_{n+1} =_{\mathrm{df}} \frac{T_n \qquad T_n^*}{x_{n+1} = y_{n+1}}.$$

Предположим сначала, что $\bigwedge S \to x = y$ аналитична. Тогда S_{n_0} имеет следующие свойства:

(i) Если $fz_1 \ldots z_m$ входит в S_{n_0}, то имеется ровно один терм z такой, что $z = fz_1 \ldots z_m$ принадлежит S_{n_0}.

(iii) Если sz_1 входит в S_{n_0}, то имеется ровно одна переменная z такая, что $z = sz_1$ принадлежит S_{n_0}.

(iii) Если 0 входит в S_{n_0}, то имеется ровно одна переменная z такая, что $z = 0$ принадлежит S_{n_0}.

(iv) Если $z_1 = z_2$ принадлежит S_{n_0}, то z_1 совпадает с z_2 *).

(v) Если $z = sz_1$ и $z = sz_2$ принадлежат S_{n_0}, то z_1 совпадает с z_2.

(vi) Нет переменных z_1 и z_2 таких, что $z_1 = sz_2$ и $z_1 = 0$ принадлежат S_{n_0}.

(vii) Нет переменных $z_1, \ldots, z_m$ таких, что $z_1 = sz_m$, $z_2 = sz_1, \ldots, z_m = sz_{m-1}$ принадлежат S_{n_0}.

*) Чтобы получить свойство (iv) нужно на стадии $n+1$ рассмотреть случай, когда случаи 1 и 2 не имеют места, но в S_n есть равенство $a = b$ такое, что переменная a отлична от переменной b. — *Прим. ред.*

Таким образом, из системы равенств S_{n_0} можно получить выполняющую ее интерпретацию, а затем продолжить ее до интерпретации, выполняющей S. В частности, эта интерпретация не выполняет $x_{n_0} = y_{n_0}$, кроме случая, когда x_{n_0} есть y_{n_0}. Теперь из структуры T_{n_0} легко усмотреть, что $\bigwedge S \to (x_1 = y_1 \leftrightarrow x_{n_0} = y_{n_0})$, следовательно, x_{n_0} есть y_{n_0}. Поэтому мы можем взять

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_{n_0} = y_{n_0} \qquad T_{n_0-1}^*}{x_{n_0-1} = y_{n_0-1}}}{\vdots}}{\cfrac{x_2 = y_2 \qquad T_1^*}{x_1 = y_1}}$$

в качестве искомого M-прямого вычисления равенства $x = y$ из S. Его длина $\leqslant 2^{3k}$, где k — число переменных, входящих в S, так как максимальная длина путей в T_i^* не превосходит $3i$.

Допустим теперь, что $\bigwedge S$ невыполнима. Тогда, так как S_{n_0} удовлетворяет условиям (i)—(v), должно нарушаться либо (vi) (с z_1, отличным от z_2), либо (vii). В первом случае искомое вычисление очевидно. Во втором случае выберем z_i таким образом, чтобы $M(z_i)$ была максимальной. Тогда для любого $q \leqslant m$ мы имеем $M(s^q z_i) \leqslant M(s^m z_i)$, и подходящее вычисление равенства $z_i = s^m z_i$ из S легко построить из вычислений, входящих в C_{n_0}. □

3.2. Предложение. *Если M — мера, то*:

(i) *если $\bigwedge S \to a = b$ аналитична, то имеется M-прямое вычисление равенства $a = b$ из S длины $\leqslant 2^{9(\mathrm{lh}(S) + \mathrm{lh}(a=b))}$;*

(ii) *если $\bigwedge S$ невыполнима, то имеется M-прямое вычисление равенства $a = s^p a$ $(0 = sa)$ из S длины $\leqslant 2^{12\,\mathrm{lh}(S)}$, где $p \leqslant \mathrm{lh}(S)$ и a входит в S.*

Доказательство. (ii) устанавливается совершенно аналогично (i) с использованием соответствующего утверждения предложения 3.1, поэтому мы докажем только (i). Каждому вхождению t терма в импликацию $\bigwedge S \to a = b$ поставим в соответствие новую переменную x_t. Пусть

$$S_1 =_{\mathrm{df}} \{x_{t_1} = 0,\ x_{t_2} = y,\ x_{st_3} = st_3,\ x_{ft_4 \ldots t_m} = ft_4 \ldots t_m : t_1$$

— вхождение символа 0, t_2 — вхождение символа y, st_3 и $ft_4 \ldots t_m$ — вхождения$\}$,

и положим

$$S_2 =_{\mathrm{df}} \{x_{t_1} = x_{t_2} : t_1 = t_2 \text{ принадлежит } S\}.$$

Теперь мы применим предложение 3.1 к $\bigwedge (S_1 \wedge S_2) \to x_a = x_b$ для меры M^*, определенной соотношением: $M^*(c) = M(c(\ldots, \ldots, t/x_t, \ldots))$. □

3.3.1. Определение. Мы говорим, что вычисление T равенства E из системы равенств S обладает *слабым свойством подтермности*, если для каждого применения правила (2) в T термы sa и sb входят в S. Вычисление T обладает *свойством подтермности*, если оно обладает слабым свойством подтермности и для каждой входящей в него аксиомы $a = a$ терм a входит в E или S. Сингулярные вычисления, обладающие свойством подтермности, связаны с M-прямыми вычислениями через сводимость.

3.3.2. Предложение. *Если M — мера и T — сингулярное вычисление со свойством подтермности, то T сводится к некоторому M-прямому вычислению T_M.*

Доказательство. Применяя к T_R последовательность перебросов, построим вычисление T_M таким образом, чтобы оно не содержало подвычислений вида

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{T_1}{E(a/x,\ c/y)} \qquad \dfrac{T_2}{a \doteq b}}{E(b/x,\ c/y)} \qquad \dfrac{T_3}{c \doteq d}}{E(b/x,\ d/y)}.$$

где $M(a) < M(b)$ и $M(d) \leqslant M(c)$. Так как T_M сингулярно и обладает свойством подтермности, нетрудная индукция по (длине) T_M показывает, что оно M-прямое. □

3.4. Предложение. *Если T — сингулярный вывод равенства E из системы S, обладающий слабым свойством подтермности, то имеется сингулярное вычисление T_S равенства E из системы S, обладающее свойством подтермности и имеющее длину $\leqslant \mathrm{lh}(T)$.*

Доказательство. С помощью серии перебросов построим из T_L вычисление, не содержащее H-фрагментов, в которых никакое применение правила вида

$$\dfrac{a_1 = b_1(c_1/x_1) \qquad c_1 \doteq d_1}{a_1 = b_1(d_1/x_1)}$$

не предшествует применению правила вида

$$\dfrac{a_2(c_2/x_2) = b_2 \qquad c_2 \doteq d_2}{a_2(d_2/x_2) = b_2}.$$

Каждый H-фрагмент этого вычисления имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a_p = b_p \qquad E_1}{a_{p-1} = b_q}}{\vdots}}{a_2 = b_q \qquad E_{p-1}}}{a_1 = b_q \qquad E_p}}{a_1 = b_{q-1}}}{\vdots}}{\dfrac{a_1 = b_2 \qquad E_{p+q-2}}{a_1 = b_1}}.$$

Если a_p и b_q входят в S (или в E), то с этим фрагментом не нужно делать ничего. В противном случае a_p совпадает с b_q, и этот фрагмент нужно заменить следующей фигурой:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a_1 = a_1 \qquad E_{p-1}}{a_1 = a_2}}{\vdots}}{a_1 = a_{p-1} \qquad E_1}}{a_1 = a_p \qquad E_p}}{a_1 = b_{q-1}}}{\vdots}}{\dfrac{a_1 = b_2 \qquad E_{p+q-2}}{a_1 = b_1}}.$$

Наконец, получаем T_S путем вычеркивания применений правил вида

$$\dfrac{a = c \qquad b = b}{a = c}$$

из результирующего вычисления. □

3.5. Предложение. *Если T — сингулярное вычисление равенства E из системы S, то имеется сингулярное вычисление T_ω равенства E из системы S, обладающее слабым свойством подтермности и имеющее длину $\leqslant (\mathrm{lh}(T))^2 + \mathrm{lh}(T) + 1$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{lh}(T) = n$. Мы ведем доказательство путем индукции по все бóльшим и бóльшим подвычислениям в T, которые кончаются применениями правил вида (2), заменяя их новыми вычислениями (однако мы продолжаем обозначать через T вычисление, возникающее на стадии k). На каждой стадии мы рассматриваем H-фрагмент, содержащий посылку одного из таких применений правил. Если соответствующее подвычисление первоначального T имело длину p, то этот фрагмент имеет длину не более $2p$. Такой фрагмент преобразуется сначала во фрагмент длины не более $p+2$, а затем в K-вычисление длины не более $2p+2$, которое подставляется вместо исходного большего вычисления (а рассматривавшееся применение правила вида (2) вычеркивается).

Самое большее $p+2$ из $2p+2$ равенств «передаются» следующему H-фрагменту, и одно равенство вообще выбрасывается. Отсюда легко следует граница n^2+n+1.

Стадия 1. Заменим каждое максимальное подвычисление вида

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{s^q a = s^q a}{s^{q-1}a = s^{q-1}a}}{\vdots}}{sa = sa}$$

$$a = a$$

на $a = a$.

Стадия $k+1$. Выберем максимальное из еще не рассмотренных подвычислений вычисления T, оканчивающихся применением правила вида (2), и рассмотрим H-фрагмент, кончающийся равенством $sa = sb$. Если этот фрагмент просто совпадает с $sa = sb$, то не будем делать ничего (так как мы находимся на стадии $k+1$, это подвычисление кончается двумя последовательными применениями правил вида (2) и sa, sb входят в S, так как туда входят ssa и ssb). В противном случае с помощью преобразований из предложения 3.4 получим из этого фрагмента H-вычисление вида

$$\dfrac{\dfrac{sa = t_0 \qquad E_0}{sa = t_1}}{\vdots}$$

$$\dfrac{sa = t_m \qquad E_m}{sa = t_{m+1}},$$

где t_0 есть sa, t_{m+1} есть sb, t_i отличен от t_{i+1} и, по индукционному предположению, все термы, входящие в E_i, входят и в S (если на втором шаге преобразования из предложения 3.4 a_p или b_p входят в S или E, то нужно вставить правило

$$\dfrac{a_1 = a_p \qquad a_p = b_q}{a_1 = b_q}$$

на подходящее место). Мы различаем два случая:

(i) каждый из t_i имеет вид sr_i;

(ii) случай (i) не имеет места.

Рассмотрим сначала случай (ii) и сведем его к случаю (i) для меньшего вычисления.

Случай (ii). Выберем все пары i, j такие, что:

(a) t_{i-1} есть sr_{i-1};

(b) t_i не есть sr_i;

(c) j — наименьшее число, большее i, такое, что t_j снова есть sr_j.

Тогда для каждой такой пары E_{i-1} есть $t_{i-1} = t_i$, E_j есть $t_{j-1} = t_j$ и t_j входят в S. Заместим каждый сегмент

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{sa = t_{i-1} \qquad t_{i-1} \doteq t_i}{sa = t_i}}{\vdots}}{\dfrac{sa = t_{j-1} \qquad t_{j-1} \doteq t_j}{sa = t_j}}$$

на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{t_{i-1} = t_i \qquad E_i}{t_{i-1} = t_{i+1}}}{\vdots}}{\dfrac{\dfrac{t_{i-1} = t_{j-1} \qquad E_{j-1}}{sa = t_{i-1} \qquad t_{i-1} = t_j}}{sa = t_j}}$$

и рассмотрим фрагмент, полученный заменой каждого такого замещения на его последнее применение правила

$$\dfrac{sa = t_{i-1} \qquad t_{i-1} = t_j}{sa = t_j}$$

в рамках случая (i).

Случай (i). Заменим $sa = t_i$ на $a = r_i$ во всем данном H-вычислении, заменяя одновременно каждое применение правила вида

$$\frac{sa = t_i \qquad t_i \doteq t_{i+1}}{sa = t_{i+1}}$$

на

$$\frac{a = r_i \qquad \dfrac{sr_i \doteq sr_{i+1}}{r_i \doteq r_{i+1}}}{a = r_{i+1}}. \quad \square$$

§ 4. Заключение

4.1. Тот факт, что прямые вычисления формализуемы в K, имеет много следствий. Упомянем только одно из них: правила системы K наиболее эффективны как в смысле длин вычислений, так и в смысле длин термов (с точностью до постоянного множителя, когда вычисления кодируются как последовательности равенств) по сравнению с любым конечным множеством «аналитических» правил. Мы оставляем бóльшую часть деталей на долю читателя. Главный факт, нужный нам, таков.

4.1.1. Предложение. *Если M — мера и E выводимо из S, то имеются частные случаи E_1, S_1; ... ; E_n, S_n равенств E и (членов) S, а также сингулярные вычисления T_i равенств E_i из S_i, удовлетворяющие условию: для любой подстановки θ имеются непроектирующая θ_i и вычисление T_θ такие, что:*

(i) $\theta E = \theta_i E_i$;
(ii) $\theta S = \theta_i S_i$;
(iii) T_i *сводится к* T_θ;
(iv) $\theta_i T_\theta$ *является M-прямым.*

Доказательство. Пусть даны E и S. Предвосхищая всевозможные «проекции», мы можем найти такие частные случаи E_1, S_1; ... ; E_n, S_n, что:

(a) если E выводимо из S, то для каждого i равенство E_i выводимо из S_i;

(b) для каждой θ найдется i и непроектирующая θ_i, удовлетворяющая (i) и (ii).

Допустим, что E выводима из S, и выберем сингулярное вычисление T_i равенства E_i из S_i, обладающее свойством подтерминости. По данной θ выберем i и θ_i вышеуказанным способом. Положим $M^*(a) = {}_{d_i}M(\theta_i a)$ и применим предложение 3.3.2 к T_i по отношению к M^* для получения T_θ.

4.2. Наш анализ сингулярных вычислений в нынешнем виде не решает вопроса об отношении произвольных вычислений к прямым. В частности, он не дает ответа на следующий

Вопрос. Имеется ли бесконечная последовательность пар E_i, S_i и число n такие, что найдется вычисление E_i из S_i длины $\leqslant n$, но любое прямое вычисление E_i из S_i имеет длину не меньше i?

Однако с использованием нашего анализа можно было бы дать отрицательный ответ на этот вопрос, если бы удалось доказать следующее

Утверждение. Имеется функция f такая, что если T — вычисление равенства E из S, то имеются E^*, S^*, θ^*, T^* такие, что:

(i) θ^* непроектирующая;
(ii) $\theta^* E^* = E$;
(iii) $\theta^* S^* = S$;
(iv) T^* — сингулярное вычисление равенства E^* из S^*;
(v) $\mathrm{lh}(T^*) \leqslant f(\mathrm{lh}(T))$.

4.3. Наконец, в связи с эффективностью изучались и другие классы вычислений, формализуемых в K. Например, у Стетмена [1], глава 2, длина вычислений из аксиом, которым удовлетворяют частичные функции, сравнивается с длиной вычислений из «эквивалентных» аксиом, которым удовлетворяют только всюду определенные функции.

ЛИТЕРАТУРА

Крайзель и Кривин (Kreisel G., Krivine J. L.)
1. Elements of Mathematical Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1967.
Крайзель и Тейт (Kreisel G., Tait W. W.)
1. Finite definability of number theoretic functions and parametric completeness of equation calculi. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1961, 7, p. 28—38.
Лифшиц В. А.
1. Специализация формы вывода в исчислении предикатов с равенством и функциональными символами. — Тр. матем. ин-та АН СССР, 98. М.: Наука, 1968, с. 5—25.
Стетмен (Statman R.)
1. Structural complexity of proofs: Dissertation. — Stanford (California): Stanford University, 1974.

Глава 4

ТЕОРИИ КОНЕЧНОГО ТИПА, РОДСТВЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

Соломон Феферман

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

1.1. Цели и интересы. Это — обзор работ по формальным теориям, родственным значительной части математической практики. Бóльшая часть современной математики основана на неконструктивных теоретико-множественных принципах, однако в действительности используется поразительно малая часть того, что скрыто в этих принципах (за исключением, конечно, использования в самой теории множеств). Например, основную массу математического анализа можно развить в *алгебраической системе конечного типа над натуральными числами* $\mathbb{N}$, а на самом деле даже в пределах типового уровня три. (Типовой уровень натуральных чисел есть 0, для $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и вещественных чисел — это 1, для вещественных функций — 2, для операторов над ними — 3.) *Трансфинитные типы* появляются в теории множеств через *трансфинитную итерацию* операции множества-степени. Но там, где такая итерация вообще используется в анализе, она применяется только к операциям *внутри данного типа*. Недоиспользование потенциальных ресурсов трансфинитных типов можно считать дефектом практики; такая точка зрения подтверждается недавними результатами о детерминированности борелевских игр (ср. Мартин [1]). Тем не менее по причинам, которые сейчас

будут указаны, логический анализ практики представляет интерес, а ограничение низкими типами, разумеется, делает такой проект более осуществимым.

С логической точки зрения основные принципы существования (экзистенциальные принципы) внутри любого данного типа **S** — это *аксиомы свертывания* и *аксиомы выбора*. Первые утверждают, что для любого свойства φ элементов из **S** существует множество всех объектов из **S**, обладающих свойством φ. Класс рассматриваемых свойств может быть точно описан в формальном языке и, на удивление, оказывается, что свойства, которые используются в действительности, имеют *очень низкую логическую сложность* (в нескольких смыслах). Это делает информативный логический анализ практики даже более осуществимым.

При поверхностном взгляде интерес такого изучения состоит в том же, что и в известных математических исследованиях вопроса о том, *какого рода задачи можно решить данными ограниченными средствами*, вроде построения циркулем и линейкой или решения путем механических вычислений. Отличие от нашего нынешнего исследования состоит в том, что для средств, выделенных в упомянутых известных случаях, уже имелось совершенно отчетливое неформальное понимание. Имеется и сходство, состоящее в том, что ограничение данными средствами построения или решения в определенной области может быть произвольным или исторической случайностью; изучение того, что́ может быть получено такими средствами, дает, таким образом, повод посмотреть, имеют ли эти ограничения более глубокое или внутреннее значение.

Последнее представляет собой позицию, занимаемую представителями различных точек зрения на основании математики, которые призывают к ограничениям на принимаемые методы или к совершенно новому построению. Мы имеем в виду, в частности, идеи, восходящие к Гильберту, Брауэру, Пуанкаре и школе Бореля — Лебега.

Как хорошо известно, Гильберт хотел ограничить (до возможного минимума) только методы, которые использовались бы для *оправдания* математики с помощью доказательств непротиворечивости подходящих формальных систем. Хотя его программа оказалась невыполнимой, возникшая из нее *теория формальных систем и доказательств* оказалась одним из главных инструментов описываемой ниже работы (ср. также главу 2).

Здесь нет нужды углубляться в идеи конструктивности, введенные Брауэром, так как этот вопрос вполне освещен в главе 5. Некоторые из изучаемых там формальных теорий весьма похожи на изучаемые здесь. Основное различие в том, что мы, следуя математической практике, принимаем *классическую логику*,

(Другие значительные отличия будут отмечены ниже.) Оказывается, что одно из формальных средств разработки наших проблем — это сведение классических теорий к (формально) *интуиционистским теориям* с последующим использованием явной интерпретируемости последних.

Упомянутые выше взгляды французских математиков никогда не были систематически разработаны ими. В этом отношении логический интерес настоящей работы состоит в точном объяснении идей, о которых идет речь, и в сравнении их с практикой в качестве первого критерия их жизнеспособности.

Пуанкаре подчеркивал примат нашей концепции натуральных чисел и *неопределенность* концепций *функции* и *множества* (в частности, для $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}$). Это привело его к отрицанию использования так называемых *непредикативных* определений таких, как определения некоторого подмножества $\mathbb{N}$ (или вещественного числа) свойством φ, которое содержит квантификацию по предполагаемой совокупности *всех* подмножеств $\mathbb{N}$ (или по всему $\mathbb{R}$). В логическом анализе предикативности был достигнут значительный прогресс, и он будет ниже играть важную роль в различных ситуациях[1]).

В школе Бореля — Лебега доминировала идея рассмотрения одних только явно определимых множеств и функций. Разница состоит в разрешении определений по *трансфинитной рекурсии*, а также (возможно) определений, предполагающих $\mathbb{R}$ *фиксированным*. Эта точка зрения еще не была точным образом объяснена, но на нее было пролито много света в результате развития теории рекурсии, а также в терминах формальных теорий, являющихся расширениями описываемых ниже систем.

Наконец, описанная здесь работа может оказаться интересной для логиков просто потому, что она является точкой встречи повседневной математики с идеями и методами из теории доказательств, теории моделей и теории рекурсий, приводящей к ряду результатов, которые приносят удовлетворение сами по себе.

1.2. План главы. Бо́льшая часть литературы по этому предмету рассматривает системы второго порядка (т. е. системы, выразимые в логике второго порядка), причем некоторые из них были выделены для изучения только на синтаксических основаниях. Наше нынешнее изложение отличается сосредоточением на теориях конечного типа, которые непосредственно отражают логические черты практики и в которых легко развивать повседневную математику. Одной из главных логических проблем

[1]) Термин «предикативный» используется разными авторами по-разному. Мы применяем его к той части математики, которая в конечном счете сводима к нашей концепции натуральных чисел (ср. 6.4.5 и 9.3 ниже).

оказывается тогда получение информации о том, каково содержание этих теорий в логике второго порядка[1]).

Мы начнем в § 2 с неформального рассмотрения некоторых условий замкнутости на универсумы множеств и функций. Эти элементарные *условия замкнутости* ведут к алгебраическим системам конечных типов. Дальнейшие условия замкнутости включают *кванторные функционалы* для каждой области, которая считается фиксированной (или определенной), и *функционалы рекурсии* для $\mathbb{N}$. В § 3 имеется (по необходимости) короткое указание на соотношение этих условий замкнутости с различными частями математики.

В § 4 мы переходим к формулировке ряда теорий конечных типов, основанных на этих условиях замкнутости. Они переформулированы также в логически более знакомой форме схем CA (comprehension axiom — аксиома свертывания) и AC (axiom of choice — аксиома выбора). Фрагменты этих теорий, выразимые в логике второго порядка, включают такие изучавшиеся в литературе системы, как $\Delta^1_1 - \mathrm{CA}$, $\Sigma^1_1 - \mathrm{AC}$, $\Pi^1_1 - \mathrm{CA}$, $\Delta^1_2 - \mathrm{CA}$; последние описаны в § 5. В развитие этого в § 6 излагаются принципы трансфинитной индукции и рекурсии, выраженные в логике второго порядка. Это позволяет нам объяснить итерацию некоторых принципов, например для случая *разветвленного анализа*.

Несколько *теоретико-рекурсивных* моделей для теорий конечного типа изложено в § 7. Они используются для установления нескольких *результатов о непротиворечивости* для математических утверждений относительно тех частей практики, которые развиты внутри данных теорий. В частности, дан ряд примеров с использованием моделей конечного типа, у которых фрагмент, выразимый в логике второго порядка, состоит в точности из *гиперарифметических* функций и множеств.

Более точная информация о содержании, которое имеют изучаемые теории в логике второго порядка, получается в § 8 различными методами теории доказательств. Сюда входят генценовский метод *устранения сечения* и его приспособление к *нормализации* термов, редукция к формально интуиционистским теориям и гёделевский метод *функциональной интерпретации*. Так как эти методы весьма подробно обсуждаются в главах 2 и 5, мы обсуждаем только особые черты их применения к этим задачам. Многие из результатов имеют вид: данная теория $\mathbf{T}^\omega$ конечного типа является консервативным расширением некоторого фрагмента $\mathbf{T}^2$, выразимого в логике второго порядка. Среди

[1]) Я развил этот подход в различных докладах и курсах в течение ряда лет после 1970 г. (начиная с статьи Фефермана [3]). Как будет видно ниже, это — синтез идей и результатов, принадлежащих нескольким лицам. Принятый здесь план заимствован из работы Фефермана [6].

описываемых побочных результатов — характеристики *доказуемых вполне упорядочений* различных теорий.

Девятый параграф заключает рассмотрение коротким указанием литературы по дальнейшим темам. Вне пределов этой главы находится развитие теории конечного типа для ординалов, нужной для отражения подхода Бореля — Лебега. По этой причине и в качестве основной иллюстрации мы везде сосредоточивали внимание на различии предикативное/непредикативное, так как оно проявляется и в математике, и в формальных системах.

Параграфы 2 и 3 можно читать без какой-либо подготовки по логике, а § 4 — при весьма скромной подготовке. §§ 5—8 требуют большего опыта, но немного специальных знаний, кроме частей теории рекурсивных и гиперарифметических функций (с которыми можно ознакомиться по книге Роджерса [1]).

1.3. Историческая заметка. Теории конечного типа восходят к истокам современных работ по основаниям математики: имеется в виду введение Расселом в 1908 г. (предикативной) *разветвленной теории типов* над неконкретизированным множеством индивидов. Это было развито в Principica Mathematica, где так называемая «аксиома сводимости» была добавлена просто для того, чтобы обойти трудности развития математики в разветвленной системе. Как позднее осознал Рамсей, это сделало ее эквивалентной (непредикативной) *простой или неразветвленной теории типов*.

Гильберт сформулировал несколько теорий функций конечного типа над $\mathbb{N}$ в 1920-х годах. Функциональная теория третьего порядка над $\mathbb{N}$ описана у Гильберта и Бернайса [1], Приложение IV. Чёрч [1] дал теорию функционалов всех конечных типов над $\mathbb{N}$ в символизме *типового λ-исчисления*. Все эти системы принимали в качестве аксиом полные непредикативные схемы свертывания. Теория Чёрча эквивалентна по силе теории множеств Цермело.

Рассмотрение конструктивно приемлемых аксиом для объектов конечного типа и, в частности, оператора рекурсии R принадлежит Гёделю [1]. Это вместе с рассмотрением рекурсии в кванторных функционалах (т. е. относительно этих функционалов) у Клини [3] образует основные теоретические предпосылки настоящей работы.

§ 2. Условия замкнутости на универсумы и алгебраические системы конечного типа

2.1. Элементарные условия замкнутости на универсумы множеств и функций.

2.1.1. Под *универсумом* понимается пара $\mathcal{U} = (\mathrm{Set}_{\mathcal{U}}, \mathrm{Fn}_{\mathcal{U}})$, состоящая из двух совокупностей, называемых соответственно

множествами (универсума) $\mathcal{U}$ и *функциями* $\mathcal{U}$. Элементы множеств $\mathcal{U}$ могут в определенных случаях сами быть множествами или функциями $\mathcal{U}$, но могут также быть и объектами других родов таких, как числа.

Обозначения. (i) A, B, C, X, Y, Z пробегают $\mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$, а f, g, h пробегают $\mathrm{Fn}_{\mathcal{U}}$. Мы используем a, b, c, x, y, z для элементов множеств, которые не выделены ничем иным. Некоторые заглавные буквы используются для функций.

(ii) $f\colon A \to B$ пишется, когда $\mathrm{Dom}(f) = A$ и $\mathrm{Rang}(f) \subseteq B$ *), а fa обозначает $f(a)$, когда $a \in A$. $\mathrm{Gr}(f)$ обозначает график f, рассматриваемый как подмножество $A \times B$. Для $X \subseteq A$ $f \restriction X$ — ограничение f на X, а $C_A(X)$ — характеристическая функция X относительно A, т. е. $C_A(X)\colon A \to \{0, 1\}$, $(C_A(X))a = 0 \Leftrightarrow a \in X$.

(iii) $\mathscr{P}_{\mathcal{U}}(A) = \{X \in \mathrm{Set}_{\mathcal{U}} \mid X \subseteq A\}$, $(A \to B)_{\mathcal{U}} = \{f \in \mathrm{Fn}_{\mathcal{U}} \mid f\colon A \to B\}$.

Если не возникает двусмысленности, индекс $\mathcal{U}$ не будет указываться и $(A \to B)_{\mathcal{U}}$ будет тогда обозначаться через $(A \to B)$ или B^A.

2.1.2. $\mathcal{U}$ называется *декартово замкнутым* [1]), если он удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\{0, 1\} \in \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$;

(2) $A, B \in \mathrm{Set}_{\mathcal{U}} \Rightarrow A \times B$, $(A \to B)_{\mathcal{U}}$ и $\mathscr{P}_{\mathcal{U}}(A)$ принадлежат $\mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$;

(3) $f \in \mathrm{Fn}_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(f) \in \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$;

(4) $A \in \mathrm{Set}_{\mathcal{U}}$ и $X \subseteq A \Rightarrow (X \in \mathrm{Set}_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow C_A(X) \in \mathrm{Fn}_{\mathcal{U}})$;

(5) для каждой комбинации A, B, C множеств из $\mathcal{U}$ все функции K, S, P, P_1, P_2 и D, определяемые ниже, принадлежат $\mathrm{Fn}_{\mathcal{U}}$ (когда $a \in A$, $b \in B$, $f \in (A \to (B \to C))$, $g \in (A \to B)$ и $i \in \{0, 1\}$):

(i) $Kab = a$ (константные функции);

(ii) $Sfga = fa(ga)$ (подстановка);

(iii) $Pab = (a, b)$, $P^1(a, b) = a$, $P^2(a, b) = b$

(пара и проекции);

(iv) $Dabi = \begin{cases} a, & \text{если } i = 0, \\ b, & \text{если } i = 1 \end{cases}$ (определение разбором случаев).

Все универсумы $\mathcal{U}$, рассматриваемые в дальнейшем, предполагаются декартово замкнутыми.

Обозначения и замечания. (*i*) $fa_1 \ldots a_n = (\ldots(fa_1)\ldots)a_n$, т. е. группировка производится влево. Мы

*) Здесь Rang (f) обозначает образ f. — *Прим. ред.*

[1]) Эта терминология происходит из теории категорий; здесь используется только конкретная форма этого понятия.

пишем $(A_1, \ldots, A_n \to B)$ вместо $(A_1 \to \ldots \to A_n \to B)$, т. е. вместо $A_1 \to (\ldots \to (A_n \to B)\ldots)$. Чтобы указать область определения, мы используем нижние индексы, например $K_{A,B} \in (A, B \to A)$, $P_{A,B} \in (A, B \to A \times B)$ и т. д.

(ii) K, S — *базисные комбинаторы*, служащие для порождения всех функций, определимых повторным применением функции к аргументу. В их терминах можно объяснить λ-запись для абстракции (и обратно). Так, $I = I_A = \lambda x \in A.\ x$ (тождественная функция) определяется с помощью $I = SKK$, а $C = \lambda f \in (A \to B)\lambda g \in (B \to C)\lambda x \in A.f(g(x))$ — путем $C = S(KS)K$ и т. д. Ср. главу 7.

(iii) Условия (3) и (4) выражают взаимозаменяемость или эквивалентность множеств и функций. Это принято в теоретико-множественной математике, но не в конструктивной математике, где множества (или свойства) в общем случае неразрешимы, в то время как все функции (конструкции) вычислимы (ср. главу 5).

(iv) Подмножества любого данного множества замкнуты относительно конечных булевых операций, что легко усмотреть из эквивалентности множеств и функций и наличия определений разбором случаев.

(v) Обычно замкнутость относительно операций $A \longmapsto \mathscr{P}_{\mathscr{U}}(A)$ и $A,\ B \longmapsto (A \to B)_{\mathscr{U}}$ считалась бы чрезвычайно не элементарной, но это имеет место лишь в присутствии принципов свертывания, позволяющих квантификацию по любым множествам. Без них мы можем мыслить $\mathscr{P}_{\mathscr{U}}(A)$ просто как результат совместной группировки всех объектов одного и того же рода или типа в $\mathscr{U}$, а именно подмножеств A в $\mathscr{U}$ (и аналогично для $(A \to B)_{\mathscr{U}}$).

2.1.3. *Конечные типы универсума* $\mathscr{U}$ над $A_0, \ldots, A_n$ — это множества, порожденные из $A_0, \ldots, A_n$ путем замыкания относительно операций: $A,\ B \longmapsto A \times B$, $(A \to B)_{\mathscr{U}}$, $\mathscr{P}_{\mathscr{U}}(A)$.

Типовые символы σ используются для обозначения порожденных таким образом членов A_σ универсума $\mathscr{U}$: если даны символы $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ для *основных типов*, они строятся с помощью формальных операций $\sigma, \tau \longmapsto \sigma \times \tau$, $(\sigma \to \tau)$, $[\sigma]$. Тогда $A_{\gamma_i} = A_i$, $A_{\sigma\times\tau} = A_\sigma \times A_\tau$, $A_{\sigma\to\tau} = (A_\sigma \to A_\tau)$, $A_{[\sigma]} = \mathscr{P}(A_\sigma)$.

Говорят, что $\mathscr{U}$ — универсум *конечного типа над* $A_0, \ldots, A_n$, если каждое множество X из $\mathscr{U}$ принадлежит некоторому $A_{[\sigma]}$, т. е. является подмножеством некоторого A_σ.

2.1.4. Уменьшение числа основных понятий; алгебраические системы конечного типа. Определение декартово замкнутого универсума было избрано как наиболее удобное и естественное в математических применениях. Мы, однако, можем одним из следующих двух способов произвести некоторые упрощения для универсумов конечного типа над данными множествами.

(1) Возьмем основной тип γ_0 такой, что $0,\ 1 \in A_{\gamma_0}$. Ограничимся типами, построенными из $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ с помощью операции $\sigma,\ \tau \longmapsto (\sigma \to \tau)$. Подмножества A_σ трактуются в терминах их характеристических функций из $A_{(\sigma\to\gamma_0)}$. Чтобы избавиться от спаривающей функции и проекций, операции от нескольких переменных заменяются одноместными функциями и повторными применениями этих функций к аргументам (т. е. $(\sigma_1 \to \to (\sigma_2 \to \tau))$ заменяем $(\sigma_1 \times \sigma_2 \to \tau)$). *Частичные функции* из (подмножества B множества) A_σ в A_τ рассматриваются как ограничения тотальных (всюду определенных) функций из $A_{(\sigma\to\tau)}$ (которым могут быть присвоены произвольные значения для аргументов не из B). Этому подходу мы в действительности будем следовать в логическом развитии §§ 4—8.

(2) Типы строятся только с помощью операций $\sigma,\ \tau \to \sigma \times \tau$, $[\sigma]$. В этом случае функции из A_σ в A_τ (частичные или тотальные) отождествляются с их графиками в $A_{[\sigma\times\tau]}$.

Замечание. Ни одно из этих упрощений не подходит для конструктивной математики. Например, если f — частичная вычислимая операция из A_σ в A, мы не можем в общем случае продолжить f до тотальной вычислимой операции на A_σ.

2.2. Замкнутость относительно квантификации; операторы выбора. Для любого $\mathscr{U}$ и множества A в $\mathscr{U}$ определим функционал $\exists^A$: $\mathscr{P}(A) \to \{0, 1\}$ соотношением

$$\exists^A X = 0 \Leftrightarrow X \text{ непусто.} \tag{1}$$

Эквивалентным образом (когда $0 \in B$) определим $\exists^A$: $(A \to \to B) \to \{0, 1\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \exists^A f = 0 &\Leftrightarrow \exists a \in A\,(fa = 0), \\ \exists^A f = 1 &\Leftrightarrow \forall a \in A\,(fa \neq 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Мы скажем, что $\mathscr{U}$ является $\exists^A$-*замкнутым*, если $\exists^A$ есть функция в $\mathscr{U}$. Под оператором C *выбора* для $\exists^A$ мы понимаем функционал из $\mathscr{P}(A)$ в A такой, что

$$X \subseteq A \quad \text{и} \quad \exists^A X = 0 \Rightarrow CX \in X. \tag{3}$$

2.3. Универсумы над натуральными числами.

2.3.1. Говорят, что алгебраическая система $\mathfrak{M}$ принадлежит универсуму $\mathscr{U}$, если все ее области, отношения и функции находятся в $\mathscr{U}$.

Допустим, что алгебраическая система $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, ')$ принадлежит $\mathscr{U}$ и i, j, k, n, m, p пробегают $\mathbb{N}$. *Операторы* $\mathbb{N}$-*рекурсии* — это функции R (или $R^{\mathbb{N}}_A$), определяемые соотношениями

$$Raf0 = a, \qquad Rafn' = fn(Rafn) \tag{1}$$

для любого A, $a \in A$, $f \in (\mathbb{N}, A \to A)$ и $n \in \mathbb{N}$. Эти функционалы введены у Гёделя [1]. Они имеют *непредикативный* или *неэлементарный* характер, следующим образом иллюстрируемый для $A = [\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}]$ (здесь мы пишем «g» вместо «a» и считаем, что h пробегает $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$):

$$Rgfoh = gh, \qquad Rgfn'h = fn\,(Rgfn)\,h. \tag{2}$$

Записывая $Rgfn$ в виде $\lambda h_1(Rgfnh_1)$, мы видим, что $Rgfn'h$ зависит, на первый взгляд, от $Rgfnh_1$ для всех h_1 в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Элементарные операторы рекурсии* $\hat{R}$ (или $\hat{R}_A^{(N)}$) могут быть следующим образом определены для любого $A = (B_1, \ldots, B_n \to \mathbb{N})$:

$$\hat{R}gfo\boldsymbol{b} = g\boldsymbol{b}, \qquad \hat{R}gfn'\boldsymbol{b} = fn\,(\hat{R}gfn\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{b} = b_1 \ldots b_n$, каждое $b_i \in B_i$ и $g \in A$.

Замечание. Операторы $\hat{R}$ по существу введены Клини [3]. Там было показано, что функции в $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$, порожденные 0,1 и всеми K, S, $\hat{R}$, — это в точности примитивно рекурсивные функции. Общерекурсивную функцию, которая не является примитивно рекурсивной, можно получить, если вместо этого использовать операторы R. Известные примеры таких функций определяются двойной рекурсией на $\mathbb{N}$, которую можно переформулировать как однократную рекурсию на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

2.3.2. Мы скажем, что $\mathcal{U}$ является $\hat{\mathbb{N}}$-*замкнутым*, если он содержит алгебраическую систему $\mathfrak{N}$ и элементарные операторы рекурсии $\hat{R}$. $\mathcal{U}$ называется $\mathbb{N}$-замкнутым, если вместо этого он содержит все операторы рекурсии R. Функции конечного типа над $\mathbb{N}$, порожденные 0, ′ и всеми K, S, R, образуют примитивно *рекурсивные функционалы* (в смысле Гёделя). С этого момента все рассматриваемые универсумы предполагаются по меньшей мере $\hat{\mathbb{N}}$-замкнутыми.

2.3.3. Чтобы отразить то обстоятельство, что *квантор по* $\mathbb{N}$ считается определенным, мы можем требовать, чтобы $\mathcal{U}$ был $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутым [1]). *Оператор неограниченного минимума* μ — это оператор выбора для $\exists^{\mathbb{N}}$, определяемый так:

$$\mu X = \begin{cases} \text{наименьшее } n, \text{ принадлежащее } X, \text{ если } \exists^{\mathbb{N}} X = 0, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Так как график μ определим через $\exists^{\mathbb{N}}$ и $<$ (и последний предикат определяется примитивной рекурсией), то μ находится в $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $\exists^{\mathbb{N}}$ находится в $\mathcal{U}$.

[1]) $\exists^{\mathbb{N}}$ часто обозначается через ${}^2\mathrm{E}$ в литературе по рекурсивным функционалам конечного типа. Для ссылок ниже, $\exists^{(\mathbb{N}\to\mathbb{N})}$ обозначается тогда через ${}^3\mathrm{E}$.

2.4. Универсумы над вещественными числами. Если множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел и алгебраическая система на нем, скажем $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, =_{\mathbb{R}}, +, \cdot, 0, 1)$, считаются базисными, то можно рассматривать универсумы, которые содержат $\mathfrak{R}$ и являются $\exists^{\mathbb{R}}$-замкнутыми. Если вместо этого $\mathbb{R}$ определяется в терминах $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (как сделано ниже), то мы можем предположить, что $\mathcal{U}$ является $\exists^{(\mathbb{N}\to\mathbb{N})}$-замкнутым. Заметим, что $=_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ определимо с использованием $\exists^{\mathbb{N}}$. (Нам не нужно было включать $=_{\mathbb{N}}$ в $\mathfrak{N}$, так как оно определимо рекурсией.)

2.5. Условия замкнутости для ординалов, фундированности и индуктивных определений.

2.5.1. Фундированные отношения. Мы пишем $a \prec_B b$ вместо $(a, b) \in B$, когда $B \subseteq A^2 = A \times A$ и B транзитивно. Критерий *фундированности* отношения B в A (*относительно* $\mathcal{U}$) дается через функционал $\exists\downarrow^A$ из $\mathcal{P}(A^2)$ в $\{0, 1\}$:

$$\exists\downarrow^A B = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists f \in (\mathbb{N} \to A)\,\forall n\,[fn' \prec_B fn], \\ 1 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Мы подчеркиваем, что это — критерий относительно $\mathcal{U}$, так как $\prec_B$ не обязано быть фундированным в абсолютном смысле, если $\exists\downarrow^A B = 1$: $(\mathbb{N} \to A)_{\mathcal{U}}$ может быть собственным подмножеством множества всех функций из $\mathbb{N}$ в A [1]). Если B действительно фундировано, мы можем применять *принцип трансфинитной индукции* к любому подмножеству X множества A (независимо от того, является ли X $\mathcal{U}$-множеством):

$$\forall x \in A\,[\forall y\,(y \prec_B x \Leftrightarrow y \in X) \Rightarrow x \in X] \Rightarrow \forall x \in A\,(x \in X). \tag{2}$$

2.5.2. Если A есть $\mathbb{N}$ (или любое другое вполне упорядоченное множество), мы можем определить оператор выбора L для введенного выше квантора $\exists\downarrow^{\mathbb{N}}$ в том смысле, что

$$\exists f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})\,\forall n\,[fn' \prec_B fn] \quad \text{и} \quad g = LB \Rightarrow \forall n\,[gn' \prec_B gn]. \tag{3}$$

Например, g можно описать как *самую левую ветвь через* B, и g может быть определена рекурсией в терминах $\exists\downarrow^{\mathbb{N}}$. Отметим, что проверка подмножеств $B \subseteq \mathbb{N}^2$ на фундированность слабее, чем использование $\exists^{(\mathbb{N}\to\mathbb{N})}$.

2.5.3. Ординалы. Их можно рассматривать как классы эквивалентности отношений вполне упорядочения. Однако для более

[1]) Например, в § 7 мы рассмотрим алгебраическую систему $\mathcal{U}$ конечного типа над $\mathbb{N}$, в которой $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})_{\mathcal{U}}$ состоит в точности из гиперарифметических функций. В этом случае имеются примеры рекурсивных B, для которых $\exists\downarrow^{\mathbb{N}} B = 1$ согласно (1), но $\prec_B$ не фундировано (по отношению ко всем функциям).

естественного рассмотрения условий замкнутости, соответствующих практике, лучше считать счетные ординалы основным типом Ω_1 и допустить соответствующие операторы рекурсии $R^{(\Omega_1)}$ конечного типа над Ω_1. Аналогично, несчетные ординалы рассматривались бы с использованием следующих основных типов Ω_2, Ω_3 и т. д. Ввиду ограниченности места мы не будем рассматривать это здесь.

2.5.4. Индуктивные определения. Допустим, что даны некоторые *условия замкнутости* на множество $X \subseteq A$, которые могут быть приведены к виду

$$\forall a \in A\,[C(a, X) \Rightarrow a \in X], \tag{1}$$

где C — отношение между A и $\mathscr{P}(A)$ такое, что

$$C(a, X) \,\&\, X \subseteq Y \Rightarrow C(a, Y). \tag{2}$$

Мы говорим, что множество S, *индуктивно порожденное* этими условиями замкнутости, — это наименьшее множество X, которое удовлетворяет (1). Известно, что S может быть теоретико-множественно определено двумя способами: «сверху», условием

$$a \in S \Leftrightarrow \forall X \subseteq A\,[\forall x\,(C(x, X) \Rightarrow x \in X) \Rightarrow a \in X] \tag{3}$$

или «снизу», с использованием ординалов α и аппроксимаций S_α:

$$S = S_{\alpha_0}, \quad \text{где} \quad S_{\alpha_0} = S_{\alpha_0+1} \quad \text{и} \quad a \in S_\alpha \Leftrightarrow C\Big(a, \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta\Big) \quad \text{для всех } \alpha. \tag{4}$$

Подход (3) неявно включает условие, что универсум $\mathscr{U}$ содержит $\exists^{(\mathscr{P}A)}$ или $\exists^{(A\to\mathbb{N})}$, в то время как подход (4) неявно включает некоторый вид ординальных условий замкнутости, вроде тех, которые только что намечены в 2.5.3. Индуктивные определения этого рода будут возникать в нескольких местах нашей работы, но опять-таки не будут полностью прослежены. Они подробно обсуждались в главе 7 «Теории рекурсии».

2.6. Сравнение универсумов. Между универсумами нет простого отношения включения. Если даны два универсума $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ над $\mathbb{N}$, мы можем сравнивать $(\mathbb{N}\to\mathbb{N})_{\mathscr{U}_1}$ с $(\mathbb{N}\to\mathbb{N})_{\mathscr{U}_2}$; например, первое из этих множеств может содержаться во втором. Но как только мы переходим к более высоким типам, например к $((\mathbb{N}\to\mathbb{N})\to\mathbb{N})_{\mathscr{U}_1}$, то сравнимость в обычном смысле теряется, так как области определения рассматриваемых функций различны. Однако имеется смысл, в котором мы можем говорить о *максимальных* и *минимальных* универсумах некоторого рода и который мы теперь хотим наметить.

Допустим, что даны символы основных типов $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ и указаны множества $A_{\gamma_i} = A_i$. Для простоты мы рассмотрим только символы, построенные посредством $\sigma, \tau \mapsto (\sigma\to\tau)$. *Максимальная алгебраическая система конечного типа* $\mathscr{U}_{\max}$ над $A_0, \ldots, A_n$ определяется соотношением

$$A_{(\sigma\to\tau)} = (\text{совокупность функций } f\colon A_\sigma \to A_\tau). \tag{1}$$

Предполагается, что это определение понимается в абсолютном теоретико-множественном смысле.

Мы говорим об алгебраических системах $\mathscr{U}_{\min}$, только имея в виду определенные условия замкнутости. Например, *минимальная декартово замкнутая алгебраическая система* над $A_0, \ldots, A_n$ должна быть алгебраической системой, где функции построены из всех K_{A_σ}, S_{A_σ, A_τ} только с помощью применения (функции к аргументу). Чтобы пояснить это точнее, мы рассмотрим термы s, t, ..., построенные с помощью применения из констант $K_{\sigma,\tau}$ и $S_{\sigma,\tau,\rho}$ типов $(\sigma\to(\tau\to\sigma))$ и $(\sigma\to(\tau\to\rho))\to\to[(\sigma\to\tau)\to(\sigma\to\rho)]$ соответственно. Эти термы затем *отождествляются* согласно правилам

$$Kst \equiv s, \qquad Sstu \equiv su(tu). \tag{2}$$

Объекты минимальной алгебраической системы — это в точности классы эквивалентности термов; применение определяется тривиальным образом. Аналогично можно изучать *минимальную* $\mathbb{N}$-замкнутую алгебраическую систему, рассматривая термы, построенные с использованием 0, $'$, K_σ, $S_{\sigma,\tau,\rho}$, R_σ, и распространяя определение отношения $\equiv$ в соответствии с (1) из 2.3.1. Разработка этого подхода приводит нас к вопросу о *нормализации* термов, который будет обсуждаться в 8.2.

Замечание. Очевидно, что минимальные алгебраические системы $\mathscr{U}$, порожденные счетным числом условий замкнутости над счетными основными множествами, будут счетными.

§ 3. Отношение условий замкнутости к математической практике

Этот параграф по необходимости короток и эскизен. Только подробная разработка придала бы точный смысл рассматриваемым утверждениям, а затем их проверка состояла бы в пошаговом сравнении с действительной математикой. Однако последующее должно дать хорошее представление о том виде соотношений, наличие которого утверждается. С целью иллюстрации мы сосредоточиваем внимание на анализе.

3.1. Релятивизация понятий к универсумам. Пусть $\mathscr{U}$ — $\widehat{\mathbb{N}}$-замкнутый универсум.

3.1.1. Чтобы релятивизировать к $\mathcal{U}$ теоретико-множественные понятия, мы просто говорим об $\mathcal{U}$-функциях и $\mathcal{U}$-множествах вместо произвольных функций и множеств. Это индуцирует релятивизацию всех дальнейших математических понятий, выраженных в терминах $\mathfrak{N}$, спаривающих функций, применения, множеств и принадлежности. В частности, бесконечные последовательности объектов $\langle a_n\rangle_n$ отождествляются с функциями, областью которых является $\mathbb{N}$. Классические понятия — это специальный случай, который получается, если взять в качестве $\mathcal{U}$ максимальную алгебраическую систему конечного типа $\mathcal{U}_{\max}$ над данными основными типами. Однако два понятия, которые эквивалентны в $\mathcal{U}_{\max}$, не обязательно эквивалентны в общем $\mathcal{U}$. Это иногда требует тщательного выбора между определениями одного и того же понятия для достижения наиболее гладкого развития.

3.1.2. Чтобы релятивизировать к $\mathcal{U}$ понятие вещественного числа, надо взять либо $\mathcal{U}$-множества, являющиеся дедекиндовыми сечениями рациональных чисел, либо $\mathcal{U}$-последовательности рациональных чисел, удовлетворяющие критерию сходимости Коши. В последнем случае вещественные числа обычным образом отождествляются с помощью отношения эквивалентности. Эти два подхода эквивалентны в $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутых $\mathcal{U}$: каждой последовательности Коши $\langle r_n\rangle_n$ соответствует сечение $\{r \mid \exists m \forall n \geqslant m\,(r \leqslant r_n)\}$. Арифметические операции легко распространяются на $\mathcal{U}$-вещественные числа при любом из определений. Отметим, что канторовское диагональное рассуждение показывает, что множество $\mathcal{U}$-вещественных чисел *несчетно* в $\mathcal{U}$, но, конечно, оно может быть счетно вне $\mathcal{U}$.

3.1.3. Понятие *метрического пространства* S в $\mathcal{U}$ определяется обычным образом, исходя из вещественных чисел в $\mathcal{U}$. S называется *сепарабельным* (*относительно* $\mathcal{U}$), если оно содержит плотную подпоследовательность $\langle d_n\rangle_n$ в $\mathcal{U}$. S называется полным (*относительно* $\mathcal{U}$), если любая последовательность Коши $\langle x_n\rangle_n$ элементов S, которая лежит в $\mathcal{U}$, сходится в S. Все пространства, изучаемые при нашем ограниченном подходе, предполагаются полными и сепарабельными. Они включают все пространства, представляющие интерес в классической математике. Базисные открытые множества в S — это сферы $S(x; r) = \{y \mid d_S(y, x) < r\}$, заданные центром x и радиусом r. Следующее определение открытого множества X наиболее удобно: такое множество определяется $\mathcal{U}$-последовательностью $\langle (x_n, r_n)\rangle_n$, где $X = \bigcup_n S(x_n, r_n)$. Отметим, что такое объединение находится в $\mathcal{U}$, когда $\mathcal{U}$ является $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутым. *Замкнутые множества* для пространства S — это дополнения $S - X$, где X — открытое множество. Если X замкнуто и $\langle x_n\rangle_n$ — сходящаяся последовательность (в $\mathcal{U}$) элементов множества X, то $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Однако если X находится в $\mathcal{U}$ и замкнуто в этом смысле относительно предельного перехода, то оно не обязательно является дополнением некоторого открытого в S множества. Ясно, как перейти к определению *непрерывной функции* $f\colon S_1 \to S_2$, где f находится в $\mathcal{U}$, а S_1 и S_2 — метрические пространства. Следуя дальше, мы можем релятивизировать понятия *нормированного векторного пространства*, *линейного функционала*, *линейного оператора* и т. д. Наиболее интересные функциональные пространства, нужные для иллюстрации этих понятий, требуют теории интегрирования, требующей в свою очередь дальнейших условий замкнутости, которые будут рассмотрены в 3.2—3.4. По той же причине придется отложить рассмотрение таких понятий, как *компактное множество*, *борелевское множество*, *измеримое множество*.

3.2. Математика в $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутых универсумах. Это совпадает с практикой предикативной математики. Мы предполагаем во всем п. 3.2, что $\mathcal{U}$ является $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутым.

3.2.1. Оказывается, что весь анализ, развитый до 1900 г., и существенная часть анализа двадцатого века может быть непосредственно релятивизирована к любому такому $\mathcal{U}$. Фактическое проведение этого принадлежит (по существу) Вейлю [1] для классической теории вещественных непрерывных функций и аналитических функций комплексной переменной и продолжено Кондо, Лоренценом и Крайзелем на теорию измеримых множеств и функций[1]). Последнее указание на содержание покрываемой таким образом части анализа можно найти у Бишопа [1], с. 9, где сказано, что каждая из найденных им конструктивных теорем φ является заменой для некоторой стандартной классической теоремы ψ, которая следует из φ плюс «ограниченный принцип всезнания». Последнее является просто нестандартной формулировкой замкнутости относительно $\exists^{\mathbb{N}}$.

3.2.2. Множества и последовательности. На первый взгляд кажется, что имеется серьезное препятствие на пути такой интенсивной разработки, так как $\mathcal{U}$-вещественные числа в общем случае *не* замкнуты относительно sup и inf ограниченных множеств вещественных чисел в $\mathcal{U}$. Пример такого универсума $\mathcal{U}$ будет приведен в 7.3. Легко видеть трудности, возникающие при трактовке вещественных чисел как нижних классов дедекиндовых сечений в $\mathbb{Q}$. Тогда множество A вещественных чисел — это подмножество $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ и его sup должен быть $Y = \bigcup A =$

[1]) Ср. Гжегорчик [1] и Лоренцен [2], где приводится современная переработка анализа Вейля. Относительно теории измеримости см. Лоренцен [1] и Крайзель [3].

$= \bigcup X[X \in A]$. Но тогда $r \in Y \Leftrightarrow \exists X[X \in A$ и $r \in X]$. Это определение требует квантора по $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, которого в общем случае нет в $\mathcal{U}$, так что Y не обязан быть $\mathcal{U}$-множеством (и, следовательно, не обязательно определяет $\mathcal{U}$-вещественное число). Аналогично, мы можем применять с той же целью квантор по $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, если вещественные числа рассматриваются как последовательности Коши.

3.2.3. Компактность, полнота и непрерывность. При рассмотрении $\sup\limits_n x_n$ и $\inf\limits_n x_n$ для ограниченных *последовательностей* вещественных чисел в $\mathcal{U}$ никаких проблем не возникает, так как они определимы через $\langle x_n \rangle_n$ с использованием $\exists^{\mathbb{N}}$. Вся математика, которая обобщается на $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутые универсумы, проходит, если в критических местах систематически иметь дело с последовательностями, а не с множествами. Например, мы доказываем *секвенциальную* компактность любого замкнутого промежутка $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ с помощью обычного рассуждения, использующего разбиение. Если дана $\langle x_n \rangle_n$ в $[a, b]$, то мы последовательно делим пополам, так что на каждой стадии $[a_k, b_k]$ — самый левый интервал, который содержит x_n для бесконечно многих n. Отметим, что это сочетает применение $\exists^{\mathbb{N}}$ и $\hat{R}$. Из этого результата, разумеется, следует *полнота* $\mathbb{R}$ в релятивизированном смысле. Обычное топологическое понятие *компактности* в терминах произвольных открытых покрытий вообще не используется при данных ограниченных условиях замкнутости.

Свойства *непрерывных функций вещественной переменной* получаются легко, так как достаточно рассматривать их значения для рационального аргумента. Следовательно, можно доказать, что $\sup\{fx \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, $\inf\{fx \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ существуют и что функция f принимает эти значения, если она непрерывна на $[a, b]$.

3.2.4. Следующий пример иллюстрирует упомянутое выше утверждение Бишопа. Одна из конструктивных форм *теоремы Брауэра о неподвижной точке* состоит в том, что если f — непрерывное отображение единичного круга D в себя, то для каждого ε существует x такое, что $d(fx, x) < \varepsilon$. Следовательно, существует такая последовательность $\langle x_n \rangle_n$ в D, что $d(fx_n, x_n) < 1/n$ для каждого n. Классическое заключение $\exists x \in D\ (fx = x)$ является следствием отсюда и из секвенциальной компактности. Однако можно следовать известным классическим доказательствам более непосредственно: мы допускаем $\forall x \in D\ (fx \neq x)$ и получаем противоречие (см. § 11 и п. 12.4 в главе 5).

3.2.5. Интегрирование и мера. *Интегрирование по Риману* можно, разумеется, рассмотреть секвенциально стандартным образом. Более общие теории интегрирования получаются в наши дни с помощью теории *меры*. Однако даже (*внешняя*) *мера Лебега* требует для своего определения полной операции inf на множествах: $\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \mid G$ открыто, $A \subseteq G\}$. Не возникает проблем при определении $\mu(G)$ для $G = \bigcup\limits_n (a_n, b_n)$; если G задано в виде объединения интервалов, то мы можем найти такое представление с дизъюнктными (a_n, b_n) и затем взять $\mu(G) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)$. Хотя воспользоваться внешней мерой не удается, трудностей в обращении с *измеримыми множествами* A не возникает: классически они обладают свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое G и замкнутое F такие, что $F \subseteq A \subseteq G$ и $\mu(G - F) < \varepsilon$. Под *аппроксимацией по мере* к A мы будем понимать последовательность $\langle (G_n, F_n) \rangle_n$ (в $\mathcal{U}$), где каждое G_n открыто, F_n замкнуто, $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ и $\mu(G_n - F_n) < 1/n$. Тогда мы можем взять $\mu(A) = \inf\limits_n \mu(G_n)$. Далее, мы имеем замкнутость измеримых множеств относительно счетного пересечения, когда последовательности $\langle A_m \rangle_m$ таких множеств заданы вместе с аппроксимациями по мере $\langle (G_{mn}, F_{mn}) \rangle_{m,n}$. Аналогично, мы можем рассматривать теорию *измеримых функций* в терминах аппроксимаций ступенчатыми функциями. Таким образом, в $\mathcal{U}$ доступны релятивизированные функциональные пространства L_p. Отсюда мы можем перейти к теории *банаховых пространств* и *гильбертовых пространств* с L_p в качестве основных примеров.

3.2.6. Релятивизированная лемма Кёнига. *Финитно ветвящееся, но бесконечное дерево X в $\mathcal{U}$ содержит бесконечную ветвь в $\mathcal{U}$.*

Это имеет место в любом $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутом универсуме $\mathcal{U}$ и может быть доказано с помощью обычного рассуждения. Если взять в качестве примера бесконечное двоичное рекурсивное дерево без рекурсивных ветвей, то можно видеть, что $\mathbb{N}$-замкнутость недостаточна для этого результата.

На секвенциальную компактность $\mathbb{R}$ можно смотреть как на следствие леммы Кёнига. Из нее следует также *компактность исчисления предикатов* первого порядка. Чтобы развивать теорию моделей первого порядка, нужно отношение выполнимости для произвольной алгебраической системы. Для любой *счетной* алгебраической системы оно обеспечивается сочетанием $\exists^{\mathbb{N}}$ и определения последовательности предикатов $\langle \mathrm{Sat}_n \rangle_n$ с помощью рекурсии R. Таким образом, *счетная теория моделей* релятивизируется к любому $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутому универсуму.

Другое достойное внимание следствие леммы Кёнига — *теорема Рамсея* (доказательство этой импликации см. в главе 3 «Теории множеств»).

3.2.7. Релятивизация к $\hat{\mathbb{N}}$-замкнутым алгебраическим системам. Более тщательное изучение этих рассуждений показывает, что для описанной выше релятивизации анализа нужно только использование элементарных операторов рекурсии $\hat{R}$ вместе с K, S и $\exists^{\mathbb{N}}$. Это зависит от систематической работы с последовательностями и счетными плотными подмножествами пространств. Однако возможность выполнить это ограничение не всегда непосредственно очевидна. Например, в *теореме Коши — Липшица* о существовании локальных решений дифференциальных уравнений первого порядка мы определяем последовательность f_n функций вещественной переменной методом последовательных приближений с использованием интегрирования. Стандартное доказательство проходит без изменения, если мы используем R, но если используется только $\hat{R}$, то нужна большая осторожность. С другой стороны, полные операторы R нужны, чтобы определить выполнимость в счетных алгебраических системах. Это будет следовать из результатов § 8.

3.3. Условия замкнутости, относящиеся к фундированности. Счетные ординалы и связанные с ними определения по рекурсии и доказательства по индукции нужны, если мы хотим говорить о *борелевских множествах* или *бэровских функциях* или о последовательности *производных множеств замкнутого множества*. Мы можем также упомянуть их использование в алгебре, например в теории структуры счетных *абелевых групп* и модулей. Чтобы естественным образом релятивизировать это, мы можем захотеть рассмотреть определенные условия замкнутости, использующие ординалы в качестве одного из основных типов. Другая возможность — рассматривать ординалы через отношения вполне упорядочения.

Некоторую форму критерия $\exists\downarrow^{\mathbb{N}}$ для фундированности можно использовать для определения *аналитических множеств в дескриптивной теории множеств. Теоретико-рекурсивные иерархии*, которые дают аналоги борелевской, аналитической и других классификаций, также сильно используют в своих определениях и развитии обобщенные индуктивные определения, вполне упорядочения, трансфинитную индукцию и рекурсию. Например, утверждение о сравнимости любых двух вполне упорядочений используется в доказательстве *теорем о редукции* и *униформизации* для Π^1_1-множеств.

3.4. $\exists^{\mathbb{R}}$-замкнутые алгебраические системы. Это просматривается уже в 3.2, где квантор по $\mathbb{R}$ входит в анализ существенным образом, а именно, в теории *меры*. Можно добавить еще определение и изучение *проективных множеств* в дескриптивной теории множеств.

Как показал Фридман [4], даже $\exists^{\mathbb{R}}$-замкнутость $\mathcal{U}$ недостаточна для обобщения *борелевской детерминированности* на такие $\mathcal{U}$. Мартин [1] показал, что непредикативные трансфинитные типы существенны для решения этой проблемы.

3.5. Аксиома выбора. Это — не принцип замкнутости того типа, который мы обсуждали в предшествующих пунктах, и она не следует из них. Несчетная аксиома выбора используется для получения таких математически значительных результатов, как *теорема Хана — Банаха*, теорема о *максимальных идеалах* в банаховых пространствах и т. д. Бишоп [1] нашел конструктивную замену для некоторых из них. Его работа подсказывает, что могут найтись варианты, которые можно доказать, используя приведенные выше условия замкнутости, и которые служат в конкретных приложениях. *Счетная аксиома выбора* истинна в некоторых естественных $\mathbb{N}$-замкнутых и $\exists^{\mathbb{N}}$-замкнутых алгебраических системах, как мы увидим в § 7. В дополнение к этому, мы обсудим в § 8 некоторые формальные системы конечного типа, которые показывают устранимость некоторых форм счетной AC.

§ 4. Теории конечного типа, основанные на условиях замкнутости

4.1. Синтаксис.

4.1.1. Типы. Для упрощения логической работы мы будем, начиная с этого места, использовать редукции, намеченные в 2.1.4 (1). *Типовые символы*, достаточные для всех наших целей, порождаются следующим образом:

(i) 0 есть типовой символ.

(ii) Если σ, τ — типовые символы, то $(\sigma \to \tau)$ — тоже типовой символ.

0 — типовой символ для $\mathbb{N}$. $(\sigma \to \tau)$ иногда обозначается через $(\sigma)\tau$. Типовой символ n определяется по индукции:

$$n+1 = (n \to 0). \tag{1}$$

Каждый из языков L, которые будут рассмотрены, имеет фиксированное множество типов Typ(L), содержащее 0 и замкнутое относительно *подтипов*. *Уровень* типа определяется соотношениями

$$\mathrm{lev}(0) = 0;\ \mathrm{lev}(\sigma \to \tau) = \max(\mathrm{lev}(\sigma)+1,\ \mathrm{lev}(\tau)). \tag{2}$$

Таким образом, $\mathrm{lev}(n) = n$. Мы пишем $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau)$ вместо $(\sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \tau)$, причем скобки группируются вправо. Заметим, что любой $\sigma \neq 0$ имеет вид $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to 0)$.

4.1.2. Термы. Каждый из языков L, которые будут рассмотрены, имеет бесконечно много переменных каждого из своих

типов. Они обозначаются через a, b, c, x, y, z. (Верхний типовой индекс a^τ используется при переменных, только если это необходимо во избежание двусмысленности.) Мы используем также k, n, m, p в качестве переменных типа 0 и f, g, h в качестве переменных типа $(\sigma \to \tau)$. Язык L задан определенным множеством символов констант различных типов, а также операторов и предикатов уровня 1, т. е. имеющих аргументы только типа 0. Среди них всегда имеются константа 0 типа 0, оператор Sc на типе 0 и предикат $=$ между объектами типа 0. Термы различных типов порождаются следующим образом:

(i) Каждая переменная и каждая константа языка L, имеющая тип τ, есть терм типа τ.

(ii) Если t — терм типа $(\sigma \to \tau)$ и s — терм типа σ, то ts — терм типа τ.

(iii) Если F есть n-местный оператор языка L, имеющий уровень 1, а t_i — терм типа 0 $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то $F(t_1, \ldots, t_n)$ — терм типа 0.

Мы пишем t' вместо $\mathrm{Sc}(t)$, $\boldsymbol{t}$ вместо $t_1, \ldots, t_n$ и $\boldsymbol{st}$ вместо $st_1 \ldots t_n$.

4.1.3. Формулы. *Атомарные формулы* — это все выражения вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — n-местный предикат языка L, имеющий уровень 1, а t_i — терм типа 0 $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В частности, $s=t$ для s, t типа 0 всегда есть формула. *Формулы* порождаются из атомарных посредством $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$, $\exists$, причем кванторы применяются к переменным любого типа, имеющегося в L. φ, ψ, θ, ..., $\varphi(a)$, $\varphi(a, b)$, ... пробегают формулы. Любая формула может содержать свободные переменные (*параметры*), отличные от указанных явно. Через $\mathrm{lev}(\varphi)$ мы обозначаем $\max(\mathrm{lev}(t))$ по всем t, входящим в φ. Если $\mathscr{F}$ — любое множество формул, то $n\text{-sec}(\mathscr{F})$ обозначает множество тех φ из $\mathscr{F}$, для которых $\mathrm{lev}(\varphi) \leqslant n$; оно называется *$n$-сечением* множества $\mathscr{F}$ или *фрагментом* $\mathscr{F}$ $(n+1)$-го порядка. Для каждого τ переменные X, Y, Z вводятся соглашением как переменные типа $(\tau \to 0)$ (который в этом случае может обозначаться через $[\tau]$), и мы пишем

$$a \in X \leftrightarrow Xa = 0. \tag{1}$$

4.1.4. Равенство для высших типов и экстенсиональность. Для любого типа τ мы *определяем* предикат $=_\tau$ равенства объектов типа τ индуктивно:

$$f =_{\sigma\to\tau} g \leftrightarrow \forall a^\sigma [fa =_\tau ga]. \tag{1}$$

Таким образом, для $\tau = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to 0)$ $f =_\tau g \leftrightarrow \forall a_1^{\sigma_1} \ldots a_n^{\sigma_n} [\boldsymbol{fa} = \boldsymbol{ga}]$. Чтобы эти отношения удовлетворяли законам

равенства, пришлось бы принять все формулы

$$\text{(Ext)} \qquad a =_\tau b \to fa =_\tau fb,$$

где f — объект типа $(\sigma \to \tau)$. Из (Ext) и законов равенства для типа 0 мы тогда можем вывести $[a =_\sigma b \wedge \varphi(a) \to \varphi(b)]$, т. е. объекты, равные по определению, неразличимы.

Альтернативный подход использовал бы $=_\tau$ в качестве исходного предиката для каждого типа τ и законы равенства для всех типов в качестве исходных аксиом. Тогда *экстенсиональность* выражается схемой

$$\forall x [fx =_\tau gx] \to f =_{(\sigma\to\tau)} g. \tag{2}$$

Приведенный выше принцип (Ext) дает тот же эффект при нашем подходе, использующем определимое равенство для высших типов. Для математических приложений, вероятно, более естественно брать равенство для всех типов в качестве исходного, хотя принимать экстенсиональность не обязательно. Наш подход имеет определенные технические преимущества, но мы должны показать, что (Ext) устранима. Это будет обсуждаться в 4.4.2.

Замечание. Мы будем опускать индекс в обозначении равенства для высших типов, когда это не будет приводить к двусмысленности.

4.1.5. Теоретико-числовые аксиомы. Каждая из рассматриваемых теорий **T** будет использовать *классическую логику* (если не оговорено противное) и будет содержать следующие *аксиомы для 0 и* Sc:

(i) $x' \neq 0$;

(ii) $x' = y' \to x = y$.

Пусть $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathbf{T})$ — язык теории **T**. Под *схемой индукции для* $\mathbb{N}$ в языке L мы подразумеваем совокупность всех формул вида

$$(\mathrm{Ind}^{\mathbb{N}}) \qquad \varphi(0) \wedge \forall n [\varphi(n) \to \varphi(n')] \to \forall n \varphi(n),$$

где φ принадлежит L. Если никакие ограничения не введены особо, то каждая **T** будет содержать *полную схему индукции* $(\mathrm{Ind}^{\mathbb{N}})$ в этом смысле. Единственный рассматриваемый случай, отличный от этого, который будет использоваться, только когда $1 \in \mathrm{Typ}(\mathrm{L})$, — это следующая (*ограниченная*) *аксиома индукции для* $\mathbb{N}$:

$$(\mathrm{I}^{\mathbb{N}}) \qquad 0 \in X \wedge \forall n [n \in X \to n' \in X] \to \forall n (n \in X).$$

4.1.6. Отношение между теориями. Мы полагаем $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_2$, когда $\mathrm{L}(\mathbf{T}_1) \subseteq \mathrm{L}(\mathbf{T}_2)$ и любая теорема теории $\mathbf{T}_1$ есть теорема

теории $\mathbf{T}_2$. Мы полагаем $\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{T}_2$, если $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_2$ и $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_1$ (так что $\mathrm{L}(\mathbf{T}_1) = \mathrm{L}(\mathbf{T}_2)$).

$\mathscr{F}$ пробегает множества формул в языке $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathbf{T})$. Если не оговорено противное, то подразумевается, что каждое $\mathscr{F}$ содержит все *базисные* формулы (атомарные формулы и их отрицания) и замкнуто относительно $\wedge$ и $\vee$ (по крайней мере с точностью до эквивалентности). Простейший пример такого $\mathscr{F}$, который мы будем рассматривать, — это множество QF всех *бескванторных формул* языка L.

Говорят, что $\mathbf{T}_2$ — *консервативное расширение* $\mathbf{T}_1$ *относительно* $\mathscr{F}$, если $\mathbf{T}_2 \supseteq \mathbf{T}_1$ и для $\varphi \in \mathscr{F}$ из $\mathbf{T}_2 \vdash \varphi$ следует $\mathbf{T}_1 \vdash \varphi$. Говорят, что $\mathbf{T}_2$ — *консервативное расширение* $\mathbf{T}_1$, если это верно для множества $\mathscr{F}$ всех формул языка $\mathrm{L}(\mathbf{T}_1)$.

4.1.7. Схемы. Пусть σ — один из типов в L и $P(a)$ — предикат от переменных a типа σ, который не является предикатным символом языка L. Мы обозначаем через $\mathrm{L}[P]$ язык, расширенный предикатом P, а через $\psi_S[P]$ — некоторое фиксированное предложение языка $\mathrm{L}[P]$. Для любой формулы $\varphi(a)$ языка L мы понимаем под $\psi_S[\varphi/P]$ результат подстановки $\varphi(t)$ вместо $P(t)$ для каждого вхождения вида $P(t)$ в $\psi_S[P]$. φ может содержать свободные переменные, отличные от a; они называются *параметрами* подстановки. Если таких переменных нет, то мы говорим, что $\psi_S[\varphi/P]$ *не имеет параметров*.

Более общее определение $\psi_S[\varphi/P]$ для ψ_S из $\mathrm{L}[P]$ и $\varphi(a)$ из L можно ввести для любого списка $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ типов языка L и предиката $P(\boldsymbol{a})$ от переменных $\boldsymbol{a} = \left(a_1^{\sigma_1}, \ldots, a_n^{\sigma_n}\right)$. Под схемой (S) в L мы понимаем множество всех формул (называемых *частными случаями этой схемы*), имеющих вид $\psi_S[\varphi/P]$ для φ из L и некоторой фиксированной $\psi_S[P]$. Под $(S)^-$ мы подразумеваем схему, использующую только частные случаи без параметров. С другой стороны, под $(\mathscr{F} - S)$ мы понимаем множество всех частных случаев вида $\psi_S[\varphi/P]$ для $\varphi \in \mathscr{F}$.

При еще более общем определении схемы можно характеризовать как частные случаи формулы $\psi_S[P_1, \ldots, P_k]$. На практике мы будем описывать схемы в терминах их частных случаев.

Иллюстрация. Схема индукции $(\mathrm{Ind}^{\mathrm{N}})$ в L определяется формулой $P(0) \wedge \forall n(P(n) \to P(n')) \to \forall n P(n)$. Тогда $(\mathrm{QF} - \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}})$ обозначает множество всех частных случаев $\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n')) \to \forall n \varphi(n)$ для бескванторных φ.

Имея дело с последовательностями $\boldsymbol{\sigma}$ длины $n = 1$, мы можем эквивалентным образом описать схемы через формулы $\psi_S(X)$, где X типа $(\sigma \to 0)$. Тогда $\psi_S[\varphi/X]$ — это результат подстановки $\varphi(t)$ вместо $t \in X$ во всех таких вхождениях. В этом смысле $(\mathrm{Ind}^{\mathrm{N}})$ состоит из всех частных случаев I^{N}.

4.2. Схемы свертывания и выбора.

4.2.1. Под схемой *аксиомы выбора* мы понимаем все формулы вида

$$(\mathrm{AC}) \qquad \forall a \exists b \varphi(a, b) \to \exists f \forall a \varphi(a, fa).$$

$(\mathrm{AC}_{\sigma,\tau})$ обозначает ограничение этой схемы переменными a^σ, b^τ.

$(\mathrm{AC}_{\sigma,-})$ обозначает $\bigcup_\tau (\mathrm{AC}_{\sigma,\tau})$.

4.2.2. (*Общая*) *схема аксиомы свертывания для множеств* задана формулой

$$(\mathrm{CA}) \qquad \exists X \forall a [a \in X \leftrightarrow \varphi(a)].$$

Если матрица φ в (AC) удовлетворяет условию единственности

$$\varphi(a, b) \wedge \varphi(a, c) \to b = c, \qquad (1)$$

мы имеем одну из форм *аксиомы свертывания для функций*. В частности, для любых $\mathscr{F}$ и $\psi(a)$, $\theta(a)$ из $\mathscr{F}$ возьмем

$$\varphi(a, n) \leftrightarrow \psi(a) \wedge n = 0 \vee \theta(a) \wedge n = 1.$$

Тогда

$$\forall a [\psi(a) \leftrightarrow \neg\theta(a)] \to \forall a \exists ! n \varphi(a, n),$$

и следующая *специальная схема аксиом свертывания для множеств* является следствием схемы $(\mathscr{F} - \mathrm{AC})$:

$$(\Delta_{\mathscr{F}} - \mathrm{CA}) \qquad \forall a [\psi(a) \leftrightarrow \neg\theta(a)] \to \exists X \forall a [a \in X \leftrightarrow \psi(a)]$$

для всех ψ, θ из $\mathscr{F}$.

Класс $\mathscr{F} = \mathrm{QF}$ бескванторных формул будет ниже давать простейшие интересные случаи релятивизированных схем. Отметим, что если $\overline{\mathscr{F}}$ обозначает множество формул φ, эквивалентных $\neg\psi$ для $\psi \in \mathscr{F}$, то $(\mathscr{F} - \mathrm{CA})$ и $(\overline{\mathscr{F}} - \mathrm{CA})$ эквивалентны. Некоторые случаи второго порядка, очевидным образом заслуживающие рассмотрения, получаются с использованием классов Π^0_∞, Σ^1_1, Π^1_1 и т. д. Они будут описаны в 5.1.

4.3. Определяющие аксиомы для констант конечного типа. Аксиомы для K, S и R^{N} для любой подходящей комбинации типов таковы:

$$(\mathrm{K}) \qquad Kab = a;$$

$$(\mathrm{S}) \qquad Sfga = fa(ga);$$

$$(\mathrm{R}) \qquad Rfa0 = a, \quad Rfan' = fn(Rfan).$$

Напомним, что равенство для высших типов считается определенным согласно 4.1.4. Как отмечено в 2.3.1, использование (K), (S) и (R) позволяет определить не только все примитивно

рекурсивные функции натуральных чисел, но и функции, не являющиеся примитивно рекурсивными.

Замечание. Использование λ-записи для функций оправдано в любой теории, содержащей аксиомы (K) и (S).

Другое следствие аксиом (K), (S), (R) — *определение разбором случаев*:

$$Dabn = \begin{cases} a, & \text{если } n = 0, \\ b, & \text{если } n \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

С другой стороны, мы можем вывести существование этих функционалов из подходящих простых частных случаев схемы (AC). Точнее, для K, S, D применяется (QF — AC), а для R-функционалов — схема ($\mathscr{F}$ — AC), где $\mathscr{F}$ состоит из экзистенциальных формул (конечного типа).

4.4. Арифметика конечных типов.

4.4.1. Язык, рассматриваемый здесь, использует все конечные типы, порожденные из 0, и все константы K, S, R в дополнение к 0 и Sc. Под *арифметикой* $\mathbf{Z}^\omega$ *конечных типов* мы понимаем систему со следующими аксиомами:

$\mathbf{Z}^\omega$ (i) аксиомы для $0'$;
(ii) полная схема индукции для $\mathbb{N}$;
(iii) аксиомы (K), (S);
(iv) аксиома (R).

Мы рассмотрим расширения системы $\mathbf{Z}^\omega$ разными аксиомами и схемами аксиом, например $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext})$, $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$. В 4.6 мы рассмотрим также подсистемы конечного типа системы $\mathbf{Z}^\omega$ с ограниченной индукцией или элементарными операторами рекурсии.

4.4.2. Устранение экстенсиональности. Мы проиллюстрируем это на примере $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext})$. То же рассуждение, принадлежащее Ганди (ср. Лукхардт [1]), работает для многих других теорий. Определим $E_\tau(a)$ и $a =_\tau b$ (где a, b — переменные типа τ) индуктивно:

(i) $E_0(n) \leftrightarrow (n = n)$, $(n =_0 m) \leftrightarrow (n = m)$;

(ii) $E_{\sigma\to\tau}(f) \leftrightarrow \forall a\,(E_\sigma(a) \to E_\tau(fa)) \wedge \forall ab\,[a =_\sigma b \to fa =_\tau fb]$,
$f =_{\sigma\to\tau} g \leftrightarrow \forall a\,(E_\sigma(a) \to fa =_\tau ga)$.

Теперь мы определим перевод формул φ языка L системы $\mathbf{Z}^\omega$ в новые формулы $\varphi^{(E)}$ того же языка, состоящий в замене каждого квантора $\forall a^\tau(\ldots)$ в φ на $\forall a^\tau[E_\tau(a) \to \ldots]$ и аналогично для $\exists a^\tau(\ldots)$. Отметим, что имеет место $\forall f^1 E_1(f)$ и, более общо, $\forall f^\tau E_\tau(f)$ для любого τ уровня 1. Таким образом, если все связанные переменные в φ имеют уровень $\leqslant 1$, то $\varphi^{(E)}$ эквивалентна φ.

Теорема. *Если* $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext}) \vdash \varphi$, *где* φ *замкнута, то* $\mathbf{Z}^\omega \vdash \varphi^{(E)}$. *Следовательно,* $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext})$ *консервативна над* $\mathbf{Z}^\omega$ *относительно формул логики второго порядка.*

Доказательство. В $\mathbf{Z}^\omega$ легко показать, что каждая из констант K, S, R типа τ удовлетворяет E_τ. Таким образом, внутренняя модель, определяемая предикатами $\langle E_\tau\rangle_\tau$, содержит все эти константы. Аксиомы $\mathbf{Z}^\omega$ релятивизируются очевидным образом. Для доказательства формулы $\varphi^{(E)}$, где φ — замыкание любого частного случая схемы (Ext) (4.1.4), отметим, что

$$E_\sigma(a) \wedge E_\sigma(b) \to [(a =_\sigma b)^{(E)} \leftrightarrow a =_\sigma b]. \quad \square$$

4.4.3. Схемы счетного и зависимого выбора над $\mathbf{Z}^\omega$, *Аксиома счетного выбора* (или счетная аксиома выбора) типа τ состоит из формул

$(\mathrm{AC}_{0,\tau})$ $\qquad \forall n \exists b \varphi(n, b) \to \exists f \forall n \varphi(n, fn).$

С ней связана схема *зависимых выборов* (или зависимого выбора)

(DC_τ) $\qquad \forall a \exists b \varphi(a, b) \to \forall a \exists f\,[f0 = a \wedge \forall n \varphi(fn, fn')],$

где a, b типа τ. Изящное обобщение обеих схем таково:

(GDC_τ) $\quad \forall n \forall a \exists b \varphi(n, a, b) \to \forall a \exists f\,[f0 = a \wedge \forall n \varphi(n, fn, fn')].$

Лемма. $(\mathscr{F} - \mathrm{GDC}_\tau)$ *следует из* $(\mathscr{F} - \mathrm{AC}_{\tau,\tau})$ *в* $\mathbf{Z}^\omega$.

Доказательство. $(\mathscr{F} - \mathrm{AC}_{\tau,\tau})$ влечет $\forall n \forall a \exists b \varphi(n, a, b) \to$ $\to \exists h \forall n \forall a \varphi(n, a, hna)$. Используем (R), чтобы получить f такую, что $f0 = a$, $fn' = hn(fn)$. $\square$

4.5. Системы с различными кванторными операторами. Эти системы подсказаны условиями замкнутости, которые были рассмотрены в 2.3.

4.5.1. Числовой кванторный оператор. Язык системы $\mathbf{Z}^\omega$ расширяется новым символом $\exists^{\mathbb{N}}$ типа 2 с аксиомами

$(\exists^{\mathbb{N}})$ (i) $\exists^{\mathbb{N}} X = 0 \vee \exists^{\mathbb{N}} X = 1$,
(ii) $\exists^{\mathbb{N}} X = 0 \leftrightarrow \exists n\,(n \in X)$,

где X типа 1. Получившаяся система обозначается через $\mathbf{Z}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}})$.

4.5.2. Кванторные операторы типа 1. Чтобы применять квантор *по* типу 1, т. е. $(0 \to 0)$, который интуитивно означает $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$, мы используем константу $\exists^{\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$ типа 3 с аксиомами

$(\exists^{\mathbb{N}\to\mathbb{N}})$ (i) $\exists^{\mathbb{N}\to\mathbb{N}} X = 0 \vee \exists^{\mathbb{N}\to\mathbb{N}} X = 1$,
(ii) $\exists^{\mathbb{N}\to\mathbb{N}} X = 0 \leftrightarrow \exists f\,(f \in X)$,

где X типа 2 и f типа 1.

Критерию на убывающие последовательности, обсуждавшемуся в 2.5, соответствует у нас оператор $\exists\downarrow^{\mathbf{N}}$, который также применяется к объектам типа 1, но более специальным образом. А именно, $\exists\downarrow^{\mathbf{N}}$ — константа типа 2 с аксиомами

$(\exists\downarrow^{\mathbf{N}})$ (i) $\exists\downarrow^{\mathbf{N}}X=0\vee\exists\downarrow^{\mathbf{N}}X=1$,

(ii) $\exists\downarrow^{\mathbf{N}}X=0\to\exists f\forall n\,\langle fn,\ fn'\rangle\in X$,

где X типа 1 и $\langle m,p\rangle$ — примитивно рекурсивная спаривающая функция. Полученные системы обозначаются соответственно через $\mathbf{Z}^\omega+(\exists^{\mathbf{N}\to\mathbf{N}})$, $\mathbf{Z}^\omega+(\exists\downarrow^{\mathbf{N}})$.

4.6. Системы с ограниченной индукцией или рекурсией.

4.6.1. Ограниченная индукция. Для любой теории $\mathbf{T}$, которая уже рассмотрена или будет рассмотрена, ограниченная-$\mathbf{T}$ обозначает результат замены схемы $(\mathrm{Ind}^{\mathbf{N}})$ на аксиому индукции $(\mathrm{I}^{\mathbf{N}})$ из 4.1.5. Если $\mathbf{T}$ содержит полную (CA), то $\mathbf{T}\equiv$ ограниченная-$\mathbf{T}$. Однако в общем случае ограниченная-$\mathbf{T}$ гораздо слабее, чем $\mathbf{T}$. Ряд примеров, иллюстрирующих эту ситуацию, появится в различных местах ниже.

4.6.2. Элементарная рекурсия. Элементарный оператор рекурсии в смысле 2.3 (введенный Клини) задан константой $\hat{R}$ с аксиомами

$(\hat{\mathrm{R}})$ (i) $\hat{R}fa0\boldsymbol{b}=a\boldsymbol{b}$,

(ii) $\hat{R}fan'\boldsymbol{b}=fn\,(\hat{R}fan\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}$

для всех подходящих комбинаций типов, для которых $a\boldsymbol{b}$ имеет тип 0. Таким образом, в аксиомах $(\hat{\mathrm{R}})$ знак $=$ есть $=_0$. (Если список $\boldsymbol{b}=b_1^{\sigma_1},\ \ldots,\ b_k^{\sigma_k}$ пуст, то $\boldsymbol{a}$ должна быть типа 0; в противном случае $\boldsymbol{a}$ имеет тип $(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_k\to 0)$.) Мы обозначаем через $\hat{\mathbf{Z}}^\omega$ результат замены (R) на $(\hat{\mathrm{R}})$ в $\mathbf{Z}^\omega$. Как мы заметили в 2.3, примитивно рекурсивные функции — это в точности функции, определяемые замкнутыми термами типа 1 из $\hat{\mathbf{Z}}^\omega$.

Мы, конечно, можем перейти к рассмотрению подсистемы *ограниченная*-$\hat{\mathbf{Z}}^\omega$. При формализации, согласно указаниям из 3.2.7, той части математики, которая обобщается на все $\hat{\mathbb{N}}$- и $\exists^{\mathbf{N}}$-замкнутые алгебраические системы, можно заметить, что индукция применяется только к арифметическим свойствам, т. е. к таким, где все кванторы пробегают $\mathbb{N}$. Иными словами, эта часть математики формализуется в *ограниченной*-$\hat{\mathbf{Z}}^\omega+(\exists^{\mathbf{N}})$. Естественно, что проверка этого утверждения требует подробного рассмотрения используемых математических рассуждений.

Замечание. Приведенное в 4.4.3 доказательство того, что $(\mathscr{F}-\mathrm{AC}_{\tau,\tau})$ влечет $(\mathscr{F}-\mathrm{DC}_\tau)$ в $\mathbf{Z}^\omega$, работает в $\hat{\mathbf{Z}}^\omega$ только для $\tau=0$, а в этом случае $(\mathscr{F}-\mathrm{Ind}^{\mathbf{N}})$ достаточна для доказательства.

§ 5. Некоторые схемы свертывания и выбора для логики второго порядка

5.1. Специальные классы формул логики второго порядка. Рассмотрим язык L, единственными типами которого являются 0 и 1. Возьмем все примитивно рекурсивные функции (или любое подмножество, исходя из которого все они могут быть определены арифметически, например $+$, $\cdot$) в качестве операторов уровня 1 языка L. Говорят, что формула *арифметическая*, если она не содержит связанных переменных типа 1, хотя она может содержать свободные переменные этого типа. Класс всех таких формул обозначается через Π^0_∞. Подкласс Π^0_1-*формул* состоит из формул вида $\forall n\psi$, где ψ бесквантерная. Согласно обычной схеме классификации аналитических предикатов говорят, что φ находится в Π^1_1-*форме*, если $\varphi=\forall f\psi$, где ψ арифметическая, и в Σ^1_1-*форме*, если $\varphi=\exists f\psi$ с арифметической ψ. Аналогично, Π^1_2-*формулы* (Σ^1_2-*формулы*) имеют вид $\forall f\exists g\psi$ ($\exists f\forall g\psi$) с арифметической ψ. Мы используем обозначения Π^0_1, Π^0_∞, $1\Pi^1_1$, Σ^1_1 и т. д. также для соответствующих классов формул.

Под Δ^1_1 — CA мы понимаем $(\Delta_{\mathscr{F}}-\mathrm{CA})$ для $\mathscr{F}=\Sigma^1_1$; аналогично для $(\Delta^1_2-\mathrm{CA})$ и $\mathscr{F}=\Sigma^1_2$. С другой стороны, классы Δ^1_1, Δ^1_2 и т. д. осмыслены только относительно данной теории $\mathbf{T}$: φ принадлежит классу Δ^1_1 (относительно $\mathbf{T}$), если имеются $\psi\in\Sigma^1_1$, $\theta\in\Pi^1_1$ такие, что в $\mathbf{T}$ доказуемо $(\varphi\leftrightarrow\psi)\wedge(\psi\leftrightarrow\theta)$.

5.2. Подтеории второго порядка теории $\hat{\mathbf{Z}}^\omega$. Они формулируются в языке, использующем только типы 0, 1, но содержащем константы для примитивно рекурсивных функций. Мы видели, что его можно считать частью языка $\hat{\mathbf{Z}}^\omega$. Под *арифметикой второго порядка* мы понимаем систему $\mathbf{Z}^2$ в этом языке, содержащую (i) аксиомы для 0, 1 и всех примитивно рекурсивных функций и (ii) полную схему индукции для $\mathbb{N}$. И снова в *ограниченной*-$\mathbf{Z}^2$ индукция принимается только в ограниченной форме. Каждая из рассматриваемых ниже систем второго порядка содержит $\mathbf{Z}^2$ или ограниченную-$\mathbf{Z}^2$. Буква $\mathbf{Z}$ обозначает обычную систему арифметики первого порядка.

5.3. Схемы свертывания и выбора для логики второго порядка. Пусть $\langle\,,\,\rangle$ — примитивно рекурсивная спаривающая операция из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. Для любых f, n положим $(f)_n(m)=f\langle n,m\rangle$, т. е. $(f)_n=\lambda m f\langle n,m\rangle$. Это позволяет нам следую-

щим образом записать варианты схем $AC_{0,1}$, DC_1 и GDC_1 для логики второго порядка:

(AC) $\quad \forall n \exists g \varphi(n, g) \to \exists f \forall n \varphi(n, (f)_n)$,

(DC) $\quad \forall g \exists h \varphi(g, h) \to \forall g \exists f [(f)_0 = g \wedge \forall n \varphi((f)_n, (f)_{n'})]$,

(GDC) $\quad \forall n \forall g \exists h \varphi(n, g, h) \to \forall g \exists f [(f)_0 = g \wedge \forall n \varphi(n, (f)_n, (f)_{n'})]$.

(Отметим, что мы опустили нижние индексы в обозначениях этих схем.)

Каждая система, получаемая добавлением некоторой схемы (S) к $\mathbf{Z}^2$, будет называться просто (S), например $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ обозначает $\mathbf{Z}^2 + (\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$. Аналогично, *ограниченная*-$(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ обозначает *ограниченную*-$\mathbf{Z}^2 + (\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$.

5.4. Подсистемы второго порядка некоторых теорий конечного типа.

5.4.1. Арифметическое свертывание в $\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}})$. Заметим, что эта система выражает условие замкнутости относительно $\exists^{\mathbb{N}}$ для алгебраических систем конечного типа.

Все арифметические формулы эквивалентны формулам, построенным с помощью $\vee$, $\neg$, $\exists n$. Это построение можно отразить с помощью термов, причем примитивно рекурсивные функции обеспечат атомарные формулы и пропозициональные связки, а константа $\exists^{\mathbb{N}}$ — квантор по натуральным числам. Иными словами, мы получаем следующее утверждение.

Лемма. *Для любой арифметической формулы* φ *имеется терм* t *с теми же самыми свободными переменными такой, что* $(\varphi \leftrightarrow t = 0)$ *выводимо в ограниченной*-$\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}})$.

Следствие. (i) $\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}}) \supseteq (\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$.

(ii) То же верно для соответствующих ограниченных систем.

5.4.2. Добавление выбора.

Теорема. (i) $\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}}) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \supseteq (\Pi^0_\infty - \mathrm{AC})$.

(ii) $\mathbf{Z}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}}) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \supseteq (\Pi^0_\infty - \mathrm{DC})$.

(iii) *То же верно для соответствующих ограниченных теорий.*

Доказательство. (i) очевидно, в силу леммы из предыдущего подпункта. Для установления (ii) мы используем, кроме того, (доказательство и) результат леммы 4.4.3. □

5.4.3. Легкие сравнения систем второго порядка.

Теорема. (i) $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA}) \equiv (\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$.

(ii) $(\Pi^0_1 - \mathrm{AC}) \equiv (\Pi^0_\infty - \mathrm{AC}) \equiv (\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})$.

(iii) $(\Pi^0_1 - \mathrm{DC}) \equiv (\Pi^0_\infty - \mathrm{DC}) \equiv (\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$.

(iv) $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) \subsetneq (\Delta^1_1 - \mathrm{CA}) \subseteq (\Sigma^1_1 - \mathrm{AC}) \subsetneq (\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$.

То же верно для соответствующих ограниченных теорий.

Доказательство. Мы упомянем только три обстоятельства, используемые здесь. Во-первых, для каждой арифметической формулы φ можно показать (по индукции), что φ определяет множество в $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})$: построение φ отражается в операциях над множествами $-X$, $X \cup Y$, $\exists^{\mathbb{N}} X$. Во-вторых, если $\psi = \exists h \varphi(g, h)$, где φ арифметическая, то $\exists g \psi$ эквивалентна формуле $\exists g \varphi((g_0, (g)_1)$. Следовательно, принципы выбора для Σ^1_1-матриц сводятся к принципам для Π^0_∞- и, следовательно, для Π^0_1-матриц.

Замечания. (i) $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$ *имеет конечную аксиоматизацию над* $\mathbf{Z}^2$. Идея содержится в первой части только что намеченного доказательства. Она аналогична конечной аксиоматизации теории классов и множеств Бернайса — Гёделя (причем тип 0 соответствует множествам и тип 1 — классам).

(ii) Для доказательства существенно, что рассматриваемые формулы могут содержать параметры. Иногда бывает разумно рассматривать различные схемы без параметров. Мы увидим это в § 7.

Следующий результат обобщает (iv).

Теорема. *Если* $\mathscr{F} \supseteq \Pi^0_\infty$, *то* $(\Delta_{\mathscr{F}} - \mathrm{CA}) \subseteq (\mathscr{F} - \mathrm{AC}) \subseteq (\mathscr{F} - \mathrm{DC})$.

5.4.4. Эффект выбора с $(\exists \downarrow^{\mathbb{N}})$.

Теорема. (i) $\mathbf{Z}^\omega + (\exists \downarrow^{\mathbb{N}}) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ *доказывает* $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$.

(ii) $(\Delta^1_2 - \mathrm{CA}) \equiv (\Sigma^1_2 - \mathrm{AC}) \equiv (\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$.

Доказательство. (i) Сначала заметим, что $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC}) \equiv (\Pi^1_1 - \mathrm{DC})$. Последняя система сводится к $(\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ в $\mathbf{Z}^\omega + (\exists \downarrow^{\mathbb{N}})$ с помощью уже использованных рассуждений.

(ii) $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC}) \subseteq (\Delta^1_2 - \mathrm{CA})$ устанавливается формализацией теоремы Кондо — Аддисона, согласно которой любое Π^1_1-отношение между функциями типа 1 может быть униформизовано. Стандартные доказательства (например, Роджерс [1]) используют абстрактные счетные ординалы. Однако последние можно рассматривать с помощью вполне упорядочений в $\mathbb{N}$, если мы имеем сравнимость вполне упорядочений. Доказательство будет закончено в § 6.

Замечание. Аддисон и Клини заметили, что Δ^1_2-предикаты от натуральных чисел замкнуты относительно $(\exists \downarrow^{\mathbb{N}})$. Их рассуждения легко формализовать. Кажется, что Δ^1_2 — синтаксически наиболее простой класс с этим свойством.

5.5. Одна ограниченная система, консервативная над Z.

5.5.1. Следующее утверждение показывает, насколько слабее может стать система, когда индукция для $\mathbb{N}$ ограничивается до аксиомы $(\mathbf{I}^{\mathbb{N}})$. Этот результат будет усилен в 8.7.

Теорема. (i). *Ограниченная система* $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$ — *консервативное расширение* $\mathbf{Z}$.

(ii) *Ограниченная система* $\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}})$ — *консервативное расширение ограниченной системы* $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$.

Доказательство. Чтобы установить (i), покажем, что любая модель $\mathfrak{M}$ системы $\mathbf{Z}$ может быть преобразована в модель $\mathfrak{M}^2$ ограниченной системы $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$. Возьмем в качестве функций в новой модели $\mathfrak{M}^2$ все $f\colon M \to M$, определимые в $\mathfrak{M}$ арифметической формулой φ с параметрами из $\mathfrak{M}$. Тогда аксиома индукции $0 \in X \wedge \forall x\,[x \in X \to x' \in X] \to \forall x\,[x \in X]$ сводится для каждого X к частному случаю элементарной схемы индукции, которая истинна в $\mathfrak{M}$ по предположению.

(ii) следует из (еще более сильной) второй теоремы в 8.7.

5.5.2. В этих случаях ограничение действительно является ослаблением.

Теорема. *Непротиворечивость* $\mathbf{Z}$ *доказуема в* $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$.

Доказательство. Имеется формула $\psi(n, X)$, которая выражает, что X есть множество Tr_n всех истинных предложений логики первого порядка с логической сложностью $\leqslant n$. Применяя полную индукцию для $\mathbb{N}$, докажем $\forall n \exists X \psi(n, X)$. Шаг $\forall X \exists Y [\psi(n, X) \to \psi(n', Y)]$ элементарен из-за способа, с помощью которого Tr_{n+1} арифметически определяется из Tr_n. Затем мы применяем индукцию еще раз, чтобы доказать, что все, доказуемое в $\mathbf{Z}$, истинно.

§ 6. Трансфинитная индукция, рекурсия и итерированные принципы

Рассматриваемые здесь понятия можно применять к отношениям между объектами типа τ для любого τ. Однако бóльшая часть работы в нашей области относится к типу 0. Например, общая программа состоит в том, чтобы охарактеризовать арифметическую часть или 1-сечение некоторой теории конечного типа в терминах схем индукции и рекурсии относительно конкретных рекурсивных вполне упорядочений натуральных чисел.

6.1. Фундированность и индукция.

6.1.1. Фундированность упорядочений. Любое $X \subseteq \mathbb{N}$ можно рассматривать как бинарное отношение, состоящее из пар (k, m), для которых $\langle k, m\rangle \in X$. Мы пишем $k <_X m$ вместо $\langle k, m\rangle \in X$. Обратно, любое бинарное отношение $\prec$ определяет множество X всех $\langle k, m\rangle$, для которых $k \prec m$. Мы будем рассматривать отношения, заданные формулами ψ:

$$(k \prec m) = \psi(k, m), \tag{1}$$

где ψ может содержать параметры. Тогда *фундированность отношения* $\prec$ выражается формулой

$$\mathrm{WF}(\prec) = \neg\exists f \forall n \psi(fn', fn). \tag{2}$$

В частности, в $\mathbf{Z}^\omega + (\exists\downarrow^{\mathbb{N}})$ свойство $\mathrm{WF}(\prec_X)$ эквивалентно $\exists\downarrow^{\mathbb{N}} X = 1$. Очевидно, что $\mathrm{WF}(\prec)$ влечет иррефлексивность $\prec$. Мы не предполагаем, что $\prec$ транзитивно или связно. Наконец, вместо $\mathrm{WF}(\prec)$ мы иногда пишем $\mathrm{WF}_\prec$, если $(k \prec m)$ задано формулой (1) без параметров.

6.1.2. Индукция по упорядочениям. Как мы знаем из теоретико-множественных соображений, фундированность влечет принципы трансфинитной индукции и рекурсии. Последний будет рассмотрен в 6.2.

Для упорядочения $\prec$ *схема* $\mathrm{TI}(\prec)$ *трансфинитной индукции по* $\prec$ (в любом данном языке) состоит из всех формул вида

$$\mathrm{TI}(\prec, \varphi) \qquad \forall m\,[\forall k \prec m\, \varphi(k) \to \varphi(m)] \to \forall m \varphi(m),$$

где $\forall k \prec m\, \varphi(k)$ является сокращением для $\forall k\,(k \prec m \to \varphi(k))$. Посылка схемы $\mathrm{TI}(\prec, \varphi)$ иногда называется *прогрессивностью* φ.

Когда $\prec$ есть $\prec_X$, мы пишем $\mathrm{TI}(X, \varphi)$ вместо $\mathrm{TI}(\prec, \varphi)$. Когда $\prec$ задано формулой без параметров, мы пишем $\mathrm{TI}_\prec(\varphi)$. Запись $\mathrm{TI}(\prec, Y)$ обозначает частный случай схемы, в котором используется формула $\varphi(k) = (k \in Y)$. Таким образом, мы можем писать также $\mathrm{TI}(X, Y)$ или $\mathrm{TI}_\prec(Y)$ в случае, когда $\prec$ есть $\prec_X$ или определено без параметров. Наконец, как и в других наших схемах, мы можем указывать ограничение классом $\mathscr{F}$. Схема $(\mathscr{F} - \mathrm{TI}(\prec))$ состоит из всех $\mathrm{TI}(\prec, \varphi)$ для φ из $\mathscr{F}$.

6.1.3. Индукция по деревьям. Возьмем примитивно рекурсивное представление $\langle k_0, \ldots, k_{n-1}\rangle$ конечных последовательностей натуральными числами; s, t будут пробегать такие последовательности натуральных чисел. Если $s = \langle k_0, \ldots, k_{n-1}\rangle$, то положим $\mathrm{lh}(s) = n$, $s_i = k_i$ и $s \restriction m = \langle k_0, \ldots, k_{m-1}\rangle$ для $m \leqslant n$. Мы пишем $t \subseteq s$, если $t = s \restriction m$ для некоторого $m \leqslant \mathrm{lh}(s)$, и $t \subset s$ вместо $t \subseteq s \wedge t \neq s$. Наконец, $s * \langle l\rangle = \langle k_0, \ldots, k_{n-1}, l\rangle$.

Мы говорим, что X есть *дерево*, и пишем $\mathrm{Tree}(X)$, если $\forall s t\,[s \in X \wedge t \subseteq s \to t \in X]$. С каждым деревом ассоциировано отношение $s <_X t$, определенное условием $s \in X \wedge t \subset s$. (Это отношение не следует путать с $<_X$, определенным в 6.1.1; эти случаи различаются видом используемых переменных.) Для f типа 1 положим $\bar{f}(n) = \langle f(0), \ldots, f(n-1)\rangle$. Тогда при слабых предположениях $\mathrm{Tree}(X)$ влечет

$$\mathrm{WF}(<_X) \leftrightarrow \neg\exists f \forall n\,[\bar{f}(n) \in X]. \tag{1}$$

При этих предположениях $\mathrm{TI}(\prec_X, \varphi)$ переводится в формулу

$$\forall s\,[s \notin X \to \varphi(s)] \wedge \forall s\,[\forall k \varphi(s*\langle k\rangle) \to \varphi(s)] \to \forall s \varphi(s). \qquad (2)$$

6.1.4. Бар-индукция (фундированность влечет индукцию). Для любой формулы $\prec$ схема $\mathrm{BI}(\prec)$ *бар-индукции* по $\prec$ состоит из всех частных случаев схемы

$$\mathrm{BI}(\prec, \varphi) \qquad \mathrm{WF}(\prec) \to \mathrm{TI}(\prec, \varphi).$$

Эта терминология была введена Брауэром для принципов, применяемых к деревьям. С использованием формул (1) и (2) из 6.1.3 эта схема переводится в формулировку бар-индукции, очень близкую к той, которая используется в интуиционистской литературе (ср. § 10 главы 7).

Как и в случае TI, мы используем обозначения $\mathrm{BI}(X, \varphi)$, $\mathrm{BI}(\prec, Y)$, $(\mathscr{F} - \mathrm{BI}_\prec)$ и т. д.

6.1.5. Некоторые доказуемые случаи бар-индукции.

Теорема. (i) $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) \vdash [\mathrm{WF}(X) \leftrightarrow \forall Y \mathrm{TI}(X, Y)]$.

(ii) *Если* $\mathscr{F} \supseteq \Pi^0_\infty$, *то* $(\mathscr{F} - \mathrm{CA}) \vdash \mathrm{BI}(\prec_X, \varphi)$ *для каждой* φ *из* $\mathscr{F}$.

Доказательство. (i) Допустим, что $\mathrm{WF}(X)$, т. е. в $\prec_X$ нет убывающих последовательностей. Для Y, удовлетворяющего $\forall m[\forall k \prec m (k \in Y) \to m \in Y]$, нужно показать, что верно $\forall m (m \in Y)$. Если это не так, то существует $m_0 \notin Y$. Далее, с каждым $m \notin Y$ мы можем связать $h(m) \prec m$ такое, что $h(m) \notin Y$. В силу $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$ существует f такая, что $f0 = m_0$ и $\forall n f n' = h(fn)$, что противоречит $\mathrm{WF}(X)$. Обратно, если дано $\forall Y \mathrm{TI}(X, Y)$ и f — произвольная функция, то для доказательства $\neg\forall n f(n') \prec_X f(n)$ следует использовать Y, определенный соотношением

$$m \in Y \leftrightarrow \neg\exists n_0 (f n_0 \prec_X m \wedge \forall n \geqslant n_0 f(n') \prec_X f(n)).$$

(ii) непосредственно следует из (i). □

Конечно, в предположении $(\mathscr{F} - \mathrm{CA})$, мы можем также записать (ii) с $\mathrm{BI}(\prec, \varphi)$ для любого отношения $\prec$ из $\mathscr{F}$.

Хотя $(\mathscr{F} - \mathrm{CA})$ формально требуется для установления $(\mathscr{F} - \mathrm{BI}_\prec)$, второй из этих принципов в общем воспринимается как более элементарный или базисный, чем первый (особенно для известных упорядочений $\prec$).

6.1.6. Соотношение с Π^1_1-свертыванием. Методами теории рекурсии любой Π^1_1-предикат $\varphi(m, g)$ от чисел и функций можно привести к виду $\forall f \exists n P(m, \bar{f}(n), \bar{g}(n))$, где P примитивно рекурсивен [1]). Это рассуждение использует только $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$. Эту нормальную форму можно воспринимать как утверждение о

[1]) Все такие результаты из теории рекурсий читатель найдет в книге Роджерса [1].

фундированности дерева, состоящего из последовательностей s таких, что $\forall k \leqslant \mathrm{lh}(s) \neg P(m, s \restriction k, \bar{g}(k))$. Таким образом, мы имеем следующее утверждение.

Лемма. $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA}) \subseteq \hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^{\mathbb{N}}_\downarrow)$.

Мы интересуемся теперь сравнением двух систем второго порядка: $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) + (\mathrm{BI})$ и $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$. Это будет сравнением по силе, ибо, как будет видно, ни одна из них не содержится в другой. В силу 6.1.5 мы знаем только, что $(\Pi^1_1 - \mathrm{BI})$ и $(\Sigma^1_1 - \mathrm{BI})$ содержатся в $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$. Следующее обстоятельство было замечено Крайзелем [1]).

Теорема. $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$ *доказывает существование* ω*-модели для* $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) + (\mathrm{BI}_\prec)$ (*где* $\prec$ *примитивно рекурсивно*).

Доказательство. Идея состоит в формализации ω-модели, определенной как (перечисленная) совокупность M_2 всех функций, арифметических в множестве $\mathcal{O}$ конструктивных ординальных обозначений. По теореме Клини о базисе (выбор самой левой ветви) для примитивно рекурсивных P

$$(\exists f \in M_2) \forall n [\bar{f}(n) \in P] \leftrightarrow \exists f \forall n [\bar{f}(n) \in P].$$

Существование M_2 и свойства отношения выполнимости для формул второго порядка в M_2 доказуемы в $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$. Тогда для любой формулы φ второго порядка с параметрами в M_2 существование множества, определяемого формулой φ относительно M_2, доказывается в $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$. Поэтому $\mathrm{BI}(P, \varphi)$ имеет место согласно результату предыдущего подпункта. □

С использованием той же идеи, релятивизации и итерации можно построить теоретико-рекурсивную ω-модель M_2 системы $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) + (\mathrm{BI})$. А именно, возьмем M_2, состоящую из всех f, рекурсивных в некотором $\mathcal{O}_n$, где $\mathcal{O}_0 = \mathbb{N}$ и $\mathcal{O}_{n+1} = \mathcal{O}^{\mathcal{O}_n}$. Хотя утверждение о существовании $\mathcal{O}_n$ (для всех n) может быть доказано в $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$ и, следовательно, M_2 может быть *определено* в этой системе, тем не менее определение истинности для M_2 нельзя определить в ней. Это делает интересным следующий результат из статьи Фридмана [2], куда мы и отсылаем читателя за доказательством.

Теорема. $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$ *доказывает существование* ω*-модели для* $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) + (\mathrm{BI})$; *она консервативна для* Π^1_2*-предложений.*

[1]) Этот результат, как и другие приводимые ниже результаты, приписываемые Крайзелю без ссылок на литературу, был впервые изложен в 1963 г. в «Докладах стенфордского семинара по основаниям анализа», который был разослан, но не опубликован. Многие из них упомянуты в работе Крайзеля [4].

6.2. Трансфинитная рекурсия. Одна из форм *трансфинитной рекурсии* по X для дерева $X \subseteq \mathbb{N}$ такова: $fs = gs$ для $s \notin X$; $fs = hs(\lambda n f(s * \langle n \rangle))$ для $s \in X$, где g, h — данные функции. Однако в этом определении h должна иметь тип 2. Ввиду этого трансфинитную рекурсию более естественно рассматривать в теории конечного типа. Для простоты мы сформулируем здесь только некоторые виды рекурсии, укладывающиеся в логику второго порядка. Если дано дерево X, определим функцию $(f \restriction_X s)$ типа 1 соотношением

$$(f \restriction_X s)t = \begin{cases} ft, & \text{если } t \subset s \text{ и } s \in X, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Для отношения $<_X$ положим

$$(f \restriction_{<_X n}) m = \begin{cases} fm, & \text{если } m <_X n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Мы будем писать $\mathrm{TR}(X, \varphi, f)$ вместо $\forall s \varphi(s, f \restriction_X s, fs)$, когда имеет место $\mathrm{Tree}(X)$, и $\mathrm{TR}(<_X, \varphi, f)$ вместо $\forall n \varphi(n, f \restriction_X n, fn)$ в связи с отношениями. Эта запись хороша для случая, когда $\varphi(n, g, m)$ определяет функционал $m = hng$, т.е. когда $\forall ng \exists! m \varphi(n, g, m)$.

Теорема. *В* $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$ *схема* $\Sigma^1_1 - \mathrm{TI}(X)$ *влечет* $\forall n \forall g \exists! m \varphi(n, g, m) \to \exists! f \mathrm{TR}(X, \varphi, f)$, *если* φ *принадлежит* Σ^1_1.

Доказательство — путем внимательного рассмотрения стандартного рассуждения, позволяющего вывести трансфинитную рекурсию из трансфинитной индукции. □

Пусть CWO (сравнимость вполне упорядочений) — предложение, выражающее, что если $<_X$ и $<_Y$ — два отношения вполне упорядочения, то $<_X$ изоморфно начальному сегменту упорядочения $<_Y$ или наоборот.

Следствие. $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA}) + (\Sigma^1_1 - \mathrm{BI}) \vdash \mathrm{CWO}$.

Как мы отметили в 3.3, CWO интенсивно используется в теоретико-рекурсивном рассмотрении ординалов и, в частности, в теории системы $\mathcal{O}$, класса Π^1_1 и гиперарифметических предикатов. Применение теоремы о трансфинитной рекурсии к иерархиям приводится в 6.4.

Теперь мы можем также завершить доказательство теоремы из 5.4.4. В $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$ мы можем вывести $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$ и $(\Sigma^1_1 - \mathrm{BI})$, а следовательно, и CWO. Это все, что нам нужно, чтобы использовать отношения вполне упорядочения вместо ординалов.

6.3. Доказуемо рекурсивные вполне упорядочения.

6.3.1. Ординальные функции и связанные с ними вполне упорядочения. Для различных конкретных ординалов α мы имеем

естественные примитивно рекурсивные вполне упорядочения $\prec_\alpha$ типа α. Они заданы с помощью упорядочения термов, построенных, исходя из символов для данных ординальных функций. Наиболее известное из них, использующее $+$, $\cdot$, exp и канторовскую нормальную форму, представляет сегмент до $\alpha = \varepsilon_0 = \lim_n \omega_n$, где $\omega = 1$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$. Это представление продолжается с использованием *критических функций* $\varkappa^{(\nu)}$, определяемых соотношениями:

(i) $\varkappa^{(0)}(\alpha) = \omega^\alpha$,

(ii) $\varkappa^{(\nu)}$ перечисляет $\{\alpha \mid \forall \mu < \nu \varkappa^{(\mu)}(\alpha) = \alpha\}$ для $\nu > 0$.

Таким образом, $\varepsilon_0 = \varkappa^{(1)}(0)$. Пусть Γ_0 — наименьший ординал такой, что ν, $\alpha < \Gamma_0$ влечет $\varkappa^{(\nu)}(\alpha) < \Gamma_0$. Его можно описать иначе как наименьшее решение уравнения $\varkappa^{(\nu)}(0) = \nu$. Естественное примитивно рекурсивное упорядочение $\prec_{\Gamma_0}$ получается с помощью термов для функций $+$, $\cdot$, exp и $\lambda \nu \alpha \varkappa^{(\nu)}(\alpha)$ (ср. Шютте [1], Феферман [1]). Для наших целей при рассмотрении $\prec_\alpha$ достаточно брать $\alpha \leqslant \Gamma_0$, а в качестве $\prec_a$ — упорядочение начального сегмента длины $|a| = \alpha$. Мы обозначаем через $a \oplus b$ и ω^a примитивно рекурсивные функции на $\prec_{\Gamma_0}$ такие, что $|a \oplus b| = |a| + |b|$ и $|\omega^a| \equiv \omega |a|$. Через $\mathrm{TI}(a, \varphi)$ обозначается $\mathrm{TI}(\prec_a, \varphi)$, а $\mathrm{TI}(a)$ — схема всех таких $\mathrm{TI}(a, \varphi)$ в любом данном языке. Наконец, $\mathrm{I}(a)$ обозначает $\forall Y \mathrm{TI}(\prec_a, Y)$. В силу 6.1.5 это эквивалентно формуле $\mathrm{WF}(\prec_a)$ в $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$. В дальнейшем, если указано a и $\alpha = |a|$, мы пишем также α вместо a, например, $\mathrm{TI}(\alpha)$.

6.3.2. Индукция ниже ε_0. Генцен доказал, что $\mathbf{Z} \vdash \mathrm{TI}(\alpha)$ для каждого $\alpha < \varepsilon_0$, и установил, что этот результат неулучшаем, показав $\mathrm{TI}(\varepsilon_0, \varphi) \to \mathrm{Con}(\mathbf{Z})$ для некоторого (бескванторного) φ. Шютте [1] дал простое доказательство этого факта. С формулой $\varphi(n)$ произвольного языка мы можем связать $\varphi^*(n)$, которая следующим образом построена из φ с помощью кванторов по натуральным числам:

$$\varphi^*(a) \leftrightarrow \forall b [\forall c \prec b \, \varphi(c) \to \forall c \prec b + \omega^a \varphi(c)]. \tag{1}$$

Лемма. $\mathrm{TI}(a, \varphi^*) \to \mathrm{TI}(\omega^a, \varphi)$ *доказуемо в любом расширении системы* $\mathbf{Z}$.

Доказательство использует то обстоятельство, что из прогрессивности φ (посылка TI) следует прогрессивность φ^*.

Следствие. *Если* $\mathbf{T}$ — *любое расширение* $\mathbf{Z}$ *и* $\alpha < \varepsilon_0$, *то* $\mathbf{T} \vdash \mathrm{TI}(\alpha)$.

Упомянутая выше причина границы ε_0 для $\mathbf{Z}$ будет еще обсуждаться в 8.2. В действительности это — граница для любого доказуемого арифметического упорядочения.

6.3.3. Усиление теории не обязательно увеличивает запас доказуемых вполне упорядочений. Это имеет место, например, для $\mathbf{Z}+\mathrm{Con}(\mathbf{Z})$. Однако добавление более сильных принципов свертывания обычно дает такой эффект. Следующие примеры показывают, что это — дело тонкое. Во-первых, в $(\Pi^0_\infty-\mathrm{CA})$ предыдущая лемма позволяет нам доказать $\forall Y_1\exists Y_2[\mathrm{TI}(a, Y_2)\to\mathrm{TI}(\omega^a Y_1)]$, а значит, и $\mathrm{I}(a)\to\mathrm{I}(\omega^a)$. По индукции мы получим тогда $\mathrm{I}(a)\to\mathrm{I}(\varepsilon(a))$, где $\varepsilon(a)$ представляет первое ε-число, большее a. Следовательно, в этой теории мы имеем также $\mathrm{I}(\varepsilon_b)\to\mathrm{I}(\varepsilon_{b+1})$. Применяя $\mathrm{TI}(a,\varphi)$ к $\varphi(b)=I(\varepsilon_b)$ для $\alpha<\varepsilon_0$, мы получаем следующее утверждение.

Лемма. $(\Pi^0_\infty-\mathrm{CA})\vdash\mathrm{I}(\gamma)$ *для каждого* $\gamma<\varepsilon_{\varepsilon_0}$.

Удивительно, однако, что все еще имеется частный случай схемы $\mathrm{TI}(\varepsilon_0)$, который недоказуем в $(\Pi^0_\infty-\mathrm{CA})$. Это следствие общей теоремы Крайзеля, которая применима к *любому конечному расширению* $\mathbf{Z}^2$ и которая будет обсуждаться в 8.2. Конечно, в теории $(\Pi^0_\infty-\mathrm{CA})+(\mathrm{BI})$ мы имеем $\mathrm{TI}(\alpha)$, как только мы вывели $\mathrm{I}(\alpha)$. Но имеются и определенные промежуточные теории, обладающие этим «сбалансированным» свойством.

6.4. Итерированные принципы свертывания. Разветвленный анализ.

6.4.1. Иерархии, основанные на операторе скачка, и итерированная $(\Pi^0_1-\mathrm{CA})$. Теоретико-рекурсивный *оператор скачка* воплощает $\exists^{\mathbb{N}}$ как функционал F: $\mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$. В общем случае, если дан такой функционал F, отношение $\prec$ вполне упорядочения в $\mathbb{N}$ и произвольное X_0, мы определяем $X=\langle(X)_n\rangle$ (n — в области определения $\prec$), который итерирует F вдоль $\prec$. Это делается следующим образом по трансфинитной рекурсии:

(i) $(X)_0=X_0$;

(ii) $(X)_{a\oplus1}=F(X)_a$;

(iii) $x\in(X)_a\Leftrightarrow(x)_0\in(X)_{(x)_1}$ и $(x)_1<a$ для предельного a.

X называется иерархией для F вдоль $\prec$, начиная с X_0. В (i)—(iii) мы считаем, что 0 — наименьший элемент в $\prec$ и $a\oplus1$ непосредственно следует за a в $\prec$. Предположим теперь, что $\prec$ и $\lambda a(a\oplus1)$ рекурсивны и что множество предельных элементов рекурсивно. Если дано формальное определение отношения $F(X)=Y$, мы пишем $\mathrm{Hier}^F_\prec(X, X_0)$, чтобы выразить, что X удовлетворяет (i)—(iii). Если определение функционала F может быть дано в логике второго порядка, то это же верно для формулы $\mathrm{Hier}^F_\prec(X, X_0)$. В частности, если F есть оператор скачка J, то эта формула арифметическая. В силу 6.2 мы можем установить предложение $\forall X_0\exists X\,\mathrm{Hier}^J_\prec(X, X_0)$ в $(\Delta^1_1-\mathrm{CA})+\mathrm{TI}(\prec)$. Это предложение можно рассматривать как выражение итерации $(\Pi^0_1-\mathrm{CA})$ вдоль $\prec$. Мы обозначаем через $(\Pi^0_1-\mathrm{CA})_\alpha$ такое предложение вдоль $\prec_\alpha$ (когда дано естественное вполне упорядочение с порядковым типом α) и через $(\Pi^0_1-\mathrm{CA})_{<\alpha}$ множество всех предложений $(\Pi^0_1-\mathrm{CA})_\beta$ для $\beta<\alpha$ (используя начальные отрезки некоторого фиксированного $\prec_\alpha$). Так как в силу 6.3.2 $(\Delta^1_1-\mathrm{CA})\vdash\mathrm{TI}(\beta)$ для каждого $\beta<\varepsilon_0$, то имеет место

Теорема. $(\Delta^1_1-\mathrm{CA})\equiv(\Pi^0_1-\mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$.

6.4.2. Иерархия гиперскачка и итерированная $(\Pi^1_1-\mathrm{CA})$. Мы применим теперь те же идеи к *оператору гиперскачка* J_1, который воплощает $\exists^{\mathbb{N}}$. Обозначим через $(\Pi^1_1-\mathrm{CA})_\alpha$ формулу $\forall X_0\exists X\,\mathrm{Hier}^{J_1}_{\prec_\alpha}(X, X_0)$, а через $(\Pi^1_1-\mathrm{CA})_{<\alpha}$ множество всех утверждений $(\Pi^1_1-\mathrm{CA})_\beta$ для $\beta<\alpha$. Хотя мы не можем применить формулировку 6.2 трансфинитной рекурсии для логики второго порядка непосредственно к этой ситуации, она может быть непосредственно приспособлена для доказательства следующего утверждения.

Теорема. $(\Delta^1_2-\mathrm{CA})\equiv(\Pi^1_1-\mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$.

У Фридмана [3] показано, что теоремы из этого и предшествующего подпунктов неулучшаемы. Имеются также аналогичные результаты для итерированных $(\Pi^n_1-\mathrm{CA})$ при $n>1$. Мы обсудим результаты для $n=0,1$ в § 8.

6.4.3. Разветвленно аналитические и гиперарифметические множества. Основной шаг предикативного определения состоит в переходе от совокупности $\mathscr{P}$ подмножеств множества $\mathbb{N}$ к совокупности $\mathscr{P}^*$ всех подмножеств, определимых в ω-модели $\mathscr{P}$ из параметров, принадлежащих $\mathscr{P}$. Итерация этой процедуры по всем теоретико-множественным ординалам дает:

(i) $\mathscr{P}_0=(\varnothing)^*=$ все арифметические множества;

(ii) $\mathscr{P}_{\alpha+1}=\mathscr{P}^*_\alpha$;

(iii) $\mathscr{P}_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathscr{P}_\alpha$ для предельных λ.

Это вариант понятия конструктивности по Гёделю применительно к логике второго порядка, называемый совокупностью разветвленно аналитических множеств. Известно, что $\mathscr{P}_\Omega$ (где Ω — наименьший несчетный ординал) является моделью полной схемы (DC) для логики второго порядка. Мы здесь занимаемся только множествами $\mathscr{P}_\alpha$ для $\alpha\leqslant\omega_1$ (первый нерекурсивный ординал). $\mathscr{P}_{\omega_1}$ состоит (как показал Клини [1]) в точности из *гиперарифметических множеств*

$$\mathscr{P}_{\omega_1}=\mathrm{HYP}. \tag{1}$$

Напомним, что HYP состоит из множеств, рекурсивных в некотором H_a для $a \in \mathcal{O}$. Далее, $H_a = (X)_a$, где $\mathrm{Hier}^J_{\prec}(X, N)$ и $\prec$ — отношение предшествования вдоль пути в $\mathcal{O}$, который включает a. Спектор показал, что H_a и H_b эквивалентны по Тьюрингу, когда $|a| = |b|$. Пусть $\mathscr{H}_\alpha$ состоит из множеств, рекурсивных в некотором H_a при $|a| < \alpha$. Более подробно, Клини показал, что

$$\mathscr{P}_a = \mathscr{H}_{\omega(1+a)} \quad \text{для} \quad \alpha < \omega_1. \tag{2}$$

Таким образом, разветвленная иерархия до ω_1 дает другую форму итерирования $\exists^{\mathbb{N}}$, так сказать, по ω шагов зараз. Когда $\omega\alpha = \alpha$, мы имеем $\mathscr{P}_\alpha = \mathscr{H}_\alpha$.

6.4.4. Разветвленный анализ и теория типов. Если дан ординал α, то мы можем построить систему RA_α разветвленного анализа, которая использует числовые переменные и переменные для множеств $X^{(\beta)}$, $Y^{(\beta)}$, $Z^{(\beta)}$, ... *степени* β для каждого $\beta < \alpha$. Подразумеваемая интерпретация состоит в том, что переменные степени β пробегают $\mathscr{P}_\beta$. Аксиомы состоят из аксиом **Z** и полной индукции по $\mathbb{N}$ в языке RA_α плюс *разветвленные аксиомы свертывания*

$$(\mathrm{RCA})_\alpha \qquad \exists X^\beta \forall n\,[n \in (X)^\beta \leftrightarrow \varphi] \text{ для всех } \beta < \alpha,$$

где все свободные переменные второго порядка в φ имеют степени $\leqslant\beta$, а все связанные переменные — степени $<\beta$. В дополнение к предыдущему при $\alpha > \omega$ мы имеем инфинитарное (бесконечное) *правило обобщения* для каждого предельного $\lambda < \alpha$: $(\mathrm{G})_\lambda$. Вывести $\forall X^{(\lambda)} \varphi(X^{(\lambda)})$ из $\forall X^{(\beta)} \varphi(X^{(\beta)})$ для каждого $\beta < \lambda$.

Когда α есть тип некоторого рекурсивного вполне упорядочения, правило (G) может быть частично выражено в конечной форме. $(\mathrm{RA})_1$ есть некоторая форма аксиомы $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$ или $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\omega}$. Вообще, если $\omega\alpha = \alpha$, то RA_α есть некоторая форма аксиомы $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\alpha}$. Шютте [1] показал, что в RA_α доказуемо $\mathrm{TI}(\varkappa^{(\beta)}(0))$ для каждого $\beta < \alpha$, когда $\omega^\alpha = \alpha$. Это будет еще обсуждаться в 8.2. Идея разветвленных теорий второго порядка может быть обобщена на теорию конечных и трансфинитных типов и теорию множеств. Некоторые формальные системы этого рода см. у Шютте [1] и Тейта [2].

6.4.5. Разветвленные прогрессии и предикативность. Принятая здесь идея предикативности такова: это — та часть математической мысли, которая неявно содержится в нашей концепции натуральных чисел. Предикативные определения могут содержать кванторы по множествам и функциям, только если они ограничены совокупностями, которые заданы ранее признанными классами предикативных определений. Формально это воплощается *в разветвленных прогрессиях теорий* $\langle \mathrm{RA}_\alpha \rangle_\alpha$. Однако общее понятие вполне упорядочения или ординала само непредикативно уже по форме, поэтому должны быть какие-то ограничения на α. Крайзель предложил характеристику в терминах *автономных* прогрессий, где берутся только те ординалы α, для которых мы уже доказали в системе RA_β при $\beta < \alpha$ существование a, представляющего вполне упорядочение $\prec_\alpha$ типа α. Шютте и Феферман независимо установили, что Γ_0 является наименьшим непредикативным ординалом при этом предположении. Ср. Феферман [5], где приводится последнее по времени обсуждение работ по этому поводу, включающее эквивалентные неразветвленные системы анализа.

§ 7. Теоретико-рекурсивные модели конечного типа

7.1. Введение. Мы интересуемся здесь моделями различных теорий, рассмотренных в § 4, в основном с целью получения непосредственных *результатов о независимости*, но также и для получения *результатов о консервативном расширении* путем формализации построения моделей.

Алгебраические системы $\mathfrak{M}$, с которыми мы будем иметь дело, заданы следующими данными:

(i) совокупностью множеств M_τ, которые рассматриваются как область значений переменных типа τ (для каждого τ из рассматриваемого языка), причем во всех случаях $M_0 = \mathbb{N}$;

(ii) *операциями применения функции к аргументу* $\mathrm{App}_{\sigma,\tau}$: $M_\sigma \times M_{\sigma\to\tau} \to M_\tau$ для любых σ, τ;

(iii) интерпретациями констант.

Вся алгебраическая система обозначается посредством $\mathfrak{M} = (\langle M_\tau \rangle_\tau, \ldots)$. Мы пишем fa вместо $\mathrm{App}(f, a)$.

Имеются два понятия рекурсии конечного типа, которые могут быть прямо приспособлены для построения моделей теорий, рассмотренных в § 4. Первое — это НЕО — *наследственно экстенсиональные* (*эффективные*) *операции* (введенные Крайзелем), а второе порождается схемами S1 — S9, введенными Клини. Первое обобщается на операции над любой *перечислительной* системой в 7.2, второе лишь коротко описано в 7.3. В приложениях к результатам о содержимом второго порядка для рассматриваемых теорий мы должны иметь хорошую информацию об 1-*сечении* M_1 модели $\mathfrak{M}$. Это очевидно из строения материала в 7.2, но требует большей работы в случае S1 — S9 и их релятивизаций. Однако рассматривать последние естественно, если мы берем некоторые условия замкнутости конечного типа в качестве отправной точки для модели. В обоих случаях модели,

рассматриваемые в этой главе, являются промежуточными между алгебраическими системами, минимальными для данных условий замкнутости, и максимальными алгебраическими системами, обсуждавшимися в 2.6.

7.2. Наследственные операции над перечислительной системой.

7.2.1. Подходящее абстрактное понятие *перечислительной* системы $\mathfrak{E}$, обобщающее ситуацию из обычной теории рекурсии, изложено Фридманом [5]. Оно модифицирует предшествующие понятия Вагнера и Стронга [1]. Данные для такой $\mathfrak{E}$ включают:

(i) множество A, содержащее не менее двух элементов (область системы $\mathfrak{E}$);

(ii) совокупности $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, состоящие соответственно из одноместных и двуместных частичных функций с аргументами из A и значениями в A;

(iii) тотальные (всюду определенные) спаривающие функции и проекции $P \in \mathscr{F}_2$, $P_1, P_2 \in \mathscr{F}_1$;

(iv) перечисляющую функцию $f \in \mathscr{F}_2$ для $\mathscr{F}_1$, т. е. $\mathscr{F}_1$ состоит из всех функций $\lambda x f(a, x)$ для $a \in A$.

Далее, требуется, чтобы $\mathfrak{E}$ удовлетворила условиям:

(v) $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ замкнуты относительно композиции;

(vi) $\mathscr{F}_1$ содержит тождественную функцию и все константные функции;

(vii) $\mathscr{F}_2$ содержит все функции $\mathrm{DC}_{a,b} = \lambda xy$ (a, если $x = y$; b в противном случае) для определения разбором случаев.

Мы пишем $\{a\}(x)$ или ax вместо $f(a, x)$, где f — перечисляющая функция из (iv). Говорят, что $\mathfrak{E}$ — *система над* $\mathbb{N}$, если $A = \mathbb{N}$ и функции Sc и $\mathrm{Pd} = \lambda x(x \dot{-} 1)$ содержатся в $\mathscr{F}_1$. В дальнейшем рассматриваются только такие $\mathfrak{E}$. Легко показать, что имеется S_1^1-*функция* и что в $\mathfrak{E}$ справедлива теорема рекурсии. Можно говорить, что члены $\mathscr{F}_1$ — это $\mathfrak{E}$-*частично рекурсивные функции*, а тотальные члены — это $\mathfrak{E}$-*общерекурсивные функции* (от одного аргумента).

7.2.2. Наследственно рекурсивные и экстенсиональные операции над $\mathfrak{E}$. Пусть дана перечислительная система над $\mathbb{N}$. *Наследственно рекурсивные объекты* $\mathrm{HRO}_\tau(\mathfrak{E})$ *типа* τ *над* $\mathfrak{E}$ определяются следующим образом:

(i) $\mathrm{HRO}_0 = \mathbb{N}$,

(ii) $\mathrm{HRO}_{\sigma\to\tau} = \{a \mid \forall x (x \in \mathrm{HRO}_\sigma \Rightarrow \{a\}(x) \in \mathrm{HRO}_\tau)\}$.

Мы пишем $\mathrm{HRO}(\mathfrak{E})$ вместо $(\langle \mathrm{HRO}_\tau(\mathfrak{E})\rangle_\tau, \ldots)$. *Наследственно экстенсиональные эффективные объекты типа* τ *над* $\mathfrak{E}$ определяются путем интерпретации в $\mathrm{HRO}(\mathfrak{E})$ предикатов E_τ из 4.2.2.

В подробной формулировке HEO_τ и $a \equiv_\tau b$ определяются по индукции:

(i) $\mathrm{HEO}_0 = \mathbb{N}$ и $a \equiv_0 b \Leftrightarrow a = b$;

(ii) $a \in \mathrm{HEO}_{\sigma\to\tau} \Leftrightarrow \forall x [x \in \mathrm{HEO}_\sigma \Rightarrow \{a\}(x) \in \mathrm{HEO}_\tau]$ и
$\forall xy [x =_\sigma y \Rightarrow \{a\}(x) \equiv_\tau \{a\}(y)]$,
$a \equiv_{(\sigma\to\tau)} b \Leftrightarrow \forall x [x \in \mathrm{HEO}_\sigma \Rightarrow \{a\}(x) \equiv_\tau \{b\}(x)]$.

Алгебраическая система $(\langle \mathrm{HEO}_\tau(\mathfrak{E})\rangle_\tau, \ldots)$ обозначается через $\mathrm{HEO}(\mathfrak{E})$. В HRO легко интерпретируются функционалы K, S, а также (с использованием теоремы рекурсии) операторы рекурсии R всех типов. Можно проверить, что они экстенсиональны, так что имеет место

Теорема. *Если* $\mathfrak{E}$ *— перечислительная система, то* $\mathrm{HRO}(\mathfrak{E})$ *— модель* $\mathbf{Z}^\omega$, *а* $\mathrm{HEO}(\mathfrak{E})$ *— модель* $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext})$.

7.3. Специальные случаи.

7.3.1. Системы $\mathfrak{E}$, которые дает обычная теория рекурсии. Пусть $\mathfrak{E}_1$ — перечислительная система обычной теории рекурсии. В этом случае известно, что HEO удовлетворяет $(\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$. Это замечено Крайзелем [1]. Обобщая результат Крайзеля, Лакомба и Шенфилда для эффективных операций типа 2, мы показываем, что любой член HEO является *наследственно непрерывным* (*или счетным*) *функционалом*. Для последнего класса верна аксиома выбора, как доказал Клини [2]. Определение класса $\mathrm{HEO}(\mathfrak{E})$ можно формализовать в арифметике, точно так же, как и доказательство того, что он удовлетворяет $(\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$. Таким образом, мы получаем следующее усиление теоремы из 4.4.2.

Теорема. $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext}) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ *является консервативным расширением* $\mathbf{Z}$.

7.3.2. Теория Π_1^1-рекурсии. Один из способов получить модель для $(\exists^{\mathbb{N}})$ — взять в качестве $\mathfrak{E}$ перечислительную систему для частичных Π_1^1-функций (получаемых униформизацией Π_1^1-отношений). Таким образом, $\mathfrak{E}_2$-рекурсивные функции — это в точности гиперарифметические функции, и элементы $\mathrm{HRO}(\mathfrak{E}_2)$ можно называть *наследственно гиперарифметическими операциями*. Гаррисон [1] показал, что HYP является моделью $\Sigma_1^1 - \mathrm{DC}$ (что обобщает результат Крайзеля [3]). Разумно предположить, что $\mathrm{HEO}(\mathfrak{E}_2)$ удовлетворяет полной $(\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$. Во всяком случае имеет место

Теорема. $\mathrm{HEO}(\mathfrak{E}_2)$ *является моделью системы* $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext}) + (\exists^{\mathbb{N}})$, *причем* 1-*сечение этой модели есть* HYP, *а значит, она также модель* $\Sigma_1^1 - \mathrm{DC}$.

Отметим, что в этом случае формализация рассуждения не ведет к очевидному результату о консервативности, так как для рассмотрения свойств класса HYP нам нужны (BI) и $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$. В этом отношении методы теории доказательств из 8.3 будут предпочтительнее.

7.4. Рекурсивные функционалы конечного типа. Клини [3] определяет частично рекурсивные функционалы над максимальной типовой алгебраической системой. Если зафиксировать данный функционал F в качестве одного из аргументов, мы получим понятие *частичной рекурсивности в* F. Для любого конечного типа τ над 0 это приводит к $\mathrm{Sec}_\tau(F)$ — *множеству объектов типа* τ, *которые (обще) рекурсивны в* F. Алгебраическая система $\mathfrak{M} = \mathrm{Rec}(F) = (\langle \mathrm{Sec}_\tau(F)\rangle_\tau, \ldots)$ удовлетворяет $\mathbf{Z}^\omega$. Выбирая F в соответствии с данными условиями замкнутости, мы можем использовать $\mathfrak{M}$ для получения моделей теорий, воплощающих эти условия замкнутости. Например, это верно для $F = \exists^N$ или $F = \exists\downarrow^N$. Ниже указана кое-какая относящаяся к делу информация о $\mathrm{Rec}(F)$; ср. также главу 6 «Теории рекурсии».

Клини [3] показал, что $\mathrm{Sec}_1(\exists^N) = \mathrm{HYP}$. Мы знаем по теореме Клини о базисе, что $\mathrm{Rec}(\exists\downarrow^N)$ — модель (BI). По теореме Ганди [2] о выборе $\mathrm{Rec}(F)$ есть модель $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ для любого F типа 2, в котором рекурсивен $\exists^N$. Для таких F Шенфилд [1] дал иерархию $\langle H^F_a\rangle_{a\in\mathcal{O}^F}$ для $\mathrm{Sec}_1(F)$, которая обобщает гиперарифметическую иерархию. Она имеет длину ω_1^F — наименьший ординал, неопределимый вполне упорядочением, рекурсивным в F. Мы обозначим через $\mathscr{H}^F_a$ множество функций, рекурсивных в некотором H^F_a из иерархии Шенфилда при $|a| < \alpha$. Таким образом, $\mathscr{H}^F_\alpha$ совпадает с гиперарифметической иерархией для обычного оператора скачка J и $H^{J_1}_\alpha$ есть *иерархия гиперскачка* до α.

7.5. Результаты о независимости, использующие REC. Пусть REC — множество рекурсивных функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Исследования по конструктивной математике дали многочисленные контрпримеры к формулировкам рекурсивных аналогов классических теорем. Они в свою очередь дают результаты о независимости таких теорем от любой теории T конечного типа, которая имеет модель $\mathfrak{M} = (\langle M_\tau\rangle_\tau, \ldots)$ с $M_1 = \mathrm{REC}$. В частности, $\mathbf{T} = \mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext}) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ — такая теория в силу 7.3.1.

Примеры таких формулировок можно найти в 5.8, 5.9, 5.14 и 8.2 гл. 5. В дополнение к ним мы можем отметить два результата о $\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (\exists^N)$, обсуждавшиеся выше в § 3, а именно, лемму Кёнига (KL) и теорему Рамсея (RT). Известно, что KL ложна в REC: нужно использовать бесконечное рекурсивное бинарное дерево без ветвей (длины ω) в REC. Так как KL влечет RT, это утверждение усиливается результатом Шпекера [1], который показал, что теорема Рамсея тоже ложна в REC.

7.6. Результаты о независимости, использующие HYP. Имеется также много подробной информации о HYP, которая полезна при получении результатов о независимости от любой теории, которая имеет модель $\mathfrak{M} = (\langle M_\tau\rangle_\tau, \ldots)$ с $M_1 = \mathrm{HYP}$. Как мы видели, $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{Ext}) + (\exists^N) + (\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ является такой теорией.

7.6.1. Некоторые факты о HYP. Клини [1] показал, что классу Π^1_1 принадлежит любой предикат $\psi(n)$, находящийся в Σ^1_1-форме, релятивизированной к HYP, т. е. в форме $\varphi(n) \leftrightarrow \leftrightarrow \exists f_{\in \mathrm{HYP}}\, \varphi(n, f)$, где φ арифметическая. Спектор доказал обратное утверждение. Мы формулируем эту пару результатов в виде

$$(\Sigma^1_1)^{\mathrm{HYP}} = \Pi^1_1. \tag{1}$$

Разумеется, тогда $(\Pi^1_1)^{\mathrm{HYP}} = \Sigma^1_1$. Ганди [1] дал новое доказательство результата Спектора. Главным его шагом было установление того, что если $\prec_P$ — рекурсивное линейное упорядочение, которое фундировано по отношению ко всем убывающим последовательностям из HYP, но не фундировано, то самый длинный вполне упорядоченный начальный отрезок упорядочения $\prec_P$ имеет порядковый тип ω_1. Следовательно, существуют Π^1_1-вполне упорядочения порядкового типа ω_1. Это было независимо доказано Феферманом и Спектором [1], где было определено расширение $\mathcal{O}^*$ системы $\mathcal{O}$, частично упорядоченное рекурсивно перечислимым отношением $\prec$, локально ведущим себя подобно $\prec_\sigma$. По определению $b \in \mathcal{O}^*$ тогда и только тогда, когда множество $\prec$-предшественников b фундировано по отношению к HYP. В силу (1) $\mathcal{O}^* \in \Sigma^1_1$, поэтому $\mathcal{O}^* - \mathcal{O}$ непусто. Для любого $a \in \mathcal{O}^* - \mathcal{O}$ было показано, что $\{x \mid x \prec a\}$ есть Π^1_1-путь через $\mathcal{O}$. Далее, $\mathcal{O}$ и $N - \mathcal{O}^*$ дают пример множеств, неотделимых никаким множеством из HYP, следовательно, $\mathcal{O}^* \notin \mathrm{HYP}$.

7.6.2. $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$ и (BI) ложны в HYP. Так как Π^1_1-определение системы $\mathcal{O}$, релятивизированное к HYP, дает в точности $\mathcal{O}^*$, то непосредственно получается

Теорема. $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$ *без параметров ложна в* HYP.

Следующее утверждение было доказано Крайзелем.

Теорема. $(\Sigma^1_1 - \mathrm{BI}_\prec)$ *ложна в* HYP *для некоторого примитивно рекурсивного* $\prec$.

Доказательство. Выберем линейное примитивно рекурсивное упорядочение $\prec_P$, которое фундировано по отношению к HYP, но не фундировано. Рассмотрим предикат $\psi(n) \leftrightarrow \leftrightarrow \forall f[f0 \prec_P n \rightarrow \exists m(fm' \prec_P fm)]$, который выражает, что $\{m \mid m \prec_P \prec_P n\}$ фундировано. По теореме Спектора $\psi(n)$ эквивалентна $\exists g_{\mathrm{HYP}} \varphi(n, g)$ с арифметической φ. Пусть $\psi_1(n)$ обозначает $\exists g \varphi(n, g)$, так что $\psi(n) \leftrightarrow (\psi_1(n))^{\mathrm{HYP}}$. Так как $\forall n\,[\forall m \prec_P n\ \psi(m) \rightarrow \psi(n)]$ истинно, мы имеем, что $\forall n\,[\forall m \prec_P n\, \psi_1(m) \rightarrow \psi_1(n)]$ истинно в HYP. Но из $\mathrm{HYP} \models \forall n \psi_1(n)$ следовало бы $\forall n \psi(n)$, что дает противоречие.

7.6.3. Некоторые математические утверждения, ложные в HYP.

Теорема. *Принцип точной верхней грани ложен в* HYP.

Доказательство. Возьмем арифметическую формулу φ такую, что $\exists f_{\mathrm{HYP}} \varphi(n, f)$ принадлежит Π^1_1, но не HYP. Применяя представление вещественных чисел дедекиндовыми сечениями, можно показать, что $\bigcup X[\varphi(X)$, X — дедекиндово сечение, $X \in \in \mathrm{HYP}]$ также не принадлежит HYP.

Теорема. CWO *ложно в* HYP.

Доказательство (Крайзель). Идея состоит в использовании двух HYP-неотделимых предикатов $\forall f \exists x P_1(\bar{f}(x), n)$ и $\forall f \exists x P(\bar{f}(x), n)$. Объединение их дополнений A_1, A_2 есть $\mathbb{N}$. Формулы A_1, A_2 можно записать в виде $\forall f_{\mathrm{HYP}} \exists x Q_1(\bar{f}(x), n)$, $\forall f_{\mathrm{HYP}} \exists x$ $Q_2(\bar{f}(x), n)$ соответственно, где Q_1, Q_2 рекурсивны. Теперь, если бы сравнимость вполне упорядочений имела место в HYP, мы могли бы осуществить редукцию этих дополнений, т. е. $A_1 \cup A_2 = A_1' \cup A_2'$, где A_1', A_2' дизъюнктны и находятся в Π^1_1-форме относительно HYP. Но тогда $A_1', A_2' \in \Sigma^1_1$, т. е. $A_1' \in \mathrm{HYP}$ вопреки предположению. □

7.6.4. Используя представление (3.1) *открытых множеств* в $\mathbb{R}$ как объединений последовательностей рациональных интервалов и *замкнутых множеств* — как дополнений открытых множеств, мы можем формулировать различные утверждения о них в языке второго порядка и проверять их в HYP. Теорема Кантора — Бендиксона (С — В) утверждает, что любое замкнутое множество F имеет *совершенное ядро* $F^* \subseteq F$ и что $F - F^*$ счетно. Следующее утверждение доказано Крайзелем [2].

Теорема. *Теорема* С — В *ложна в* HYP.

Доказательство Крайзеля дает рекурсивно описанное замкнутое множество F такое, что $F - F^*$ состоит из HYP-вещественных чисел произвольно высокой степени, а следовательно, не может быть перечислено никакой HYP-функцией. Далее, $F^* \cap$ $\cap$ HYP пусто. Таким образом, в этой модели неверно даже, что

если замкнутое множество не содержит (непустого) совершенного подмножества, то оно счетно.

Следующее утверждение дает пример из алгебры со сходными чертами (Феферман [4] с использованием примера Барвайса).

Теорема. *Утверждение о том, что любая абелева группа содержит наибольшую делимую подгруппу, ложно в* HYP.

Чтобы установить это, мы определяем рекурсивно представленную абелеву (p-группу) G такую, что $\bigcup H[H \subseteq G$, H делима и $H \in \mathrm{HYP}]$ не принадлежит HYP.

7.6.5. Утверждения в языке третьего порядка. Различные утверждения о множествах вещественных чисел не имеют переводов на язык второго порядка, но непосредственно связаны с тем, какие вещественные числа существуют. Их можно испытывать на алгебраических системах, где $M_1 = \mathrm{HYP}$, а M_2 имеет простое описание.

Теорема. *Следующие утверждения можно опровергнуть в подходящих* $\mathfrak{M}$ *с* $M_1 = \mathrm{HYP}$:

(i) *любое множество вещественных чисел, замкнутое относительно предельных переходов, замкнуто*;

(ii) *любое открытое покрытие сегмента* $[0, 1]$ *имеет конечное подпокрытие*;

(iii) *существует аналитическое не борелевское множество*;

(iv) *существует множество, неизмеримое по Лебегу*;

(v) *любое множество вещественных чисел имеет внешнюю меру.*

Одна и та же $\mathfrak{M}$ достаточна для (i)—(iv), но, конечно, не для (v).

7.7. Некоторые специальные ω-модели для систем второго порядка. Ниже приводятся примеры ω-моделей, которые не вводятся как 1-сечения того вида алгебраических систем конечного типа, который рассматривался выше. Каждая из них задана с помощью некоторого подкласса множества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Простейшей из них является $\mathscr{H}_\omega$ — совокупность арифметических множеств, которая образует модель схемы $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$. Таким образом, существование H_ω недоказуемо в $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$, хотя оно следует из $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$. Рассмотрим аналогичным образом

$$\overline{\mathscr{O}}_1 = \mathrm{Rec}(\mathscr{O}) \qquad (1)$$

и

$\overline{\mathscr{O}}_\omega$ — совокупность множеств, рекурсивных в некотором $\mathscr{O}_n$. (2).

Для любой схемы S обозначим через $(S)^-$ соответствующую схему без параметров второго порядка. Следующие утверждения были установлены Крайзелем.

Теорема. (i) $\overline{\mathcal{O}}_1$ *удовлетворяет* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})^-$, *но не полной* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$.

(ii) $\overline{\mathcal{O}}_\omega$ *удовлетворяет* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$, *но не* $(\Delta^1_2 - \mathrm{CA})^-$.

(iii) $\overline{\mathcal{O}}_1$ — *модель* $(\mathrm{BI}_\prec)$ *для примитивно рекурсивных* $\prec$.

(iv) $\overline{\mathcal{O}}_\omega$ — *модель* (BI).

Доказательство. (i) Положительная часть следует из теоремы Клини о базисе. Отрицательную часть обоснуем от противного: если бы $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$ была выполнена, то $\mathcal{O}_2$ содержалось бы в $\overline{\mathcal{O}}_1$.

(ii) Положительная часть использует релятивизированную теорему о базисе. Для установления отрицательного результата заметим, что $\langle \mathcal{O}_n \rangle_{n<\omega}$ есть единственное решение некоторого Σ^1_2-предиката.

(iii) Если $\prec$ примитивно рекурсивно и не имеет убывающих последовательностей в $\overline{\mathcal{O}}_1$, то оно фундировано, и, следовательно, TI верна для $\prec$ с любым предикатом.

(iv) С помощью релятивизации (iii). □

Замечание. Приведенные модели не минимальны, так как Ганди, Крайзель и Тейт показали, что пересечение всех ω-моделей рекурсивной (и даже Π^1_1-) теории содержится в HYP.

7.8. $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$, $(\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})$, $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$. Крайзель [3] доказал, что множество HYP — наименьшая модель аксиомы $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})^-$, так что его нельзя использовать для различения этих трех систем. Фридман [1], [3] показал, что $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ — консервативное расширение системы $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$, а значит, и системы $(\Lambda^1_1 - \mathrm{CA})$ относительно Π^1_2-предложений. Это будет описано в 8.6. Он показал также, что $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ — собственное расширение системы $(\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})$. Стил [1] объявил, что $(\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})$ — собственное расширение $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$. Неизвестно, выводима ли $(\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})^-$ из $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})$.

§ 8. Содержимое второго порядка для изучаемых теорий: методы теории доказательств

8.1. Введение. Общая задача здесь — дать точную информацию о теоремах, образующих подтеорию второго порядка $\mathbf{T}^2$ некоторой теории $\mathbf{T}^\omega$ конечного типа и, в частности, описать базис для Σ^1_1-теорем теории $\mathbf{T}^2$, т. е. класс функций M_1 такой, что из $\mathbf{T}^2 \vdash \exists f \varphi(f)$ с арифметической φ следует $(\exists f \in M_1)\varphi(f)$. Под *прямыми* методами теории доказательств для этой задачи мы понимаем обобщения теорем Генцена об *устранении сечения* для

исчислений секвенций (или родственные *теоремы нормализации* для *исчислений естественного вывода*) на *инфинитарные* языки по образцу Новикова, Лоренцена, Шютте и Тейта. Некоторые из систем, рассмотренных выше, могут быть прямо переведены в такие языки, и теорема об устранении сечения может быть использована для получения информации о доказуемых вполне упорядочениях и Σ^1_1-теоремах. Несколько результатов, полученных таким образом, упоминаются в 8.2. Значительно более широкий класс теорий может быть рассмотрен с помощью *непрямых* методов. Главные такие методы, применяемые здесь, используют переход к формально интуиционистским теориям (8.4), за которым следует гёделевская *функциональная интерпретация* (8.5), ставящая данной $\mathbf{T}^\omega$ в соответствие некоторую бескванторную теорию функционалов $\mathbf{T}^\omega_0$. Наконец, *термы* теории $\mathbf{T}^\omega_0$ можно анализировать методом *нормализации*. Основной материал, относящийся сюда, приведен в 8.3. Приложения рассматриваются в оставшейся части § 8.

8.2. Прямые методы теории доказательств.

8.2.1. Инфинитарное устранение сечения. Так как эти методы довольно подробно описаны Шютте [1], Тейтом [2], Такеути [1] и в гл. 2, мы упомянем только нужные результаты. Мы обращаем особое внимание на использование *бесконечно длинных формул и выводов*, так как они упрощают рассмотрение и проясняют появление ординалов. Каждая такая формула φ (или вывод d) является *фундированным деревом* и, следовательно, имеет *ординальную длину*, обозначаемую через $|\varphi|$ (через $|d|$). Если используется система, в которой выводятся (конечные) дизъюнкции формул $F = (\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)$, то *правило сечения* может быть сформулировано так:

$$(\mathrm{C}_\varphi) \qquad \frac{\Gamma \vee \varphi \qquad \Gamma \vee \neg\varphi}{\Gamma}.$$

Вывод d называется *свободным от сечения* (или выводом *без сечения*), если в d нет применений этого правила. Ранг сечений $\rho(d)$ вывода d определяется соотношением

$$\rho(d) = \begin{cases} \sup\{|\varphi| + 1 \colon (\mathrm{C}_\varphi) \text{ входит в } d\}, & \text{если } d \text{ содержит сечения,} \\ 0, & \text{если } d \text{ свободен от сечения.} \end{cases} \tag{1}$$

Существенной чертой используемых правил *инфинитарного исчисления предикатов*, отличных от сечения, является *свойство подформульности*: каждая формула в посылке правила является подформулой некоторой формулы из заключения. Это позволяет устанавливать определенные свойства свободных от сечения выводов индукцией по их длине. Тогда основной результат состоит

в том, что любой вывод d может быть преобразован в свободный от сечения вывод d^* с той же последней формулой. Это доказывается прямым обобщением рассуждения Генцена для случая исчисления предикатов первого порядка. Следующая формулировка Тейта [2] дает полезную меру увеличения длины d^* по сравнению с длиной d.

Теорема. *Если* $d \vdash \varphi$ *с* $|d| \leqslant \beta$ *и* $\rho(d) \leqslant \gamma + \omega^\alpha$, *то мы можем найти вывод* d^* *формулы* φ *с* $|d^*| \leqslant \varkappa^{(\alpha)}(\beta)$ *и* $\rho(d^*) \leqslant \gamma$.

В частности, если d имеет конечный ранг сечений $n = \omega^0 \cdot n$, то n-кратное повторение этого результата дает свободный от сечения d^* с прежним заключением, причем $|d^*| < \varepsilon(\beta)$, где $\varepsilon(\beta)$ — наименьшее ε-число, превосходящее β ($\beta < \varepsilon(\beta)$).

8.2.2. Вездесущность ε_0. Пусть $\mathbf{Z}'$ — это $\mathbf{Z}$ в языке с дополнительными сортами переменных и полной индукцией для $\mathbb{N}$, но без дополнительных аксиом. $\mathbf{Z}'$ переводится в инфинитарный язык с помощью перевода $\varphi \to \varphi^+$, при котором $(\exists n \varphi(n))^+ = \bigvee_n \varphi(\bar{n})^+$. Каждый вывод $d \vdash \varphi$ в $\mathbf{Z}'$ можно преобразовать в вывод $d^+ \vdash \varphi^+$ с $|d^+| < \omega \cdot 2$ и $\rho(d^+) < \omega$. Тогда любой такой d преобразуется в свободный от сечения вывод d^* длины $< \varepsilon_0$. Для формул φ любой данной ограниченной сложности m мы можем выразить определение истины Tr_m в $\mathbf{Z}'$. Тогда с помощью свойства подформульности и $\mathrm{TI}(\varepsilon_0)$ мы можем показать, что любая формула из d^* истинна, если d доказывает формулу сложности $\leqslant m$. Это позволяет установить так называемый *принцип рефлексии для* $\mathbf{Z}'$:

$$\mathbf{Z}' + \mathrm{TI}(\varepsilon_0) \vdash \mathrm{Pr}_{\mathbf{Z}'}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi, \tag{1}$$

где $\mathrm{Pr}_{\mathbf{Z}'}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ выражает, что $\mathbf{Z}' \vdash \varphi$. В частности, если мы возьмем $\varphi = \neg\psi$, то отсюда следует, что

$$\mathbf{Z}' + \psi + \mathrm{TI}(\varepsilon_0) \vdash \mathrm{Con}_{(\mathbf{Z}'+\psi)}. \tag{2}$$

Следовательно, по второй теореме Гёделя о неполноте, должен найтись частный случай схемы $\mathrm{TI}(\varepsilon_0)$, который недоказуем в $\mathbf{Z}' + \psi$, если она непротиворечива. Следующее усиление этого результата приведено в статье Крайзеля и Леви [1].

Теорема. *Допустим, что* $\mathbf{S}$ — *непротиворечивое расширение системы* $\mathbf{Z}'$ *аксиомами ограниченной сложности. Тогда имеется частный случай схемы* $\mathrm{TI}(\varepsilon_0)$, *который недоказуем в* $\mathbf{S}$.

В частности, если $\mathbf{Z}'$ — арифметика в языке второго порядка или конечного типа, то любое непротиворечивое расширение $\mathbf{Z}'$ ограниченной сложности имеет недоказуемый частный случай схемы $\mathrm{TI}(\varepsilon_0)$. Это применимо к таким теориям, как

$(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$, $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$, $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$, $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$, $\mathbf{Z}^\omega + (\exists^\mathbb{N}) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$

и т. д. Это неприменимо к (BI) или $(\mathrm{BI}_\prec)$ ($\prec$ примитивно рекурсивно).

8.2.3. Ординальные границы для арифметического и разветвленного анализа. Чтобы перейти к $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$, заменим кванторы $\forall X \varphi(X)$ на $\bigwedge_{\psi \in \mathfrak{A}} \varphi(\psi)$, где $\mathfrak{A}$ — класс арифметических формул. Тогда любой конечный вывод d формулы φ в системе $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA})$ преобразуется непосредственно в вывод d^+ формулы φ^+, где $|d^+| < \omega \cdot 2$ и $\rho(d^+) < \omega \cdot 2$. Применяя теорему из 8.2.1 сначала для того, чтобы уменьшить ранг сечений с $\omega + n$ до ω, а затем с ω до 0, мы получаем свободный от сечения d с $|d^*| < \varepsilon_{\varepsilon_0}$.

Теорема. $(\Pi^0_\infty - \mathrm{CA}) \nvdash \mathrm{I}(\varepsilon_{\varepsilon_0})$.

Ординальные границы для разветвленных систем RA_α можно получить аналогично. Простейшее описание получается, когда α есть ε-число.

Теорема. *Если* $\omega^\alpha = \alpha$, *то* $\mathrm{RA}_\alpha \nvdash \mathrm{I}(\varkappa^{(\alpha)}(0))$.

Отсюда мы получаем, что индукция до Γ_0 (наименьшего решения уравнения $\varkappa^{(\alpha)}(0) = \alpha$) недоказуема в автономной прогрессии разветвленных теорий (ср. 6.4.5).

8.3. Нормализация бесконечных термов

8.3.1. Термы и процедуры редукции. Мы следуем Тейту [1], рассматривая термы, построенные из переменных конечного типа и 0 с помощью функции следования, применения функции к аргументу, *абстракции* ($\lambda a.t$) и *образования последовательности* ($\langle t_n \rangle_n$). Их можно рассматривать аналогично бесконечным выводам, и они имеют определенные технические преимущества по сравнению с использованием комбинаторов и операторов рекурсии. Последние заменяются бесконечными (инфинитарными) термами следующим образом (для любой подходящей комбинации типов):

$$R \longmapsto R^+ = \lambda f \lambda a \langle t_n \rangle_n, \text{ где } t_0 = a,\ t_{n+1} = f 0^{(n)} t_n. \tag{1}$$

И снова каждый терм t является фундированным деревом и имеет длину $|t|$. Замена комбинаторов K и S на $\lambda a \lambda b.a$ и $\lambda f \lambda g \lambda a.fa(ga)$ соответственно преобразует любой обычный терм t в инфинитарный λ-терм t^+ с $|t^+| < \omega \cdot 2$. В общем случае к бесконечным термам могут применяться следующие упрощения или *непосредственные редукции* ($=\!|$ читается «сводится к»):

$(=\!|_1)$ $\qquad (\lambda a t[a])\, s =\!| \, t[s]$,

где $t[s] = \mathrm{subst}(s/a)\, t$;

$(=\!|_2)$ $\qquad \langle t_n \rangle_n 0^{(m)} =\!| \, t_m$;

$(=\!|_3)$ $\qquad \langle t_n \rangle_n r s =\!| \, \langle t_n s \rangle r$.

Последняя редукция применяется лишь в случае, когда $\langle t_n\rangle_n r$ имеет тип, отличный от 0, и r не есть цифра $0^{(n)}$. Рассмотрим наименьшее транзитивное и рефлексивное отношение $=\!|'$, содержащее $=\!|_i$ $(i=1, 2, 3)$ и сохраняющее применение функции к аргументу. Если $t=\!| s$, то t и s определяют один и тот же объект при любой общей оценке их свободных переменных. Мы говорим, что t *несводим* или *нормален*, если $t=\!|s$ влечет $t=s$, т. е. t не имеет непосредственно сводимых подтермов. Такие подтермы имеют *сложность сечения*, аналогичную сложности для правила сечения. Например, сложность терма $(\lambda at[a])s$ есть $\mathrm{lev}(\mathrm{type}(a))$. Тогда $\rho(t)$ определяется как наименьший ординал, больший, чем все такие сложности в t. Отметим, что $\rho(t^+)<\omega$, если t — обычный терм. Тейт [1] получил *теорему нормализации*, из которой нам нужен только следующий частный результат.

Теорема. *Пусть* $\rho(t)<\omega$ *и* $|t|<\varepsilon_0$. *Тогда мы можем найти* t^* *в н. ф. такой, что* $t=\!| t^*$ *и* $|t^*|<\varepsilon_0$.

Доказательство аналогично доказательству для выводов.

8.3.2. Нормальные термы типа 0. Каждый терм t типа 1 определяет ту же функцию, что $\lambda n.tn$. Таким образом, для изучения таких термов достаточно рассматривать нормальные термы типа 0. Если t — терм типа 0, нормален и содержит только числовые свободные переменные, то имеет место один из следующих случаев:

(i) $t=0$;

(ii) $t=s'$, где s нормален;

(iii) t — переменная типа 0;

(iv) $t=\langle t_n\rangle_n s$, где t_n, s все нормальны и имеют тип 0, но s — не цифра.

Отсюда следует, что замкнутые термы типа 0 — цифры. Допустим теперь, что t нормален и содержит свободно только переменные типов 0, 1, 2. Тогда имеет место один из следующих случаев: (i) — (iv) или

(v) $t=f^1(s)$, где f — переменная типа 1, s — нормальный терм типа 0;

(vi) $t=f^2(\lambda n.s)$, где f^2 — переменная типа 2, s — нормальный терм типа 0;

(vii) $t=f^2(\langle t_n\rangle_n)$, где каждый из t_n нормален и имеет тип 0.

Таким образом, мы снова имеем полное порождение нормальных термов типа 0.

8.3.3. 1-сечение (относительной) примитивной рекурсии. Пусть **PR** обозначает класс гёделевских примитивно рекурсивных функционалов конечного типа, т. е. функционалов, определяемых термами, порожденными из 0 и Sc с помощью операторов K, S и R. Для функционала F типа 2 запись $\mathbf{PR}(F)$ обозначает класс, порождаемый, когда в дополнение к предыдущему используется F. Пусть $\mathrm{REC}_{<\varepsilon_0}$ состоит из функционалов типа 1, определенных обычной примитивной рекурсией и трансфинитной рекурсией по любому $<_\alpha$ для $\alpha<\varepsilon_0$. Следующий результат имеется у Тейта [1].

Теорема. $1\text{-sec}(\mathbf{PR})=\mathrm{REC}_{<\varepsilon_0}$.

Доказательство. Согласно 8.3.1 для каждого элемента из $1\text{-sec}(\mathbf{PR})$ имеется обозначение в виде эффективно заданного λ-терма вида $\lambda n.t$, где t — нормальный терм типа 0, содержащий свободно разве лишь 'n',и $|t|<\varepsilon_0$. Тогда значение $\mathrm{Val}(t, n)$ терма t на аргументе n определяется рекурсией по длине t. □

Далее, используя иерархию Шенфилда H_a^F и классы $\mathscr{H}_a^F$ функций, рекурсивных в некотором H_a^F при $|a|<\varepsilon_0$, мы аналогично получаем (Феферман [3]) следующее утверждение.

Теорема. $1\text{-sec}(\mathbf{PR}(F))=\mathscr{H}_{\varepsilon_0}^F$.

Доказательство. Каждый элемент из $1\text{-sec}(\mathbf{PR}(F))$ имеет обозначение в виде некоторого эффективно заданного терма $\lambda n.t$; здесь t содержит свободно разве лишь n и f^2, где f^2 обозначает F, терм t нормален, имеет тип 0 и $|t|<\varepsilon_0$. Прослеживая построение согласно 8.3.2, мы видим, что функция, определяемая термом $\lambda n.t$, рекурсивна в H_a^F, где $|a|=|t|$. □

Следствие. $1\text{-sec}(\mathbf{PR}(\mu))=1\text{-sec}(\mathbf{PR}(\exists^N))=\mathscr{H}_{\varepsilon_0}$.

8.3.4. 1-сечение относительной элементарной примитивной рекурсии. $\widehat{\mathbf{PR}}(F)$ описывается так же, как $\mathbf{PR}(F)$, только вместо оператора R используется $\hat{R}$.

Теорема. *Допустим, что* $\exists^N$ *рекурсивен в* F. *Тогда* $1\text{-sec}(\widehat{\mathbf{PR}}(F))=\mathscr{H}_\omega^F$.

Доказательство (Феферман [3]). Отношение $\hat{R}fanb=m$ арифметически определимо в f, a, n, b, m, так как нам нужно говорить только о конечных последовательностях объектов типа 0. Таким образом, каждый член множества $\widehat{\mathbf{PR}}(F)$ определим конечным λ-термом без операции образования последовательностей, но с $+$ и $\cdot$, причем свободно в него входит разве лишь f^2. Нормализация таких термов происходит в финитном λ-исчислении. □

Следствие. $1\text{-sec}(\widehat{\mathbf{PR}}(\mu))=1\text{-sec}(\widehat{\mathbf{PR}}(\exists^N))=$ *арифметические функции*.

8.4. Переход к формально интуиционистским системам.

8.4.1. Негативный перевод. С каждой рассматриваемой ниже классической теорией **T** мы свяжем формально интуиционистскую теорию $(\mathbf{T})^i$, которая получается выбрасыванием закона исключенного третьего (LEM) из логики, лежащей в основе (так как в общем случае легче анализировать явное содержание тео-

рии $(\mathbf{T})^i$). LEM сохраняется для атомарных формул. Мы подчеркиваем эпитет «формально», так как системы, содержащие функционалы вроде $\exists^{\mathrm{N}}$ или $\exists\downarrow^{\mathrm{N}}$ и т. д., не выражают интуиционистских принципов. В 1933 г. Гёдель дал простой перевод классической арифметики $\mathbf{Z}$ в интуиционистскую арифметику $\mathbf{HA}$ («гейтинговская арифметика»), который непосредственно обобщается до перевода $\mathbf{T}$ в $(\mathbf{T})^i$ для многих из рассматриваемых здесь теорий $\mathbf{T}$. Она переводит каждую формулу φ в $(\varphi)^i$, где $(\ )^i$ сохраняет атомарные формулы и $\wedge$, $\to$, $\forall$, в то время как

$$(\varphi \vee \psi)^i = \neg(\neg(\varphi)^i \wedge \neg(\psi)^i), \tag{1}$$

$$(\exists a\varphi)^i = \neg\forall a\neg(\varphi)^i. \tag{2}$$

Эквивалентным образом, мы можем взять в качестве $(\varphi \vee \psi)^i$ формулу $\neg\neg[(\varphi)^i \vee (\psi)^i]$, а в качестве $(\exists a\varphi)^i$ формулу $\neg\neg\exists a(\varphi)^i$. Дальнейшие детали об этом так называемом негативном переводе (или переводе с помощью *двойного отрицания*) можно найти в 3.8—3.10 гл. 5.

Теорема. *Если* $\mathbf{T}$ *есть свободное от* $(\vee, \exists)$ *расширение системы* $\mathbf{Z}^\omega$, *т. е. получается добавлением разве лишь новых констант и аксиом, не содержащих символов дизъюнкции и кванторов существования, то* $\mathbf{T}$ *переводится в* $(\mathbf{T})^i$.

Система $(\mathbf{Z}^\omega)^i$ обозначается через $\mathbf{HA}^\omega$.

8.4.2. Расширения с помощью некоторых выбирающих операторов. Теорему из 8.4.1 можно применить к $\mathbf{Z}^\omega + (\exists^{\mathrm{N}})$ путем небольшой модификации добавочных аксиом. Однако для использования в дальнейшем мы применим ее вместо этого к классически эквивалентной системе $\mathbf{Z}^\omega + (\mu)$, где неограниченный оператор минимума μ (типа 2) присоединяется вместе с аксиомой

$$(\mu) \qquad fn = 0 \to f(\mu f) = 0 \wedge \mu f \leqslant n.$$

Отметим, что определение $\exists^{\mathrm{N}} f = [0$, если $f(\mu f) = 0$; 1 в противном случае] работает также и с интуиционистской логикой, так что $\mathbf{HA}^\omega + (\mu)$ эквивалентна системе $\mathbf{HA}^\omega + (\exists^{\mathrm{N}})$. Система $\mathbf{Z}^\omega + (\mu)$ непосредственно переводится в $\mathbf{HA}^\omega + (\mu)$. Последняя система определенно не является интуиционистской (конструктивной), так как мы можем вывести $\exists n(fn = 0) \vee \neg\exists n(fn = 0)$ из $f(\mu f) = 0 \vee f(\mu f) \neq 0$. Еще более общо, LEM верен для любой арифметической формулы. Аналогично, для использования в дальнейшем системы $\mathbf{Z}^\omega + (\exists\downarrow^{\mathrm{N}})$ мы проходим через $\mathbf{Z}^\omega + (L)$, где L — оператор выбора самой левой ветви, имеющий аксиому, не содержащую $\vee$, $\exists$:

$$(L) \qquad \forall nf(\bar{g}(n)) = 0 \to \forall nf(\overline{Lf}(n)) = 0 \wedge Lf0 \leqslant g0.$$

Следствие. (i) $\mathbf{Z}^\omega + (\mu)$ *сводится к* $\mathbf{HA}^\omega + (\mu)$ *путем негативного перевода.*

(ii) $\mathbf{Z}^\omega + (L)$ *сводится к* $\mathbf{HA}^\omega + (L)$ *путем негативного перевода.*

8.5. Гёделевская функциональная интерпретация и ее приложения к $\mathbf{Z}^\omega$.

8.5.1. Вид интерпретации. Эта интерпретация была первоначально дана Гёделем [1] для $\mathbf{HA}$, но она непосредственно применима к $\mathbf{HA}^\omega$. Подробности приведены в 5.11 гл. 5, а нам нужно знать лишь следующее. С каждой формулой φ языка системы $\mathbf{HA}^\omega$ связана формула φ^{D}('D' от слова «Dialectica»), имеющая те же свободные переменные, что и φ:

$$\varphi^{\mathrm{D}} = \exists\boldsymbol{a}\forall\boldsymbol{b}\varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — последовательности (возможно, пустые) переменных различных типов, определяемые формулой φ. Кроме того, φ_{D} — бескванторная формула. Особые случаи в индуктивном определении формулы φ^{D} таковы:

$$(\forall c\varphi)^{\mathrm{D}} = \exists f\forall c\boldsymbol{b}\varphi_{\mathrm{D}}(fc, \boldsymbol{b}), \tag{2}$$

$$(\neg\varphi)^{\mathrm{D}} = \exists\boldsymbol{g}\forall\boldsymbol{a}\neg\varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}\boldsymbol{a}). \tag{3}$$

В частности, если список $\boldsymbol{b}$ пуст, то $(\neg\varphi)^{\mathrm{D}} = \forall\boldsymbol{a}\neg\varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{a})$ и $(\neg\neg\varphi)^{\mathrm{D}}$ есть $\exists\boldsymbol{a}\neg\neg\varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{a})$, что эквивалентно $\exists\boldsymbol{a}\varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{a})$, так как атомарные формулы разрешимы.

Следствие. (i). *Если* φ — *экзистенциальная формула, то* $(\varphi^i)^{\mathrm{D}}$ *эквивалентна* φ.

(ii) *Если* $\varphi = \forall\boldsymbol{a}\exists\boldsymbol{b}\theta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *с бескванторной* θ, *то* $(\varphi^i)^{\mathrm{D}}$ *эквивалентна формуле* $\exists f\forall\boldsymbol{a}\theta(\boldsymbol{a}, f\boldsymbol{a})$.

(iii) $((\mathrm{QF} - \mathrm{AC})^i)^{\mathrm{D}}$ *логически истинна.*

8.5.2. Интерпретация систем $\mathbf{HA}^\omega$ и $\mathbf{Z}^\omega$. Пусть $\mathrm{QF} - \mathbf{HA}^\omega$ обозначает бескванторную часть системы $\mathbf{HA}^\omega$. Ее можно непосредственно аксиоматизировать как теорию примитивно рекурсивных функционалов. Поэтому мы обозначим последнюю через $\mathbf{PR}^\omega$ (обычно ее называют «гёделевской системой $\mathbf{T}$»). Рассуждение Гёделя [1] показывает, что верно следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\mathbf{HA}^\omega \vdash \varphi$ *и* $\varphi^{\mathrm{D}} = \exists\boldsymbol{a}\forall\boldsymbol{b}\varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *то для некоторой последовательности* $\boldsymbol{t}$ *термов* $\mathbf{PR}^\omega \vdash \varphi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$.

Следствие 1. *Если* $\mathbf{Z}^\omega + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \vdash \forall a\exists ab\theta(a, b)$ *с бескванторной* θ, *то* $\mathbf{PR}^\omega \vdash \theta(a, ta)$ *для некоторого терма* t.

Каждый терм t является обозначением для некоторого члена множества $\mathbf{PR}$. В силу 8.3.3 мы получаем следующий результат, принадлежащий Крайзелю (ср. главу 2).

Следствие 2. *Доказуемо рекурсивные функции системы* $\mathbf{Z}^\omega$ *образуют в точности класс* $\mathrm{REC}_{<\varepsilon_0}$.

Мы получим аналогичные результаты для теорий с выбирающими функционалами.

8.6. Неконструктивные обобщения функциональной интерпретации.

8.6.1. Общая формулировка. Следующее утверждение получается применением негативного перевода, за которым следует гёделевская интерпретация.

Теорема. *Допустим, что* ψ *не содержит ни* $\vee$, *ни кванторов, но может содержать добавочные константы. Тогда* $\mathbf{Z}^\omega + \psi + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ *имеет гёделевскую интерпретацию в* $\mathbf{PR}^\omega + \psi$.

8.6. Приложение к расширениям операторами $(\exists^N)$ и (μ). В качестве следствия из 8.5 и предыдущей теоремы мы получаем такие утверждения.

Теорема. *Если* $\mathbf{Z}^\omega + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \vdash \forall a \exists b \theta(a, b)$ *с бесквантороной* θ, *то* $\mathbf{PR}^\omega + (\mu) \vdash \theta(a, t[a])$ *для некоторого терма* t *из* $\mathbf{PR}(\mu)$.

Теорема. (i). *Если* $\mathbf{Z}^\omega + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \vdash \exists f^1 \theta(f)$ *с арифметической* θ, *то* $\theta(f)$ *верна для некоторой* f *из* $\mathscr{H}_{\varepsilon_0}$.

(ii) $\mathbf{Z}^\omega + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ *есть консервативное расширение системы* $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$ *относительно* Π^1_2*-предложений.*

Доказательство. (i) Используя (μ), преобразуем θ в бескванторную формулу. Затем применяем предыдущую теорему и то, что $1\text{-sec}(\mathbf{PR}(\mu)) = \mathscr{H}_{\varepsilon_0}$ в силу 8.3.3.

(ii) Рассмотрим Π^1_2-предложение $\forall f \exists g \theta(f, g)$ с арифметической θ, доказуемое в $\mathbf{Z}^\omega + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$. Имеется терм $t[f]$ системы $\mathbf{PR}(\mu)$ такой, что $\theta(f, t[f])$ доказуемо в $\mathbf{PR}^\omega + (\mu)$. В силу 8.3.3 мы имеем $t[f] \in \mathscr{H}^f_{\varepsilon_0}$ равномерно по f, т. е. для некоторого $\alpha < \varepsilon_0$ получаем $t[f] \in \mathscr{H}^f_\alpha$ равномерно по f. Для $|a| = \alpha$ и переменной f существование иерархии H^f_a может быть доказано в $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$. Это рассуждение завершается путем формализации. □

Так как $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ содержится в $\mathbf{Z}^\omega + (\exists^N) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие. (i) $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ *является консервативным расширением системы* $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$ *относительно* Π^1_2*-предложений.*

(ii) $\varkappa^{(\varepsilon_0)}(0)$ *есть супремум доказуемо рекурсивных вполне упорядочений системы* $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$.

Этот результат принадлежит Фридману [1]; природа его доказательства, которое изложено также в статье Фридмана [3], будет обсуждаться в следующем подпункте. Данное только что доказательство через гёделевскую интерпретацию (позволяющее получить обобщение на теории конечного типа) было изложено у Фефермана [3].

Замечание. (i) говорит нам, что $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ сводима к предикативным принципам, хотя на первый взгляд она непредикативна (и ее наименьшая ω-модель HYP наверняка непредикативна).

8.6.3. Приложение к расширениям операторами $(\exists\downarrow^N)$ и (L). Рассуждая по тому же образцу, мы получим следующие утверждения.

Теорема. *Если* $\mathbf{Z}^\omega + (L) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \vdash \forall a \exists b \theta(a, b)$ *с бесквантороной* θ, *то* $\mathbf{PR}^\omega + (L) \vdash \theta(a, t[a])$ *для некоторого терма* t *из* $\mathbf{PR}(L)$.

Теорема. $\mathbf{Z}^\omega + (L) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ — *консервативное расширение теории* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$ *относительно* Π^1_3*-предложений.*

Отметим в связи с последней теоремой, что $\mathscr{H}^L_{\varepsilon_0}$ — это просто одна из форм иерархии гиперскачка до ε_0. Это дает другой результат Фридмана [3].

Следствие. $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$ — *консервативное расширение системы* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$ *относительно* Π^1_3*-предложений.*

Замечание. Нелегко объяснить кратко идею принадлежащего Фридману доказательства следствия (i) из 8.6.2 и последующее лишь обрисовывает его контуры. Допустим, что ψ из класса Σ^1_2 и не противоречит $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$. Нужно показать, что ψ не противоречит $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$. Мы знаем из 8.2.2, что имеется частный случай схемы $\mathrm{TI}(\varepsilon_0, \varphi)$ трансфинитной индукции до ε_0, который не доказуем в $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0} + \psi$. Мы можем пытаться моделировать $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC}) + \psi$ в системе $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0} + \psi + \neg\,\mathrm{TI}(\varepsilon_0, \varphi)$ через множество функций, рекурсивных в некотором H_α таком, что $\varphi(\alpha)$. Это не совсем срабатывает, так как некоторый кусок схемы $\mathrm{TI}(\varepsilon_0)$ все еще приходится использовать для проверки свойств модели. Однако доказательство удается провести путем некоторой модификации этой идеи. Очевидно что, одна из ее черт — центральная роль нестандартных моделей. Этого следовало ожидать от теоретико-модельного рассуждения, так как HYP — наименьшая стандартная модель системы $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$. С помощью аналогичных рассуждений Фридман [3] получил приведенное выше следствие для $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$ и дальнейшие результаты такого рода для систем $(\Sigma^1_k - \mathrm{AC})$, когда $k > 2$.

Другое доказательство следствия в 8.6.2 для $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ было дано Тейтом [2] с использованием методов устранения сечения, развивающих 8.2; обобщение на $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$ рассматривается у Тейта [3].

Еще одно доказательство следствия в 8.6.2 было дано Говардом [1] с использованием конструктивной гёделевской

интерпретации посредством так называемой бар-рекурсии; ср. § 11 главы 5.

8.6.4. Консервативные расширения систем для абсолютных иерархий. Если дан определимый функционал F на подмножествах множества $\mathbb{N}$, то пусть $\mathrm{Hier}^F_{\prec}(X)$ обозначает формулу $\mathrm{Hier}^F_{\prec}(X, \mathbb{N})$ из 6.4.1, выражающую тот факт, что X есть иерархия для F вдоль $\prec$, начиная с $X_0 = \mathbb{N}$. Такие множества X можно называть абсолютными иерархиями для F. Применяя операторы J и J_1 скачка и гиперскачка соответственно, будем писать $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})^-_a$ вместо $\exists X\, \mathrm{Hier}^J_{<a}(X)$ и $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})^-_a$ вместо $\exists X\, \mathrm{Hier}^{J_1}_{<a}(X)$. Тогда, как и раньше, $(\Pi^i_1 - \mathrm{CA})^-_{<a}$ означает совокупность утверждений $(\Pi^i_1 - \mathrm{CA})^-_\beta$ для всех $\beta < \alpha$. Отметим, что $(\Delta^1_{i+1} - \mathrm{CA})^- \supseteq (\Pi^i_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$ для $i = 0, 1$.

Результаты о консервативности из 8.6.2, 8.6.3 можно усилить путем замены $(\Pi^i_1 - \mathrm{CA})_{<\varepsilon_0}$ на $(\Pi^i_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$, однако лишь уменьшив класс сохраняемых утверждений.

Теорема. (i) $\mathbf{Z}^\omega + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ — *консервативное расширение системы* $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$ *относительно* Σ^1_1*-предложений.*

(ii) $\mathbf{Z}^\omega + (L) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ — *консервативное расширение системы* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$ *относительно* Σ^1_2*-предложений.*

Доказательство не требует новых соображений сверх тех, которые намечены выше. Например, в случае (i) мы видели, что из $\mathbf{Z}^\omega + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \vdash \exists b\theta(b)$ с арифметической θ следует, что $\theta(f)$ истинна для некоторого $\alpha < \varepsilon_0$ и $f \in \mathcal{H}_\alpha$. Существование H_α можно доказать в $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$. Затем рассуждение проходит путем формализации этих наблюдений.

Следствие. (i) $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$ — *консервативное расширение системы* $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$ (*и, следовательно, системы* $(\Delta^1_1 - \mathrm{CA})^-$) *относительно* Σ^1_1*-предложений.*

(ii) $(\Sigma^1_2 - \mathrm{DC})$ — *консервативное расширение системы* $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})^-_{<\varepsilon_0}$ (*и, следовательно, системы* $(\Delta^1_2 - \mathrm{CA})^-$) *относительно* Σ^1_2*-предложений.*

Утверждение (i) этого следствия получено у Крайзеля [5], Приложение 2, — его рассуждение приспосабливает (и развивает) рассуждение Фридмана [3].

Замечание. Как отмечает Крайзель [5], если $(\Pi^0_1 - \mathrm{CA})^-_a \vdash J(\beta)$ для $\alpha < \omega_1$, то $\beta < \varepsilon_0$. Это следует из общего результата Крайзеля [4], § 7.3 о том, что $\mathbf{T} \vdash J(\beta)$ влечет $\beta < \varepsilon_0$, где $\mathbf{T}$ — любое расширение системы $\mathbf{Z}^2$ истинными Σ^1_1-предложениями.

8.7. Системы с ограниченной индукцией. Мы используем описанный выше метод, чтобы улучшить результат из 5.5.1. При проверке гёделевской интерпретации для ограниченной индукции $\mathbf{I}^\mathbf{N}$ нужно использовать только оператор $\hat{R}$.

Теорема. *Если в ограниченной системе* $(\mathbf{Z}^\omega) + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC}) \vdash \forall a \exists b \theta(a, b)$ *с бесквантороной* θ, *то* $\widehat{\mathbf{PR}}^{(\omega)} + (\mu) \vdash \theta(a, t[a])$ *для некоторого терма* t, *где* $\widehat{\mathbf{PR}}^{(\omega)}$ — *бесквантороная часть ограниченной* $(\hat{\mathbf{Z}}^{(\omega)})$.

В силу 8.3.4 $1\text{-sec}(\mathbf{PR}(\mu)) =$ арифметические функции. Следовательно, если в рассматриваемой системе доказуемо Σ^1_1-предложение, то это предложение истинно в алгебраической системе для арифметических функций. Далее, формализуя рассуждение, нужное для каждого конкретного вывода в этой системе, мы получим следующий результат.

Теорема. *Ограниченная* $(\hat{\mathbf{Z}}^{(\omega)}) + (\mu) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ — *консервативное расширение системы* $\mathbf{Z}$.

Следствие. *Ограниченная* $(\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})$ — *консервативное расширение системы* $\mathbf{Z}$.

Отметим, что наш метод не работает для ограниченной $(\Sigma^1_1 - \mathrm{DC})$, так как для ее вывода из $(\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ высшего типа и (μ) нам нужен оператор рекурсии R.

Замечание. Приведенные выше теоремы и следствие усиливают результаты о консервативности над $\mathbf{Z}$, полученные (i) Барвайсом и Шлипфом [1] и независимо Фридманом [6] для $(\Sigma^1_1 - \mathrm{AC})$ и (ii) Такеути [1] для теории конечных типов с ограниченной индукцией и арифметическим свертыванием. Можно также получить результат о консервативности ограниченной $\hat{\mathbf{Z}}^\omega + (L) + (\mathrm{QF} - \mathrm{AC})$ и, следовательно, ограниченной $(\Sigma^1_2 - \mathrm{AC})$ над ограниченной $(\Pi^1_1 - \mathrm{CA})$.

§ 9. Источники сведений по другим темам

9.1. Методы и применения теории доказательств.
(i) Исходные статьи (Генцен [1]),
(ii) учебники (Шютте [1], Такеути [2]),
(iii) обзор методов и применений к системам анализа (Крайзель [4]),
(iv) системы натурального вывода и нормализация (Правиц [1]).

9.2. Системы ординальных обозначений.
(i) Системы, основанные на структурах ординальных функций (Феферман [1]),

(ii) системы, использующие высшие числовые классы по Бахману (Бридж [1], Бухгольц [1]),

(iii) ординальные диаграммы (Такеути [2]).

9.3. Предикативность. Характеризации, данные Шютте и Феферманом в терминах автономных разветвленных прогрессий; эквивалентные неразветвленные теории (Феферман [5]).

9.4. Теории обобщенных индуктивных определений.

(i) Одно индуктивное определение (Говард [2]),

(ii) итерированные индуктивные определения (Феферман [2], Цукер [1]).

9.5. Формальные теории ординалов и их функциональные интерпретации.

(i) Конструктивная теория счетных ординалов (Говард [2]),

(ii) теории высших числовых классов (Цукер [1]).

9.6. Интерпретации анализа непрерывными функционалами.

(i) Основные понятия и многообразия интерпретаций (Крайзель [1]),

(ii) интерпретации бар-рекурсивными функционалами (Спектор [1], Говард [1], Лукхардт [1]).

9.7. Функциональные интерпретации с переменными типами (Жирар [1]).

ЛИТЕРАТУРА

Барвайс и Шлипф (Barwise J., Schlipf J.)
1. On recursively saturated models of arithmetic. — In: Model Theory and Algebra: A Memorial Tribute to Abraham Robinson/Ed. D. Saracino and V. B. Weispfennig. Berlin: Springer, 1975, p. 42—55.

Бишоп (Bishop E.)
1. Foundations of Constructive Analysis.— N. Y.: McGraw-Hill, 1967.

Бридж (Bridge D.)
1. A simplification of the Bachmann method for generating large countable ordinals. — J. Symbolic Logic, 1975, **40**, p. 171—185.

Бухгольц (Buchholz W.)
1. Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen. — In: Proof Theory Symposion, Kiel, 1974/Ed. J. Diller and G. H. Müller. Berlin: Springer, 1975, p. 4—25.

Вейль (Weyl G.)
1*. Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. — Leipzig: Gruyter, 1918.

Ганди (Gandy R. O.)
1. Proof of Mostowski's conjecture. — Bull. Acad. Polon. Sci., 1960, **8**, p. 571—575.
2. General recursive functions of finite type and hierarchies of functionals.— Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont-Ferrand, 1967, **4**, p. 5—24.

Гаррисон (Harrison J.)
1. Recursive pseudo-well-orderings. — Trans. Amer. Math., Soc., 1968, **131**, p. 526—543.

Генцен (Gentzen G.)
1. The Collected Papers of Gerhard Gentzen/Ed. M. E Szabo. — Amsterdam: North-Holland, 1969. [Русский перевод большинства статей в кн.: Математическая теория логического вывода.—М.: Наука, 1967.]

Гёдель (Gödel K.)
1. Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes. — Dialectica, 1958, **12**, S. 280—287. [Русский перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 299—310.]

Гжегорчик (Grzegorczyk A.)
1. Elementarily definable analysis. — Fundam. math., 1955, **41**, p. 311—338.

Гильберт, Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)
1. Grundlagen der Mathematik, II. — Berlin: Springer, 1939. [Русский перевод: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Теория доказательств. — М.: Наука, 1982.]

Говард (Howard W. A.)
1. Functional interpretation of bar induction by bar recursion. — Compositio math., 1968, **20**, p. 107—124.
2. A system of abstract constructive ordinals. — J. Symbolic Logic, 1972, **37**, p. 355—374.

Жирар (Girard J. Y.)
1. Une extension de l'interpretation de Gödel à l'analyse et son application à l'élimination des coupures. — In: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium./Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 63—92.

Клини (Kleene S. C.)
1. Quantification of number-theoretic functions. — Compositio math., 1959, **14**, p. 23—40.
2. Countable functionals. — In: Constructivity in Mathematics/Ed. A. Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 81—100.
3. Recursive functionals and quantifiers of finite types, I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, p. 1—52.

Крайзель (Kreisel G.)
1. Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite type. — In: Constructivity in Mathematics/Ed. A. Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 101—128.
2. Analysis of the Cantor-Bendixson theorem by means of the analytic hierarchy. — Bull. Acad. Polon. Sci., 1959, **7**, p. 621—626.
3. The axiom of choice and the class of hyperarithmetic functions. — Indag. math., 1962, **24**, p. 307—319.
4. A survey of proof theory. — J. Symbolic Logic, 1968, **33**, p. 321—388.
5. Wie die Beweistheorie zu ihren Ordinalzahlen kam und kommt. — Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1977, **78**, № 4, S. 177—223.

Крайзель и Леви (Kreisel G., Levy A.)
1. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1968, **14**, p. 97—142.

Лоренцен (Lorenzen P.)
1. Mass und Integral in der konstruktiven Analysis. — Math. Z., 1951, **54**, S. 275—290.
2. Differential und Integral, eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis. — Frankfurt a. M.: Akad. Verlag, 1965.

Лукхардт (Luckhardt H.)
1. Extensional Gödel Functional Interpretation. A Consistency Proof of Classical Analysis. — Berlin: Springer, 1973.

Мартин (Martin D. A.)
1. Borel determinacy. — Ann. Math., 1975, **102**, p. 363—371.

Правиц (Prawitz D.)
1. Ideas and results in proof theory. — In: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium/Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 235—327.

Роджерс (Rogers H.)
1. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. — N. Y.: McGraw-Hill, 1967. [Русский перевод: Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.]

Спектор (Spector C.)
1. Provably recursive functionals of analysis. — In: Recursive Function Theory/Ed. J. Dekker. Proceedings of symposia in pure mathematics, 5, Providence (Rhode Island): Amer. Math. Soc., 1962, p. 1—27.

Стил (Steel J.)
1. Forcing with tagged trees. — Notices Amer. Math., Soc., 1974, 21, p. A627.

Такеути (Takeuti G.)
1. A conservative extension of Peano arithmetic, 1973.
2. Proof Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1975. [Русский перевод: Такеути Г. Теория доказательств. — М.: Мир, 1978.]

Тейт (Tait W. W.)
1. Infinitely long terms of transfinite type. — In: Formal Systems and Recursive Funtions/Ed. J. Crossley and M. A. E. Dummett. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 176—185.
2. Normal derivability in classical logic. — In: The Syntax and Semantics of Infinitary Languages/Ed. J. Barwise. Berlin: Springer, 1968, p. 204—236.
3. Applications of the cut-elimination theorem to some subsubstems of classical analysis. — In: Intuitionism and Proof Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 475—488.

Феферман (Feferman S.)
1. Systems of predicative analysis, II: Representations of ordinals. — J. Symbolic Logic, 1968, 33, p. 193—219.
2. Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. — In: Intuitionism and Proof-Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 303—326.
3. Ordinals and functionals in proof theory, — In: Proceedings of the International Congress of Mathematics, Nice, 1970, 1. Paris: Gauthier-Villars, 1971, p. 229—233.
4. Impredicativity of the existence of the largest divisible subgroup of an Abelian p-group. — In: Model Theory and Algebra: A Memorial Tribute to Abraham Robinson/Ed. D. Saracino and V. B. Weispfennig. Berlin: Springer, 1975, p. 117—130.
5. A more perspicuous formal system for predicativity. — In: Konstruktionen versus Positionen. Walter de Gruyter, 1979.
6. Explicit content of actual mathematical analysis. — In: Perspectives in Mathematical Logic. Berlin: Springer, 1983.

Феферман, Спектор (Feferman S., Spector C.)
1. Incompleteness along paths in progressions of theories. — J. Symbolic Logic, 1962, 27, p. 383—390.

Фридман (Friedman H.)
1. Subsystems of set-theory and analysis: Dissertation. — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Mass.), 1967.
2. Bar induction and Π^1_1 — CA. — J. Symbolic Logic, 1969, 34, p. 353—362.

3. Iterated inductive definitions and Σ^1_2 — AC. — In: Intuitionism and Proof Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 435—442.
4. Higher set theory and mathematical practice. — Ann. Math. Logic, 1970, 2, p. 325—357.
5. Axiomatic recursive function theory. — In: Logic Colloquium'69/Ed. R. O. Gandy and C. E. M. Yates. Amstredam: North-Holland, 1971, p. 113—138.
6. Systems of second-order arithmetic with restricted induction. — Preprint, 1975.

Цукер (Zucker J. I.)
1. Iterated inductive definitions, trees and ordinals. — In: Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. Berlin: Springer, 1973, p. 392—453.

Чёрч (Church A.)
1. A formulation of the simple theory of types. — J. Symbolic Logic, 1940, 5, p. 56—68.

Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. A hierarchy based on a type 2 object. — Trans. Amer. Math. Soc., 1968, 134, p. 103—108.

Шпекер (Specker E.)
1. Ramsey's theorem does not hold in recursive set theory. — In: Logic Colloquium '69/Ed. R. O. Gandy and C. E. M. Yates. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 439—442.

Шютте (Schütte K.)
1. Beweistheorie. — Berlin: Springer, 1960.

Глава 5

АСПЕКТЫ КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКИ

А. С. Трулстра *)

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

1.1. Прилагательное «конструктивный» в названии этой главы понимается в широком смысле и включает такие школы и направления, как:

(a) финитизм (Гильберт и Бернайс [1], § 2c, Крайзель и Кривин [1], приложение II B);

(b) конструктивный рекурсивный анализ CRA, который мы понимаем как конструктивную математику в смысле Шанина [1], [3], [4] и Маркова [1]—[3];

(c) интуиционизм (в смысле Брауэра [2]—[4], Гейтинга [4], Трулстры [1]);

(d) конструктивизм в узком смысле (например, Бишоп [1]), который можно описать как интуиционизм без свободно становящихся последовательностей и без тезиса Чёрча.

1.2. В этой главе мы подходим к конструктивизму как к изучению особой области в совокупности математического опыта.

*) Автор благодарен Г. Е. Минцу за информацию о русском конструктивизме и Г. Крайзелю за критику первого варианта этой статьи.

Определенные аспекты («явления» или «вопросы») естественно появляются в связи с таким изучением; здесь мы занимаемся преимущественно такими аспектами, которые имеют математические следствия. Мы не пытаемся ни развивать систематически какую-либо конкретную философию математики, ни проводить детальное сравнение между различными школами конструктивизма.

Тем не менее нам удобно принять в качестве общей основы (или «рамок») нашего обсуждения один конкретный подход, а именно либеральную форму интуиционизма. Поэтому такой подход был выделен. Объективные причины такого выбора просты: большинство других конструктивных подходов может быть описано как ограничения или варианты этой формы интуиционизма (например, финитизм — как ограничение, получаемое выбрасыванием «абстрактных» объектов), но не наоборот. Мы, однако, не будем заниматься изложением этого подхода как замкнутого целого.

1.3. Хотя прилагательное «конструктивный» в этой главе не обозначает отчетливой, резко отграниченной части математики, различные тенденции имеют нечто общее: все они удовлетворяют требованиям «наивного» конструктивизма, соответствующим наивному применению слова «конструктивный», которое является обычным среди математиков («наивный» употребляется здесь не в уничижительном смысле). Это наивное применение касается интерпретации экзистенциальных утверждений: доказательство утверждения $\exists x A x$ конструктивно, если мы можем, исходя из него, найти конкретный x (терм нашего языка), удовлетворяющий условию A. Каково бы ни было точное содержание конструктивизма, это требование обычно не вызывает у нас сомнения (сравним это с наивными представлениями о *площади поверхности* или *множестве*, которые не вызывают сомнений в случае площади треугольника или конечного множества). Типичным примером является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Существуют два иррациональных числа a и b такие, что a^b рационально.*

Неконструктивное доказательство может быть дано следующим образом. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ либо рационально, либо иррационально. В первом случае мы можем взять $a = b = \sqrt{2}$; во втором случае мы можем взять $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$, так как тогда $a^b = 2$.

Число таких примеров легко умножить. Требования наивного конструктивизма зачастую весьма хорошо можно выразить в математических терминах без какого-либо упоминания «конструктивности». Например, если $\exists x A(x, y_1, \ldots, y_n)$ выражает существование решения диофантова уравнения, то имеется

очевидная разница между результатом, который дает нам границу для *числа решений* x в зависимости от параметров $y_1, \ldots, y_n$, и результатом, который дает нам границу для величины самих решений.

Уже наивный конструктивизм приводит к интересным математическим проблемам. Например, если мы доказали какое-то утверждение вида $\exists x((Ax \wedge x = t_1) \vee (Ax \wedge x = t_2))$ для заданных термов t_1, t_2, то можем ли мы доказать также и $\exists x(Ax \wedge x = t_1)$ или $\exists x(Ax \wedge x = t_2)$. (Ср. пример выше.) Оказывается, что необходимо ограничение на логические правила, но какое ограничение? Имеется ли новая интерпретация логических связок, соответствующая этому ограничению? Такие вопросы быстро выводят нас из области наивного конструктивизма.

1.4. Иногда прилагательное «конструктивный» понимается даже еще более расширительно, и считается, что оно включает такие взгляды, как предикативизм (например, Вейль [1] или подстрочное примечание Гёделя (добавленное при перепечатке его статьи) в хрестоматии Бенасеррафа и Патнема [1], с. 211), где в основе лежит классическая логика, а ограничения относятся к допускаемым принципам определения. Однако классический предикативизм выходит за рамки этой статьи.

Другое конструктивистское направление, где в основе лежит классическая логика, — это классический рекурсивный анализ RA; оно часто будет обсуждаться для сравнения.

1.5. Главные аспекты конструктивизма, которые мы будем обсуждать, таковы:

(i) Роль логики и абстрактных понятий (например, в качестве «сокращений», делающих рассуждения более понятными); редукции к бескванторным утверждениям; интерпретация логических операций (см. § 2, пп. 5.7, 7.2, 11.4).

(ii) «Интенсиональные» аспекты. При самом широком понимании это — очень распространенное явление даже в классической математике, однако в конструктивной математике нам часто приходится уделять внимание тому, каким образом объект нам задан, в то время как классически это не обязательно. (Пример: вещественное число задано нам как генератор вещественного числа, т. е. как последовательность Коши рациональных чисел.) По поводу этих аспектов см. 4.2 (ii), 10.3, 10.4, 11.7 (iii).

(iii) Общезначимость тезиса Чёрча (см. § 4).

(iv) Аксиомы непрерывности, возможность теории непрерывных кванторов (§ 6).

(v) Полезность субъективистской интерпретации (2.2 (i), 7.2).

(vi) Стремление к явной определимости (4.15).

(vii) Схема Маркова (§ 8).

(viii) Связь между общезначимостью для интуиционистской логики предикатов и математическими допущениями (§ 9).

(ix) Существование классических аналогов для задач конструктивной математики (4.14, 5.14) и систематических процедур конструктивизации классических теорем (§ 12).

Разумеется, многие из этих аспектов взаимосвязаны: например, тезис Чёрча весьма откровенно требует внимания к интенсиональным аспектам, и специальная форма схемы Маркова возникает при обсуждении аспекта (viii). С целью облегчить изложение мы не стали разбивать главу в соответствии с этими аспектами.

Мы считаем, что понятие натурального числа, индукция по натуральным числам и введение рациональных и целых чисел не представляют проблем, и подразумеваем их.

Привлекая внимание к различным аспектам конструктивизма, мы введем определенные математические методы (вроде реализуемости или устранения свободно становящихся последовательностей), которые могут быть использованы для изучения этих аспектов. Эта глава является не обзором конструктивизма, а лишь обзором упомянутых аспектов. Мы не претендуем и на полноту библиографии; упоминаемые работы включены туда либо по историческим причинам, либо для помощи в дальнейшем изучении обсуждаемых вопросов.

Как читать эту главу. Для читателей, совсем или почти совсем не сталкивавшихся с конструктивной математикой, лучше всего, вероятно, начать с § 1, затем перейти к пп. 2.1 и 2.2, § 5, пп. 6.1 — 6.4 (некоторые из применяемых там обозначений объясняются в 3.7), а затем вернуться к математическим вопросам: пп. 2.3 — 2.5, §§ 3 и 4, пп. 6.5 — 6.23, §§ 7—12.

Те читатели, которые более или менее знакомы с конструктивной математикой, могут читать эту главу в обычном порядке, пропустив § 5 (возвращаясь к нему для справок, когда это потребуется в дальнейшем).

Обе категории читателей могут пропустить при первом чтении §§ 7 и 9.

§ 2. Логика

2.1. Мы опишем сначала в качестве исходного пункта разъяснение логических операций по Брауэру — Гейтингу — Крайзелю (сокращенно «БГК»). Укажем заранее, что:

(1) мы не собираемся подробно разрабатывать эти разъяснения;

(2) не имеется в виду, что они «редуктивны», т. е. дают разъяснение в терминах *более простых* понятий, которые считаются понятными (отметим, что классическое определение истинности

для логических операторов также не является «редуктивным» в этом смысле);

(3) основная цель этих разъяснений — служить основой для сравнения с другими интерпретациями (например, с реализуемостью из 4.3).

Это разъяснение использует исходные понятия (конструктивного) доказательства и конструкции и задает смысл «доказательства составного утверждения» через «доказательство конституенты».

(a) Доказательство утверждения $A \wedge B$ состоит из доказательства утверждения A и доказательства утверждения B.

(b) Доказательство утверждения $A \vee B$ состоит в указании доказательства A или доказательства B.

(c) Доказательство утверждения $A \to B$ состоит из конструкции c, которая преобразует любое доказательство утверждения A в доказательство утверждения B (*вместе* с обоснованием того, что c действительно обладает этим свойством; d доказывает $A \Rightarrow cd$ доказывает B).

(d) $\bot$ — недоказуемое утверждение. Следовательно, доказательство утверждения $\neg A$ (определяемого как $A \to \bot$) — это конструкция, которая преобразует любое доказательство утверждения A в доказательство утверждения $\bot$.

(e) Если переменная x пробегает «базисную» область D (т. е. область такую, что каждая принадлежащая ей конструкция (объект) задана как таковая; иными словами, элементы d области D «несут в себе доказательство» того, что они принадлежат D), то мы можем разъяснить доказательство утверждения $\forall x Ax$ как конструкцию c, которая в применении к любому $d \in D$ дает доказательство $c(d)$ утверждения Ad вместе с обоснованием того, что c действительно обладает этим свойством. Натуральные числа являются примером такой базисной области.

Если D — произвольная область, то c должна действовать на парах d, d', где d — элемент области D, а d' — доказательство того, что $d \in D$.

(f) Для переменной x, пробегающей базисную область D, доказательство утверждения $\exists x Ax$ задано как пара c, d, где c — доказательство формулы Ad, а $d \in D$.

Для произвольной области нам нужна тройка (c, d, d'), где c — доказательство формулы Ad, d' — доказательство того, что $d \in D$.

Чтобы проиллюстрировать эту интерпретацию на примере, рассмотрим утверждение вида $C \equiv (A \to \exists x B)$. Доказательство утверждения C содержит преобразование τ доказательств утверждения A в доказательства утверждения $\exists x Bx$. Следовательно, в частности, τ показывает, как получить x такой, что Bx, из доказательства утверждения A. Классически оправдано

$(A \to \exists x B) \to \exists x (A \to B)$. При БГК-интерпретации величина x, заданная преобразованием τ, может существенно зависеть от информации, содержащейся в доказательстве утверждения A. Мы не можем ожидать, что x можно определить априори, как это требуется для доказательства утверждения $\exists x (A \to Bx)$.

2.2. Замечания.

2.2.1. Разумно предположить, что условие «c есть доказательство формулы A» разрешимо: если конструкция доказывает некоторое утверждение, то мы можем получить это утверждение из доказательства. (В субъективистских терминах: мы распознаем доказательство, когда видим его; если мы сомневаемся, то (для нас) это — не доказательство.)

2.2.2. Такая интерпретация логических констант представляет собой первый пример введения *абстрактных* концепций («доказательство», «конструкция») в конструктивную математику, и именно наше понимание этих концепций (размышление, рефлексия о них) позволяет нам усмотреть, что законы интуиционистской логики предикатов общезначимы при этой интерпретации (каковы бы ни были уточнения экстенсионалов концепций доказательства и конструкции, разъяснение достаточно ясно для этого).

В финитизме мы не разрешаем рассуждения об абстрактных понятиях; мы ограничиваемся рассмотрением «обозримых» объектов. Таким образом, мы можем рассматривать натуральные числа и *конкретные* правила, представляющие теоретико-числовые функции; однако не рассматривается общая (абстрактная) концепция правила, которое каждому натуральному числу ставит в соответствие другое натуральное число.

Утверждение вида $\forall x (t_1[x] = 0)$ (где x пробегает натуральные числа, а t_1 — фиксированный терм с параметром x) можно считать (финитистски) установленным, если у нас есть метод установления равенства $t_1[\bar{n}] = 0$ для каждой цифры $\bar{n}$. Импликация $t_1[x] = 0 \to t_2[x] = 0$ также не представляет проблемы, так как она эквивалентна равенству $(1 \dot{-} t_1[x])\, t_2[x] = 0$, но импликацию

$$\forall x (t_1[x] = 0) \to \forall x (t_2[x] = 0) \tag{1}$$

не удается «понять финитистски» саму по себе. Мы можем установить (1) финитистски осмысленным методом, описав конкретный терм t такой, что

$$t_1[t[x]] = 0 \to t_2[x] = 0 \text{ для всех } x. \tag{2}$$

2.2.3. При БГК-разъяснении логические сложные высказывания вроде $\exists x Ax$ или $A \to B$ утверждают существование определенной информации (т. е. доказательство таких высказываний должно содержать такую информацию), которая не

выявлена непосредственно в этом высказывании. Поэтому замена логически сложного высказывания на соответствующее ему, в котором выявлена бо́льшая до́ля этой информации, можно описать как шаг к более «свободной от логики» формулировке. Первый пример — приведенный выше переход от (1) к (2) в нашем обсуждении финитизма.

Другой пример — замена частично определенных операторов на всюду определенные (тотальные). Допустим, например, что у нас есть утверждение, где участвует частичная операция f,

$$\forall x\,(Ax \to !fx \wedge B(fx)) \tag{3}$$

(где $!fx$ означает, что fx определено). По любому x и любому доказательству утверждения Ax мы можем построить fx. Чтобы показать, что fx определено, и для вычисления fx нам нужна некоторая информация i, содержащаяся в доказательстве утверждения Ax; допустим для определенности, что всевозможные значения i закодированы *всеми* элементами $\mathbb{N}$. Выявляя эту информацию, мы можем заменить f на f', Ax на $A'(i, x)$ ($\equiv$«Ax имеет доказательство, содержащее информацию i») и переформулировать (3) в виде

$$\forall ix\,(A'(i,\ x) \to B(f'(i,\ x))), \tag{4}$$

где f' теперь уже тотальна. Если предположить, что $A'(i, x)$ имеет более низкую логическую сложность, чем A, то мы сумели заменить утверждение (3) более «свободным от логики» утверждением. Конкретные примеры см. в 5.7. Заметим, однако, что замена логически сложных утверждений на «свободные от логики» утверждения, содержащие более выявленную информацию, может приводить к потере понятности; с точки зрения конструктивной математики проблема в том, чтобы добавить «достаточно, но не слишком много» дополнительной информации.

2.2.4. Не предполагавшиеся заранее варианты изложенной выше схемы разъяснения зачастую более полезны (в техническом отношении), чем сама эта схема: реализуемость — как раз такой случай. Данное выше разъяснение не принимается в качестве основы, например, такими конструктивистами, как А. А. Марков и Н. А. Шанин; мы вернемся к этому вопросу при обсуждении реализуемости.

2.2.5. Импликация по своему характеру довольно похожа на квантор всеобщности в этой схеме разъяснения; поэтому неудивительно, что вложенность импликаций необходимо учитывать в подходящей мере логической сложности (в противоположность классическому случаю, где необходимо считать только число перемен кванторов). Результат Де Йонга [1], § 5 иллюстрирует это замечание: существует формула A языка $\mathbf{L}[\mathbf{HA}]$ такая, что ни для какой Bx языка $\mathbf{L}[\mathbf{HA}]$ не верно, что $\mathbf{HA} \vdash B(\bar{n}) \leftrightarrow g_n(A)$ доказуемо для всех n, где $g_n(p)$, $n = 0, 1, \ldots$, перечисляет все пропозициональные формулы от одной переменной.

2.3. Формальная система интуиционистского исчисления предикатов IPC. Мы будем использовать x, y, z, u, v, w для обозначения индивидных переменных, t, t' — для обозначения термов, A, B, C — для формул, $\bot$ — для обозначения константы «ложь». Различные формализации интуиционистской логики предикатов распадаются на три типа:

(a) Системы гильбертовского типа (Фиттинг [1], Клини [2], Трулстра [3], 1.1.3).

(b) Системы натурального вывода (Правиц [1]).

(c) Исчисления секвенций (Фиттинг [1]).

Каждый из этих типов имеет свою область применимости, достоинства и недостатки. Мы опишем здесь систему гильбертовского типа, которая весьма удобна для метаматематических рассуждений (вроде доказательств корректности интерпретаций) с использованием индукции по длине выводов. Эта система заимствована у Гёделя [2]. В качестве метаматематических операторов мы используем

$$\Rightarrow,\quad \Leftrightarrow$$

с очевидной интерпретацией ($\Rightarrow$ означает переход по правилу вывода):

(1) $A,\ A \to B \Rightarrow B$;

(2) $A \to B,\ B \to C \Rightarrow A \to C$;

(3) $A \vee A \to A,\ A \to A \wedge A$;

(4) $A \to A \vee B,\ A \wedge B \to A$;

(5) $A \vee B \to B \vee A,\ A \wedge B \to B \wedge A$;

(6) $A \to B \Rightarrow C \vee A \to C \vee B$;

(7) $A \wedge B \to C \Rightarrow A \to (B \to C)$;

(8) $A \to (B \to C) \Rightarrow A \wedge B \to C$;

(9) $\bot \to A$;

(10) $B \to Ax \Rightarrow B \to \forall x Ax$ (x не входит свободно в B);

(11) $\forall x Ax \to At$ (t свободен для x в A);

(12) $At \to \exists x Ax$ (t свободен для x в A);

(13) $Ax \to B \Rightarrow \exists x Ax \to B$ (x не входит свободно в B).

В (10) и (13) предполагается, что вывод посылки не зависит от допущений, содержащих x свободно.

2.4. «Не предполагавшиеся заранее» интерпретации интуиционистской логики распадаются на два типа.

(i) Модификации схемы БГК-разъяснения: реализуемость и модифицированная реализуемость, гёделевская интерпретация (см. 4.2 и 11.2).

(ii) Семантики «истинностного» типа, например топологические модели Бета и Крипке.

В этом случае связь с БГК-разъяснением намного менее непосредственна. Мы не будем здесь обсуждать подробно семантики этого типа. Некоторые замечания содержатся в § 9.

Различные семантики «истинностного» типа показывают, что правила интуиционистской логики пролезают в различные места под маской хорошо известных классических структур, и, вероятно, стоит упомянуть здесь, что «логика» форсинга — это в действительности интуиционистская логика (Крипке [1], с. 118—120).

Поэтому кажется, что интуиционистская логика может претендовать на определенный интерес сама по себе, совершенно независимо от каких-либо философских предубеждений.

Для различных типов интерпретаций (семантик) мы можем, конечно, изучать проблему полноты. Для различных семантик «истинностного» типа существуют хотя бы классические доказательства полноты, но, с другой стороны, для интуитивного понятия общезначимости как «конструктивной истинности во всех структурах» у нас есть лишь частичные результаты. (См. замечания в § 9; обзор результатов о полноте для интуитивного понятия общезначимости приведен у Трулстры [8].)

2.5. Некоторые формальные свойства системы IPC; ссылки на литературу.

2.5.1. Различные формальные системы для **IPC**: исчисление натуральных выводов у Правица [1]; секвенциальные исчисления у Правица [1], Приложение А, Клини [2], гл. XV, Фиттинга [1], гл. 5, § 1, гл. 6, § 4; исчисления гильбертовского типа у Трулстры [3], 1.1.3, 1.1.4, Фиттинга [1], гл. 5, §§ 7, 8, Клини [2], гл. IV. Эти источники содержат также доказательства эквивалентности различных систем.

2.5.2. Уже одноместный фрагмент **IPC** (с единственной одноместной предикатной буквой) неразрешим. Доказательство, принадлежащее Д. М. Габбаю*), см., например, у Сморинского [2], с. 115, IIIB. Класс предваренных формул разрешим: Клини [2], § 80 дает разрешающий метод для пропозициональных формул, который легко распространяется на предваренные формулы.

2.5.3. Устранение сечения и нормализация: Правиц [1], гл. IV, Клини [2], гл. XIV.

*) См. также работу Маслов С. Ю., Минц Г. Е., Оревков В. П. Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные. — ДАН СССР, 1965, **163**, № 2, с. 295—297. — *Прим. ред.*

2.5.4. IPC обладает DP (свойством дизъюнктивности) и ED (явной определимостью или E-свойством):

DP $\quad \vdash A \vee B \Rightarrow \vdash A$ или $\vdash B$,

ED $\quad \vdash \exists x Ax \Rightarrow \vdash At$ для подходящего терма t.

Это можно получить из 2.5.3 в качестве следствия. Обобщения DP и ED см. у Клини [5], [6].

2.5.5. Интерполяционная теорема была впервые доказана у Шютте [1]; другие доказательства имеются у Правица [1], гл. IV, § 3, Фиттинга [1], гл. 6, § 5; распространение на язык с равенством и функциональными символами — у Нагасимы [1]. Этот результат может быть получен в качестве следствия из 2.5.3.

2.5.6. О связях между **CPC** (= классическая логика предикатов) и **IPC** см. 3.8—3.10 и Клини [2], § 81; обобщение — у Минца и Оревкова [1].

2.5.7. Более подробное обсуждение БГК-разъяснения см. у Трулстры [1], § 2. Относительно происхождения этого разъяснения см., например, Брауэр [4], Гейтинг [1]—[3], Крайзель [5]. Конкурирующую интерпретацию см. у Мартин-Лёфа [2].

§ 3. Некоторые языки, формальные системы и обозначения; гёделевский отрицательный перевод

3.1. Язык арифметики первого порядка $L_0 = L[HA]$. Этот язык содержит числовые переменные (x, y, z, u, v, w), константы 0 (нуль), S (функция следования, т. е. прибавление 1), константу для каждой примитивно рекурсивной функции, $=$ (равенство), а также логические операторы $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\rightarrow$; $\bot$ отождествляется с $0 = S0$.

3.2. Формальная система HA интуиционистской арифметики. Эта система основана на логике предикатов первого порядка, обычных аксиомах для равенства и функции следования, определяющих аксиомах для всех примитивно рекурсивных функций и схеме индукции. Эту систему иногда называют гейтинговской арифметикой.

3.3. Язык $L_1 = L[EL]$ элементарного анализа. Мы расширяем язык $L[HA]$ переменными (a, b, c, d) для одноместных теоретико-числовых функций, константами Ap (аппликация, применение функции к аргументу), П (примитивная рекурсия) и λx (оператор абстракции для явных определений). К логическим операциям добавляются теперь кванторы по функциям.

3.4. Элементарный анализ EL. Аксиомы и схемы системы **HA** обобщаются на язык системы **EL**, оператор абстракции удовлетворяет равенству

$$(\lambda x\, t[x])t' = t[t'],$$

а оператор рекурсии Π — равенствам

$$\Pi\varphi t0 = t,\ \Pi\varphi t(Sx) = \varphi(\Pi\varphi t x,\ x).$$

Наконец, мы добавляем схему

$\mathrm{QF}-\mathrm{AC}_{00}$ $\quad \forall x\exists y A(x, y) \to \exists a\forall x A(x, ax)$ (A бесквантороная).

Нам удобно будет писать **EL*** вместо **EL**, когда мы будем использовать строчные греческие буквы α, β, γ, δ для обозначения функциональных переменных; предполагается, что эти переменные отличны от переменных, обозначаемых через a, b, c, d. Очевидно, что **EL** — консервативное расширение системы **HA**: нам нужно только интерпретировать функциональные переменные как пробегающие все общерекурсивные функции.

Интереснее и гораздо труднее доказать, что относительно **HA** консервативна система $\mathbf{HA}+\mathrm{AC}_{01}$, где AC_{01} — это схема $\forall x\exists a A(x, a) \to \exists b\forall x A(x, (b)_x)$. Здесь $(b)_x = \lambda y.bj(x, y)$, где j — (примитивно рекурсивная) спаривающая функция из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. Первое доказательство этого факта имеется у Гудмена [1]; новое, совершенно иное доказательство — у Минца [1].

3.5. Язык $L_2 = L[HAS]$ арифметики второго порядка. Мы добавляем к языку системы **HA** переменные X, Y, Z для видов (множеств) натуральных чисел. Исходные формулы теперь имеют вид $t_1 = t_2$ или Xt_1 (иначе $t_1 \in X$); добавляются также кванторы по множествам.

3.6. Арифметика второго порядка: HAS. Теперь система **HA** расширяется добавлением схемы свертывания

CA $\qquad \exists X\forall x[Ax \leftrightarrow Xx]$

(A — любая формула языка $L[\mathbf{HAS}]$, не содержащая X свободно).

3.7. Некоторые обозначения и соглашения. Большинство наших обозначений стандартны. Для ссылок ниже мы приводим здесь главные из них.

3.7.1. Спаривание, кодирование конечных последовательностей. Предполагается, что j — примитивно рекурсивная спаривающая функция, отображающая $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$ и имеющая примитивно рекурсивные обратные функции. Мы используем в

качестве сокращений

$$\varphi(x, y) \equiv_{\mathrm{def}} \varphi j(x, y) \quad (\varphi \text{ — одноместная функция}),$$
$$X(x, y) \equiv_{\mathrm{def}} Xj(x, y) \quad (X \text{ — переменная для множеств}).$$

Мы предполагаем, что задано примитивно рекурсивное кодирование конечных последовательностей натуральных чисел на натуральные числа;

$\langle x_0, \ldots, x_u\rangle$ — код последовательности $x_0, \ldots, x_u$,
$\langle\ \rangle = 0$;
$\hat{x} \equiv_{\mathrm{def}} \langle x\rangle$;

lth обозначает функцию длины, $*$ — соединение последовательностей, $(n)_x$ — функцию, удовлетворяющую для $n = \langle x_0, \ldots, x_u\rangle$ соотношениям

$$(n)_y = x_y \quad \text{для} \quad y \leqslant u; \qquad (n)_y = 0 \quad \text{для} \quad y > u;$$

предполагается, что $*$ и $\lambda n\lambda y(n)_y$ примитивно рекурсивны.

3.7.2. Обозначения, относящиеся к функциям.

$$\bar{\alpha}x \equiv_{\mathrm{def}} \langle\alpha 0, \ldots, \alpha(x-1)\rangle,\ \bar{\alpha}0 = \langle\ \rangle;$$
$$n \leqslant m \equiv_{\mathrm{def}} \exists n'(n * n' = m),\ n < m \equiv_{\mathrm{def}} n \leqslant m \wedge n \neq m;$$
$$\alpha \in n \equiv_{\mathrm{def}} \exists x(\bar{\alpha}x = n);$$
$$\alpha(\beta) \simeq x \equiv_{\mathrm{def}} \exists y(\alpha(\bar{\beta}y) = x+1);$$
$$!\alpha(\beta) \equiv_{\mathrm{def}} \exists!x(\alpha(\beta) \simeq x);$$
$$(\alpha\,|\,\beta)(x) \simeq y \equiv_{\mathrm{def}} \exists z(\alpha(\hat{x} * \bar{\beta}z) = y+1);$$
$$\alpha\,|\,\beta \simeq \gamma \equiv_{\mathrm{def}} \forall x((\alpha\,|\,\beta)(x) \simeq \gamma x);$$
$$!\alpha\,|\,\beta \equiv_{\mathrm{def}} \exists!\gamma(\alpha\,|\,\beta \simeq \gamma);$$
$$\alpha \leqslant \beta \equiv_{\mathrm{def}} \forall x(\alpha x \leqslant \beta x).$$

3.7.3. Обозначения из элементарной теории рекурсий. Применение частично рекурсивных функций указывается скобками Клини $\{\cdot\}\cdot$; T обозначает T-предикат Клини, U — функция извлечения результата. Тогда

$$\{x\}(y) \simeq z \leftrightarrow \exists u(T(x, y, u) \wedge Uu = z).$$

Пусть t — терм, содержащий скобки Клини. Тогда

$$!t \equiv t \quad \text{определен}, \quad !t \wedge At \equiv \exists x(t \simeq x \wedge Ax).$$

$\Lambda x.t$ — это геделевский номер частично рекурсивной функции от x, заданной термом t, примитивно рекурсивный относительно остальных параметров.

3.7.4. Формальные системы. Формальные системы обозначаются полужирными буквами (**H**, **IPC**, **HA** и т. д.); $L[\mathbf{H}]$ — это

язык системы **H**. Схемы часто обозначаются комбинациями букв; обозначения CONT_0, AC — NN, WC — N!* выбраны в соответствии с Крайзелем и Трулстрой [1], Трулстрой [7].

3.8. Определение отрицательного перевода. Для любого из рассматриваемых языков (и языков конечного типа, которые будут рассмотрены позже) мы определяем отображение $'$ индуктивно с помощью соотношений:

(i) $P' \equiv \neg\neg P$ для исходных формул P;

(ii) $(A \wedge B)' \equiv A' \wedge B'$;

(iii) $(A \to B)' \equiv A' \to B'$;

(iv) $(\forall x A)' \equiv \forall x A'$;

(v) $(A \vee B)' \equiv \neg(\neg A' \wedge \neg B')$;

(vi) $(\exists x A)' \equiv \neg\forall x \neg A'$.

(Здесь x — переменная любого сорта, встречающегося в рассматриваемой системе.) Мы примем соглашение, что в случае формальных систем, где исходные формулы разрешимы, отображение упрощается путем замены соотношения (i) на (i′) $P \equiv P'$ для исходных P.

3.9. Определение. Если формула A не содержит связок $\exists$, $\vee$, то мы называем ее $\exists$-*свободной*. Если A $\exists$-свободна и все исходные подформулы входят в A со знаком отрицания, то A называется *отрицательной*. (Для систем с разрешимыми исходными формулами отрицательные и $\exists$-свободные формулы — одни и те же с точностью до логической эквивалентности.) Класс Δ *харроповских формул* определяется индуктивно:

(i) двойные отрицания исходных формул принадлежат классу Δ;

(ii) $A, B \in \Delta \Rightarrow A \wedge B \in \Delta$;

(iii) $A \in \Delta \Rightarrow \forall x A \in \Delta$;

(iv) $B \in \Delta \Rightarrow A \to B \in \Delta$.

(Для систем с разрешимыми исходными формулами можно вычеркнуть из (i) «двойные отрицания».) Все отрицательные формулы эквивалентны харроповским формулам.

Лемма. *Для формальной системы* **H**, *основанной на многосортной интуиционистской логике предикатов, и харроповской формулы* A *верно* $\mathbf{H} \vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$.

Доказательство проводится индукцией по сложности формулы A с повторным применением логических законов $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$, $A \to \neg\neg A$, $\neg\neg\forall x A \to \forall x \neg\neg A$, $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \to \neg\neg B)$. □

Теорема. *Для* $\mathbf{H} = \mathbf{HA}, \mathbf{HAS}, \mathbf{IPC}$

$$\mathbf{H}^c \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{H} \vdash A'.$$

Доказательство. Проводится непосредственно индукцией по длине выводов с использованием предыдущей леммы. □

3.10. Перевод этого типа был впервые дан Колмогоровым [1] (для логики). В более известной работе Гёделя [1] рассматривается также арифметика; приведенный вариант принадлежит Генцену [1]. См. также Клини [2], § 81.

§ 4. Реализуемость и тезис Чёрча

4.1. Если принять БГК-разъяснение логических операторов и натуральных чисел, то интерпретация системы **HA** не представляет проблем, но мы не зафиксировали еще интерпретации теоретико-числовых функций в **EL**.

Одна из возможных интерпретаций такова: функциональные переменные пробегают теоретико-числовые функции, заданные законом, т. е. функции, которые полностью даны нам посредством некоторого «рецепта» вычисления их значения для каждого значения аргумента. Тезис Чёрча можно выразить теперь в языке **EL** в виде «каждая функция, заданная законом, рекурсивна», или формально

$$\mathrm{CT} \qquad \forall a \exists x \forall y \exists z [T(x, y, z) \wedge ay = Uz].$$

С точки зрения русской школы конструктивизма это вообще единственно возможная интерпретация: при их механистическом подходе «рекурсивность» принимается в качестве механически точной формы «заданности законом». При традиционном интуиционистском подходе CT *не* является самоочевидным, так как имеется определенный пробел в рассуждениях, претендующих на установление того, что механическая вычислимость = человеческая вычислимость (подробное обсуждение см. у Крайзеля [8]).

Указанная интерпретация логических констант подсказывает, что следующая аксиома выбора должна быть верна ($\mathrm{AC}_{00}=$):

$$\mathrm{AC-NN} \qquad \forall x \exists y A(x, y) \to \exists a \forall x A(x, ax),$$

так как доказательство посылки должно содержать метод, который дает по каждому x некоторый y такой, что $A(x, y)$, а этот метод — не что иное, как функция, заданная законом. Как только мы начинаем ограничивать функции, заданные законом, схема AC — NN перестает быть очевидной. AC — NN плюс CT дает

$$\mathrm{CT}_0 \qquad \forall x \exists y A(x, y) \to \exists u \forall x \exists z [Tuxz \wedge A(x, Uz)],$$

который осмыслен также и относительно **HA**.

С интуиционистской точки зрения CT_0 проблематичен, т. е. ни его истинность, ни его непротиворечивость (при добавлении к **HA**) не являются непосредственно очевидными. С точки зре-

ния русской школы конструктивизма (CRA) задача состоит скорее в том, чтобы дать интерпретацию логических операторов в арифметических высказываниях, согласующуюся с CT_0.

4.2. Замечания. (i) БГК-разъяснение логики и только что приведенное обоснование схемы AC — NN дают нам примеры того, как принимаются определенные абстрактно формулируемые понятия, а затем аксиомы обосновываются путем рассмотрения этих абстрактных понятий. В этом месте интуиционистский подход выходит за рамки финитизма (ср. 2.2.2), а также и за рамки CRA, где области значений переменных предполагаются выписываемыми (т. е. эффективно перечислимыми) или (с применением релятивизации кванторов) определимыми подмножествами выписываемых областей, так что AC — NN не осмыслена, даже если мы думаем «абстрактно» о функциях, заданных законом.

(ii) CT заставляет нас уделить внимание интенсиональным аспектам. Например, только что данное обоснование схемы AC — NN может соблазнить нас защищать ее обобщение

$$\forall x \in X \exists y \in Y A(x, y) \to \exists \Psi \in (X \to Y) \forall x \in X A(x, \Psi x).$$

Если мы применим это к CT, то обнаружим, что

$$CT \to \exists \Psi \forall a \forall y \exists z [T(\Psi a, y, z) \wedge ay \doteq Uz],$$

но в предположении истинности CT элементарная теория рекурсии говорит нам, что невозможен неконстантный Ψ, представимый в виде частично рекурсивного оператора на общерекурсивных функциях и такой, что

$$\forall x (ax = bx) \to \Psi a = \Psi b,$$

т. е. невозможен Ψ, имеющий функциональный характер относительно *экстенсионального* равенства. Отсюда легко видеть, почему обобщение аксиомы выбора проваливается для экстенсионального равенства: метод, дающий некоторый y для каждого $x \in X$ (или некоторый x для каждой a в случае CT), может использовать много больше, чем просто «экстенсионал» объекта x: в принципе этот метод может использовать *всю* имеющуюся информацию об x (и, в частности, в случае общерекурсивных функций, их гёделевские номера).

Мы встретим еще много примеров, когда неэкстенсиональная информация существенна — в приведенном выше примере мы могли говорить о функционале Ψ, только если мы допускаем неэкстенсиональные операции.

4.3. Реализуемость. Теперь мы опишем новую интерпретацию логических формул, первоначально созданную Клини [1] для того, чтобы сделать конструктивную интерпретацию логических операторов $\vee$ и $\exists$ более явной. Она даст нам возможность показать совместимость CT_0 с **HA** и некоторыми расширениями **HA**, а также породила и много других метаматематических результатов.

Каждой формуле $A(x_1, \ldots, x_n)$ языка L[**HA**], содержащей свободно разве лишь $x_1, \ldots, x_n$, мы поставим в соответствие другую формулу системы **HA**, записываемую в виде $x \mathbf{r} A(x_1, \ldots, x_n)$ («x реализует A»), содержащую свободно разве лишь $x, x_1, \ldots, x_n$, где $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Определение вводится индукцией по сложности формулы A.

$\mathbf{r}$(i) $x \mathbf{r} (t_1 = t_2) \equiv_{\text{def}} t_1 = t_2$,

$\mathbf{r}$(ii) $x \mathbf{r} (A \wedge B) \equiv_{\text{def}} (j_1 x \mathbf{r} A \wedge j_2 x \mathbf{r} B)$,

$\mathbf{r}$(iii) $x \mathbf{r} (A \vee B) \equiv_{\text{def}} [(j_1 x = 0 \to j_2 x \mathbf{r} A) \wedge (j_1 x \neq 0 \to j_2 x \mathbf{r} B)]$,

$\mathbf{r}$(iv) $x \mathbf{r} (A \to B) \equiv_{\text{def}} \forall y (y \mathbf{r} A \to !\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \mathbf{r} B)$,

$\mathbf{r}$(v) $x \mathbf{r} (\exists y A y) \equiv_{\text{def}} j_2 x \mathbf{r} A(j_1 x)$,

$\mathbf{r}$(vi) $x \mathbf{r} (\forall y A y) \equiv_{\text{def}} \forall y (!\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \mathbf{r} A y)$.

Отметим, что если исходная формула реализуема, то ее реализует любое число. Отметим также следующее:

(a) $(x \mathbf{r} \neg A) \leftrightarrow \forall y (y \mathbf{r} A \to !\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \mathbf{r} (1 = 0)) \leftrightarrow \forall y \neg (y \mathbf{r} A)$. Следовательно, $\forall x (x \mathbf{r} \neg A) \leftrightarrow \exists x (x \mathbf{r} \neg A)$. Поэтому отрицание реализуется любым числом, если оно вообще реализуемо.

(b) $x \mathbf{r} \neg \neg A \leftrightarrow \forall y \neg (y \mathbf{r} \neg A) \leftrightarrow \forall y \neg \forall z (\neg z \mathbf{r} A)$

$$\leftrightarrow \neg \forall z (\neg z \mathbf{r} A) \leftrightarrow \neg \neg \exists z (z \mathbf{r} A).$$

(c) Как можно убедиться, просматривая пункты определения, реализуемость по своему духу похожа на БГК-разъяснение (и на нее можно смотреть как на вариант этого разъяснения).

В некоторых отношениях она грубее: $\forall x (t[x] = 0)$ может иметь много различных доказательств, но все гёделевские номера всех общерекурсивных функций реализуют такое чисто универсальное утверждение, если оно истинно. С другой стороны, реализуемость навязывает рекурсивность.

4.4. Определение. Формула языка L[**HA**] *почти отрицательна*, если она строится из исходных формул и формул вида $\exists x (t = s)$ посредством $\forall$, $\to$, $\wedge$.

4.5. Лемма. *Для любой почти отрицательной формулы $A(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — непустая цепочка числовых переменных, содержащая все переменные, свободные в A, имеется частично рекурсивная функция Ψ_A такая, что в* **HA** *выводимо*:

(i) $A(\mathfrak{a}) \to !\Psi_A(\mathfrak{a}) \wedge \Psi_A(\mathfrak{a}) \mathbf{r} A(\mathfrak{a})$;

(ii) $\exists x (x \mathbf{r} A) \to A$.

Доказательство. Применяем одновременную индукцию по сложности формулы A, определяя Ψ_A следующим образом:

$$\Psi_{t=s} \equiv \Lambda a.\ 0 \qquad \Psi_{\exists x(t=s)} \equiv \Lambda a.\ [j(\min_x[t=s],\ 0)];$$

$$\Psi_{A\wedge B} \equiv \Lambda a.\ j(\Psi_A(a),\ \Psi_B(a)),\ \Psi_{A\to B} \equiv \Lambda a x.\ \Psi_B(a);$$

$$\Psi_{\forall xA} \equiv \Lambda a x.\ \Psi_A(a, x).\ \square$$

4.6. Лемма. *Для любой формулы A формула $x\mathbf{r}A$ эквивалентна (в* **HA**) *некоторой почти отрицательной формуле.*

Доказательство. Индукцией по сложности формулы A. Например, $x\mathbf{r}(A\to B)$ можно переписать в виде $\forall y(y\mathbf{r}A \to \exists z Txyz \wedge \forall u(Txyu \to Uu\mathbf{r}B))$. Затем мы можем применить индукционное предположение для A, B. $\square$

4.7. Лемма. *Пусть* ECT_0 (*расширенный тезис Чёрча*) *обозначает следующую схему*:

ECT_0 $\forall x[Ax \to \exists y Bxy] \to \exists z \forall x[Ax \to \exists u(Tzxu \wedge B(x, Uu))]$

(*для почти отрицательных A*). *Тогда имеется цифра $\bar{n}$ такая, что в* $\mathbf{HA} \vdash \bar{n}\mathbf{r}F$ *для любого частного случая F схемы* ECT_0.

Доказательство. Пусть $t = \{\{u\}(x)\}\Psi_A(x)$; тогда мы можем взять

$$\bar{n} = \Lambda u.\ j(\Lambda x.\ j_1 t,\ \Lambda x w.\ j(\min_v T(\Lambda x.\ j_1 t,\ x,\ v),\ j(0,\ j_2 t)));$$

проверка проводится непосредственно. $\square$

4.8. Теорема характеризации. *Для предложений A имеет место следующее*:

(i) (корректность) $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0 \vdash A \Rightarrow \mathbf{HA} \vdash \bar{n}\mathbf{r}A$ *для некоторого* $\bar{n}$;

(ii) $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0 \vdash A \leftrightarrow \exists x(x\mathbf{r}A)$;

(iii) $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0 \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{HA} \vdash \exists x(x\mathbf{r}A)$.

Доказательство. (i) Индукцией по длине выводов в **HA** с использованием леммы 4.7. Шаг индукции показывает реализуемость замыкания всеобщности заключения в предположении реализуемости замыканий всеобщности посылок.

(ii) Индукцией по сложности A с использованием леммы 4.6.

(iii) Сочетание (i) и (ii). $\square$

4.9. Следствие. $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0$ *непротиворечива относительно* **HA**; *в действительности, так как по лемме* 4.5 *для почти отрицательных A имеет место $\exists x(x\mathbf{r}A) \leftrightarrow A$, то система* $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0$ — *консервативное расширение системы* **HA** *относительно почти отрицательных формул.*

4.10. Таким образом, мы получили, что $\mathbf{HA} + \mathrm{CT}_0$ консервативна относительно отрицательных формул. Этот результат легко распространяется на **HAS** путем следующего простого обобщения реализуемости. Каждой переменной X для множеств мы

ставим в соответствие переменную X^* для множеств (возможно, ту же самую) и полагаем

r (i)′ $\qquad x\mathbf{r}Xy \equiv_{\mathrm{def}} X^*(x, y)$,

r (vii) $\qquad x\mathbf{r}\forall XAX \equiv_{\mathrm{def}} \forall X^*(x\mathbf{r}A(X))$,

r (viii) $\qquad x\mathbf{r}\exists XAX \equiv_{\mathrm{def}} \exists X^*(x\mathbf{r}A(X))$.

Теперь мы легко можем показать, что имеет место

Теорема. $\mathbf{HAS} + \mathrm{CT}_0 + \mathrm{UP}$ *консервативна над* **HAS** *относительно отрицательных формул. Здесь* UP (*принцип равномерности*) — *это схема*

UP $\qquad \forall X \exists x A(X, x) \to \exists x \forall X A(X, x)$.

(Комментарии см. у Трулстры [4].)

4.11. Лемма. *Для любого частного случая F схемы Маркова*

M $\qquad \forall x[Ax \vee \neg Ax] \wedge \neg\neg \exists x Ax \to \exists x Ax$

имеется цифра $\bar{n}$ такая, что

$$\mathbf{HA} + M \vdash \bar{n}\mathbf{r}F.$$

Доказательство. Отметим сначала, что в присутствии CT_0 принцип M эквивалентен схеме

M_{PR} $\qquad \neg\neg \exists y(t(x, y) = 0) \to \exists y(t(x, y) = 0)$.

Действительно, если $\forall x[Ax \vee \neg Ax]$, то, согласно CT_0, имеется z такое, что

$$\forall x \exists y[Tzxy \wedge (Uy = 0 \to Ax) \wedge (Uy \neq 0 \to \neg Ax)],$$

и, таким образом, $\exists x Ax \leftrightarrow \exists x \exists y[Tzxy \wedge Uy = 0]$, что можно выразить в виде $\exists u(t(z, u) = 0)$ с примитивно рекурсивным t. Поэтому, так как $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0 \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{HA} \vdash \exists x(x\mathbf{r}A)$, достаточно установить лемму для частных случаев схемы M_{PR}, а это делается непосредственно. Это позволяет нам обобщить теорему характеризации на $\mathbf{HA} + \mathrm{M}$. $\square$

4.12. Теорема. $\mathbf{HA} + \mathrm{M} + \mathrm{ECT}_0 \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{HA} + \mathrm{M} \vdash \exists x(x\mathbf{r}A)$.

Доказательство. Непосредственно получается из 4.8 и 4.11. $\square$

4.13. С точки зрения русской школы конструктивизма, представляемой Н. А. Шаниным и А. А. Марковым, реализуемость не является семантикой, так как она не сводит интерпретацию составных утверждений к простым (т. е. к утверждениям, интерпретация которых считается более интуитивно очевидной). Например, одно из возражений (Шанин [1]) состоит в том, что даже формулы, интерпретация которых должна быть непосредственной, заменяются более сложными формулами в интерпретации реализуемости по Клини.

Однако с точки зрения *математических* следствий мы наверняка можем рассматривать $\mathbf{HA}+\mathrm{M}+\mathrm{ECT}_0$ как кодификацию математической практики CRA (ср. Драгалин [1]), так как Клини доказал, что в $\mathbf{HA}+\mathrm{M}$ интерпретация Шанина доказуемо эквивалентна реализуемости. Вместо ECT_0 мы иногда обнаруживаем (как, например, у Драгалина [1]) принцип

$$\mathrm{ECT}'\quad \forall x[\neg Ax\to\exists yBxy]\to\exists z\forall x[\neg Ax\to !\{z\}(x)\wedge B(x,\{z\}(x))],$$

который, однако, как легко видеть, эквивалентен принципу ECT_0 в $\mathbf{HA}+\mathrm{M}$. (Действительно, заметим, что почти отрицательные формулы эквивалентны отрицательным в силу M_{PR} (принципа M, ограниченного примитивно рекурсивными формулами), а для отрицательных A имеет место $A\leftrightarrow\neg\neg A$ по лемме из 3.9.)

4.14. Для классического рекурсивного анализа (RA) имеет место несколько смешанная ситуация: по отношению к конкретным утверждениям (без параметров) используется закон исключенного третьего, но утверждения классической математики, имеющие вид $\forall x[Ax\vee\neg Ax]$, «рекурсивизируются» требованием разрешающего метода для A, рекурсивного в x. Короче говоря, аналог в RA замкнутого утверждения A — это утверждение $\exists x(x\mathbf{r}A)$, которое может быть установлено классическими средствами. RA можно считать одним из возможных ответов на вопрос о поиске аналога «конструктивности» внутри *классической* математики: это — рекурсивность в параметрах. Еще одно решение — «непрерывность в параметрах», см. 3.14.

4.15. Обобщения и варианты реализуемости: явная определимость.

4.15.1. Обзор приемов типа реализуемости для арифметики можно найти у Трулстры [2]; дополнительные подробности приведены в книге Трулстры [3], гл. III. Для анализа имеются аналогичные методы; см. 6.2.3.

4.15.2. Один из технически наиболее полезных вариантов — это **q**-реализуемость ($x\mathbf{q}A$), получаемая заменой (iii) — (v) в 4.3 на

$$\mathbf{q}(\mathrm{iii})\quad x\mathbf{q}(A\vee B)\equiv_{\mathrm{def}}[(j_1x=0\to(j_2x\mathbf{q}A)\wedge A)\wedge(j_1x\neq0\to(j_2x\mathbf{q}B)\wedge B)],$$

$$\mathbf{q}(\mathrm{iv})\quad x\mathbf{q}(A\to B)\equiv_{\mathrm{def}}\forall y(y\mathbf{q}A\wedge A\to !\{x\}(y)\wedge\{x\}(y)\,\mathbf{q}B),$$

$$\mathbf{q}(\mathrm{v})\quad x\mathbf{q}(\exists yA)\equiv_{\mathrm{def}}(j_2x\mathbf{q}A(j_1x)\wedge A(j_1x))$$

и заменой **r** на **q** в остальных случаях.

Тогда теорема корректности (ср. 4.8 (i)) доказуема для **q**-реализуемости и дает результаты вроде DP, ED (ср. 2.5.4) для **HA** и

$$\mathrm{ECR}_0\qquad \mathbf{HA}\vdash Ax\to\exists yB(xy)\Rightarrow\mathbf{HA}\vdash\exists z\forall x[Ax\to !\{z\}(x)\wedge B(x,\{z\}(x))]$$

(A — почти отрицательная формула). Фридман недавно приспособил q-реализуемость для **HAS**. Штрих Клини «$\Gamma|C$» — еще один метод, особенно подходящий для доказательства DP, ED и родственных свойств. У Фридмана [1] он обобщен на системы высшего порядка вроде **HAS**. Изложение основных черт этого метода см. у Трулстры [3], 3.1.21—3.2.23.

4.15.3. С точки зрения наивного конструктивизма кажется естественным интересоваться возможно более сильной подсистемой классической логики, все еще сохраняющей DP и ED при добавлении к математическим аксиомам обычных систем. Но здесь нет единственного ответа: $\mathbf{HA}+\mathrm{M}$ и $\mathbf{HA}+\mathrm{IP}$ обе обладают DP и ED, но $\mathbf{HA}+\mathrm{M}+\mathrm{IP}=\mathbf{HA}^{\mathrm{c}}$, т. е. классической арифметике первого порядка. (Здесь IP обозначает схему $(\neg A\to\exists xB)\to\exists x(\neg A\to B)$, где x не входит свободно в A; схема M определена в 4.11.) См. Трулстра [3].

Чтобы увидеть, что $\mathbf{HA}+\mathrm{M}+\mathrm{IP}=\mathbf{HA}^{\mathrm{c}}$, мы доказываем индукцией по логической сложности формулы A, что $\mathbf{HA}+\mathrm{M}+\mathrm{IP}\vdash A\vee\neg A$. Допустим, что $A\vee\neg A$. Тогда

(1) $\forall x(A\vee\neg A)\wedge\neg\neg\exists xA\to\exists xA$, следовательно, $\neg\neg\exists xA\to\exists xA$ (индукционное предположение) и в силу IP имеет место $\exists y(\neg\neg\exists xAx\to Ay)$; снова по индукционному предположению отсюда следует $\neg\neg\neg\exists xAx\vee\exists yAy$, а значит, и $\exists xA\vee\neg\exists xA$.

2) $\forall xAx\leftrightarrow\neg\exists x\neg Ax$, следовательно,

$$\forall xAx\vee\neg\forall xAx\leftrightarrow(\neg\exists x\neg Ax\vee\neg\neg\exists x\neg Ax)\leftrightarrow\neg\exists x\neg Ax\vee\exists x\neg Ax$$

(индукционное предположение).

§ 5. Немного элементарной математики

5.1. В этом параграфе мы разовьем крошечную часть конструктивной математики, чтобы иметь возможность иллюстрировать некоторые из наших проблем примерами, взятыми из математики. Хотя бо́льшая часть определений проходит параллельно хорошо известным классическим определениям, многие классически эквивалентные определения не являются конструктивно эквивалентными, и потому мы должны уделить внимание точным формулировкам. Легко читающееся изложение «рекурсивного» подхода см., например, у Мартин-Лёфа [1].

5.2. Основной универсум. Теория целых и рациональных чисел не представляет проблем. Мы разовьем теорию вещественных чисел и функций с вещественными значениями относительно некоторого универсума $\mathcal{U}$ теоретико-числовых функций. Предполагается, что $\mathcal{U}$ удовлетворяет аксиомам для функций из **EL***. Главная аксиома **EL***, касающаяся функций,— это бескванторная

аксиома выбора QF – AC_{00}, которая в присутствии остальных аксиом выражает замкнутость относительно «рекурсивности в». Нетрудно видеть, что наши условия на $\mathcal{U}$ в действительности эквивалентны совокупности следующих трех условий:

(1) $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ (рекурсивные функции содержатся в $\mathcal{U}$);

(2) $\mathcal{U}$ замкнут относительно спаривания·

(3) $\mathcal{U}$ замкнут относительно всех непрерывных операций, представленных окрестностными функциями из $\mathcal{U}$.

Класс окрестностных функций K_0 (относительно $\mathcal{U}$) задан определением

$$K_0\alpha \equiv \forall\beta\exists x(\alpha(\bar{\beta}x) \neq 0) \wedge \forall nm(\alpha n \neq 0 \to \alpha n = \alpha(n * m)),$$

а функционал $\Phi_\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, представляемый функцией α, удовлетворяет соотношению

$$(\Phi_\alpha\beta)(x) = y \leftrightarrow \exists z(\alpha(\langle x\rangle * \bar{\beta}z) = y + 1).$$

5.3. Вещественные числа. Мы выбираем определение через фундаментальные последовательности. Пусть $\langle r_n\rangle_n$ — стандартное перечисление (без повторений) рациональных чисел (если $p/q = r_n$, то мы можем предположить, что p, q находятся по n примитивно рекурсивно).

Определение. $\langle r_{\alpha n}\rangle_n$ называется *генератором вещественного числа относительно* $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$-*г. в. ч.*), если имеется β (*модуль сходимости*) такой, что

$$\forall k\forall m(|r_{\alpha\beta k} - r_{\alpha(\beta k+m)}| < 2^{-k}). \tag{1}$$

Это, разумеется, эквивалентно существованию β' такого, что

$$\forall k\forall m_1 m_2(|r_{\alpha\beta'(k+m_1)} - r_{\alpha\beta'(k+m_2)}| < 2^{-k}) \tag{1'}$$

(если дан β, то мы можем найти β', полагая $\beta' k = \beta(k+1)$ для всех k). В дальнейшем мы не будем писать «относительно $\mathcal{U}$», так как $\mathcal{U}$ фиксирован.

Определение. Два генератора вещественных чисел $\langle s_n\rangle_n$, $\langle t_n\rangle_n$ с модулями β, γ соответственно называются *эквивалентными* (запись $\langle s_n\rangle_n \sim \langle t_n\rangle_n$), если для $\delta n = \max(\beta n, \gamma n)$

$$|s_{\delta n} - t_{\delta n}| \leqslant 2^{-(n+1)}.$$

Как и в классической теории, мы показываем, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Следующим шагом было бы определение вещественных чисел $\mathbb{R}(\mathcal{U})$ (короче, $\mathbb{R}$) как классов эквивалентности г. в. ч. по отношению $\sim$.

Однако мы еще не рассматривали существования множеств. Это *несущественно* для тех конкретных целей, которые мы преследуем здесь, так как вместо использования классов эквивалентности мы можем просто выражать все посредством предикатов и функций, сохраняющих отношение $\sim$ (т. е. таких, что $P(\langle t_n\rangle_n) \wedge \langle t_n\rangle_n \sim \langle s_n\rangle_n \to P(\langle s_n\rangle_n)$ и т. д.); этот метод принят у Клини и Весли [1] и в CRA.

Однако удобно иметь возможность говорить о множествах, и потому в качестве минимального принципа свертывания мы примем для любого данного языка L, уже обеспеченного интерпретацией (в нашем случае подходящий пример — L[**EL***]), следующий принцип свертывания:

$$\exists X\forall x_1 \ldots x_n[A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow X(x_1, \ldots, x_n)], \tag{2}$$

где X — переменная для множеств индивидов, а A — формула языка L, $x_1, \ldots, x_n$ — переменные языка L (предполагается, что L не содержит переменных для множеств). На основе этого принципа мы можем принимать корректно определенные свойства элементов данной области в качестве множеств или отношений. Принцип (2) обосновывает введение вещественных чисел как классов эквивалентности (в действительности с помощью математического рассуждения легко показать, что (2) консервативен над **EL***; ср. Трулстра [3], 1.9.8).

5.4. Операции на вещественных числах и отношения между ними. Мы можем в обычном стиле определять операции и отношения на вещественных числах, определяя соответствующие операции и отношения для г. в. ч., а затем показывая, что они инвариантны относительно $\sim$. Так, например,

$$\langle s_n\rangle_n + \langle t_n\rangle_n \equiv \langle s_n + t_n\rangle_n, \quad \langle s_n\rangle_n \cdot \langle t_n\rangle_n \equiv \langle s_n \cdot t_n\rangle_n,$$
$$|\langle s_n\rangle_n| \equiv \langle |s_n|\rangle_n$$

и т. д., а также

$$\langle s_n\rangle_n < \langle t_n\rangle_n \equiv \exists k\forall n\forall m(t_{n+m} - s_{n+m} > 2^{-k}).$$

Тогда, например, для $x, y \in \mathbb{R}$

$$x < y \equiv \exists\langle s_n\rangle_n \in x\exists\langle t_n\rangle_n \in y(\langle s_n\rangle_n < \langle t_n\rangle_n),$$
$$x > y \equiv y < x,$$
$$x \leqslant y \equiv \neg(x > y), \qquad x \geqslant y \equiv y \leqslant x.$$

Замечание по поводу обозначений. В большей части интуиционистской литературы пишут $x \not> y$ вместо $x \leqslant y$, чтобы избежать предположения о том, что $x \leqslant y$ эквивалентно $x < y \vee x = y$ (последнее утверждение существенно сильнее). Однако так как наше отношение $\leqslant$ играет, по существу, ту же математическую роль, что $\leqslant$ в классической математике, и так как «$x < y \vee x = y$» редко применяется практически, а $\leqslant$ легче читать, чем $\not>$, то мы предпочли здесь обозначение $\leqslant$.

5.5. Лемма (некоторые свойства операций и отношений $+$, $\cdot$, $<$, $\leqslant$).

$$x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y,$$
$$x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z,$$
$$(x \leqslant y \wedge y < z) \vee (x < y \wedge y \leqslant z) \to x < z,$$
$$x < y \leftrightarrow x + z < y + z, \quad z > 0 \wedge x < y \to x \cdot z < y \cdot z,$$
$$x \leqslant y \leftrightarrow \forall k (x < y + 2^{-k}), \quad \neg\neg x \leqslant y \leftrightarrow x \leqslant y.$$

Доказательство предоставляется читателю; см., например, Гейтинг [4], гл. II.

5.6. Отношение отделенности и различие вещественных чисел. Отношения $=$ и $\#$, определяемые (в предположении $\langle s_n \rangle_n \in x$, $\langle t_n \rangle_n \in y$) посредством

$$x \neq y \equiv_{\text{def}} \neg \langle s_n \rangle_n \sim \langle t_n \rangle_n,$$
$$x \# y \equiv_{\text{def}} \exists k \exists m \forall n (|s_{n+m} - t_{n+m}| > 2^{-k}),$$

классически эквивалентны. Однако относительно интуиционистской логики соотношение $x \neq y \to x \# y$ эквивалентно схеме Маркова (см. 8.2). Для математической практики важнее «позитивное» отношение $\#$, тем более, что $\neq$ можно определить через $\#$, но не наоборот.

Вообще отношение $\#$, обладающее свойствами

S1 $\quad \neg x \# y \leftrightarrow x = y,$

S2 $\quad x \# y \to y \# x,$

S3 $\quad x \# y \to x \# z \vee y \# z,$

называется *отношением отделенности*. Наше отношение $\#$ обладает не только свойствами S1 — S3, но и свойствами

$$x \# y \to x + z \# y + z, \quad x \# 0 \wedge y \# z \to xy \# xz,$$
$$x \# y \leftrightarrow x < y \vee y < x.$$

5.7. Частично определенные операции. Обращение (т. е. операция $x \mapsto x^{-1}$ на вещественных числах) дает пример отображения, которое определено не всегда, по крайней мере в естественном смысле (и, как станет ясно впоследствии, *не может* быть определено конструктивно). С помощью классической логики мы легко устраним этот дефект, вводя произвольное соглашение, например, полагая $0^{-1} = 0$, $(p/q)^{-1} = (q/p)$ для $p, q \neq 0$ и затем вводя определение

$$\langle s_n \rangle_n^{-1} = \begin{cases} \langle s_n^{-1} \rangle_n, & \text{если } \langle s_n \rangle_n \not\in 0, \\ \langle 0 \rangle_n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, классически, $\langle s_n \rangle_n^{-1}$ — снова г. в. ч. Мы не можем принять этот метод в конструктивной математике, так как не может утверждать, что $\forall x \in \mathbb{R} (x = 0 \vee x \# 0)$.

Отметим, что если мы мыслим вещественные числа из $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \# 0\}$ как *данные* нам в виде г. в. ч. $\langle s_n \rangle_n \in x$ вместе с доказательством того, что $\langle s_n \rangle_n \# 0$ (а это влечет наличие у нас числа k такого, что $|x| > 2^{-k}$), то мы видим, что можно избежать введения x^{-1} как частичной операции, если рассматривать пары (x, k) с операцией *)

$$(x, k) \mapsto (\max(2^{-k}, x))^{-1}.$$

Здесь мы имеем конкретный пример замены утверждений более «свободными от логики» утверждениями (см. 2.2.3).

5.8. Слабые контрпримеры и их рекурсивные аналоги. Традиционная интуиционистская литература содержит так называемые «слабые контрпримеры» ко многим математическим утверждениям (вроде «для всех $x \in \mathbb{R}$ верно $x = 0 \vee x \neq 0$»). Эти контрпримеры называются «слабыми», потому что они не опровергают утверждения, о которых идет речь, а лишь показывают, что предположение о существовании интуиционистского доказательства для таких утверждений привело бы к решению некоторой еще не решенной математической проблемы.

Например, пусть Ax — разрешимый предикат от натуральных чисел (т. е. верно $\forall x (Ax \vee \neg Ax)$ такой, что неизвестно, верно ли $\neg \exists x Ax \vee \neg\neg \exists x Ax$. Стандартным примером такого предиката является «x — номер первого десятичного знака первого вхождения последовательности 0123456789 в десятичное разложение π». Вместо самого предиката A мы можем использовать его характеристическую функцию α:

$$Ax \leftrightarrow \alpha x \neq 0.$$

Теперь определим вещественное число x_α, зависящее от α, с помощью г. в. ч. $\langle s_n \rangle_n \in x_\alpha$, полагая

$$\begin{cases} \neg \exists y \leqslant x (\alpha y \neq 0) \to s_x = 0, \\ \alpha y \neq 0 \wedge y \leqslant x \wedge \forall z < y (\alpha z = 0) \to s_x = 2^{-y}. \end{cases} \tag{1}$$

Легко проверить, что $\langle s_n \rangle_n$ — г. в. ч., а также что

$$\neg \exists y (\alpha y \neq 0) \leftrightarrow x_\alpha = 0, \quad \exists y (\alpha y \neq 0) \leftrightarrow x_\alpha \neq 0,$$

так что $x_\alpha = 0 \vee x_\alpha \neq 0$ эквивалентно $\neg \exists y (\alpha y = 0) \vee \neg\neg \exists y (\alpha y = 0)$, а $x_\alpha = 0 \vee x_\alpha \# 0$ эквивалентно $\neg \exists y (\alpha y = 0) \vee \exists y (\alpha y = 0)$. Это показывает, что у нас нет оснований

*) Предложенная автором операция совпадает с обращением только при положительных x. — *Прим. ред.*

утверждать суждение $\forall x(x=0 \vee x \neq 0)$, так как это требовало бы решения задачи $\neg\exists x Ax \vee \neg\neg\exists x Ax$, а если бы эта конкретная задача была решена, то мы могли бы получить новый слабый контрпример, исходя из другой нерешенной задачи такого же типа.

Здесь имеется связь с рекурсивно неразрешимыми проблемами: конструкция приведенного контрпримера зависела от существования функции α такой, что неизвестно $\exists y(\alpha y=0) \vee \vee \neg\exists y(\alpha y=0)$. Если мы рассмотрим такую α с дополнительным параметром z, то задача принимает вид

$$\exists y(\alpha(y, z)=0) \vee \neg\exists y(\alpha(y, z)=0).$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \mathbb{R}(x \in 0 \vee x \neq 0)$ влечет

$$\forall z(x_{(\alpha)_z}=0 \vee x_{(\alpha)_z} \# 0),$$

где $(\alpha)_z=\lambda y\,\alpha(y, z)$, так что

$$\exists y(\alpha(y, z)=0) \vee \neg\exists y(\alpha(y, z)=0) \text{ для всех } z. \qquad (2)$$

Пусть теперь $\{z\colon \exists y\alpha(y, z)\}$ представляет р. п. (рекурсивно перечислимое) множество, не являющееся рекурсивным. Тогда дизъюнкция в (2) не является *рекурсивно разрешимой* по z. В результате мы видим, что дизъюнкция $x=0 \vee x \# 0$ для рекурсивных вещественных чисел $\mathbb{R}(\mathscr{R})$ не может быть разрешена рекурсивно по параметру (и обращение не может быть определено на $\mathbb{R}(\mathscr{R})$ рекурсивной операцией *).

Другой тип слабых контрпримеров, различные примеры которого мы встретим ниже, зависит от существования проблем следующего типа: $\forall x(Ax \vee \neg Ax)$, $\forall x(Bx \vee \neg Bx)$, $\neg(\exists x Ax \wedge \exists x Bx)$, но $\neg\exists x Ax \vee \neg\exists x Bx$ неизвестно. В терминах функций это принимает вид

$$\begin{aligned} &\neg(\exists y(\alpha y=0) \wedge \exists y(\beta y=0)) \quad \text{имеет место, но} \\ &\neg\exists y(\alpha y=0) \vee \neg\exists y(\beta y=0) \quad \text{неизвестно} \end{aligned} \qquad (3)$$

(примером такой проблемы является $Ax \equiv$ «$2x$ — номер первого десятичного знака первой последовательности 0123456789 в десятичном разложении π», а $Bx \equiv$ «$2x+1$ — номер первого десятичного знака первой последовательности 0123456789 в десятичном разложении π»).

Утверждение (3) можно использовать для построения примера вещественного числа (скажем, x_0) такого, что неизвестно $x_0 \leqslant 0 \vee x_0 \geqslant 0$ (и, следовательно, также и $x_0<0 \vee x_0=0 \vee$

*) Из неразрешимости $x=0 \vee x \# 0$ вытекает только, что предложенный в 5.7 способ доопределения обращения не является конструктивным. — *Прим. ред.*

$\vee x_0>0$). Для этого определим x_0 через генератор вещественного числа $\langle s_n\rangle_n \in x_0$ такой, что

$$\begin{aligned} &\neg(\exists y \leqslant n)(\alpha y=0 \vee \beta y=0) \to s_n=0, \\ &\alpha m=0 \wedge \forall y<m(\alpha y \neq 0) \wedge m \leqslant n \to s_n=2^{-m}, \\ &\beta m=0 \wedge \forall y<m(\beta y \neq 0) \wedge m \leqslant n \to s_n=2^{-m}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Легко проверить, что $\langle s_n\rangle_n$ — г. в. ч. и что для $\langle s_n\rangle_n \in x_0$ верно $x_0 \leqslant 0 \leftrightarrow \neg\exists y(\alpha y=0)$, $x_0 \geqslant 0 \to \neg\exists y(\beta y=0)$.

Рекурсивная версия этого контрпримера зависит от существования двух дизъюнктных р. п. множеств, которые рекурсивно неотделимы. Если $\{z\colon \exists y\alpha(y, z)=0\}$ и $\{z\colon \exists y\beta(y, z)=0\}$ — такие множества, то

$$\forall z \neg\{\exists y(\alpha(y, z)=0) \wedge \exists y(\beta(y, z)=0)\}, \qquad (5a)$$

в то время как дизъюнкция

$$\neg\exists y(\alpha(y, z)=0) \vee \neg\exists y(\beta(y, z)=0) \qquad (5b)$$

не является *рекурсивно разрешимой* по z, или, что то же, нет рекурсивной функции γ такой, что

$$\forall z\{(\gamma z=0 \to \neg\exists y(\alpha(y, z)=0)) \wedge (\gamma z \neq 0 \to \neg\exists y(\beta(y, z)=0))\}. \qquad (5c)$$

Для рекурсивных вещественных чисел отсюда следует, что дизъюнкция $x \leqslant 0 \vee x \geqslant 0$ не может быть разрешима рекурсивно по числовому параметру.

Другой поучительный пример обсуждается в следующем пункте.

5.9. Представление вещественных чисел двоичными разложениями. Пусть $\mathbb{R}_2$ обозначает класс вещественных чисел, допускающих двоичное разложение

$$\pm m+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha n)\,2^{-(n+1)}\right), \qquad \alpha n \leqslant 1 \quad \text{для всех } n.$$

Очевидно, что $\mathbb{R}_2 \subseteq \mathbb{R}$, так как $\left\langle \pm m+\sum_{k=0}^{n}(\alpha k)\,2^{-(k+1)}\right\rangle_n$ есть г. в. ч. Используя *классическую логику*, мы можем показать также, что $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_2$ (т. е. для каждого г. в. ч. мы можем найти эквивалентное двоичное разложение). Чтобы убедиться в этом, рассуждаем следующим образом: элемент x множества $\mathbb{R}$ либо представим в виде

$$\pm m+\sum_{k=0}^{n}(\alpha k)\,2^{-(k+1)}, \qquad \alpha k \leqslant 1 \text{ для } 0 \leqslant k \leqslant n,$$

либо нет (т. е. либо x является «двоично-рациональным», либо нет). В первом случае все в порядке. Во втором случае примем

для простоты, что $x \in [0, 1]$. Пусть $\langle s_n \rangle_n$ — такой г. в. ч. для x, что $|x - s_n| < 2^{-n}$ для всех n, и допустим, что уже построено

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha k)\, 2^{-(k+1)}$$

такое, что

$$t_n < x < t_n + 2^{-(n+1)}$$

($t_n = x$ исключено). Тогда, так как $x \neq t_n + 2^{-(n+2)}$, имеет место $(x < t_n + 2^{-(n+2)}) \vee (t_n + 2^{-(n+2)} < x)$; в первом случае мы полагаем $\alpha(n+1) = 0$, во втором — $\alpha(n+1) = 1$ и определяем t_{n+1} соответствующим образом.

С другой стороны, если мы рассмотрим $\frac{1}{2} + x_0$ (где x_0 определено через г. в. ч. $\langle s_n \rangle_n$ из (4) предыдущего пункта) и допустим, что $\frac{1}{2} + x_0$ имеет двоичное разложение $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha n)\, 2^{-(n+1)}$, то $\alpha 0 = 0 \leftrightarrow \frac{1}{2} + x_0 \leqslant \frac{1}{2}$, $\alpha 0 = 1 \leftrightarrow \frac{1}{2} + x_0 \geqslant \frac{1}{2}$, а эти случаи мы не можем разрешить. Этот слабый контрпример легко преобразуется в доказательство того факта, что мы не можем находить двоичные разложения для рекурсивных элементов множества $\mathbb{R}$ с помощью операций, рекурсивных по числовым параметрам.

Мы можем аналогичным образом показать с помощью классических рассуждений, что $\mathbb{R}_2$ замкнуто относительно $+, \cdot$, но на рекурсивных элементах множества $\mathbb{R}_2$ эти операции не могут быть заданы рекурсивными отображениями (ср. Мейо [1]).

5.10—5.12. Полнота $\mathbb{R}$

5.10. Определение. (i) *Последовательность вещественных чисел* задается двойной последовательностью $\langle \langle s_{m,n} \rangle_n \rangle_m$ г. в. ч. и функцией α такой, что $\lambda n\, \alpha(m, n)$ есть модуль для $\langle s_{m,n} \rangle_n$ для любого m.

Последовательность $\langle x_m \rangle_m$ вещественных чисел называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если имеется *модуль* β такой, что

$$\forall k \forall m \left(|x_{\beta k} - x_{\beta(k+m)}| < 2^{-k} \right).$$

(ii) Последовательность $\langle x_n \rangle_n$ имеет *предел* x (запись $\lim_n x_n$ или $\lim \langle x_n \rangle_n = x$), если имеется α (*модуль сходимости к пределу*) такой, что

$$\forall k \forall m \left(|x - x_{\alpha k + m}| < 2^{-k} \right).$$

5.11. Теорема. *Множество $\mathbb{R}(\mathcal{U})$ полно, т. е. любая фундаментальная последовательность $\langle x_n \rangle_n$ имеет предел.*

Доказательство. Пусть $\langle x_n \rangle_n$ — фундаментальная последовательность, $x_n = \langle s_{n,m} \rangle_m$ и для каждого n пусть $\lambda m \alpha(n, m)$ есть модуль для $\langle s_{n,m} \rangle_m$; пусть β — модуль для $\langle x_n \rangle_n$. Тогда

$$\forall k \forall n \forall m \left(|s_{n,\alpha(n,k)} - s_{n,\alpha(n,k)+m}| < 2^{-k} \right),$$
$$\forall k \forall n \left(|x_{\beta k} - x_{\beta k + m}| < 2^{-k} \right),$$

и поэтому, как легко проверить, $\langle s_{\beta n, \alpha(\beta n, \beta n+1)} \rangle_n$ является г. в. ч. Пусть x — соответствующее вещественное число. Легко видеть, что $\langle x_n \rangle_n$ сходится к x с модулем $\lambda n \beta(n+1)$. □

5.12. Замечание. Заметим, что определения г. в. ч., отношения $\sim$, последовательности вещественных чисел, фундаментальной последовательности, последовательности вещественных чисел, сходящейся к пределу, становятся эквивалентными таким более обычным определениям, как

$$\forall k \exists n \forall m \left(|s_n - s_{n+m}| < 2^{-k} \right),$$
$$\forall k \exists n \forall m \left(|s_{n+m} - t_{n+m}| < 2^{-k} \right),$$
$$\forall k \exists n \forall m \left(|x - x_{n+m}| < 2^{-k} \right)$$

для предикатов «$\langle s_n \rangle_n$ есть г. в. ч.», $\langle s_n \rangle_n \sim \langle t_n \rangle_n$, $\lim_n x_n = x$ соответственно, в предположении аксиомы выбора

AC — NF $\qquad \forall x \exists \alpha A(x, \alpha) \rightarrow \exists \beta \forall x A(x, (\beta)_x).$

Так как AC — NF следует из ECT_0, мы можем в рекурсивном конструктивном анализе («русской школы») спокойно принять обычные определения, точно так же, как и в интуиционистском анализе, развиваемом в одной из обычных теорий свободно становящихся последовательностей.

В классическом рекурсивном анализе (где (частичные) функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ всегда предполагаются (частично) рекурсивными, но логика классическая) это невозможно, так как средствами классической логики можно определить генераторы вещественных чисел $\langle r_{\alpha n} \rangle_n$ с нерекурсивной α.

5.13. Функции с вещественными значениями. Функция с вещественными значениями (вещественная функция) — это отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Вещественная функция f называется *непрерывной*, если имеется операция Φ: $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall k \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \left(|x - y| < 2^{-\Phi(x,k)} \rightarrow |fx - fy| < 2^{-k} \right).$$

Вещественная функция f называется *равномерно непрерывной*, если имеется функция α: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall k \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \left(|x - y| < 2^{-\alpha k} \rightarrow |fx - fy| < 2^{-k} \right).$$

Отметим, что в предположении AC_{00} (или AC — NN) это эквивалентно более привычной формулировке

$$\forall k \exists n \forall x \in \mathbb{R} \left(|x - y| < 2^{-n} \to |fx - fy| < 2^{-k} \right).$$

Мы полагаем по определению для $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$

$$(x, y) = \{z: x < z < y\}, \quad [x, y] = \{z: x \leqslant z \leqslant y\}.$$

Функции, непрерывные или равномерно непрерывные на (x, y) или $[x, y]$, определяются аналогичным образом.

5.14. Существование точной верхней грани (т. в. г.) и теорема о среднем значении. Мы изложим два контрпримера к хорошо известным теоремам классического анализа и одновременно покажем, что у них имеются аналоги в классических задачах о непрерывности решений в зависимости от параметров.

5.14.1. Пример. Любая равномерно непрерывная вещественная функция f на $[0, 1]$ имеет точную верхнюю грань $\sup\{fx: x \in [0, 1]\}$, но мы не можем ожидать, что удастся эффективно найти число $x_1 \in [0, 1]$ такое, что $f(x_1) = \sup\{fy: y \in [0, 1]\}$ *). Положительное утверждение о существовании т. в. г. легко доказывается путем рассмотрения последовательности

$$x_n = \sup\{f(k \cdot 2^{-n}): 0 \leqslant k \leqslant 2^n\}$$

и доказательства того, что $\langle x_n \rangle_n$ — фундаментальная последовательность вещественных чисел, которая должна иметь предел ввиду полноты $\mathbb{R}(\mathcal{U})$.

Слабый контрпример задан путем определения по аналогии с 5.8 (4) числа x_0 такого, что неизвестно $x_0 > 0$, $x_0 = 0$ или $x_0 < 0$.

Пусть $f(x) = x_0 x + 1$. Допустим, что мы можем вычислить x_1 такое, что $f(x_1) = \sup\{f(y): y \in [0, 1]\}$. Тогда $x_1 < \frac{3}{4} \vee x_1 > \frac{1}{4}$.

Если $x_0 > 0$, то $x_1 = 1$, так что $\neg\, x_1 < \frac{3}{4}$; если $x_0 < 0$, то $x_1 = 0$, так что $\neg\, x_1 > \frac{1}{4}$. Но $x_1 < \frac{3}{4} \vee x_1 > \frac{1}{4}$ требует, чтобы $\neg x_0 > 0 \vee \neg x_0 < 0$, а этого мы не знаем. Преобразование в пример, показывающий несуществование решения, рекурсивного по параметрам, теперь уже стандартно (ср. 5.8 и 5.9).

В терминах классической математики мы можем выразить содержание этого контрпримера следующим образом. Малые изменения функции f (в смысле топологии равномерной сходимости) влекут большие изменения искомого x. Поэтому мы можем сказать классически, что для равномерно непрерывных f на $[0, 1]$ мы не можем найти x_1 равномерно по f таким образом, что $f(x_1) = \sup\{f(y): y \in [0, 1]\}$.

*) Независимо И. Д. Заславским (УМН, 1955, **10**, № 4, с. 209—210) и Д. Лакомбом (C. r. Acad. Sci., Paris, 1955, **241**, № 19, p. 1250—1252) были построены примеры конструктивных равномерно непрерывных функций, которые не достигают т. в. г. — *Прим. ред.*

5.14.2. Пример (рис. 1). Пусть f равномерно непрерывна на $[0, 1]$, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. С помощью слабого контрпримера мы можем показать, что мы не можем найти x такой, что $f(x) = 0$. Для нашего контрпримера мы берем равномерно непрерывную f, удовлетворяющую (для такого же x_0, что и раньше)

$$x \in [0, 3^{-1} + 3^{-1} x_0] \to f(x) = 3x - 1,$$
$$x \in [3^{-1} + 3^{-1} x_0, 2 \cdot 3^{-1} + 3^{-1} x_0] \to f(x) = x_0,$$
$$x \in [2 \cdot 3^{-1} + 3^{-1} x_0, 1] \to f(x) = 3x - 2.$$

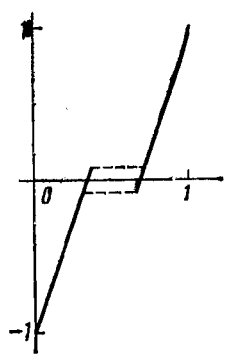


Рис. 1.

Очевидно, что если $x_0 < 0$, то $f(x) = 0 \to x = 2 \cdot 3^{-1}$, а если $x_0 > 0$, то $f(x) = 0 \to x = 3^{-1}$. Теперь, если $f(x_1) = 0$, то $x_1 < 3^{-1} \vee x_1 > 2 \cdot 3^{-1}$ и, следовательно, $\neg (x_0 < 0) \vee \neg (x_0 < 0)$, а этого мы не знаем.

Этот результат имеет классический аналог — утверждение о том, что решение уравнения $f(x_1) = 0$ не может быть найдено непрерывно по f. Отметим, с одной стороны, что, согласно классической логике, для рекурсивной f всегда имеется рекурсивный x такой, что $f(x) = 0$ (рассуждение здесь совершенно аналогично построению, показывающему, что $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_2$ (5.9)). С другой стороны, стандартное преобразование приведенного контрпримера в рекурсивную форму показывает, что нет решения, рекурсивного по f, а тем более и рекурсивно непрерывного.

Замечание. Аналогично мы можем построить контрпример к теореме Брауэра о неподвижной точке в одном измерении. Пусть f — равномерно непрерывная функция на $[0, 1]$, определенная соотношениями: $x \in [2 \cdot 3^{-1} - x_0, 1] \to fx = 2 \cdot 3^{-1}$, $x \in [3^{-1} - x_0, 2 \cdot 3^{-1} - x_0] \to fx = x + x_0$, $x \in [0, 3^{-1} - x_0] \to fx = 3^{-1}$. Функция f отображает $[0, 1]$ на $[3^{-1}, 2 \cdot 3^{-1}]$, но мы не можем найти x такой, что $fx = x$. Этот пример можно тривиальным образом превратить в двумерный контрпример — функцию g: $(x, y) \to (fx, 2^{-1} y + 2^{-2})$, определенную на $[0, 1] \times [0, 1] = I^2$.

Рекурсивная версия *этого* контрпримера к теореме Брауэра о неподвижной точке показывает только, что неподвижная точка не может быть найдена рекурсивно по f, но в действительности для двумерного случая можно дать *гораздо более сильные*

контрпримеры (Оревков [1], [2])*), показывающие, что (a) существует непрерывное отображение φ квадрата I^2 в I^2 такое, что $\rho(p, \varphi p) \geqslant 1/8$ для всех $p \in I^2$, где ρ — евклидова метрика; (b) существует равномерно непрерывное отображение ψ из I^2 в I^2 такое, что $\forall p \in I^2 (\psi z \neq z)$.

5.15. Метрические пространства.

5.15. Определение. (i) *Метрическое пространство* — это пара $\langle V, \rho\rangle$, где V — множество (множество точек пространства), а ρ — отображение $V \times V \to \mathbb{R}(\mathcal{U})$ такое, что:

(1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$;
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

(ii) *Полное сепарабельное метрическое* пространство строится следующим образом. Пусть дана счетная последовательность объектов $\langle p_n\rangle_n$ с метрикой ρ, например, путем задания функции β такой, что

$$|\rho(p_i, p_j) - r_{\beta(i, j, k)}| < 2^{-k}.$$

Мы определим теперь *генераторы точек* (г. т.) аналогично г. в. ч. с заменой $\lambda xy|x - y|$ в определении на ρ. Отношение *эквивалентности* ($\langle p_{\alpha n}\rangle_n \sim \langle p_{\beta n}\rangle_n$) определяется так же, как для г. в. ч. Теперь *точки* — это классы эквивалентности г. т., и ρ автоматически распространяется на все точки с помощью следующего определения. Если $\langle p_{\alpha n}\rangle_n \in x$, $\langle p_{\beta n}\rangle_n \in y$, $\langle p_{\alpha n}\rangle_n$, $\langle p_{\beta n}\rangle_n$ — г. т., то

$$\rho(x, y) \equiv_{\text{def}} \lim_n \rho(p_{\alpha n}, p_{\beta n}).$$

Каждый объект p_n вкладывается в пространство в виде класса эквивалентности $\langle p_n\rangle_m$ и ρ — это просто расширение ρ на $\langle p_n\rangle_n$ с точностью до этого вложения. Произвольное *сепарабельное метрическое пространство* — это подпространство полного метрического пространства.

5.16. Стандартное представление полного сепарабельного метрического пространства. Пусть $\lambda i\alpha(k, n, i)$ перечисляет множество

$$A_{n, k} \equiv_{\text{def}} \{l: \rho(p_l, p_n) < 2^{-k}\}.$$

Легко видеть, что $A_{n, k}$ рекурсивно перечислимо, так как

$$A_{n, k} = \{i: \exists l (r_{\beta(i, n, l)} < 2^{-k} - 2^{-l})\}.$$

*) См. также Добавление 6. — *Прим. ред.*

(Если $\rho(p_i, p_n) < 2^{-k}$, то $\rho(p_i, p_n) < 2^{-k} - 2^{-l+1}$ для некоторого l, следовательно, $r_{\beta(i, n, l)} < \rho(p_i, p_n) + 2^{-l} < 2^{-k} - 2^{-l}$. Если же $r_{\beta(i, n, l)} < 2^k - 2^{-l}$, то также и $\rho(p_i, p_n) < 2^{-k}$.)

Теперь мы можем связать с каждой функцией $\gamma \in \mathcal{U}$ последовательность $\langle q_n\rangle_n$ точек из $\langle p_n\rangle_n$ такую, что:

(1) $q_n = p_{\delta n}$, где $\delta 0 = \gamma 0$ и $\delta(n + 1) = \alpha(n, \delta n, \gamma n)$.

Легко видеть, что

(2) $\lim_n q_n = x \to \forall n (\rho(q_n, x) < 2^{-n+1})$, и каждая последовательность $\langle q_n\rangle_n$, определенная согласно (1), имеет предел.

Будем обозначать предел $x = \lim_n q_n$ последовательности $\langle q_n\rangle_n$, получаемой из γ согласно (1), через x_γ.

(3) $\forall x \exists \gamma (x = x_\gamma)$.

(4) Пусть $V_{\bar\gamma n} = \{x_\varepsilon: \bar\varepsilon n = \bar\gamma n\}$, тогда

$$\forall x \exists \gamma (x = x_\gamma \wedge \forall k (U(2^{-(k-2)}, x) \subset V_{\bar\gamma k})),$$

где $U(\varepsilon, x) = \{y: \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Чтобы установить это, возьмем x, y такие, что $\rho(x, y) < 2^{-k-2}$, и пусть $\langle q_n\rangle_n$, $\langle q'_n\rangle_n \subset \langle p_n\rangle_n$, $\forall n (\rho(q_n, x) < 2^{-n-2} \wedge \rho(q_n, y) < 2^{-n-2})$. Тогда имеются γ, δ, удовлетворяющие (1), такие, что $q_n = p_{\delta n}$ для всех n, и $x = x_\gamma$. А так как $\rho(q'_n, q'_{n+1}) < 2^{-n-1}$ и $\rho(q_{k-1}, q'_k) < \rho(q_{k-1}, x) + \rho(x, y) + \rho(y, q'_k) < 2^{-k-1} + 2^{-k-2} + 2^{-k-2} = 2^k$, то имеются также γ', δ' такие, что $\delta' 0 = \gamma' 0$, $\delta'(n+1) = \alpha(n, \delta' n, \gamma' n)$, $\langle p_{\delta' n}\rangle_n = q_0, \ldots, q_{k-1}, q'_k, q'_{k+1}, \ldots$, а потому $y = x_{\gamma'}$. Так как $\bar\gamma' k = \bar\gamma k$, имеем $U(2^{-k-2}, x) \subset V_{\bar\gamma k}$.

5.17. Примеры полных сепарабельных метрических пространств.

(a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $[0, 1]$.

(b) Если даны α, β, то полагаем

$$\mu_n(\alpha, \beta) = \sup\{2^{-l}: (i < n \wedge \alpha(i) \neq \beta(i)) \vee i = n\},$$

$\rho(\alpha, \beta) = \lim_n \mu_n(\alpha, \beta)$. ρ — метрика на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; это — конструкция, эквивалентная классическому бэровскому пространству.

(c) Эта метрика для бэровского пространства очевидным образом переносится на любое подмножество бэровского пространства, в частности на канторовское множество 0 — 1-последовательностей.

(d) Гильбертово пространство счетно бесконечной размерности.

§ 6. Непрерывность, схемы выбора

6.1. Непрерывность — более знакомое понятие, чем рекурсивность, а в случае анализа и топологии оно также ближе к интересам математической практики. Поэтому неудивительно, что парадокс Брауэра — «все вещественные функции непрерывны» и лежащие в его основе постулаты непрерывности для свободно становящихся последовательностей привлекли к себе большое внимание, точно так же как теоремы о непрерывности в RA и CRA принадлежат к числу наиболее поразительных результатов в этой области.

В этом параграфе мы коротко разъясним некоторые из исходных мотивировок введения свободно становящихся последовательностей и покажем, как все это привело к теории «непрерывной квантификации» (свободно становящиеся последовательности как «оборот речи», см. 6.3 и 6.14—6.16) с интересными математическими применениями.

6.2. Эвристические соображения, приведшие к изучению свободно становящихся последовательностей. Заметим прежде всего, что обычные классические примеры разрывных функций, определенных на $\mathbb{R}$, не являются контрпримерами в интуиционистской математике. Рассмотрим, например, функцию f, определенную на $\mathbb{R}$ равенствами $f(x)=0$ для $x\leqslant 0$ и $f(x)=1$ для $x>0$. С конструктивной точки зрения эта функция не является всюду определенной; если x_0 — вещественное число, определенное в 5.8 (4), т. е. если неизвестно $x_0<0\vee x_0=0\vee x_0>0$, то мы не знаем, как вычислить $f(x_0)$ с любой требуемой точностью, т. е. мы не можем доказать, что $f(x_0)$ определено.

Этот пример подсказывает, что всюду определенная вещественная функция f должна быть такова, чтобы приближения к аргументу были достаточны для вычисления значения функции с предписанной точностью, короче, f должна быть непрерывна. Иными словами, мы ожидаем, что всякий раз, когда доказуемо $\forall x\in\mathbb{R}\exists! y\in\mathbb{R}A(x,y)$, должна найтись *непрерывная* (в стандартной топологии на $\mathbb{R}$) функция f такая, что $\forall x\in\mathbb{R}A(x,fx)$.

Как мы увидим ниже в 6.4, $\forall\alpha\exists x$-непрерывность (α пробегает теоретико-числовые функции, x — натуральные числа) достаточна для этого.

Соблазнительно думать, что следующее допущение: $\forall x\in\mathbb{R}\exists y\in\mathbb{R}A(x,y)\to\exists f\forall x\in\mathbb{R}A(x,fx)$ (f непрерывна в стандартной топологии на $\mathbb{R}$) — столь же правдоподобно, однако в этом случае имеется контрпример.

Пример. Как классически, так и конструктивно уравнение $x^3-3x+a=0$ имеет корень в $\mathbb{R}$ для всех $a\in\mathbb{R}$. Однако легко видеть, что невозможна $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, непрерывная в стандартной топологии на $\mathbb{R}$ и такая, что $\forall a\in\mathbb{R}(f^3(a)-3f(a)+a=0)$.

С другой стороны, приближения к корню можно вычислить по приближениям к a, т. е. по начальному отрезку генератора вещественного числа для a. Естественная топология для г. в. ч. — это топология нульмерного бэровского пространства (т. е. окрестность состоит из всех г. в. ч., начинающихся с некоторого начального отрезка), и поэтому мы можем переформулировать предыдущее утверждение так: имеется непрерывное (в топологии бэровского пространства) отображение, ставящее каждому г. в. ч. для a в соответствие некоторый г. в. ч. для корня уравнения $x^3-3x+a=0$. В соответствии с этим мы увидим (в 6.13—6.16), что можем принять $\forall\alpha\exists\beta$-схему непрерывности.

Отметим, что предыдущий пример иллюстрирует также «интенсиональный аспект»: метод Φ, определяющий вещественное число y по вещественному x, должен использовать всю имеющуюся информацию об x; а так как вещественное число дано нам в виде г. в. ч., то Φ в действительности работает на г. в. ч., и не обязательно имеет место $\langle r_n\rangle_n\sim\langle r'_n\rangle_n\to\Phi(\langle r_n\rangle_n)\sim\Phi(\langle r'_n\rangle_n)$.

Свободно становящиеся последовательности. Брауэровская концепция свободно становящейся последовательности дает некоторое теоретическое обоснование схем непрерывности, которое можно описать следующим образом.

Доказательство утверждения $\forall\alpha\exists x A(\alpha,x)$ неявно содержит операцию Φ такую, что верно $\forall\alpha A(\alpha,\Phi\alpha)$, но при определении $\Phi\alpha$ может использоваться вся имеющаяся неэкстенсиональная информация (например, гёделевы номера, если α пробегает общерекурсивные функции). Однако мы можем рассматривать и «незавершенные» последовательности, т. е. процессы определения значений для каждого аргумента, которые априори не определены законом (экстремальный пример — последовательность бросаний монеты или кости); иначе говоря, мы можем расширить (обобщить) наше понятие последовательности, абстрагируясь от идеи, что последовательность должна всегда определяться некоторым законом, и мы сохраняем лишь одну существенную черту: для каждого аргумента n в конце концов должно определяться значение αn. Для этой обобщенной концепции $\forall\alpha\exists x A(\alpha,x)$ становится гораздо более сильным утверждением, так как расширена область значений переменной α, и правдоподобно, что операция Φ, которая должна выдавать некоторый x для *каждой* α (следовательно, также и в экстремальном случае, когда на любой стадии построения α известен только начальный сегмент последовательности α), необходимо непрерывна, т. е. Φ должна удовлетворять условию

$$\forall\alpha\exists x\forall\beta\in\bar{\alpha}x(\Phi\alpha=\Phi\beta),$$

которое приводит к схеме непрерывности

$$\mathrm{WC-N^*}\quad \forall\alpha\exists x A(\alpha, x, \gamma)\to\forall\alpha\exists y\exists x\forall\beta\in\bar{\alpha}y A(\beta, x, \gamma).$$

Если допустить еще, что для непрерывной операции Φ мы можем решить, достаточен ли начальный отрезок $\bar{\alpha}x$ аргумента α для вычисления значения $\Phi\alpha$ (а это значит, что Φ задана нам посредством окрестностной функции β такой, что $\beta(\bar{\alpha}x)\neq 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ($\Phi\alpha$ может быть вычислено, исходя из $\bar{\alpha}x$, и имеет значение $\beta(\bar{\alpha}x)\dot{-}1$), мы можем усилить схему $\mathrm{WC-N^*}$ до $\mathrm{C-N'^*}$ или $\mathrm{CONT_0}$:

$$\mathrm{CONT_0}\qquad \forall\alpha\exists x A(\alpha, x, \gamma)\to\exists\beta\in K_0\forall\alpha A(\alpha, \beta(\alpha), \gamma),$$

где

$$K_0\beta=_{\mathrm{def}}\forall\alpha\exists x(\beta(\bar{\alpha}x)\neq 0)\wedge\forall nm(\beta n\neq 0\to\beta n=\beta(n*m)),\quad(1)$$

$$\beta(\alpha)=x=_{\mathrm{def}}\exists y(\beta(\bar{\alpha}y)=x+1),\quad(2)$$

$$A(\alpha, \beta(\alpha), \gamma)=_{\mathrm{def}}\exists x(\beta(\alpha)=x\wedge A(\alpha, x, \gamma)).\quad(3)$$

Так как бóльшая часть математических построений в элементарном анализе не зависит от допущения, что элементы множества $\mathcal{U}$ заданы законом, они должны сохраняться также и для свободно становящихся последовательностей (= расширенной концепции последовательностей, описанной выше), и для свободно становящихся последовательностей правдоподобно допущение добавочной схемы непрерывности $\mathrm{CONT_0}$.

6.3. Элиминация свободно становящихся последовательностей. Наши рассуждения, однако, лишь делают схему $\mathrm{CONT_0}$ правдоподобной, а не обосновывают ее строгим образом. В действительности в настоящее время неизвестно никакого простого понятия свободно становящейся последовательности, для которого можно было бы вывести и схему $\mathrm{CONT_0}$ и условия замкнутости на универсум $\mathcal{U}$, приведенные в 5.2.

Поэтому в 6.13—6.16 ниже мы примем другой подход: мы обоснуем кванторы по свободно становящимся последовательностям с помощью переинтерпретации. По существу, для этого имеется два метода. Первый — это реализуемость по Клини с помощью функций, которая кратко рассматривается в 6.23; второй метод состоит в элиминации свободно становящихся последовательностей методом контекстуального определения. Точнее, мы рассматриваем формальные системы, содержащие, кроме кванторов по натуральным числам, также два сорта кванторов по функциям: обычные кванторы по функциям («кванторы по конструктивным функциям») и кванторы по свободно становящимся последовательностям. Смысл кванторов по свободно становящимся последовательностям разъясняется затем посредством контекстуального определения в терминах других логических операторов — они разъясняются как «оборот речи». Это определение автоматически делает истинной схему $\mathrm{CONT_0}$. Главная

работа состоит в том, чтобы показать, что кванторы по свободно становящимся последовательностям действительно удовлетворяют законам для кванторов (факт, который был бы очевиден, если бы мы могли рассматривать квантификацию по свободно становящимся последовательностям как квантификацию по особому сорту объектов).

Перед описанием элиминации и ее приложений в 6.13—6.16 мы приведем сначала: (1) одно математическое приложение схемы $\mathrm{WC-N^*}$ (другие иллюстрации использования $\mathrm{WC-N^*}$ в математике см. у Трулстры [7], гл. 6), (2) короткое обсуждение отношения между тезисом Чёрча и непрерывностью и (3) некоторые логические соотношения, выводимые в **EL***.

6.4. Теорема. *Пусть* $\Gamma=\langle V, \rho\rangle$ *— полное сепарабельное метрическое пространство, построенное над базисными точками* $\langle p_n\rangle_n$; *пусть* $\{W_i: i\in I\}$, $I\subset\mathbb{N}$, *— покрытие пространства* Γ, *т. е.* $\forall x\in V\exists i\in I(x\in W_i)$. *Тогда семейство* $\{\mathrm{Int}(W_i): i\in I\}$ *— снова покрытие* Γ ($\mathrm{Int}(W)$ *— внутренность множества* W) *при условии, что универсум* $\mathcal{U}$ *теоретико-числовых функций* (см. 5.2) *удовлетворяет схеме* $\mathrm{WC-N^*}$.

Доказательство. Используя стандартное представление (5.16) полных сепарабельных метрических пространств, мы имеем

$$\forall\alpha\exists i\in I(x_\alpha\in W_i).$$

В силу $\mathrm{WC-N^*}$

$$\forall\alpha\exists i\exists k\forall\beta\in\bar{\alpha}k(x_\beta\in W_i\wedge i\in I).$$

По определению $V_{\bar{\alpha}k}$ (см. 5.16) получаем

$$\forall\alpha\exists i\exists k(i\in I\wedge V_{\bar{\alpha}k}\subset W_i),$$

и вместе со свойством (4) из 5.16 это дает

$$\forall x\exists i\in I(x\in\mathrm{Int}(W_i)).\ \square$$

Следствие. *Пусть* $\Gamma=\langle V, \rho\rangle$, $\Gamma'=\langle V', \rho'\rangle$ *— полные сепарабельные метрические пространства с базисными точками* $\langle p_n\rangle_n$, $\langle p'_n\rangle_n$ *соответственно. Любое отображение* f *из* Γ *в* Γ' *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $U_i=\{x: \rho'(p'_i, fx)<2^{-\nu}\}$ и $\nu\in\mathbb{N}$ фиксировано. Тогда $\{U_i: i\in\mathbb{N}\}$ покрывает Γ. По предыдущей теореме $\{\mathrm{Int}(U_i): i\in\mathbb{N}\}$ покрывает Γ, поэтому

$$\forall x\in V\exists k\exists i(U(x, 2^{-k})\subset U_i)$$

и, таким образом, для любого x мы можем найти числа k, i такие, что

$$\rho(x, y)<2^{-k}\to fy\in U_i,$$

и, следовательно, $\rho(fx, fy)<\rho(fx, p'_i)+\rho(fy, p'_i)<2\cdot 2^{-\nu}$. $\square$

6.5. Тезис Чёрча и непрерывность. Если $\mathcal{U} = \mathcal{R}$, множеству общерекурсивных функций, то схема $\mathrm{WC-N}^*$ явно ложна, так как верно утверждение $\mathrm{CT} \equiv \forall\alpha\exists x\{\forall y\exists z(Txyz \wedge \alpha y = Uz)\}$, но x не может быть определен, исходя лишь из некоторого начального отрезка функции α. CT с большой силой привлекает внимание к *интенсиональным* аспектам последовательностей (а именно, к их гёделевым номерам). С другой стороны, CT и схема

$\mathrm{CONT}_0!$ $\quad \forall\alpha\exists! x A(\alpha, x) \to \exists\gamma \in K_0 \forall\alpha A(\alpha, \gamma(\alpha))$

(где K_0 определено в 6.2 (1)) совместимы, в действительности $\mathbf{HA} + \mathrm{M} + \mathrm{ECT}_0 \vdash \mathrm{CONT}_0!$. Верно даже больше: в CRA (т. е. в $\mathbf{HA} + \mathrm{M} + \mathrm{ECT}_0$, см. 4.13) доказуемо следствие из 6.4 (см. Цейтин [1], Московакис [1])*). Однако в этом случае это следствие верно, так сказать по совершенно иным причинам: условие *экстенсиональности* для операций, определенных на всех общерекурсивных функциях, оказывается весьма сильным.

6.6.—6.12. Некоторые логические соотношения, выводимые в EL*, бар-индукция.

6.6. K_0, множество окрестностных функций, уже было определено в 6.2 (1). Полагаем

$$K_1\alpha \equiv_{\mathrm{def}} \forall\gamma\exists z\forall\beta \leqslant \gamma(\alpha(\bar{\beta}z) \neq 0) \wedge \forall nm(\alpha n \neq 0 \to \alpha n = \alpha(n * m)). \quad (1)$$

$K_1\alpha$ выражает условие: α — окрестностная функция, и функционал Φ_α:

$$\Phi_\alpha\beta = x \leftrightarrow \exists z(\alpha(\bar{\beta}z) = x + 1),$$

представленный функцией α, равномерно непрерывен на компактных подмножествах универсума $\mathcal{U}$ (т. е. области значений наших функциональных кванторов).

Мы вводим K_2 обобщенным индуктивным определением

$\mathrm{K1-2}$ $\quad A(\alpha, K_2) \to K_2\alpha,$

$\mathrm{K3}$ $\quad \forall\alpha[A(\alpha, Q) \to Q\alpha] \to [K_2\alpha \to Q\alpha],$

где

$$A(\alpha, P) \equiv_{\mathrm{def}} \exists x(\alpha = \lambda nSx) \vee (\alpha 0 = 0 \wedge \forall x(\lambda n\alpha(\hat{x} * n) \in P)). \quad (2)$$

*) Впервые теорема о непрерывности конструктивных функций опубликована в работе: Цейтин Г. С. Равномерная рекурсивность алгоритмических операторов над общерекурсивными функциями и каноническое представление для конструктивных функций вещественного аргумента. — Тр. 3-го Всесоюзного матем. съезда, 1956, 1, с. 188—189. — *Прим. ред.*

$\mathrm{K1-2}$ в действительности эквивалентно конъюнкции двух импликаций

$\mathrm{K1}$ $\quad \alpha = \lambda nSx \to K_2\alpha,$

$\mathrm{K2}$ $\quad \alpha 0 = 0 \wedge \forall x(\lambda n\alpha(\hat{x} * n) \in K_2) \to K_2\alpha.$

K1 и K2 выражают, что K_2 удовлетворяет некоторым условиям замкнутости, K3 — что K_2 — наименьшее множество, удовлетворяющее этим условиям замкнутости.

Мы отметим, кстати, что обобщенные индуктивные определения считаются допустимым методом определения в большинстве видов конструктивизма (но не в финитизме), например в интуиционизме, CRA (Марков [3]) и строгом конструктивизме.

Классически $K_0 \subset K_2$. Чтобы увидеть это, заметим сначала, что для любого $\beta \in K_0 - K_2$ верно $\beta 0 = 0$ (так как иначе $\beta = \lambda n\beta 0 \in K_2$ в силу K1), а также что $\exists x(\lambda n\beta(\hat{x} * n) \in K_0 - K_2)$. Таким образом, если $\alpha \in K_0 - K_2$, то по аксиоме зависимых выборов существует γ такая, что $\forall x(\lambda n\alpha(\bar{\gamma}x * n) \in K_0 - K_2)$, и поэтому $\forall x(\alpha(\bar{\gamma}x) = 0)$. Но это противоречит тому, что $\alpha \in K_0$, так как последнее влечет $\forall\gamma\exists x\alpha(\bar{\gamma}x) \neq 0)$.

Обратное включение $K_2 \subset K_0$ верно и конструктивно: применяем K3 для $Q\alpha \equiv \forall\beta\exists x(\alpha(\bar{\beta}x) \neq 0)$ и $Q\alpha \equiv \forall nm(\alpha n \neq 0 \to \alpha n = \alpha(n * m))$.

Брауэровская «бар-теорема» сводится к принятию равенства $K_0 = K_2$ также и интуиционистски. (Широкое обсуждение см. у Трулстры [7].) Мы можем доказать даже больше чем $K_2 \subset K_0$, а именно следующее.

6.7. Лемма. $K_2 \subset K_1$.

Доказательство. Применяем K3 с $K_1\alpha$ в роли $Q\alpha$. □

Следующая лемма и теорема дают нам аксиоматизацию, эквивалентную условиям K1 — 3.

Лемма (индукция по необеспеченным последовательностям). *В* $\mathbf{EL}^* + \mathrm{K1-3}$ *мы можем вывести*

IUS $\quad K_2\alpha \to [\forall n(\alpha n \neq 0 \to Q'n) \wedge \forall n(\forall yQ'(n * \hat{y}) \to Q'n) \to Q'\langle\,\rangle].$

Доказательство. Применяем K3 к

$$Q\alpha \equiv \forall m[\forall n(\alpha n \neq 0 \to Q'(m * n)) \wedge \forall n(\forall yQ'(m * n * \hat{y}) \to Q'(m * n)) \to Q'm].$$

Это дает утверждение леммы, если взять $m = \langle\,\rangle$. □

6.8. Теорема. $\mathrm{IUS} + \forall\alpha(K_2\alpha \to \forall nm(\alpha n \neq 0 \to \alpha n = \alpha(n * m))) + \mathrm{K1-2}$ *дедуктивно эквивалентна* K3 *относительно системы* $\mathbf{EL}^*$.

Доказательство. K1, 2 доказываются легко. Чтобы установить K3, мы показываем, что при допущениях $\forall\alpha(A(\alpha, Q) \to$

$\to Q\alpha$) и $K_2\alpha$ верно $Q\alpha$; это можно сделать, применяя IUS к $Q'n \equiv \lambda m\alpha(n * m) \in K_2$. □

Клини сформулировал (например, в Клини и Весли [1]) брауэровскую «бар-теорему» (индукцию по частичному упорядочению вполне упорядоченного дерева) в виде

$\mathrm{BI_D}$ $\quad \forall\alpha\exists x P(\bar\alpha x) \wedge \forall n(Pn \vee \neg Pn) \wedge \forall n(Pn \to Qn)$
$\wedge \forall n(\forall y Q(n * y) \to Qn) \to Q\langle\ \rangle.$

Чуть более сильная форма такова:

BI $\quad \forall\alpha\exists x P(\bar\alpha x) \wedge \forall nm(P(n) \to P(n * m))$
$\wedge \forall n(P(n) \to Q(n)) \wedge \forall n((\forall y(Q(n * y) \to Q(n)) \to Q\langle\ \rangle),$

6.9. Теорема. $\mathbf{EL}^* + \mathrm{K1-3} \vdash K_0 = K_2 \to \mathrm{BI_D}$.

Доказательство. Допустим

$$\forall\alpha\exists x P(\bar\alpha x), \tag{3}$$
$$\forall n(Pn \to Qn), \tag{4}$$
$$\forall n(Pn \vee \neg Pn), \tag{5}$$
$$\forall n(\forall y Q(n * y) \to Qn). \tag{6}$$

Так как P разрешим, то функция β, определяемая равенствами

$$\beta n = 1 \leftrightarrow \exists m < nPm,$$
$$\beta n = 0 \text{ в противном случае,}$$

является элементом множества K_0 ввиду (3). Положим теперь

$$Q'n \equiv_{\mathrm{def}} Qn \vee \exists m < nP\bar m$$

и допустим, что $\forall y Q'(n * y)$. Если $\exists m < nPm$ или Pn, то $Q'n$ (по определению Q' и (4)). Допустим, что $\neg\exists m \leqslant nPm$, т. е. $\neg\exists m < n * yPm$ для всех y; тогда ввиду $\forall y Q'(n * y)$ верно $\forall y Q(n * y)$, следовательно, в силу (6) верно Qn и потому $Q'n$.

Мы показали теперь, что

$$\exists m \leqslant nPm \vee \neg\exists m \leqslant nPm \to (\forall y Q'(n * y) \to Q'n)$$

и потому в силу (5) также

$$\forall y Q'(n * y) \to Q'n.$$

Очевидно также, что

$$\beta n \neq 0 \to Q'n,$$

так что в силу леммы об IUS и равенства $K_0 = K_2$ мы находим, что $Q'0$, следовательно, $Q0$, так как $\exists m < 0Pm$ исключено. □

6.10. Теорема. *Схема* $\mathrm{BI_D}$ *эквивалентна* BI *относительно* $\mathbf{EL}^* + \mathrm{CONT_0}$.

Доказательство. Допустим $\mathrm{BI_D}$, (3), (4), (6) и

$$\forall nm(Pn \to P(n * m)).$$

В силу $\mathrm{CONT_0}$ имеется $\beta \in K_0$ такое, что

$$\forall\alpha P(\bar\alpha(\beta(\alpha))).$$

Мы полагаем

$$P'n \equiv_{\mathrm{def}} \beta n \neq 0 \wedge \mathrm{lth}(n) \geqslant \beta n \dot{-} 1.$$

Тогда очевидным образом $\forall\alpha\exists x P'\bar\alpha x$, и так как (в силу (7)) $P'n \to Pn$, то также и $\forall n(P'n \to Qn)$. Утверждение $\forall n(P'n \vee \neg P'n)$ также очевидно, и потому $Q0$ следует по $\mathrm{BI_D}$. □

6.11. Относительно системы $\mathbf{EL}^* + \mathrm{CONT_0}$ схема BI дедуктивно эквивалентна трансфинитной индукции

TI $\quad \forall\alpha\exists x \neg(\alpha x \prec \alpha(x+1)) \to [\forall x(\forall y \prec xQy \to Qx) \to \forall xQx]$

(где $\prec$ — отношение, определимое в $\mathbf{EL}^*$).

Относительно $\mathbf{EL}^*$ эквивалентны схемы $\mathrm{TI_D}$ (TI, ограниченная разрешимыми формулами Q) и $\mathrm{BI_D}$.

Доказательство. См. Говард и Крайзель [1], следствие 1 к теореме 5В и теорема 6В. □

Следующая теорема аналогична импликации $K_0 = K_2 \to \mathrm{BI_D}$, выведенной выше.

6.12. Теорема. $\mathbf{EL}^* \vdash K_0 = K_1 \to \mathrm{FAN_D}$, *где* $\mathrm{FAN_D}$ — *схема*

$\mathrm{FAN_D}$ $\quad \forall\alpha\exists x A(\bar\alpha, x) \wedge \forall n(An \vee \neg An)$
$\to \exists z\forall\beta \leqslant \lambda x.\, 1\exists x \leqslant z A(\bar\beta x).$

Доказательство предоставляется читателю.

6.13.—6.16. Элиминация свободно становящихся последовательностей.

6.13. Описание систем $\mathbf{CS}_{\mathrm{H}}^-$, $\mathbf{CS}_{\mathrm{H}}$, CS. Изложение в этом и следующих двух пунктах местами по необходимости конспективно, но, по нашему ощущению, достаточно подробно для того, чтобы дать хорошее представление о применяемых методах. Полные подробности см. у Крайзеля и Трулстры [1] и Трулстры [5].

При обсуждении, приводимом ниже, мы будем рассматривать теорию **H** в языке $\mathrm{L}(\mathbf{H})$. Такой язык содержит: (1) числовые переменные; (2) переменные для конструктивных функций (a, b, c, d); (3) переменные для определенного класса K окрестностных функций (K-переменными будут e, f, e').

Замечание. Если K — константа, определимая в **H** (без использования K-переменных), то добавление K-переменных дает системы, которые являются расширениями с помощью определений для систем без K-переменных.

Кроме того, $\mathrm{L}(\mathbf{H})$ содержит:

(i) все константы системы **EL**;

(ii) некоторые константы для элементов множества K;

(iii) некоторые константы для операторов типов $\mathbb{N}\to K$, $K^2\to K$, $K\to K$ (в частности, k, ;, :); присутствие таких констант вместе с их определяющими аксиомами неявно выражает определенные свойства замкнутости множества K;

(iv) K-абстракцию, обозначаемую через λ': если φ есть K-терм (= K-функтор) и t — числовой терм, то $\lambda' n\varphi(\langle t\rangle * n)$ — снова K-функтор;

(v) операции $|$, ( ) со следующим правилом построения термов: если φ — K-функтор, φ' — функтор, то $\varphi|\varphi'$ есть функтор (= функциональный терм), а $\varphi(\varphi')$ — числовой терм.

Рассматриваемые системы **H** аксиоматизированы на основе многосортной интуиционистской логики предикатов, всех аксиом и схем системы **EL** и схемы $AC_{01} \equiv AC - NF$:

$$AC - NF \qquad \forall x\exists a A(x, a)\to\exists b\forall x A(x, (b)_x).$$

Имеются аксиомы для элементов множества K (различные в разных приложениях), из которых следует, что

$$\begin{aligned}&\forall e\forall b\exists x(e(\bar b x)\neq 0),\\ &\forall nm(en\neq 0\to en = e(n * m)),\end{aligned}\tag{1}$$

т. е. элементы K являются окрестностными функциями на области значений функциональных переменных. (1) обосновывает введение аксиом

$$e(a) = x \leftrightarrow \exists y(e(\bar a y) = x + 1),\tag{2}$$

$$(e|a)(x) = y \leftrightarrow \exists z(e(\hat x * \bar a z) = y + 1).\tag{3}$$

(2) и (3) показывают, что введение операций ( ) и $|$ сводится к расширению с помощью определений. Причина введения K-переменных состоит в том, что это позволяет нам рассматривать ( ) и $|$ как всюду определенные операции при условии, что область значений первого аргумента ограничена K-функциями. Для $\lambda' x$ мы имеем

$$(\lambda' ne(\hat x * n))t = e(\hat x * t).\tag{4}$$

С каждым элементом e множества K мы можем связать два непрерывных функционала Φ_e: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ и Ψ_e: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ таких, что

$$\Phi_e(a) = e(a), \qquad \Psi_e(a) = e|a.$$

Для доказательства теорем об элиминации и их приложений множество K должно удовлетворять определенным условиям замкнутости, которые должны быть выводимы из аксиом системы **H** для K.

Полный список CC этих условий замкнутости не нужен для наших целей. Список CC, который в любом случае достаточен для приложений, обсуждаемых ниже, см. у Трулстры [5].

Среди прочего, CC выражает замкнутость относительно определенных примитивно рекурсивных операций :, ;, $\wedge$ таких, что

$$(e; f)(a) = e(f|a), \quad (e: f)|a = e|(f|e),$$
$$(e|a)(f|a) = (e\wedge f)(a),$$

т. е.

$$\Phi_{e;f}a = \Phi_e(\Psi_f a), \quad \Psi_{e:f}a = \Psi_e(\Psi_f a), \quad \Phi_{e\wedge f}a = (\Psi_e a)(\Psi_f a).$$

Нам нужен также оператор, отображающий последовательности на последовательности с начальным сегментом n. Пусть $k(n, m)$ — функция такая, что

$$\begin{cases} m = \hat x * m'\wedge x < \mathrm{lth}(n)\to k(n, m) = (n)_x,\\ m = \hat x * m'\wedge x\geqslant \mathrm{lth}(n)\wedge \mathrm{lth}(m') > x\to k(n, m) = (m')_x,\\ k(n, m) = 0 \text{ во всех прочих случаях.}\end{cases}$$

Мы будем предполагать, что CC обеспечивает $\lambda mk(n, m)\in K$; предполагая, что в L[**H**] выражение $k^{(t)}$ является K-термом для каждого t, причем в **H** выводимо $k^{(n)}m = k(n, m)$, мы можем ввести сокращение

$$n|a \equiv_{\mathrm{def}} k^{(n)}a.$$

Очевидно, что

$$n|a\in n, \quad a\in n\to n|a = a,$$
$$(n|a)(x) = ax \quad \text{для} \quad x\geqslant \mathrm{lth}(n).$$

Теперь система **H** может быть следующим образом вложена в соответствующую теорию $\mathbf{CS}_{\mathbf{H}}$. Язык системы $\mathbf{CS}_{\mathbf{H}}$ содержит переменные $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ для свободно становящихся последовательностей, и правила построения термов в **H** расширяются следующим очевидным образом:

(1) Если t — числовой терм, φ — C-функтор (т. е. его подразумеваемое значение — свободно становящаяся последовательность), то φt — числовой терм.

(2) Если φ — K-функтор, φ' — C-функтор, то $\varphi|\varphi'$ — C-функтор, а $\varphi(\varphi')$ — числовой терм.

(3) Если t — терм, то $\lambda'' xt$ — C-функтор.

В системе $\mathbf{CS}_{\mathbf{H}}$ оператор λ ограничен очевидным образом: λ можно применять только к термам, не содержащим параметров типа свободно становящихся последовательностей. Причина введения различных операторов абстракции λ, λ', λ'' состоит в том, что мы хотим различать функторы, C-функторы и K-функторы синтаксически. (Полное описание правил построения термов см. у Крайзеля и Трулстры [1].)

Соглашение. Запись $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для формулы с параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ предполагает, что *все* параметры для сво-

бодно становящихся последовательностей содержатся в списке $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

К списку аксиом системы **H** мы добавляем следующие:

A1 $\quad \forall\alpha\exists x(e(\bar{\alpha}x) \neq 0),$

A2 $\quad \forall\alpha\exists\beta A(\alpha, \beta) \to \exists e\forall\alpha A(\alpha, e|\alpha),$

A3 $\quad \forall\alpha(A\alpha \to B\alpha) \to \forall e[\forall\alpha A(e|\alpha) \to \forall\alpha B(e|\alpha)].$

Чтобы получить систему $\mathbf{CS_H}$, мы добавляем также

A4 $\quad \forall\alpha\exists a A(\alpha, a)$
$\to \exists e\exists b\forall n(en \neq 0 \to \forall\alpha A(n|\alpha, \lambda m b(\langle en \dot{-} 1\rangle * m))).$

Используя условия замкнутости для K, мы можем показать, что отсюда следует

$$\forall\alpha\exists e A(\alpha, e) \to \exists e\exists f\forall n(en \neq 0 \to \forall\alpha A(n|\alpha, \lambda' m f(\langle en \dot{-} 1\rangle * m))).$$

В силу логики предикатов верны импликации, обратные к A3, A4. Мы отметим следующее:

(i) A2 влечет различные формы $\forall\alpha\exists x$-непрерывности такие, как

$$\forall\alpha\exists x A(\alpha, x) \leftrightarrow \exists e\forall\alpha A(\alpha, e(\alpha)),$$
$$\forall\alpha\exists x A(\alpha, x) \leftrightarrow \exists e\forall n(en \neq 0 \to \forall\alpha A(n|\alpha, en \dot{-} 1)).$$

Отметим, что $\forall\alpha A(n|\alpha, en \dot{-} 1) \leftrightarrow \forall\alpha \in n A(\alpha, en \dot{-} 1)$. Мы предоставляем читателю вывод этих эквивалентностей из A2.

(ii) Еще одно следствие из A2 — «принцип специализации»

SP $\quad \exists\alpha A\alpha \leftrightarrow \exists a A(\lambda'' x.\, ax)$

(где $A\alpha$ не содержит отличных от α параметров для свободно становящихся последовательностей). Чтобы установить это, заметим, что $\exists\alpha A\alpha$ влечет $\forall\beta\exists\alpha A\alpha$, следовательно, в силу A2, верно $\forall\beta A(e|\beta)$ для некоторой e, а потому $A(e|\lambda'' x.\, 0)$.

(iii) Нетрудно показать, что

$$\forall\alpha A\alpha \leftrightarrow \forall a A a$$

для исходных формул A, так как истинность формулы $A\alpha$ для исходной A зависит только от конечных отрезков A: из того, что $\forall\alpha(A\alpha \vee \neg A\alpha)$, т. е. $\forall\alpha\exists x[(x = 0 \wedge A\alpha) \vee (x = 1 \wedge \neg A\alpha)]$, следует, что $\exists e\forall n(en \neq 0 \to (\forall\alpha \in n\, A\alpha) \vee (\forall\alpha \in n \neg A\alpha))$. Поэтому, если $\forall a A a$, то $\forall\alpha \in n \neg A\alpha$ исключено для всех n и, таким образом, $\exists e\forall n(en \neq 0 \to \forall\alpha \in n\, A\alpha)$, что ввиду $\forall\alpha\exists x(e(\bar{\alpha}x) \neq 0)$ влечет $\forall\alpha A\alpha$.

6.14. Описание элиминирующего отображения τ. Это описание проводится индукцией по числу логических операторов, находящихся в области действия кванторов по свободно становящимся последовательностям (включая сами эти кванторы). Мы предполагаем, что $\vee$ элиминирована заранее с помощью эквивалентности $(A \vee B) \leftrightarrow \exists x[(x = 0 \to A) \wedge (x \neq 0 \to B)]$. Мы определяем вспомогательное отображение $\mapsto$ для формул, начинающихся с кванторов $\forall\alpha$, $\exists\alpha$ и не содержащих свободно переменных для свободно становящихся последовательностей. Общая идея определения состоит в продвижении кванторов по свободно становящимся последовательностям как можно глубже внутрь.

(i) $\exists\alpha A\alpha \mapsto \exists a A a$,

(ii) $\forall\alpha A\alpha \mapsto \forall a A a$ для исходных A,

(iii) $\forall\alpha(A\alpha \wedge B\alpha) \mapsto \forall\alpha A\alpha \wedge \forall\alpha B\alpha$,

(iv) $\forall\alpha(A\alpha \to B\alpha) \mapsto \forall e(\forall\alpha A(e|\alpha) \to \forall\alpha B(e|\alpha))$,

(v) $\forall\alpha\exists x A(\alpha, x) \mapsto \exists e\forall n(en \neq 0 \to \forall\alpha A(n|\alpha, en \dot{-} 1))$,

(vi) $\forall\alpha\exists\beta A(\alpha, \beta) \mapsto \exists e\forall\alpha(\alpha, e|\alpha)$,

(vii) $\forall\alpha\forall x A(\alpha, x) \mapsto \forall x\forall\alpha A(\alpha, x)$,
$\forall\alpha\forall a A(\alpha, a) \mapsto \forall a\forall\alpha A(\alpha, a)$,
$\forall\alpha\forall e A(\alpha, e) \mapsto \forall e\forall\alpha A(\alpha, e)$,

(viii) $\forall\alpha\forall\beta A(\alpha, \beta) \mapsto \forall e\forall f\forall\alpha A(e|\alpha, f|\alpha)$,

(ix) $\forall\alpha\exists a A(\alpha, a)$
$\mapsto \exists e\exists b\forall n(en \neq 0 \to \forall\alpha A(n|\alpha, \lambda n b(\langle en \dot{-} 1\rangle * n)))$,
$\forall\alpha\exists e A(\alpha, e)$
$\mapsto \exists e\exists f\forall n(fn \neq 0 \to \forall\alpha A(n|\alpha, \lambda' n f(\langle en \dot{-} 1\rangle * n)))$.

Применяя преобразование $\mapsto$ «до отказа», мы придем к формуле, не содержащей ни переменных для свободно становящихся последовательностей, ни кванторов по ним. Мы обозначим через $\tau(A)$ результат применения этого процесса к A.

Замечания. (1) Отображение τ не меняет формул системы **H**.

(2) Случаи (i)—(viii) в определении отображения τ достаточны для того, чтобы определить τ на всех формулах A, не содержащих ни кванторов $\exists e$, $\exists a$ в области действия кванторов всеобщности по свободно становящимся последовательностям, ни параметров для таких последовательностей.

Из введенных определений и замечаний, сделанных в 6.13 6.14, получается

6.15. Первая **теорема элиминации.** (i) *Если A не содержит кванторов $\exists a$, $\exists e$ в области действия кванторов всеобщности по свободно становящимся последовательностям, то*

$$\mathbf{CS_H} \vdash A \leftrightarrow \tau(A).$$

(ii) *Для формул, не содержащих свободно переменных для свободно становящихся последовательностей,*

$$\mathbf{CS_H} \vdash A \leftrightarrow \tau(A).$$

Доказательство. Каждый шаг отображения $\mapsto$ заменяет некоторую (под)формулу на эквивалентную формулу, как можно видеть, просматривая все случаи в определении τ и учитывая различные следствия аксиом A1 — A4, отмеченные в предыдущем пункте. □

Однако мы имеем больше.

6.16. Вторая теорема элиминации.

$$\mathbf{H} \vdash \tau(A) \Leftrightarrow \mathbf{CS_H} \vdash A.$$

Доказательство. Индукцией по длине вывода в $\mathbf{CS_H}$. См. Крайзель и Трулстра [1], § 7.

Эти теоремы позволяют нам трактовать кванторы по свободно становящимся последовательностям в $\mathbf{CS_H}$ как «обороты речи», которые могут быть полностью разъяснены в **H**.

6.17.—6.22. Некоторые приложения.

6.17. Пусть $\mathbf{H}^*$ — система, соответствующая системе **H**, но записанная с переменными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ вместо a, b, c, d. Пусть Γ — некоторое множество дополнительных постулатов, Γ^* — результат их переписывания в языке H^*. Допустим, что

$$\mathbf{H}^* + \Gamma^* \subseteq \mathbf{CS}_{\mathbf{H}}^{-}.$$

Для предложений A системы $\mathbf{CS_H}$, не содержащих кванторов $\exists a$, $\exists e$ в области действия кванторов по свободно становящимся последовательностям, мы имеем

$$\mathbf{CS_H} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{H} \vdash \tau(A).$$

Если A^* означает результат переписывания формулы $A \in \mathrm{L}[\mathrm{H}]$ в язык $\mathrm{L}[\mathrm{H}^*]$ и если

$$\mathbf{H} + \Gamma \vdash A,$$

то также и

$$\mathbf{H}^* + \Gamma^* \vdash A^*$$

и, следовательно,

$$\mathbf{CS_H} \vdash A^*,$$

а поэтому $\mathbf{H} \vdash \tau(A^*)$. Для арифметических A мы имеем $A^* \equiv A \equiv \tau(A^*)$, а потому $\mathbf{H} + \Gamma$ консервативна над **H**. Это наблюдение используется в следующих двух приложениях.

6.18. Теорема. $\mathbf{EL} + \mathrm{CONT}_1$ *консервативна над* $\mathbf{EL} + \mathrm{AC} - \mathrm{NF}$ *относительно арифметических предложений. Здесь* CONT_1 *— это схема* $\forall a \exists b A(a, b) \rightarrow \exists e \in K_0 \forall a A(a, e|a)$.

Доказательство. Пусть **H** — результат переписывания аксиом системы $\mathbf{EL} + \mathrm{AC} - \mathrm{NF}$ в язык $\mathrm{L}[\mathbf{H}]$ по указанному выше образцу, и пусть $K = K_0$ — аксиомы для K. Тогда применим предыдущее наблюдение. □

6.19. Теорема. $\mathbf{EL} + \mathrm{CONT}_1 + \mathrm{FAN}$ *консервативна над* $\mathbf{EL} + \mathrm{AC} - \mathrm{NF}$ *относительно арифметических предложений. Здесь* FAN *обозначает схему*

$$\mathrm{FAN} \quad \forall a \leqslant \lambda x.1 \exists x A(\bar{a}x) \rightarrow \exists z \forall a \leqslant \lambda x.1 \exists y \forall b \leqslant \lambda x.1 (\bar{a}z = \bar{b}z \rightarrow A(b, y)).$$

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, однако на этот раз аксиомы для K — это $K = K_1$. □

Замечание. Ввиду результата Гудмена [1] (доказанного также другим методом у Минца [1]) о том, что $\mathbf{EL} + \mathrm{AC} - \mathrm{NF}$ консервативна над **HA**, заключение теорем 6.18 и 6.19 может быть усилено до консервативности над **HA**.

6.20. Теорема. *Пусть* $\mathbf{IDB}_1$ *— это теория* **H** *с аксиомами* $K = K_2$ *для* K. *Тогда система* $\mathbf{CS}_{\mathbf{IDB}_1} = \mathbf{CS}$ *консервативна над* $\mathbf{IDB}_1$.

Доказательство. Применим вторую теорему элиминации. □

Отметим также, что если A не содержит $\vee$, $\exists$ в области действия квантора всеобщности по функциям, то легко проверить, что $\mathbf{H} \vdash \tau(A^*) \leftrightarrow A$ (где, как и раньше, A^* — результат переписывания формулы A системы **H** в язык системы $\mathbf{H}^*$). Доказательство проводится индукцией по числу логических операторов, находящихся в области действия кванторов всеобщности по функциям в A. В силу этого замечания отмеченные выше приложения в теоремах 6.18 и 6.19 допускают небольшие усиления.

6.21. Теорема. *Пусть* **FIM** *— система*

$$\mathbf{EL} + \mathrm{AC} - \mathrm{NF} + \mathrm{BI} + \mathrm{CONT}_1$$

(**FIM** — это по существу система из Клини и Весли [1]). *Тогда* **CS** *— консервативное расширение* **FIM**.

Доказательство. $(\mathbf{IDB}_1)^*$ — подсистема **FIM**, если *определить* K как K_0 — множество окрестностных функций (см. **6.2**(1)).

Если мы возьмем любое предложение A в языке системы **FIM** такое, что $\mathbf{CS} \vdash A$, то

$$\mathbf{IDB}_1 \vdash \tau(A).$$

С другой стороны, из того, что $\mathbf{FIM} \vdash (\tau(A))^*$ и $\mathbf{FIM} \vdash (\tau(A))^* \leftrightarrow A$ (поскольку A не содержала кванторов $\exists e$, $\exists a$,

то не нужно использовать в доказательстве этой эквивалентности постулат A4), следует, что $\mathbf{FIM} \vdash A$. □

6.22. Для использования в дальнейшем мы отметим следующую лемму, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{CS} \vdash \forall\alpha[\forall x A(x, \alpha) \to \forall u \exists v B(u, v, \alpha)]$, *где* A, B — *бескванторные формулы и* α — *единственный параметр для свободно становящихся последовательностей, встречающийся в* A, B. *Тогда для системы* $\mathbf{IDB}_1$ *из* 6.20

$$\mathbf{IDB}_1 \vdash \forall a[\forall x A(x, a) \to \forall u \exists v B(u, v, a)].$$

6.23. Реализуемость с помощью функций. Клини дал новую интерпретацию системы **FIM** (определенной в теореме 6.21) посредством реализуемости, которая интерпретирует **FIM** в **B** (по существу $\mathbf{EL}^* + \mathrm{AC} - \mathrm{NF} + \mathrm{BI}$ — базисной системе, которая совместима также и с классической логикой (см. Клини [7], Клини и Весли [1]).

Это определение основано на непрерывной операции применения функции к аргументу вместо частично рекурсивной операции применения функции к аргументу:

$$\alpha\,|\,\beta \simeq \gamma \equiv_{\mathrm{def}} \forall x\,(\alpha(\hat{x} * \bar{\beta}\min_z[\alpha(\hat{x} * \bar{\beta}z) \neq 0]) \dot{-} 1 = \gamma x).$$

Если мы определим «почти отрицательные» формулы как раньше, допуская теперь также и кванторы существования по функциям, и запишем «α реализует $A(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в этом новом смысле» в виде «$\alpha \mathbf{r}^1 A(\beta_1, \ldots, \beta_n)$», то мы можем сформулировать теорему характеризации, аналогичную теореме 4.8.

Теорема. (i) *Для почти отрицательных формул* A *имеет место* $\mathbf{EL}^* \vdash A \leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \mathbf{r}^1 A)$.

(ii) *Определим схему обобщенной непрерывности* GC *как*

$$\mathrm{GC} \quad \forall\alpha[A\alpha \to \exists\beta B(\alpha, \beta)] \to \exists\gamma\forall\alpha[A\alpha \to {!}\gamma\,|\,\alpha \wedge B(\alpha, \gamma\,|\,\alpha)]$$

для почти отрицательных A, *причем* ${!}\gamma\,|\,\alpha$ *выражает условие* $\exists\delta(\gamma\,|\,\alpha \simeq \delta)$. *Тогда*

$$\mathbf{EL}^* + \mathrm{GC} \vdash A \leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \mathbf{r}^1 A) \quad \textit{для всех } A,$$

$$\mathbf{H} + \mathrm{GC} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{H} \vdash \exists\alpha(\alpha \mathbf{r}^1 A) \quad \textit{для } \mathbf{H} = \mathbf{EL}^*,\ \mathbf{EL}^* + \mathrm{BI},\ \mathbf{EL}^* + \mathbf{FAN}.$$

§ 7. Беззаконные последовательности

7.1. В предыдущем параграфе мы привели только приблизительное интуитивно правдоподобное рассуждение в пользу аксиом непрерывности для свободно становящихся последовательностей, а затем перешли к трактовке понятия свободно становящейся последовательности как «оборота речи». В настоящее время неизвестно никакое действительно удовлетворительное понятие свободно становящейся последовательности, удовлетворяющее аксиомам **CS**; за обсуждением этой проблемы мы отсылаем читателя к книге Трулстры [7], приложение C.

Имеется один пример простого понятия последовательности (не определенной априори законом), где можно дать неформальное, но строгое обоснование аксиом (включая аксиомы непрерывности) — понятие беззаконной последовательности. Это понятие осмысленно с интуиционистской точки зрения, но, конечно, незаконно с точки зрения CRA.

Беззаконные последовательности легче всего описать следующим образом. Мы мыслим беззаконную последовательность как процесс определения значений такой, что в конце концов для любого данного натурального числа будет определен соответствующий член (значение) последовательности; однако на любой данной стадии уже определено только конечное число членов последовательности. Мы постулируем, что для любой предписанной конечной последовательности n имеется беззаконная последовательность, начинающаяся с n. Разумеется, мы можем рассматривать также последовательности, беззаконные относительно данного (заданного законом) дерева с конечным ветвлением; иными словами, мы знаем априори, что наша последовательность будет бесконечной ветвью дерева, но в остальном эта последовательность беззаконна. Хорошая «модель» для беззаконной последовательности (со значениями x, $1 \leqslant x \leqslant 6$) дается последовательностью бросаний игральной кости при условии, что мы разрешим вначале конечное число произвольных выкладываний кости. Различные беззаконные последовательности можно отождествлять в этой модели с различными костями.

7.2. Вот несколько принципов, которые, как можно показать, истинны для беззаконных последовательностей (буквы ε, η используются как переменные для таких последовательностей):

$$A\varepsilon \to \exists n[\varepsilon \in n \wedge \forall\eta \in nA\eta], \tag{1}$$

$$\forall\varepsilon\exists x A(\varepsilon, x) \to \exists e \in K_{\mathrm{LS}}\,\forall\varepsilon A(\varepsilon, e(\varepsilon)), \tag{2}$$

где

$$e \in K_{\mathrm{LS}} \equiv_{\mathrm{def}} \forall\varepsilon\exists x(e(\bar{\varepsilon}x) \neq 0) \wedge \forall nm(en \neq 0 \to en = e(n * m))$$

и «принцип распространения»

$$\varepsilon \in K_{\mathrm{LS}} \to \forall a\exists x(e(\bar{a}x) \neq 0). \tag{3}$$

Как сказано в 7.1, мы постулируем также

$$\forall n\exists\varepsilon(\varepsilon \in n). \tag{4}$$

Рассмотрим, например, (1). Допустим, что у нас есть доказательство утверждения $A\varepsilon$. Так как это доказательство должно быть завершено на определенной стадии, оно должно зависеть исключительно от нашего знания о начальном отрезке последовательности ε (обозначим его через n), известном на этой стадии. Следовательно, свойство A должно точно так же иметь место и для всех беззаконных η с начальным отрезком n.

Утверждение (2) можно обосновать в духе 6.2, но теперь это даже более убедительно, так как для *всех* беззаконных последовательностей на любой стадии известен только начальный сегмент.

Принцип (3) утверждает, что окрестностные функции для функционалов типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{N}$ на беззаконных последовательностях автоматически распространяются на функционалы, определенные также и на последовательностях, заданных законом. Обсуждение принципа распространения см. у Трулстры [7], 2.11.

Замечания. (i) Отметим, что обоснование принципа (1) дано, естественным образом, в субъективистских терминах («что знает на определенной стадии идеализированный математик»). Обоснование аксиом для беззаконных последовательностей обсуждается гораздо подробнее во второй главе книги Трулстры [7]. Обоснование принципа (1) дает также еще один пример вывода аксиом путем рассмотрения абстрактных понятий.

(ii) Беззаконные последовательности представляют не только педагогический интерес, хотя здесь мы ввели их преимущественно для того, чтобы продемонстрировать возможность строгого обоснования аксиом для понятия последовательности, являющейся «незаконченным объектом», и использования субъективистских интерпретаций. Их дополнительные приложения включают (1) построение универсумов последовательностей, подходящих для (вещественного) анализа (ср. Трулстра [7], гл. 4), и (2) обсуждение истинности и полноты интуиционистской логики предикатов (см. § 9 и Трулстра [7], гл. 7).

§ 8. Принцип Маркова

8.1. Значительный интерес привлекает «схема Маркова», которую можно сформулировать в виде

$$\mathrm{M} \qquad \forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge \neg\neg \exists x Ax \to \exists x Ax$$

(где формула A содержит только числовые параметры), а также ее варианты и ослабления. Мы можем перефразировать M следующим образом: пусть A — предикат от натуральных чисел, допускающий проверку для каждого натурального числа, и мы знаем из косвенных соображений, что должен найтись x такой, что Ax; тогда мы верим, что вычислительная машина с неограниченной памятью (или алгоритм), запущенная на поиск числа x такого, что Ax, в конце концов найдет такое число (если дать ей достаточно времени). Эта перефразировка не подходит для варианта, где мы допускаем в качестве параметров, например, свободно становящиеся последовательности. И в действительности, так как M был впервые рассмотрен в контексте CRA (ср. Марков [1]), его происхождение чисто механическое.

Тем не менее имеются интересные проблемы, связанные с общезначимостью (аналога) принципа M, в котором присутствуют нечисловые параметры, поэтому мы обсудим также (в 8.3) принцип

$$\mathrm{M}(\mathcal{U}) \qquad \forall \alpha[\neg\neg \exists x(\alpha x = 0) \to \exists x(\alpha x = 0)],$$

где предполагается, что α пробегает некоторый универсум $\mathcal{U}$ последовательностей.

Заметим, что сам принцип M в присутствии CT_0 эквивалентен своему частному случаю

$$\mathrm{M}_{\mathrm{PR}} \qquad \forall xy[\neg\neg \exists z Txyz \to \exists z Txyz]$$

или, эквивалентным образом,

$$\neg\neg \exists x Ax \to \exists x Ax \quad (A \text{ примитивно рекурсивна}).$$

8.2. Математические следствия принципов M и M($\mathcal{U}$). Простое следствие, значительно упрощающее теорию вещественных чисел и вещественных функций, таково.

Теорема. *Для вещественных чисел, пробегающих* $\mathbb{R}(\mathcal{U})$, $\forall x(x \neq 0 \leftrightarrow x \# 0) \leftrightarrow \mathrm{M}(\mathcal{U})$.

Замечание. В присутствии AC — NNI (т. е. AC_{00}!),

$$\forall x \exists! y A(x, y) \to \exists a \forall x A(x, ax),$$

принцип $\mathrm{M}(\mathcal{U})$ эквивалентен варианту принципа M, в котором допускаются параметры, пробегающие $\mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}(\mathcal{U})$, $\langle r_{\alpha n}\rangle_n \in x$, $x \neq 0$, $\forall k(|x - r_{\alpha k}| < 2^{-k})$. Так как $x \neq 0$, имеем $\neg \forall k(|r_{\alpha k}| < 2^{-k})$ и, следовательно, $\neg \forall k \neg(|r_{\alpha k}| \geqslant 2^{-k})$.

Неравенство $|r_{\alpha k}| \geqslant 2^{-k}$ выразимо в языке системы EL бескванторным утверждением, поэтому в силу QF — AC имеется функция b такая, что $bk = 0 \leftrightarrow (|r_{\alpha k}| < 2^{-k})$. Вместе с M имеем $\exists k(|r_{\alpha k}| \geqslant 2^{-k})$. Далее $|x - r_{\alpha k}| < 2^{-k} - 2^{-n}$ для подходящего n, следовательно, $|x| \geqslant \|r_{\alpha k}| - |x - r_{\alpha k}\| > 2^{-n}$, так что $x \# 0$.

Обратно, если $\forall x(x \neq 0 \to x \# 0)$ и $\langle s_n\rangle_n \in x$, где $\langle s_n\rangle_n$ определена равенством $s_n = 0$, если $\neg \exists y \leqslant n(ay = 0)$, и $s_n = 2^{-k}$, если $k = \min[ay = 0]$, то $\exists y(ay = 0) \leftrightarrow x \# 0$, $\neg\neg \exists y(ay = 0) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x \neq 0$, следовательно, в силу $\forall x(x \neq 0 \rightarrow x \# 0)$ получаем M. □

Гораздо интереснее теорема непрерывности в CRA: с помощью M можно доказать непрерывность всех отображений из полных сепарабельных метрических пространств в сепарабельные метрические пространства (см., например, работу Московакиса [1], которая написана с точки зрения классического рекурсивного анализа, но легко может быть приспособлена к CRA)*). Мы не формулируем здесь наиболее общую теорему этого рода.

У Бизона [1] (изложение имеется также у Трулстры [3], § 3.9) показано, что $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0$ недостаточна для вывода этой теоремы о непрерывности. Изучение доказательства этой теоремы в CRA показывает, что непрерывность в этом случае имеет место по причинам, совершенно отличным от тех, которые приводят к непрерывности в случае свободно становящихся последовательностей.

8.3. Принцип Маркова с параметрами для свободно становящихся последовательностей. Отметим прежде всего, что $M(LS)$ (т. е. $M(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — универсум беззаконных последовательностей), очевидно, ложен, так как

$$\forall\alpha \neg\neg \exists x(\alpha x = 0) \wedge \neg \forall\alpha \exists x(\alpha x = 0).$$

Это усматривается следующим образом. $\neg\neg \exists x(\alpha x = 0)$ влечет существование числа n такого, что $\alpha \in n$, $\forall\beta \in n \neg\neg \exists x(\beta x = 0)$, а это очевидным образом ложно (возьмем $\beta \in n * \langle 0 \rangle$). С другой стороны, из $\forall\alpha \exists x(\alpha x = 0)$ следовало бы существование такой функции e, что $\forall\alpha(\alpha(e(\alpha)) = 0)$, $\forall\alpha \exists x(e(\bar{\alpha}x) \neq 0)$, $\forall nm(en \neq 0 \rightarrow en = e(n * m))$, $\forall\alpha \exists x(e(\bar{\alpha}x) \neq 0)$. Но тогда определено и выражение $e(\lambda x.\, 1)$, причем его значение можно вычислить, исходя из $\overline{(\lambda x.\, 1)}y = n$; поэтому, если мы выберем $\mathrm{lth}(n) > en \dot{-} 1$, то получится, что $(\lambda x.\, 1)(en \dot{-} 1) = 0$.

Для многих других понятий свободно становящейся последовательности принцип Маркова также вызывает подозрения. Рассмотрим следующую весьма специальную форму:

M^{*-}_{PR} $\quad \forall\alpha \leqslant \lambda x.\, 1 \neg\neg \exists x A(\bar{\alpha}x) \rightarrow \neg\neg \forall\alpha \leqslant \lambda x.\, 1 \exists x A(\bar{\alpha}x)$ (A примитивно рекурсивна).

Отметим, что M^{*-}_{PR} следует из $M(\mathcal{U})$, если α пробегает $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}$ замкнут относительно непрерывных операций, заданных законом. Мы имеем следующее

*) Конструктивный вариант этого доказательства изложен в Добавлении 1. — *Прим. ред.*

Предложение. *Пусть* $\mathbf{H}$ *— теория типа, описанного в* 6.13, *и пусть* $\mathbf{CS}^*$ *аналогична* $\mathbf{CS}_\mathbf{H}$, *но без* $\forall\alpha \exists x(e(\bar{\alpha}x) \neq 0)$; *пусть* $\mathcal{U}$ *— область значений переменных для свободно становящихся последовательностей. Тогда*:

(i) $M(\mathcal{U}) + \mathbf{CS}^* \vdash \forall\alpha \exists x(e(\bar{\alpha}x) \neq 0)$,

(ii) $\mathbf{CS}^-_\mathbf{H} + M^{*-}_{PR} \vdash \neg\,\mathrm{CT}$, *где, как и раньше,*

$$\mathrm{CT} \qquad \forall a \exists x \forall y \exists z(Txyz \wedge ay = Uz).$$

Доказательство. (i) Любая e удовлетворяет (доказуемо в $\mathbf{H}$) условиям

$$\forall b \exists x(e(\bar{b}x) \neq 0), \quad \forall nm(en \neq 0 \rightarrow en = e(n * m)). \tag{1}$$

Если $\exists\alpha A\alpha$ замкнуто, то $\exists\alpha A\alpha \rightarrow \exists a Aa$: применим A2 из 6.13 к $\forall\beta \exists\alpha A\alpha$, тогда $\exists e \forall\alpha A(e|\alpha)$ и, следовательно, $A(e|\lambda'' x.0)$. Применение этой импликации к $\exists\alpha \neg \exists a(\alpha = a)$ влечет противоречие, следовательно, $\forall\alpha \neg\neg \exists a(\alpha = a)$. Тогда из (1) следует

$$\forall\beta \neg\neg \exists x(e(\bar{\beta}x) \neq 0).$$

Теперь применяем $M(\mathcal{U})$ с $\lambda x(1 \dot{-} e(\bar{\beta}x))$ в роли α; тогда $\forall\beta \exists x(e(\bar{\beta}x) \neq 0)$.

(ii) Клини построил двоичное дерево с примитивно рекурсивной характеристической функцией, которое фундировано относительно рекурсивных последовательностей, но не является равномерно ограниченным (см., например, Клини и Весли [1], лемма 9.8). Поэтому в предположении CT имеется примитивно рекурсивная φ такая, что

$$\forall a \exists x(\varphi(\bar{a}x) \neq 0),$$
$$\forall nm(\varphi n \neq 0 \rightarrow \varphi n = \varphi(n * m)),$$

но $\varphi \in K_1$. С другой стороны, мы получаем $\forall\alpha \neg\neg \exists x(\varphi(\bar{\alpha}x) \neq 0)$ так же, как в доказательстве (i), а потому вместе с M^{*-}_{PR}

$$\neg\neg \forall\alpha \leqslant \lambda x.\, 1(\varphi(\bar{\alpha}x) \neq 0),$$

но это очевидным образом ложно, так как $K \subseteq K_1$, но $\varphi \in K_1$ (где K_1 определен в 6.6(1)), следовательно, $\neg \forall\alpha \exists x \varphi(\bar{\alpha}x) \neq 0)$. □

Замечания. (a) Свойство $\forall\alpha \neg\neg \exists a(\alpha = a)$ критическое в доказательствах (i) и (ii); оно ложно для беззаконных последовательностей.

(b) Результат из 9.5 показывает, что полнота системы **IPC** влечет M^{*-}_{PR}, а следовательно, $\neg\mathrm{CT}$; здесь отношения и предметные области в определении общезначимости могут содержать параметры для свободно становящихся и беззаконных последовательностей, как указано в 9.5. Ср. также 9.3.

§ 9. Истинностные семантики для интуиционистской логики; общезначимость во всех алгебраических системах

9.1. Основные рассматривавшиеся в литературе интерпретации интуиционистской логики, имеющие характер истинностной семантики, таковы:

(a) Оценки в полных псевдобулевых алгебрах (или псевдобулевозначных моделях, короче PBM). Подробное рассмотрение у Расёвой и Сикорского [1].

(b) Топологические модели (оценки в алгебре открытых подмножеств топологического пространства). См., например, Расёва и Сикорский [1]. Приложения у Скотта [1], [2], Дж. Московакис [1]. Топологические модели — частный случай PBM.

(c) Модели Бета (главные источники — Бет [1], Крипке [1]). Модели Бета — частный случай топологических моделей.

(d) Модели Крипке (Крипке [1], Фиттинг [1]; приложения у Сморинского [1]). Модели Крипке определяют, исходя из частично упорядоченных множеств; если ограничиться счетными деревьями, то любая модель Крипке может быть с помощью стандартной процедуры преобразована в модель Бета, где выполнены те же самые предложения (см. Крипке [1]). Модели Крипке — всегда частные случаи топологических моделей.

Установленные классически теоремы о полноте для различных типов семантик, упомянутых выше, могут быть использованы для получения интересных результатов об интуиционистских формальных системах — хорошие примеры можно найти у Сморинского [1]. С помощью обходного пути (формализации доказательства теоремы о полноте в классической системе и применения консервативности классических систем над соответствующими интуиционистскими системами относительно Π^0_2-формул) многие из этих результатов можно установить также интуиционистски. Эти методы аналогичны по своему характеру технике классической теории моделей, рассмотренной в других местах в данном справочнике. Поэтому мы воздержимся здесь от обсуждения этих семантик, а обратимся вместо этого к понятию (интуиционистской или конструктивной) истинности во всех алгебраических системах.

9.2. Общезначимость и полнота. Мы определяем «общезначимость во всех алгебраических системах» совершенно аналогично классическому случаю.

Определение. Пусть $A(P_1, \ldots, P_n)$ — формула системы **IPC**, причем все ее предикатные буквы содержатся среди $P_1, \ldots, P_n$; тогда мы полагаем

$$\mathrm{Val}(A) \equiv_{\mathrm{def}} \forall D \forall P_1^* \ldots \forall P_n^* A^D(P_1^*, \ldots, P_n^*),$$

где D — (интуиционистски осмысленная) область, P_i^* — отношение над D с тем же числом аргументов, что P_i, и $A^D(P_1^*, \ldots, P_n^*)$ получается из A релятивизацией кванторов к D и заменой P_i на P_i^* $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Следующие результаты иллюстрируют влияние математических допущений на экстенсионал выражения $\{\ulcorner A \urcorner : \mathrm{Val}(A)\}$.

9.3. Теорема. *При допущении* CT *и ограничении областей и отношений вполне определенными* (*т. е. не содержащими параметров, не заданных законом*) *множество* $\{\ulcorner A \urcorner : \mathrm{Val}(A)\}$ *не является р. п.* (Крайзель [7], изложение у ван Далена [1]).

Замечание. В действительности ограничение вполне определенными областями и отношениями может быть значительно ослаблено.

С другой стороны, допустим, что мы взяли $\mathbb{N}$ в качестве D и ограничили P_i^* отношениями на натуральных числах, содержащими беззаконный параметр (точнее, беззаконный относительно дерева с конечным ветвлением). Тогда мы получим полноту для предваренных формул системы **IPC**.

9.4. Теорема. *Для предваренных формул* A

$$\mathrm{Val}(A) \to \exists x\, \mathrm{Proof}_{\mathbf{IPC}}(x, \ulcorner A \urcorner)$$

и

$$\neg \exists x\, \mathrm{Proof}_{\mathbf{IPC}}(x, \ulcorner A \urcorner) \to \exists P_1^{\varepsilon} \ldots \exists P_n^{\varepsilon} \neg \forall \varepsilon A^{\mathbb{N}}(P_1^{\varepsilon}, \ldots, P_n^{\varepsilon}),$$

где P_i^{ε} *— предикат от натуральных чисел, зависящий от беззаконного параметра* ε.

Слабая форма $\mathrm{M}^*_{\mathrm{PR}}$ принципа Маркова для свободно становящихся последовательностей участвует в следующем результате.

9.5. Теорема (Дайсон и Крайзель [1], Крайзель [4], Трулстра [7], гл. 7). *Пусть в определении* $\mathrm{Val}(A)$ *область* $D = \mathbb{N}$, $P_i^* \subseteq \mathbb{N}^{\tau(i)}$, *причем* P_i^* *может содержать, кроме параметров для беззаконных последовательностей, также и параметры* α *для свободно становящихся последовательностей со значениями* 0,1, *причем предполагается, что последние удовлетворяют условиям*

$$\forall n \in B \exists \alpha (\alpha \in n),$$

$$\forall \alpha \leqslant \lambda x.1 \exists x A(\bar{\alpha}x) \to \exists z \forall \alpha \leqslant \lambda x.1 \exists x \leqslant z A(\bar{\alpha}x),$$

где A*—бескванторная формула, и* $n \in B \equiv_{\mathrm{def}} \forall x < \mathrm{lth}(n)((n)_x \leqslant 1)$. *Тогда слабая полнота*

$$\mathrm{Val}(A) \to \neg \neg \exists x\, \mathrm{Proof}_{\mathbf{IPC}}(x, \ulcorner A \urcorner)$$

для всех A *на* **IPC** *эквивалентна принципу* $\mathrm{M}^*_{\mathrm{PR}}$.

Гораздо больше подробностей и спокойнее обсуждение смотри у Трулстры [7], гл. 7, [8].

§ 10. Алгебраические системы конечных типов

10.1. Язык $\mathbf{L(N-HA^\omega)}$. Совокупность $\mathbf{T}$ конечных типов определяется индуктивно:

(i) $0 \in \mathbf{T}$;

(ii) $\sigma, \tau \in \mathbf{T} \Rightarrow (\sigma)\tau \in \mathbf{T}$.

Модель для этой типовой алгебраической системы задают путем указания множества D_σ для каждого $\sigma \in \mathbf{T}$. В наших примерах $D_0 = \mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $D_{(\sigma)\tau}$ состоит из множества операций (зависящего от модели), ставящих объекты множества D_τ в соответствие объектам множества D_σ. Мы предпочли использовать нейтральный термин «операция» вместо «функция» или «отображение», так как использование этих последних выражений может навести читателя на мысль о функциях, которые экстенсиональны в смысле классической теории множеств, в то время как мы хотим рассматривать также и модели, где функции неэкстенсиональны.

Язык $\mathbf{L(N-HA^\omega)}$ содержит переменные для каждого типа (x^σ, y^σ, z^σ, u^σ, v^σ, w^σ; мы часто не будем писать верхние типовые индексы), равенство $=_\sigma$ для всех типов σ и константы

$$0 \in 0, \quad S \in (0)0, \quad \Pi_{\sigma,\tau} \in (\sigma)(\tau)\sigma,$$

$$\Sigma_{\rho,\sigma,\tau} \in ((\rho)(\sigma)\tau)((\rho)\sigma)(\rho)\tau,$$

$$R_\sigma \in (\sigma)((0)(\sigma)\sigma)(0)\sigma \quad \text{для всех } \rho, \sigma, \tau \in \mathbf{I}.$$

Здесь, как и в дальнейшем, мы используем запись $t \in \sigma$, чтобы указать, что t — терм типа σ. Операция аппликации (применения функции к аргументу) типа $(\sigma)\tau$ к типу σ также присутствует и обозначается просто посредством приписывания; $t_1 \ldots t_n$ является сокращением для $(\ldots((t_1t_2)t_3)t_4 \ldots)t_n$.

10.2. Теория $\mathbf{N-HA^\omega}$. Эта теория основана на многосортной интуиционистской логике предикатов, обычных аксиомах для функции следования, определяющих аксиомах для Π, Σ, R, описываемых ниже, а для равенства, кроме симметричности, рефлексивности и транзитивности, также и подстановочности

$$x^\sigma = y^\sigma \to z^{(\sigma)\tau}x^\sigma = z^{(\sigma)\tau}y^\sigma,$$

$$x^{(\sigma)\tau} = y^{\sigma(\tau)} \to x^{\sigma(\tau)}z^\sigma = y^{\sigma(\tau)}z^\sigma.$$

Начиная с этого места, мы часто не будем писать типовые индексы, предполагая, что типы согласованы. Определяющие аксиомы для Π, Σ, R таковы:

$$\Pi xy = x, \quad \Sigma xyz = xz(yz), \quad Rxy0 = x, \quad Rxy(Sz) = y(Rxyz)z.$$

10.3. Модель для $\mathbf{N-HA^\omega}$. Подробная информация и дальнейшие ссылки на литературу относительно рассматриваемых здесь моделей имеются у Трулстры [3], гл. 2.

10.3.1. Операции LO, заданные законом (Гёдель [2] называет такую операцию «berechenbare Funktion» (вычислимая функция)). $D_{(\sigma)\tau}$ состоит из всех заданных законом операций, которые всем элементам множества D_τ ставят в соответствие элементы множества D_σ. Исходя из интуитивного смысла термина «заданные законом», в этой модели очевидным образом имеются представители операций Π, Σ, R. $t =_\sigma t'$ означает: t, t' заданы нам одним и тем же законом ($=_\sigma$ — интенсиональное равенство).

10.3.2. Наследственно рекурсивные операции. Полагаем

$$V_0(x) \equiv_{\text{def}} x = x,$$

$$V_{(\sigma)\tau}(x) \equiv_{\text{def}} \forall y \in V_\sigma \exists z \in V_\tau (\{x\}(y) \simeq z).$$

Мы полагаем в этой модели $D_\sigma = \{(x, \sigma) : x \in V_\sigma\}$. Аппликация — это применение частично рекурсивной функции к аргументу

$$(\{x\}, (\sigma)\tau)(y, \sigma) = (\{x\}(y), \tau)$$

и

$$(x, \sigma) = (y, \sigma) \equiv_{\text{def}} x = y.$$

Мы можем показать, что HRO — модель системы $\mathbf{N-HA^\omega}$, если сможем найти числа $[0]$, $[S]$, $[\Pi_{\sigma,\tau}]$, $[\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}]$, $[R_\sigma]$ такие, что выполнены определяющие равенства, например $([\Pi], (\sigma)\tau)(x, \sigma)(y, \tau) = (x, \sigma)$. Это значит, что мы должны найти $[\Pi]$ такое, что $\{\{[\Pi]\}(x)\}(y) \simeq x$ для $x \in V_\sigma$, $y \in V_\tau$. Мы можем взять $\Lambda x \Lambda y.x$ в качестве $[\Pi_{\sigma,\tau}]$. Аналогично, $[0] = 0$, $[S] = \Lambda x.x + 1$, $[\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}] = \Lambda xyz\{\{x\}(z)\}(\{y\}(z))$. Наиболее сложен случай $[R_\sigma]$; это число можно найти, применяя теорему о рекурсии (что не нужно, если рекурсия уже находится среди основных схем для рекурсивных функций).

HRO можно рассматривать как нечто вроде «рекурсивной аппроксимации» к LO. С интуитивной точки зрения для LO аксиома выбора

$$\mathrm{AC}_{\sigma,\tau} \qquad \forall x^\sigma \exists y^\tau A(x, y) \to \exists z^{(\sigma)\tau} \forall x^\sigma A(x, zx)$$

является следствием смысла кванторной комбинации $\forall x \exists y$ (но только в случае, если мы разрешим в качестве элементов

$D_{(\sigma)\tau}$ неэкстенсиональные операции наиболее общего рода, определенные на D_σ).

Для HRO непротиворечивость $AC_{\sigma,\tau}$ доказуема относительно **HA**; в действительности $AC_{\sigma,\tau}$ для HRO выводима в **HA** + + ECT_0.

10.3.3. Наследственно эффективные операции HEO. Экстенсиональная модель получается с помощью одновременного определения для каждого $\sigma \in \mathbf{T}$ отношения эквивалентности I_σ и области W_σ:

$$I_0(x, y) \equiv x = y, \quad W_0(x, y) \equiv x = x,$$
$$I_{(\sigma)\tau}(x, y) \equiv W_{(\sigma)\tau}(x) \wedge W_{(\sigma)\tau}(y) \wedge \forall z \in W_\sigma(\{x\}(z) \simeq \{y\}(z)),$$
$$W_{(\sigma)\tau}(x) \equiv \forall y \in W_\sigma(\exists z \in W_\tau(\{x\}(y) \simeq z) \wedge \forall y' \in W_\sigma(I_\sigma(y, y') \rightarrow I_\tau(\{x\}(y), \{x\}(y')))).$$

Теперь D_σ для этой модели состоит из пар (x, σ) с $x \in W_\sigma$. Аппликация определяется, как и раньше, а

$$(x, \sigma) =_\sigma (y, \sigma) \equiv_{\text{def}} I_\sigma(x, y).$$

Интерпретация символов R_σ, $\Pi_{\sigma,\tau}$, $\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}$, 0, S строится так же, как для HRO.

10.3.4. Интенсиональные непрерывные функционалы ICF($\mathcal{U}$). Это аналог модели HRO, но теперь он основан на применении непрерывного функционала к аргументу вместо применения частично рекурсивной функции. Мы полагаем по определению

$$V_0^1(x) \equiv x = x, \quad V_1^1(\alpha) \equiv \alpha = \alpha,$$
$$V_{(\sigma)0}^1(\alpha) \equiv \forall \gamma \in V_\sigma^1 \exists x(\alpha(\gamma) \simeq x) \qquad (\sigma \neq 0),$$

где

$$\alpha(\gamma) \simeq x \equiv_{\text{def}} \alpha\left(\bar{\gamma} \min_z [\alpha(\bar{\gamma}z) \neq 0]\right) = x + 1,$$

$$V_{(0)\sigma}^1(\alpha) \equiv \forall x \exists \gamma \in V_\sigma^1(\alpha \,|\, \lambda z.x \simeq \gamma) \qquad (\sigma \neq 0)$$

и для $\sigma, \tau \neq 0$

$$V_{(\sigma)\tau}^1(\alpha) \equiv \forall \beta \in V_\sigma \exists \gamma \in V_\tau(\alpha \,|\, \beta \simeq \gamma),$$

где $(\alpha \,|\, \beta) \simeq \gamma \equiv \forall x(\lambda n \alpha(\hat{x} * n)(\beta) \simeq \gamma x)$. Объекты типа 0 — это пары $(x, 0)$, а объекты типа σ при $\sigma \neq 0$ — это пары (α, σ) для $\alpha \in V_\sigma^1$. Равенство интерпретируется так:

$$(\alpha, \sigma) =_\sigma (\beta, \sigma) \equiv_{\text{def}} \forall x(\alpha x = \beta x),$$

а аппликация (для $\sigma, \tau \neq 0$) интерпретируется следующим образом:

$$(\alpha, 1)(x, 0) = (\alpha x, 0), \quad (\alpha, (0)\sigma)(x, 0) = (\alpha \,|\, \lambda z.x, \sigma),$$
$$(\alpha, (\sigma)0)(\beta, \sigma) = (\alpha(\beta), 0), \quad (\alpha, (\sigma)\tau)(\beta, \sigma) = (\alpha \,|\, \beta, \tau).$$

Из формализованной теории рекурсивных функционалов мы получаем затем интерпретации констант R_σ, $\Pi_{\sigma,\tau}$, $\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}$, S, 0.

Свойства модели ICF($\mathcal{U}$) зависят, конечно, от $\mathcal{U}$: если $\mathcal{U}$ состоит из рекурсивных функций, то функционалы типа 2 в ICF не обязательно равномерно непрерывны на ограниченных подмножествах функций; если же $\mathcal{U}$ удовлетворяет теореме о веерах, то равномерная непрерывность имеет место.

10.3.5. Счетные или экстенсиональные непрерывные функционалы ECF($\mathcal{U}$). Это экстенсиональный аналог модели ICF($\mathcal{U}$), относящийся к ICF($\mathcal{U}$) примерно так же, как HEO к HRO (Клини [3], Крайзель [3]).

Другие модели системы **N** — **HA**$^\omega$, которые мы не будем здесь обсуждать, — это: (a) рекурсивные объекты высших типов, (b) модели из термов, (c) наследственно мажорируемые функционалы (Говард [3]), (d) гибридная модель ICF$'$($\mathcal{U}$), получаемая сохранением в ICF($\mathcal{U}$) только ее рекурсивных элементов.

10.4. Применения неэкстенсиональных моделей.

10.4.1. Как было замечено выше, HRO можно рассматривать как рекурсивную аппроксимацию к более «фундаментальной» модели LO. В качестве объекта изучения HRO удобнее, чем LO, так как она определена в терминах хорошо известных понятий. Пример модели HRO показывает, что в понятии разрешимого неэкстенсионального равенства нет ничего парадоксального или несогласованного. В действительности HRO является моделью не только для **N** — **HA**$^\omega$, но также и для теории **I** — **HA**$^\omega$, полученной из **N** — **HA**$^\omega$ добавлением констант E_σ, удовлетворяющих соотношениям

$$E_\sigma xy \leqslant 1, \quad E_\sigma xy = 0 \leftrightarrow x =_\sigma y.$$

На **I** — **HA**$^\omega$ можно смотреть как на теорию объектов конечного типа со строгим (интенсиональным) равенством: два объекта интенсионально равны (совпадают), если они даны нам как один и тот же объект. HRO показывает также, что **I** — **HA**$^\omega$ имеет простую модель. Утверждалось, что введение в язык интенсионального равенства зависит от смешения «применения» и «упоминания». Но даже если допустить, что объекты типовой алгебраической системы — это правила, заданные *лингвистическим* представлением, все еще остается различие между правилами как математическими объектами и их именами (и здесь

неважно, что эти имена могут содержать полные описания правил). Модель иллюстрирует эту ситуацию: все ее объекты можно воспринимать как правила, но не все они имеют имена (= замкнутые термы) в $\mathbf{N}-\mathbf{HA}^\omega$ или $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$. Систему $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$ можно интерпретировать как теорию правил, рассматриваемых как объекты.

Отметим, что в описании таких моделей, как HRO, HEO, ICF, нам пришлось существенно использовать логику: например определение множества V_σ имеет логическую сложность, возрастающую вместе с ростом сложности σ.

10.4.2. Технические применения. (a) Одно простое применение модели HRO получается непосредственно: $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$ — консервативное расширение $\mathbf{HA}$, так как интерпретация объектов высших типов в системе $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$ как элементов HRO оставляет формулы системы $\mathbf{HA}$ (по существу) неизменными. (Аналогично, система $\mathbf{E}-\mathbf{HA}^\omega$, где равенство между объектами высших типов определяется посредством $x^{(\sigma)\tau}=y^{(\sigma)\tau}\equiv\forall z^\sigma\,(xz=yz)$, является консервативным расширением $\mathbf{HA}$, что можно усмотреть с помощью HEO.)

(b) Предыдущее применение все-таки содержало упоминание о неэкстенсиональном равенстве в формулировке своего результата. Более убедительны результаты, не упоминающие неэкстенсионального равенства; такие результаты могут быть получены путем сочетания с функциональными интерпретациями (модифицированная реализуемость, гёделевская интерпретация). Один такой пример приведен в 11.7.3, другие примеры см. у Трулстры [6], § 3 и в литературе, упомянутой там.

Узловой факт, на котором основаны эти приложения, состоит в том, что схемы вроде CT_0, CONT_0 имеют функциональную интерпретацию, только если мы допустим неэкстенсиональные модели для алгебраической системы конечных типов.

10.5. Бар-рекурсивные функционалы. Так называемые бар-рекурсивные функционалы привлекали большое внимание с тех пор, как были введены у Спектора [1]. Обзор см. у Крайзеля [6].

Главная причина их включения в нашу главу — желание показать, как получается гёделевская интерпретация для (части) классического анализа (см. 11.8). Это в свою очередь будет использовано при обсуждении конструктивизации классических теорем в § 12. Мы не можем показать все шаги этого пути, но собираемся дать читателю идею маршрута, по которому надо следовать; подробности можно восстановить с помощью легко доступных источников.

Расширим систему $\mathbf{N}-\mathbf{HA}^\omega$, добавив типы $\sigma^\smile$ для конечных последовательностей объектов типа σ вместе с соответствующими переменными, а также некоторые очевидные аксиомы, выражающие свойства длины, конкатенации (соединения последовательностей) и т. д. Результат является расширением с помощью определений, так как мы можем отождествить объекты типа $\sigma^\smile$ со специальными последовательностями типа $(0)\sigma$, например, следующим образом.

Закодируем натуральные числа объектами высших типов, полагая $n_0=n$, $n_{(\sigma)\tau}=\Pi_{\tau,\sigma}n_\tau$; тогда n_σ кодирует число n объектов типа σ. Тогда мы кодируем конечную последовательность $\langle x_0^\sigma,\ldots,x_{u-1}^\sigma\rangle$ объектом $z^{(0)\sigma}$ таким, что

$$z^{(0)\sigma}(0)=u_\sigma,\quad z^{(0)\sigma}(i+1)=x_i^\sigma \text{ для } i<u,$$
$$z^{(0)\sigma}(i)=0_\sigma \text{ для } i>u.$$

Пусть теперь c — переменная типа $\sigma^\smile$, пробегающая конечные последовательности объектов типа σ; примем обозначения, аналогичные принятым для конечных последовательностей натуральных чисел, например c_1*c_2, $\hat{u}=\langle u\rangle(u\in\sigma)$, $\mathrm{lth}(c)$.

Пусть $[c]$ обозначает последовательность типа $(0)\sigma$ такую, что для $c=\langle u_0,\ldots,u_{x-1}\rangle$ $[c](i)=u_i$ для $i<x$ и $[c](i)=0_\sigma$ для $i\geqslant x$.

Отметим для ссылок ниже, что можно определить оператор λ-абстракции типа σ индукцией по построению термов с помощью соотношений

$$\lambda x^\sigma.x^\sigma=\Sigma_{\sigma,(\sigma)\sigma,\sigma}\Pi_{\sigma,(\sigma)\sigma}\Pi_{\sigma,\sigma},$$
$$\lambda x^\sigma.t^\tau=\Pi_{\tau,\sigma}t^\tau,\text{ если } x \text{ не входит в } t,$$
$$\lambda x^\sigma.t_1t_2=\Sigma(\lambda x^\sigma.t_1)(\lambda x^\sigma.t_2).$$

Константы бар-рекурсии B_σ^τ (ранга σ, уровня τ) должны тогда удовлетворять определяющим аксиомам

$$\mathrm{BR}_\sigma\quad\begin{cases} y[c]<\mathrm{lth}(c)\to B_\sigma^\tau yzuc=zc,\\ y[c]\geqslant\mathrm{lth}(c)\to B_\sigma^\tau yzuc=u(\lambda v B_\sigma^\tau yzu(c*\hat{v}))c\\ \text{для } z\in(\sigma^\smile)\tau,\ y\in((0)\sigma)0,\ u\in((\sigma)\tau)(\sigma^\smile)\tau.\end{cases}$$

Чтобы усмотреть (хотя бы классически), что BR_σ действительно определяет функционал, нужно предположить, что y непрерывен, т. е. что yz зависит только от некоторого начального отрезка z; тогда $B_\sigma^\tau yzuc$ определен непосредственно для $y[c]<\mathrm{lth}(c)$, а для $y[c]\geqslant\mathrm{lth}(c)$ вычисление выражения $B_\sigma^\tau yzuc$ сводится к вычислению $B_\sigma^\tau yzu(c*\hat{v})$ для всех v типа σ. Если множество последовательностей c таких, что $y[c]\geqslant\mathrm{lth}(c)$, составляет фундированное дерево (а классически

это — следствие непрерывности), то вычисление в конце концов сводится к случаю, когда $y(c) < \mathrm{lth}(c)$.

Мы часто будем писать B_σ вместо B^τ_σ. $\mathrm{BR} = \bigcup_{\sigma \in \mathbf{T}} \mathrm{BR}_\sigma$.

10.5.1. Определение. BI_σ обозначает схему

$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \to Q(\langle\,\rangle),$$

где

$$(1)\ \forall z^{(0)\sigma} \exists x P(\bar{z}x),$$
$$(2)\ \forall cc' (Pc \to P(c * c')),$$
$$(3)\ \forall c (Pc \to Qc),$$
$$(4)\ \forall c (\forall u Q(c * \hat{u}) \to Qc).$$

(Поэтому BI соответствует BI_0.)

10.5.2. Теорема. ECT($\mathcal{U}$) *для универсума* $\mathcal{U}$, *удовлетворяющего схеме* BI_0, *является моделью для* BR_0, BR_1, *т. е. содержит элементы* $([B^\tau_0], \sigma')$, $([B^\tau_1], \sigma'')$ *для подходящих* σ', σ'', *которые удовлетворяют уравнениям для бар-рекурсий типов* 0 *и* 1.

Доказательство (эскиз). Мы можем показать непосредственно или с помощью аналога теоремы о рекурсии (Трулстра [3], 1.9.16, 2.9.10), что существуют (примитивно рекурсивные) функции ε_0, ε_1, удовлетворяющие уравнениям для BR_0, BR_1, но с $\simeq$ вместо $=$. Чтобы показать, что $\varepsilon_i \in V^1_{i^*}$, где i^* — тип констант B^τ_i для $i = 0, 1$ (что обосновывает выбор ε_i в качестве $[B]^\tau_i$), нам нужны соответственно BI_0, BI_1. Как показано у Говарда и Крайзеля [1], теорема 7B, схему BI_1 можно получить из BI_0; частные случаи «сильной аксиомы непрерывности», нужные для доказательства, тривиально имеют место для специальных случаев BI_1, нужных здесь. □

§ 11. Гёделевская интерпретация

11.1. Некоторые соглашения и обозначения. Мы будем использовать $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ для обозначения последовательностей переменных конечных типов, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ — для последовательностей термов конечных типов. Если $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_i \in (\tau_1) \ldots (\tau_m)\sigma_i$, $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_m)$, $t_i \in \tau_i$, то

$$\mathfrak{s}\mathfrak{t} = (s_1 t_1 \ldots t_m, \ \ldots, \ s_n t_1 \ldots t_m).$$

Для пустого $\mathfrak{t}$ полагаем $\mathfrak{s}\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$; для пустого $\mathfrak{s}$ считаем, что $\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ пусто. $\forall \mathfrak{s}$ — сокращение для $\forall s_1 \ldots \forall s_n$, $\forall \mathfrak{s}\mathfrak{t}$ — для $\forall \mathfrak{s} \forall \mathfrak{t}$; аналогично для $\exists \mathfrak{s}$ и $\exists \mathfrak{s}\mathfrak{t}$.

11.2. Определение перевода. С каждой формулой $A_\mathfrak{z}$ языка $\mathbf{N} - \mathbf{HA}^\omega$ мы следующим образом свяжем другую формулу $A^D \equiv \exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, где A_D — бескванторная формула. Типы переменных $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ зависят только от логической структуры формулы A; все свободные переменные формулы A^D содержатся среди свободных переменных формулы A.

d(i) Если A — исходная формула, то $A^D \equiv A_D \equiv A$. В остальных случаях пусть $A^D \equiv \exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})^D$, $B^D \equiv \exists \mathfrak{u} \forall \mathfrak{w} B_D(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})$.

d(ii) $(A \wedge B)^D \equiv \exists \mathfrak{x}\mathfrak{u} \forall \mathfrak{y}\mathfrak{w} (A \wedge B)_D$
$\equiv \exists \mathfrak{x}\mathfrak{u} \forall \mathfrak{y}\mathfrak{w} [A_D[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \wedge B_D[\mathfrak{u}, \mathfrak{w}]]$.

d(iii) $(A \vee B)^D \equiv \exists z^0 \mathfrak{x}\mathfrak{u} \forall \mathfrak{y}\mathfrak{w} (A \vee B]_D$
$\equiv \exists z^0 \mathfrak{x}\mathfrak{u} \forall \mathfrak{y}\mathfrak{w} [(z = 0 \to A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \wedge (z \neq 0 \to B_D(\mathfrak{u}, \mathfrak{w}))]$.

d(iv) $(\exists z A z)^D \equiv \exists z \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} (\exists z A z)_D \equiv \exists z \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, z)$.

d(v) $(\forall z A z)^D \equiv \exists \mathfrak{X} \forall z \mathfrak{y} (\forall z A z)_D \equiv \exists \mathfrak{X} \forall z \mathfrak{y} A_D(\mathfrak{X} z, \mathfrak{y}, z)$.

d(vi) Мы разобьем построение формулы $(A \to B)^D$ на ряд меньших шагов:

$$(A \to B)^D \equiv [\exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} A_D \to \exists \mathfrak{u} \forall \mathfrak{w} B_D]^D \quad \text{(a)}$$
$$\equiv [\forall \mathfrak{x} (\forall \mathfrak{y} A_D \to \exists \mathfrak{u} \forall \mathfrak{w} B_D]^D \quad \text{(b)}$$
$$\equiv [\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{u} (\forall \mathfrak{y} A_D \to \forall \mathfrak{w} B_D)]^D \quad \text{(c)}$$
$$\equiv [\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{u} \forall \mathfrak{w} (\forall \mathfrak{y} A_D \to B_D)]^D \quad \text{(d)}$$
$$\equiv [\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{u} \forall \mathfrak{w} \exists \mathfrak{y} (A_D \to B_D)]^D \quad \text{(e)}$$
$$\equiv [\exists \mathfrak{U}\mathfrak{Y} \forall \mathfrak{x}\mathfrak{w} (A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}\mathfrak{x}\mathfrak{w}) \to B_D(\mathfrak{U}\mathfrak{x}, \mathfrak{w}))]. \quad \text{(f)}$$
$$(A \to B)_D \equiv A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}\mathfrak{x}\mathfrak{w}) \to B_D(\mathfrak{U}\mathfrak{x}, \mathfrak{w}).$$

11.2.1. Заметим, что в присутствии классической логики и AC верно $A^D \equiv A$ для всех A. Действительно (даже интуиционистски), $A^D \equiv A$ для исходных A, $(A \wedge B)^D \equiv (A^D \wedge B^D)$, $(A \vee B)^D \equiv A^D \vee B^D$, $(\exists z A)^D \equiv \exists z A^D$; с помощью AC имеем $(\forall z A)^D \longrightarrow \forall z A^D$, а с помощью AC и классической логики — $(A \to B)^D \longrightarrow (A^D - B^D)$, что устанавливается просмотром шагов (a) — (f). Эти результаты будут уточнены ниже в 11.5—11.6.

11.2.2. Отметим также, что:

(i) если $A \equiv \exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} B$ с бескванторной B, то $A^D \equiv A$;

(ii) для бескванторной B имеем $(\neg\neg \exists \mathfrak{x} B)^D \equiv (\neg \forall \mathfrak{x} \neg B)^D \equiv \exists \mathfrak{x} \neg\neg B$; для интересующих нас расширений и подсистем системы $\mathbf{N} - \mathbf{HA}^\omega$ бескванторные формулы разрешимы, так что в таких случаях $(\neg\neg \exists \mathfrak{x} B)^D \leftrightarrow \exists \mathfrak{x} B$.

11.2.3. Мотивировка определения формулы $(A \to B)^D$ может быть основана на двух принципах: (a) для установления импликации $\exists x Ax \to \exists y By$ предъявить функционал Y, вычисляющий y по x, т. е. такой, что $Ax \to B(Yx)$; (b) для установления импликации $\forall x Ax \to \forall y By$ прочесть ее как $\exists y \neg By \to \exists x \neg Ax$ и применить (a); еще одна контрапозиция дает $A(Xy) \to By$.

1.3. Определение. Пусть $\mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$ — система, аналогичная системе $\mathbf{N}-\mathbf{HA}^\omega$, но имеющая в качестве исходного отношения только $=_0$, с определением $=_\sigma$ (наследственно) соотношением

$$x^{(\sigma)\tau} = y^{(\sigma)\tau} \equiv_{\text{def}} \forall x^\sigma (xz = yz)$$

и с правилом экстенсиональности

$$\vdash P \to tx_1 \dots x_n = sx_1 \dots x_n, \quad \vdash At \Rightarrow P \vdash As,$$

где $x_1, \dots, x_n$ таковы, что $tx_1 \dots x_n$, $sx_1 \dots x_n$ — числовые термы, P — пропозициональная комбинация исходных формул (т. е. равенство между термами типа 0) и $x_1, \dots, x_n$ не входят в t, s.

qf-$\mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$, qf-$\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$ — это бескванторные части теорий $\mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$, в которых аксиома индукции заменена правилом (для бескванторных A)

$$\vdash A0, \quad \vdash Ax \to A(Sx) \Rightarrow \vdash Ax.$$

11.4.1. Теорема корректности. *Для* $\mathbf{H} = \mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$: *если* $\mathbf{H} \vdash A$, *то для подходящей последовательности термов* $\mathfrak{t}$

$$\text{qf-}\mathbf{H} \vdash \forall \mathfrak{y} A_D(\mathfrak{t}, \mathfrak{y}).$$

Для большинства приложений достаточно более слабое следствие.

11.4.2. Следствие. *Для* $\mathbf{H} = \mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$: *если* $\mathbf{H} \vdash A_D$, *то* $\mathbf{H} \vdash \forall \mathfrak{y} A_D(\mathfrak{t}, \mathfrak{y})$ *для подходящей последовательности термов* $\mathfrak{t}$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по длине выводов в $\mathbf{H}$. Большинство случаев рутинны, за исключением проверки $A \to (A \wedge A)$ и индукции. Если нас интересует только установление следствия, то и рассмотрение аксиомы индукции рутинно. Поэтому сосредоточим внимание на $A \to (A \wedge A)$. Предположим, что $A^D = \exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} A_D$;

$$(A \to A \wedge A)^D$$
$$= \exists \mathfrak{Y} \mathfrak{x} \mathfrak{x}' \forall \mathfrak{x} \mathfrak{y}' \mathfrak{y}'' [A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'') \to A_D(\mathfrak{x}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}') \wedge A_D(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}, \mathfrak{y}'')].$$

Для нахождения решения сначала попытаемся взять $\lambda \mathfrak{x}\, \mathfrak{x}$ в качестве $\mathfrak{x}'$ и $\mathfrak{x}$ и будем искать $\mathfrak{Y}$ со следующими свойствами:

если $A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}')$ ложна, то и $A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{Y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'')$ должна быть ложна, чего в этом случае можно достичь, положив $\mathfrak{Y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' = \mathfrak{y}'$; если же $A_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}')$ истинна, то мы хотим, чтобы $\mathfrak{Y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' = \mathfrak{y}''$. Так как исходные формулы в $\mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$ и $\mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$ разрешимы и имеются функционалы равенства, мы можем построить для каждой бескванторной формулы $B_\mathfrak{z}$ терм T_B такой, что $\vdash T_{B\mathfrak{z}} = 0 \to B_\mathfrak{z}$; таким образом, мы можем взять в качестве $\mathfrak{Y}$ терм $\mathfrak{T}$, определяемый разбором случаев:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' = \begin{cases} \mathfrak{y}', & \text{если } T_{A_D\mathfrak{x}}\mathfrak{y}' \neq 0, \\ \mathfrak{y}'', & \text{если } T_{A_D\mathfrak{x}}\mathfrak{y}' = 0. \end{cases} \quad \square$$

Использование разрешимости исходных формул здесь существенно, как показывает пример У. А. Говарда (см., например, Трулстра [3], 2.7.8, 3.5.6): все функционалы системы $\mathbf{N}-\mathbf{HA}^\omega$ непрерывны, но интерпретация формулы $\forall y^\sigma \neg \forall u^0 \neg (u = 0 \leftrightarrow y^\sigma = z^\sigma)$ непрерывным функционалом давала бы $\neg\neg y^\sigma = z^\sigma \vee \neg y^\sigma = z^\sigma$.

11.5. Лемма. *Пусть* IP_0', M' — *схемы*

IP_0' $\quad (\forall \mathfrak{x} A\mathfrak{x} \to \exists y By) \to \exists y (\forall \mathfrak{x} A\mathfrak{x} \to By)$,

M' $\quad \neg\neg \exists \mathfrak{x} A\mathfrak{x} \to \exists \mathfrak{x} A\mathfrak{x}$

(*A бескванторна, y не входит свободно в A*).

(i) *Если* $\mathbf{H} = \mathbf{I}-\mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{WE}-\mathbf{HA}^\omega$, F — *частный случай схемы* IP_0', M' *или* AC, $F^D = \exists \mathfrak{y} \forall \mathfrak{x} F_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, *то имеется последовательность* $\mathfrak{t}$ *термов такая, что* $\mathbf{H} \vdash \forall \mathfrak{x} F_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$.

(ii) $\mathbf{H} + \mathrm{IP}_0' + \mathrm{M}' + \mathrm{AC} \vdash A \leftrightarrow A^D$ *для всех* A.

Доказательство. (i) получается непосредственно. (ii) доказывается индукцией по сложности формулы A. Единственный случай, требующий некоторого внимания, встречается при выводе эквивалентности $(A \to B) \leftrightarrow (A \to B)^D$ из допущений $A \leftrightarrow A^D$, $B \leftrightarrow B^D$. Мы обозначаем формулы в квадратных скобках из определения формулы $[A \to B]^D$ (случай d(vi) определения формулы A^D) соответственно через (a), (b), ..., (f). Переход от $A \to B$ к формуле (a) допустим по индукционному предположению, переход от (a) к (b) — согласно интуиционистской логике, переход от (b) к (c) требует IP_0', переход от (c) к (d) снова допустим средствами интуиционистской логики, переход от (d) к (e) требует (M′), так как

$$(\forall \mathfrak{y} A_D \to B_D) \leftrightarrow B_D \vee (\neg B_D \wedge \neg \forall \mathfrak{y} A_D)$$
$$\leftrightarrow B_D \vee (\neg B_D \wedge \neg\neg \exists \mathfrak{y} \neg A_D)$$
$$\leftrightarrow (\text{с помощью M}') \; B_D \vee (\neg B_D \wedge \exists \mathfrak{y} \neg A_D)$$
$$\leftrightarrow \exists \mathfrak{y} (B_D \vee (\neg B_D \wedge \neg A_D)) \leftrightarrow \exists \mathfrak{y} (A_D \to B_D).$$

Переход от (e) к (f) оправдывается к помощью AC. □

11.6. Теорема характеризации. *Для* $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{WE} - \mathbf{HA}^\omega$:

(i) $\mathbf{H} + \mathrm{M}^\omega + \mathrm{IP}_0^\omega + \mathrm{AC} \vdash A \leftrightarrow A^D$,

(ii) $\mathbf{H} + \mathrm{M}^\omega + \mathrm{IP}_0^\omega + \mathrm{AC} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{H} \vdash A^D$.

Здесь M^ω, IP_0^ω — *это схемы*

M^ω $\quad \forall \mathfrak{x}(A \vee \neg A) \wedge \neg\neg \exists \mathfrak{x} A \to \exists \mathfrak{x} A$,

IP_0^ω $\quad \forall \mathfrak{x}(A \vee \neg A) \wedge (\forall \mathfrak{x} A \to \exists \mathfrak{y} B) \to \exists \mathfrak{y}(\forall \mathfrak{x} A \to B)$.

Доказательство. (i) и (ii) имеют место с IP_0', M' вместо IP_0^ω, M^ω. С другой стороны, в $\mathbf{WE} - \mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{I} - \mathbf{HA}^\omega$ бескванторные формулы доказуемо разрешимы (для $\mathbf{WE} - \mathbf{HA}^\omega$ это следует из того, что $\forall x^0 y^0 (x = y \vee x \neq y)$ — теорема **HA**, а для $\mathbf{I} - \mathbf{HA}^\omega$ — из присутствия E_σ (см. 10.4.1)), поэтому IP_0', M' — следствия схем M^ω, IP_0^ω. С другой стороны, IP_0^ω, M^ω выводимы из IP_0', M', AC, так как в силу AC

$$\forall \mathfrak{x}(A \vee \neg A) \leftrightarrow \exists Z \forall \mathfrak{x}(Z\mathfrak{x} = 0 \to A) \wedge (Z\mathfrak{x} \neq 0 \to \neg A)),$$

и, таким образом, после замены A на $Z\mathfrak{x} = 0$ схемы M^ω и IP_0^ω сводятся к M', IP_0'. □

11.7. Приложения гёделевской интерпретации.

11.7.1. Приложения в основаниях математики. Гёделевская интерпретация и соответствующий перевод были введены Гёделем [1]. Первоначальной целью было дать доказательство непротиворечивости для интуиционистской арифметики, а следовательно (через отрицательный перевод, см. 3.8—3.10), также и для классической арифметики путем элиминации логических операторов посредством объектов высших типов; понятие заданной законом (конструктивной) операции высшего типа (LO в 10.3) рассматривалось как интуитивно понятное и законное расширение финитистских концепций.

Тейт [1] дополнил эти рассмотрения доказательством того, что любой замкнутый терм типа 0 в исчислении Гёделя (соответствующем нашей системе qf-$\mathbf{WE} - \mathbf{HA}^\omega$ или qf-$\mathbf{I} - \mathbf{HA}^\omega$) может быть вычислен и даст в качестве значения некоторое натуральное число; однако в его доказательстве была нужна индукция по арифметически определимым предикатам неограниченной сложности. У Говарда [2] и Хинаты [1] было показано, как заменить это назначением ординалов $< \varepsilon_0$ замкнутым термам с последующей бескванторной индукцией, и тем самым была достигнута та же теоретико-доказательственная редукция, что и в генценовском доказательстве непротиворечивости для арифметики.

Вследствие этого остается под сомнением вопрос, была ли достигнута настоящая редукция: ответ зависит от нашего мнения о том, что является интуитивно очевидным. Стоит однако отметить, что для систем вроде $\mathbf{WE} - \mathbf{HA}^\omega$, $\mathbf{I} - \mathbf{HA}^\omega$ эта интерпретация показывает, как логическая сложность может быть «поглощена» сложностью, происходящей от объектов высших типов.

11.7.2. Техническое приложение: правило Маркова. Одно из наиболее известных и наиболее полезных приложений гёделевской интерпретации — установление замкнутости относительно правила Маркова

$$\mathrm{MR} \qquad \vdash \forall x^\sigma (A \vee \neg A), \quad \vdash \neg\neg \exists x^\sigma A \Rightarrow \vdash \exists x^\sigma A$$

для интуиционистских формальных систем (см. 11.9 (i)). Для классических систем $\mathbf{H}^c$, которые консервативны над соответствующими интуиционистскими системами **H** (например, для **HA**, см. 3.8—3.10) относительно отрицательных формул, замкнутость относительно MR влечет консервативность $\mathbf{H}^c$ над **H** относительно Π_2^0-предложений

$$\mathbf{H}^c \vdash \neg\neg \exists x^0 A \Leftrightarrow \mathbf{H}^c \vdash \neg \forall x^0 \neg A \Leftrightarrow \mathbf{H} \vdash \neg \forall x^0 \neg A$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{H} \vdash \exists x^0 A.$$

Как отмечено в 9.1, это можно использовать для интуиционистского оправдания метаматематических результатов, полученных путем классических рассуждений о моделях Крипке. Другие выводимые правила даны ниже в 11.9.

11.7.3. Техническое приложение: результаты о консервативном расширении, получаемые с помощью неэкстенсиональных моделей. Мы используем неэкстенсиональную модель HRO для $\mathbf{I} - \mathbf{HA}^\omega$, чтобы показать, что $\mathbf{HA} + \mathrm{M} + \mathrm{IP}_0 + \mathrm{CT}_0$ консервативна над **HA** относительно предваренных формул. Пусть, например, $A \equiv \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 B(x_1, y_1, x_2, y_2)$, B бескванторная, $\mathbf{HA} + \mathrm{M} + \mathrm{IP}_0 + \mathrm{CT} \vdash A$.

Мы заметим, что $(\mathrm{CT}_0)^D$ имеет место в HRO, т. е. для любого частного случая F схемы CT_0 формула $[F^D]_{\mathrm{HRO}}$ доказуема в **HA**. Комбинируя это с теоремой корректности (11.4.1), мы имеем $\mathbf{HA} \vdash [A^D]_{\mathrm{HRO}}$, а так как $\mathbf{HA} \vdash [A^D]_{\mathrm{HRO}} \to A$ для предваренных формул A, мы имеем $\mathbf{HA} \vdash A$.

11.7.4. Конструктивизация классических теорем и доказательств (см. § 12). Для подготовки к этому приложению мы обсудим в 11.8 распространение гёделевской интерпретации на анализ.

11.8. Распространение на анализ. Мы сейчас расширим $\mathbf{WE} - \mathbf{HA}^\omega$ до системы $\mathbf{BR}_\sigma$, добавив правило BR_σ. Из работы

Говарда [1] мы можем извлечь следующее обобщение теоремы корректности.

11.8.1. Теорема.

$$\mathbf{BR}_\sigma + \mathrm{AC} + \mathrm{BI}_\sigma + \mathrm{M}^\omega + \mathrm{IP}_0^\omega \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{BR}^\sigma \vdash A^D.$$

(BI_σ определена в 10.5.)

11.8.2. Определение. Δ_1^1-*свертывание* (Δ_1^1 — CA) — это следующая схема свертывания:

Δ_1^1 — CA $\quad \forall y\,[\forall\alpha\exists x A(\alpha, x, y) \leftrightarrow \exists\beta\forall z B(\beta, z, y)]$

$$\rightarrow \exists\gamma\forall y\,[\gamma y = 0 \leftrightarrow \forall\alpha\exists x A(\alpha, x, y)]$$

(A, B бесквантор ные). *Существенно* -Δ_1^1-*свертывание* (сущ.-Δ_1^1-CA) формулируется аналогично, но сочетание $\forall\alpha\exists x$ заменяется на цепочку $\forall\alpha_1\exists x_1\forall\alpha_2\exists x_2 \ldots \forall\alpha_n\exists x_n$, а $\exists\beta\forall z$ — на $\exists\beta_1\forall z_1\exists\beta_2\forall z_2 \ldots \exists\beta_n\forall z_n$. В схемах Δ_1^1-CA и сущ.-Δ_1^1-CA могут присутствовать параметры.

Отметим, что в присутствии $\forall$-AC_{01} (т. е. схемы AC_{01}, ограниченной чисто универсальными формулами) схема Δ_1^1-CA эквивалентна сущ.-Δ_1^1-CA.

11.8.3. Лемма. $\forall$-AC_{01} *классически влечет* Δ_1^1-CA.

Доказательство. Полагая

$$V \equiv \forall y\,[\forall\alpha\exists x A(\alpha, x, y) \leftrightarrow \exists\beta\forall z B(\beta, z, y)]$$

(A, B бесквантор ные), мы имеем классически

$$V \rightarrow \forall y\exists u\,[u = 0 \leftrightarrow \forall\alpha\exists x A(\alpha, x, y)]$$

или эквивалентным образом

$$V \rightarrow \forall y\exists u\,[(u \neq 0 \rightarrow \exists\alpha\forall x \neg A(\alpha, x, y)) \wedge (u = 0 \rightarrow \exists\beta\forall z B(\beta, z, y))],$$

следовательно,

$$V \rightarrow \forall y\exists u\exists\alpha\beta\forall xz\,[(u \neq 0 \rightarrow \neg A(\alpha, x, y)) \wedge (u = 0 \rightarrow B(\beta, z, y))]$$

и т. д.

11.8.4. Пусть F — частный случай схемы $\forall$-AC_{01}. Тогда, если F' — отрицательный перевод формулы F (см. 3.8), то $\mathrm{BR}_1 \vdash (F')^D$.

Доказательство. См. Говард [1]. □

11.8.5. Следствие. EL^c + сущ.-Δ_1^1-CA $\vdash A \Rightarrow \mathrm{BR}_1 \vdash (A')^D$.

Отметим, что сущ.-Δ_1^1-CA включает арифметическое и гиперарифметическое свертывание (что легко усмотреть, манипулируя кванторами).

11.8.6. Замечание. Говард [1] в действительности устанавливает гораздо больше, чем сформулировано в нашей

теореме: полный классический анализ имеет гёделевскую интерпретацию (через отрицательный перевод) в системе $\mathbf{BR} = \bigcup_{\sigma\in\mathbf{T}} \mathbf{BR}_\sigma$. Трактовка Говарда является улучшением доказательства Спектора [1].

11.9. Теорема (выводимые правила, получаемые с помощью гёделевской интерпретации).

(i) *B* $\mathbf{WE}$ — $\mathbf{HA}^\omega$ *или* $\mathbf{BR}^\sigma$ *имеет место* MR:

MR $\quad \vdash \forall x^\sigma (A \vee \neg A), \vdash \neg\neg \exists x^\sigma A \Rightarrow \exists x^\sigma A.$

(ii) *Пусть формула A предваренная, B бесквантор ная. Тогда*

$$\mathbf{HA}^c \vdash A \rightarrow \forall u\exists v B(u, v) \Rightarrow \mathbf{HA} \vdash A \rightarrow \forall u\exists v B(u, v).$$

(iii) *Пусть формула* $C \equiv A \rightarrow \forall u\exists v B(u, v)$ *такая же, как в* (ii), *но* $\forall$*-кванторы в A могут быть только числовыми; тогда*

$$\mathbf{EL}^c + \text{сущ.-}\Delta_1^1\text{-CA} \vdash C \Rightarrow \mathbf{EL} + \mathrm{BI}_0 + \mathrm{AC}_{01} \vdash C.$$

(iv) *Если A чисто универсальная, то заключение в* (iii) *можно усилить до* $\mathrm{IDB}_1 \vdash C$ (*где* IDB_1 *определена в* 6.20).

Доказательство. (i) Пусть A содержит наряду с x^σ дополнительный параметр y^τ. Допустим, что $\vdash \forall x^\sigma (A \vee \neg A)$, $\vdash \neg\neg \exists x^\sigma A$, и допустим, что правило выбора

ACR $\quad \vdash \forall x^\sigma \exists y^\tau A(x, y) \Rightarrow \forall x^\sigma A(x, tx)$

уже установлено для $\mathbf{H}$ (это можно сделать с помощью **mq**-реализуемости, см. Трулстра [3], 3.7.2 (ii)). Тогда (так как $\forall x^\sigma (A \vee \neg A) \leftrightarrow \forall x^\sigma \exists z ((z = 0 \wedge A) \vee (z \neq 0 \wedge \neg A))$) мы имеем для подходящего t

$$\vdash txy = 0 \leftrightarrow Axy$$

и, следовательно, $\vdash \neg\neg \exists x^\sigma (txy = 0)$. В силу замечания (ii) в 11.2.2

$$\vdash (\neg\neg \exists x^\sigma (txy = 0))^D$$

влечет $\vdash \exists x^\sigma (txy = 0)$ и, следовательно, $\vdash \exists x^\sigma A$.

(ii) Предположим для упрощения записи, что $A \equiv \forall x\exists y C(x, y)$, где C бесквантор ная, и пусть

$$\mathbf{HA}^c \vdash A \rightarrow \forall u\exists v B(u, v).$$

С помощью отрицательного перевода получаем

$$\mathbf{HA} \vdash \forall x \neg\neg \exists y C(x, y) \rightarrow \forall u \neg\neg \exists v B(u, v),$$

откуда

$$\mathbf{HA} \vdash \forall x\exists y C(x, y) \rightarrow \forall u \neg\neg \exists v B(u, v)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{EL} + \mathrm{AC}_{01} \vdash C(x, ax) \to \forall u \neg\neg \exists v B(u, v),$$

а потому с помощью гёделевской интерпретации

$$\mathbf{WE}\text{—}\mathbf{HA}^{\omega} \vdash C(x, ax) \to \forall u \exists v B(u, v).$$

Используя ECF в качестве модели для $\mathbf{WE}\text{—}\mathbf{HA}^{\omega}$, получаем

$$\mathbf{EL} \vdash C(x, ax) \to \forall u \exists v B(u, v),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{EL} + \mathrm{AC}_{01} \vdash \forall x \exists y C(x, y) \to \forall u \exists v B(u, v).$$

В силу результата Гудмена [1] или Минца [1] (см. 3.4) отсюда следует, что $\mathbf{HA} \vdash \forall x \exists y C(x, y) \to \forall u \exists v B(u, v)$.

(iii) Очень похоже: на этот раз используем гёделевскую интерпретацию в системе $\mathbf{WE}\text{—}\mathbf{HA}^{\omega} + \mathrm{BR}_0 + \mathrm{BR}_1$ и берем в качестве модели $\mathrm{ECF}(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ удовлетворяет $\mathbf{EL} + \mathrm{BI}_0$; затем применяем 11.8, 10.5.

(iv) Из (iii) с помощью леммы из 6.2.2.

11.10. Дальнейшие обобщения, ссылки на литературу. Наиболее важное обобщение гёделевской интерпретации, приведенной здесь, — это обобщение на арифметику второго порядка и теорию конечных типов с переменными для множеств у Жирара [1], [2]; краткое изложение имеется у Трулстры [3], 1.9.27, 3.5.21.

Вариант, не требующий разрешимости исходных формул в доказательстве теоремы корректности, см. у Диллера и Нама [1].

§ 12. Локальные и глобальные конструктивизации классических теорем

12.1. «Локальное» и «глобальное». С точки зрения логика, разумеется, естественно спрашивать, имеются ли общие процедуры, преобразующие классические результаты с классическими доказательствами в конструктивные результаты с конструктивными доказательствами. Такая процедура преобразования была бы, например, применима ко всем утверждениям, доказуемым в данной классической системе **H**; после преобразования некоторой теоремы A вместе с ее доказательством в **H** результат был бы теоремой A^* с конструктивным доказательством в конструктивно обоснованной системе $\mathbf{H}^*$.

Такой метод конструктивизации называется здесь [1]) «глобальным» в противоположность «локальным» конструктивизациям, т. е. специально подобранным конструктивным версиям определенных классических теорем, которые получаются с использованием конкретных данных каждой изучаемой теоремы.

Правдоподобно, что от локальных конструктивизаций, получаемых с использованием конкретных данных изучаемой задачи, можно в общем случае ожидать лучших результатов, чем от глобальных методов в применении к той же самой задаче.

Интерес к глобальным конструктивизациям имеет две причины.

(1) Путем сравнения с результатами, которые получаются глобальными методами, мы получаем меру улучшений, достигаемых путем локальных конструктивизаций.

(2) Даже там, где глобальные конструктивизации не оптимальны, они могут быть очень полезны в качестве вспомогательных результатов (при получении локальных конструктивизаций других теорем).

12.2. Гёделевская интерпретация дает нам пример метода глобальной конструктивизации. Большинство наших примеров, приводимых ниже, зависит от следующих соображений. Основная масса теорем классического анализа использует лишь слабые формы свертывания. Поэтому допустим, что для теоремы A

$$\mathbf{EL}^{c} + \text{сущ.-}\Delta^1_1\text{-CA} \vdash A.$$

Если A имеет вид $C \to \forall u \exists v B$ с предваренной C и бескванторной B, то мы можем обратиться к 11.9 (iii) и получить

$$\mathbf{EL} + \mathrm{BI}_0 + \mathrm{AC}_{01} \vdash A,$$

а если C чисто универсальная, то в силу 11.9 (iv)

$$\mathrm{IDB}_1 \vdash A.$$

Многие теоремы действительно имеют вид $C \to \forall u \exists v B$ с чисто универсальной C и бескванторной B, и единственное, что нужно сделать для применения общего метода, — это проверить для данного утверждения, что оно имеет нужный синтаксический вид и что доказательство не требует большего чем сущ.-Δ^1_1-CA. Для теорем, не имеющих нужного вида, часто очень легко найти чуть более слабое или классически эквивалентное утверждение, которое уже *имеет* нужный вид; в действительности гёделевская интерпретация может быть использована для обнаружения требуемой переформулировки, см., например, 12.4.

[1]) «Глобальную» конструктивизацию иногда называют «тривиальной» (потому что она получается стандартным методом). Конечно, не всегда тривиально распознать «тривиальность» чего-нибудь!

До сих пор гёделевская интерпретация и тесно связанная с ней интерпретация отсутствием контрпримера (см. гл. 2) были единственными успешными методами глобальной конструктивизации. Легко видеть, почему отрицательный перевод неудовлетворителен в качестве метода конструктивизации: хотя он устанавливает, что классические теоремы, сформулированные в отрицательном фрагменте, можно рассматривать как интуиционистские теоремы, этот метод неинтересен, поскольку этот перевод не дает утверждений с конструктивными $\exists$ или $\vee$, т. е. отсутствуют операции, интересные с точки зрения наивного конструктивизма (однако ср. Гельфонд [1]).

Бесполезны также реализуемость или модифицированная реализуемость, так как эти интерпретации не реализуют все частные случаи схемы $A \vee \neg A$, а применение вначале отрицательного перевода также не помогает, ибо реализуемость по существу не затрагивает отрицательных формул. В противоположность этому гёделевская интерпретация в применении к отрицательным утверждениям вводит (конструктивное) $\exists$.

Относительно еще одной возможности глобальной конструктивизации, почти не исследованной до сих пор, см. Трулстра [7], 6.12.

12.3. Теорема Больцано — Вейерштрасса или рассуждение делением пополам. Мы предполагаем, что классический анализ вещественных чисел и функций формализован в теории конечных типов, так что множества натуральных чисел представлены своими характеристическими функциями типа 1, множества вещественных чисел — функционалами типа 2 и т. д.

Теорема Больцано — Вейерштрасса и утверждение о том, что ограниченная последовательность вещественных чисел имеет точную верхнюю грань, доказываются обычно методом деления отрезка пополам, который после внимательного рассмотрения формализуется с помощью арифметического свертывания. Теорему о существовании точной верхней грани достаточно, как легко видеть, доказать для последовательностей рациональных чисел, поэтому мы сосредоточим внимание на этом случае. Пусть $\langle r_{\alpha n}\rangle_n$ перечисляет последовательность рациональных чисел, содержащуюся в $[0, 1)$. Тогда

$$\forall k \exists! m < 2^k [\exists n (r_{\alpha n} \in [m \cdot 2^{-k}, (m+1) \cdot 2^{-k}]) \wedge \neg \exists n (r_{\alpha n} \geqslant (m+1) \cdot 2^{-k})].$$

Арифметическое свертывание дает функцию β такую, что

$$\forall k (\exists n (r_{\alpha n} \in [\beta k \cdot 2^{-k}, (\beta k + 1) \cdot 2^{-k}]) \wedge \neg \exists n (r_{\alpha n} \geqslant (\beta k + 1) \cdot 2^{-k})),$$

и $\langle \beta k \cdot 2^{-k}\rangle_k$ — это г. в. ч., представляющий искомую точную верхнюю грань.

Аналогично для теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Замечание. Такеути [1] показывает, что в действительности можно развить классический анализ в консервативном расширении арифметики Пеано, получаемом введением множеств всех конечных типов с арифметическим свертыванием без параметров.

12.4. Теорема о среднем значении и теорема Брауэра о неподвижной точке. Мы рассмотрим следующий частный случай теоремы о среднем значении.

> Для любой равномерно непрерывной вещественной функции f на $[0, 1]$ такой, что $f(0) = -1$, $f(1) = +1$, имеется аргумент $x \in [0, 1]$ такой, что $f(x) = 0$. (*)

Хорошо известное классическое доказательство проходит следующим образом. Рассмотрим множество $X = \{r_n: \forall r \leqslant r_n (f(r) < 0)\}$ (где r — переменная, пробегающая рациональные числа).

X — непустое ограниченное подмножество множества рациональных чисел из $[0, 1]$ и потому имеет точную верхнюю грань $x < 1$; из соображений непрерывности $f(x) \leqslant 0$; но $f(x) < 0$ исключено (снова из-за непрерывности f), следовательно, $f(x) = 0$.

Рассмотрим теперь следующее ослабление утверждения (*).

> Для любой равномерно непрерывной вещественной f на $[0, 1]$ такой, что $f(0) = -1$, $f(1) = +1$, найдется при любом k аргумент $x \in [0, 1]$ такой, что $|f(x)| < 2^{-k}$. (**)

(Применение теоремы Больцано — Вейерштрасса к (**) даст (*).)

Это утверждение можно сформулировать в языке конечных типов следующим образом. Пусть функционал Φ таков, что для любого α последовательность $\langle r_{(\Phi\alpha)n}\rangle_n$ является соответствующим г. в. ч. в стандартном представлении сегмента $[0, 1]$ (ср. 5.16); отметим, что

$$|x_\alpha - r_{(\Phi\alpha)n}| \leqslant 2^{-n+1}.$$

Пусть f — равномерно непрерывная вещественная функция. Ее можно закодировать парой последовательностей α, β таких, что (с использованием обозначения α_x вместо $(\alpha)_x$) последовательность $\langle r_{(\Phi\alpha_x)n}\rangle_n$ представляет $f(r_x)$, а β действует как **модуль равномерной непрерывности**:

$$\forall nmk (0 \leqslant r_n \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant r_m \leqslant 1 \wedge |r_n - r_m| < 2^{-\beta k} \rightarrow |r_{(\Phi\alpha_n)(k+2)} - r_{(\Phi\alpha_m)(k+2)}| < 2^{-k}). \quad (1)$$

Условия $f(0) = -1$, $f(1) = +1$ выражаются (в предположении $0 = r_0$, $1 = r_1$, которое мы примем для простоты) соотношениями

$$\forall k\,(|r_{(\Phi\alpha_0)k} + 1| < 2^{-k+1}),\ \forall k\,(|r_{(\Phi\alpha_1)k} - 1| < 2^{-k+1}). \qquad (2)$$

Заключение нашего утверждения можно сформулировать в виде

$$\forall k \exists n\,(|r_{(\Phi\alpha_n)k}| < 2^{-k}). \qquad (3)$$

Поэтому

$$(1) \wedge (2) \to (3)$$

можно записать в виде $\forall x A \to \forall u \exists v B(u, v)$, где A, B бескванторные, и это утверждение установлено в системе $\mathbf{EL}^c$ + сущ. -Δ_1^1-CA, так что по 11.9 (iv)

$$\mathbf{IDB}_1 \vdash (1) \wedge (2) \to (3).$$

Этот результат довольно тривиален, и его легко можно получить непосредственно (в действительности достаточна система $\mathbf{EL} + \mathrm{AC}_{01}$), причем он практически эквивалентен ослабленной форме одномерной теоремы Брауэра о неподвижной точке (ср. замечание 5.14). Интереснее заметить, что в точности та же трактовка подходит для следующего ослабления многомерной теоремы Брауэра о неподвижной точке.

> Если f — равномерно непрерывное отображение из I^n в I^n ($I \equiv [0, 1]$), то $\forall k \exists x \in I^n (\rho(x, fx) < 2^{-k})$, где ρ — евклидова метрика.

Классическое доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке см., например, у Энгелькинга [1], с. 296—304 (или Канторовича и Акилова [1], с. 567—572. — *Прим. перев.*).

Рассмотрим теперь конструктивный вариант теоремы о среднем значении и покажем, (a) как можно найти конструктивный вариант посредством гёделевской интерпретации и (b) как мы можем получить некоторое усиление, используя гёделевскую интерпретацию непосредственно, а не через результат о консервативном расширении из 11.9.

Теорема о среднем значении в своей классической форме может быть выражена в языке конечных типов в виде

$$\forall y^0 C y \to \neg\forall\gamma\neg\forall x^0 A(\gamma, x), \qquad (4)$$

где $\forall y^0 C y$ выражает $(1) \wedge (2)$ (C бескванторная), а $A(\gamma, x) \equiv |r_{(\Phi\alpha_{(\Phi\gamma)(\beta n))^n}}| < 2^{-n+2}$. Гёделевская интерпретация формулы (4) принимает вид

$$\exists y^0 Y \forall X\,(Cy \to A(YX, X(YX))),$$

что влечет

$$\forall y^0 C y \to \exists Y \forall x^0 A(YX, X(YX)). \qquad (5)$$

Выбирая $\lambda y^0.x^0$ в качестве X, имеем

$$\forall y^0 C y \to \exists Y \forall x^0 A(Y(\lambda y.x), x)$$

и, ослабляя, получаем

$$\forall y^0 C y \to \forall x^0 \exists \gamma A(\gamma, x),$$

что эквивалентно утверждению (3).

С другой стороны, ослабляя (5) до

$$\forall y^0 C y \to \forall X \exists \gamma A(\gamma, X\gamma)$$

и интерпретируя X как (экстенсиональный) непрерывный функционал типа 2 (действующий на теоретико-числовых функциях, соответствующих г. в. ч.), мы получим в $\mathbf{EL} + \mathrm{BI}_0 + \mathrm{AC}_{01}$:

> Для равномерно непрерывной f на $[0, 1]$ такой, что $f(0) = -1$, $f1 = 1$, для γ, кодирующих г. в. ч., и для непрерывного функционала X типа 2
>
> $$\forall y^0 C y \to \forall X^2 \exists \gamma (|fx_\gamma| < (X\gamma)^{-1})$$

(Крайзель [9]). Аналогичное улучшение можно получить для теоремы Брауэра о неподвижной точке.

12.5. Теорема Вейерштрасса о приближении многочленами. Эту теорему можно сформулировать следующим образом.

> Любую равномерно непрерывную функцию на $[0, 1]$ можно для любого k приблизить с точностью до 2^{-k} многочленом с рациональными коэффициентами. (1)

Предположим, что многочлены с рациональными коэффициентами закодированы натуральными числами, будем записывать многочлен с кодом k в виде P_k. Пусть φ_k — модуль равномерной непрерывности для P_k на $[0, 1]$. Мы пишем $\varphi(k, n)$ вместо $\varphi_k(n)$. Тогда

$$\forall x \in I \forall y \in I\,(|x - y| < 2^{-\varphi(k, n)} \to |P_k x - P_k y| < 2^{-n}).$$

Допустим, что f — равномерно непрерывная функция, кодируемая парой α, β; мы обозначим через $\psi_{k, n}$ выражение $(\alpha)_x$, где $r_x = k \cdot 2^{-n}$ ($0 \leqslant k \leqslant 2^n$), и полагаем

$$g(k, n, m) \equiv r_{(\Phi(\psi_{k, n}))^m}, \qquad \varphi(\beta, k, n) \equiv \max\{\beta n, \varphi(k, n)\}.$$

Отметим, что $|f(k \cdot 2^{-n}) - g(k, n, m)| < 2^{-m+1}$. Теперь легко проверить, что

$$\forall k \leqslant 2^{-\varphi(\beta, l, n+2)}(|g(k, \varphi(\beta, l, n+2), n+3) - P_l(k \cdot 2^{-\varphi(\beta, l, n+2)})| < 2^{-(n+2)} \qquad (2)$$

влечет

$$\forall x \in I\,(|fx - P_l(x)| < 2^{-n}) \qquad (3)$$

и что, обратно, (3) для $n+3$ влечет (2). Поэтому, если $\forall y^0 C y$ обозначает формулу (1) из 12.3, мы можем сформулировать теорему о приближении в виде

$$\forall y^0 C y \to \forall n \exists l\,(2),$$

а это выражение имеет нужный вид.

Читатель может сравнить этот метод получения теоремы Вейерштрасса с прямым путем у Бишопа [1], с. 100.

12.6. Теорема Ролля. Другой довольно простой пример дает следующее ослабление теоремы Ролля.

> Если f определена на $[0, 1]$, имеет там равномерно непрерывную производную f' и $f(0) = f(1) = 0$, то для любого k найдется $x \in [0, 1]$ такой, что $|f'x| < 2^{-k}$. (*)

Отметим, что (как классически, так и конструктивно) функция с равномерно непрерывной производной сама равномерно непрерывна. Таким образом f, f' кодируются соответственно парами α, β и α', β'. Равенства $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ также выражаются чисто универсальным условием; функция γ регулирует сходимость отношений приращений к производной, т. е. мы определяем условие «f' — производная функции f» через существование γ такой, что

$$x \# y \wedge |x - y| < 2^{-\gamma k} \to \left| \frac{fx - fy}{x - y} - f'x \right| < 2^{-k}.$$

Наконец, мы можем обеспечить, что (α, β), (α', β') находятся в отношении функции и производной, потребовав, чтобы

$$\forall nmkl\,(0 \leqslant r_n \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant r_m \leqslant 1 \wedge r_n \neq r_m \wedge |r_n - r_m| < 2^{-\gamma k} \wedge |r_n - r_m| > 2^{-l} \to \left| \frac{r_{(\Phi\alpha_n)(k+l)} - r_{(\Phi\alpha_m)(k+l)}}{r_n - r_m} - r_{(\Phi\alpha'_n)k} \right| < 2^{-k+3}).$$

Теперь мы можем применить наш результат о консервативном расширении, который дает существование конструктивного доказательства теоремы Ролля, сформулированной в виде (*).

12.7. Дальнейшие примеры можно найти у Крайзеля [1], где переформулированы некоторые классические теоремы о степенных рядах (от вещественной и комплексной переменной).

12.8. Пример «локальной» конструктивизации. Хотя описанная выше ослабленная версия теоремы о среднем значении иногда полезна, в математическом отношении интереснее найти дополнительные условия, которые после добавления к посылке

теоремы о среднем значении позволили бы нам сохранить первоначальное сильное заключение. Одно из таких довольно очевидных дополнительных условий (Бишоп [1], с. 59, упражнение 13) состоит в следующем:

$$\forall kl\,(0 \leqslant r_k \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant r_l \leqslant 1 \wedge r_k < r_l \to \exists ij\,(r_k < r_i < r_l \wedge |fr_i| > 2^{-l})) \qquad (1)$$

или, что сводится к тому же,

$$\forall xy\,[x < y \wedge x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 1] \to \exists z \in [x, y]\,(|fz| > 0)].$$

Дополнительное условие (1) дает нам возможность применить стандартное рассуждение с делением отрезка пополам.

Положим $[x_0, y_0] = [0, 1]$. Пусть $r_i \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ таково, что $fr_i \# 0$; если $fr_i < 0$, то положим $[x_1, y_1] = [r_i, 1]$, в противном случае положим $[x_1, y_1] = [0, r_i]$. Предположим, что $[x_n, y_n]$ уже построен. Пусть $r_j \in \left[\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n, \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n\right]$ таково, что $fr_j \# 0$; если $fr_j < 0$, положим $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [r_j, y_n]$, в противном случае $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [x_n, r_j]$. Легко видеть, что $\langle [x_n, y_n] \rangle_n$ сходится к единственной точке; $fx_n < 0$, $fy_n > 0$ для всех n, следовательно, для предела x верно $fx = 0$.

Конечно, нужно еще показать, что свойством (1) обладают многие функции. Например, можно показать следующее (Бишоп [1], с. 59, упражнение 14).

Если f $(n+1)$ раз равномерно дифференцируема с производными $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n+1)}$ и $C > 0$ — константа такая, что на $[a, b]$ $(a < b)$ выполнено

$$|fx| + |f^{(1)}x| + \ldots + |f^{(n)}x| > C,$$

то имеет место (1). Условие (1) выполнено также для строго возрастающих или убывающих функций.

ЛИТЕРАТУРА *)

Бенасерраф и Патнем (Benacerraf P., Putnam H., ed.)
1. Philosophy of Mathematics: Selected Readings. — Englewood Cliffs (N. J.): Prentice Hall, 1964.

Бет (Beth E. W.)
1. The Foundations of Mathematics. — Amsterdam: North-Holland, 1959. 2nd revised ed. — Amsterdam: North-Holland, 1965.

*) Следующие источники содержат интенсивную библиографию: Гейтинг [3], [4], Клини [2], Клини и Весли [1], Трулстра [3], [7] (все — об интуиционизме), Шанин [2], Кушнер [1] (о CRA), Драгалин [2]. См. также раздел конструктивной математики в Zentralblatt für Mathematik.

Бизон (Beeson M. J.)
1. The nonderivability in intuitionistic formal systems of theorems on the continuity of effective operations. — J. Symbolic Logic, 1975, **40**, p. 321—346.

Бишоп (Bishop E.)
1. Foundations of Constructive Analysis. — N. Y.: McGraw Hill, 1967.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)
1. Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. — Jber. Deutsch Math.-Verein, 1924, **33**, p. 251—256.
2. Consciousness, philosophy and mathematics. — In: Proceedings of the 10th International Congress on Philosophy, Amsterdam, 1948/Ed. E. W. Beth and H. J. Pors. Amsterdam: North-Holland, 1949, p. 1235—1249.
3. Historical background, principles and methods of intuitionism. — South African J. Sci., 1952, **49**, p. 139—146.
4. Points and spaces. — Canad. J. Math., 1954, **6**, p. 1—17.
5. Collected Works. Vol. 1/Ed. A. Heyting. — Amsterdam: North-Holland, 1975.

Вейль (Weyl H.)
1. Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. — Leipzig: Gruyter, 1918.

Гейтинг (Heyting A.)
1. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. — Erkenntnis, 1931, **2**, p. 106—115.
2. Logique et intuitionnisme. — In: Actes du 2e Colloque Internationale de Logique Mathématique, Paris, 1952. Paris, 1954.
3. Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration. — Paris: Gauthier-Villars; Louvain: Nauwelaerts, 1955.
4. Intuitionism, an Introduction. — Amsterdam: North-Holland, 1956. 2nd revised ed. — Amsterdam: North-Holland, 1966. 3rd revised ed. — Amsterdam: North-Holland, 1972. [Русский перевод: Гейтинг А. Интуиционизм. — М.: Мир, 1965.]

Гельфонд М. Г.
1. О соотношении классического и конструктивного вариантов построения математического анализа. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1972, **32**, с. 5—11.

Генцен (Gentzen G.)
1. On the relation between intuitionist and classical arithmetic. — In: The Collected Papers of Gerhard Gentzen/Ed. M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland, 1969, pp. 53—67.

Гёдель (Gödel K.)
1. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. — Ergebnisse eines mathematische Kolloquiums, 1933, **4**, S. 34—38.
2. Ueber eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. — Dialecica, 1958, **12**, S. 280—287. [Русский перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 499—510.]

Гильберт и Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)
1. Grundlagen der Mathematik, I. — Springer, 1934. [Русский перевод: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1979.]

Говард (Howards W. A.)
1. Functional interpretation of bar induction by bar recursion. — Compositio math., 1968, **20**, p. 107—124.

2. Assignment of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type. — In: Intuitionism and Proof Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 443—458.
3. Hereditarily majorizable functions of finite type. — In: Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis/Ed. A. S. Troelstra. Berlin: Springer, 1973. p. 454—461.

Говард и Крайзель (Howard W. A., Kreisel G.)
1. Transfinite induction and bar induction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis. — J. Symbolic Logic, 1966, **31**, p. 325—358.

Гудмен (Goodman N. D.)
1. Intuitionistic arithmetic as a theory of constructions: Ph. D. Thesis. — Stanford (Calif.): Stanford University, 1968.

Дайсон и Крайзель (Dyson V. H., Kreisel G.)
1. Analysis of Beth's semantic construction of intuitionistic logic. — Technical Report 3, Applied Mathematics and Statistics Laboratories. Stanford (Calif.): Stanford University, 1961.

ван Дален (Dalen D. van)
1. Lectures on intuitionism. — In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic/Ed. A. R. D. Mathias and H. Rogers. Berlin: Springer, 1973, p. 1—94.

Диллер и Нам (Diller J., Nahm W.)
1. Eine Variante zur Dialectica Interpretation der Heyting-Arithmetik endlicher Typen. — Arch. Math. Logik Grundlagenforsch., 1974., **16**, S. 49—66.

Драгалин А. Г.
1. Constructive mathematics and models of intuitionistic theories. — In: Logic, Methodology and Science, IV/Ed. P. Suppes et al. Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 111—128.
2*. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. — М.: Наука, 1979.

Жирар (Girard J. Y.)
1. Une extension de l'interpretation de Gödel à l'analyse, et son application a l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types. — In: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium/Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 63—92.
2. Quelques résultats sur les interprétations fonctionelles. — In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic/Ed. A. R. D. Mathias and H. Rogers. Berlin: Springer, 1973, p. 232—252.

Йонг де (Jongh D. H. J. de)
1. Formulas in one propositional variable in intuitionistic arithmetic. — Report 73-03, Dept. of Math., University of Amsterdam, 1973.

Канторович Л. В., Акилов Г. П.
1*. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959.

Клини (Kleene S. C.)
1. On the interpretation of intuitionistic number theory. — J. Symbolic Logic, 1945, **10**, p. 109—124.
2. Introduction to Metamathematics. — Amsterdam: North-Holland; Groningen: P. Noordhoff; N. Y.: D. van Nostrand, 1952. [Русский перевод: Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.]
3. Countable functionals. — In: Constructivity in Mathematics/Ed. A. Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 81—100.
4. Realizability and Sanin's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences. — Logique et Analyse, 1960, **3**, p. 154—165.
5. Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms. — J. Symbolic Logic, 1962, **27**, p. 11—18.

6. An addendum. — J. Symbolic Logic, 1963, 28, p. 154—156.
7. Formalized recursive functionals and formalized realizability. — Mem. Amer. Math. Soc., 1969, 89.

Клини и Весли (Kleene S. C., Vesley R. E.)
1. The Foundations of Intuitionistic Mathematics, Especially in Relation to Recursive Functions. — Amsterdam: North-Holland, 1965. [Русский перевод: Клини С. К., Весли Р. Основания интуиционистской математики. — М.: Наука, 1978.]

Колмогоров А. Н.
1. О принципе tertium non datur. — Матем. сб., 1925, 32, с. 646—667.

Крайзель (Kreisel G.)
1. Some elementary inequalities. — Indag. Math., 1952, 14, p. 334—338.
2. Mathematical significance of consistency proofs. — J. Symbolic Logic, 1958, 23, p. 155—182.
3. Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite type. — In: Constructivity in Mathematics/Ed. A Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 101—128.
4. On weak completeness of intuitionistic predicate logic. — J. Symbolic Logic, 1962, 27, p. 139—148.
5. Mathematical logic. — In: Lectures on Modern Mathematics, III/Ed. T. L. Saaty. N. Y.: Wiley, 1965, p. 95—195.
6. Functions, ordinals, species. — In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, III/Ed. J. F. Staal and B. van Rootselaar. Amsterdam: North-Holland, 1968, p. 145—159.
7. Church's thesis: A kind of reducibility axiom for constructive mathematics. — In: Intuitionism and Proof Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 121—150.
8. Which number theoretic problems can be solved in recursive progressions on Π^1_1-paths through 0? — J. Symbolic Logic, 1972, 37, p. 311—334.
9. The need for abstract methods in mathematics: a topic for proof theory, 1973.

Крайзель и Кривин (Kreisel G., Krivine J. L.)
1. Eléments de logique mathématique. — Paris: Dunod, 1966.

Крайзель и Трулстра (Kreisel G, Troelstra A.)
1. Formal systems for some branches of intuitionistic analysis. — Ann. Math. Logic, 1970, 1, p. 229—387.

Крипке (Kripke S.)
1. Semantical analysis of intuitionistic logic, I. — In: Formal Systems and Recursive Functions/Ed J. N. Crossley and M. A. E. Dummett. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 92—130.

Кушнер Б. А.
1. Лекции по конструктивному математическому анализу. — М.: Наука, 1973.

Марков А. А.
1. О конструктивной математике. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 67. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 8—14.
2. Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive. — Rev. Internat. Philos., 1971, 98, p. 477—507.
3. О языке $Я_0$. — ДАН СССР, 1974, 214, с. 40—43.
4. О языке $Я_1$. — ДАН СССР, 1974, 214, с. 279—282.
5. О языке $Я_2$. — ДАН СССР, 1974, 214, с. 513—516.
6. О языке $Я_3$. — ДАН СССР, 1974, 214, с. 765—768.
7. О языках $Я_4$, $Я_5$, ... — ДАН СССР, 1974, 214, с. 1030—1034.
8. О языке $Я_\omega$. — ДАН СССР, 1974, 214, с. 1265—1268.
9. О языке $Я_{\omega_1}$. — ДАН СССР, 1974, 215, с. 57—60.

Мартин-Лёф (Martin-Löf P.)
1. Notes on Constructive Mathematics. — Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1970. [Русский перевод: Мартин-Лёф П. Очерки по конструктивной математике. — М.: Мир, 1975.]
2. An intuitionistic theory of types: predicative part. — In: Logic Colloqium' 73/Ed. H. E. Rose and J. C. Shepherdson. Amsterdam, North-Holland, 1975, p. 73—118.

Мейо (Mayoh B.)
1. Unsolvable problems in the theory of computable numbers. — In: Formal Systems and Recursive Functions/Ed. J. N. Crossley and M. A. E. Dummett. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 272—279.

Минц Г. Е.
1. Финитное исследование трансфинитных выводов. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1975, 49, с. 67—122.
2. Теория доказательств (Арифметика и анализ). — В кн.: Итоги науки и техники, сер. алгебра, топология, геометрия, 1975, 13, с. 5—49.

Минц Г. Е., Оревков В. П.
1. О погружающих операциях. — Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1967, 4, с. 160—167.

Московакис Дж. Р. (Moschovakis J. R.)
1. A topological interpretation of second-order intuitionistic arithmetic. — Compositio math., 1973, 26, p. 261—275.

Московакис Я. Н. (Moschovakis Y. N.)
1. Recursive metric space. — Fundam. math., 1964, 55, p. 215—238.
2. Notation systems and recursive ordered fields. — Compositio math., 1965, 17, p. 40—71.

Нагасима (Nagashima T.)
1. An extension of the Craig-Schütte interpolation theorem. — Ann. Japan Assoc. Philos. Sci., 1966, 3, p. 12—18.

Оревков В. П.
1. Конструктивное отображение квадрата в себя, сдвигающее каждую конструктивную точку. — ДАН СССР, 1963, 152, с. 52—58.
2. О конструктивных отображениях круга в себя. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 72. М.: Наука, 1964, с. 437—461.

Правиц (Prawitz D.)
1. Natural Deduction, a Proof-Theoretical Study. — Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1965.

Расёва и Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.)
1. The Mathematics of Metamathematics. — Warsaw: PWN — Polish Scientific Publishers, 1963. [Русский перевод: Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. — М.: Наука, 1972.]

Скотт (Scott D. S.)
1. Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis. — Compositio math., 1968, 20, p. 194—210.
2. Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis, II. — In: Intuitionism and Proof Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 235—255.

Сморинский (Smorynski C. A.)
1. Applications of Kripke models. — In: Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis/Ed. A. S. Troelstra. Berlin: Springer, 1973, p. 324—391.

Спектор (Spector C.)
1. Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. — In: Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics V/Ed. J. C. E. Dekker. Providence (Rhode Island): A. M. S., 1962, p. 1—27.

Такеути (Takeuti G.)
1. A conservative extension of Peano arithmetics. — University of Heidelberg, 1972.
Тейт (Tait W. W.)
1. Intensional interpretations of functionals of finite type, I. — J. Symbolic Logic, 1967, 32, p. 198—212.
Трулстра (Troelstra A. S.)
1. Principles of Intuitionism. — Berlin: Springer, 1969.
2. Notions of realizability for intuitionistic arithmetic in all finite types. — In: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium/Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 369—405. Исправления в Zentralblatt, 227 (02015).
3. (ed.) Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. — Berlin: Springer, 1973.
4. Notes on intuitionistic second order arithmetic. — In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic/Ed. A. R. D. Mathias and H. Rogers. Berlin: Springer, 1973, p. 171—205.
5. Note on the fan theorem. — J. Symbolic Logic, 1974, 39, p. 584—596.
6. Non-extensional equality. — Fundam. math., 1975, 82, p. 307—322.
7. Choice Sequences, a Chapter of Intuitionistic Mathematics. — Oxford: Clarendon Press, 1977.
8. Completeness and validity for intuitionistic predicate logic. — In: Proceedings of the Seminaire international d'été et Colloque international de Logique a Clermont-Ferrand, July, 1975. CNRS, 1977.
Фиттинг (Fitting M.)
1. Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing. — Amsterdam: North-Holland, 1969.
Фридман (Friedman H.)
1. Some applications of Kleene's methods for intuitionistic systems. — In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic/Ed. A. R. D. Mathias and H. Rogers. Berlin: Springer, 1973, p. 113—170.
Хината (Hinata S.)
1. Calculability of primitive recursive functionals of finite type. — Science reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku A, 1967, 9, p. 218—235.
Цейтин Г. С.
1. Алгоритмические операторы в конструктивных полных сепарабельных метрических пространствах. — ДАН СССР, 1959, 128, № 1, с. 49—52.
Шанин Н. А.
1. О конструктивном понимании математических суждений. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 52. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 226—311.
2. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 67. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 15—294.
3. О конструктивном понимании опорных формул 1. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 72. М.: Наука, 1964, с. 348—379.
4. Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 129. М.: Наука, 1974, с. 203—206.
Шютте (Schütte K.)
1. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik. — Math. Ann., 1962, 148, S. 192—200. [Русский перевод Шютте К. Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов.—В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 285—295.]
Энгелькинг (Engelking R.)
1. Outline of General Topology, — Amsterdam: North-Holland; Warsaw: PWN — Polish Scientific Publishers; N. Y.: Wiley, 1968.

Глава 6

ЛОГИКА ТОПОСОВ

Майкл П. Фурман

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Цель этой главы — дать подходящее для изучения изложение соответствия между топосами и теориями, которое уточнит утверждение Ловера о том, что «понятие топоса концентрирует в объективной категориальной форме сущность «логики высшего порядка» (Ловер [3]). Оказалось, что элементарные топосы соответствуют *теориям* в весьма естественной логике, формально — *в интуиционистской теории типов* (с полной аксиомой свертывания). Рассматриваемые теории дефинициально полны (это понятие определено в § 6) и любая теория имеет очевидное дефинициональное пополнение. Утверждение о том, что топосы соответствуют теориям, не означает отрицания того, что некоторые топосы можно рассматривать как модели для нашей логики. Модели можно синтаксически описывать «диаграммами», поэтому можно говорить, что теории *включают* модели. Согласно нашей точке зрения, топосы в общем случае можно рассматривать как теории. В частности, некоторые топосы, возникающие семантически, более понятны как теории, чем как модели. Таким образом, мы рассматриваем теорию топосов как «алгебраическую» форму интуиционистской логики высших порядков.

Формализация нашей логики была разработана в 1973 г. в ходе совместных семинаров с Даной Скоттом. Связь с топосами была впервые описана автором на неформальном собрании Монреальского семинара по высшей математике в 1974 г. и со-

ставила основу его диссертации (Фурман [1]). Формальные системы, соответствующие топосам, были независимо описаны другими авторами, например, Костом [1], Буало [1]. В их системах нет основной новой черты нашей формализации — *предиката существования*, и поэтому они вынуждены накладывать неуклюжие ограничения на правило модус поненс. Как отметил Ловер [3], эти ограничения вызваны недостатками в традиционной интерпретации переменных. Мы *категорически* несогласны с тем, что из-за этого «следует отбросить ... традиционный логический метод обращения с переменными». Можно очень многое сказать в пользу традиционного использования переменных, и есть гораздо менее радикальные средства исправления недостатков.

Основная цель введения предиката существования — естественная формализация логики *частичных элементов* (в случае пучков — это сечения, возможно не являющиеся глобальными). Модифицируя интерпретацию *свободных* переменных (разрешая им пробегать частичные элементы), мы можем продолжать обращаться с переменными привычным образом, сохраняя фундаментальную *транзитивность следования*. Конечно, различные формальные системы, соответствующие топосам, взаимопереводимы (через топосы, если угодно). Какую из них предпочесть — в основном вопрос вкуса.

Еще одна цель этой главы — дать изложение топосов, доступное логику. Именно, Ловер осознал, что определенные логические конструкции (например, образование степеней-типов) можно интерпретировать в категориях пучков, т. е. в топосах Гротендика, и это привело к аксиоматизации элементарных топосов (Ловер [1], Ловер и Тьерне [1]). Мы считаем, что основательное понимание интуитивных соображений Ловера даст логику возможность использовать многочисленные модели, которые дали Гротендик и его сотрудники (см., например, Артин, Гротендик и Вердье [1]). Они могут быть полезны не только при изучении чистой логики, но также и при поиске приложений логики, обобщающих применения булевозначных моделей вне теории множеств (см. Скотт [1], Такеути [1], Руссо [1]).

Я благодарен Дане Скотту за многочисленные стимулирующие беседы и за его подробную и конструктивную критику этой работы на всех ее стадиях.

§ 2. Предварительные сведения из теории категорий

Нужные нам понятия из теории категорий совершенно элементарны. Мы даем здесь их обзор, так как во вводных курсах они часто излагаются несколько усложненно. Мы избегаем использования общих понятий вроде *предела* или *сопряженности* не потому, что считаем их неважными. Дело в том, что для наших нынешних целей необходимо четко оговорить элементарные свойства (в терминах объектов и морфизмов), которые слишком часто оказываются скрытыми за абстрактными определениями. Более общее обсуждение, выявляющее лежащее в основе единство многих внешне различных конструкций, см. у Маклейна [1] (особенно главы III и IV).

Мы будем считать, что читателю известно, что такое категории и функторы (гомоморфизмы категорий). Мы будем намеренно использовать одно обозначение для объекта A и единичного морфизма A: $A \to A$. Если даны морфизмы f: $A \to B$ и g: $B \to C$, то мы записываем их композицию в виде $g \circ f$: $A \to C$.

2.1. Определение. Категория с *конечными произведениями* имеет, во-первых, *терминальный объект* **1** (произведение пустого семейства) с тем свойством, что существует единственный морфизм $A \to \mathbf{1}$ из любого объекта A в **1**. Во-вторых, для любой пары A, B объектов имеется *произведение* $A \times B$, оснащенное проекциями π_1, π_2 такими, что для любой пары морфизмов f: $C \to A$ и g: $C \to B$ имеется единственный морфизм $\langle f, g\rangle$: $C \to A \times B$, для которого коммутирует следующая диаграмма:

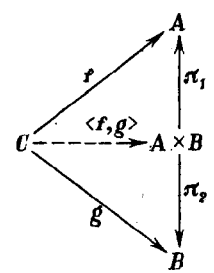


Диаграмма 1.

Мы обозначаем через $h \times k$ морфизм $\langle h \circ \pi_1, k \circ \pi_2\rangle$: $A \times B \to C \times D$, где h: $A \to C$, k: $B \to D$.

Замечание. В некотором смысле понятие категории с конечными произведениями является *эквациональным* (или, по существу, алгебраическим). *Коммутативность* приведенной выше диаграммы означает наличие двух равенств

$$\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f, \quad \pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g.$$

Единственность морфизма $\langle f, g\rangle$ означает наличие дополнительного равенства

$$\langle \pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h\rangle = h.$$

Уточнение всего этого требует рассмотрения алгебр с *частичными операциями* (категория с конечными произведениями —

это как раз такая алгебра, см. Скотт [2]). Аналогичные замечания применимы к следующим понятиям: *категория, категория с конечными пределами, декартово замкнутая категория и топос.*

2.2. Определение. Категория *декартово замкнута*, если она обладает конечными произведениями и для каждой пары A, B объектов мы имеем *экспоненту* B^A и *оценочный морфизм*

$$\mathrm{ev}\colon A \times B^A \to B$$

такие, что для любого $f\colon A \times X \to B$ имеется единственный $\hat{f}\colon X \to B^A$ такой, что

$$\mathrm{ev} \circ A \times \hat{f} = f$$

(причем условие единственности можно наложить в эквациональной форме $(\mathrm{ev} \circ A \times g)\hat{} = g$). Мы назовем $\hat{f}$ и f *транспозициями друг друга.*

2.3. Определение. В произвольной категории для данных морфизмов $f, g\colon A \to B$ мы скажем, что $e\colon X \to A$ есть *уравнитель* морфизмов f и g, если верно $f \circ e = g \circ e$, и для любого $h\colon Y \to A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, имеется единственный $k\colon Y \to X$ такой, что $e \circ k = h$. В этом случае говорят, что

$$X \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

— это *диаграмма уравнителя.*

2.4. Определение. *Квадрат* (f, f', g, g') в приводимой ниже диаграмме называется *универсальным* или *декартовым* (pullback), если верно $f \circ f' = g \circ g'$, и для любой пары k, h морфизмов такой, что $f \circ k = g \circ h$, имеется единственный морфизм e такой, что $f' \circ e = k$ и $g' \circ e = h$.

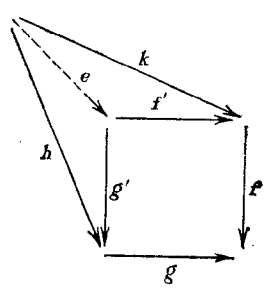


Диаграмма 2.

Читатель может сформулировать и доказать утверждение о том, что терминальные объекты, произведения, экспоненты, уравнители и универсальные квадраты единственны с точностью до единственного изоморфизма.

2.5. Определение. Морфизм f есть *мономорфизм*, если $f \circ g = f \circ h$ влечет $g = h$. Если f и k — мономорфизмы с общим концом A, то мы говорим, что $f \leqslant k$, если k есть составляющая f, т. е. $f = k \circ g$ для некоторого морфизма g. Если $f \leqslant k$ и $k \leqslant f$, то мы говорим, что f и k представляют один и тот же *подобъект* объекта A. Мы обозначаем через $\mathcal{P}(A)$ (частично упорядоченный) класс подобъектов объекта A.

Доказательство основных фактов из следующего утверждения предоставляется читателю.

2.6. Предложение. (1) *Любой уравнитель является мономорфизмом.*

(2) *Если f — мономорфизм, то $\langle f, g\rangle$ — мономорфизм.*

(3) *Если*

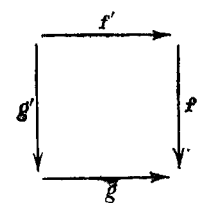


Диаграмма 3.

— универсальный квадрат и g — мономорфизм, то f' — тоже мономорфизм.

(4) *Если оба малых квадрата универсальны, то таков же и внешний прямоугольник*:

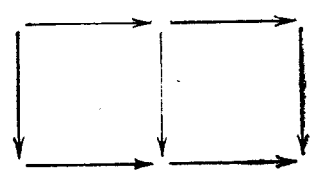


Диаграмма 4.

(5) *Если в категории имеются конечные произведения и уравнители (т. е. любая пара морфизмов $f, g\colon A \to B$ имеет уравнитель), то в ней имеются и универсальные квадраты (т. е. мы можем достроить до универсального квадрата любую пару морфизмов с общим концом).*

2.7. Определение. Категория *финитно полна*, если в ней имеются конечные произведения и уравнители. (Здесь существенно, что такая категория имеет пределы для *всех* конечных диаграмм, см. Маклейн [1].)

§ 3. Логика частичных элементов

Стандартные формализации логики корректны только для непустых областей. Классически мы можем решить, пуста область или непуста. Даже интуиционистски, пока мы рассматриваем только одну область, мы ничего не теряем, предполагая, что она «обитаема». Если, однако, мы хотим рассматривать подобласть, определяемую неразрешимым предикатом, мы должны сказать, что может быть неразрешим вопрос о том, *существует* ли данный x *как* элемент этой подобласти. Таким образом, в общем случае, если мы рассматриваем более чем один сорт переменных, мы обнаруживаем, что должны приспособить нашу логику к обращению с областями, для которых мы не можем ни узнать, являются ли они обитаемыми, ни решить, существуют ли их элементы полностью. Когда мы говорим о чем-то, мы не всегда можем предполагать его существование. Правильно построенные термы языка могут ничего не обозначать. Много видов «свободной» логики было предложено для классических систем, но проблема существования обостряется только в интуиционистской ситуации, когда мы уже не можем больше утверждать, что область должна быть *либо* обитаемой, *либо* пустой.

Для рассмотрения термов, которые могут не иметь денотата (значения), мы вводим формальный *предикат существования* $\mathbf{E}$. Мы читаем $\mathbf{E}\tau$ как «τ существует». Можно считать, что свободные переменные сорта τ пробегают (неявную) внешнюю область потенциальных элементов. (Мы позднее увидим, как любая область A частичных элементов может быть представлена как подобласть некоторой области $\bar{A}$ тотальных элементов, которые мы можем считать объективизациями потенциальных элементов множества A.) Тогда предикат $\mathbf{E}$ выбирает подобласть A актуальных (действительных) элементов. Мы перефразируем изречение Куайна в тезис «быть — это быть значением связанной переменной» и будем считать, что связанные переменные *ограничены* предикатом $\mathbf{E}$. Связанные переменные пробегают только актуальные элементы.

Как только мы вводим некоторую область, мы должны ввести также понятие *одинаковости* внутри этой области. Имеется понятие равенства частичных элементов, которое предполагает существование в следующем смысле:

$$\tau = \sigma \to \mathbf{E}\tau \wedge \mathbf{E}\sigma.$$

Мы вводим также понятие *эквивалентности*, рассматривая, по существу, все элементы вне $\mathbf{E}$ как эквивалентные в своем несуществовании. При интуиционистском подходе мы должны

сформулировать это более позитивно и выразить эквивалентность соотношением

$$\tau \equiv \sigma \leftrightarrow (\mathbf{E}\tau \to \tau = \sigma) \wedge (\mathbf{E}\sigma \to \tau = \sigma).$$

Это отношение является основным для нашей логики. Мы изгоняем любые возможные интенсиональные понятия, требуя, чтобы эквивалентные элементы были неразличимы. Корректно определенные предикаты должны быть экстенсиональными не только относительно равенства, но и относительно эквивалентности. Это экстенсиональность выражается схемой

$$\varphi[\tau/x] \wedge \tau \equiv \sigma \to \varphi[\sigma/x].$$

Так как отношение $\equiv$ столь фундаментально, мы выбираем $=$ и $\mathbf{E}$ в качестве исходных отношений и определяем равенство посредством

$$\tau = \sigma \leftrightarrow \tau \equiv \sigma \wedge \mathbf{E}\tau \wedge \mathbf{E}\sigma.$$

Мы излагаем логику как *многосортную* теорию с *высшими типами*. Для задания структуры высшего порядка достаточно иметь отображение, которое каждой конечной последовательности $(A_0, \ldots, A_{n-1})$, состоящей из сортов, ставит в соответствие сорт $[A_0, \ldots, A_{n-1}]$, который мы считаем «сортом-степенью» всех n-арных отношений на данной последовательности областей. Как мы увидим, другие типовые конструкции сводимы к понятиям, определяемым в терминах этих сортов-степеней. Аксиоматизация логики высших порядков упрощается благодаря тому факту, что достаточно взять *конъюнкцию*, *импликацию* и *квантор всеобщности* в качестве исходных логических констант: другие связки определяются в терминах этих связок.

Скотт предложил в качестве термов применять *определенные описания* (понятие «тот, который»), так как после введения предиката существования это удобно и не вызывает усложнения. Мы так и поступаем, ибо это дает нам достаточно большой запас термов. Терм $\mathrm{I}x\varphi$ читается «тот единственный x, для которого верно φ». Более полное обсуждение интуиционистской логики частичных элементов и описаний можно найти у Скотта [2] и Скотта и Фурмана [1]. Мы переходим теперь к изложению формализации этой логики.

3.1. Определение. *Язык высшего порядка* задается следующими данными.

(1) Двумя множествами Sort и Const (сортов и констант).

(2) *Отображением типа-степени* из $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Sort}^n$ в Sort, которое записывается в виде

$$(A_0, \ldots, A_{n-1}) \mapsto [A_0, \ldots, A_{n-1}].$$

(3) Отображение $\#$: Const $\to$ Sort, которое ставит каждой константе в соответствие ее сорт.

Если задан язык, мы вводим множество Var *переменных*. Каждая переменная x имеет сорт $\#x$. Имеется счетное множество переменных каждого сорта.

Во избежание недоразумений отметим, что мы не предполагаем, что сорта построены синтаксически из некоторого множества «основных сортов» итерированием операции типа-степени. В частности, не предполагается, что $[A] = [B]$ влечет $A \cong B$. Эта «абстрактность» не создает реальных проблем.

3.2. Определение. Множества *термов* $(\tau, \sigma, \ldots)$ и *формул* $(\varphi, \psi, \ldots)$ рассматриваемого языка — это множества выражений, которые строятся индуктивно согласно приводимой ниже схеме. Каждому терму τ поставлен в соответствие сорт $\#\tau$, и включение выражений в соответствующие множества зависит от выполнения условия из правого столбца.

Мы предоставляем читателю определить множество *свободных переменных* терма или формулы (обозначаемое соответственно через $\mathrm{FV}(\tau)$ или $\mathrm{FV}(\varphi)$) и результат *подстановки* терма σ вместо переменной x (при условии $\#\sigma = \#x$) в терм или формулу (обозначаемые соответственно через $\tau[\sigma/x]$ и $\varphi[\sigma/x]$). Для удобства мы предполагаем, что операция подстановки переименовывает связанные переменные, если это нужно, чтобы избежать коллизий. Мы используем обычные сокращения, в частности пишем $\forall \bar{x}$ вместо конечных цепочек кванторов (включая пустую цепочку), $\bigwedge$ вместо конечной конъюнкции и $\varphi \leftrightarrow \psi$ вместо $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

	Выражение	Сорт	Условие
Термы:	x	$\#x$	$x \in \mathrm{Var}$
	c	$\#c$	$c \in \mathrm{Const}$
	$\mathbf{I}x\varphi$	$\#x$	$x \in \mathrm{Var}$, φ — формула

	Выражение	Условие
Формулы:	$\mathbf{E}\tau$	τ — терм
	$\tau \cong \sigma$	$\#\tau = \#\sigma$
	$\tau(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1})$	$\#\tau = [\#\sigma_0, \ldots, \#\sigma_{n-1}]$
	$\varphi \wedge \psi$	φ, ψ — формулы
	$\varphi \to \psi$	φ, ψ — формулы
	$\forall x\varphi$	$x \in \mathrm{Var}$, φ — формула

Мы отметим здесь, что пустая последовательность сортов порождает особый сорт-степень $[\ ]$, который можно считать

состоящим из истинностных значений. Если τ — терм сорта $[\ ]$, то $\tau(\ )$ — формула, которая в действительности утверждает истинность предложения τ.

3.3. Определение. В качестве *аксиом* и *правил* мы берем все правильно построенные частные случаи следующих схем:

(Пропозициональные аксиомы)
$$\begin{cases} \varphi \to (\psi \to \varphi), \\ (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)), \\ (\varphi \wedge \psi) \to \varphi, \\ (\varphi \wedge \psi) \to \psi, \\ (\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))); \end{cases}$$

Аксиомы:
$$(\cong)\ \varphi[y/x] \wedge y \cong z \to \varphi[z/x],$$
$$(\mathrm{E})\ \forall x(x \cong y \leftrightarrow x \cong z) \to y \cong z,$$
$$(\forall)\ \forall x\varphi \wedge \mathbf{E}x \to \varphi,$$
$$(\mathbf{I})\ \forall y(y \cong \mathbf{I}x\varphi \leftrightarrow \forall x(\varphi \leftrightarrow x \cong y)),$$
$$\mathrm{Comp}\ \ \mathbf{E}\mathbf{I}y\forall \bar{x}(\varphi \leftrightarrow y(\bar{x})),$$
$$\mathrm{Pred}\ \ y(\bar{x}) \to \mathbf{E}y \wedge \bigwedge \mathbf{E}x_i.$$

Правила:
$$(\mathrm{MP})\ \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}, \qquad \mathrm{Sub}\ \frac{\varphi}{\varphi[\tau/x]},$$
$$(\forall^+)\ \frac{\psi \wedge \mathbf{E}x \to \varphi}{\psi \to \forall x\varphi}, \text{ где } x \notin \mathrm{FV}(\psi).$$

Пропозициональные аксиомы — это стандартные аксиомы интуиционистской логики. Аксиома $(\cong)$ — это принцип *подстановочности* эквивалентных. Аксиома *экстенсиональности* (E) воплощает тезис о том, что для эквивалентности двух вещей (y и z) достаточно, чтобы они эквивалентным образом сравнивались с актуальными объектами (находящимися в области значений *связанной* переменной x). Аксиома $(\forall)$ *удаления всеобщности* позволяет переходить от утверждения со связанными переменными к соответствующему утверждению со свободными переменными при условии, что *верна* посылка о *существовании*. Аксиома (I) *описаний* требует внешнего квантора *существующий* элемент эквивалентен описываемому элементу в точности тогда, когда он является единственным (существующим) элементом, удовлетворяющим данному предикату. Нам не нужно специально упоминать несобственные описания, так как их свойства следуют из аксиомы экстенсиональности и свойств кванторов. Здесь кончаются аксиомы *первого порядка*. (Конечно, если бы мы занимались *только* логикой первого порядка, то мы добавили бы другие связки, квантор существования и

«очевидные» аксиомы и правила, а именно те, которые упомянуты в теореме 3.5.)

Чтобы аксиоматизировать логику высшего порядка, мы добавляем полную схему свертывания (Comp): любой предикат имеет *экстенсионал* — единственный элемент подходящего сорта-степени, обладающий нужным свойством. Заметим, что эта аксиома влечет свойство экстенсиональности для сортов-степеней (лемма 3.6 (6)). Последняя аксиома (Pred) *предикации* является более или менее грамматическим соглашением: если мы приписываем отношению некоторые аргументы, то оно само и его аргументы должны существовать.

Правила очевидны: *модус поненс* (MP) и *подстановка* (Sub) формулируются обычным образом. Правило ($\forall^+$) *введения всеобщности сильнее*, чем обычный вариант, так как посылка ослаблена предположением о существовании.

Понятие *выводимости* определяется обычным образом. Мы используем $\Gamma \vdash \varphi$ для обозначения выводимости φ из множества Γ. *Теория* — это такое множество $\boldsymbol{T}$ формул, что $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ влечет $\varphi \in \boldsymbol{T}$. Любая теория $\boldsymbol{T}$ необходимо формулируется в языке $\mathrm{L}(\boldsymbol{T})$. Время от времени у нас будет повод использовать меняющиеся языки.

Для удобства чтения мы будем писать

$$\forall x{:}\, A\,\varphi \quad \text{вместо} \quad \forall x \varphi,$$
$$\mathbf{I}x{:}\, A\,\varphi \quad \text{вместо} \quad \mathbf{I}x\varphi,$$

когда $\#x = A$, чтобы сделать подразумеваемый сорт видимым. Мы также будем писать $x{:}\, A$, чтобы выразить, что $\#x = A$.

3.4. Определение. С помощью кванторов по «истинностным значениям» мы вводим оставшуюся часть традиционного арсенала логических связок путем следующих сокращений:

(1) $\varphi \vee \psi$ для $\forall z{:}\, [\ ](((\varphi \to z(\ )) \wedge (\psi \to z(\ ))) \to z(\ ))$,
(2) $\neg \varphi$ для $\forall z{:}\, [\ ](\varphi \to z(\ ))$,
(3) $\exists x \varphi$ для $\forall z{:}\, [\ ](\forall x(\varphi \to z(\ )) \to z(\ ))$,
(4) $\top$ для $\mathbf{E}\mathbf{I}y{:}\, [\ ]\, y(\ )$,
(5) $\bot$ для $\forall z{:}\, [\ ]\, z(\ )$.

Доказательство того, что введенные понятия ведут себя надлежащим образом, — это простое упражнение в нахождении формальных выводов. Аксиома и правило для квантора существования должны быть модифицированы с учетом предиката существования (как в случае $\forall$).

3.5. Теорема.

(1) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$,
(2) $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$,

(3) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\theta \to \psi) \to ((\varphi \vee \theta) \to \psi))$,
(4) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg \psi) \to \neg \varphi)$,
(5) $\vdash \neg \varphi \to (\varphi \to \psi)$,
(6) $\vdash \varphi \wedge \mathbf{E}x \to \exists x \varphi$,
(7) $\vdash \top$,
(8) $\vdash \bot \to \varphi$,
(9) правило $\dfrac{\varphi \wedge \mathbf{E}x \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}$ имеет место, если x не входит свободно в ψ.

3.6. Лемма.

(1) $\vdash \mathbf{E}x \leftrightarrow \exists y.\ x = y$,
(2) $\vdash \mathbf{E}\mathbf{I}x\varphi \leftrightarrow \exists y \forall x (\varphi \leftrightarrow x = y)$,
(3) $\vdash z \equiv \mathbf{I}x\varphi \leftrightarrow \forall y (y \equiv z \leftrightarrow \forall x (x \equiv y \leftrightarrow \varphi))$,
(4) $\vdash z(\ldots, \mathbf{I}x\varphi, \ldots) \leftrightarrow \exists y (z(\ldots y, \ldots) \wedge \forall x (\varphi \leftrightarrow x \equiv y))$,
(5) $\vdash \mathbf{I}x\varphi(\ldots) \leftrightarrow \exists y (y(\ldots) \wedge \forall x (\varphi \leftrightarrow x \equiv y))$,
(6) $\vdash \forall y \forall z{:}\, [A_0, \ldots, A_{n-1}] (y = z \leftrightarrow \forall \bar{x} (y(\bar{x}) \leftrightarrow z(\bar{x})))$,
(7) $\vdash x \equiv y \leftrightarrow \forall z{:}\, [A](z(x) \leftrightarrow z(y))$,
(8) $\vdash \forall x \forall y (x \equiv y \leftrightarrow x = y)$,
(9) $\vdash \mathbf{E}\mathbf{I}x\varphi \to \varphi[\mathbf{I}x\varphi/x]$.

Эти логические истины показывают, каким образом связаны существование, описания, эквивалентность и равенство. Следствием является приводимая ниже лемма Скотта, которая экономит усилия.

3.7. Лемма. *Любая формула φ логики высшего порядка эквивалентна формуле без описаний.*

Доказательство. Индукция по построению φ с использованием (2)—(5) из 3.6. для устранения описаний из атомарных формул.

Исходный набор сортов может быть довольно специальным и доставлять лишь небольшую часть областей, обычно нужных в математике. Однако их структура высшего порядка дает большое богатство подобластей. Мы определим эти более общие (и более полезные) типы как некоторые синтаксические объекты наших языков.

3.8. Определение. *Тип* $\boldsymbol{A}$ — это терм вида $\mathbf{I}y{:}\, [A] \forall x{:}\, A\ (\varphi \leftrightarrow y(x))$, сокращенно обозначаемый $\{x{:}\, A \mid \varphi\}$. Мы скажем, что $\boldsymbol{A}$ *определим*, если он является замкнутым термом.

Каждый тип $\boldsymbol{A} = \{x{:}\, A \mid \varphi\}$ следует рассматривать как задание подобласти сорта A. (Мы не могли бы определить тип как произвольный терм сорта $[A]$, так как для различных A, B могло бы оказаться, что $[A] = [B]$, и потому этот терм сам по себе не определяет соответствующий сорт. Однако для любого терма τ сорта $[A]$ имеется очевидным образом ассоциированный с ним тип $\{x{:}\, A \mid \tau(x)\}$.) Для $\boldsymbol{A} = \{x{:}\, A \mid \varphi\}$ мы обычным образом используем обозначения $\tau \in \boldsymbol{A}$; $\forall x \in \boldsymbol{A}$; $\exists x \in \boldsymbol{A}$ для τ и x сорта A.

3.9. Определение. (*Определимое*) *отношение* F из A в B — это (замкнутый) терм вида

$$\mathbf{I}z{:}[A, B].\ \forall x{:}A \forall y{:}B\,(z(x, y) \leftrightarrow \varphi).$$

(И снова синтаксическая форма терма F несет в себе информацию о сортах A и B.) Нам не обязательно знать, что отношение F из A в B является графиком частичной функции, для того чтобы употреблять обычную запись для значения функции

$$F'(\tau) \quad \text{для} \quad \mathbf{I}y{:}B.\ F(\tau, y),$$

где τ — терм сорта A. Если σ — терм сорта B и $x:A$, то мы определяем *функциональную абстракцию* следующим сокращением:

$$\lambda x{:}A.\ \sigma \text{ обозначает } \mathbf{I}z{:}[A, B].\ \forall x \forall y\,[z(x, y) \leftrightarrow y = \sigma].$$

3.10. Лемма. *Имеют место обычные принципы конверсии:*

(1) $\vdash \forall x{:}A\,(x \in \{x{:}A \mid \varphi\} \leftrightarrow \varphi)$,
(2) $\vdash \forall x{:}A\,((\lambda x{:}A.\ \sigma)'(x) \equiv \sigma)$.

§ 4. Категории из логики

Наша конечная цель — показать, каким образом топосы соответствуют *теориям* в нашей логике. Здесь же мы рассмотрим некоторые категории, возникающие из таких теорий, и изучим их структуру в терминах понятий, введенных в § 2. Чтобы построить категорию из теории T, мы берем в качестве объектов совокупность *определимых типов*, а в качестве морфизмов — *определимые тотальные* (всюду определенные) *функции* между этими типами. Идея построения таких *синтаксических категорий* (принадлежащая А. Жуаялю) была использована Рейесом [1] и другими.

4.1. Определение. Категория $\mathbb{C}(T)$ сортов и определимых тотальных функций в T имеет в качестве объектов сорта языка $\mathrm{L}(T)$, а в качестве морфизмов из A в B — классы эквивалентности определимых отношений F из A в B таких, что

$$T \vdash \forall x{:}A.\ \mathbf{E}F'(x),$$

где F и G эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$T \vdash \forall x{:}A\,(F'(x) \equiv G'(x)).$$

Композиция $F \circ G$ задана (когда она определена) термом

$$\lambda x F'(G'(x)).$$

Легко проверить, что $\mathbb{C}(T)$ — категория. Мы предоставляем это читателю. Приводимая ниже конструкция дает в общем случае более интересную категорию.

4.2. Определение. Категория $\mathbb{L}(T)$ определимых типов и определимых тотальных функций в T имеет в качестве объектов определимые типы языка $\mathrm{L}(T)$, а в качестве морфизмов из A в B классы эквивалентности определимых отношений F из A в B таких, что

$$T \vdash \forall x \in A.\ F'(x) \in B,$$

где F и G эквивалентны, если

$$T \vdash \forall x \in A.\ F'(x) \equiv G'(x).$$

Композиция морфизмов F и G определяется так же, как в 4.1.

Снова легко видеть, что мы имеем категорию. Приводимые ниже леммы исследуют ее структуру. Их доказательства — это просто синтаксические варианты доказательства того факта, что классическая категория множеств Sets имеет соответствующую структуру. Мы даем эскизы необходимых конструкций, оставляя детали читателю.

4.3. Лемма. $\mathbb{L}(T)$ *имеет конечные произведения.*

Доказательство. $\{z{:}[\ ]\,|\,z(\ )\}$ действует как терминальный объект, ибо

$$\vdash \mathbf{E}!y.\ y \in \{z{:}[\ ]\,|\,z(\ )\}.$$

Если $\tau{:}A$ и $\sigma{:}B$, то обозначим через $\langle \tau, \sigma \rangle$ терм

$$\mathbf{I}z{:}[A, B].\ \forall x \forall y\,(z(x, y) \leftrightarrow x = \tau \wedge y = \sigma).$$

Произведение $A \times B$ задано термом

$$\{z{:}[A, B] \mid \exists x \in A \exists y \in B.\ z = \langle x, y \rangle\},$$

а проекция, скажем, из $A \times B$ в A задана термом

$$\lambda z \mathbf{I} x \exists y.\ z = \langle x, y \rangle. \ \square$$

В дальнейшем мы будем писать $\lambda(x, y)\tau$ вместо

$$\lambda z \mathbf{I} w \exists x \exists y\,(z = \langle x, y \rangle \wedge \tau = w).$$

4.4. Лемма. $\mathbb{E}(T)$ *имеет конечные пределы* (*финитно полна*).

Доказательство. Пусть $F, G{:}\ A \to B$ в $\mathbb{E}(T)$. Уравнитель морфизмов F и G имеет область (начало)

$$\{x{:}A \mid x \in A \wedge F'(x) = G'(x)\}$$

и представлен термом $\lambda x.x$. $\square$

4.5. Лемма. $\mathbb{E}(T)$ *декартово замкнута.*

Доказательство. Экспонента B^A задана термом

$$\{z{:}[A, B] \mid \forall x \in A.\ \mathbf{E}!y \in B.\ z(x, y) \wedge \forall x \forall y\,(z(x, y) \to x \in A \wedge y \in B)\}$$

с оценочным морфизмом

$$\lambda(x, z)\,\mathrm{I}y.\ z(x, y).$$

Для $F\colon A\times X\to B$ морфизм $\hat{F}\colon X\to B^A$ задан термом

$$\lambda w\mathrm{I}z\colon [A, B].\ \forall x\forall y\,(z(x, y)\leftrightarrow y = F'(\langle x, w\rangle)).\ \square$$

4.6. Лемма. *Морфизм $F\colon A\to B$ в $\mathbb{E}(T)$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда*

$$T\vdash \forall x\in A\forall y\in A\,(F'(x) = F'(y)\to x = y).$$

Доказательство. Пусть F — мономорфизм. У нас есть два морфизма

$$G = \lambda(x, y).\ x \quad \text{и} \quad H = \lambda(x, y).\ y$$

(проекции) из

$$E = \{z\colon [A, A]\mid \exists x\in A\exists y\in A\,(z = \langle x, y\rangle \wedge F'(x) = F'(y))\}$$

в A. Легко видеть, что $F\circ G = F\circ H$; следовательно, $G = H$, так как F — мономорфизм. Это значит, что

$$T\vdash \forall z\in E\,(G'(z) = H'(z)),$$

откуда

$$T\vdash \forall x\in A\forall y\in A\,(F'(x) = F'(y)\to x = y).$$

Доказательство в противоположном направлении еще легче. $\square$

4.7. Лемма. *Коммутативный квадрат*

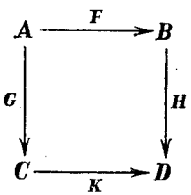


Диаграмма 5.

в $\mathbb{E}(T)$ является универсальным тогда и только тогда, когда

$$T\vdash \forall x\in B\forall y\in C\,(H'(x) = K'(y)\to \mathrm{E}!z\in A\,(F'(z) = x\wedge G'(z) = y)).$$

Доказательство. В одном направлении доказательство очевидно: из рассматриваемой формулы мы можем вывести

свойство универсальности. Пусть теперь K и H удовлетворяют условию. Рассмотрим диаграмму

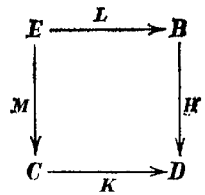


Диаграмма 6.

где L и M — «проекции» из объекта

$$E = \{z\colon [B, C]\mid \exists x\in B\exists y\in C\,(z = \langle x, y\rangle \wedge H'(x) = K'(y))\}.$$

Это — универсальный квадрат (в силу легкой половины леммы). Нужный результат следует теперь из единственности универсального квадрата с точностью до изоморфизма. $\square$

§ 5. Топосы

Здесь мы вводим элементарные топосы и даем несколько примеров. В частности, мы показываем, что категория $\mathbb{E}(T)$ для любой теории T является топосом. Мы увидим в § 7, что любой топос имеет такой вид.

5.1. Определение. *Топос* — это декартово замкнутая категория с классификатором подобъектов.

Чтобы понять это, нам нужно следующее

5.2. Определение. *Классификатор подобъектов* — это морфизм *истина*: $1\to\Omega$ (это выделяет конец морфизма и важный «элемент») такой, что существуют универсальные квадраты вдоль истины и для любого мономорфизма $m\colon A'\rightarrowtail A$ имеется единственный морфизм $\mathrm{cl}(m)$ (*классификатор* морфизма m), превращающий следующий квадрат в универсальный:

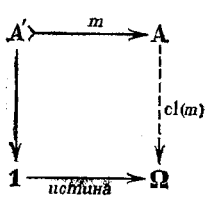


Диаграмма 7.

Ω следует мыслить как тип «истинностных значений» Из определения сразу следует, что в топосе множество $\mathscr{P}(A)$ подобъектов объекта A находится в одно-однозначном соответствии с множеством $\mathrm{Hom}(A, \Omega)$ морфизмов из A в Ω. Чтобы задать функцию, значениями которой являются истинностные значения, достаточно задать подобъект, на котором она принимает значение «истина». Нам часто нужен будет морфизм истина$_A$: $A \to \Omega$, который задан композицией морфизма истина: $\mathbf{1} \to \Omega$ с (единственным) морфизмом из A в $\mathbf{1}$. Морфизм $f: A \to \Omega$ имеет составляющую «истина» тогда и только тогда, когда $f =$ истина$_A$. Классификатор подобъектов, если он существует, единствен с точностью до единственного изоморфизма.

5.3. Теорема. *Категория* $\mathbb{F}(\boldsymbol{T})$ *— топос.*

Доказательство. Возьмем в качестве Ω объект

$$\{x: [\ ] \mid \top\},$$

а морфизм «истина» зададим термом

$$\lambda x \mathbf{1} y: [\ ]\, y(\ ).$$

Для мономорфизма $\boldsymbol{M}: \boldsymbol{A}' \rightarrowtail \boldsymbol{A}$ берем

$$\lambda x \mathbf{1} y: [\ ]\, (y(\ ) \leftrightarrow \exists z \in \boldsymbol{A}'.\ x = \boldsymbol{M}'(z)).$$

Используя лемму характеризации 4.7, легко усмотреть, что этот морфизм дает универсальный квадрат и однозначно определяется этим свойством. Так как мы уже знаем, что $\mathbb{F}(\boldsymbol{T})$ декартово замкнута и имеет конечные пределы, доказательство закончено. □

Разумеется, можно использовать аналогичную синтаксическую конструкцию для получения топоса из классической теории множеств.

Пример. Пусть L язык первого порядка для теории множеств, $\boldsymbol{T}$ теория в языке L, содержащая классическую теорию множеств Цермело. Категория определимых множеств и функций теории $\boldsymbol{T}$ является топосом. Она имеет в качестве объектов формулы $\varphi(x)$ языка L (мы используем скобки для перечисления без повторений всех свободных переменных формулы) такие, что

$$\boldsymbol{T} \vdash \exists y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y).$$

В качестве морфизмов из $\varphi(x)$ в $\psi(y)$ мы берем классы эквивалентности (относительно $\boldsymbol{T}$-доказуемой эквивалентности) формул $\theta(x, y)$ таких, что

$$\boldsymbol{T} \vdash \forall x \forall y (\theta(x, y) \to \varphi(x) \wedge \psi(y)),$$
$$\boldsymbol{T} \vdash \forall x (\varphi(x) \to \exists z \forall y (\theta(x, y) \leftrightarrow y = z)).$$

Мы предоставляем читателю определить композицию. В этом примере алгебра $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \Omega)$ определимых элементов объекта Ω — это просто алгебра Линденбаума для $\boldsymbol{T}$.

Перед тем как перейти к построению теории топосов, мы введем еще несколько конкретных примеров.

5.4. Определение. Пусть Ω — полная гейтинговская алгебра. Ω-множество $\boldsymbol{A}$ — это множество A, оснащенное «симметричным, транзитивным Ω-значным отношением», т. е. отображением

$$e: A \times A \to \Omega,$$

удовлетворяющим условиям

$$e(a, b) = e(b, a), \qquad e(a, b) \wedge e(b, c) \leqslant e(a, c)$$

для $a, b, c \in A$.

Ω-множество $\boldsymbol{A} = (A, e)$ следует мыслить себе как гейтингозначное множество с частичными элементами. Степень равенства двух элементов измеряется функцией e, степень существования элемента a задана посредством $e(a, a)$.

Ω-множества можно использовать, чтобы задать семантику для нашей логики (см. Фурман и Скотт [1]). В действительности эта логика была аксиоматизирована в расчете именно на эту модель.

5.5. Определение. *Морфизм* Ω*-множества* (A, e) на Ω-множество (B, f) — это экстенсиональное, тотальное, однозначное Ω-отношение, т. е. отображение $g: A \times B \to \Omega$, удовлетворяющее условиям:

$$e(a, a') \wedge f(b, b') \wedge g(a, b) \leqslant g(a', b'),$$
$$e(a, a) = \bigvee_{b \in B} g(a, b),$$
$$g(a, b) \wedge g(a, b') \leqslant f(b, b'),$$

где $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$.

Пример. *Категория* Ω*-множеств* и их морфизмов образует топос, где *композиция* морфизмов $g: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ и $h: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ задана равенством

$$(h \circ g)(a, c) = \bigvee_{b \in B} (g(a, b) \wedge h(b, c)).$$

В категории Ω-множеств мы имеем $\Omega = (\Omega, \leftrightarrow)$, где $\leftrightarrow$ — импликация в обе стороны. В случае, когда Ω — гейтинговская алгебра $\mathcal{O}(X)$ открытых множеств топологического пространства X, категория Ω-множеств эквивалентна категории $\mathrm{Top}(X)$ пучков над X со значениями в множествах. Ω-множества были независимо описаны Хиггсом [1], который (наряду с

другими результатами) дает доказательство этой эквивалентности.

Примеры. (i) Категория конечных множеств и произвольных функций между ними образует топос.

(ii) Пусть $\mathfrak{A} = (A, \varepsilon)$ — модель теории множеств Цермело. Топосом является категория *множеств и функций* модели $\mathfrak{A}$, объектами которой являются элементы A, а морфизмами из a в b — те f из A, для которых $\mathfrak{A} \models (f$ — функция из a в $b)$.

(iii) Пусть G — группа. Категория *G-множеств* имеет в качестве объектов множества, оснащенные G-действием, а в качестве морфизмов — функции, сохраняющие это действие. Это топос.

В последних трех примерах Ω — это множество {истина, ложь} (с тривиальным действием в случае G-множеств). Первые два показывают *отсутствие* в определении топоса аксиом, соответствующих теоретико-множественным аксиомам *бесконечности* и *замены*. Мы обсудим эти аксиомы в § 8.

Пусть G — циклическая группа порядка 2. Рассмотрим G-множества (a, e) и (b, f), где a — одноэлементное множество, e — тривиальное действие, b — двухэлементное множество и f — нетривиальное действие. Мы считаем, что (b, f) имеет два элемента (в том смысле, что выполнена формула $\exists x \exists y \neg x = y$), которые перестановка делает неразличимыми, препятствуя «определимости» какой бы то ни было функции из a в b. Нет никаких морфизмов из (a, e) в (b, f). Таким образом, мы применяем синтаксическое понятие определимости к категории G-множеств, которая априори была семантической сущностью.

§ 6. Логические конструкты в топосах

Здесь мы разрабатываем нужную нам часть теории топосов. Эта теория создана Ловером и Тьерне [1]. Построение напоминает построение алгебраической логики. Декартово замкнутая структура дает нам определенные «конечные типы» и придает единство тому факту, что определимые отображения замкнуты относительно композиции, λ-абстракции и спаривания. Связь между множеством $\mathscr{P}(A)$ подобъектов объекта A и множеством $\mathrm{Hom}(A, \Omega)$ обеспечивает плодотворное взаимодействие между *алгебраическими свойствами* категории и логическими свойствами объекта Ω.

6.1. Определение. Морфизм *равенства* $=_A$: $A \times A \to \Omega$ классифицирует *диагональ* $\Delta_A = \langle A, A\rangle$: $A \to A \times A$.

6.2. Лемма. *Топосы финитно полны.*

Доказательство. Достаточно показать, что у нас есть уравнители. Если даны f, g: $A \to B$, то легко видеть, что подобъект объекта A, классифицируемый морфизмом $=_B \circ \langle f, g\rangle$, является их уравнителем.

6.3. Определение. Мы даем определения «истинностных таблиц»:

$\wedge$: $\Omega \times \Omega \to \Omega$ классифицирует ⟨истина, истина⟩: $1 \to \Omega \times \Omega$

$\leftrightarrow \Omega \times \Omega \to \Omega$ классифицирует $\langle \Omega, \Omega\rangle$: $\Omega \to \Omega \times \Omega$

и распространяем эти операции на каждое частично упорядоченное множество $\mathscr{P}(A)$ подобъектов объекта A. Отождествляя подобъект с соответствующим морфизмом $A \to \Omega$, полагаем

$$a \wedge b = \wedge \circ \langle a, b\rangle,$$

$$a \leftrightarrow b = \leftrightarrow \circ \langle a, b\rangle$$

и

$$a \to b = (a \wedge b) \leftrightarrow a.$$

В топосе мы можем естественным образом представлять частично упорядоченное множество $\mathscr{P}(A)$ подобъектов в виде семейства множеств. Это позволит нам лучше представить себе операции, которые мы только что определили.

6.4. Определение. Каждому подобъекту a объекта A мы поставим в соответствие множество $[\![a]\!]$ морфизмов с концом A, имеющих составляющую a. Эквивалентным образом, отождествляя a с соответствующим морфизмом a: $A \to \Omega$, мы пишем

$$[\![a]\!] = \{x\colon X \to A \mid a \circ x = \text{истина}_X\}.$$

6.5. Лемма. (1) $a \leqslant b$ *тогда и только тогда, когда* $[\![a]\!] \subseteq [\![b]\!]$;

(2) $x \in [\![a \wedge b]\!]$ *тогда и только тогда, когда* $x \in [\![a]\!]$ *и* $x \in [\![b]\!]$;

(3) $c \leqslant a \mathbin{\underline{\wedge}} b$ *тогда и только тогда, когда* $c \leqslant a$ *и* $c \leqslant b$;

(4) $x \in [\![a \leftrightarrow b]\!]$ *тогда и только тогда, когда для всех* y $x \circ y \in [\![a]\!]$ *эквивалентно* $x \circ y \in [\![b]\!]$;

(5) $x \in [\![a \to b]\!]$ *тогда и только тогда, когда для всех* y *из* $x \circ y \in [\![a]\!]$ *следует* $x \circ y \in [\![b]\!]$;

(6) $c \leqslant a \to b$ *тогда и только тогда, когда* $c \mathbin{\underline{\wedge}} a \leqslant b$.

Доказательство. Эти соотношения усматриваются совершенно непосредственно. Для случая $\leftrightarrow$ мы замечаем, что $x \in [\![a \leftrightarrow b]\!]$ тогда и только тогда, когда $\langle a, b\rangle \circ x$ имеет составляющую $\langle \Omega, \Omega\rangle$,

тогда и только тогда, когда $a \circ x = b \circ x$,

тогда и только тогда, когда $[\![a \circ x]\!] = [\![b \circ x]\!]$,

но так как $y \in [\![a \circ x]\!]$ тогда и только тогда, когда $x \circ y \in [\![a]\!]$, мы достигли цели. □

При доказательстве того, что в топосах есть уравнители, мы построили некоторый подобъект объекта A, используя «внутреннюю логику» для описания элементов, которые должны принадлежать этому подобъекту. Мы снова используем эту идею.

6.6. Определение. Для данного $a \in \mathscr{P}(A \times B)$ мы имеем морфизм $\widehat{a}\colon B \to \Omega^A$. Мы имеем также $\hat{t}\colon B \to \Omega^A$ — транспозицию морфизма $t\colon A \times B \to 1 \xrightarrow{\text{истина}} \Omega$. Мы определяем $\Pi A(a)$ как подобъект объекта B, классифицируемый морфизмом

$$= _{\Omega^A} \circ \langle \widehat{a}, \hat{t} \rangle.$$

Здесь мы представляем себе, что $\hat{a}$ переводит каждый x из B в множество тех y из A, для которых $\langle y, x \rangle$ принадлежит a, а $\hat{t}$ переводит каждый x из B в A. Тогда $\Pi A(a)$ следует представлять себе как множество таких x из B, что для всех y из A пара $\langle y, x \rangle$ находится в a. В данный момент можно уточнить такие представления только тогда, когда говорим о топосах, имеющих вид $\mathbb{E}(T)$. Они, однако, бесценны для интуиции.

6.7. Лемма. *$x \in [\![\Pi A(a)]\!]$ тогда и только тогда, когда $A \times x \in [\![a]\!]$.*

Доказательство. $x \in [\![\Pi A(a)]\!]$ тогда и только тогда, когда $\hat{a} \circ x = \hat{t} \circ x$, тогда и только тогда, когда $a \circ A \times x = t \circ A \times x$, тогда и только тогда, когда $A \times x \in [\![a]\!]$. □

Так как морфизмы в топосах соответствуют *тотальным* отображениям, они не дают нам непосредственной информации о *частичных* элементах. Чтобы истолковать утверждения о частичных элементах топоса, мы должны использовать структуру высшего порядка, чтобы представить каждый объект A в виде подобъекта некоторого $\tilde{A}$, который мыслится как область потенциальных элементов объекта A. В топосе $\mathbb{E}(T)$ мы можем построить такую область, взяв в качестве $\tilde{A}$ терм

$$\{x\colon [A] \mid \forall y\colon A \forall z\colon A((x(y) \wedge x(z)) \to (y = z \wedge y \in \boldsymbol{A}))\},$$

причем вложение объекта $\boldsymbol{A}$ задано термом $\lambda x\{z\colon A \mid x = z\}$. Это представление обладает тем важным свойством, что предикаты на $\boldsymbol{A}$ находятся в одно-однозначном соответствии с подобластями объекта $\tilde{\boldsymbol{A}}$, так как $\vdash x \in y \leftrightarrow \{z\colon A \mid z = x\} = \{z\colon A \mid z = y\}$. Оставшаяся часть этого параграфа посвящена обобщению этой конструкции на произвольные топосы и исследованию ее категориальных свойств.

6.8. Определение. Мы обозначаем через $\{\cdot\}_B$ морфизм $=^{\wedge}_B\colon B \to \Omega^B$ и называем его *одноэлементным морфизмом*. Пусть теперь $\xi\colon B \times \Omega^B \to \Omega$ классифицирует морфизм $\langle B, \{\cdot\}\rangle\colon B \to B \times \Omega^B$, и возьмем уравнитель e в диаграмме

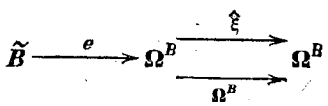


Диаграмма 8.

Так как $B \times (\mathrm{ev} \circ \{\cdot\} \circ f) = = _B \circ (B \times f)$ классифицирует $\langle f, X \rangle\colon X \to B \times X$, то мы видим, что f можно восстановить по $\{\cdot\} \circ f$. Таким образом, $\{\cdot\}$ — мономорфизм. Кроме того, $=_B$ и $\xi \circ (B \times \{\cdot\})$ равны, так как оба они классифицируют диагональ. Таким образом, $\{\cdot\} = \hat{\xi} \circ \{\cdot\}$, и мы имеем разложение

$$\{\cdot\} = e \circ \eta,$$

где η — мономорфизм, ибо таков $\{\cdot\}$. Мы назовем $\eta\colon B \rightarrowtail \tilde{B}$ *классификатором частичных морфизмов* для B (см. 6.12).

6.9. Лемма. *Подобъект $e\colon \tilde{B} \to \Omega^B$ — ретракт (т. е. имеется морфизм $r\colon \Omega^B \to \tilde{B}$ такой, что $r \circ e = B$).*

Доказательство. Так как $\hat{\xi} \circ \{\cdot\} = \{\cdot\}$, то имеем универсальный квадрат

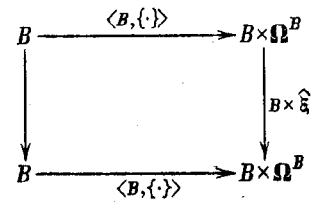


Диаграмма 9.

Таким образом, $\xi \circ B \times \hat{\xi} = \xi$ (они классифицируют один и тот же подобъект), следовательно, $\hat{\xi} \circ \hat{\xi} = \hat{\xi}$, и мы имеем разложение

$$\hat{\xi} = e \circ r.$$

Теперь $e \circ \tilde{B} = e = \hat{\xi} \circ e = e \circ r \circ e$ и $\tilde{B} = r \circ e$, так e — мономорфизм. □

6.10. Лемма. *Проекция $\pi\colon \tilde{B} \times X \to X$ разделена (т. е. имеется морфизм $s\colon X \to \tilde{B} \times X$ такой, что $\pi \circ s = X$).*

Доказательство. Достаточно найти морфизм из X в $\tilde{B}$ и спарить его с единицей на X. Пусть $t = \text{истина}_{B \times X}$, и положим $s = \langle r \circ \hat{t}, X \rangle$. □

Эта лемма выражает категориальным образом тот факт, что $\tilde{B}$ обитаемо.

6.11. Определение. *Частичный морфизм из A в B* — это пара $(f, d)\colon A \to B$, где $d\colon A' \rightarrowtail A$ — подобъект объекта A и $f\colon A' \to B$.

6.12. Теорема. *Для данного частичного морфизма* $(f, d)\colon A \rightharpoonup B$ *имеется единственный морфизм* $\tilde{f}\colon A \to B$, *превращающий диаграмму* 10 *в универсальный квадрат. Мы говорим, что* $\tilde{f}$ *классифицирует частичный морфизм* (f, d).

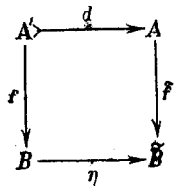


Диаграмма 10.

Доказательство. Для данного частичного морфизма $(f, d)\colon A \rightharpoonup B$ мы имеем подобъект $\langle f, d\rangle\colon A' \to B \times A$, называемый графиком морфизма (f, d). Его классифицирует некоторый морфизм $f^*\colon B \times A \to \Omega$. Мы покажем, что $\hat{f}^*$ представим в виде $e \circ \tilde{f}\colon A \to \Omega^B$ и что $\tilde{f}$ обладает желаемыми свойствами.

Если $\{\cdot\} \circ h = \hat{f}^* \circ g$, то $=_B \circ B \times h = f^* \circ B \times g$, так что $=_B \circ \langle h, h\rangle = f^* \circ \langle h, g\rangle$. Но $=_B \circ \langle h, h\rangle$ имеет составляющую «истина», так что $\langle h, g\rangle$ имеет составляющую $\langle f, d\rangle$. Так как $\langle f, d\rangle$ — мономорфизм, это разложение единственно.

Кроме того, $=_B \circ B \times f = f^* \circ B \times d$, так как оба они классифицируют морфизм (f, A'). Мы показали, что квадрат (i) универсальный. Поэтому (ii) тоже универсальный, так как оба

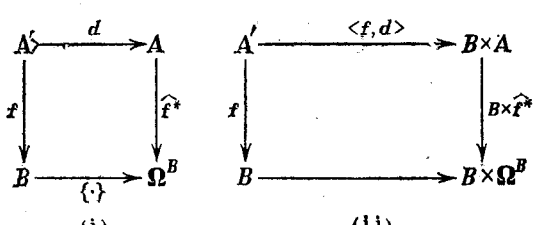


Диаграмма 11.

они классифицируют один и тот же подобъект. Следовательно, $\hat{\xi} \circ \hat{f}^* = \hat{f}^*$, и мы имеем разложение

$$\hat{f}^* = e \circ \tilde{f}.$$

Мы получаем диаграмму

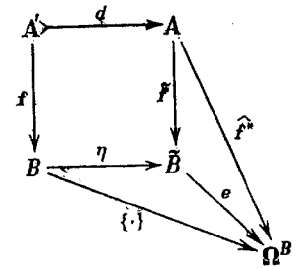


Диаграмма 12.

где внутренний квадрат коммутирует, так как e — мономорфизм, и является универсальным, ибо таков внешний квадрат.

Обратно, если дана такого рода диаграмма, в которой внутренний квадрат универсален, то следующий квадрат

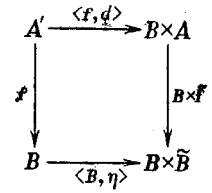


Диаграмма 13.

также универсален. Таким образом, $\hat{\xi} \circ B \times (e \circ \tilde{f}) = f^*$ (так как они классифицируют один и тот же подобъект). Следовательно, $\hat{\xi} \circ e \circ \tilde{f} = f^*$ и $\hat{\xi} \circ f = f^*$. Так как e — мономорфизм, это означает, что $\tilde{f}$ единствен, и мы достигли цели. □

§ 7. Интерпретации в топосах

Мы обобщим наши разговоры об «элементах» объекта, показав, как логику из § 3 можно интерпретировать в произвольном топосе.

7.1. Определение. Пусть $\mathbb{E}$ — топос, L — язык. Интерпретация языка L в $\mathbb{E}$ — это отображение $\mathscr{I}$, которое каждому сорту A ставит в соответствие объект $\bar{A}$, каждой константе c сорта A — морфизм $[c]\colon 1 \to \bar{A}$ и каждой конечной последовательности $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ сортов — некоторый изоморфизм

$$\overline{[A_0, \ldots, A_{n-1}]} \cong \Omega^{\bar{A}_i}.$$

Употребляя обозначения не вполне корректно, мы будем писать A вместо $\tilde{A}$. Мы также предположим для простоты, что $\overline{[A_0, \ldots, A_{n-1}]} = \Omega^{XA_i}$. Строго говоря, «канонические» изоморфизмы, которые заданы в интерпретации, необходимы из-за абстрактной природы отображения типа-степени. Однако после того, как мы это осознали, лучше всего забыть об этом в интересах ясности.

7.2. Определение. Если Δ — конечная последовательность различных переменных языка L, то мы определяем объект $\mathbf{X}\Delta$ топоса $\mathbb{E}$ индукцией по длине Δ:

$$\mathbf{X}(\ ) = 1, \quad \mathbf{X}(\Delta, x) = \mathbf{X}\Delta \times \tilde{A} \qquad (\text{где } \#x = A).$$

Так как свободные переменные должны пробегать потенциальные элементы, следует мыслить $\mathbf{X}\Delta$ как тот объект последовательностей потенциальных элементов, которые должна пробегать последовательность Δ. Если $\operatorname{rang}\Delta \subseteq \operatorname{rang}\Gamma$*), то произведение проекций дает морфизм

$$\pi^{\Gamma}_{\Delta}\colon \mathbf{X}\Gamma \to \mathbf{X}\Delta,$$

который в нашем представлении должен переводить n-ки частичных элементов объекта Γ в соответствующие m-ки частичных элементов объекта Δ. Если $\Delta = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$, где $\#y = [\#x_0, \ldots, \#x_{n-1}]$, то имеется морфизм

$$\mathrm{ev}\colon \mathbf{X}\#x_i \times \Omega^{\mathbf{X}\#x_i} \to \mathbf{\Omega},$$

который классифицирует некоторый подобъект. Образуя композицию этого подобъекта с мономорфизмом

$$\mathbf{X}\eta\colon \mathbf{X}\#x_i \times \Omega^{\mathbf{X}\#x_i} \to \mathbf{X}\Delta,$$

мы получаем подобъект объекта $\mathbf{X}\Delta$, классификатор которого мы обозначим через

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_{\Delta}\colon \mathbf{X}\Delta \to \mathbf{\Omega}.$$

Нам также будут нужны морфизмы

$$\eta_x\colon A \times \mathbf{X}(\Delta - x) \to \mathbf{X}\Delta, \qquad \text{где } \#x = A,$$

получаемые применением морфизма $\eta_A \circ \pi$ к x-координате и подходящих проекций — ко всем остальным. Эти морфизмы служат для того, чтобы ограничить наше рассмотрение теми x, которые существуют и будут использованы в интерпретации операторов, связывающих переменные.

Наконец, пусть $\mathbf{E}_A\colon \tilde{A} \to \mathbf{\Omega}$ — морфизм, классифицирующий η_A.

*) Здесь и в дальнейшем $\operatorname{rang}\Delta$ обозначает множество переменных, принадлежащих последовательности Δ. — *Прим. ред.*

7.3. Определение. Для формул φ, термов τ и не содержащих повторений конечных последовательностей Δ переменных, содержащих свободные переменные из φ и τ, мы определим *оценки*

$$[\![\varphi]\!]_{\Delta}\colon \mathbf{X}\Delta \to \mathbf{\Omega}, \quad [\![\tau]\!]_{\Delta}\colon \mathbf{X}\Delta \to \tilde{A} \quad (\text{где } \tau : A).$$

Формула интерпретируется подобъектом области n-ок потенциальных элементов. Терм интерпретируется тотальным морфизмом, который n-ке потенциальных элементов ставит в соответствие подходящий потенциальный элемент объекта A. Определения вводятся индукцией по построению согласно следующим схемам:

$$[\![c]\!]_{\Delta} = [\![c]\!] \circ \pi^{\Delta}_{(\ )},$$
$$[\![x]\!]_{\Delta} = \pi^{\Delta}_{(x)},$$
$$[\![\tau = \sigma]\!]_{\Delta} = = \tilde{A} \circ \langle [\![\tau]\!]_{\Delta}, [\![\sigma]\!]_{\Delta} \rangle,$$
$$[\![\mathbf{E}\tau]\!]_{\Delta} = \mathbf{E}_A \circ [\![\tau]\!]_{\Delta},$$
$$[\![\tau(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1})]\!]_{\Delta} = \widetilde{\mathrm{ev}}_{\Delta} \circ \langle [\![\sigma_0]\!]_{\Delta}, \ldots, [\![\sigma_{n-1}]\!]_{\Delta}, [\![\tau]\!]_{\Delta} \rangle,$$
$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\Delta} = \wedge \circ \langle [\![\varphi]\!]_{\Delta}, [\![\psi]\!]_{\Delta} \rangle,$$
$$[\![\varphi \to \psi]\!]_{\Delta} = \to \circ \langle [\![\varphi]\!]_{\Delta}, [\![\psi]\!]_{\Delta} \rangle,$$
$$[\![\forall x \varphi]\!]_{\Delta - x} = \Pi A ([\![\varphi]\!]_{\Delta} \circ \eta_x).$$

Чтобы определить $[\![\mathbf{I}x\varphi]\!]_{\Delta - x}$ по данному $[\![\varphi]\!]_{\Delta}$, возьмем $\hat{\varphi}\colon \mathbf{X}(\Delta - x) \to \mathbf{\Omega}^A$ — транспозицию морфизма $[\![\varphi]\!]_{\Delta} \circ \eta_x$. Образуя универсальный квадрат со сторонами $\hat{\varphi}$ и $\{\cdot\}_A$, мы получаем частичное отображение $\mathbf{X}(\Delta - x) \rightharpoonup A$. В качестве $[\![\mathbf{I}x\varphi]\!]_{\Delta - x}$ возьмем классификатор этого частичного отображения.

Чтобы дополнить последние два случая, мы должны показать, как определить $[\![\psi]\!]_{\Delta}$ и $[\![\tau]\!]_{\Delta}$ по $[\![\psi]\!]_{\Delta - x}$ и $[\![\tau]\!]_{\Delta - x}$, где $x \notin \mathrm{FV}(\psi), \mathrm{FV}(\tau)$. Это делается по схемам

$$[\![\varphi]\!]_{\Delta} = [\![\varphi]\!]_{\Gamma} \circ \pi^{\Delta}_{\Gamma}; \qquad [\![\tau]\!]_{\Delta} = [\![\tau]\!]_{\Gamma} \circ \pi^{\Delta}_{\Gamma},$$

где в качестве Γ взята последовательность $\Delta - x$. Во всем этом определении использовалось молчаливое соглашение: $\#x = \#\tau = A$.

7.4. Определение. Интерпретация $\mathcal{I}$ *выполняет* формулу φ (запись $\mathcal{I} \models \varphi$) тогда и только тогда, когда из $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \operatorname{rang}\Delta$ следует, что морфизм $[\![\varphi]\!]_{\Delta}$ имеет составляющую «истина». Если $\boldsymbol{T}$ — теория, то мы скажем, что $\mathcal{I}$ есть *модель* теории $\boldsymbol{T}$ (запись $\mathcal{I} \models \boldsymbol{T}$), если для всех $\varphi \in \boldsymbol{T}$ мы имеем $\mathcal{I} \models \varphi$.

Из леммы 6.10 следует, что проекция π^{Γ}_{Δ} является разделенной, поэтому $[\![\varphi]\!]_{\Gamma}$ имеет составляющую «истина» тогда и только тогда, когда ее имеет $[\![\varphi]\!]_{\Delta}$, где Δ — некоторое перечисление списка $\mathrm{FV}(\varphi)$. Отсюда следует, что $\mathscr{I} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $[\![\varphi]\!]_{\Gamma}$ имеет составляющую «истина» для некоторого Γ такого, что $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \mathrm{rang}\,\Gamma$.

7.5. Определение. Если τ — терм такой, что $\mathrm{FV}(\tau) \subseteq \mathrm{rang}\,\Gamma$ и $\mathrm{rang}(\Delta - x) \subseteq \mathrm{rang}\,\Gamma$, то определим морфизм

$$[\tau/x]^{\Gamma}_{\Delta}\colon \mathbf{X}\Gamma \to \mathbf{X}\Delta$$

следующим образом: это будет $[\![\tau]\!]_{\Gamma}$ по x-координате и подходящие проекции — по остальным. Если $x \notin \mathrm{rang}\,\Delta$, то $[\tau/x]^{\Gamma}_{\Delta}$ — это просто π^{Γ}_{Δ}.

7.6. Лемма

$$[\![\sigma[\tau/x]]\!]_{\Gamma} = [\![\sigma]\!]_{\Delta} \circ [\tau/x]^{\Gamma}_{\Delta}, \qquad [\![\varphi[\tau/x]]\!]_{\Gamma} = [\![\varphi]\!]_{\Delta} \circ [\tau/x]^{\Gamma}_{\Delta}.$$

Доказательство. Индукция по построению σ и φ. □

7.7. Лемма. *Обозначая* $[\![[\![\varphi]\!]_{\Delta}]\!]$ *через* $[\![\varphi]\!]_{\Delta}$, *имеем*:

$$[\![\varphi[\tau/x]]\!]_{\Gamma} = \{f \mid [\![\tau/x]^{\Gamma}_{\Delta} \circ f \in [\![\varphi]\!]_A\},$$

$$[\![\mathbf{E}\tau]\!]_{\Delta} = \{f \mid [\![\tau]\!]_{\Delta} \circ f \textit{ имеет составляющую } \eta\},$$

$$[\![\tau \equiv \sigma]\!]_{\Delta} = \{f \mid [\![\tau]\!]_{\Delta} \circ f = [\![\sigma]\!]_{\Delta} \circ f\},$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\Delta} = [\![\varphi]\!]_{\Delta} \cap [\![\psi]\!]_{\Delta},$$

$$[\![\varphi \to \psi]\!]_{\Delta} = \{f \mid \textit{для всех } g\,(f \circ g \in [\![\varphi]\!]_{\Delta} \to f \circ g \in [\![\psi]\!]_{\Delta})\},$$

$$[\![\forall x \varphi]\!]_{\Delta - x} = \{f \mid \eta_A \times f \in [\![\varphi]\!]_{\Delta}\}.$$

Доказательство. Первое из этих равенств следует из предыдущей леммы, остальные — из леммы 6.5 и определения оценки.

7.8. Теорема корректности (для интерпретаций в топосах). *Если* φ *— аксиома, то* $\mathscr{I} \models \varphi$; *более того, если* $\mathscr{I}$ *выполняет посылки некоторого правила вывода, то она выполняет и его заключение.*

Доказательство. Пропозициональные аксиомы и $(\equiv)$ легко проверяются с помощью предыдущей леммы; то же верно для правила подстановки и модуса поненс. Теперь мы проверим отдельно каждую из остальных аксиом и правил введения для кванторов.

Аксиома (**E**). Для $f\colon Z \to \tilde{A} \times \tilde{A}$ покажем, что из

$$f \in [\![\forall z\,(z \equiv x \leftrightarrow z \equiv y)]\!]_{(x,\,y)}$$

следует, что $\pi_1 \circ f$ и $\pi_2 \circ f$ классифицируют один и тот же частичный морфизм. Ввиду единственности классификатора частичных морфизмов это показывает, что они равны, и дело сделано.

Пусть f удовлетворяет сформулированному выше условию, а g таков, что мы имеем разложение

$$\pi_2 \circ f \circ g = \eta_A \circ h.$$

Ввиду симметрии достаточно показать, что

$$\pi_1 \circ f \circ g = \eta_A \circ h.$$

Теперь

$$\langle \pi_2 \circ f \circ g,\ f \circ g\rangle = (\eta_A \times f) \circ \langle h,\ g\rangle \in [\![z \equiv x \leftrightarrow z \equiv y]\!]_{(z,\,x,\,y)}.$$

Но

$$\langle \pi_2 \circ f \circ g,\ f \circ g\rangle \in [\![z \equiv y]\!]_{(z,\,x,\,y)}.$$

Следовательно,

$$\langle \pi_2 \circ f \circ g,\ f \circ g\rangle \in [\![z \equiv x]\!]_{(z,\,x,\,y)},$$

т. е.

$$\pi_2 \circ f \circ g = \pi_1 \circ f \circ g.$$

Аксиома $(\forall)$ *и правило* $(\forall^+)$. Мы рассмотрим аксиому и правило одновременно, показав, что если $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$, то $\mathbf{E}x \wedge \forall\!\!\!\wedge\, \varphi \to \psi$ выполнена тогда и только тогда, когда выполнена $\varphi \to \forall x A \psi$. Имеем

$$[\![\varphi]\!]_{\Delta - x} \leqslant [\![\forall x \psi]\!]_{\Delta - x} = \Pi A\,([\![\psi]\!] \circ \eta_x)$$

тогда и только тогда, когда

$$[\![\varphi]\!]_{\Delta} \circ \eta_x \leqslant [\![\psi]\!]_{\Delta} \circ \eta_x,$$

тогда и только тогда, когда

$$[\![\varphi \wedge \mathbf{E}x]\!] \leqslant [\![\psi]\!]_{\Delta}.$$

Так как $\varphi \to \psi$ выполнена тогда и только тогда, когда верно $[\![\varphi]\!]_{\Delta} \leqslant [\![\psi]\!]_{\Delta}$, то все в порядке.

Аксиома (**I**). Мы должны показать, что для всех $f\colon X \to \mathbf{X}\Delta$ мы имеем

$$\eta_A \times f \in [\![y \equiv \mathbf{I}x\varphi \leftrightarrow \forall x\,(\varphi \leftrightarrow x \equiv y)]\!]_{y,\,\Delta}.$$

Из определения оценки $[\![\mathbf{I}x\varphi]\!]$ мы видим, что для $h\colon Y \to A \times \mathbf{X}\Delta$

$$\eta_A \circ \pi \circ h = [\![\mathbf{I}x\varphi]\!] \circ \eta_A \times \mathbf{X}\Delta \circ h$$

будет верно, если

$$=_A \circ \pi_{12} \circ A \times h = [\![\varphi]\!] \circ \eta_A \times \mathbf{X}\Delta \circ A \times h.$$

Таким образом, для всех $g\colon Y \to A \times X$ имеем

$$\eta_A \times f \circ g \in [\![y \equiv \mathbf{I}x\varphi]\!]_{y,\Delta}$$

тогда и только тогда, когда

$$\eta_A \times f \circ g \in [\![\forall x(\varphi \leftrightarrow x \equiv y)]\!]_{y,\Delta}$$

(так как $\equiv_{\tilde{A}} \circ \eta_A \times \eta_A = \equiv_A$).

Аксиома (Comp). Достаточно показать, что $[\![\mathbf{I}y\forall\bar{x}(\varphi \leftrightarrow y(\bar{x}))]\!]$ имеет составляющую η. Мы покажем, что

$$[\![\mathbf{I}y\forall\bar{x}(\varphi \leftrightarrow y(\bar{x}))]\!] = \eta \circ \hat{\varphi},$$

где $\hat{\varphi}$ — транспозиция морфизма $[\![\varphi]\!]_{\bar{x},\Delta} \circ \mathbf{X}\eta \times \mathbf{X}\Delta$. Для этого достаточно показать, что

$$\equiv_{\Omega}{}^{XA_i} \circ \Omega^{XA_i} \times \hat{\varphi} = [\![\forall x(\varphi \leftrightarrow y(\bar{x}))]\!] \circ \eta_y.$$

Действительно, ввиду $\mathrm{ev} \circ \mathbf{X}\eta \times \eta = \mathrm{ev}$ имеем

$$f \in [\![[\![\forall\bar{x}(\varphi \leftrightarrow y(\bar{x}))]\!]_{y,\Delta} \circ \eta_y]\!]$$

тогда и только тогда, когда

$$[\![\varphi]\!]_{\bar{x},\Delta} \circ \mathbf{X}\eta \times (\pi_2 \circ f) = \mathrm{ev} \circ \mathbf{X}A_i \times (\pi_1 \circ f),$$

тогда и только тогда, когда

$$\hat{\varphi} \circ \pi_2 \circ f = \pi_1 \circ f,$$

тогда и только тогда, когда

$$f \in [\![\equiv_{\Omega}{}^{XA_i} \circ \Omega^{XA_i} \times \hat{\varphi}]\!].$$

Аксиома (Pred). Получается непосредственно из определения $\widetilde{\mathrm{ev}}$.

7.9. Определение. С каждой интерпретацией мы связываем теорию

$$\boldsymbol{T}(\mathcal{J}) = \{\varphi \mid \mathcal{J} \models \varphi\}.$$

Для любой теории $\boldsymbol{T}$ каноническая интерпретация $\mathcal{J}(\boldsymbol{T})$ теории $\boldsymbol{T}$ в $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$ определяется путем следующей интерпретации языка $L(\boldsymbol{T})$ в $\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{T}})$. Каждый сорт A интерпретируется типом $\bar{A} = \{x\colon A \mid x = x\}$. Если c — константа сорта A в $\mathrm{L}(\boldsymbol{T})$, то мы имеем морфизм

$$\lambda z\colon [\ ].\, c\colon \{z\colon [\ ] \mid z(\ ) \wedge \mathbf{E}c\} \to \bar{A},$$

определенный на подобъекте объекта $\mathbf{1}$. Мы берем в качестве

$$[\![c]\!]\colon \mathbf{1} \to \tilde{\bar{A}}$$

его классификатор.

7.10. Теорема. *$\mathcal{J}(\boldsymbol{T}) \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$.*

Доказательство (эскиз). Так как любая формула логически эквивалентна формуле без символа $\mathbf{I}$, и наша интерпретация корректна, достаточно рассматривать φ, не содержащие символа $\mathbf{I}$. Нужный результат следует из того факта, что для таких φ морфизм

$$[\![\varphi]\!]_{\Delta}\colon \mathbf{X}\Delta \to \boldsymbol{\Omega}$$

— это просто

$$\lambda x_0 \ldots x_{n-1}\mathbf{I}y\colon [\ ](y(\ ) \leftrightarrow \varphi(\mathbf{I}zx_0(z), \ldots, \mathbf{I}zx_{n-1}(z))),$$

что устанавливается нужной индукцией по построению φ. □

7.11. Следствие. *Наша аксиоматизация логики частичных элементов полна относительно интерпретаций в топосах.*

Более традиционное доказательство теоремы полноты для нашей логики см. у Фурмана и Скотта [1]. Пусть теперь $\mathcal{J}$ — интерпретация языка L в $\mathbb{E}$. Для определимого типа $\boldsymbol{A}$ мы расширим злоупотребление терминологией, отождествляющее сорт A с объектом, который его интерпретирует, и будем обозначать через $\boldsymbol{A}$ также и подобъект объекта $\tilde{A}$, классифицируемый морфизмом $[\![x \in \boldsymbol{A}]\!]$. Так как $\vdash x \in \boldsymbol{A} \to \mathbf{E}x$, мы имеем разложение морфизма-включения $\gamma_A = \eta_A \circ i_A\colon \boldsymbol{A} \to \tilde{A}$.

7.12. Лемма. *Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — определимые типы и $\boldsymbol{F}$ — определимое отношение из A в B, то*

$$\mathcal{J} \models \forall x \in \boldsymbol{A}.\, \boldsymbol{F}'(x) \in \boldsymbol{B}$$

тогда и только тогда, когда имеется морфизм $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ в $\mathbb{E}$ такой, что коммутирует любая из следующих (эквивалентных) диаграмм:

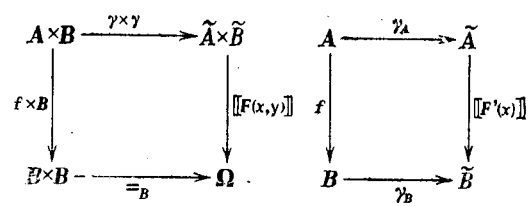


Диаграмма 14.

В этом случае морфизм f однозначно определен отношением $\boldsymbol{F}$. Два таких отношения $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ определяют один и тот же морфизм тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{J} \models \forall x \in \boldsymbol{A}.\, \boldsymbol{F}'(x) = \boldsymbol{G}'(x).$$

Доказательство. $\models \forall x \in A.F'(x) \in B$ тогда и только тогда, когда $[\![F'(x)]\!] \circ \gamma_A$ имеет разложение в виде $\gamma_B \circ f$ (при этом f определен однозначно, так как γ — мономорфизм), тогда и только тогда, когда

$$(F(x, y))\hat{\wedge} \circ \gamma_A = \{\cdot\}_B \circ i_B \circ f$$

(см. определение оценки $[\![\mathbf{I}x\varphi]\!]$ в п. 7.3), тогда и только тогда, когда

$$[\![F(x, y)]\!] \circ \eta_B \times \gamma_A = =_B \circ B \times (i_B \circ f),$$

тогда и только тогда, когда

$$[\![F(x, y)]\!] \circ \gamma_B \times \gamma_A = =_B \circ B \times f.$$

Последняя часть очевидна из того, что

$$\models \forall x \in A \forall y \in B (F(x, y) \leftrightarrow G(x, y)$$

верно тогда и только тогда, когда

$$[\![F(x, y)]\!] \circ \gamma_B \times \gamma_A = [\![G(x, y)]\!] \circ \gamma_B \times \gamma_A. \ \square$$

Пусть $\mathcal{I}$ — интерпретация языка L в $\mathbb{E}$. Если F — определимое отношение из A в B такое, что $\mathcal{I} \models \forall x \in A.\ F'(x) \in B$, то мы будем временно (совсем уж злоупотребляя терминологией) обозначать через F соответствующий морфизм из A в B в топосе $\mathbb{E}$ (следя за тем, чтобы не было недоразумений с подразумеваемым началом и концом морфизма).

7.13. Теорема. (1) *$F \circ G = H$ в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I} \models \forall x \in A (F'(G'(x)) = H'(x))$.*

(2) *A — терминальный объект в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I} \models \forall x \in A \forall y \in A.\ x = y$.*

(3) *$A \xleftarrow{P} C \xrightarrow{Q} B$ есть произведение в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I} \models \forall x \in A \forall y \in B \mathbf{E}\mathbf{I}z \in C (P'(z) = x \wedge Q'(z) = y)$.*

(4) *Диаграмма*

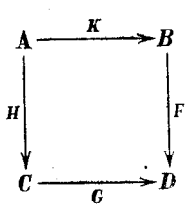


Диаграмма 15.

является универсальным квадратом в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда он коммутирует и

$$\mathcal{I} \models \forall x \in B \forall y \in C (F'(x) = G'(y) \rightarrow \rightarrow \mathbf{E}\mathbf{I}z \in A (K'(z) = x \wedge H'(z) = (y)).$$

(5) EV: *$A \times X \rightarrow B$ является экспонентой в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{I} \models \forall z\colon [A, B] (\forall x \in A \mathbf{E}\mathbf{I}y \in B.\ z(x, y) \rightarrow \mathbf{E}\mathbf{I}w \in X \forall x \in A \forall y \in B (z(x, y) \leftrightarrow \mathbf{EV}\langle x, w\rangle = y)).$$

(6) *T: $1 \rightarrow X$ — классификатор некоторого подобъекта в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{I} \models \forall x\colon [\ \ ] \mathbf{E}\mathbf{I}y \in X (y = T'(*) \leftrightarrow x(\ \ )),$$

где $*$ обозначает терм $\mathbf{I}z : 1.z = z$.

Доказательство получается непосредственно с помощью методов § 4. $\square$

§ 8. Топосы как теории

8.1. Определение. Если $\mathbb{E}$ — топос, то $\mathrm{L}(\mathbb{E})$, *язык* топоса $\mathbb{E}$, имеет в качестве сортов объекты $\mathbb{E}$, а в качестве констант сорта $\tilde{A}$ — пары (c, A), где $c\colon 1 \rightarrow \tilde{A}$. Морфизм типа-степени задан равенством

$$[A_0, \ldots, A_{n-1}] = \Omega^{X A_i}.$$

Каноническая интерпретация $I(\mathbb{E})$ языка $\mathrm{L}(\mathbb{E})$ в $\mathbb{E}$ задана путем интерпретации каждого сорта им самим и соотношения $[\![(c, A)]\!] = c$. Если не возникает недоразумений, мы часто будем писать c вместо (c, A). *Диаграмма* или *теория* топоса $\mathbb{E}$ — это множество $T(\mathbb{E})$ формул языка $\mathrm{L}(\mathbb{E})$, которые выполнены в канонической интерпретации.

8.2. Теорема. *Если $\mathbb{F}$ — топос, то $\mathbb{C}(T(\mathbb{F})) = \mathbb{F}$.*

Доказательство. Объекты категории $\mathbb{C}(T(\mathbb{F}))$ — это сорта языка $\mathrm{L}(\mathbb{F})$, которые в свою очередь являются объектами топоса $\mathbb{F}$. Каждый морфизм $f\colon A \rightarrow B$ в $\mathbb{F}$ порождает константу c сорта $[A, B]$ в $\mathrm{L}(\mathbb{F})$, соответствующую транспозиции морфизма $=_B \circ B \times f$. По лемме 7.12 отношение

$$f = \mathbf{I}z\colon [A, B] \forall x\colon A \forall y\colon B (z(x; y) \leftrightarrow c(x, y))$$

представляет некоторый морфизм в $\mathbb{C}(T(\mathbb{F}))$ и каждый такой морфизм порождается единственным морфизмом в $\mathbb{F}$. То, что композиция в $\mathbb{C}(T(\mathbb{F}))$ соответствует композиции в $\mathbb{F}$, следует непосредственно из теоремы 7.13 (1). $\square$

Мы рассмотрим теперь вопрос о том, почему $\mathbb{C}(\boldsymbol{T})$ в общем случае не является топосом. Это происходит потому, что в нем не хватает объектов.

8.3. Определение. Теория $\boldsymbol{T}$ *дефинициально полна*, если для каждого определимого типа $\boldsymbol{A}$ имеется сорт B и определимое отношение $\boldsymbol{F}$ из B в A такое, что

$$\boldsymbol{T} \models \forall x{:}B\, \mathbf{E}\boldsymbol{F}'(x),$$
$$\boldsymbol{T} \vdash \forall x{:}B \forall y{:}\, B(\boldsymbol{F}'(x) = \boldsymbol{F}'(y) \to x = y),$$
$$\boldsymbol{T} \vdash \forall z{:}A\,(\exists x{:}\, B.\ z = \boldsymbol{F}'(x) \leftrightarrow z \in \boldsymbol{A}).$$

8.4. Лемма. *Если* $\mathbb{F}$ *— топос, то* $\boldsymbol{T}(\mathbb{F})$ *дефинициально полна.*

Доказательство. Рассмотрим каноническую интерпретацию теории $\boldsymbol{T}(\mathbb{F})$ в $\mathbb{F}$. Если $\boldsymbol{A}$ — определимый тип, то морфизм

$$[\![x \in \boldsymbol{A}]\!] \circ \eta\colon A \to \boldsymbol{\Omega}$$

классифицирует некоторый подобъект объекта A, который порождает нужный сорт и определимое отношение. □

Имеется канонический функтор I (переводящий A в $\{x{:}A \mid \mathbf{E}x\}$), который погружает $\mathbb{C}(\boldsymbol{T})$ в $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$ как полную подкатегорию.

8.5. Теорема. *I является эквивалентностью категорий (любой объект в $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$ изоморфен объекту в образе категории $\mathbb{C}(\boldsymbol{T})$) тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{T}$ дефинициально полна.*

Доказательство. Очевидно. □

8.6. Следствие. *Если $\boldsymbol{T}$ дефинициально полна, то $\mathbb{C}(\boldsymbol{T})$ — топос.*

8.7. Определение. Функтор $H\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ между топосами называется *логическим* (*морфизмом* топосов), если он сохраняет конечные пределы, экспоненты и классификаторы подобъектов.

В логических терминах логический функтор можно наглядно представлять как интерпретацию одной теории в другой, стандартную в том смысле, что она интерпретирует тип-степень снова типом-степенью.

Если $H\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ логический, то для любой интерпретации $\mathcal{I}$ языка L в $\mathbb{E}$ морфизм-композиция $H \circ \mathcal{I}$ дает интерпретацию языка L в $\mathbb{F}$. (Необходимые изоморфизмы обеспечиваются единственностью (с точностью до единственного изоморфизма) произведений, экспонент и классификаторов подобъектов.)

8.8. Лемма.

$$[\![\varphi]\!]_{H \circ \mathcal{I}} \cong H\,[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}},$$
$$[\![\tau]\!]_{H \circ \mathcal{I}} \cong H\,[\![\tau]\!]_{\mathcal{I}}.$$

Доказательство. Индукцией по построению φ и τ. □

8.9. Теорема. *Для любой модели $\mathcal{F}$ теории $\boldsymbol{T}$ в топосе $\mathbb{F}$ имеется логический функтор $H\colon \mathbb{E}(\boldsymbol{T}) \to \mathbb{F}$, единственный с точностью до единственного изоморфизма, такой, что $H \circ \mathcal{I}(\boldsymbol{T}) = \mathcal{F}$.*

Доказательство. Во-первых, мы заметим, что единственность с точностью до изоморфизма следует из предшествующей леммы и леммы 7.12. Так как $\mathcal{F}$ — модель теории $\boldsymbol{T}$, лемма 7.12 говорит нам, каким образом поставить в соответствие некоторый морфизм $f = H(\boldsymbol{F})\colon A \to B$ в $\mathbb{F}$ любому морфизму $\boldsymbol{F}\colon A \to B$ в $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$. То, что это отображение является в действительности логическим функтором, следует из теоремы 7.13. □

Мы видим, что топосы соответствуют некоторым дефинициально полным теориям, а логические морфизмы — интерпретациям, которые являются моделями для этих теорий. Любая теория $\boldsymbol{T}$ имеет дефинициально полное консервативное расширение — теорию, поставленную в соответствие топосу $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$. (В действительности это расширение не только консервативно, но и *несущественно* в том смысле, что оно имеет естественную интерпретацию в $\boldsymbol{T}$: его выразительная сила не больше, чем у $\boldsymbol{T}$.)

Как отмечено в конце § 5, аксиомы для топосов не содержат аналогов теоретико-множественных аксиом *бесконечности* и *замены*. Сила аксиомы замены — в возможности заменить неограниченный квантор ограниченным. Так как у нас нет категориального аналога неограниченного квантора, неудивительно отсутствие аксиомы замены в списке аксиом для топоса. Категориальная версия аксиомы бесконечности (принадлежащая Ловеру) задана требованием наличия объекта натуральных чисел (NNO). Мы коротко рассмотрим, какие теории соответствуют топосам с NNO.

8.10. Определение. *Объект натуральных чисел* — это объект $\boldsymbol{N}$, оснащенный морфизмами $\mathbf{1} \xrightarrow{0} \boldsymbol{N} \xrightarrow{s} \boldsymbol{N}$, удовлетворяющими свойству рекурсивности: для любой диаграммы $\mathbf{1} \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$ имеется единственный морфизм $k\colon \boldsymbol{N} \to A$ такой, что $k \circ 0 = a$ и $f \circ k = k \circ s$.

8.11. Теорема (Хетчер [1], Осиус [1], фольклор). Объект $\boldsymbol{N}$ *со структурой* $\mathbf{1} \xrightarrow{0} \boldsymbol{N} \xrightarrow{s} \boldsymbol{N}$ *является* NNO *в топосе* $\mathbb{E}$ *тогда и только тогда, когда следующие формулы (аксиомы Пеано) выполнены в канонической интерпретации языка* $\mathrm{L}(\mathbb{E})$ *в* $\mathbb{E}$:

(P3) $\quad \forall x{:}\, \boldsymbol{N}\, \neg 0 = s'(x),$

(P4) $\quad \forall x{:}\, \boldsymbol{N} \forall y{:}\, \boldsymbol{N}(s'(x) = s'(y) \to x = y),$

(P5) $\quad \forall X{:}\, [\boldsymbol{N}]\,(0 \in X \wedge \forall x \in X.\ s'(x) \in X \to \forall x{:}\, \boldsymbol{N}.\ x \in X).$

Обратное утверждение тоже верно.

8.12. Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{T}$ *— теория в языке с константой* $0 : \boldsymbol{N}$ *и определимым отношением* s *из* $\boldsymbol{N}$ *в* $\boldsymbol{N}$ *такими, что в* $\boldsymbol{T}$ *выводимы формулы* (P3)—(P5) *из теоремы 8.11 и, кроме того,*

(P1) $\quad \mathbf{E}0,$

(P2) $\quad \forall x\colon \boldsymbol{N}.\ \mathbf{E}s'x.$

Тогда в $\mathbb{E}(\mathbf{T})$ *мы имеем объект натуральных чисел*

$$\mathbf{1} \xrightarrow{0} \boldsymbol{N} \xrightarrow{s} \boldsymbol{N}.$$

Рассмотрим теперь вкратце два приложения.

8.13. Теорема (Миккельсен, Паре [1]). *Топосы обладают конечными копределами.*

Доказательство. Достаточно рассматривать топосы вида $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$, так как по теоремам 8.2 и 8.5 любой топос эквивалентен такому. Как и в § 4, мы теперь можем использовать непосредственные логические конструкции копределов. Достаточно иметь инициальный (начальный) объект ($\{x\colon [\ ]\,|\,\bot\}$), дизъюнктные суммы ($\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ можно построить как подтип типа $[[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]]$) и коуравнители (коуравнитель морфизмов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ имеет в качестве конца некоторый подтип типа $[B]$). □

Другие категориальные свойства топосов — свойства точности, существование правого сопряженного к стороне универсального квадрата и т. д. — легко получаются с использованием этого метода. В качестве второго приложения мы рассмотрим построение свободных топосов. (По существу наш метод тот же, что у Фольгера [1].)

8.14. Определение. Пусть G — ориентированный граф*). Под *условием* C на граф G мы понимаем утверждение в расширении языка теории категорий, содержащем имена для узлов и путей в G. Утверждения об *истинности* такого условия для некоторого морфизма из G в (граф, который задает категория) $\mathbb{C}$ понимаются очевидным образом.

8.15. Определение. *Язык* $\mathrm{L}(G)$ *направленного графа* G строится следующим образом. Множество сортов для $\mathrm{L}(G)$ — это наименьшее множество выражений, содержащее узлы G и замкнутое относительно синтаксической операции:

$$(A_0, \ldots, A_{n-1}) \mapsto [A_0, \ldots, A_{n-1}]$$

(здесь мы рассматриваем узлы как формальные символы, а квадратные скобки и запятые — как формальные знаки препинания). Для каждого ребра $f\colon A\to B$ из G мы имеем в $\mathrm{L}(G)$ константу f сорта $[A, B]$.

*) То есть пара (V, A), где V — непустое множество (узлов), A — семейство упорядоченных пар элементов из V, называемых ребрами. — *Прим. перев.*

8.16. Лемма. *Для* $f\colon A\to B$ *в* G *назовем* $\boldsymbol{F} = \lambda x \mathbf{1} y\colon B f(x, y)$ *соответствующим отношением в* $\mathrm{L}(G)$. *Любому морфизму* F *из* G *в некоторый топос* $\mathbb{E}$ *соответствует интерпретация* $\mathscr{I}(F)$ *языка* $\mathrm{L}(G)$ *в* $\mathbb{E}$ *такая, что для любого* $f\colon A\to B$ *в* G

$$\models \forall x\colon A\mathbf{E}\boldsymbol{F}'(x).$$

Обратно, любой такой интерпретации соответствует единственный (по существу, т. е. с точностью до изоморфизма) морфизм из G *в* $\mathbb{E}$

8.17. Определение. Говорят, что условие C на граф G *внутренне выразимо*, если имеется формула φ из $\mathrm{L}(G)$ такая, что C истинно для F тогда и только тогда, когда

$$\mathscr{I}(F) \models \varphi.$$

8.18. Теорема. *Если* G *— ориентированный граф и* $\mathscr{C}$ *— множество внутренне выразимых условий на* G, *то имеется топос* $\mathbb{F}$ *и морфизм* $F\colon G\to\mathbb{F}$, *удовлетворяющие (условиям из)* $\mathscr{C}$ *и такие, что для любого топоса* $\mathbb{E}$ *и морфизма* $H\colon G\to\mathbb{E}$, *удовлетворяющих* $\mathscr{C}$, *имеется логический функтор* $K\colon \mathbb{F}\to\mathbb{E}$, *единственный с точностью до изоморфизма и такой, что* $K\circ F = H$.

Доказательство. Искомый топос — это в точности $\mathbb{E}(\boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{T}$ — теория в $\mathrm{L}(G)$, имеющая в качестве аксиом формулы

$$\forall x\colon A\mathbf{E}\boldsymbol{F}'(x) \quad \text{для} \quad f\colon A\to B \text{ из } G$$

и все формулы φ из $\mathrm{L}(G)$, соответствующие условиям $C\in\mathscr{C}$. □

Эта теорема дает много примеров свободных топосов, ибо мы видели, что многие условия внутренне выразимы. Вот короткий список таких условий: быть моно- (эпи-, изо-) морфизмом; быть (ко)произведением; быть (ко)уравнителем; быть инициальным (терминальным) объектом; быть классификатором подобъекта; быть экспонентой; быть (ко)универсальным квадратом.

Мы надеемся, что показали в этой статье (по крайней мере) две вещи: категории не столь таинственны, как это кажется, и топосы не являются таинственными категориями.

Мы показали, что, говоря о некоторых категориях (топосах), мы можем говорить конкретно в терминах элементов. Этот процесс можно распространять на другие категории, подходящим образом погружая их в топосы. Отсутствие «элементов» не более таинственно, чем теория, в которой $\vdash \exists x \varphi(x)$, но нет терма τ такого, что $\vdash \varphi(\tau)$.

Топосы получаются, если мы применяем интуиционистскую логику (с частичными элементами) к базисной интуиции

(конечных) типов-степеней, удовлетворяющих аксиомам свёртывания и экстенсиональности. Похожим образом можно смотреть на другие теоретико-категорные абстракции: например, любая абелева категория может быть представлена как полная подабелева категория категории $\mathrm{Ab}(\mathbb{E})$ абелевых групп некоторого топоса $\mathbb{E}$. Таким образом, на нее можно смотреть как на категорию абелевых групп в некоторой подходящей логике.

В заключение упомянем об одном затруднении. Важные морфизмы топосов — это геометрические морфизмы (Артин, Гротендик и Вердье [1]). Наш подход не объясняет этого факта. Рейес [1] (см. также главу 8 «Теории моделей») показал, что топос Гротендика можно рассматривать как расширение категории Sets, полученное добавлением генерической модели для подходящей (возможно, инфинитарной) теории T первого порядка. Тогда геометрические морфизмы естественным образом возникают из рассмотрения моделей таких теорий (в топосах Гротендика). Однако этот подход зависит от фиксации «базисного топоса» (в этом случае — Sets) и не эксплицирует понятия топоса in abstracto.

ЛИТЕРАТУРА

Артин, Гротендик и Вердье (Artin M., Grothendieck A., Verdier J. L., ed.)
1. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1. — Berlin: Springer, 1972.

Буало (Boileau A.)
1. Types vs topos. — Mimeo. Montreal (Canada): Université de Montreal, 1975.

Грей (Gray J. W.)
1. The meeting of the Midwest Category Seminar. — In: Reports of the Midwest Category Seminar, V/Ed. J. W. Gray. Berlin: Springer, 1971, p. 248—255.

Кост (Coste M.)
1. Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires. — Mimeo. Paris: Seminaire Benabou, 1974.

Ловер (Lawvere F. W.)
1. Quantifiers and sheaves. — In: Actes du Congrès International des Mathématiciens, tome 1, 1970, p. 329—334.
2. Introduction. — In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic/Ed. F. M. Lawvere. Berlin: Springer, 1972, p. 1—12.
3. Introduction. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer, 1975, p. 3—14.

Ловер и Тьерне (Lawvere F. W., Tierney M.)
1. Lectures on elementary topoi. — Midwest Category Seminar, Zürich, 1970. (Резюме у Грея [1].)

Маклейн (MacLane S.)
1. Categories for the Working Mathematician. — Berlin: Springer, 1971.

Осиус (Osius G.)
1. Logical and set theoretical tools in elementary topoi. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. S. Wraith. Berlin: Springer, 1975, p. 297—346.

Паре (Paré R.)
1. Colimits in topoi. — Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 3, p. 556—561.

Рейес (Reyes G.)
1. From sheaves to logic. — In: Studies in Algebraic Logic/Ed. A. Daigneault. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1975, p. 143—204.

Руссо (Rousseau C.)
1. Complex analysis and topoi. — J. Pure and Appl. Algebra, 1977.

Скотт (Scott D. S.)
1. Boolean models and non-standard analysis. — In: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. N. Y.: Holt, Reinhart and Winston, 1969.
2. Identity and existence in intuitionistic logic. — In: Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979, p. 660—696.

Такеути (Takeuti G.)
1. Boolean-valued analysis. — In: Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979, p. 714—731.

Фольгер (Volger H.)
1. Logical categories, semantical categories and topoi. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer, 1975, p. 97—100.

Фурман (Fourman M. P.)
1. Connections between category theory and logic: Ph. D. Thesis. — Oxford, 1974.

Фурман и Скотт (Fourman M. P., Scott D. S.)
1. Sheaves and logics. — In: Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979, p. 392—401.

Хетчер (Hatcher W.)
1. The Foundations of Mathematics. — Philadelphia (Penns.): Saunders, 1968.

Хиггс (Higgs D.)
1. A category approach to Boolean-valued set theory: Preprint. — Waterloo, 1974.

Глава 7

БЕСТИПОВОЕ λ-ИСЧИСЛЕНИЕ*)

Хенк Р. Барендрегт **)

СОДЕРЖАНИЕ

§ 0. Введение

λ-исчисление и его эквивалент без переменных — комбинаторная логика — были введены в рассмотрение около 1930 г. соответственно Чёрчем и Шейнфинкелем и Карри. Намерением основателей этого раздела логики было изучение *правил*, иными словами, изучение старомодного понятия «функции» в смысле *определения*. В противоположность понятию Дирихле (вводимому через *график*, т. е. множество пар, состоящих из аргумента и значения) это более старое понятие упоминало *процесс* перехода от аргумента к значению, кодируемый определением. В общем мы мыслим эти определения как заданные словами на обычном русском языке и применяемые к аргументам, которые также выражены (русскими) словами. Или, более конкретно, мы можем думать о таких определениях как о программах для машин, которые применяются к таким программам, т. е. работают на них. В обоих случаях нам приходится иметь дело с *бестиповой* алгебраической системой, где объекты

*) Часть этой главы была написана, когда автор работал по приглашению в Исследовательском институте математики при Высшем Технологическом институте в Цюрихе.

**) Автор хочет поблагодарить Дану Скотта за его существенные замечания по поводу первого варианта этой главы и Джейн Бридж и Джефа Цукера, указавших несколько ошибок в тексте.

изучения являются одновременно и функциями, и аргументами. В частности, функция может применяться к самой себе. Для обычной концепции функции в математике (в теории множеств Цермело — Френкеля) это невозможно (из-за аксиомы фундированности).

λ-исчисление представляет класс (частичных) функций (λ-определимые функции) на натуральных числах, который оказывается в точности классом частично рекурсивных функций. Эквивалентность функций, вычислимых по Тьюрингу, и общерекурсивных функций была первоначально доказана через λ-исчисление: общерекурсивные функции — это в точности λ-определимые функции, и то же верно для функций, вычислимых по Тьюрингу.

Эквивалентность между λ-определимыми функциями и рекурсивными функциями была одним из аргументов, которые Чёрч использовал для защиты своего тезиса, предлагающего отождествление интуитивного класса эффективно вычислимых функций с классом рекурсивных функций. В действительности можно привести аргументы в пользу так называемого супертезиса Чёрча, который утверждает, что для рассматриваемых функций это отождествление сохраняет интенсиональный характер, т. е. процесс вычисления.

Исторически первая неразрешимая проблема была построена Чёрчем как проблема о термах λ-исчисления (имеют ли они нормальную форму). Первое определение рекурсивных ординалов, принадлежащее Чёрчу и Клини, шло через λ-исчисление. Теорема о неподвижной точке для λ-исчисления вдохновила Клини на теорему рекурсии. Таким образом, λ-исчисление играло центральную роль в первых исследованиях по теории рекурсивных функций.

Чёрч первоначально строил λ-исчисление как часть общей системы функций, которая должна стать основанием математики. Парадокс Клини и Россера показал, что эта система была противоречива. Рассматриваемая теория — это извлеченная из нее непротиворечивая подтеория, см. Чёрч [1]. После этого Чёрч, по-видимому, потерял интерес к использованию λ-исчисления для обеспечения обоснования математики в целом. Карри и Фейс [1], а также Карри, Хиндли и Селдин [1], с другой стороны, развивали различные системы иллативной комбинаторной логики, задуманные как окончательное обоснование. Однако эти системы не были развиты в достаточной степени для того, чтобы служить удовлетворительной базой для математики. См. также Скотт [3] относительно работы в этом направлении.

Из-за бестипового подхода было неясно, как строить модели этой теории. Нам хотелось бы иметь множество X, в которое

можно вложить его пространство функций $X \to X$, но это противоречит теореме Кантора. Эту трудность преодолел Скотт в 1969 г. с помощью построения модели D_∞ путем ограничения множества $X \to X$ *непрерывными* функциями на X (вместе с надлежащей топологией). Непрерывность играет существенную роль также и в графиковой модели $\mathscr{P}\omega$.

Модели Скотта добавили рассматриваемой теории новое измерение — рассмотрения, связанные с пределами. Автор согласен с утверждением Скотта, что это действительно делает теорию *λ-исчислением*, а то, что было сделано раньше, следует называть *λ-алгеброй*. См. § 7, где равенства в D_∞, которые нельзя доказать алгебраически, устанавливаются методами аппроксимации.

Типовые варианты этой теории и их связи с теорией категорий и теорией доказательств намеренно не рассматриваются. Характер типовых теорий совершенно отличен от бестипового варианта, например все типовые термы имеют нормальную форму. См. Трулстра [1] как источник по типовой теории (примитивно) рекурсивных функционалов и Манн [1] о соотношении с теорией категорий и теорией доказательств.

Следует также упомянуть, что имеется теория, родственная λ-исчислению, в которой применение функции к аргументу определено только частично. Это теория равномерно рефлексивных структур Вагнера и Стронга. Эта теория имеет очевидную модель на частично рекурсивных индексах. В действительности она задумана как аксиоматизация некоторых частей теории рекурсии. См. Барендрегт [1], где имеется введение в предмет и литература.

РЕЗЮМЕ

Первый параграф дает введение в теорию и общую теоретико-модельную постановку. Второй параграф дает рассмотрение классического λ-исчисления. Будет доказано, что рекурсивные функции могут быть представлены λ-термами и что различные множества λ-термов неразрешимы. В § 3 строится графиковая модель $\mathscr{P}\omega$. В § 4 рассматривается построение моделей D_∞ по Скотту в виде проективного предела полных решеток. В § 5 вводится λ-теория $\mathscr{H}$. Она имеет *единственное* максимальное непротиворечивое расширение $\mathscr{H}^*$. Шестой параграф ставит каждому терму в соответствие некоторое дерево, полезное для определения образа этого терма в моделях $\mathscr{P}\omega$, D_∞. В § 7 доказано, что $D_\infty \models M = N$ тогда и только тогда, когда $M = N \in \mathscr{H}^*$, тогда и только тогда, когда M и N имеют эквивалентные деревья.

§ 1. На пути к теории

λ-исчисление изучает функции и их аппликативное поведение (т. е. поведение относительно применения к аргументу), а не просто их поведение при композиции, как в теории категорий. Поэтому применение (аппликация) функции к аргументу является исходной операцией λ-исчисления. Функция f, примененная к аргументу a, обозначается через fa.

Шейнфинкель заметил, что не обязательно вводить функции более чем одной переменной. Действительно, для функции, скажем от двух переменных, $f(x, y)$ мы можем рассмотреть g_x с соотношением $g_x(y) = f(x, y)$, а затем f' с соотношением $f'(x) = g_x$. Отсюда $(f'x)y = f(x, y)$. Поэтому в удобной записи $hx_1 \ldots x_n = (\ldots(hx_1)\ldots x_n)$ (группировка влево) приведенный выше пример принимает вид $f'xy = f(x, y)$. Аналогичная конструкция встречается в s-m-n-теореме из теории рекурсии.

1.1. Определение. *Аппликативная система* — это алгебраическая система $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot \rangle$, где $\cdot$ — это бинарная операция (аппликация или применение функции к аргументу) на X.

Множество *термов* $T(\mathfrak{M})$ *над* $\mathfrak{M}$ (использующих переменные $a_0, a_1, \ldots$) определяется индуктивно: $a_i \in T(\mathfrak{M})$; $a \in X \Rightarrow c_a \in T(\mathfrak{M})$; $A, B \in T(\mathfrak{M}) \Rightarrow (AB) \in T(\mathfrak{M})$. c_a — это константа, соответствующая элементу a. Приписывание термов друг к другу обозначает аппликацию.

$A_1A_2 \ldots A_n$ обозначает $(\ldots (A_1A_2) \ldots A_n)$ (группировка влево).

1.2. Определение. *Комбинаторная алгебра* — это аппликативная система $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M}$ нетривиальна (т. е. $\mathrm{Card}(X) > 1$) и для каждого терма A над $\mathfrak{M}$ с переменными из списка $y_1, \ldots, y_m$ мы имеем в $\mathfrak{M}$ следующее.

1.3. $\exists f \forall y_1 \ldots y_n f y_1 \ldots y_n = A$ (*комбинаторная полнота*).

Комбинаторная алгебра $\mathfrak{M}$ *экстенсиональна*, если дополнительно в $\mathfrak{M}$ выполнено

1.4. $\forall x (fx = f'x) \to f = f'$ (*экстенсиональность*).

Комбинаторная полнота выражает представимость всех алгебраических функций элементами. Мотивировка этой аксиомы заключается в том, что для функций, изучаемых как правила, мы наверняка хотели бы, чтобы они были замкнуты относительно явных определений.

Существенно, что в 1.3 терм A чисто алгебраический, а не определяется с использованием логических операций. В противном случае диагонализация сделала бы систему тривиальной. Однако уже комбинаторная полнота — весьма сильное свойство. Например, нет конечных комбинаторных алгебр, а в действительности — и рекурсивных. В противоположность, например, теории полей, имеется $2^{\aleph_0}$ простых комбинаторных алгебр.

В 1.3 комбинаторная полнота выражается экзистенциальной аксиомой. Если расширить тип языка, это можно выразить универсальным способом (ср. элементарную теорию групп, где аксиому $\forall x \exists y x \cdot y = e$ можно выразить в виде $x \cdot x^{-1} = e$ после расширения языка символом $^{-1}$). В действительности есть два способа сделать это. Первый способ, примененный Чёрчем, добавляет к языку оператор абстракции λ: если A — терм, то $\lambda x.A$ — тоже терм. Теперь комбинаторная полнота следует из соотношения

1.5. $(\lambda x.A)a = A[x/a]$ (*β-конверсия*).

Многократные абстракции можно заменить простыми, следуя идее Шейнфинкеля. Пусть $\lambda x_1 \ldots x_n.A = \lambda x_1(\lambda x_2 \ldots \ldots (\lambda x_n.A \ldots))$. Тогда $(\lambda x_1 \ldots x_n.A)a_1 \ldots a_n = A[x_1 \ldots \ldots x_n/a_1 \ldots a_n]$.

Другой подход, предложенный Карри, возникает из понимания того, что комбинаторная полнота следует из двух своих частных случаев.

1.6. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{M} = \langle X, \cdot \rangle$ — *аппликативная система такая, что для некоторых* $k, s \in X$ *мы имеем в* $\mathfrak{M}$:

(i) $k \neq s$,
(ii) $kxy = x$,
(iii) $sxyz = xz(yz)$.

Тогда $\mathfrak{M}$ — *комбинаторная алгебра.*

Доказательство. Пусть $i = skk$. Тогда $ix = skkx = kx(kx) = x$. Индукцией по сложности терма A над $\mathfrak{M}$ мы можем определить $\lambda^* x.A$ и показать, что в $\mathfrak{M}$ имеет место $(\lambda^* x.A)a = A[x/a]$. Пусть $I \equiv c_i$, $K \equiv c_k$, $S = c_s$;

$$\lambda^* x.\ x = I; \quad \lambda^* x.\ y = Ky, \text{ если } x, y \text{ — различные переменные;}$$
$$\lambda^* x.\ c_b = Kc_b; \quad \lambda^* x.\ A_1 A_2 = S(\lambda^* x.\ A_1)(\lambda^* x.\ A_2).$$

Поэтому для термов над $\mathfrak{M}$ мы можем определить λ-абстракцию, удовлетворяющую β-конверсии, следовательно, $\mathfrak{M}$ является λ-алгеброй. □

Теория Карри изящна благодаря своей простоте. В действительности теория комбинаторов с константами k и s, удовлетворяющими (i)—(iii) из 1.6, — это простейшая существенно неразрешимая теория. Однако символика Чёрча ближе к интуиции и именно она будет использоваться в этой главе.

(*Формальное*) *λ-исчисление* — это по существу теория, имеющая аппликацию и абстракцию в качестве исходных понятий и β-конверсию в качестве аксиомы. Кроме того, в нем имеется понятие *редукции*, формализующее тот факт, что, например, выражение вроде $(\lambda x.x^2 + 1)3$ может быть вычислено с результатом 10, но не наоборот. Благодаря теореме Чёрча — Россера, редукция весьма полезна для теории доказательств λ-исчисления.

Следует подчеркнуть, что *термы* играют центральную роль в теории, трактующей функции как правила. Этот взгляд отличается от взглядов Скотта, который считает центральными модели. Действительно, верно, что модели интересны не только благодаря большему пониманию равенства термов, которое они обеспечивают, но и благодаря своей математической структуре. Однако теория D_∞ особенно красива из-за предельной характеризации равенства *термов*, см. § 7.

Вот типичные вопросы о термах:

(i) Какого рода функции на термах представимы?

(ii) Какие термы равны, какие существенно различны? Какие термы можно, а какие нужно приравнивать?

Если ограничиться цифрами, то классический ответ на вопрос (i) гласит: рекурсивные функции. К вопросу (ii) можно подходить либо с помощью доказательств непротиворечивости для разумных расширений λ-исчисления, либо путем построения моделей и рассмотрения множеств уравнений, истинных в них. Системы $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$ из § 5 были найдены соответственно первым и вторым методом. Вопрос из (ii) объясняет также, почему к λ-исчислению иногда добавляется экстенсиональность. Ср. теорему Бёма в 2.23, утверждающую, что экстенсиональная теория полна относительно термов, имеющих нормальную форму.

Теория

1.7. Определение. λ-исчисление имеет следующий язык.

Алфавит:

$a_0, a_1, \ldots$ — переменные;
$\to, =$ — редукция, равенство;
$\lambda,), ($ — вспомогательные символы.

Термы определяются индуктивно.

(i) Любая переменная есть терм.
(ii) Если M, N — термы, то (MN) — терм.
(iii) Если M — терм, x — переменная, то $(\lambda x.M)$ — терм.

Формулы

Если M, N — термы, то $M \to N$ и $M = N$ — формулы.

1.8. Соглашения. Терм λ-исчисления называется *λ-термом*. $M, N, \ldots$ — синтаксические обозначения произвольных λ-термов. $x, y, z, \ldots$ — синтаксические обозначения произвольных переменных. $M_1 M_2 \ldots M_n$ обозначает $(\ldots(M_1 M_2)\ldots M_n)$ (группировка влево), $\lambda x_1 \ldots x_n.M$ обозначает $(\lambda x_1(\lambda x_2 \ldots \ldots (\lambda x_n.M)\ldots)$. Символ $\equiv$ обозначает синтаксическое равенство.

Переменная x входит *свободно* в терм M, если x не входит в область действия λx, в противном случае x входит *связанно*. В этом отношении λx имеет те же связывающие свойства, что $\forall x$ в логике предикатов или $\int_b^a \ldots dx$ в анализе. Мы отождествляем термы, отличающиеся только названиями своих связанных переменных, например $\lambda x.x \equiv \lambda y.y$. $\mathrm{FV}(M)$ — это множество переменных, свободных в терме M. M замкнут, если $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$.

$M[x/N]$ обозначает результат подстановки терма N вместо всех *свободных* вхождений x в M. Чтобы предотвратить коллизию переменных, нам придется предположить, как делается в логике предикатов, что никакая свободная переменная из N не становится связанной в $M[x/N]$. Этого можно достичь путем переименования некоторых связанных переменных в M, например $(\lambda a.ax)[x/a] \equiv \lambda a'.a'a \not\equiv \lambda a.aa$. После того как эта предосторожность принята, определение подстановки не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности отождествленных термов. См. также де Брёйн [1].

1.9. Определение. λ-исчисление определяется следующими схемами аксиом и правилами:

I. 1. $(\lambda x.\ M)N \to M[x/N]$ (*β-редукция*).
2. $M \to M$.
3. $M \to N,\ N \to L \Rightarrow M \to L$.
4. (a) $M \to M' \Rightarrow ZM \to ZM'$;
(b) $M \to M' \Rightarrow MZ \to M'Z$;
(c) $M \to M' \Rightarrow \lambda x.\ M \to \lambda x.\ M'$.

II. 1. $M \to M' \Rightarrow M = M'$.
2. $M = M' \Rightarrow M' = M$.
3. $M = N,\ N = L \Rightarrow M = L$.
4. (a) $M = M' \to ZM = ZM'$;
(b) $M = M' \to MZ = M'Z$,
(c) $M = M' \Rightarrow \lambda x.\ M = \lambda x.\ M'$.

Если выводимо $M = N$ или $M \to N$, мы пишем $\lambda \vdash M = N$ или $(\lambda \vdash) M \to N$ соответственно. Так как отношение $=$ порождается отношением $\to$, правила II.4 следуют из I.4. Однако добавление II.4 необходимо, если мы рассматриваем расширения λ-исчисления.

1.10. Экстенсиональность. λ-исчисление можно расширять следующим правилом экстенсиональности:

ext: $Mx = M'x \Rightarrow M = M'$, если $x \notin \mathrm{FV}(M), \mathrm{FV}(M')$.

Правило ext может быть аксиоматизировано путем добавления правила

$\lambda x.\ Mx \to M$ (η — редукция),

если $x \notin \mathrm{FV}(M)$.

Действительно, если $Mx = M'x$ и $x \notin \mathrm{FV}(MM')$, то $\lambda x.Mx = \lambda x.M'x$, следовательно, $M = \lambda x.Mx = \lambda x.M'x = M'$.

λ-исчисление с этим добавочным правилом редукции называется *λη-исчислением*. Доказуемость в этой теории обозначается через $\lambda\eta \vdash \ldots$

M и N называются *β(η)-конвертируемыми*, если $\lambda(\eta) \vdash M = N$.

Модели

Наш главный объект изучения — λ-исчисление. Поэтому мы хотели бы, чтобы комбинаторные алгебры были также моделями этого исчисления, т. е. чтобы имелась интерпретация λ-оператора. Однако если комбинаторная алгебра не является экстенсиональной, то имеется произвол в выборе элемента f, представляющего функцию A из 1.3. Таким образом, у комбинаторных алгебр не хватает свойств для того, чтобы быть моделями λ-исчисления.

1.11. Определение. *Пред-λ-алгебра* — это комбинаторная алгебра вместе с методом, который каждому терму $A \in T(\mathfrak{M})$ ставит в соответствие терм $\lambda^*x.A \in T(\mathfrak{M})$ такой, что:
(i) x не входит в $\lambda^*x.A$,
(ii) $\mathfrak{M} \models (\lambda^*x.A)x = A$.

Замечания. (1) Для большинства $\mathfrak{M}$ это сопоставление $A \mapsto \lambda^*x.A$ дается доказательством того, что $\mathfrak{M}$ — комбинаторная алгебра.

(2) Хотя определение пред-λ-алгебры и не сформулировано в привычном языке первого порядка, оно совершенно ясно с конструктивной точки зрения.

1.12. Определение. *Интерпретация λ-термов. Пусть* ρ — оценка переменных в пред-λ-алгебре $\mathfrak{M} = \{X, \cdot\}$, т. е. $\rho = \{a_0, a_1, \ldots\} \to X$. Значение λ-терма M при оценке ρ в модели $\mathfrak{M}$, обозначаемое через $[\![M]\!]^{\mathfrak{M}}_{\rho}$, определяется в два шага. Сначала M преобразуется в терм $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}} \in T(\mathfrak{M})$. Затем этот терм обычным для языка первого порядка образом интерпретируется в $\mathfrak{M}$ при оценке ρ, что и дает $[\![M]\!]^{\mathfrak{M}}_{\rho}$.

$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}}$ определяется индуктивно следующим образом: $\langle\!\langle x \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}} = x$; $\langle\!\langle MN \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}} = \langle\!\langle M \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}} \langle\!\langle N \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}}$; $\langle\!\langle \lambda x.\ M \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}} = \lambda^*x.\ \langle\!\langle M \rangle\!\rangle^{\mathfrak{M}}$.

1.13. Определение. *Выполнимость.* Как обычно, $\mathfrak{M} \models M = N$, если $[\![M]\!]^{\mathfrak{M}}_{\rho} = [\![N]\!]^{\mathfrak{M}}_{\rho}$ для всех ρ.

1.14. Определение. *λ-алгебра* или *модель λ-исчисления* — это пред-λ-алгебра $\mathfrak{M}$ такая, что $\lambda \vdash M = N \Rightarrow \mathfrak{M} \models \models M = N$.

Замечание. Модель из термов $\mathfrak{M}(\mathrm{CL})$ для теории комбинаторов является пред-λ-алгеброй (в силу доказательства из 1.6), но не λ-алгеброй, так как

$$\mathfrak{M}(\mathrm{CL}) \not\models \lambda x.\ ((\lambda y.\ y)\, x) = \lambda x.\ x, \quad \text{т. е.} \quad s(ki)\, i \neq i.$$

1.15. Определение. (i) *Слабо экстенсиональная* (с. э.) λ-алгебра — это λ-алгебра $\mathfrak{M}$ такая, что

$$\mathfrak{M} \models M = M' \Rightarrow \mathfrak{M} \models \lambda x.\ M = \lambda x.\ M'.$$

(ii) λ-алгебра $\mathfrak{M}$ *экстенсиональна*, если $\mathfrak{M}$ удовлетворяет соотношению $\forall x (fx = gx) \to f = g$ (экстенсиональность).

1.16. Замечания. (1) Экстенсиональная λ-алгебра очевидным образом с. э.

(2) Комбинаторная алгебра, удовлетворяющая аксиоме экстенсиональности, очевидно, является экстенсиональной λ-алгеброй, так как имеется ровно один способ определения абстракции.

(3) Имеются интересные λ-алгебры, не являющиеся слабо экстенсиональными, например $\mathfrak{M}^0(\lambda)$ (см. ниже), что вытекает из ω-неполноты λ-исчисления (ср. Плоткин [2]), или $\mathscr{P}^0_\omega$.

(4) Все λ-алгебры, которые мы будем рассматривать здесь, являются либо с. э., либо моделями из термов.

1.17. Общие понятия и обозначения. ω обозначает множество натуральных чисел. $\lambda x. \ldots$ обозначает отображение $x \mapsto \ldots$ (мета-лямбда).

Понятия, связанные с теориями

Λ — множество λ-термов. Λ^0 — множество замкнутых λ-термов. Пусть **T** — некоторое множество равенств между λ-термами. Тогда $\lambda + \mathbf{T}$ — это λ-исчисление, расширенное равенствами из **T** в качестве аксиом. $\mathbf{T}^+ = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \lambda + \mathbf{T} \vdash M = N\}$. Говорят, что **T** *непротиворечива*, если $\mathbf{T}^+$ содержит не все равенства.

λ-теория — это непротиворечивое множество равенств **T** такое, что $\mathbf{T} = \mathbf{T}^+$.

λ — это λ-теория $\{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \lambda \vdash M = N\}$. Ее непротиворечивость показана в 2.9.

Для λ-теории **T** положим по определению, что $M \sim_{\mathbf{T}} N$ тогда и только тогда, когда $\lambda + \mathbf{T} \vdash M = N$. $\sim_{\mathbf{T}}$ — отношение эквивалентности. Пусть $[M]^{\sim_{\mathbf{T}}}$ обозначает класс эквивалентности терма M по отношению $\sim_{\mathbf{T}}$. *Модель* теории **T** (состоящая) *из термов*, обозначаемая через $\mathfrak{M}(\mathbf{T})$, есть λ-алгебра, состоящая из всех λ-термов по модулю $\sim_{\mathbf{T}}$, причем аппликация и абстракция определяются каноническим образом *). *Модель* $\mathfrak{M}^0(\mathbf{T})$ теории **T** *из замкнутых термов* — это множество термов без свободных переменных, факторизованное по $\sim_{\mathbf{T}}$.

λ-теория **T** *максимально непротиворечива*, если **T** не имеет собственных непротиворечивых расширений.

Понятия, связанные с моделями

Для λ-алгебры $\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ λ-теорию $\{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } \mathfrak{M} \models M = N\}$. Непротиворечивость следует из того факта, что $\mathrm{Card}(\mathfrak{M}) > 1$ (см. 2.3).

Внутренность $\mathfrak{M}$, обозначаемая через $\mathfrak{M}^0$, — это подсистема, состоящая из образов замкнутых λ-термов в $\mathfrak{M}$. С точностью до изоморфизма $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}^0(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}))$. Модель $\mathfrak{M}$ *жесткая* тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^0$. Жесткие λ-алгебры являются простыми алгебраическими системами среди λ-алгебр.

Гомоморфизм h: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ для λ-алгебр должен сохранять не только аппликацию, но и абстракцию, т. е. для терма $A \in \mathbf{T}(\mathfrak{M})$ должно выполняться $h(\lambda^* x.A) = \lambda^* x.hA$ в $\mathfrak{M}'$, где для $B \in \mathbf{T}(\mathfrak{M})$ терм $hB \in \mathbf{T}(\mathfrak{M}')$ — это терм, получаемый путем замены в B всех констант c_a на c_{ha}.

Мы будем использовать гомоморфизмы только в связи с моделями из термов. В этом случае описание весьма просто. Если $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ — λ-теории, то h: $\mathfrak{M}(\mathbf{S}) \to \mathfrak{M}(\mathbf{T})$ определяется соотношением $h\left([M]^{\sim_{\mathbf{S}}}\right) = [M]^{\sim_{\mathbf{T}}}$. Таким образом, каждая (замкнутая) модель из термов $\mathfrak{M}^0(\mathbf{S})$ есть гомоморфный образ модели $\mathfrak{M}^0(\lambda)$: $[M]^{\sim_\lambda} \to [M]^{\sim_{\mathbf{S}}}$. Если **S** максимально непротиворечива, то $\mathfrak{M}^0(\mathbf{S})$ алгебраически *проста*, т. е. не имеет собственных гомоморфных образов.

§ 2. Классическое λ-исчисление

Классическая теория занимается преимущественно моделью $\mathfrak{M}(\lambda)$. Среди прочих мы докажем следующие теоремы. Все рекурсивные функции λ-определимы (Клини). Множество термов, (не) обладающих нормальной формой, неразрешимо (Чёрч). Невозможна рекурсивная модель λ-исчисления (Гжегорчик). Последние две теоремы легче всего следуют из теоремы Скотта. Наконец, формулируется теорема Бёма, которая показывает полноту λ-конверсии для термов, имеющих нормальную форму.

2.1. Теорема о неподвижной точке. *Для любого* $F \in \Lambda$ *имеется* $M \in \Lambda$ *такой, что* $\lambda \vdash FM = M$.

*) То есть $([M][N]) = [(MN)]$, $\lambda x.[M] = [\lambda x.M]$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Положим по определению $\omega = \lambda x.F(xx)$ и $M = \omega\omega$. Тогда $\lambda \vdash M = \omega\omega = (\lambda x.F(xx))\omega = F(\omega\omega) = FM$. □

Замечания. (1) Неподвижные точки можно находить равномерно: положим $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$. Тогда $\lambda \vdash Yf = f(Yf)$.

(2) Так как теорема верна для термов, которые могут содержать свободные переменные, то каждый элемент λ-алгебры имеет неподвижную точку.

(3) Карри назвал комбинатор Y *парадоксальным комбинатором*.

Заметим, что в 2.1 верно $\lambda \vdash M \to FM$. Это объясняет, почему нас так озадачивают родственные конструкции в теореме рекурсии или гёделевское рефлексивное предложение; ср. Барендрегт [2], § 6.7.

2.2. Нам часто нужны некоторые стандартные термы. Пусть $I = \lambda x.x$, $K = \lambda xy.x$, $S = \lambda xyz.xz(yz)$ и $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$. Тогда $\lambda \vdash IM = M$, $\lambda \vdash KMN = M$ и $\lambda \vdash SMNL = ML(NL)$.

Из 1.6 следует, что любой замкнутый терм можно определить через I, K и S.

2.3. Истинностные значения t(true) и f(false). Положим по определению $\mathrm{t} = K$, $\mathrm{f} = KI$. Тогда $\lambda \vdash \mathrm{t}MN = M$ и $\lambda \vdash \mathrm{f}MN = N$. Отметим, что $\mathrm{t} \neq \mathrm{f}$ в любой λ-алгебре $\mathfrak{M}$, так как иначе $\mathfrak{M}$ удовлетворяла бы $x = \mathrm{t}xy = \mathrm{f}xy = y$ и, следовательно, была бы тривиальной.

2.4. Условная связка. Если B — терм, принимающий значения t и f, то интуитивное значение выражения «*если* B, *то* M, *иначе* N» можно представить термом BMN.

2.5. Упорядоченные пары. Положим по определению $[MN] = \lambda x.xMN$, $(M)_0 = M\mathrm{t}$ и $(M)_1 = M\mathrm{f}$. Тогда $\lambda \vdash ([M_0, M_1])_i = M_i$, $i = 0, 1$.

2.6. *Цифры.* Положим по определению $\underline{0} = I$ и $\underline{n+1} = [\underline{n}, K]$. Цифры выбраны таким образом для того, чтобы обеспечить удобную основу для представления рекурсивных функций. Чёрч [1] использовал следующие цифры: $n = \lambda f x.f^n x$, где $f^0 x = x$ и $f^{n+1}x = f(f^n x)$.

2.7. Определение. (i) *Редекс* — это терм вида $(\lambda x.P)Q$. (В экстенсиональной теории редексом является также $\lambda x.Px$, где $x \notin \mathrm{FV}(P)$.)

(ii) Терм M находится в *нормальной форме* (н.ф.), если никакой подтерм в M не является редексом. (Если нужно различать н.ф. в λ- и λη-исчислении, мы говорим о β- и βη-н.ф.)

(iii) Терм M *имеет* н.ф., если $\lambda \vdash M \to N$ для некоторого N в н.ф. (в экстенсиональной теории — $\lambda\eta \vdash M \to N$).

С интуитивной точки зрения терм в нормальной форме не допускает дальнейшего вычисления.

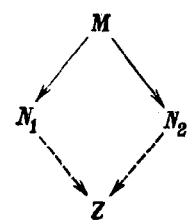
Пример. $(\lambda x.xx)y$ имеет н.ф. yy; Ω вообще не имеет н.ф. Заметим, что для любого натурального числа n соответствующая цифра $\underline{n}$ находится в н.ф.

Теперь сформулируем важную теорему. По поводу деталей см., например, Хиндли, Лерчер и Селдин [1]; с. 139 или Барендрегт [2].

2.8. Теорема Чёрча — Россера. *Если* $\lambda \vdash M = N$, *то для некоторого* Z *верно* $\lambda \vdash M \to Z$ *и* $\lambda \vdash N \to Z$ (*и аналогично для* λη-*исчисления*).

Доказательство (набросок по идеям Тейта и Мартин-Лёфа). Теорема получается из следующего утверждения (и в действительности эквивалентна ему).

(*) **Если** $M \to N_1$, $M \to N_2$, то $N_1 \to Z$ и $N_2 \to Z$ **для некоторого** Z:



То, что 2.8 следует из (*), доказывается индукцией по длине доказательства $\lambda \vdash M = N$, причем (*) нужно для транзитивности отношения $=$.

(*) доказывается с помощью нового отношения $\xrightarrow{\circ}$ на λ-термах такого, что: (i) $\xrightarrow{\circ}$ обладает свойством ромбика; (ii) $\to$ — транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow{\circ}$. Свойство ромбика для $\xrightarrow{\circ}$ следует тогда из простой прогонки по диаграмме.

Отношение $\xrightarrow{\circ}$ индуктивно определяется следующим образом:

$$M \xrightarrow{\circ} M; \quad M \xrightarrow{\circ} M', \quad N \xrightarrow{\circ} N' \Rightarrow (\lambda x.M)N \xrightarrow{\circ} M'[x/N'];$$
$$M \xrightarrow{\circ} M', \quad N \xrightarrow{\circ} N' \Rightarrow MN \xrightarrow{\circ} M'N'; \quad M \xrightarrow{\circ} M' \Rightarrow \lambda x.M \xrightarrow{\circ} \lambda x.M'.$$

Тогда (ii) очевидно, а (i) следует из разбора случаев и соотношений $M \xrightarrow{\circ} M'$, $N \xrightarrow{\circ} N' \Rightarrow M[x/N] \xrightarrow{\circ} M'[x/N']$, что можно доказать индукцией по порождению $\xrightarrow{\circ}$. □

2.9. Следствие. (i) *Если* M *вообще имеет н.ф., то* M *имеет единственную н.ф.*

(ii) *Если* $\lambda \vdash M = N$ *и* N *находится в н.ф., то* $M \to N$.

(iii) λ-*исчисление непротиворечиво, т. е.* $\lambda \nvdash M = N$ *для некоторого равенства.*

Доказательство. (i) Заметим, что если N находится в н.ф. и $N \to N'$, то $N' \equiv N$. Допустим теперь, что $M \to N_1$, $M \to N_2$ и N_1, N_2 находятся в н.ф. Тогда $\lambda \nvdash N_1 = N_2$, поэтому в силу 2.8 $N_1 \to Z$ и $N_2 \to Z$. Но тогда $N_1 \equiv Z \equiv N_2$.

(ii) Если $M = N$, то снова $M \to Z$ и $N \to Z$. Но так как N находится в н. ф., то $N \equiv Z$, поэтому $M \to N$.

(iii) Если M, N — различные н. ф., то $\lambda \nvdash M = N$ по (ii) и (i). □

2.10. Определение. Пусть ω — множество всех натуральных чисел. Функция $f\colon \omega^n \to \omega$ называется *λ-определимой* тогда и только тогда, когда для некоторого $F \in \Lambda^0$

$$\lambda \vdash F\underline{k_1} \ldots \underline{k_n} = \underline{m} \Leftrightarrow f(k_1, \ldots, k_n) = m. \qquad (*)$$

Если имеет место (*), то говорят, что f λ-определима термом F.

2.11. Замечание. Если для некоторого терма F мы имеем вместо (*) соотношение

$$f(k_1, \ldots, k_n) = m \Rightarrow \lambda \vdash F\underline{k_1} \ldots \underline{k_n} = \underline{m}, \qquad (**)$$

то f λ-определима термом F. Действительно, допустим, что $\lambda \vdash F\underline{k_1} \ldots \underline{k_n} = m$ и $f(k_1, \ldots, k_n) = m'$. Тогда в силу (**) $\lambda \vdash F\underline{k_1} \ldots \underline{k_n} = m'$ и, следовательно, в силу 2.9 (i) $m = m'$, так как цифры находятся в нормальной форме. Поэтому $f(k_1, \ldots, k_n) = m$.

2.12. Лемма. *Исходные функции* $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $Z(x) = 0$, $S^+(x) = x + 1$ *λ-определимы.*

Доказательство. Возьмем в качестве определяющих термов $\mathbf{U}_i^n = \lambda x_1 \ldots x_n.\, x_i$, $\mathbf{Z} = \lambda x.\ \underline{0}$ и $\mathbf{S}^+ = \lambda x.\ [x, K]$ соответственно и применим 2.11.

2.13. Лемма. *λ-определимые функции замкнуты относительно композиции.*

Доказательство. Представление композиции есть композиция представлений.

2.14. Лемма. *Имеются термы* P *и* Zero *такие, что* $P(\mathbf{S}^+x) = x$ *и* $\mathrm{Zero}\ x = \mathrm{t}$, *если* $x = 0$, $\mathrm{Zero}\ x = \mathrm{f}$, *если* x *есть цифра* $\neq \underline{0}$.

Доказательство. Возьмем $P = \lambda x.(x)_0$, $\mathrm{Zero} = \lambda x.(x)_1 \mathrm{ft}$. □

2.15. Лемма. *λ-определимые функции замкнуты относительно примитивной рекурсии.*

Доказательство. Для простоты мы не будем указывать параметры. Возьмем f с соотношениями $f(0) = k$, $f(n+1) = g(f(n), n)$, где g λ-определима термом G. Мы хотим определить F так, чтобы он удовлетворял равенству $Fx =$ *если* $\mathrm{Zero}\ x$, *то* $\underline{k}$, *иначе* $G(F(Px))(Px)$. Положим по определению $\Theta = \lambda fx.\ \mathrm{Zero}\ x\underline{k}[G(f(Px))(Px)]$. Тогда мы можем найти F как неподвижную точку терма Θ, так как $F = \lambda x.\ \mathrm{Zero}\ x\underline{k}[G(F(Px))(Px)]$ по 2.4.

2.16. Лемма. *λ-определимые функции замкнуты относительно минимизации.*

Доказательство. (Снова мы не указываем параметры.) Пусть f определяется соотношением $f(x) = \mu y[g(x, y) = 0]$, где g λ-определена термом G и $\forall n \exists m\, g(n, m) = 0$. Аналогично 2.15 мы можем найти λ-терм H такой, что $Hxy =$ *если* $\mathrm{Zero}(Gxy)$, *то* y, *иначе* $Hx(\mathbf{S}^+y)$. Затем возьмем $F = \lambda x.Hx\underline{0}$. □

Замечание. Ясно, что λ-исчисление — рекурсивно аксиоматизируемая теория. Следовательно (после гёделизации), отношение $\{(M, N) \mid \lambda \vdash M = N\}$ рекурсивно перечислимо.

2.17. Теорема (Клини). *λ-определимые функции — это в точности рекурсивные функции.*

Доказательство. Если f рекурсивна, то f λ-определима, так как рекурсивные функции — это наименьший класс, содержащий исходные функции и замкнутый относительно композиции, примитивной рекурсии и минимизации. Если f λ-определима термом F, то $f(k_1, \ldots, k_n = m) \Leftrightarrow \lambda \vdash F\underline{k_1} \ldots \underline{k_n} = \underline{m}$, поэтому ввиду предыдущего замечания график f рекурсивно перечислим (р. п.), следовательно, f рекурсивна.

Замечание. *Частичная* функция $\psi\colon \omega^k \to \omega$ λ-определима тогда и только тогда, когда для некоторого терма F верно $\psi(\vec{k}) = m \Leftrightarrow \lambda \vdash F\vec{\underline{k}} = \underline{m}$ и $\psi(\vec{k})$ не определено $\Leftrightarrow F\vec{\underline{k}}$ не имеет н. ф.

Можно показать, что частичная функция ψ λ-определима тогда и только тогда, когда ψ частично рекурсивна. Чтобы сделать это, мы должны показать, что некоторые термы не имеют н. ф. Для этой цели полезна следующая стратегия редукции.

2.18. Определение. Пусть M — λ-терм. Если M не находится в н. ф., то пусть M' получается редукцией самого левого редекса в M (т. е. редекса с самым левым λ), в противном случае M' не определен. Положим по определению $M_0 = M$, $M_{n+1} = (M_n)'$. Последовательность $M_0 \to M_1 \to \ldots$ (конечная или бесконечная) называется *левой* или *нормальной цепочкой редукций* терма M.

2.19. Теорема нормализации (Карри). *M имеет н. ф. тогда и только тогда, когда конечна левая цепочка редукций терма M.*

Доказательство. См. Карри и Фейс [1], с. 142.

Эта теорема ложна для произвольных редукционных цепочек. Рассмотрим, например, терм $KI\Omega$, который имеет н. ф., но также и бесконечную цепочку редукций.

Результаты о неразрешимости

Закодировав синтаксические объекты натуральными числами, мы можем говорить о разрешимости множества термов

или равенств. Будет показано, что λ-исчисление существенно неразрешимо, т. е. не имеет разрешимых непротиворечивых расширений.

Стандартным образом определяется кодирование $M \to \#M$ такое, что имеются рекурсивные функции $\mathrm{Ap}(\#M, \#N) = \#(MN)$ и $\mathrm{Num}(n) = \#\underline{n}$. Цифра $\#M$ будет обозначена через $\ulcorner M \urcorner$.

2.20. Вторая теорема о неподвижной точке. *Для каждого $F \in \Lambda^0$ имеется $X \in \Lambda^0$ такой, что $\lambda \vdash F\ulcorner X \urcorner = X$.*

Доказательство. Пусть рекурсивные функции Ap и Num λ-определяются термами Ap и Num. Положим по определению $\omega = \lambda x.F(Apx(Num\, x))$ и $X = \omega\ulcorner\omega\urcorner$. Тогда $\lambda \vdash X = \omega\ulcorner\omega\urcorner \to F(Ap\ulcorner\omega\urcorner(Num\ulcorner\omega\urcorner)) \to F\ulcorner\omega\ulcorner\omega\urcorner\urcorner = F\ulcorner X\urcorner$, так как $Num\ulcorner\omega\urcorner \to \ulcorner\ulcorner\omega\urcorner\urcorner$. □

Множество $\mathscr{A} \subseteq \Lambda^0$ замкнуто относительно равенства тогда и только тогда, когда $M \in \mathscr{A}$ и $M = N \in \lambda \Rightarrow N \in \mathscr{A}$.

$\mathscr{A} \subseteq \Lambda^0$ нетривиально тогда и только тогда, когда $\mathscr{A} \neq \varnothing$ и $\mathscr{A} \neq \Lambda^0$.

2.21. Теорема (Скотт). *Пусть $\mathscr{A} \subseteq \Lambda^0$ — нетривиальное множество, замкнутое относительно равенства. Тогда $\mathscr{A}$ не рекурсивно.*

Доказательство. Пусть $M_0 \in \mathscr{A}$, $M_1 \in \Lambda^0 - \mathscr{A}$. Допустим, что $\mathscr{A}$ рекурсивно. Тогда имеется рекурсивная функция f: $\omega \to \{0, 1\}$ такая, что $f(\#M) = 0$ тогда и только тогда, когда $M \in \mathscr{A}$. Пусть f λ-определена термом F. Положим по определению $F' = \lambda x.$ *если* $\mathrm{Zero}(Fx)$, *то* M_1, *иначе* M_0. Тогда $F'(\ulcorner M \urcorner) = M_1$, если $M \in \mathscr{A}$, и $F'(\ulcorner M \urcorner) = M_0$, если $M \notin \mathscr{A}$. В силу 2.20 $\exists X \in \Lambda^0 F'\ulcorner X\urcorner = X$. Если $X \in \mathscr{A}$, то $X = F'\ulcorner X\urcorner = M_1 \notin \mathscr{A}$, а если $X \notin \mathscr{A}$, то $X = F'\ulcorner X\urcorner = M_0 \in \mathscr{A}$, что в обоих случаях противоречит замкнутости $\mathscr{A}$ относительно равенства. □

2.22. Следствие (Чёрч, Гжегорчик). (i) *Множество термов, (не) обладающих н. ф., не рекурсивно.*

(ii) *Нет рекурсивных λ-теорий.*

(iii) *Нет рекурсивных λ-алгебр.*

Доказательство. (i) $\{M \mid M$ (не) обладает н. ф.$\}$ удовлетворяет условию теоремы 2.21.

(ii) Пусть $\mathbf{T}$ — λ-теория. Тогда $\{M \mid M = I \in \mathbf{T}\}$ удовлетворяет 2.21. Следовательно, $\mathbf{T}$ не рекурсивна.

(iii) Если бы $\mathfrak{M}$ была рекурсивной λ-алгеброй, то $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ была бы рекурсивной λ-теорией, что противоречит (ii).

Следующий результат показывает полноту λη-исчисления относительно термов, имеющих н. ф.

2.23. Теорема (Бём). *Если M, N — два различных терма в βη-н. ф., то $\lambda + M = N$ противоречива.*

Доказательство (эскизное). Если $M \neq N$ находятся в βη *н. ф.*, то M, N имеют конечные деревья Бёма, которые не являются η-эквивалентными (см. § 6). Следовательно, в силу 6.8 $M = N \notin \mathscr{H}^*$. В действительности из доказательства в 6.8 следует, что в этом случае $\lambda \vdash C[M] = x$ и $\lambda \vdash C[N] = y$ для некоторого контекста $C[\cdot]$ и переменных $x \neq y$. Поэтому $\lambda + M = N \vdash x = y$, т. е. $\lambda + M = N$ противоречиво. □

Для термов без н. ф. этот результат о полноте неверен (см. 7.2).

§ 3. Построение графиковой модели $\mathscr{P}\omega$

Первыми λ-алгебрами были решеточные модели D_∞, построенные Скоттом в 1969 г. (см. § 4). Графиковая модель $\mathscr{P}\omega$ менее сложна и потому будет описана сначала. Эта модель была найдена Плоткиным [1], а в более явной форме — Скоттом. По поводу построения этой модели с использованием идей теории рекурсии см. Скотт [2], [5].

Роль непрерывности в построении моделей уже упоминалась в § 1. Топология на $\mathscr{P}\omega$ такова, что непрерывные функции $\mathscr{P}\omega \to \mathscr{P}\omega$ могут быть закодированы элементами $\mathscr{P}\omega$. Это существенная черта модели.

3.1. Определение. (i) $\mathscr{P}\omega = \{x \mid x \subseteq \omega\}$.

(ii) Конечных элементов $\mathscr{P}\omega$ — счетное множество. В качестве эффективной взаимно однозначной нумерации этих множеств мы используем e_n, где

$$e_n = \{k_0, \ldots, k_{m-1}\} \text{ с } k_0 < \ldots < k_{m-1} \Leftrightarrow n = \sum_{i<m} 2^{k_i}.$$

(iii) $(\cdot, \cdot)$ — кодирование пар натуральных чисел натуральными числами, определяемое равенством $(n, m) = \frac{1}{2}(n + m)(n + m + 1) + m$.

3.2. Определение. Пусть $e \subseteq \omega$ — конечное подмножество

$$O_e = \{x \in \mathscr{P}\omega \mid e \subseteq x\}; \qquad O_n = O_{e_n}.$$

3.3. Лемма. *Семейство $\{O_n\}_{n \in \omega}$ образует базу топологии на $\mathscr{P}\omega$.*

Доказательство. $O_e \cap O_{e'} = O_{e \cup e'}$. □

Начиная с этого места, мы всегда будем рассматривать $\mathscr{P}\omega$, снабженное этой топологией.

3.4. Лемма. f: $\mathscr{P}\omega \to \mathscr{P}\omega$ *непрерывна* $\Leftrightarrow f(x) = \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\}$.

Доказательство. ($\Rightarrow$). Заметим сначала, что f монотонна. Действительно, допустим, что $x \subseteq y$ и $n \in f(x)$. Тогда

$f(x) \in O_{\{n\}}$. По непрерывности $x \in O_e$ для некоторого e такого, что $f(O_e) \subseteq O_{\{n\}}$. Теперь $e \subseteq x \subseteq y$, поэтому $y \in O_e$, следовательно, $f(y) \subseteq O_{\{n\}}$, т. е. $n \in f(y)$. Поэтому в самом деле $x \subseteq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$.

Ввиду монотонности f имеем $f(x) \supseteq \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\}$. Чтобы установить обратное включение, допустим, что $n \in f(x)$. Снова $x \in O_e$ и $f(O_e) \subseteq O_{\{n\}}$ для некоторого e. Следовательно, ввиду $e \in O_e$ мы имеем $f(e) \in O_{\{n\}}$, т. е. $n \in f(e) \subseteq \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\}$.

($\Leftarrow$). Снова f монотонна. Действительно, допустим, что $x \subseteq y$ и $n \in f(x)$. По предположению $n \in f(e)$ для некоторого конечного $e \subseteq x$. Следовательно, $n \in \bigcup \{f(e') \mid e' \subseteq y\} = f(y)$.

Предположим теперь, что $f(x) \in O_e$, т. е. $e \subseteq f(x)$. Пусть $e = \{m_1, \ldots, m_k\}$. По предположению $m_i \in f(e_{n_i})$ для некоторых $e_{n_i} \subseteq x$. Тогда $f(O_{e_{n_i}}) \subseteq O_{\{m_i\}}$ в силу монотонности. Поэтому $O = O_{e_{n_1}} \cap \ldots \cap O_{e_{n_k}}$ есть окрестность x и

$$f(O) \subseteq f(O_{e_{n_1}}) \cap \ldots \cap f(O_{e_{n_k}}) \subseteq O_{\{m_1\}} \cap \ldots \cap O_{\{m_k\}} = O_{\{m_1, \ldots, m_k\}} = O_e.$$

Поэтому $\forall O_e \ni f(x) \exists O \ni x f(O) \subseteq O_e$, т. е. f непрерывна. □

По предыдущей лемме непрерывная функция f полностью определяется своими значениями на конечных множествах. Следовательно, если мы знаем, для каких m, n верно $m \in f(e_n)$, то известны $f(e_n)$, а потому и f. Таким образом, информацию о непрерывной функции можно закодировать множеством. Эта операция называется graph. Обратная к ней операция обозначается fun.

3.5. Определение (i). Пусть f: $\mathscr{P}\omega \to \mathscr{P}\omega$ непрерывна. Тогда $\mathrm{graph}(f) = \{(n, m) \mid m \in f(e_n)\}$.

(ii) Пусть $u \in \mathscr{P}\omega$. Тогда функция $\mathrm{fun}(u)$ определяется соотношением $\mathrm{fun}(u)(x) = \{m \mid \exists e_n \subseteq x\, (n, m) \in u\}$.

3.6. Теорема. (i) *Непрерывная функция f однозначно определяется своим графиком*: $\mathrm{fun}(\mathrm{graph}(f)) = f$.

(ii) *Для любого $u \in \mathscr{P}\omega$ функция* $\mathrm{fun}(u)$ *непрерывна.*

Доказательство.

(i) $$\mathrm{fun}(\mathrm{graph}(f))(x) = \{m \mid \exists e_n \subseteq x\, (n, m) \in \mathrm{graph}(f)\}$$
$$= \{m \mid \exists e_n \subseteq x \;\; m \in f(e_n)\}$$
$$= \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\} = f(x) \text{ по 3.4.}$$

(ii) Пусть $f = \mathrm{fun}(u)$. Тогда $f(x) = \bigcup \{u_n \mid e_n \subseteq x\}$, где $u_n = \{m \mid (n, m) \in u\}$. Теперь

$$m \in f(x)$$
$$\Leftrightarrow \exists n\, [e_n \subseteq x \wedge m \in u_n] \Leftrightarrow \exists n\, [[e_n \subseteq e_n \wedge m \in u_n] \wedge e_n \subseteq x]$$
$$\Leftrightarrow \exists n\, [e_n \subseteq x \wedge m \in f(e_n)] \Leftrightarrow m \in \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\}.$$

Поэтому $f(x) = \bigcup \{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\}$ и применимо 3.4. □

В общем случае $\mathrm{graph}(\mathrm{fun}(u)) = u$ не имеет места, верно только $\supseteq$.

3.7. Аппликация (применение функции к аргументу) в $\mathscr{P}\omega$ определяется соотношением $u \cdot x = \mathrm{fun}(u)(x)$.

3.8. Лемма. *Функция f: $\mathscr{P}\omega^k \to \mathscr{P}\omega$ непрерывна тогда и только тогда, когда f непрерывна по каждой переменной в отдельности* (т. е. $\lambda x.f(x, y_0)$ *и* $\lambda y.f(x_0, y)$ *непрерывны для всех* x_0, y_0).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Как всегда.

($\Leftarrow$) Достаточно доказать это для $k = 2$. Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x и y в отдельности. Тогда

$$f(x, y) = \bigcup \{f(e_n, y) \mid e_n \subseteq x\} = \bigcup \{f(e_n, e_m) \mid e_n \subseteq x,\ e_m \subseteq y\}.$$

Непрерывность f в смысле топологии произведения получается отсюда, как в доказательстве 3.4. □

3.9. Лемма (непрерывность аппликации). *Определим* Ap: $\mathscr{P}\omega^2 \to \mathscr{P}\omega$ *соотношением* $\mathrm{Ap}(u, x) = u \cdot x$. *Тогда* Ap *непрерывна.*

Доказательство. $\lambda x.\mathrm{Ap}(u, x) = \lambda x.(u \cdot x) = \mathrm{fun}(u)$, которая непрерывна по теореме 3.6 (ii).

$$\lambda u.\ \mathrm{Ap}(u, x) = \lambda u.\ (u \cdot x) = \lambda u.\ \{m \mid \exists e_n \subseteq x\, (n, m) \in u\},$$

которая очевидным образом непрерывна. Нужный результат следует теперь из 3.8. □

3.10. Лемма (непрерывность абстракции). *Пусть* $f(x, \vec{y})$: $\mathscr{P}\omega^{k+1} \to \mathscr{P}\omega$ *непрерывна. Положим по определению* $g(\vec{y}) = \mathrm{graph}(\lambda x.f(x, \vec{y}))$. *Тогда* g: $\mathscr{P}\omega^k \to \mathscr{P}\omega$ *непрерывна.*

Доказательство. Для простоты возьмем $k = 1$. Отметим, что g корректно определена в силу 3.8. Теперь

$$g(y) = \mathrm{graph}(\lambda x.\ f(x, y)) = \{(n, m) \mid m \in f(e_n, y)\}$$
$$= \{(n, m) \mid m \in \bigcup \{f(e_n, e) \mid e \subseteq y\}\} = \{(n, m) \mid \exists e \subseteq y\ m \in f(e_n, e)\}$$
$$= \bigcup \{\{(n, m) \mid m \in f(e_n, e)\} \mid e \subseteq y\} = \bigcup \{g(e) \mid e \subseteq y\}.$$

Следовательно, применима 3.4. □

3.11. Теорема. $\langle \mathscr{P}\omega, \cdot \rangle$ *является с. э. λ-алгеброй.*

Доказательство. Для непрерывной f: $\mathscr{P}\omega^{k+1} \to \mathscr{P}\omega$ положим по определению $\lambda^* d.\ f(d, \vec{e}) = \mathrm{graph}(\lambda d.\ f(d, \vec{e}))$. В силу 3.10 это непрерывная функция от $\vec{e}$, а в силу 3.7 и 3.6 (i) мы имеем $(\lambda^* d.f(d, \vec{e})).\ d = f(d, \vec{e})$. Теперь для $A \equiv A(x, y_1, \ldots, y_k) \in T(\mathscr{P}\omega)$, где $\{\vec{y}\} = \mathrm{FV}(A) - \{x\}$, положим по определению $\lambda^* x.\ A = c_a \cdot \vec{y}$, где $a = \lambda^* e_1 \ldots \lambda^* e_k \lambda^* d.\ (A(c_d, c_{e_1}, \ldots, c_{e_k})^{\mathscr{P}\omega})$ и $\ldots^{\mathscr{P}\omega}$ обозначает интерпретацию в $\mathscr{P}\omega$. Это превращает $\mathscr{P}\omega$

в λ-алгебру. Так как λ^* определяется для экстенсиональных функций, $\mathscr{P}\omega$ с λ^* является с. э. □

Скотт [2] рассматривает расширение λ-исчисления, обозначаемое через LAMBDA, вместе с некоторой интерпретацией в $\mathscr{P}\omega$. Доказано, что внутренность $\mathscr{P}\omega$ относительно LAMBDA состоит в точности из рекурсивно перечислимых множеств.

§ 4. Построение алгебр D_∞

Результаты этого параграфа принадлежат Скотту [1]. И снова непрерывность оказывается существенной при построении модели.

Сначала рассматриваются полные решетки и индуцированные топологии на них. Затем следует построение λ-алгебр D_∞ как проективных (и в то же время прямых) пределов этих решеток.

4.1. Определение. Пусть D — полная решетка, т. е. частично упорядоченное множество $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ такое, что каждое подмножество $X \subset D$ имеет супремум $\bigsqcup X \in D$. Тогда каждое подмножество X имеет также и инфимум (точную нижнюю грань):

$$\bigsqcap X = \bigsqcup \{z \mid z \sqsubseteq X\}, \quad \text{где} \quad z \sqsubseteq X \Leftrightarrow \forall x \in X z \sqsubseteq x.$$

Верхушка $\top = \bigsqcup D$ и низ $\bot = \bigsqcap D$ — это соответственно наибольший и наименьший элементы множества D. Подмножество $X \subset D$ *направлено*, если $\forall x \in X \forall y \in X \exists z \in X\ x, y \sqsubseteq z$. Далее, $x \sqcup y$ $(x \sqcap y)$ есть супремум (инфимум) множества $\{x, y\}$. D, D', D'', ... будут обозначать полные решетки.

4.2. Определение. Подмножество $U \subset D$ *открыто* тогда и только тогда, когда:

(i) $x \in U$ и $x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in U$,

(ii) $\bigsqcup X \in U \Rightarrow X \cap U \neq \varnothing$ для всех направленных $X \subset D$.

D и $\varnothing$ открыты, и семейство всех открытых множеств замкнуто относительно произвольных объединений. Если U_1, U_2 открыты, то $U_1 \cap U_2$ открыто из-за того, что в (ii) множество X направленное. Следовательно, частичный порядок индуцирует на D топологию. Заметим, что множества $U_x = \{z \mid z \not\sqsubseteq x\}$ открыты и что $x \notin U_x$. Поэтому эта топология класса T_0: если x, y различны, допустим, $x \not\sqsubseteq y$, то $x \in U_y$, $y \notin U_y$. Пространство не является T_1: если $x \sqsubseteq y$ и $x \in U$, причем U открыто, то $y \in U$.

4.3. Лемма. *Отображение* $f\colon D \to D'$ *непрерывно* $\Leftrightarrow f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X)$ *для всех направленных* $X \subset D$ *(где* $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ *и второй* $\bigsqcup$ *нужно брать в* D'*).*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть f непрерывна. Допустим, что $x \sqsubseteq y$, чтобы показать, что $f(x) \sqsubseteq f(y)$. Если это не так, то $f(x) \in U_{f(y)}$, так что $x \in f^{-1}(U_{f(y)})$, которое открыто. Поэтому $y \in f^{-1}(U_{f(y)})$, т. е. $f(y) \in U_{f(y)}$, что дает противоречие. Следовательно, f монотонна. Отсюда и из $\bigsqcup X \sqsupseteq X$ следует, что $f(\bigsqcup X) \sqsupseteq f(X)$. Поэтому $f(\bigsqcup X) \sqsupseteq \bigsqcup f(X)$. Если $f(\bigsqcup X) \not\sqsupseteq \bigsqcup f(X)$, то $f(\bigsqcup X) \in U_{\bigsqcup f(X)}$ и противоречие получается так же, как выше, с использованием условия (ii) для открытых множеств.

($\Leftarrow$) Снова f монотонна, так как $x \sqsubseteq y$ влечет $y = x \sqcup y$, откуда $f(y) = f(x) \sqcup f(y)$, так что $f(x) \sqsubseteq f(y)$. Поэтому, если $U \subset D'$ открыто, то это верно для $f^{-1}(U) \subset D$. □

4.4. Определение. Если $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup f(X)$ верно для любого X, то f называется *дистрибутивным*.

4.5. Следствие. *Пусть* $f_i\colon D \to D'$ *— совокупность непрерывных отображений. Положим* $f = \lambda x. \bigsqcup_i f_i(x)$. *Тогда* f *дистрибутивна.*

Доказательство. $f(\bigsqcup X) = \bigsqcup_i \bigsqcup_{x \in X} f_i(x) = \bigsqcup_{x \in X} \bigsqcup_i f_i(x) = \bigsqcup f(X)$. □

4.6. Определение. $D \times D'$ — это декартово произведение, частично упорядоченное отношением: $\langle x, x'\rangle \sqsubseteq \langle y, y'\rangle$ тогда и только тогда, когда $x \sqsubseteq x'$ и $y \sqsubseteq y'$. $[D \to D']$ — множество непрерывных отображений $\in D \to D'$, частично упорядоченное отношением $f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall x \in D\ f(x) \sqsubseteq g(x)$. Тогда $D \times D'$ и $[D \to D']$ — полные решетки, причем $\bigsqcup X = \langle \bigsqcup (X)_0, \bigsqcup (X)_1\rangle$ для $X \subset D \times D'$ и $\bigsqcup F = \lambda x. \bigsqcup \{f(x) \mid f \in F\}$ для $F \subset [D \to D']$. (Если $z = \langle x, y\rangle$, то полагаем $z_0 = x$, $z_1 = y$; $\bigsqcup F$ непрерывна в силу 4.5.) Индуцированная топология на $D \times D'$ не обязательно является произведением индуцированных топологий на D и D'.

4.7. Лемма. $f\colon D \times D' \to D''$ *непрерывна* $\Leftrightarrow f$ *непрерывна по каждой из своих переменных в отдельности* (*т. е.* $\lambda d.\, f(d, d'_0)$ *и* $\lambda d'.\, f(d_0, d')$ *непрерывны для всех* d_0, d'_0).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Как всегда.

($\Leftarrow$)
$$f(\bigsqcup X) = f\langle \bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1\rangle = \bigsqcup_{d \in X_0} f(d, \bigsqcup X_1) = \bigsqcup_{d \in X_0} \bigsqcup_{d' \in X_1} f(d, d') = \bigsqcup_{\langle d, d'\rangle \in X} f(d, d') = \bigsqcup f(X). \ \square$$

4.8. Лемма (непрерывность аппликации). *Определим* Ap *(аппликацию)* $[D \to D'] \times D \to D'$ *соотношением* $\mathrm{Ap}(f, x) = f(x)$. *Тогда* Ap *непрерывна.*

Доказательство. $\lambda x.\, f_0(x) = f_0$ непрерывна. $\lambda f.\, f(x_0) = h_0$ удовлетворяет равенствам $h_0(\bigsqcup F) = \bigsqcup F(x_0) = \bigsqcup_{f \in F} f(x_0) = \bigsqcup h_0(F)$. Следовательно, h_0 непрерывна. Поэтому Ap непрерывна в силу 4.7. □

4.9. Лемма (непрерывность абстракции). *Пусть* $f \in [D \times D' \to D'']$. *Положим по определению* $g_f(x) = \lambda y \in D'.f(x, y)$. *Тогда*

(i) g_f *непрерывна;*

(ii) $\lambda f.g_f$: $[D \times D' \to D''] \to [D \to [D' \to D'']]$ *непрерывна.*

Доказательство. (i) $g_f(\bigsqcup X) = \lambda y.\ f(\bigsqcup X, y) = \lambda y. \bigsqcup_{x \in X} f(x, y) = \bigsqcup_{x \in X} \lambda y.\, f(x, y) = \bigsqcup g_f(X).(\lambda y. \bigsqcup = \bigsqcup \lambda y$ следует из определения операции $\bigsqcup$ в пространстве функций.).

(ii) Пусть $L = \lambda f.\, g_f.\, L(\bigsqcup F) = \lambda x \lambda y. \bigsqcup F(x, y) = \lambda x \lambda y. \bigsqcup_{f \in F} f(x, y) = \bigsqcup_{f \in F} \lambda x \lambda y.\ f(x, y) = \bigsqcup L(F)$. □

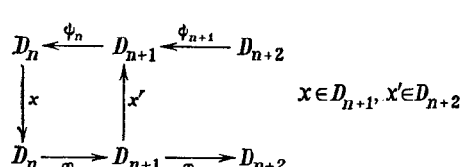
4.10. Определение. Пусть φ: $D \to D'$, ψ: $D' \to D$. $\langle \varphi, \psi \rangle$ есть *проекция* D на D' тогда и только тогда, когда

(i) φ, ψ непрерывны;
(ii) $\forall x \in D \psi(\varphi(x)) = x$;
(iii) $\forall x \in D' \varphi(\psi(x)) \sqsubseteq x$.

4.11. Определение (построение алгебры D_∞). Пусть D — произвольная нетривиальная полная решетка. Положим по определению $D_0 = D$, $D_{n+1} = [D_n \to D_n]$. Отображения φ_n: $D_n \to D_{n+1}$ и ψ_n: $D_{n+1} \to D_n$ определяются следующим образом:

$$\varphi_0(x) = \lambda y \in D_0.\, x, \quad \psi_0(x') = x'(\bot), \quad \text{где} \quad \bot \in D_0,$$

$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n \circ x \circ \psi_n$, $\psi_{n+1}(x') = \psi_n \circ x' \circ \varphi_n$ (см. диаграмму).



Непосредственно индукцией по n получаем, что $\langle \varphi_n, \psi_n \rangle$ — проекция D_{n+1} на D_n. Сверх того, φ_n и ψ_n дистрибутивны. Для

элемента $x = \langle x_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ произведения $\prod_{n=0}^{\infty} D_n$ обозначим через x_i его i-ю координату

$$D_\infty = \varprojlim (D_n, \psi_n) = \left\{ x \in \prod_n D_n \mid \forall n \in \omega \psi_n(x_{n+1}) = x_n \right\}.$$

Для $x, y \in D_\infty$ частичное упорядочение определяется так: $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall n \in \omega\ x_n \sqsubseteq y_n$. Тогда D_∞ — полная решетка, причем $\bigsqcup X = \langle \bigsqcup X_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ для $X \subset D_\infty$. Этот супремум принадлежит D_∞, так как $\psi_n(\bigsqcup X_{n+1}) = \bigsqcup \psi_n(X_{n+1}) = \bigsqcup X_n$ по дистрибутивности ψ_n.

4.12. Определение. Введем отображения Φ_{nm}: $D_n \to D_m$ (прослеживая стрелки в $D_0 \rightleftarrows D_1 \rightleftarrows \ldots$). Если $n \leqslant m$, пусть $m = n + k$, то Φ_{nm} определяется индукцией по k. $\Phi_{nn} = \lambda x \in D_n.x$. $\Phi_{n(m+1)} = \varphi_m \circ \Phi_{nm}$. Если $m \leqslant n$, скажем $n = m + k$, то Φ_{nm} снова определяется индукцией по k: $\Phi_{(n+1)m} = \Phi_{nm} \circ \psi_n$.

$\Phi_{n\infty}$: $D_n \to D_\infty$ определяется так: $\Phi_{n\infty}(x) = \langle \Phi_{ni}(x) \rangle_{i=0}^{\infty}$.

$\Phi_{\infty n}$: $D_\infty \to D_n$ определяется равенством $\Phi_{\infty n}(x) = x_n$.

4.13. Лемма. (i) $\langle \Phi_{nm}, \Phi_{mn} \rangle$ *есть проекция* D_n *на* D_m *при* $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant \infty$.

(ii) $\Phi_{ml} \circ \Phi_{nm} = \Phi_{nl}$ *для* $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant l \leqslant \infty$.

Доказательство очевидно. □

Отсюда следует, что $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_\infty$ с точностью до изоморфизма. В действительности в категории *полных* решеток с непрерывными отображениями в качестве морфизмов D_∞ является не только обратным пределом $\varprojlim (D_n, \psi_n)$, но и прямым пределом $D_\infty = \varinjlim (D_n, \varphi_n)$. Заметим, однако, что $D_\infty \neq \bigcup_n D_n$, так как D_∞ является пополнением множества $\bigcup D_n$. Начиная с этого момента, каждый элемент $x \in D_n$ будет отождествляться с $\Phi_{n\infty}(x) \in D_\infty$, как обычно делается при рассмотрении прямых пределов. В частности, верно следующее.

4.14. Лемма. (i) *Если* $x \in D_n$, *то* $x = x_n$.

(ii) *Если* $x \in D_n$, *то* $\varphi_n(x) = x$.

(iii) *Если* $x \in D_{n+1}$, *то* $\psi_n(x) \sqsubseteq x$.

Доказательство. (i) x в D_∞ — это $\langle \ldots, \psi(x), x, \varphi(x), \varphi(\varphi(x)), \ldots \rangle$. Следовательно, x_n есть x.

(ii) $\varphi_n(x)$ в D_∞ есть $\langle \ldots, \psi(\varphi_n(x)), \varphi_n(x), \varphi(\varphi_n(x)), \ldots \rangle$. Так как $\psi(\varphi(x)) = x$, получилось то же самое, что x в D_∞.

(iii) Аналогично с использованием $\varphi(\psi(x)) \sqsubseteq x$. □

Благодаря отождествлениям свойства решетки D_∞ формулируются более изящно.

4.15. Лемма. *В* D_∞ *верно следующее*:

(i) $(x_n)_m = x_{\min(n, m)}$.

(ii) *Если* $n \leqslant m$, *то* $x_n \sqsubseteq x_m \sqsubseteq x$.

(iii) $x = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} x_n$.

(iv) $\top_n$ *и* $\bot_n$ *— это вершина и низ в* D_n.

(v) $\bot_n = \bot$; $\top_n = \top$.

Доказательство. (i) Если $m \leqslant n$, то $(x_n)_m = \Phi_{nm} x_n = \psi \circ \ldots \circ \psi(x_n) = x_m$, так как $x \in D_\infty$. Если $m \geqslant n$, то $(x_n)_m = \varphi \circ \ldots \circ \varphi(x_n) = x_n$ в силу 4.14 (ii).

(ii) Прежде всего, в силу 4.14 (iii) $x_m \sqsubseteq x_{m+1}$, так как $x_m = \psi_m(x_{m+1})$. Следовательно, $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \ldots$ Далее, $x_n \sqsubseteq x$, так как $\forall i\, (x_n)_i = x_{\min(n,\, i)} \sqsubseteq x_i$.

(iii) $\bigsqcup_n x_n = \left\langle \bigsqcup_n (x_n)_i \right\rangle_{i=0}^{\infty} = \left\langle \bigsqcup_n x_{\min(n,\, i)} \right\rangle_{i=0}^{\infty} = \langle x_i \rangle_{i=0}^{\infty} = x$.

(iv) Пусть $\top'_n$ и $\bot'_n$ — соответственно вершина и низ в D_n. Тогда

$$\top = \bigsqcup D_\infty = \left\langle \bigsqcup D_n \right\rangle_{n=0}^{\infty} = \langle \top'_n \rangle_{n=0}^{\infty}$$

и

$$\bot = \bigsqcup \varnothing = \left\langle \bigsqcup \varnothing \right\rangle_{n=0}^{\infty} = \langle \bot'_n \rangle_{n=0}^{\infty}.$$

Следовательно, $\top_n = \top'_n$, $\bot_n = \bot'_n$.

(v) В силу (ii) всегда $\bot_n \sqsubseteq \bot$, $\bot \sqsubseteq \bot_n$. Поэтому $\bot_n = \bot$. С другой стороны, по индукции получается $\varphi_n(\top_n) = \top_{n+1}$, так как $\top_{n+1} = \lambda x \in D_n.\, \top_n$. Сверх того, $\psi_n(\top_{n+1}) = \top_n$, так как $\langle \top_n \rangle_{n \in \omega} \in D_\infty$. Поэтому $\top_n$ в D_∞, т. е. $\langle \Phi_{nm}(\top_n) \rangle_{m \in \omega}$, совпадает с $\langle \top_m \rangle_{n \in \omega} = \top$. □

4.16. Определение. В D_∞ мы можем определить двухместную операцию аппликации. $x \cdot y = \bigsqcup_n x_{n+1}(y_n)$. В правой части этого равенства аппликация понимается обычным образом в $D_{n+1} \times D_n \to D_n$, а $\bigsqcup$ берется в D_∞ после отождествления.

4.17. Лемма. *Аппликация корректно определена в том смысле, что если* $x_{n+1} \in D_{n+1}$ *и* $y \in D_n$, *то* $x_{n+1} \cdot y_n = x_{n+1}(y_n)$.

Доказательство.

$$x_{n+1} \cdot y_n = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} (x_{n+1})_{i+1}((y_n)_i)$$

$$= \bigsqcup_{i=0}^{n} x_{i+1}(y_i) \quad \text{в силу 4.15 (i)}$$

$$= x_{n+1}(y_n) \quad \text{в силу 4.15 (ii)}. \ \square$$

4.18. Лемма. *Аппликация непрерывна.*

Доказательство. $x \cdot y = \bigsqcup_n \Phi_{n\infty}(x_{n+1}(y_n))$. Теперь применяем 4.5, 4.8 и 4.13. □

4.19. Лемма. (i) $x_{n+1} \cdot y = x_{n+1} \cdot y_n = (x \cdot y_n)_n$.

(ii) $x_0 \cdot y = x_0 = (x \cdot \bot)_0$.

Доказательство. Сначала индукцией по $i \geqslant n$ показываем, что $(x_{n+1})_{i+1}(y_i) = x_{n+1}(y_n)$. Для $i = n$ это очевидно. Теперь

$$\begin{aligned}(x_{n+1})_{i+2}(y_{i+1}) &= \varphi_{i+1}((x_{n+1})_{i+1})(y_{i+1}) \\ &= \varphi_i \circ (x_{n+1})_{i+1} \circ \psi_i(y_{i+1}) = \varphi_i((x_{n+1})_{i+1}(y_i)) \\ &= (x_{n+1})_{i+1}(y_i) \text{ в силу 4.14 (ii)} \\ &= x_{n+1}(y_n)\end{aligned}$$

по индукционному предположению. Поэтому

$$x_{n+1} \cdot y = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} (x_{n+1})_{i+1}(y_i)$$

$$= \bigsqcup_{i=n}^{\infty} x_{n+1}(y_n) = x_{n+1} \cdot y_n \text{ (по 4.17)}.$$

Снова индукцией по $i \geqslant n$ показываем, что $\langle x_{i+1}(y_n)_i \rangle_n = x_{n+1}(y_n)$. Для $i = n$ это ясно. Теперь

$$\begin{aligned}(x_{i+2}(y_n)_{i+1})_n &= \Phi_{i+1\, n}(x_{i+2}(\varphi_i((y_n)_i))) = \Phi_{in} \circ \psi_i \circ x_{i+2}(\varphi_i\,(y_n)_i) \\ &= \Phi_{in}(\psi_{i+1}(x_{i+2}))(y_n)_i) = \Phi_{in}(x_{i+1}(y_n)_i) \\ &= (x_{i+1}(y_n)_i)_n = x_{n+1}(y_n)\end{aligned}$$

по индукционному предположению. Поэтому

$$(x \cdot y_n)_n = \Big(\bigsqcup_i x_{i+1}((y_n)_i)\Big)_n = \bigsqcup_i (x_{i+1}((y_n)_i))_n =$$

$$= \bigsqcup_i x_{n+1}(y_n) = x_{n+1} \cdot y_n.$$

(ii) В силу (i) имеем $x_0 \cdot y = (x_0)_1 \cdot y = (x_0)_1(y_0) = \varphi_0(x_0)\,(y_0) = x_0$. Кроме того, $x_0 = \psi_0(x_1) = x_1(\bot_0) = (x_1 \cdot \bot_0)_0 = (x \cdot \bot)_0$. □

4.20. Теорема (экстенсиональность). *Для* $x, y \in D_\infty$:

(i) $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall z \in D_\infty\, x \cdot z \sqsubseteq y \cdot z$,

(ii) $x = y \Leftrightarrow \forall z \in D_\infty\, x \cdot z = y \cdot z$.

Доказательство. (i) ($\Rightarrow$) Ввиду монотонности $\lambda x.\, (x \cdot z)$.

($\Leftarrow$) Допустим, что $\forall z\ x \cdot z \sqsubseteq y \cdot z$. Тогда $x \cdot \bot \sqsubseteq y \cdot \bot$, поэтому $x_0 = (x \cdot \bot)_0 \sqsubseteq (y \cdot \bot)_0 = y_0$ ввиду 4.19 (ii). Сверх того, $x \cdot z_n \sqsubseteq y \cdot z_n$, так что $x_{n+1}(z_n) = (x \cdot z_n)_n \sqsubseteq (y \cdot z_n)_n = y_{n+1}(z_n)$ по 4.17 и 4.19 (i). Следовательно, $x_{n+1} \sqsubseteq y_{n+1}$. Теперь мы имеем $\forall n\ x_n \sqsubseteq y_n$, т. е. $x \sqsubseteq y$.

(ii) Непосредственно следует из (i). □

4.21. Теорема (полнота). $\forall f \in [D_\infty \to D_\infty]\, \exists x \in D_\infty f(y) = x \cdot y$.

Доказательство. Пусть $x = \bigsqcup_n (\lambda y \in D_n.\ (f(y))_n)$. Отметим, что это — супремум направленного множества. Для элементов a_{ij} полной решетки имеем $\bigsqcup_{i,j} a_{ij} = \bigsqcup_k a_{kk}$, если $\forall i \forall j \exists k\ a_{ij} \sqsubseteq a_{kk}$. Теперь

$$x \cdot y = \bigsqcup_m x_{m+1}(y_m) = \bigsqcup_m (x \cdot y_m)_m$$
$$= \bigsqcup_m \Big(\Big(\bigsqcup_n \lambda y \in D_n.\ (f(y))_n \Big) \cdot y_m \Big)_m$$
$$= \bigsqcup_{m,n} (\lambda y \in D_n.\ (f(y))_n \cdot y_m)_m^{\cdot} = \bigsqcup_m (\lambda y \in D_m.\ (f(y))_m \cdot y_m)$$
$$= \bigsqcup_m (f(y_m))_m = \bigsqcup_{k,l} (f(y_k))_l = \bigsqcup_k f(y_k) = f(y).$$

Пояснения, которые должны сопровождать эти уравнения, легко следуют из непрерывности (монотонности) рассматриваемых функций и из сделанного выше замечания. □

4.22. Следствие. D_∞ *гомеоморфно* $[D_\infty \to D_\infty]$.

Доказательство. Для $x \in D_\infty$ положим $F(x) = \lambda y \in D_\infty . x \cdot y$. F сюръективно по 4.21, инъективно по 4.20, непрерывно по 4.9 (i). Обращение F — это, в силу доказательства теоремы 4.21, $\lambda f.\ \bigsqcup_n (\lambda y \in D_n.\ (f(y))_n)$, которая непрерывна по 4.9 (ii) и 4.5. □

4.23. Теорема. D_∞ *есть экстенсиональная* λ*-алгебра.*

Доказательство. Комбинаторная полнота следует из 4.21, так как аппликация и абстракция непрерывны. Экстенсиональность была доказана в 4.20 (ii). Следовательно, применимо 1.16(2). □

Так как D_∞ экстенсиональна, то не возникает неоднозначности при интерпретации в ней λ-термов. Однако для ссылок в дальнейшем мы сформулируем эту интерпретацию явно.

4.24. Определение. (i) Оценка (в D_∞) — это отображение ρ: переменные $\to D_\infty$.

(ii) Для $d \in D_\infty$ и переменной x через $\rho(d/x)$ обозначим оценку ρ' такую, что $\rho'(y) =$ если $y \not\equiv x$, то $\rho(y)$, иначе d.

(iii) Интерпретация $[\![M]\!]\rho$ терма M в D_∞ при оценке ρ определяется индуктивно: $[\![x]\!]\rho = \rho(x)$, $[\![MN]\!]\rho = [\![M]\!]\rho\,[\![N]\!]\rho$, $[\![\lambda x.M]\!]\rho = \lambda d.\,[\![M]\!]\rho(d/x) \in D_\infty$ после отождествления с $[D_\infty \to D_\infty]$.

Грубо говоря, в интерпретации формальные переменные заменяются переменными, пробегающими D_∞, а аппликация и абстракция должны браться в D_∞. Отсюда должно быть очевидно, что эта интерпретация корректна. Это можно уточнить, показав индуктивно, что

$$[\![(\lambda x.M)\,N]\!]\rho = [\![M]\!]\rho([\![N]\!]\rho/x)[\![M(x/N)]\!]\rho.$$

Везде, где это возможно, мы будем опускать упоминание об оценке ρ в записи $[\![M]\!]\rho$.

§ 5. Разрешимость

Понятие разрешимости и родственное понятие головной нормальной формы были введены соответственно в диссертациях Барендрегта и Уодсворта. Оба они подсказывают доводы в пользу вычислительной бесполезности неразрешимых термов. Поэтому λ-теория (или λ-алгебра) называется *разумной*, если она приравнивает все неразрешимые термы. Оказывается, что имеется единственная максимальная разумная теория. В § 7 будет доказано, что эта теория равна $\mathrm{Th}(D_\infty)$.

5.1. Определение. (i) Замкнутый терм M *разрешим* тогда и только тогда, когда $\lambda \vdash MN_1 \ldots N_n = I$ для некоторого n и термов $N_1, \ldots, N_n$.

(ii) Произвольный терм M разрешим тогда и только тогда, когда разрешимо замыкание $\lambda\vec{x}.M$ терма M. Терм M *неразрешим* тогда и только тогда, когда M не является разрешимым.

(iii) $\mathscr{H} = \{M = N \mid M, N$ неразрешимы$\}$.

Чтобы понять особую роль I в этом определении, заметим, что (замкнутый) терм M разрешим тогда и только тогда, когда $\forall P \exists \vec{N} M\vec{N} = P$.

5.2. Определение. (i) Каждый λ-терм M имеет вид

$$\lambda x_1 \ldots x_n.\ (\lambda x.\ P)QM_1 \ldots M_m \text{ или } \lambda x_1 \ldots x_n.\ x_i M_1 \ldots M_m,$$

где $m, n \geqslant 0$. В первом случае $(\lambda x.P)Q$ называется *головным редексом* терма M. Во втором случае x_i называется *головной переменной* терма M, и говорят, что M находится в *головной нормальной форме* (г. н. ф.).

Следующее утверждение можно доказать синтаксически. Семантическое доказательство будет дано в 7.9 и 7.10.

5.3. Теорема. (i) M *разрешим* $\Leftrightarrow M$ *имеет г. н. ф.*

(ii) $\lambda\eta + \mathscr{H}$ *непротиворечиво.*

5.4. Примеры. I и Y разрешимы; Ω и $K^\infty = YK$ неразрешимы (заметим, что $\lambda \vdash Y(KI) = I$, $\Omega N_1 \ldots N_n \to M \Rightarrow M \equiv \Omega N_1' \ldots N_n'$ с $N_i \to N_i'$ и $\lambda \vdash K^\infty M = K^\infty$ для всех M). Отметим также, что $\lambda + \mathscr{H} \vdash \lambda x.\Omega = \Omega x = \Omega$, так как неразрешимость терма M влечет неразрешимость термов MN, $\lambda x.M$.

5.5. Определение. (i) Контекст $C[\cdot]$ — это терм с дырками в нем. Более формальное определение таково. Любая переменная x есть контекст, $[\cdot]$ есть контекст, если $C_1[\cdot], C_2[\cdot]$ —

контексты, то $(C_1[\cdot]C_2[\cdot])$ и $(\lambda x.C[\cdot])$ — тоже контексты. Если M — произвольный терм, $C[\cdot]$ — контекст, то $C[M]$ обозначает результат размещения M в дырах контекста $C[\cdot]$. При этом свободные переменные терма M могут стать связанными в $C[M]$.

(ii) Скажем, что M и N *разрешимо эквивалентны*, и будем писать $M \sim_s N$ тогда и только тогда, когда для любого контекста $C[\cdot]$ разрешимость $C[M]$ эквивалентна разрешимости $C[N]$.

(iii) $\mathscr{H}^* = \{M = N \mid M, N \in \Lambda^0 \text{ и } M \not\sim_s N\}$.

5.6. Лемма. $\mathscr{H}^* = \mathscr{H}^{*+}$.

Доказательство. Индукция по длине вывода показывает, что $\lambda + \mathscr{H}^* \vdash M = N \Rightarrow M \sim_s N$. □

5.7. Следствие. *$\mathscr{H}^*$ непротиворечиво и, следовательно, является λ-теорией.*

Доказательство. $I \not\sim_s \Omega$, следовательно, $I = \Omega \notin \mathscr{H}^*$. □

5.8. Лемма. *Если $\mathscr{H} + M = N$ непротиворечиво, то $\mathscr{H}^* \vdash M = N$.*

Доказательство. Отметим сначала, что $\{I = K^\infty\}$ противоречиво: $\lambda + I = K^\infty \vdash M = IM = K^\infty M = K^\infty$ для всех M. Допустим теперь, что $M = N \notin \mathscr{H}^*$. Рассмотрим случай, когда разрешим $C[M]$, а неразрешим $C[N]$ для некоторого $C[\cdot]$. Тогда $\lambda \vdash (\vec{\lambda x}.C[M])\vec{P} = I$ для некоторого $\vec{P}$, и $\mathscr{H} \vdash C[N] = K^\infty$. Теперь

$$\lambda + \mathscr{H} + M = N \vdash I = (\lambda x.\, C[M])\vec{P} = (\vec{\lambda x}.\, C[N])\vec{P}$$
$$= (\vec{\lambda x}.\, K^\infty)\vec{P} = K^\infty \vec{P} = K^\infty,$$

поэтому $\lambda + \mathscr{H} + M = N$ было бы противоречиво. □

5.9. Следствие. (i) *$\mathscr{H}^*$ — единственная максимальная λ-теория, содержащая $\mathscr{H}$.*

(ii) *Сверх того, в $\mathscr{H}^*$ выводима экстенсиональность.*

Доказательство. (i) Так как $\mathrm{Con}(\mathscr{H})$ верно в силу 5.3, имеем $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}^*$ по 5.8. Если T — непротиворечивое расширение $\mathscr{H}$, то для каждого $M = N \in T$ имеем $M = N \in \mathscr{H}^*$ по 5.8, поэтому $T \subset \mathscr{H}^*$. Тем самым $\mathscr{H}^*$ содержит каждое непротиворечивое расширение системы $\mathscr{H}$, и так как в силу 5.7 оно само непротиворечиво, мы получаем наше утверждение.

(ii) $\lambda + \mathscr{H} + (\lambda x.Mx) = M$ $(x \notin \mathrm{FV}(M))$ непротиворечиво в силу 5.3 (ii). Следовательно, $\mathscr{H}^* \vdash \lambda x.Mx = M$. □

Возможность того, что $\mathscr{H}$ имеет единственное максимально непротиворечивое расширение, связана с тем фактом, что язык λ-исчисления свободен от логики, т. е. нет возможности построить по суждению σ два расширения путем присоединения σ или $\neg\sigma$ соответственно, так как этот язык не содержит отрицания. Однако теория λ имеет $2^{\aleph_0}$ максимально непротиворечивых расширений.

5.10. Определение. λ-алгебра $\mathfrak{M}$ *разумна*, если $\mathfrak{M} \models \mathscr{H}$. В этом случае $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \subset \mathscr{H}^*$ в силу 5.9.

«Наименьшая» разумная модель есть $\mathfrak{M}^0(\mathscr{H}^*)$.

5.11. Следствие. *$\mathfrak{M}^0(\mathscr{H}^*)$ алгебраически проста, т. е. не имеет собственных гомоморфных образов.*

Доказательство. Если бы $\mathfrak{M}$ была собственным образом модели $\mathfrak{M}^0(\mathscr{H}^*)$, то $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ была бы собственным расширением системы $\mathscr{H}^*$. □

В § 7 будет показано, что $\mathfrak{M}^0(\mathscr{H}^*)$ — внутренность модели D_∞.

§ 6. Деревья Бёма

Деревья, которые вводятся в этом параграфе, подсказаны доказательством теоремы Бёма 2.23 и понятием разрешимости. Деревья Бёма полезны для анализа моделей $\mathscr{P}\omega$ и D_∞. См. Накадзима [1], где имеется родственное семейство деревьев.

6.1. Определение. *Дерево* — это множество A натуральных чисел, являющихся номерами конечных последовательностей (1.7 гл. 3), такое, что:

(i) если $\alpha \in A$ и $\beta < \alpha$ (в частичном упорядочении номеров последовательностей), то $\beta \in A$;

(ii) для каждого $\alpha \in A$ имеется лишь конечное число непосредственных наследников α в A. Числа $\alpha \in A$ называются *узлами* дерева. Глубина узла $\alpha = \langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle$, обозначаемая через $d(\alpha)$, — это число k. $*$ обозначает конкатенацию, т. е. $\vec{\langle n\rangle} * \vec{\langle m\rangle} = \vec{\langle n, m\rangle}$. *Поддерево* A_α с корнем α дерева A — это множество $\{\beta \mid \alpha * \beta \in A\}$.

6.2. Определение. (i) *Оснащенное* дерево — это дерево, в каждом узле которого помещен символ Ω или $\lambda x_1 \ldots x_n.x_i$ для каких-то переменных $x_1, \ldots, x_n, x_i$. Точнее, оснащенное дерево — это отображение f_A номеров последовательностей в множество

$$\{*, \Omega\} \cup \{\langle\langle i_1, \ldots, i_n\rangle, i\rangle \mid i, n, i_1, \ldots, i_n \in \omega\}$$

такое, что $A = \{\alpha \mid f_A(\alpha) \neq *\}$ есть дерево. $f_A(\alpha) = \langle\langle i_1, \ldots, i_n\rangle, i\rangle$ (соответственно Ω) означает, что терм $\lambda a_{i_1} \ldots a_{i_n}.\, a_i$ (соответственно Ω) написан в узле $\alpha \in A$.

(ii) Если A, B — оснащенные деревья, то

$$A =_k B \Leftrightarrow \forall \alpha\, [[d(\alpha) < k \Rightarrow f_A(\alpha) = f_B(\alpha)]$$
$$\wedge\, [d(\alpha) = k \Rightarrow f_A(\sigma) \neq * \Leftrightarrow f_B(\alpha) \neq *]],$$

т. е. для глубин $< k$ эти оснащенные деревья равны, и узлы глубины $k - 1$ имеют одно и то же количество наследников.

6.3. Определение. *Дерево Бёма* $\mathrm{BT}(M)$ для λ-терма M — это оснащенное дерево, определяемое следующим образом.

Если M неразрешим, то $\mathrm{BT}(M) = \Omega$. Если M разрешим, то в силу 5.3 он имеет г. н. ф. Если она есть $\lambda x_1 \ldots x_n.x_i M_1 \ldots M_m$, то $\mathrm{BT}(M)$ есть

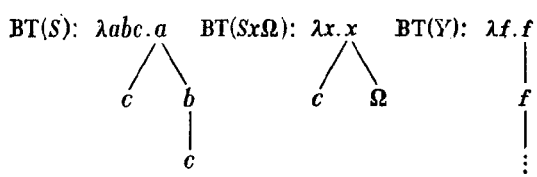
$$\begin{array}{c} \lambda x_1 \ldots x_n.x_i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathrm{BT}(M_1) \ldots \mathrm{BT}(M_m) \end{array}$$

Точнее, если M неразрешим, то $\mathrm{BT}(M)(\langle\cdot\rangle) = \Omega$, $\mathrm{BT}(M)(\langle j\rangle * \alpha) = *$. Если M разрешим и имеет г. н. ф. $\lambda a_{i_1} \ldots a_{i_n}.\, a_i M_0 \ldots M_{m-1}$, то $\mathrm{BT}(M)(\langle\cdot\rangle) = \langle\langle i_1, \ldots, i_n\rangle, i\rangle$, $\mathrm{BT}(M)(\langle j\rangle * \alpha) = \mathrm{BT}(M_j)(\alpha)$ для $j < m$ и $\mathrm{BT}(M)(\langle j\rangle * \alpha) = *$ для $j \geqslant m$.

Свободные и связанные вхождения переменной в дерево Бёма определяются так же, как для термов. Как и термы, деревья Бёма рассматриваются с точностью до замены связанных переменных.

Из теоремы Чёрча — Россера следует, что если M имеет г. н. ф. $\lambda x_1 \ldots x_n.x_i M_1 \ldots M_m$, то n, i, m определены однозначно. Следовательно, дерево Бёма для M корректно определено и $\lambda \vdash M = N$ влечет $\mathrm{BT}(M) = \mathrm{BT}(N)$.

6.4. Пример.



Отметим, что хотя $\lambda x.x$ и $\lambda xy.xy$ экстенсионально равны, они имеют различные деревья Бёма. Поэтому вводится следующее отношение эквивалентности.

6.5. Определение. (i) Термы M', N' *сливают* $\mathrm{BT}(M)$ и $\mathrm{BT}(N)$ до (глубины) k, если $\lambda\eta \vdash M = M'$, $\lambda\eta \vdash N = N'$ и $\mathrm{BT}(M') \equiv_k \mathrm{BT}(N')$.

(ii) Скажем, что M, N имеют *эквивалентные* деревья Бёма, и будем писать $\mathrm{BT}(M) \sim_\eta \mathrm{BT}(N)$, если для всех k существуют M', N' такие, что M', N' сливают $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ до k.

Теперь мы дадим несколько примеров термов с равными или эквивалентными деревьями Бёма.

6.6. Пример. (i) По теореме о неподвижной точке существует терм A такой, что $Ax \to \lambda z.z(Ax)$. Тогда $\mathrm{BT}(Ax) = \mathrm{BT}(Ay)$ (x и y исчезают из дерева).

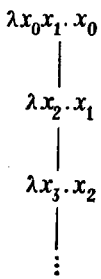
(ii) Пусть $Y_z = \lambda f.(\lambda xz.f(xxz))(\lambda xz.f(xxz))z$. Тогда Y_z — новый оператор неподвижной точки, не конвертируемый с Y. Однако $\mathrm{BT}(Y_z) = \mathrm{BT}(Y)$.

(iii) $\mathrm{BT}(\lambda x.x) \sim_\eta \mathrm{BT}(\lambda xy.xy)$.

Далее следует менее тривиальный пример эквивалентных деревьев Бёма. Вместе с теоремой характеризации 7.1 он показывает, что в D_∞ нормальная форма может быть равна терму без н. ф.

6.7. Пример (Уодсворт). Пусть $J = Y(\lambda jxy.x(jy))$. Тогда $\mathrm{BT}(J) \sim_\eta \mathrm{BT}(I)$.

Доказательство. Г. н. ф. терма J есть $\lambda x_0 x_1.x_0(Jx_1)$, поэтому $\mathrm{BT}(J)$ имеет вид



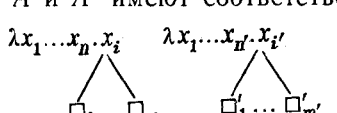
Оно может быть слито до любой глубины с $\mathrm{BT}(I)$ с помощью η-расширений (т. е. операций, противоположных η-редукциям) последнего. □

6.8. Теорема. $\mathscr{H}^* \vdash M = N \Rightarrow \mathrm{BT}(M) \sim_\eta \mathrm{BT}(N)$.

Довольно техничное доказательство занимает всю оставшуюся часть этого параграфа и может быть пропущено при первом чтении.

6.9. Определение. Пусть A, A' — деревья Бёма.

(i) A, A' можно *слить при вершине*, если либо оба они совпадают с Ω, либо A и A' имеют соответственно вид



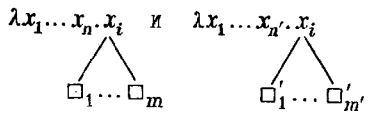
причем $i = i'$ и $n - m = n' - m'$ (возможно, отрицательные числа); мы можем считать, что последовательности $x_1, \ldots, x_n$ и $x_1, \ldots, x_{n'}$ начинаются одинаково, так как можно переименовать связанные переменные.

(ii) Пусть α — общий узел деревьев A, A'. Скажем, что A, A' можно *слить в узле* α, если A_α, A'_α можно слить при вершине.

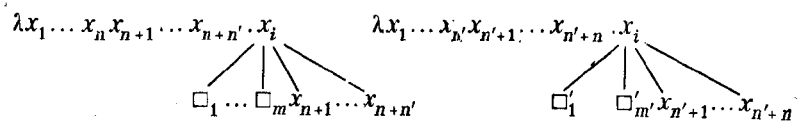
(iii) A, A' *отделяются на глубине* k, если $A \equiv_k A'$ и A, A' нельзя слить в некотором общем узле α с $d(\alpha) = k$.

6.10. Лемма. *Пусть* $\mathrm{BT}(M) \equiv_k \mathrm{BT}(N)$. *Если* $\mathrm{BT}(M), \mathrm{BT}(N)$ *можно слить во всех узлах* α *с* $d(\alpha) = k$, *то их можно слить до* $k + 1$.

Доказательство. Пусть $d(\alpha)=k$. $\mathrm{BT}(M)_\alpha$, $\mathrm{BT}(N)_\alpha$ имеют вид



Теперь сделаем следующие η-замены:



Заметим, что $m+n'=m'+n$ из-за возможности слияния в узле α, поэтому после замены α имеет одно и то же количество наследников в обоих деревьях. После того как эта замена сделана для всех α с $d(\alpha)=k$, результирующие оснащенные деревья оказываются деревьями Бёма для термов M', N', которые сливают $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ до $k+1$. □

6.11. Следствие. *Если* $\mathrm{BT}(M)\not=_\eta \mathrm{BT}(N)$, *то существуют* k, M', N' *такие, что* M', N' *сливают* $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ *до* k *и* $\mathrm{BT}(M')$, $\mathrm{BT}(N')$ *отделяются на глубине* k.

Доказательство. Пусть k — наибольшее число такое, что $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ можно слить до k с помощью термов M', N'. Тогда $\mathrm{BT}(M')\equiv_k \mathrm{BT}(N')$. Допустим, что $\mathrm{BT}(M')$, $\mathrm{BT}(N')$ можно слить во всех узлах α с $d(\alpha)=k$. Тогда в силу 6.10 $\mathrm{BT}(M')$, $\mathrm{BT}(N')$ и, следовательно, $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ можно слить до $k+1$, что противоречит максимальности k. Поэтому $\mathrm{BT}(M')$, $\mathrm{BT}(N')$ отделяются на глубине k. □

6.12. Определение. (i) *Преобразование* — это отображение $f\colon \Lambda\to\Lambda$.

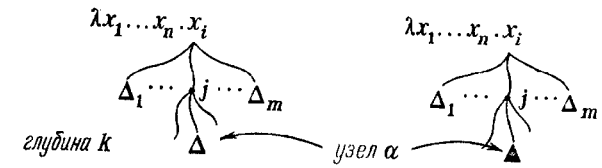
(ii) *Разрешающее преобразование* f определяется либо равенством $f(P)=Px$ для некоторого x, либо равенством $f(P)=P[x/Nx]$ для некоторого x и замкнутого N.

(iii) *Бёмовское преобразование* — это конечная композиция разрешающих преобразований. Обозначения: π пробегает бёмовские преобразования; $M^\pi=\pi(M)$.

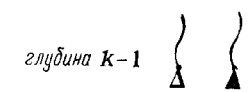
6.13. Определение. $\mathrm{BT}(M)$ есть *головной оригинал* до (глубины) k, если $\mathrm{BT}(M)$ имеет свободную головную переменную, которая не входит свободно ни в какой другой узел α с $d(\alpha)\leqslant k$.

6.14. Лемма. *Если* $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ — *головные оригиналы до* k *и отделяются на глубине* $k>0$, *то для некоторого* π *деревья* $\mathrm{BT}(M^\pi)$, $\mathrm{BT}(N^\pi)$ *отделяются на глубине* $k-1$.

Доказательство. Пусть деревья отделяются в узле α:



Положим по определению $\pi(P)=Px_1\ldots x_n[x_i/U_j^m x_j]$, где $U_j^m=\lambda y_1\ldots y_m.\ y_j$. Тогда $\mathrm{BT}(M^\pi)$, $\mathrm{BT}(N^\pi)$ отделяются на глубине $k-1$:



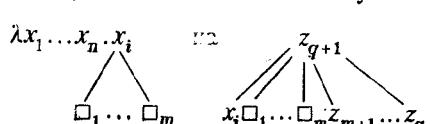
Предположение о головной оригинальности нужно для того, чтобы различие между Δ и ▲ не было потеряно при подстановке $[x_i/U_j^m x_i]$. □

6.15. Лемма. *Пусть* $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ *отделяются на глубине* $k>0$. *Тогда для некоторого* π *деревья* $\mathrm{BT}(M^\pi)$, $\mathrm{BT}(N^\pi)$ *являются головными оригиналами до* k *и все еще отделяются на глубине* k.

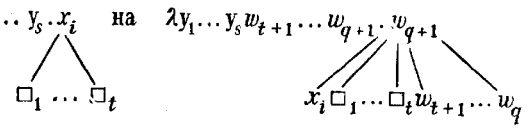
Доказательство. Пусть $C_q=\lambda z_0\ldots z_{q+1}.z_{q+1}z_0\ldots z_q$. Для узла α в дереве Бёма пусть $\#\alpha$ равняется $\max(s,t)$, где $\lambda a_{i_1}\ldots a_{i_s}.\ a_j$ — оснащение в узле α, а t — число наследников α; $\#\alpha$ есть 0, если оснащение в узле α есть Ω. Из условия теоремы следует, что M, N имеют г.н.ф. Запишем их соответственно в виде $\lambda x_1\ldots x_n.\ x_iM_1\ldots M_m$ и $\lambda x_1\ldots x_n.x_iN_1\ldots N_m$. Положим теперь по определению

$$\pi(P)=(Px_1\ldots x_n)[x_i/C_q x_i]\,z_{m+1}\ldots z_{q+1},$$

где $q>2(\#\alpha)$ для всех α из $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ с $d(\alpha)\leqslant k$ и $z_{m+1}\ldots z_{q+1}$ — новые переменные. Отметим, что деревья Бёма для термов M^π, N^π до глубины $\leqslant k$ получаются из таких же деревьев для M, N соответственно путем замены вершин



и внутренних узлов со свободной головной переменной x_i

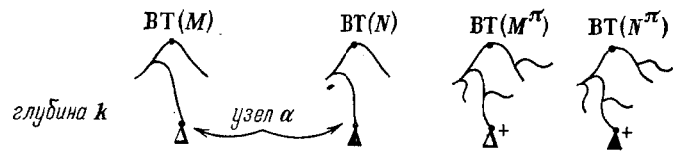


(*)

(где используется $q > t$). Очевидно, что $\mathrm{BT}(M^\pi)$ и $\mathrm{BT}(N^\pi)$ являются головными оригиналами до k.

Утверждение. *Эти деревья отделяются на глубине* k.

Так как $\mathrm{BT}(M) \equiv_k \mathrm{BT}(N)$, то и $\mathrm{BT}(M^\pi) \equiv_k \mathrm{BT}(N^\pi)$. По условию $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ нельзя слить в некотором узле α с $d(\alpha) = k$. Рассмотрим деревья Бёма



Допустим, что Δ и ▲ оба содержат свободную головную переменную x_i. В обозначениях из (*) деревья Δ^+ и $\blacktriangle^+$ можно слить в вершине тогда и только тогда, когда $s + (q + 1 - t) - (1 + q) = s' + (q' + 1 - t') - (1 + q')$, т. е. $s - t = s' - t'$, что неверно, так как Δ и ▲ нельзя слить в вершине. Следовательно, $\mathrm{BT}(M^\pi)$, $\mathrm{BT}(N^\pi)$ нельзя слить в узле α, т. е. они отделяются на глубине k. То же заключение верно в других случаях (x_i есть головная переменная в Δ, а не в ▲ (тогда $q > s$ $s' + t$ обеспечивает различие головных переменных в Δ^+ и $\blacktriangle^+$, которые поэтому нельзя слить в вершине); x_i не является головной переменной ни в Δ, ни в ▲). □

6.16. Следствие. *Если* $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ *отделяются на глубине* $k > 0$, *то* $\mathrm{BT}(M^\pi)$, $\mathrm{BT}(N^\pi)$ *для некоторого* π *отделяются на глубине* $k - 1$.

Доказательство. По 6.14 и 6.15. □

6.17. Лемма. *Если* $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ *отделяются на уровне* 0, *то для некоторого* π *терм* M^π *разрешим, а* N^π *неразрешим, или наоборот.*

Доказательство. Если M неразрешим, то $\mathrm{BT}(M) = \Omega$ и, следовательно, N разрешим, так как $\mathrm{BT}(M)$, $\mathrm{BT}(N)$ различаются на уровне 0. В этом случае в качестве π берем тождество. Если M, N разрешимы, например

$$M \to \lambda x_1 \ldots x_n.\ x_i M_1 \ldots M_m, \quad N \to \lambda x_1 \ldots x_{n'}.\ x_{i'} N_1 \ldots N_{m'},$$

то по предположению $i \neq i'$ или $n - m \neq n' - m'$. В случае $i \neq i'$ возьмем $P^\pi = P\,[x_i/(\lambda y_1 \ldots y_m.\ I)\,x_i]\,[x_{i'}/\Omega x_{i'}]$. Тогда $M^\pi = I$ и $N^\pi = \lambda x_1 \ldots x_n.\ \Omega \ldots = \Omega \pmod{\mathscr{H}}$ и, следовательно, неразрешим. В случае $i = i'$ и $n - m \neq n' - m'$ положим $P^{\pi_0} = Px_1 \ldots \ldots x_p\Omega$ с достаточно большим p ($\geqslant \max(m, n, m', n')$). Тогда

$$M^{\pi_0} = x_i M_1 \ldots M_m x_{n+1} \ldots x_p\Omega, \quad N^{\pi_0} = x_i N_1 \ldots N_{m'} x_{n'+1} \ldots x_p\Omega.$$

Длины последовательностей после x_i равны соответственно $m + p - n + 1$, $m' + p - n' + 1$, а эти числа различны, так как $n - m \neq n' - m'$. Следовательно, полагая $\pi = \pi_1 \circ \pi_0$, где $P^{\pi_1} = P\left[x_i/U_j^q x_i\right]$ и $U_j^q = \lambda y_1 \ldots y_n.\ y_j$ — подходящий выделяющий терм, мы находим нужное π. □

Доказательство теоремы 6.8. Пусть $M = N \in \mathscr{H}^*$, но $\mathrm{BT}(M) \not\sim_\eta \mathrm{BT}(N)$. В силу 6.11 для некоторых M', N' верно, что $\lambda\eta \vdash M = M'$, $N = N'$ и $\mathrm{BT}(M')$, $\mathrm{BT}(N')$ отделяются на глубине k.

Повторно применяя 6.16, получаем, что $\mathrm{BT}(M'^{\pi_0})$, $\mathrm{BT}(N'^{\pi_0})$ отделяются на глубине 0 для некоторого π_0. Поэтому из 6.17 следует, что для некоторого π_1 один из этих термов (пусть для определенности M'^{π_1}) разрешим, а другой (N'^{π_1}) неразрешим. Но для каждого π имеется контекст $C_\pi[\cdot]$ такой, что $\pi(P) = C_\pi[P]$ (так как подстановка $M[x/Nx]$ может быть записана в виде $C[M]$ при $C[\cdot] = (\lambda x.[\cdot])\,(Nx)$). Поэтому $C_{\pi_1}[M']$ разрешим, а $C_{\pi_1}[N']$ неразрешим, следовательно, $\mathscr{H}^* \not\vdash M' = N'$ согласно доказательству леммы 5.6. Но это противоречит тому, что $\mathscr{H}^* \vdash M = N$, так как в $\mathscr{H}^*$ выводима экстенсиональность (см. 5.9 (ii)). □

§ 7. Анализ модели D_∞

С помощью деревьев Бёма можно дать изящные характеристики равенства термов в $\mathscr{P}\omega$ и D_∞.

7.1. Теорема. (i) $D_\infty \models M = N \Leftrightarrow \mathscr{H}^* \vdash M = N \Leftrightarrow \mathrm{BT}(M) \sim_\eta \mathrm{BT}(N)$.

(ii) $\mathscr{P}\omega \models M = N \Leftrightarrow \mathrm{BT}(M) = \mathrm{BT}(N)$.

Первый результат принадлежит Хайленду и Уодсворту, второй — Хайленду. Мы изложим только доказательство утверждения (i) (см. 7.16). Доказательство второго результата см. у Хайленда [1] или Барендрегта [2].

7.2. Следствие. (См. 6.6 и 6.7, где приведены определения упоминаемых терминов.) *Равенства* $Ax = Ay$, $Y_z = Y$, $J = I$ *верны в* D_∞, *но не могут быть доказаны алгебраически, т. е. с помощью конверсий.*

Доказательство. Равенство в D_∞ следует из 6.6, 6.7 и теоремы. В силу теоремы Чёрча — Россера эти равенства не доказуемы в λ. □

7.3. Определение. (В дальнейшем $[\![\cdot]\!]$ означает $[\![\cdot]\!]^{D_\infty}$.) $\lambda\Omega$-исчисление было введено Уодсвортом как инструмент для исследования модели D_∞. $\lambda\Omega$-термы определяются путем добавления к правилам построения термов (см. 1.7) правила: Ω есть терм. Интерпретация в D_∞ распространяется на $\lambda\Omega$-термы путем определения $[\![\Omega]\!]_\rho = \bot$. Редукция для $\lambda\Omega$-термов — это обычная редукция, расширенная аксиомами $\lambda x.\Omega \to \Omega$ и $\Omega P \to \Omega$. $\lambda\Omega$-терм P имеет Ω-н. ф. Q тогда и только тогда, когда $P \to Q$ есть Ω-редукция и Q не имеет подтермов вида $(\lambda x.R)S$, $\lambda x.\Omega$ или ΩR. Отметим, что Ω-редукция сохраняет значение в D_∞, так как $\bot d = \bot$ и, следовательно, также и $\lambda x.\bot = \bot$. Если P имеет н. ф. в первоначальном смысле, то P имеет и Ω-н. ф., так как замены $\lambda x.\Omega \to \Omega$ или $\Omega R \to \Omega$ уменьшают длину терма. Определим деревья Бёма для $\lambda\Omega$-термов, полагая $\mathrm{BT}(\Omega) = \Omega$.

7.4. Определение. Аппроксимация.

(i) Пусть P, Q — $\lambda\Omega$-термы. Скажем, что P *аппроксимирует* Q, и будем писать $P \underset{\sim}{\sqsubseteq} Q$, если $\mathrm{BT}(P)$ получается из $\mathrm{BT}(Q)$ путем замены некоторых поддеревьев на дерево Ω (например, $\lambda x.x\Omega \underset{\sim}{\sqsubseteq} \lambda x.IxK$).

(ii) Пусть M есть λ-терм. P есть *аппроксимативная нормальная форма* (а. н. ф.) терма M, если $P \underset{\sim}{\sqsubseteq} M$ и P находится в Ω-н. ф.

(iii) $A(M) = \{P \mid P$ есть а. н. ф. терма $M\}$.

(iv) M^k есть а. н. ф. терма M такая, что $\mathrm{BT}(M^k)$ получается из $\mathrm{BT}(M)$ заменой на Ω всех оснащений в узлах глубины k и выбрасыванием всех более глубоких узлов. Заметим, что $M^k \in A(M)$.

7.5. Пример. $\lambda f.f(\Omega) \underset{\sim}{\sqsubseteq} \lambda f.f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))$, следовательно, $\lambda f.f(\Omega)$ есть а. н. ф. комбинатора неподвижной точки Y (определенного согласно 2.1). В действительности

$$Y^k = \lambda f.\ f^k(\Omega), \quad A(Y) = \{\Omega (\leftarrow \lambda f.\ \Omega),\ \lambda f.\ f\Omega,\ \lambda f.\ f(f\Omega), \ldots\}.$$

7.6. Лемма. $P \underset{\sim}{\sqsubseteq} Q \Rightarrow [\![P]\!] \sqsubseteq [\![Q]\!]$.

Доказательство. P — это Q с заменой некоторых подтермов на Ω. Но $[\![\Omega]\!] = \bot$, т. е. наименьшему элементу в D_∞. Искомый результат следует теперь из того, что аппликация и абстракция в D_∞ монотонны (из-за своей непрерывности). □

Следующая теорема весьма полезна для определения значений λ-термов в D_∞. Доказательство будет дано в 7.18—7.24.

7.7. Теорема аппроксимации. (Высказана в качестве предположения Скоттом, доказана Хайлендом, улучшена Уодсвортом.) *Для λ-термов M имеет место*

$$[\![M]\!] = \bigsqcup \{[\![P]\!] \mid P \in A(M)\}.$$

Та же теорема верна в $\mathscr{P}\omega$ с заменой $\bigsqcup$ на $\bigcup$.

7.8. Следствие. $[\![M]\!] = \bigsqcup_k [\![M^k]\!]$.

Доказательство. Пусть $P \in A(M)$, тогда $P \underset{\sim}{\sqsubseteq} M$ и P находится в Ω-н. ф. Пусть теперь все узлы в $\mathrm{BT}(P)$ имеют глубину $< k$. Тогда $[\![P]\!] \sqsubseteq [\![M^k]\!]$, откуда и следует нужный результат.

7.9. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны для* $M \in \Lambda$:

(i) *M разрешим*;

(ii) $[\![M]\!] \neq \bot$,

(iii) *M имеет г. н. ф.*

Доказательство. Можно считать, что M замкнут (если это не так, рассмотрим $\lambda\vec{x}.M$ и заметим, что $\lambda d.\bot = \bot$).

(i)$\Rightarrow$(ii) Пусть M разрешим. Тогда $\lambda \vdash M\vec{N} = I$ для некоторых $\vec{N}$. Если $[\![M]\!] = \bot$, то $[\![I]\!] = [\![M\vec{N}]\!] = \bot [\![\vec{N}]\!] = \bot$, а это противоречит тому, что $\bot d = \bot$. Поэтому $[\![M]\!] \neq \bot$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Допустим, что M не имеет г. н. ф. Тогда $A(M) = \{\Omega\}$, следовательно, $[\![M]\!] = \bot$ в силу 7.7.

(iii)$\Rightarrow$(i) Допустим, что $M \to \lambda\vec{x}.x_i M_1 \ldots M_m$. Тогда, приписывая к M достаточно аргументов вида $N \equiv \lambda a_1 \ldots a_m.I$, мы можем разрешить M.

7.10. Следствие. *D_∞ разумна; следовательно, $\lambda\eta + \mathscr{H}$ непротиворечиво.*

Доказательство. В силу 7.9 неразрешимость M влечет $[\![M]\!] = \bot$, так что $D_\infty \models \mathscr{H}$. Следовательно, в силу 4.23 $D_\infty \vdash \vdash \lambda\eta + \mathscr{H}$. □

Другое следствие теоремы аппроксимации — связь между комбинатором неподвижной точки и оператором наименьшей неподвижной точки для полных решеток.

7.11. Теорема (Тарский). *Пусть D — полная решетка. Каждая непрерывная $f\colon D \to D$ имеет неподвижную точку. Более того, имеется $Y^* \in [[D \to D] \to D]$ такой, что $Y^* f$ есть наименьшая неподвижная точка для f.*

Доказательство. Пусть $Y^* f = \bigsqcup \{f^n(\bot) \mid n \in \omega\}$. Тогда Y^* непрерывен по 4.8 и 4.5. Так как $\bot \sqsubseteq f(\bot)$, то $f^n(\bot) \sqsubseteq f^{n+1}(\bot)$ и $\{f^n(\bot) \mid n \in \omega\}$ направлено, следовательно, $Y^* f$ есть неподвижная точка для f. Если $f(x) = x$, то ввиду $\bot \sqsubseteq x$ имеем $f(\bot) \sqsubseteq f(x) \sqsubseteq x$ и т. д., поэтому $Y^* f \sqsubseteq x$. □

Пусть Y_{Tarski} — элемент модели D_∞, соответствующий оператору неподвижной точки Y^*, и пусть $Y_{\mathrm{Curry}} = [\![Y]\!]$ для Y, определенного согласно 2.1.

7.12. Теорема (Парк). $Y_{\mathrm{Tarski}} = Y_{\mathrm{Curry}}$ *в модели Скотта D_∞.*

Доказательство. В силу 7.8 и 7.5

$$Y_{\mathrm{Curry}} d = \left(\bigsqcup_k [\![\lambda f.\ f^k(\Omega)]\!]\right) d = \bigsqcup_k d^k(\bot) = Y_{\mathrm{Tarski}} d$$

по определению. Нужный результат получается теперь с помощью экстенсиональности. □

Результаты, аналогичные 7.11 и 7.12, верны для $\mathscr{P}\omega$.

Чтобы охарактеризовать равенство в D_∞, нужно следующее определение.

7.13. Определение. (i) $M \trianglelefteq_k N$ тогда и только тогда, когда $M^k \trianglelefteq N^k$;

(ii) $M \lessdot_k N$ тогда и только тогда, когда $\exists M' \exists N' [\lambda\eta \vdash M = M', \lambda\eta \vdash N = N'$ и $M' \trianglelefteq_k N']$;

(iii) $M \lessdot N$ тогда и только тогда, когда $\forall k M \lessdot_k N$.

Отметим, что если $\mathrm{BT}(M) \sim_\eta \mathrm{BT}(N)$, то $M \lessdot N$ и $N \lessdot M$. Обратное утверждение следует из 7.14 и 7.16. Отметим также, что $M^k \lessdot M$. Отношение $\lessdot$ транзитивно, так как из $M_1^k \trianglelefteq N_1^k$, $N_2^k \trianglelefteq L_2^k$ вместе с $\lambda\eta \vdash N_1 = N_2$ следует, что M_1 превращается с помощью нескольких βη-конверсий в терм M_2 такой, что $M_2^k \trianglelefteq N_2^k \trianglelefteq L_2^k$.

7.14. Теорема. $M \lessdot N \Rightarrow [\![M]\!] \subseteq [\![N]\!]$.

Доказательство приводится в 7.25—7.27.

7.15. Следствие. $\mathrm{BT}(M) \sim_\eta \mathrm{BT}(N) \Rightarrow [\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Доказательство. В силу замечания, следующего за 7.13. □

7.16. Теорема (Хайленд, Уодсворт). *Следующие утверждения эквивалентны для* $M, N \in \Lambda$:

(i) $\mathrm{BT}(M) \sim_\eta \mathrm{BT}(N)$;

(ii) $D_\infty \models M = N$;

(iii) $\mathscr{H}^* \vdash M = N$.

Доказательство. (i)⇒(iii) — это 7.15.

(ii)⇒(iii) в силу 5.9, так как $D_\infty \models \mathscr{H}$ (7.10).

(iii)⇒(i) — это 6.8. □

Отметим, что импликация $\mathrm{Th}(D_\infty) \subset \mathscr{H}^* \Rightarrow \mathrm{Th}(D_\infty) = \mathscr{H}^*$ не очевидна (как было бы в случае обычной теории моделей): так как язык λ-исчисления не содержит логических операторов, то $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ не обязательно является полным множеством предложений.

7.17. Следствие. (i) $\mathrm{Th}(D_\infty) = \mathscr{H}^*$; *следовательно, для любой* D *модель* D_∞ *выполняет одно и то же множество равенств*;

(ii) D_∞^0 *алгебраически проста.*

Доказательство. (i) очевидно.

(ii) $D_\infty^0 = \mathfrak{M}^0(\mathrm{Th}(D_\infty^0)) = \mathfrak{M}^0(\mathscr{H}^*)$, следовательно, нужный результат получается из 5.11. □

Для доказательства теоремы аппроксимации Хайленд и Уодсворт ввели следующее индексированное λΩ-исчисление.

7.18. Определение. Множество *индексированных* (λΩ)-термов определяется путем добавления к правилам построения λΩ-термов следующего правила: если M — индексированный λΩ-терм, то таков же $(M)^p$ для любого $p \in \omega$. Интерпретация λΩ-термов в D_∞ распространяется на индексированные термы путем добавления равенства $[\![(M)^p]\!]_\rho = ([\![M]\!]_\rho)_p$. Таким образом, верхние индексы p рассматриваются как проекции $\Phi_{\infty,p}: D_\infty \to D_p$.

Если M — индексированный терм, то M^* получается из M путем вычеркивания всех верхних индексов. Отметим, что $[\![M]\!] \subseteq [\![M^*]\!]$. *Вполне* индексированный терм M — это такой индексированный терм M, что каждое вхождение подтерма N в M^* имеет индекс в M (т. е. входит как часть терма $(N)^p$ в M).

7.19. Определение. Отношение редукции на λΩ-термах распространяется на индексированные λΩ-термы путем добавления аксиом

$$\lambda x.\mathbf{\Omega}^p \to \mathbf{\Omega}^0; \quad \mathbf{\Omega}^p M \to \mathbf{\Omega}^0; \quad (\lambda x.\ M)^{p+1} N \to (M[x/N^p])^p;$$

$$(\lambda x.M)^0 N \to (M[x/\mathbf{\Omega}^0])^0; \quad (M^p)^q \to M^{\min(p,q)}$$

и правила $M \to N \Rightarrow M^p \to N^p$. Индексированный терм M имеет н. ф., если $M \to N$ для некоторого N, причем N^* находится в Ω-н. ф.

7.20. Лемма. *Пусть* M, N — *индексированные термы, и* $M \to N$ *в смысле редукции индексированных термов. Тогда*

(i) $N^* \trianglelefteq M^*$;

(ii) $[\![M]\!] = [\![N]\!]$.

Доказательство. (i) Аппроксимация появляется при редукциях вроде $(\lambda x.x)^0 N \to \mathbf{\Omega}^0$.

(ii) В силу 4.19 и 4.15 (i), (v). □

7.21. Определение. (i) *Индексация* I на терме M — это отображение, которое каждому вхождению подтерма в M ставит в соответствие некоторый индекс. Через M^I обозначается соответствующий индексированный терм.

(ii) $\tau(M) = \{M^I \mid I$ есть индексация на $M\}$.

7.22. Лемма. *Пусть* M — λ-*терм. Тогда* $[\![M]\!] = \bigsqcup \{[\![N]\!] \mid N \in \tau(M)\}$.

Доказательство. Индукцией по построению M с использованием 4.15 (iii). □

7.23. Лемма. *Каждый вполне индексированный терм имеет н. ф.*

Доказательство. Терм M содержит p-редекс, если $(\lambda x.P)^p Q$ входит в M. Порядок терма M — это максимальное p такое, что M содержит p-редекс. Индукцией по порядку p терма M покажем, что M имеет н. ф.

$p = 0$: редукции вроде $(\lambda x.P)^0 Q \to (P[x/\Omega^0])^0$, $\lambda x.\Omega^p \to \Omega^0$, $\Omega^p M \to \Omega^0$ и $(M^p)^q \to M^{\min(p,q)}$ уменьшают длину терма, следовательно, каждый терм порядка 0 имеет н. ф.

$p = n+1$. Замена самого правого $(n+1)$-редекса $(\lambda x.P)^{n+1}Q$ на $(P[x/Q^n])^n$ с последующей заменой термов $(Q^n)^q$ на $Q^{\min(n,q)}$ дает терм, в котором на одно вхождение p-редекса меньше, чем в исходном. Простой пример (в котором опущены некоторые индексы):

$$(\lambda ab.\ baa)^{n+1}((\lambda x.\ x^{n+1}R)^{n+1}(\lambda z.\ z)^{n+2})$$
$$\to (\lambda ab.\ baa)^{n+1}(((\lambda z.\ z)^n)^{n+1}R) \to (\lambda ab.\ baa)^{n+1}((\lambda z.\ z)^n R).$$

После конечного числа шагов рассматриваемый терм сводится к терму порядка n, и применимо индукционное предположение. □

7.24. Доказательство теоремы 7.7. $[\![M]\!] = \bigsqcup\{[\![N]\!] \mid N \in \tau(M)\} = \bigsqcup\{[\![L]\!] \mid \exists N \in \tau(M)\, L$ есть н. ф. терма $N\} \sqsubseteq \sqsubseteq \bigsqcup\{[\![L^*]\!] \mid \exists N \in \tau(M)\, L$ есть н. ф. терма $N\} \sqsubseteq \bigsqcup\{[\![N]\!] \mid N \in A(M)\} \sqsubseteq [\![M]\!]$.

Эти пять (не) равенств следуют соответственно из 7.22, 7.20 (ii) и 7.23, $[\![L]\!] \sqsubseteq [\![L^*]\!]$, $L^* \in A(M)$, так как в силу 7.20 (i) верно $L^* \sqsubseteq N^* = M$, а из $N \in A(M)$ следует $[\![N]\!] \sqsubseteq [\![M]\!]$ по (7.6). □

Теперь будет изложено принадлежащее Хайленду доказательство теоремы 7.14.

7.25. Лемма. *Пусть $P \neq \Omega$ находится в Ω-н. ф. и $P \prec Q$. Тогда* $\mathrm{BT}(P)$, $\mathrm{BT}(Q)$ *можно слить в вершине,* $\lambda\eta \vdash P = \lambda x_1 \ldots x_n.\, x_i P_1 \ldots P_m$ *и* $\lambda\eta \vdash Q = \lambda x_1 \ldots x_n.\, x_i Q_1 \ldots Q_m$ *для некоторых* $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_m$, *причем* $P_1 \prec Q_1, \ldots, P_m \prec Q_m$ *и* $P_1, \ldots, P_m$ *находятся в* Ω-н. ф.

Доказательство. Только η-редукции меняют деревья Бёма. Поэтому, так как $P \prec Q$, вершины деревьев $\mathrm{BT}(P)$, $\mathrm{BT}(Q)$ оказываются одинаковыми после некоторых η-замен, т. е. эти деревья можно слить в вершине. Термы P_i — либо части терма P, либо переменные, возникшие при η-расширении, поэтому они находятся в Ω-н. ф. Так как $P \prec_{k+1} Q$, отсюда следует, что $P_i \prec_k Q_i$ для всех k. Следовательно, $P_i \prec Q_i$. □

7.26. Лемма. *Пусть P находится в Ω-н. ф. Тогда* $P \prec N \Rightarrow [\![P]\!] \sqsubseteq [\![N]\!]$.

Доказательство. Индукцией по построению терма P.

Случай 1. $P \equiv \Omega$. Тогда все в порядке.

Случай 2. $P \equiv x$. Тогда, используя $x \prec_1 N$, имеем $\lambda \vdash N = \lambda y_1 \ldots y_n.xN_1 \ldots N_n$. В силу 7.22 достаточно показать, что для любой индексации I терма x верно $[\![x]\!]^I \sqsubseteq [\![N]\!]$. Это делается индукцией по $k = I(x)$.

Если $k = 0$, то $[\![(x)^0]\!] = [\![\lambda y_1 \ldots y_n.(x)^0 \Omega \ldots \Omega]\!] \sqsubseteq [\![N]\!]$, так как в D_∞ верно $x_0 = x_0 \cdot \bot = \lambda y.x_0$ в силу 4.19 (ii).

Если $I(x) = k+1$, то $[\![(x)^{k+1}]\!] = [\![\lambda y_1 \ldots y_n.(x)^{k+1}(y_1)^k \ldots (y_n)^{k+1-n}]\!]$ в силу 4.19 (i) (и 4.14 (i)). Так как $x \prec N$, то для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, верно $y_i \prec N_i$, следовательно, по индукционному предположению $[\![y_i^{k+1-i}]\!] \sqsubseteq [\![N_i]\!]$. Поэтому мы имеем $[\![(x)^{k+1}]\!] \sqsubseteq [\![N]\!]$.

Случай 3. $P \equiv \lambda x_1 \ldots x_m.xP_1 \ldots P_n$, причем $P_1, \ldots, P_n$ находятся в Ω-н. ф. Тогда, так как $P \prec N$, мы имеем для некоторых P', N' таких, что $\lambda\eta \vdash P' = P$, $\lambda\eta \vdash N' = N$, равенства $P' \equiv \lambda x_1 \ldots x_p.xP'_1 \ldots P'_q$, $N' \equiv \lambda x_1 \ldots x_p.xN'_1 \ldots N'_q$ и соотношения $P'_1 \prec N'_1, \ldots, P'_q \prec N'_q$.

По индукционному предположению $[\![P_1]\!] \sqsubseteq [\![N]\!]$, ..., следовательно, $[\![P]\!] = [\![P']\!] \sqsubseteq [\![N']\!] = [\![N]\!]$. □

7.27. Доказательство теоремы 7.14. Допустим, что $M \prec N$. Тогда $\forall k M^k \prec N$, следовательно, в силу 7.26 $\forall k [\![M^k]\!] \sqsubseteq \sqsubseteq [\![N]\!]$. Поэтому $[\![M]\!] = \bigsqcup [\![M^k]\!] \sqsubseteq [\![N]\!]$. □

ЛИТЕРАТУРА

Барендрегт (Barendregt H. P.)
1. Normed uniformly reflexive structures. — In: λ-Calculus and Computer Science/Ed. C. Böhm. Berlin: Springer, 1975, p. 272—286.
2. The Lambda Calculus, its Syntax and Semantics. — Amsterdam: North-Holland, 1977.

Бём (Bohm C.)
1. Alcune proprietà della forma β-η-normali del λ-*K*-calcolo. — Pubbl. IAC-CNR, 1968, n. 696.

де Брёин (Bruijn N. G. de)
1. Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation, with application to the Church-Rosser theorem. — Indag. Math., 1972, **34**, № 5, p. 381—392.

Карри и Фейс (Curry H. B., Feys R.)
1. Combinatory Logic, v. I. — Amsterdam: North-Holland, 1958.

Карри, Хиндли и Селдин (Curry H. B., Hindley R., Seldin J.)
1. Combinatory Logic, v. II. — Amsterdam: North-Holland, 1972.

Мани (Mann C. R.)
1. The connection between equivalence of proofs and cartesian closed categories. — Proc. London Math. Soc., 1976, **12**, № 3, p. 289—310.

Накадзима (Nakajima R.)
1. Infinite normal forms for λ-calculus. — In: λ-Calculus and Computer Science/Ed. C. Böhm. Berlin: Springer, 1975, p. 62—82.

Плоткин (Plotkin G.)
1. A set-theoretical definition of application. — School of A. I., Memo MIP-R-95, Edinburgh, 1972.
2. The λ-calculus is ω-imcomplete. — J. Symbolic Logic, 1974, **39**, № 2, p. 313—317.

Скотт (Scott D.)
1. Continuous lattices. — In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic/Ed. F. W. Lawvere. Berlin: Springer, 1972, p. 97—136.
2. Lambda calculus and recursion theory. — In: Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium/Ed. S. Kanger. Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 154—193.

3. Combinators and classes. — In: λ-Calculus and Computer Science/Ed. C. Böhm. Berlin: Springer, 1975, p. 1—26.
4. Some philosophical issues concerning theories of combinators. — In: λ-Calculus and Computer Science/Ed. C. Böhm. Berlin: Springer, 1975, p. 346—366.
5. Data types as lattices. — SIAM J. Comput., 1976, 5, № 3, p. 522—587.

Трулстра (Troelstra A.)
1. Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. — Berlin: Springer, 1973.

Уодсворт (Wadsworth C. P.)
1. The relation between lambda-expressions and their denotations. — SIAM J. Comput., 1976, 5, № 3, p. 488—421.

Хайленд Дж. (Hyland J. M. E.)
1. A syntactical characterization of the equality in some models of the λ-calculus. — J. London Math. Soc., 1976, 12, № 2, p. 361—370.

Хиндли, Лерчер и Селдин (Hindley R., Lercher B., Seldin J.)
1. Introduction to Combinatory Logic. — Cambridge: Cambridge University Press, 1972.

Чёрч (Church A.)
1. The Calculus of Lambda-Conversion. — Princeton (N. J.): Princeton University Press, 1941.

Глава 8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НЕПОЛНОТА В АРИФМЕТИКЕ ПЕАНО*)

Дж. Парис, Л. Харрингтон

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Обобщение финитной теоремы Рамсея

В этой главе мы излагаем недавнее открытие в математической логике. Мы исследуем достаточно естественную теорему конечной комбинаторики — простое обобщение конечной теоремы Рамсея. Эта глава посвящена в основном доказательству того, что эта теорема верна, хотя и недоказуема в арифметике Пеано.

Первые примеры верных, но недоказуемых в PA (арифметике Пеано) строго математических утверждений о натуральных числах были получены первым автором (см. Парис [1]) и возникли из работы Кирби и Париса [1]. Второй автор (Л. Харрингтон) сумел показать, что доказательство Париса проходит для особенно простого обобщения конечной теоремы Рамсея, упомянутого выше (и сформулированного в 1.2).

Так как мы собираемся интенсивно работать с исчислением разбиений, читателю разумно обратиться к пп. 6.1—6.5 гл. 3 «Теории множеств» за основной информацией и к пп. 6.6—6.9

*) Замечание редактора (Дж. Барвайса). С 1931 г., когда была опубликована теорема Гёделя о неполноте, математики искали математический пример неполноты в арифметике Пеано первого порядка, который был бы математически прост, интересен и не требовал числового кодирования понятий из логики. Первые такие примеры были найдены в начале 1977 г., когда эта книга была почти закончена. Мы рады, что можем добавить заключительную главу, содержащую наиболее поразительный из примеров, полученных к настоящему времени. Это достойное завершение, сводящее воедино идеи из всех частей данной «Справочной книги».

этой же главы за доказательством бесконечной теоремы Рамсея *).

1.1. Определение. Мы называем конечное множество H натуральных чисел *относительно большим*, если $\mathrm{card}(H) \geqslant \min(H)$. Для натуральных чисел e, r, k и M запись

$$M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$$

означает, что для любого разбиения P: $[M]^e \to r$ имеется относительно большое $H \subseteq M$, которое однородно для P и имеет мощность не меньше k.

1.2. Теорема. *Для любых натуральных e, r и k существует M такое, что* $M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$.

Без $*$, которая указывает, что однородные множества должны быть относительно большими, это была бы в точности финитная теорема Рамсея. Финитная теорема Рамсея доказуема в арифметике Пеано. Наше доказательство 1.2 использует бесконечную теорему Рамсея и не может быть проведено в PA.

1.3. Основная теорема. *Комбинаторный принцип* 1.2 *недоказуем в арифметике Пеано.*

Для читателя, который привык работать в PA и поэтому не видит даже, как сформулировать 1.2 в PA, мы отметим, что PA эквивалентна (относительно утверждений о натуральных числах) результату замены аксиомы бесконечности ее отрицанием в обычной аксиоматике теории множеств ZF (см. гл. 1 «Теории множеств») и 1.2 может быть сформулирована в этой теории непосредственно, без всякого кодирования.

§ 2. Доказательство теорем 1.2 и 1.3

Мы докажем сначала 1.2. Зафиксируем e, r и k и допустим, что не существует M с нужными свойствами. Назовем P контрпримером для M, если P есть разбиение $[M]^e$ на r частей, не имеющее относительно больших однородных множеств размера не меньше k. Мы можем рассматривать множество контрпримеров как финитно ветвящееся бесконечное дерево. А именно, если P и P' — контрпримеры соответственно для M и M', то мы помещаем P под P' в нашем дереве тогда и только тогда, когда $M < M'$ и P — ограничение P' на $[M]^e$. По лемме Кёнига имеется P: $[\omega]^e \to r$ (где ω — множество всех натуральных чисел) такое, что для любого M ограничение P на $[M]^e$ есть

*) Напомним, что натуральное число понимается как множество всех меньших натуральных чисел. В частности разбиение P: $[M]^e \to r$ в 1.1 — это отображение в множество $\{0, \ldots, r-1\}$; последовательность из b (где b — натуральное число (п. 2.11)) содержит числа; меньшие b. Через $[M]^e$ обозначается множество всех e-членных подмножеств множества M. $\mathrm{card}(H)$ — это мощность множества H. — *Прим. перев.*

контрпример для M. По бесконечной теореме Рамсея имеется бесконечное $H \subseteq \omega$, однородное для P. Но тогда, выбирая M достаточно большим (в сравнении с k и $\min(H)$), мы видим, что $H \cap M$ является, кроме всего прочего, относительно большим однородным множеством для $P \restriction [M]^e$ размера не меньше k. □

Для использования в § 3 заметим, что для каждого e предыдущее доказательство формализуемо в PA. (Доказательство утверждения. $\omega \to (\omega)^e_r$, данное в 6.7—6.9 гл. 3 «Теории множеств», естественно формализуется, индукцией по e, в ограниченной-(Π^0_∞ — CA)- системе, которая консервативна относительно PA (см. 5.5.1 гл. 4). Таким образом, для любого e

$$\mathrm{PA} \vdash \forall r \forall k \exists M \left(M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r\right).$$

Мы приступаем теперь к доказательству теоремы 1.3, которое займет оставшуюся часть этого параграфа. Мы определим в 2.1 некоторую теорию T и покажем затем, что $\mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(\mathrm{PA})$ доказуемо в PA. Здесь $\mathrm{Con}(T)$ — арифметическое предложение, выражающее непротиворечивость теории T. Доказательство будет закончено, когда мы покажем в PA, что комбинаторный принцип 1.2 влечет $\mathrm{Con}(T)$.

В дальнейшем мы отождествляем конечные подмножества множества ω с конечными возрастающими последовательностями элементов множества ω. Теория T формулируется в языке PA плюс бесконечный перечень констант $c_0, c_1, \ldots$

2.1. Определение. Аксиомами теории T являются:

(i) обычные рекурсивные определяющие соотношения для $\vdash$, $\times$, $<$, а также аксиома индукции, но только для ограниченных формул *);

(ii) для любого $i = 0, 1, \ldots$ — аксиома $(c_i)^2 < c_{i+1}$;

(iii) для любого конечного подмножества $\boldsymbol{i} = i_1, \ldots, i_r$ множества ω пусть $c(\boldsymbol{i}) = c_{i_1} \ldots c_{i_r}$. Для каждого $i < k$, $\boldsymbol{k}'$ (т. е. $i < \min(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$) и каждой ограниченной формулы $\psi(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$, где $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{z}$ все имеют одну и ту же длину, мы имеем аксиому

$$\forall \boldsymbol{y} < c_i [\psi(\boldsymbol{y}; c(\boldsymbol{k})) \leftrightarrow \psi(\boldsymbol{y}; c(\boldsymbol{k}'))].$$

2.2. Утверждение. $\mathrm{Con}(T)$ *влечет* $\mathrm{Con}(\mathrm{PA})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \models T$ (т. е. $\mathfrak{A}$ — модель теории T), и пусть I — начальный отрезок $\mathfrak{A}$, состоящий из таких a, что $a < c_i$ для некоторого $i \in \omega$. Ввиду (ii) множество I замкнуто относительно $+$ и $\times$. Достаточно доказать следующее

2.3. Утверждение. $\mathfrak{I} = \langle I, +, \times, < \rangle$ — *модель* PA.

Для каждой формулы $\theta(\boldsymbol{y})$ из языка PA определим ограниченную формулу $\theta^*(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ следующим образом. Запишем θ в

*) То есть для формул, содержащих $\forall x$, $\exists x$ только в частях вида $\forall x (x < t \to A)$, соответственно $\exists x (x < t \wedge A)$. — *Прим. перев.*

предваренной форме $\exists x_1 \ldots \forall x_r \varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$, где φ — бескванторная формула. Тогда $\theta^*(\boldsymbol{y}; z_1, \ldots, z_r)$ есть $\exists x_1 < z_1 \ldots \forall x_r < z_r \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

2.4. Утверждение. *Для данных $i < k$, $\boldsymbol{a} < c_l$ и $\theta(\boldsymbol{y})$, где k, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют подходящие длины, $\mathfrak{Z} \models \theta(\boldsymbol{a})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \theta^*(\boldsymbol{a}; c(k))$.*

Отметим, что 2.3 есть непосредственное следствие 2.4, так как 2.1 (i) гарантирует, что для всех θ в модели $\mathfrak{A}$ будет выполняться индукция*) для θ^*. Доказательство утверждения 2.4 проводится индукцией по (построению формулы) θ. Пусть $\theta(\boldsymbol{y})$ есть $\exists x \psi(x, \boldsymbol{y})$. Тогда $\theta^*(\boldsymbol{y}; z)$ есть $\exists x < z_1 \psi^*(x; \boldsymbol{y}; z_2, \ldots, z_r)$. Поэтому $\mathfrak{Z} \models \theta(\boldsymbol{a})$ тогда и только тогда, когда для некоторого b из I и некоторого j (где $\min(j)$ велик) верно $\mathfrak{A} \models \psi^*(b, \boldsymbol{a}; c(j))$, а это происходит тогда и только тогда, когда для некоторого k' (где снова $\min(k')$ велик) верно $\mathfrak{A} \models \theta^*(\boldsymbol{a}; c(k'))$, что в силу 2.1 (iii) имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \theta^*(\boldsymbol{a}; c(k))$. □

Внимательный читатель должен был заметить, что доказательство утверждения 2.2 может быть формализовано в PA (аналогично § 6 гл. 1). Кроме того, в этом доказательстве мы можем требовать выполнения 2.1 (iii) только для ограниченных формул $\psi(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ вида $\theta^*(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ для некоторой $\theta(\boldsymbol{y})$.

2.5. Предложение. *Комбинаторный принцип* 1.2 *влечет* $\mathrm{Con}(T)$.

По теореме Гёделя о неполноте (см. § 2 гл. 1) наша основная теорема следует из 2.5 и 2.2, конечно, при условии, что 2.5, подобно 2.2, показано в PA.

Перед началом доказательства 2.5 мы укажем несколько фактов, относящихся к разбиениям.

2.6. Лемма. *Для данных разбиений P_0 и P_1 множества $[M]^e$ на r_0 и r_1 кусков имеется такое разбиение P множества $[M]^e$ на $r_0 \cdot r_1$ кусков, что для любого $H \subseteq M$ множество H однородно для P тогда и только тогда, когда оно однородно для P_0 и для P_1.*

Доказательство. Полагаем $P(\boldsymbol{a}) = \langle P_0(\boldsymbol{a}), P_1(\boldsymbol{a}) \rangle$. □

2.7. Лемма. *Множество $H \subseteq M$ однородно для разбиения P множества $[M]^e$ тогда и только тогда, когда любое подмножество H мощности $e+1$ однородно для P.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = a_1, \ldots, a_e$ — первые e элементов множества H. Выберем $\boldsymbol{b} = b_1, \ldots, b_e$ так, что $P(\boldsymbol{a}) \neq P(\boldsymbol{b})$ и сумма $b_1 + \ldots + b_e$ минимальна. Если i — наименьший индекс, для которого $a_i \neq b_i$, то $\{a_1, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_e\}$ не однородно и имеет размер $e+1$. □

*) Схема индукции используется в виде

$$F(0) \wedge \forall x < b\,(F(x) \to F(x+1)) \to F(b).$$

— *Прим. перев.*

Мы определим $\sqrt{r}$ как наименьшее натуральное s такое, что $s^2 \geqslant r$. Отметим, что для большинства r (т. е. для $r \geqslant 7$) $r \geqslant 1 + 2\sqrt{r}$.

2.8. Лемма. *Для данного P: $[M]^e \to r$ имеется P': $[M]^{e+1} \to (1 + 2\sqrt{r})$ такое, что для всех $H \subseteq M$ мощности $> e+1$ множество H однородно для P тогда и только тогда, когда H однородно для P'.*

Доказательство. Пусть $s = \sqrt{r}$. Определим функции Q (частное) и R (остаток), отображающие $[M]^e$ в s, уравнением $P(a) = s \cdot Q(a) + R(a)$. Для $\boldsymbol{b} = b_1, \ldots, b_e, b_{e+1}$ из $[M]^{e+1}$ положим $\boldsymbol{b}' = b_1, \ldots, b_e$. Определим искомое P' на $[M]^{e+1}$ так:

$$P'(\boldsymbol{b}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{b} \text{ однородно для } P, \\ \langle 0, R(\boldsymbol{b}') \rangle, & \text{если } \boldsymbol{b} \text{ однородно для } Q, \text{ но не для } P, \\ \langle 1, Q(\boldsymbol{b}') \rangle & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть H однородно для P' и имеет мощность $> e+1$, и пусть $\boldsymbol{c}$ — первые $e+1$ элементов из H. Нам нужно убедиться, что $P'(\boldsymbol{c}) = 0$, чтобы проверить, что H однородно для P в силу 2.7. Отметим, что для каждого $\boldsymbol{a}$ из $[\boldsymbol{c}]^e$ имеется конечная последовательность $\boldsymbol{b}$ из $[H]^{e+1}$ такая, что $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}$. Допустим, что $P'(\boldsymbol{c}) = \langle 1, i \rangle$. Тогда в силу предыдущего замечания $Q(\boldsymbol{a}) = i$ для всех $\boldsymbol{a}$ из $[\boldsymbol{c}]^e$, так что $\boldsymbol{c}$ однородно для Q, что противоречит определению P'. Итак, допустим, что $P'(\boldsymbol{c}) = \langle 0, j \rangle$, так что $\boldsymbol{c}$ однородно для Q, например $Q(\boldsymbol{a}) = i$ для всех $\boldsymbol{a}$ из $[\boldsymbol{c}]^e$. Но тогда $P(\boldsymbol{a}) = s \cdot i + j$ для всех таких $\boldsymbol{a}$, так что $\boldsymbol{c}$ однородно для P, что снова противоречит определению P'. □

2.9. Лемма. *Пусть дано n разбиений P_i: $[M]^{e_i} \to r_i$ для всех $i < n$. Пусть $e = \max_i e_i$ и $r = \prod_i \max(r_i, 7)$. Тогда имеется разбиение P: $[M]^e \to r$ такое, что для всех $H \subseteq M$ мощности $> e$ множество H однородно для P тогда и только тогда, когда H однородно для всех P_i.*

Доказательство. Объединить 2.6, 2.8 и замечание перед 2.8. □

Мы теперь сформулируем комбинаторный принцип, который подогнан так, чтобы из него получалась $\mathrm{Con}(T)$. Условия (ii) и (iii) в 2.10 соответствуют аналогичным условиям из 2.1, но не будет 2.10 (i). После того как будет показано, что 2.10 влечет $\mathrm{Con}(T)$, мы вернемся к выводу 2.10 из 1.2.

2.10. Предложение. *Для любых e, k, r имеется M такое, что для любого семейства $\langle P_\xi; \xi < 2^M \rangle$ разбиений P_ξ: $[M]^e \to r$ имеется X мощности $\geqslant k$ такое, что:*

(ii) *если $a, b \in X$ и $a < b$, то $a^2 < b$,*

(iii) *если $a \in X$ и $\xi \leq 2^a$, то $X \sim (a+1)$ однородно для P_ξ.*

2.11. Утверждение. 2.10 *влечет* $\mathrm{Con}(T)$.

Доказательство. Для данного конечного подмножества S множества аксиом теории T пусть $c_0, \ldots, c_{k-1}$ — все константы, входящие в S. Мы используем 2.10, чтобы показать, что S имеет модель вида $\langle \omega; +, \times, <, x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle$, где $x_0, \ldots, x_{k-1}$ — первые k элементов множества X из 2.10. Эта модель, очевидно, удовлетворяет 2.1 (i), поэтому надо позаботиться лишь об аксиомах теории S, имеющих виды (ii) и (iii). Условие (ii) в 2.10 автоматически обеспечивает аксиомы (ii), поэтому нужно лишь устроить наши разбиения так, чтобы справиться с аксиомами (iii).

Мы можем рассматривать каждое $\xi \in \omega$ как код некоторой возрастающей последовательности *) $\boldsymbol{a}(\xi)$ из ω, причем любая такая последовательность из элементов, не превосходящих b, кодируется некоторым $\xi < 2^b$.

Для данной ограниченной формулы $\psi(y; z)$ и последовательности $\boldsymbol{a}(\xi)$ той же длины, что y, мы получаем разбиение $F_{\psi,\xi}$: $[M]^{e'} \to 2$, где e' — длина z, полагая $F_{\psi,\xi}(c) = 0$, если $\psi(\boldsymbol{a}(\xi); c)$, и $F_{\psi,\xi}(c) = 1$ в противном случае.

Рассмотрим сначала фиксированные M и ξ. Для каждой аксиомы типа (iii), входящей в S, имеется соответствующая ограниченная формула $\psi(y; z)$ и, следовательно, соответствующее разбиение $F_{\psi,\xi}$. В силу 2.9 мы можем собрать их в единое разбиение P_ξ: $[M]^e \to r$, где e и r зависят только от S, но не от ξ или M. Теперь, используя 2.10, выбираем M столь большим, чтобы (ii) и (iii) имели место для некоторого $X \subseteq M$, семейства $\langle P_\xi; \xi < 2^M\rangle$ и $\mathrm{card}(X) \geqslant k + e$. Теперь, выбирая $x_0, \ldots, x_{k-1}$ указанным выше способом, мы видим, что аксиомы типа (iii) выполнены. □

Наш внимательный читатель заметит, что так как отношение выполнения в модели $\langle \omega; +, \times, <\rangle$ для ограниченных формул примитивно рекурсивно, мы можем доказать в PA (и даже в примитивно рекурсивной арифметике PRA), что эта алгебраическая система удовлетворяет 2.1 (i). Следовательно, приведенное выше доказательство можно провести в PA.

Нам осталось только доказать (в PA), что 1.2 влечет 2.10. Для этого нам нужен метод получения быстро растущих однородных множеств. Мы признательны Ф. Абрамсону за некоторые из следующих ниже рассуждений, упростивших наше исходное доказательство.

Для произвольной фукции g пусть $g^{(x)}$ обозначает композицию g с собой x раз. Пусть $f_0(x) = x + 2$, и пусть $f_{n+1}(x) = (f_n)^{(x)}(2)$. Читатель может проверить, что $f_1(x) \geqslant 2x$, $f_2(x) \geqslant 2^x$, $f_3(x) \geqslant \beta_x$, где $\beta_x = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$ (x этажей двоек), и так далее для f_4, f_5, ... Читатели, знакомые с функцией Аккермана, поймут, что каждая f_n примитивно рекурсивна и что любая примитивно рекурсивная функция мажорируется, начиная с некоторого места, некоторой f_n, но эти факты не используются ниже.

*) Например, как код последовательности $\langle i_0, \ldots, i_k\rangle$, где $i_0, \ldots, i_k$ — места, считая с нулевого, на которых встречаются единицы в двоичной записи ξ. — *Прим. перев.*

2.12. Лемма. *Для любого p имеется Q: $[M]^1 \to p+1$ такое, что если X однородно для Q и имеет мощность не менее 2, то $\min(X) \geqslant p$.*

Доказательство. Полагаем $Q(a) = \min(a, p)$.

Мы переходим теперь к двум леммам, использующим относительно большие однородные множества.

2.13. Лемма. *Для любого m имеется разбиение R: $[M]^2 \to r$ (где r зависит только от m) такое, что если $X \subseteq M$ относительно велико, однородно для R и имеет мощность >2, то для любых $x, y \in X$ из $x < y$ следует $f_m(x) < y$.*

Доказательство. Для каждого $i \leqslant m$ пусть $P_i(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $f_i(a) < b$; в противном случае $P_i(a, b) = 1$. Пусть $p = f_m(3)$, и пусть Q построено согласно 2.12 для этого p. Применяем 2.9, чтобы собрать все разбиения P_i в R: $[M]^2 \to r$. Пусть X относительно велико и однородно для R. Пусть $a = \min(X)$, $b = \max(X)$. Индукцией по $i \leqslant m$ легко показать, во-первых, что $f_i(a) < b$ (здесь используется, что $\mathrm{card}(X) \geqslant a$), и, во-вторых, что ввиду однородности $f_i(x) < y$ для всех x, y из X таких, что $x < y$.

2.14. Лемма. *Пусть даны P: $[M]^e \to s$ ($e \geqslant 2$) и m. Тогда имеется P^*: $[M]^e \to s'$, где s' зависит только от m, e и s такое, что если имеется относительно большое $Y \subseteq M$, однородное для P^* и имеющее мощность $>e$, то имеется $X \subseteq M$ такое, что X однородно для P и $\mathrm{card}(X)$ не меньше чем $e+1$ и $f_m(\min(X))$.*

Доказательство. Пусть $h(a)$ — наибольшее x такое, что $f_m(x) \leqslant a$. Для $\boldsymbol{a} = a_1 \ldots a_e$ пусть $h(\boldsymbol{a}) = h(a_1), \ldots, h(a_e)$. Пусть $S(\boldsymbol{a}) = P(h_{\boldsymbol{a}})$, если $h_{\boldsymbol{a}}$ есть e-последовательность, т. е. $h(a_1) < h(a_2) < \ldots < h(a_e)$, и $S(\boldsymbol{a}) = s$ в противном случае. Таким образом, S: $[M]^e \to s+1$. Пусть R построено согласно 2.13. Используем 2.9, чтобы собрать R, S в P^*: $[M]^e \to s'$. Пусть дано Y, удовлетворяющее условию из формулировки леммы, и пусть X — образ Y относительно h. Разбиение R обещает нам, что h взаимно однозначно на Y, так что $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \geqslant \min(Y)$. Но из определения h следует $f_m(\min(X)) \leqslant \min(Y)$, так что $\mathrm{card}(X) \geqslant f_m(\min(X))$, что и требовалось.

2.15. Утверждение. *Комбинаторный принцип* 1.2 *влечет* 2.10.

Доказательство. Нам даны e, k и r, и надо предъявить M, удовлетворяющее 2.10. Найдем p такое, что для всех $a \geqslant p$

число $f_3(a)$ достаточно велико по сравнению с e, r, k и a. Мы уточним это в последнем абзаце доказательства. Пока отметим, что $f_3(y) \geqslant \beta_y$. Пусть $e' = 2e + 1$.

Если теперь даны произвольное M и семейство P_ξ: $[M]^e \to r$ для $\xi < 2^M$, определим новое S: $[M]^{e'} \to 2$, полагая $S(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, если $P_\xi(\boldsymbol{b}) = P_\xi(\boldsymbol{c})$ для всех $\xi < 2^a$, и $S(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1$ в противном случае. Пусть Q построено согласно 2.12, а R — согласно 2.13 для $m = 2$. Используем 2.9, чтобы собрать Q, R и S в единое P, а затем используем 2.14, чтобы получить P^*: $[M]^{e'} \to s'$. Число s' зависит только от $e' = 2e + 1$ и от p. Теперь применим комбинаторный принцип 1.2. Найдем M такое, что $M \underset{*}{\longrightarrow} (e' + 1)^{e'}_{s'}$. В силу 2.12 имеется $X \subseteq M$, однородное для Q, R и S, причем $\operatorname{card}(X) \geqslant f_3(\min(X))$. Так как X однородно для Q, то $\min(X) \geqslant p$. Из того, что X однородно для R и $f_2(y) \geqslant y^2$ для тех y, которые достаточно велики, чтобы попасть в X, следует, что X удовлетворяет 2.10 (ii).

Чтобы проверить 2.10 (iii), мы заменим X на $X' = X \sim \boldsymbol{d}$, где $\boldsymbol{d} = d_1, \ldots, d_e$ — последние e элементов X. Пусть $i_\xi = P_\xi(\boldsymbol{d})$. Если мы покажем, что для всех $a < b_1 < \ldots < b_e$ из X' и всех $\xi < 2^a$ верно $P_\xi(\boldsymbol{b}) = i_\xi$, то мы покажем, что X' удовлетворяет 2.10. Для этого в свою очередь достаточно показать $S(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ для некоторой (следовательно, в силу однородности для любой) $(1 + 2e)$-членной последовательности a, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ из X. Пусть $a = \min(X)$, и рассмотрим одну за другой e-членные последовательности из $X \sim (a + 1)$. Наш выбор p, сделанный ранее, должен быть таким, чтобы имелось более $\binom{r^{2^a}}{}$ таких e-членных последовательностей, — тогда мы можем найти e-членные последовательности $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ такие, что $P_\xi(\boldsymbol{b}) = P_\xi(\boldsymbol{c})$ для всех $\xi < 2^a$, а это и требовалось. □

§ 3. Усиления

В доказательстве нашей основной теоремы мы полагались на разные результаты из теории доказательств, в частности на теорему Гёделя о неполноте. Однако можно доказать нашу основную теорему, используя только методы теории моделей. Это — подход, принятый в работе Париса [1], где развита общая теоретико-модельная методология (индикаторных функций) для получения таких результатов.

С другой стороны, 1.2 в действительности эквивалентно в PA одному хорошо известному принципу теории доказательств, и наше доказательство выявляет это с полной очевидностью. Напомним определение REN_{Σ_1}: это теоретико-числовое предложение, выражающее утверждение «для любого Σ_1-суждения ψ из $\mathrm{PA} \vdash \psi$ вытекает ψ».

3.1. Теорема. *В* PA *доказуемо, что* RFN_{Σ_1} *эквивалентно комбинаторному принципу* 1.2.

Доказательство. После доказательства 1.2 мы упомянули, что

для всех e, r, k верно $\mathrm{PA} \vdash \exists M \left(M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r\right)$.

Этот факт, обоснование которого мы наметили, сам является теоремой PA. Применение RFN_{Σ_1} дает 1.2.

Допустим 1.2 и докажем RFN_{Σ_1}. Пусть ψ — Σ_1-суждение. Мы докажем, что если $\neg\psi$, то $\mathrm{Con}(\mathrm{PA} + \neg\psi)$. Доказательство утверждения 2.5 показывает (с использованием 1.2), что если ψ ложно в ω, то верно $\mathrm{Con}(T + \neg\psi)$. Но доказательство утверждения 2.2 показывает, что $\mathrm{Con}(T + \neg\psi)$ влечет $\mathrm{Con}(\mathrm{PA} + \neg\psi)$. □

Чтобы сформулировать наш окончательный результат, определим рекурсивную функцию f соотношением

$f(e) =$ наименьшему M такому, что $M \underset{*}{\longrightarrow} (e + 1)^e_e$.

3.2. Теорема. *Если* g *— рекурсивная функция (заданная своим описанием) и если* PA $\vdash$ «g *всюду определена», то для всех достаточно больших* e *имеем* $f(e) > g(e)$.

Доказательство. Пусть S — конечное подмножество T, и пусть $c_0, \ldots, c_{k-1}$ — константы, входящие в S. Как показывает доказательство 2.5 (особенно 2.11), мы можем интерпретировать эти константы таким образом, чтобы превратить ω в модель S. Исследуя это доказательство, можно усмотреть, что для всех достаточно больших e мы можем интерпретировать $c_0, \ldots, c_{k-1}$, используя числа из отрезка $(e, f(e))$. Если $g(e) \geqslant f(e)$ для бесконечно многих e, то предыдущее доказывало бы непротиворечивость теории T, дополненной следующими аксиомами с новой константой e:

$$e < c_0; \quad \neg\exists x \leqslant c_i(g(e) \simeq x) \quad \text{для всех} \quad i \leqslant \omega.$$

В силу доказательства 2.2 мы получаем непротиворечивость системы $\mathrm{PA} + \exists e\,(g(e)$ не определено$)$. ⊡

Мы хотели бы поблагодарить редактора за то, что он почти заставил нас написать эту главу, напечатал ее сам на машинке и сделал ряд небольших изменений при условии, что он возьмет на себя ответственность за опечатки.

ЛИТЕРАТУРА

Кирби и Парис (Kirby L., Paris J.)
1. Initial segments of models of Peano's axioms. — In: Proceedings of the Bierutowice Conference 1976. Berlin: Springer, 1979.

Парис (Paris J.)
1. Independence results for Peano arithmetic. — J. Symbolic Logic, 1978, 43, № 4, p. 725—731.

Добавление 1. ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Е. Минц

Приведем доказательство теоремы Цейтина [1] о непрерывности, упомянутой в конце п. 8.2 гл. 5, близкое к неопубликованному доказательству Трулстры, использующему идею Московакиса [1]. Мы несколько изменим терминологию из 5.15, 5.16 гл. 5.

Конструктивное (*рекурсивное*) *метрическое пространство* (короче, пространство) — это пара $M = \langle A, \rho\rangle$, где A — множество натуральных чисел — (кодов) точек пространства, ρ — алгоритм, перерабатывающий каждую пару точек из A в неотрицательное рекурсивное вещественное число*) и удовлетворяющий неравенству треугольника. Переменными для точек пространства будут $X, Y, Z, X_1, \ldots$. *Метрическое равенство* вводится определением $X \approx Y \equiv \rho(X, Y) = 0$.

Запись $t \overset{+}{\in} A$ означает $!t \wedge t \in A$, где $!t$ означает, что t определен.

Алгоритм предельного перехода — это частично рекурсивная функция $\{\mathscr{L}\}$, строящая предел по всякой сходящейся в себе последовательности со стандартным «модулем сходимости»:

$$\forall nm\,(\{e\}(n) \overset{+}{\in} A \wedge \rho(\{e\}(n), \{e\}(n+m)) < 2^{-n}) \to \{\mathscr{L}\}(e) \overset{+}{\in} A \wedge \forall n \rho(\{e\}(n), \{\mathscr{L}\}(e)) \leqslant 2^{-n}.$$

Пространство *полно*, если для него имеется алгоритм предельного перехода (который мы будем обозначать через lim).

*) Подразумевается, что рекурсивное вещественное число задано в виде рекурсивной последовательности рациональных чисел со стандартным «модулем сходимости».

Пространство *сепарабельно*, если имеется перечислимый базис — общерекурсивная последовательность d_n элементов множества A такая, что

$$\forall X k \exists n \rho(d_n, X) < 2^{-k}.$$

Эффективный оператор из пространства $M = \langle A, \rho\rangle$ в пространство $M' = \langle A', \rho'\rangle$ — это частично рекурсивная функция F из A в A', сохраняющая метрическое равенство:

$$\forall XY\,(!F(X) \to [F(x) \in A' \wedge (X \approx Y \to !F(Y) \wedge F(X) \approx F(Y))]).$$

В последнем конъюнктивном члене следовало бы написать $\approx'$ вместо $\approx$, но мы не будем усложнять символику.

Теорема. *Эффективные операторы из полных сепарабельных пространств в произвольные метрические пространства непрерывны. Более того, имеется частично рекурсивная функция, дающая модуль непрерывности.*

Мы воспроизведем с небольшими изменениями доказательство Московакиса [1], основанное на некоторой лемме отделимости. Речь пойдет об отделении точки X_0 шаром от множества тех точек, где $\rho(F(X), F(X_0)) > \varepsilon$.

Введем ряд определений.

Шар радиуса 2^{-k} с центром X: $Y \in S(X, k) \equiv \rho(X, Y) < 2^{-k}$.

Множество $W \subset A$ *прослеживаемо* (с *индексом* t), если для *всех* X, k

$$W \cap S(X, k) \neq \varnothing \to \{t\}(X, k) \overset{+}{\in} W \cap S(X, k).$$

Множество $W \subset A$ *вполне перечислимо* (listable) *с индексом* m:

$$\forall XY\,(X \approx Y \to (X \in W \leftrightarrow Y \in W)) \wedge \forall X\,(X \in W \leftrightarrow !\{m\}(X)).$$

Через L_m обозначим множество таких X, что $!\{m\}(X)$; если m — индекс вполне перечислимого множества, то L_m — вполне перечислимое множество с индексом m.

Лемма об отделении. *Если точка отделима от прослеживаемого множества вполне перечислимым множеством, то она отделима шаром (радиус которого находится по индексам этих множеств).*

Доказательство. Пусть $E \subset A$ прослеживаемо (с индексом t), $X \in L_n$, $E \cap L_n = \varnothing$. Обозначим

$$P(u, p, n) \equiv T(\mathscr{L}, p, j_1(u)) \wedge T(n, U(j_1(u)), j_2(u)), \qquad (1)$$

где j_1, j_2 — проекции пары, $\mathscr{L}$ — алгоритм предельного перехода, T и U — предикат и функция из теоремы Клини о нормальной форме. $P(u, p, n)$ можно читать (приблизительно) так:

ровно за u шагов выяснилось, что $\{\mathscr{L}\}(p)$ определен и принадлежит L_n. Построим число m по теореме о рекурсии:

$$\{m\}(y) \simeq \begin{cases} X, & \text{если } (\forall u < y) \neg P(u, m, n), \\ \{t\}(x, \mu y P(y, m, n)) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Покажем, что $\exists u P(u, m, n)$. Действительно, в противном случае $\forall y(\{m\}(y) = X)$, так что последовательность $\{m\}$ регулярно сходится к X, откуда

$$\lim(m) \approx X \in L_n, \quad (3)$$

так что $\exists u P(u, m, n)$. (Это рассуждение использует принцип Маркова.) Теперь положим $k = \mu u P(u, m, n)$ и докажем, что шар $S(X, k)$ искомый, т. е. не пересекается с E. Действительно, если это пересечение непусто, то (по определению индекса прослеживаемого множества), полагая $\theta \equiv \{t\}(X, k)$, имеем $\theta \stackrel{+}{\in} E \cap S(X, k)$.

По определению k последовательность $\{m\}$ имеет вид

$$\underbrace{X, X, \ldots, X}_{k \text{ раз}}, \theta, \theta, \ldots$$

Эта последовательность сходится к θ (и притом регулярно ввиду $\theta \in S(X, k)$, т. е. $\rho(\theta, X) < 2^{-k}$). Но ввиду $\theta \in E$ и $E \cap L_n = \varnothing$ имеем $\lim(m) \notin L_n$, т. е. $\neg !\{n\}(\lim(m))$ и, значит, $\neg \exists u P(u, m, n)$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теперь накопим запас прослеживаемых и вполне перечислимых множеств.

Лемма 1. *Шар $S(X, k)$ — вполне перечислимое множество.*

Доказательство. Чтобы проверить $Y \in S(X, k)$, надо вычислять $\rho(X, Y)$ все с бо́льшей точностью до тех пор, пока не выяснится «с запасом», что $\rho(X, Y) < 2^{-k}$. Более формально (вспомним, что $\rho(X, Y)$ — номер некоторой регулярно сходящейся последовательности рациональных чисел, и) возьмем число m такое, что

$$\{m\}(Y) \simeq \mu l \left(2^{-k} < \{\rho(X, Y)\}(l) + 2^{-l}\right).$$

Лемма 2. *Перечислимое множество W прослеживаемо.*

Доказательство. Чтобы найти точку из $W \cap S(X, k)$, перечисляем W и ждем, когда какой-нибудь его элемент «с запасом» попадет в $S(X, k)$.

Лемма 3. *Непустое вполне перечислимое множество L_n содержит точку из перечислимого базиса сепарабельного пространства (которая эффективно находится по n).*

Доказательство. Пусть $X \in L_n$. Если L_n не содержит точек из базиса (который по лемме 2 является прослеживаемым множеством), то по лемме об отделении X можно отделить от базиса шаром, так что базис не плотен. □

Лемма 4. *Всякое вполне перечислимое множество L_n прослеживаемо.*

Доказательство. $L_n \cap S(X, k)$ вполне перечислимо как пересечение двух вполне перечислимых множеств. Применяем лемму 3.

Лемма 5. *Если два вполне перечислимых множества L_m, L_n не пересекаются, то каждая точка $X \in L_n$ отделима шаром от L_m (и радиус шара эффективно находится по n, m, X).*

Доказательство. Применить лемму об отделении и лемму 4.

Доказательство теоремы. Положим

$$L^1(X) \equiv \{Y\colon\ !F(X) \wedge !F(Y) \wedge \rho'(F(X), F(Y)) < 2^{-(k+1)}\},$$

$$L^2(X) \equiv \{Y\colon\ !F(X) \wedge !F(Y) \wedge \rho'(F(X), F(Y)) > 2^{-(k+1)}\}.$$

Очевидно, что если $!F(X)$, то $X \in L^1(X)$, а $L_1(X)$, $L_2(X)$ вполне перечислимы и не пересекаются. Отделяем X от L_2 шаром (лемма 5). Радиус этого шара и есть искомый модуль непрерывности в точке X. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Московакис (Moschovakis Y. N.)
1. Recursive metric spaces. — Fundam. math., 1964, 55, № 3, p. 215—238.
Цейтин Г. С.
1. Равномерная рекурсивность алгоритмических операторов над общерекурсивными функциями и каноническое представление для конструктивных функций вещественного аргумента. — Тр. 3-го Всесоюзного матем. съезда, 1. М.: Изд. АН СССР, 1956, с. 188—189.

Добавление 2. ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Г. Е. Минц

Приведем доказательство известной редукции классического исчисления предикатов (с равенством) к исчислению высказываний (с равенством). Мы будем рассматривать выводимость в системах с равенством и без него совместно, отмечая различия там, где они имеются. Напомним, что выводимость формулы F в классическом исчислении высказываний без равенства эквивалентна тавтологичности F в смысле обычных двузначных истинностных таблиц. Выводимость секвенции Δ в исчислении предикатов (соответственно в исчислении высказываний) с равенством будет обозначать выводимость в исчислении без

равенства секвенции вида $\overline{\mathrm{Eq}}, \Delta$, где Eq — список замыканий (соответственно частных случаев) аксиом равенства

$$x = y \to f(x) = f(y); \quad x = y \to (P(x) \to P(y)); \quad x = x,$$

а $\overline{\mathrm{Eq}}$ — список, состоящий из отрицаний членов списка Eq.

Для упрощения формулировок мы ограничимся предваренными формулами.

1. Лемма скулемизации (ср. 2.19 гл. 2 «Теории моделей»). *Предложение* $S \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y A(x_1, \ldots, x_n, y)$ *выводимо тогда и только тогда, когда выводимо предложение* $S' \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$, *где* f — *новый функциональный символ.*

Доказательство. Импликация $S \to S'$ выводима в исчислении предикатов, поэтому $\vdash S \Rightarrow \vdash S'$. Допустим теперь, что S невыводимо. Обозначим через L язык предложения S. По теореме о полноте 4.9 гл. 1 «Теории моделей» имеется L-система $\mathfrak{M}$, опровергающая S, а по теореме Лёвенгейма — Скулема (2.5 гл. 1 «Теории моделей») можно считать, что предметная область $\mathfrak{M}$ состоит из натуральных чисел. Положим $\varphi(m_1, \ldots, m_n)$ равным наименьшему k такому, что $\mathfrak{M} \models \neg A(m_1, \ldots, m_n, k)$, и расширим $\mathfrak{M}$ до алгебраической системы $\mathfrak{N}$ такой, что $f^{\mathfrak{N}} = \varphi$. Имеем $\mathfrak{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \neg A(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$, откуда $\nvdash S'$. □

Замечание. Синтаксическое доказательство этой леммы приведено, например, у Минца [1].

Для произвольной формулы F, имеющей вид

$$\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_k \forall y_k \exists x_{k+1} M x_1 y_1 \ldots x_k y_k x_{k+1} \tag{1}$$

с бескванторной M, положим

$$F^{\Phi} \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_k \exists x_{k+1} M(x_1, f_1(x_1), \ldots, x_k, f_k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}). \tag{2}$$

Для набора термов $t = t_1 \ldots t_k t_{k+1}$ положим

$$M'(t) = M(t_1, f_1(t_1), \ldots, t_k, f_k(t_1, \ldots, t_k), t_{k+1}).$$

2. Теорема (первая форма теоремы Эрбрана). *Предложение F вида (1) выводимо тогда и только тогда, когда для некоторых наборов термов $t^1, \ldots, t^p$ выводима (эрбрановская) дизъюнкция*

$$M'(t^1) \vee \ldots \vee M'(t^p). \tag{3}$$

Доказательство. В силу леммы 1 выводимость F эквивалентна выводимости F^{Φ}, и мы получаем искомый результат в силу теоремы 2.9 гл. 2. □

Пример. $F \equiv \exists y \forall x (Py \vee \neg Px)$, $F^{\Phi} \equiv \exists y (Py \vee \neg Pf(y))$. Выводимая эрбрановская дизъюнкция

$$(Pa \vee \neg Pf(a)) \vee (Pf(a) \vee \neg Pf(f(a))).$$

Другая форма теоремы Эрбрана.

Пусть F имеет вид (1), t — список термов, a — список переменных:

$$t \equiv t_1 \ldots t_k t_{k+1}; \quad a \equiv a_1 \ldots a_k.$$

Обозначим $M(t, a) \equiv M(t_1, a_1, \ldots, t_k, a_k, t_{k+1})$.

Тогда эрбрановские дизъюнкции (3) из первой формы теоремы Эрбрана имеют вид

$$M(t^1, f(t^1)) \vee \ldots \vee M(t^p, f(t^p)), \tag{4}$$

где $f(t) \equiv f_1(t_1), f_2(t_1, t_2), \ldots, f_k(t_1, \ldots, t_k)$.

Сформулируем и докажем вариант этой теоремы, который не требует введения новых функциональных символов f: роль термов, содержавших f, будут играть новые переменные.

Пусть $t^i \equiv t_1^i \ldots t_k^i t_{k+1}^i$ $(i = 1, \ldots, p)$ — наборы термов, $a^i \equiv a_1^i \ldots a_k^i$ $(i = 1, \ldots, p)$ — k-членные наборы переменных, не входящих в формулу F. Скажем, что $a_i^l > a_j^m$, если a_j^m входит в один из термов $t_1^l, \ldots, t_l^l$. Говорят, что система

$$(t^1, a^1), \ldots, (t^p, a^p) \tag{5}$$

допустима, если

(a) транзитивное замыкание $>$ отношения $>$ является частным порядком, т. е. нет цепочек

$$a_i^l > a_{i_1}^{l_1} > \ldots > a_{i_q}^{l_q} \tag{6}$$

с $a_i^l \equiv a_{i_q}^{l_q}$;

(b) из $a_i^l \equiv a_j^m$ следует, что $i = j$ и $(t_1^l, \ldots, t_l^l) \equiv (t_1^m, \ldots, t_l^m)$.

Это определение станет нагляднее, если читать $a_i^l > a_j^m$ как «$a_j^m \equiv f_j(t_1^m, \ldots, t_j^m)$ входит в $a_i^l \equiv f_i(t_1^l, \ldots, t_i^l)$».

3. Теорема (вторая форма теоремы Эрбрана). *Предложение F выводимо тогда и только тогда, когда выводима дизъюнкция*

$$M(t^1, a^1) \vee \ldots \vee M(t^k, a^k) \tag{7}$$

для некоторой допустимой системы (5).

Доказательство. Пусть выводима дизъюнкция (7) для допустимой системы (5). Рангом $r(a_i^l)$ переменной a_i^l назовем наибольшую длину цепочки вида (6). Ввиду (a) из условия допустимости ранг — конечное число, и $a_i^l > a_j^m$ влечет $r(a_i^l) > r(a_j^m)$. Ранг $r(t)$ терма t — максимальный ранг входящих в него переменных.

Чтобы свести (7) к (4)*) положим

$$\hat{a}_i^l \equiv f_i(t_1^l, \ldots, t_i^l), \tag{8}$$

если $r(a_i^l) = 0$. Условие (6) из определения допустимости обеспечивает корректность определения (8). Замена a на $\hat{a}$ в терме t определяет $\hat{t}$, если $r(t) = 0$.

Если $\hat{t}$ определены для случая $r(t) < s$ и $r(a_i^l) = s$, то полагаем

$$\hat{a}_i^l = f_i(\hat{t}_1^l, \ldots, \hat{t}_i^l). \tag{9}$$

Корректность снова обеспечивается условием (b). Теперь подстановка $\hat{a}_i^l$ вместо a_i^l переводит (7) в (4), так что исходная формула F выводима в силу первой формы теоремы Эрбрана.

Пусть теперь выводима формула F вида (1). Рассмотрим вывод d без сечения в генценовском варианте исчисления предикатов (ср. § 2 гл. 2) самой формулы F в случае чистого исчисления предикатов или секвенции $\overline{\text{Eq}}, F$ в случае исчисления предикатов с равенством. Рассмотрим (по предложению В. Оревкова) применения кванторных правил в d, боковые формулы **) которых бескванторные. Назовем эти боковые формулы критическими. В силу свойства подформульности и вида кванторных правил эти боковые формулы имеют вид $M(t, a)$. Запишем их дизъюнкцию в виде (7) и докажем, что (7) выводима и соответствующая система (5) допустима (в предположении, что d — чистый вывод, т. е. собственная переменная правила $\forall$ может встречаться только над его посылкой: этого легко добиться заменой собственных переменных).

(i) Выводимость дизъюнкции (7). Допишем (7) ко всем секвенциям из d, а затем вычеркнем все формулы, содержащие кванторы. Получится вывод формулы (7), так как аксиомы и пропозициональные правила не изменятся, некритические кванторные правила вычеркнутся целиком, а критические перейдут в применения правил для $\vee$.

(ii) Допустимость системы (5). Запишем списки $t^l = t_1^l, \ldots, t_{k+1}^l$ более подробно в виде

$$t^l = t_{1,1}^l, \ldots, t_{1,\nu_1}^l, \ldots, t_{k+1,1}^l, \ldots, t_{k+1,\nu_{k+1}}^l.$$

*) Любой вывод D дизъюнкции (7) можно непосредственно перестроить в вывод D' формулы F. При этом переменные a_i^l будут собственными переменными применений R_i^l введений $\forall$ в D' и из $a_i^l > a_j^m$ будет следовать, что R_i^l лежит в D' выше R_j^m. — *Прим. ред.*

**) То есть малые формулы (в терминологии п. 2.2 гл. 2). — *Прим. ред.*

Теперь каждому вхождению терма в систему (5), т. е. каждой тройке (l, i, q) [соответствующей терму $t_{i,q}^l$] и паре (l, i) [соответствующей переменной a_i^l] поставим в соответствие применение $\pi(l, i, q)$, $\pi(l, i)$ правила в выводе d, которое вводит (если рассматривать d снизу вверх) соответствующее вхождение терма. При этом: (α) $\pi(l, i, q)$ — применение правила $\exists$, а $\pi(l, i)$ — применение правила $\forall$; (β) $\pi(l, i, q)$ расположено в d ниже $\pi(l, i, q+1)$ и ниже $\pi(l, i)$; (γ) если a_j^m входит в $t_{i,q}^l$, то в силу чистоты d применение $\pi(l, i, q)$ расположено выше $\pi(l, i)$. Поэтому из $a_i^l > a_j^m$ следует в силу (β), (γ), что $\pi(l, i)$ расположено выше $\pi(m, j)$, так что выполнено условие (a) из определения допустимости. Если $a_i^l = a_j^m$, то в силу (α) и чистоты d имеем $\pi(l, i) = \pi(m, j)$. Главная формула правила $\pi(l, i)$ имеет вид $\forall x_i \ldots \exists y_{k+1} M(t_1^l, a_1^l, \ldots, t_i^l, x_i, \ldots, y_{k+1})$ и в то же время вид $\forall x_j \ldots \exists y_{k+1} M(t_1^m, a_1^m, \ldots, t_j^m, x_j, \ldots, y_{k+1})$. Отсюда следует $i = j$, $t_q^l \equiv t_q^m$ для $q \leqslant i$, т. е. условие (b) из определения допустимости. Теорема доказана. □

В качестве примера приведем вывод формулы из предыдущего примера и соответствующую эрбрановскую дизъюнкцию:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Pb, Pb}}{\neg Pb, Pb \vee \neg Pc}}{Pa \vee \neg Pb, Pb \vee \neg Pc}}{Pa \vee \neg Pb, \forall y (Pb \vee \neg Py)}}{Pa \vee \neg Pb, F}}{\forall y (Pa \vee \neg Py), F} \qquad (Pa \vee \neg Pb) \vee (Pb \vee \neg Pa)$$

$$F \equiv \exists x \forall y (Px \vee \neg Py)$$

Скажем, что теория T *замкнута относительно разбора случаев*, если для любой бескванторной формулы $M(x)$ и термов $t_1, \ldots, t_k$ можно указать терм t такой, что в T выводимо

$$M(t_1) \vee \ldots \vee M(t_k) \to M(t), \tag{10}$$

причем переменные терма t содержатся среди переменных термов $t_1, \ldots, t_k$ и формулы M.

Заметим, что для замкнутости относительно разбора случаев достаточно наличия ограниченного μ-оператора (с его обычными свойствами) в применении к бескванторным формулам: в этом случае можно положить $t \equiv (\mu x \leqslant \max(t_1, \ldots, t_k)) M(x)$. Последнее имеет место для арифметики элементарных по Кальмару функций и примитивно рекурсивной арифметики.

Скажем, что T *интерпретируется* в T' интерпретацией отсутствием контрпримера (ср. п. 1.4 гл. 2), если из $T \vdash F$ для формулы F вида (1) следует существование термов t таких, что $T \vdash M'(t)$, где t содержат только свободные переменные из F и $f_1, \ldots, f_k$ (обозначение $M'(t)$ введено перед теоремой 1).

Приводимое ниже следствие теоремы Эрбрана обобщает теорему Бернайса о непротиворечивости.

4. Теорема. *Пусть T — теория в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством, специфические аксиомы которой имеют вид*

$$\forall z S(z), \quad \forall x \exists y R(x, y) \tag{11}$$

для бескванторных S, R.

Пусть T^{QF} — бескванторная теория с равенством и правилом подстановки термов вместо свободных переменных, в которой выводимы формулы

$$R(x, \varphi(x)), S(z) \tag{12}$$

для некоторого функционального символа φ; пусть M — произвольная бескванторная формула.

(a) *Если $T \vdash M$, то $T^{QF} \vdash M$. В частности, если T^{QF} содержится в T, то T — консервативное расширение T^{QF}.*

(b) *Если T^{QF} замкнута относительно разбора случаев, то $T \vdash \forall u \exists v M(u, v)$ влечет $T^{QF} \vdash M(u, t)$ для некоторого t.*

(c) *Если T^{QF} содержит свободные функциональные переменные и замкнута относительно разбора случаев, то T интерпретируется в T^{QF} интерпретацией отсутствием контрпримера.*

Доказательство. Пусть $T \vdash \forall u \exists v M(u, v)$. Тогда в исчислении предикатов выводима формула $\forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall z S(z) \rightarrow \rightarrow \forall u \exists v M(u, v)$, а следовательно, и $\forall x R(x, f(x)) \wedge \forall z S(z) \rightarrow \rightarrow \exists v M(u, v)$, где f — новый функциональный символ. Вынося кванторы вперед, применяя теорему Эрбрана и подставляя φ из (12) вместо f, получаем, что выводима дизъюнкция

$$\bigvee_i (R(r_i, \varphi(r_i)) \wedge S(s_i) \rightarrow M(u, t_i).$$

Подставляя r_i, s_i вместо x и z в (12), получаем отсюда, что в T^{QF} выводима

$$\bigvee_i M(u, t_i). \tag{13}$$

Если M вообще не содержала u, v свободно, то все члены этой дизъюнкции совпадают, и мы получаем (a). Если T замкнута относительно разбора случаев, то, применяя (10), получаем (b). Наконец, чтобы получить (c), следует применить (b) к формуле F^{Φ}.

Пусть PA_0 обозначает результат ограничения схемы индукции в PA (со всеми примитивно рекурсивными функциями) бескванторными предикатами.

5. Следствие. *Система PA_0 — консервативное расширение бескванторной примитивно рекурсивной арифметики* PRA. *Более того, выводимость $\forall x \exists y M(x, y)$ в PA_0 влечет выводимость $M(x, \varphi(x))$ в* PRA *для некоторой φ.*

Доказательство. Запишем схему индукции в виде

$$\forall b [A(0) \wedge (\forall x < b)(A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow A(b)]. \tag{14}$$

Формула в квадратных скобках эквивалентна бескванторной, так что применима теорема 4. □

Сейчас мы установим гораздо более сильный результат, усиливающий результат Парсонса [1]. Назовем $\Pi_2^<$-формулами арифметические формулы, которые принадлежат классу Π_2^0 с точностью до вычеркивания ограниченных кванторов. Для каждой $\Pi_2^<$-формулы A обозначим через $\tilde{A}$ формулу из класса Π_2^0, которая получается из A продвижением ограниченных кванторов с помощью преобразований

$$(\exists x < t) \forall y A(x, y) \rightarrowtail \forall y (\exists x < t) A(x, (y)_x) \tag{15}$$

и «склеивания» одноименных кванторов.

Ограниченными формулами назовем арифметические формулы, в которых все кванторы ограничены. *Одноквантерные формулы* — это по определению формулы без перемен кванторов, т. е. такие, в которых неограниченные кванторы разного знака не управляют друг другом.

Рассмотрим ослабленное правило $\Pi_2^<$-*индукции*

$$\frac{A(0);\ A(b) \rightarrow A(sb)}{\tilde{A}(b)} \quad (\mathrm{IR}\,\Pi_2^<), \tag{16}$$

где $A \in \Pi_2^<$, а также правило $\Pi_2^<$-*сечения*

$$\frac{\tilde{A};\ A \rightarrow B}{\tilde{B}} \quad (\mathrm{Cut}\,\Pi_2^<),$$

где $B \in \Pi_2^<$, а $A \equiv \forall b (\exists x < t) A'$ с $A' \in \Pi_2^0$. Преобразования (15), по-видимому, не являются доказуемо эквивалентными в PA_0, поэтому замена A на $\tilde{A}$ в заключении (посылке) правила ослабляет (соответственно усиливает) его.

Пусть $PA_0^< = PA_0 + \mathrm{IR}\,\Pi_2^< + \mathrm{Cut}\,\Pi_2^<$.

6. Теорема. (a) *Система $PA_0^<$ — консервативное расширение PA_0 относительно Π_2^0-формул.*

(b) *Если формула* $\forall x \exists y M(x, y)$ *с бесквантороной* M *выводима в* $\mathrm{PA}_0^{<}$, *то в примитивно рекурсивной арифметике* PRA *выводима* $M(x, \varphi(x))$ *для некоторой примитивно рекурсивной функции* φ.

Доказательство. (a) Докажем сначала допустимость $\mathrm{IR}\Pi_2^{<}$. Обозначим через $\mathrm{PA}_0^{[n]}$ ограничение системы PA_0 языком, в котором запрещены символы примитивно рекурсивных функций, содержащие более чем n вложенных примитивных рекурсий.

(i) В системе $\mathrm{PA}_0^{[n+1]}$ (для $n \geqslant 2$) можно записать универсальную функцию $V^{[n]}$ для термов системы $\mathrm{PA}_0^{[n]}$ и доказать ее основные свойства, в частности

$$V^{[n]}(\ulcorner t \urcorner) = t \tag{17}$$

для замкнутых термов t и аналогичное равенство для термов с переменными.

(ii) Теоремы 2—4, 6 выводимы в $\mathrm{PA}_0^{[4]}$. (Быстро растущие функции нужны для приведения вывода к нормальной форме, из которой затем извлекается эрбрановская дизъюнкция.)

(iii) С помощью (i), (ii) в $\mathrm{PA}_0^{[n+1]}$, а тем более в PA_0 выводится принцип рефлексии для (бесквантороных формул в) $\mathrm{PA}_0^{[n]}$:

$$\mathrm{Prov}^{[n]}(\varphi(x), \ulcorner E(\dot{x}) \urcorner) \to E(x), \tag{18}$$

где E — бесквантороная формула, $\mathrm{Prov}^{[n]}$ — предикат выводимости в $\mathrm{PA}_0^{[n]}$, символика $E(\dot{x})$ объяснена в главе 1.

(iv) В PA_0 выводим ослабленный принцип рефлексии для $\Pi_2^{<}$-формул в $\mathrm{PA}_0^{[n]}$:

$$\mathrm{Prov}^{[n]}(\varphi(x), \ulcorner A(\dot{x}) \urcorner) \to \tilde{A}, \tag{19}$$

где $A \in \Pi_2^{<}$. Действительно, ввиду очевидной «монотонности» преобразований (17) импликация $A \to \tilde{A}$ доказуема в $\mathrm{PA}_0^{[n]}$ для любой $\Pi_2^{<}$-формулы A, так что достаточно доказать обычный принцип рефлексии

$$\mathrm{Prov}^{[n]}(\varphi(x), \ulcorner A(\dot{x}) \urcorner) \to A \tag{20}$$

для Π_2^0-формул A. Пусть $A \equiv \forall y \exists z R(x, y, z)$ с бесквантороной R. В силу (ii) из посылки (20) следует при $n \geqslant 4$

$$\mathrm{Prov}^{[n+1]}(\Phi(x, y), \ulcorner R(\dot{x}, \dot{y}, \theta(\dot{x}, \dot{y})) \urcorner)$$

для некоторых примитивно рекурсивных функций Φ, θ, что в силу (18) дает $R(x, y, \theta(x, y))$, откуда получается A.

(v) Если посылки правила индукции по формуле A выводимы в некоторой системе, то вывод $\varphi(x)$ формулы $A(\bar{x})$ для

любой конкретной цифры $\bar{x} = 0, 1, 2, \ldots$ состоит из применений правила сечения к упомянутым посылкам. Поэтому в той же системе (если она содержит, скажем, $\mathrm{PA}_0^{[3]}$) выводимо $\mathrm{Prov}(\varphi(x), \ulcorner A(\dot{x}) \urcorner)$. Для обоснования допустимости правила $\mathrm{IR}\Pi_2^{<}$ остается только применить (iv) к системе $\mathrm{PA}_0^{[n]}$, где выводимы его посылки.

Рассмотрим теперь $\mathrm{Cut}\,\Pi_2^{<}$. В силу $B \to \tilde{B}$ можно считать, что $B \in \Pi_2^0$. В силу (20) можно «снять» с B кванторы всеобщности и считать, что $B \in \Sigma_1^0$. Пусть в PA_0, т. е. в некоторой $\mathrm{PA}_0^{[n]}$, выводимы формулы

$$\tilde{A}; \quad A \to B,$$

где для простоты записи считаем, что

$$A \equiv \forall b (\exists x < t) \forall y \exists z M(b, x, y, z),$$
$$B \equiv \exists w N(w)$$

с бесквантороными M, N. В силу выводимости $\tilde{A}$ и следствия 5 в PA_0 выводимы формулы

$$M(b, \chi(b, y), (y)_{\chi(b, y)}, \nu(b, y)); \quad \chi(b, y) < t \tag{21}$$

для некоторых функций χ, ν. В силу выводимости формулы $A \to B$ и второй формы теоремы Эрбрана выводима формула

$$\bigwedge_{i, j} M(\beta_i, x_i, Y_{ij}, u_{ij}) \wedge x_i < t_b[\beta_{ij}] \to \bigvee_k N(W_k), \tag{22}$$

где β_i, Y_{ij}, W_k — термы, x_i, u_{ij} — переменные, причем β_i (соответственно Y_{ij}) не содержит свободно переменных x_l, u_{lj} (соответственно u_{lj}) для $l < i$.

Наша цель — найти такие подстановки вместо свободных переменных в (21) и (22), которые позволят применить «настоящее» сечение. Подставляя вместо u_{ij} в (22) терм $\nu(\beta_i, Y_{ij})$ (см. (21)), мы получаем возможность не обращать внимания на последние аргументы формулы M в (21) и (22).

В силу доказуемой в PRA эквивалентности $E(r) \wedge E(s) \leftrightarrow E(\theta)$, где $\theta \equiv (\mu x \leqslant \max(r, s))(E(x) \wedge (x = r \vee x = s))$, можно заменить в (24) $\bigwedge_{i, j}$ на $\bigwedge_i$. Итак, имеем

$$M(b, \chi(b, y), (y)_{\chi(b, y)}); \quad \chi(b, y) < t, \tag{23}$$

$$\bigwedge_{0 \leqslant i < p} M(\beta_i, x_i, Y_i) \wedge x_i < t_b[\beta_i] \to \bigvee_k N(W_k). \tag{24}$$

Применим индукцию по p, чтобы установить выводимость $\bigvee_k N(\theta_k)$ для некоторых термов θ_k, откуда и будет следовать выводимость B.

Базис индукции ($p = 0$) очевиден. Для обоснования индукционного перехода положим

$$Y \equiv \langle Y_0[0], \ldots, Y_0[t[\beta_0] - 1]\rangle,$$

где подстановка в терм Y_0 производится вместо переменной x_0. Подставляя теперь $b \mapsto b_0$, $y \mapsto Y$ в (23) и $x_0 \mapsto \chi(b_0, Y)$ в (24) и производя сечение, уменьшаем p на 1, что и требовалось.

(b) получается из (a) и следствия 5. □

Рассмотрим следующее правило:

$$\frac{A \leftrightarrow \neg B}{\tilde{I}} \quad (\mathrm{IA}\tilde{\Delta}_2^<), \tag{25}$$

где $A, B \in \Pi_2^<$, а I обозначает $A(0) \wedge (\forall x < b)(A(x) \to A(sx)) \to A(b)$.

7. Теорема. (a) *Правило* $\mathrm{IA}\tilde{\Delta}_2^<$ *допустимо в* $\mathrm{PA}_0^<$.

(b) *Если формула* $\forall x \exists y R(x, y)$ *с бесквантор*ной R *выводима в* PA_0 *с одноквантор*ной *аксиомой индукции, то в* PRA *выводима* $R(x, \varphi(x))$ *для некоторой* φ.

Доказательство. (a) В присутствии посылки $A \leftrightarrow \neg B$ для $A, B \in \Pi_2^<$ формула I доказуемо эквивалентна некоторой $\Pi_2^<$-формуле, причем $I(0)$ и $I(b) - I(sb)$ очевидным образом выводимы. Применяем теорему 6(a).

(b) Для одноквантор*ной формулы* F формулы $A, B \in \Pi_2^0$ такие, что (доказуемо в PA) $A \leftrightarrow \neg B \leftrightarrow F$, строятся очевидным образом. Поэтому I для аксиомы индукции I по таким формулам выводима в PA_0. Применяем теорему 6(b). □

Теорема 7 позволяет следующим образом исключать индукцию из доказательств формул.

8. Следствие. *Пусть* A *выводима в* PA_0 *из* Π_2^0*-формул, выводимых в* $\mathrm{PA}_0^<$. *Тогда* A *выводима в* PA_0.

Таким образом, устанавливаем выводимость в PA_0 многих теорем конструктивного анализа (включая теорему непрерывности эффективных операций) и элементарной теории моделей. □

ЛИТЕРАТУРА

Минц Г. Е.
1. Теорема Эрбрана. — В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 311—350.
Парсонс (Parsons C.)
1. On a number-theoretic choice schema and its relation to induction. — In: Intuitionism and Proof Theory/Ed. A. Kino, J. Myhill and R. E. Vesley. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 459—473.

Добавление 3. КАНОНИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО ВЫВОДА ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Г. Е. Минц

Мы опишем примитивно рекурсивную функцию T, которая по каждому предваренному предложению (т. е. замкнутой формуле) A строит дерево T_A, и докажем универсальность T_A: если A истинно или выводимо в классической арифметике с ω-правилом, то T_A — вывод формулы A.

Выводимыми объектами рассматриваемой формулировки арифметики являются *секвенции*, т. е. конечные списки предваренных предложений, причем список $A_1, \ldots, A_n$ трактуется как дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

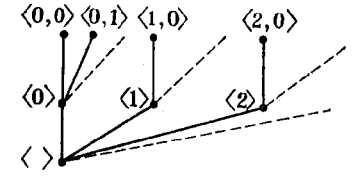
Аксиомы — секвенции $\Gamma, \mathbf{T}, \Sigma$, где $\mathbf{T}$ — истинное бесквантор*ное предложение, Γ, Σ — списки формул.

Правила вывода:

$$\frac{B[N], \Gamma, \exists x B}{\exists x B, \Gamma}(\exists) \qquad \frac{\ldots, \Gamma, B[N], \ldots \text{ все } N}{\forall x B, \Gamma}(\forall) \qquad \frac{\Gamma}{\mathbf{F}, \Gamma}(\mathrm{F}),$$

где $\mathbf{F}$ — ложное бесквантор*ное предложение.

Выводы по этим правилам будут представляться в виде бесконечных деревьев, точнее, в виде поддеревьев *универсального дерева*



состоящего из (кодов) конечных последовательностей натуральных чисел, упорядоченных по включению. Мы будем применять символику из 3.1.7 гл. 1, в частности $\mathrm{lh}(\langle a_0, \ldots, a_n\rangle) = n + 1$, $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle * \langle b_0, \ldots, b_m\rangle = \langle a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m\rangle$.

Корень универсального дерева — пустая последовательность $\langle\ \rangle$, из корня выходят *ребра*, ведущие к *узлам* $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, ... и т. д. В общем случае из узла a выходят ребра, ведущие к узлам $a * \langle 0\rangle$, $a * \langle 1\rangle$ и т. д. Узел b выше, чем узел a (запись $b \supset a$), если $b = a * c$ для непустой последовательности c.

Локально корректная (относительно некоторых постулатов) *фигура* — это функция f, ставящая в соответствие каждому узлу a универсального дерева либо число 0, указывающее, что a пуст, т. е. не принадлежит рассматриваемой фигуре, либо (число, кодирующее) информацию, включающую некоторую

секвенцию S_a^f и анализ $\mathscr{A}_a^f$, указывающий, по какому постулату эта секвенция получена (верхний индекс f мы часто будем опускать). При этом требуется, чтобы S_a была связана с содержимым непосредственно предшествующих узлов именно так, как указано в анализе: если $\mathscr{A}_a = (\mathbf{F})$, то $S_{a*\langle 0\rangle}$ получается из S_a вычеркиванием первого члена, причем он является ложной бесквантор ной формулой, и $S_{a*\langle i\rangle} = 0$ для всех $i > 0$; если $\mathscr{A}_a = (\forall)$, то при каждом N секвенция $S_{a*\langle N\rangle}$ получается из S_a вычеркиванием первого члена $\forall x B$ и добавлением сзади $B[N]$ и т. д. Далее, если $f(a) = 0$, то $f(a * \langle i\rangle) = 0$. Легко видеть, что при естественной нумерации конъюнкция $\mathrm{LC}(f)$ всех этих утверждений, выражающая локальную корректность фигуры f, записывается в виде $\forall x M(x, f)$, где M — примитивно рекурсивная формула. Через $\lambda(f)$ обозначим последнюю секвенцию $S^f_{\langle\rangle}$ дерева f.

Зададим дерево T_A следующим предписанием. В узел $\langle\rangle$ помещается формула A. Если в узел a помещена секвенция S, то в надлежащие непосредственно предшествующие узлы помещаются посылки того (единственного) из правил $(\exists)$, $(\forall)$, $(\mathbf{F})$, по которому может получиться S. В случае $(\exists)$ в качестве N выбирается наименьшее натуральное число, еще не использованное в данной ветви для формулы $\exists x B$.

Пример 1. $A \equiv \exists x (x + 1 = 0)$.

$$
\begin{array}{rl}
\langle 0, 0, 0, 0\rangle & \dfrac{\exists x (x+1=0)}{} (\mathbf{F}) \\
\langle 0, 0, 0\rangle & \dfrac{1+1=0,\ \exists x (x+1=0)}{} (\exists) \\
\langle 0, 0\rangle & \dfrac{\exists x (x+1=0)}{} (\mathbf{F}) \\
\langle 0\rangle & \dfrac{0+1=0,\ \exists x (x+1=0)}{} (\exists) \\
T_A: \quad \langle\rangle & \exists x (x+1=0)
\end{array}
$$

Дерево T_A содержит бесконечную ветвь, состоящую из секвенций A и $N + 1 = 0, A$, расположенных соответственно в узлах $\langle 0, \ldots, 0\rangle$ с четным и нечетным числом нулей.

Пример 2. $B \equiv \exists x \forall y (x = 1 \vee y \neq 1)$.

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{\ldots 0 = 1 \vee 1 \neq 1,\ B,\ (1 = 1 \vee N \neq 1) \ldots \text{(акс)}}{\forall y\,(1 = 1 \vee y \neq 1),\ 0 = 1 \vee 1 \neq 1,\ B} \\[2ex]
\dfrac{\text{(акс) } B, 0=1\vee 0\neq 1;\ B, 0=1\vee 1\neq 1;\ B,\ 0=1\vee 2\neq 1 \text{ (акс)};\ldots;\ B, 0=1\vee N+1\neq 1\ldots,}{\forall y\,(0 = 1 \vee y \neq 1),\ B} \\[2ex]
T_B: \quad \exists x \forall y\,(x = 1 \vee y \neq 1)
\end{array}
$$

Дерево T_B имеет высоту 5.

Упражнение. Построить по образцу T_B дерево T_C, где $C \equiv \exists x \forall y (Rx \vee \neg Ry)$ для бесквантор ной R, и убедиться, что T_C имеет конечную высоту.

Вывод согласно некоторым постулатам определяется обычно как локально корректная фундированная фигура, причем условие фундированности задают в разных случаях по-разному: в виде обобщенного индуктивного определения, в виде требования обрыва всех ветвей или с помощью назначения ординалов.

Будем рассматривать предложения вида

$$\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n M, \tag{1}$$

где M — бесквантор ная формула. В дереве T_A кванторы существования равномерно снимаются «исчерпывающим» образом, т. е. вместо переменных представляются все натуральные числа (если вывод не оборвется раньше). Опишем функцию, указывающую, на какой высоте произойдет нужное снятие квантора. Через $|\Gamma|$ обозначим количество членов списка Γ.

1. Лемма. *Пусть* b — *узел дерева* T_F (*для некоторого предложения* F), *содержащий секвенцию* Γ, A, Δ, *и пусть* $a \supset b$ — *непустой узел дерева* T_F. *Тогда*:

(a) *если* $\mathrm{lh}(a) > \mathrm{lh}(b) + 2|\Gamma| + 1$, *то ниже* a *имеется правило с главной формулой* A;

(b) *если* $A \equiv \exists x B$ *и* $\mathrm{lh}(a) > \mathrm{lh}(b) + \varphi(|\Gamma A \Delta|, m)$,

где

$$\varphi(\gamma, m) = (2^{m+1} - 1)(2\gamma + 1) + 2^{m+1} - (m + 2), \tag{2}$$

то ниже a *имеется правило* $(\exists)$ *с главной формулой* A, *в котором вместо* x *подставляется* m.

Доказательство. Будем прослеживать наше дерево снизу вверх — от заключений правил к посылкам. Секвенция $C\Sigma$ за один или два шага (последнее — в случае, когда C начинается с $\exists$) переходит в $\Sigma C' C''$. Поэтому секвенция ΠA не более чем за $2|\Pi|$ шагов переходит в $A\widetilde{\Pi}$, где $|\widetilde{\Pi}| \leqslant 2|\Pi|$, а затем применяется правило с главной формулой A. Это доказывает (a). Оценка $|\widetilde{\Pi}| \leqslant 2|\Pi|$ показывает, что в качестве φ из (b) можно взять любую функцию такую, что

$$\varphi(\gamma, 0) \geqslant 2\gamma + 1 \quad \text{и} \quad \varphi(\gamma, m + 1) \leqslant \varphi(2\gamma + 1, m) + 2\gamma + 1.$$

Функция (2) удовлетворяет этим условиям с $=$ вместо $\leqslant$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma, m + 1) &= (2^{m+2} - 1)(2\gamma + 1) + 2^{m+2} - (m + 3) \\
&= (2^{m+1} - 1)(2 \cdot (2\gamma + 1) + 1) + 2^{m+1} - (m + 2) + 2\gamma + 1 \\
&= \varphi(2\gamma + 1, m) + 2\gamma + 1. \quad \square
\end{aligned}$$

Обозначим через $(\tilde{\forall})$, $(\tilde{\exists})$, $(\tilde{\mathbf{F}})$ правила, отличающиеся от $(\forall)$, $(\exists)$, $(\mathbf{F})$ лишь разрешением переставить члены в посылках и в заключении. LC будет обозначать локальную корректность относительно этих правил и аксиом Γ, $\mathbf{T}$, Σ.

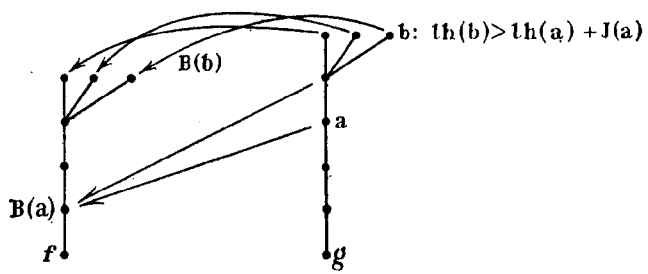
Основой дальнейшего является *возможность вложения дерева T_A в любое локальное корректное дерево f* с последней формулой A, при котором отрезки переходят в отрезки и растущие (не обрывающиеся слишком рано) ветви — в растущие ветви.

Скажем, что дерево g *вложено* в дерево f с помощью функций B и J, если для любого b такого, что $g(\mathrm{b}) \neq 0$, выполнены условия

$$f(B(\mathrm{b})) \neq 0; \quad \mathrm{b} \supseteq \mathrm{a} \to B(\mathrm{b}) \supseteq B(\mathrm{a}); \tag{3}$$

$$\mathrm{b} \supset \mathrm{a} \wedge \mathrm{lh}(\mathrm{b}) > \mathrm{lh}(\mathrm{a}) + J(\mathrm{a}) \to B(\mathrm{b}) \supset B(\mathrm{a}). \tag{4}$$

Иными словами, функция B указывает образ B b) любого узла b дерева g в дереве f:



При этом «указатель» B может «застревать» в точке $B(\mathrm{a})$ дерева f. Функция J оценивает число шагов, через которое указатель обязан сместиться вверх.

2. Теорема. *Имеются элементарный по Кальмару оператор $\mathscr{B}$ и примитивно рекурсивный оператор $\mathscr{J}$ такие, что из* $\mathrm{LC}(f) \wedge \lambda(f) = A$ *следует, что* $B = \mathscr{B}(f)$ *и* $J = \mathscr{J}(f)$ *вкладывают T_A в f.*

Доказательство. Определим $B(\mathrm{a})$ явно, а $J(\mathrm{a})$ рекурсией по $\mathrm{lh}(\mathrm{a})$. Для каждого непустого узла b дерева f через $\bar{\mathscr{A}}^f_{\mathrm{b}}$ обозначим список (без повторений) анализов применений правил в узлах, предшествующих b (исключая b), снабженных информацией как о главных формулах этих применений, так и о натуральных числах, подставляемых вместо переменных, связанных кванторами, в ветви, ведущей к b. Аналогичный список для узла с дерева T_A обозначим $\bar{\mathscr{A}}^T_{\mathrm{c}}$. Положим

$$B(\mathrm{b}) = \max\{\mathrm{c}: \mathrm{lh}(\mathrm{c}) \leqslant \mathrm{lh}(\mathrm{b}) \wedge \mathscr{A}^T_{\mathrm{b}} \text{ содержит } \bar{\mathscr{A}}^f_{\mathrm{c}}\}, \tag{5}$$

где максимум берется согласно $\subset$. Множество, описанное в фигурных скобках, конечно. Обозначим $\mathfrak{a} \equiv \mathscr{A}^f_{B(\mathrm{b})}$ и положим $J(\mathrm{b}) = 1$, если $\mathscr{A}^T_{\mathrm{b}} \equiv \mathfrak{a}$ или $\bar{\mathscr{A}}^T_{\mathrm{b}}$ содержит $\mathfrak{a}$, или $\mathfrak{a} \neq (\tilde{\exists}), (\tilde{\mathbf{F}})$. Если эти условия нарушены и $\mathfrak{a} \equiv (\tilde{\mathbf{F}})$, полагаем $J(\mathrm{b}) = 2\left|S^T_{\mathrm{a}}\right| - 1$, а если $\mathfrak{a} \equiv (\tilde{\exists})$, то $J(\mathrm{b}) = \varphi\left(\left|S^T_{\mathrm{a}}\right|, K\right)$, где φ — функция из леммы 1, а K — натуральное число, подставляемое в правиле $(\tilde{\exists})$, примененном в узле $B(\mathrm{b})$. Теперь индукцией по $\mathrm{lh}(\mathrm{b})$ устанавливаются свойства (3), (4) для $g = T_A$ и

$$S^T_{\mathrm{b}} \succ S^f_{B(\mathrm{b})},$$

где $S \succ U$ означает, что секвенция U совпадает с S или получается из нее вычеркиванием некоторых членов, заменой некоторых подформул AN на $\forall x Ax$ и дописыванием ложных бескванторных предложений. □

Если ON — некоторая система ординальных обозначений, то $\mathrm{WFON}(f)$ будет означать, что для каждого непустого узла a дерева f информация $f(\mathrm{a})$ включает число $h_{\mathrm{a}} \in \mathrm{ON}$, причем $h_{\mathrm{a}*\langle i\rangle} < h_{\mathrm{a}}$ для непустых узлов $\mathrm{a}*\langle i\rangle$. Отметим, что в интересных случаях h_{a} оказывается больше, чем «классическая» высота поддерева с корнем a. Через $h(f)$ обозначается высота $h^f_{\langle\rangle}$ нижнего узла $\langle\rangle$. Формула $\mathrm{WFON}(f)$ принадлежит классу $\Pi^0_1(\mathrm{ON})$. Будем считать, что на ON заданы функции сложения и умножения, удовлетворяющие обычным определяющим равенствам и обладающие обычными свойствами. Построим оператор переноса (с увеличением не более чем в ω раз) ординалов с произвольного локально корректного дерева f на T_A. Доказательство приводимой ниже теоремы показывает в действительности, что для порядкового типа τ_A дерева T_A (как частично упорядоченного множества) выполняется неравенство $\tau_A \leqslant \leqslant \omega\tau_f$, где f — любое локально корректное дерево с нижней формулой A.

Определим экстенсиональное равенство деревьев как равенство «основной информации». $f = g$ означает

$$\forall \mathrm{a}[(f(\mathrm{a}) \neq 0 \leftrightarrow g(\mathrm{a}) \neq 0) \wedge S^f_{\mathrm{a}} = S^g_{\mathrm{a}} \wedge \mathscr{A}^f_{\mathrm{a}} = \mathscr{A}^g_{\mathrm{a}}].$$

3. Теорема. *Имеется примитивно рекурсивный оператор D такой, что для любого f*

$$\mathrm{LC}(f) \wedge \lambda(f) = A \wedge \mathrm{WFON}(f) \to [Df] = T_A \wedge \mathrm{WFON}([Df]) \wedge h([Df]) = \omega \cdot h(f).$$

Доказательство. Пусть выполнено условие нашей теоремы. Найдем, согласно теореме 2, функции B, J, вкладывающие T_A в f. Расстановка ординалов в T_A начинается снизу,

Полагаем $h^T_{\langle\rangle} = \omega \cdot h^f_{\langle\rangle}$. Если h^T_a уже определено, $T(a * \langle i\rangle) \neq 0$ и $B(a * \langle i\rangle) \neq B(a)$, то полагаем $h^T_{a*\langle i\rangle} = \omega \cdot h^f_{B(a)*\langle i\rangle}$. Если же $B(a * \langle i\rangle) = B(a)$, то полагаем $h^T_{a*\langle i\rangle} = \omega \cdot h^f_{B(a)*\langle 0\rangle} + J''(a)$, где $J''(a) = \min\{J(b) + \mathrm{lh}(b) - \mathrm{lh}(a)\colon\ b \leqslant a \wedge B(b) = B(a)\}$. При проверке условия возрастания ординалов в T используется возрастание ординалов в f, соотношение $h < h' \to \omega \cdot h + N < \omega \cdot h'$ (для любого N) и (4).

Покажем, как с помощью теоремы 3 получить известную (Белякин [1]) оценку $\omega \cdot n$ для высот рекурсивных выводов истинных (негативных) арифметических формул из $\Pi^0_n \cup \Sigma^0_n$.

4. Теорема. *Пусть A — истинная замкнутая формула вида* (1) *из $\Pi^0_n \cup \Sigma^0_n$. Тогда:*

(a) *имеется f (с графиком из Π^0_n) такая, что $\lambda(f) = A \wedge h(f) = n$;*

(b) *имеется g (с графиком из Δ^0_{n+1}) такая, что $g = T_A \wedge h(g) = \omega \cdot n$.*

Доказательство. (a) доказывается индукцией по n. При $n = 0$ формула A — аксиома. Если $A = \exists x B(x)$, где $B \in \Pi^0_n$, то для некоторого N формула $B[N]$ истинна. Берем наименьшее такое N и дописываем ($\tilde{\exists}$) снизу к выводу $B[N]$, который имеется по индукционному предположению. Для $A = \forall x B$ применяем ($\tilde{\forall}$). (b) Следует из (a) и теоремы 3.

Замечание. Несколько более точное вычисление показывает, что при $n > 0$ можно получить $h(T_A) < \omega \cdot n$ для $A \in \Sigma^0_{2n}$ и $h^T = \omega \cdot n$ для $A \in \Pi^0_{2n+1}$.

Эта оценка точна при $n > 0$, так как предикат «иметь рекурсивный вывод высоты меньше $\omega \cdot n$» принадлежит классу Σ^0_{2n}, а предикат «быть рекурсивным выводом высоты $\omega \cdot n$» — классу Π^0_{2n+1}.

Рассмотрим теперь *индуктивное* определение фундированности дерева. Пусть предикат $W(f)$ вводится аксиомами

$$f(\langle\rangle) = 0 \to W(f); \qquad \forall i W(\lambda a f(a * \langle i\rangle)) \to W(f); \tag{6}$$

$$W(f) \wedge \forall a(f(a) = 0 \to A(a)) \wedge \forall a(\forall i A(a * \langle i\rangle) \to A(a)) \to A(\langle\rangle). \tag{7}$$

Формула (7) называется *схемой бар-индукции*: посылка $W(f)$ обеспечивает возможность индукции, второй конъюнктивный член является базисом индукции, а третий — индукционным переходом.

Через ID обозначим здесь расширение гейтинговской арифметики HA (со свободными функциональными переменными и λ-оператором по индивидным переменным) предикатом W, аксиомами (6), (7), аксиомой экстенсиональности $\forall a(f(a) = g(a)) \to (W(f) \leftrightarrow W(g))$ и правилами подстановки вместо функциональных переменных, обеспечивающими общерекурсивную замкнутость.

Следующее утверждение доказывается в ID.

5. Теорема. *Если g вложена в f, то $W(f)$ влечет $W(g)$. Следовательно, если предложение A выводимо, то $W(T_A)$.*

Доказательство. Обозначим ${}^a f \equiv \lambda z f(a * z)$. Сначала индукцией по n доказываем утверждение

$$\forall a[\mathrm{lh}(a) \geqslant n \to W({}^a h)] \to W(h). \tag{8}$$

Базис получается в силу ${}^{\langle\rangle}h = h$, а индукционный переход — в силу (8). Теперь применяем бар-индукцию по f к предикату $A(a) \equiv \forall b(B(b) \supseteq a \to W({}^b g))$. Базис $f(a) = 0$ очевиден: в этом случае ${}^b g(\langle\rangle) = g(b) = 0$ в силу (3). В индукционном переходе посылка $\forall i A(a * \langle i\rangle)$ эквивалентна $\forall b(B(b) \supset a \to W({}^b g))$. Из последней формулы и (4) следует $B(c) = a' \wedge b \supset c \wedge \mathrm{lh}(b) \geqslant \mathrm{lh}(c) + J(c) \to W({}^b g)$. Отсюда и из (8) при $n = J(c)$, $h = {}^c g$ получаем $A(c)$ для произвольного c, что и требовалось. □

Приводимый ниже аналог теоремы 4, принадлежащий А. Г. Драгалину, требует дополнительного принципа, который является обобщением принципа Маркова:

$$\neg\neg W(f) \to W(f). \tag{MPW}$$

При этом квантор $\exists$ в формулах вида (1) понимается как «квазиосуществимость»: $\exists x A$ означает $\neg \forall x \neg A$.

6. Теорема. *Для всякого истинного предложения A вида* (1) *имеет место $W(T_A)$. Иными словами, $A \to W(T_A)$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n чуть более общее утверждение: если b — узел дерева T_A и секвенция S_b содержит истинный член из $\Pi^0_n \cup \Sigma^0_n$, то $W({}^b T_A)$. Базис $n = 0$ очевиден, так как тогда S_b — аксиома. В индукционном переходе предположим сначала, что рассматриваемый истинный член секвенции S_b имеет вид $\exists x B(x)$. Тогда квазиосуществимо число m, для которого истинно $B(m)$. Предположим, что такое m осуществимо. В силу леммы 1 (b) ко всем непустым узлам $a \supset b$ таким, что $\mathrm{lh}(a) \geqslant \mathrm{lh}(b) + \varphi(|S_a|, m)$, применимо индукционное предложение. В силу (10) получаем $W(T_A)$ в предположении $B(m)$, что есть $\neg\neg W({}^b T_A)$ в предположении $\neg \forall x \neg B(x)$. Применение (MPW) дает $W({}^b T_A)$. В случае, когда истинный член S_b начинается с $\forall$, используем 1 (a) вместо 1 (b). □

Рассмотрим для полноты картины определение фундированности, выражающее на языке второго порядка условие обрыва всех ветвей φ дерева f:

$$\mathrm{WF}(f) \equiv \forall \varphi \exists x f(\bar{\varphi}(x)) = 0,$$

где $\bar{\varphi}(x) = \langle \varphi(0), \ldots, \varphi(x-1)\rangle$. Следующее утверждение доказывается в консервативном расширении примитивно рекурсивной арифметики. Оно показывает, что достаточно длинные ветви φ дерева T_A отображаются оператором $\mathscr{B}$ из теоремы 2 в достаточно длинные ветви дерева f. Вместо T_A пишем просто T.

7. Теорема. *Имеется примитивно рекурсивный оператор $\mathscr{N}$ такой, что (в обозначениях $N_k \equiv [\mathscr{N} f\varphi](k)$, $\varphi_k \equiv \bar{\varphi}(N_k)$) имеем: если* $\mathrm{LC}(f) \wedge \lambda(f) = A$, *то для любых* k, φ

$$T(\varphi_k) \neq 0 \to \mathrm{lh}(B(\varphi_k)) \geqslant k \wedge f(B(\varphi_k)) \neq 0. \qquad (9)$$

В частности, $\mathrm{LC}(f) \wedge \lambda(f) \equiv A \wedge WF(f) \to WF(T)$.

Для доказательства зафиксируем ветвь φ дерева T_A и исправим значения функции J из теоремы 2 на отрезках ветви φ так, чтобы они стали минимальными: положим

$$J'(l) = \min\{k : k \leqslant J(\bar{\varphi}(l)) \wedge B(\bar{\varphi}(l+k)) \supset B(\bar{\varphi}(l))\}. \qquad (10)$$

Теперь определим оператор $\mathscr{N}$ рекурсией:

$$N_0 = 0; \quad N_{k+1} = N_k + J'(N_k),$$

после чего с помощью (3), (4) и (10) доказывается, что если $T(\varphi_{k+1}) \neq 0$, то

$$B(\varphi_{k+1}) \supset B(\varphi_k) \wedge \forall l\,(N_k \leqslant l < N_{k+1} \to B(\bar{\varphi}(l)) = B(\varphi_k)), \qquad (11)$$

а затем (9) получается из (11). □

ЛИТЕРАТУРА

Белякин Н. В.
1. Об одной полной системе классической арифметики. — Алгебра и логика, 1967, 6, № 2, с. 5—11.
Минц Г. Е.
1. Универсальность канонического дерева. — ДАН СССР, 1976, 227, № 4, с. 808—811.

Добавление 4. СТУПЕНЧАТАЯ СЕМАНТИКА А. А. МАРКОВА

Г. Е. Минц

Здесь приводится формализованное изложение одного из возможных вариантов ступенчатого построения семантики арифметических формул по А. А. Маркову. Содержательные соображения, из которых исходил А. А. Марков, изложены, например, в работах Маркова [1]—[3]. Основное внимание уделяется формулам языка $Я_\omega$ (см. ниже), «почти не содержащим» конструктивных связок $\exists$, $\vee$ (точнее содержащим их только в

применении к перечислимым предикатам). Общий случай сводится к этому с помощью алгорифма выявления конструктивной задачи.

По ходу изложения мы убедимся в том, что семантика Маркова для $Я_\omega$ в определенном смысле совпадает с классической семантикой.

А. А. Марков особенно подчеркивал две черты своего построения конструктивной логики.

(i) Семантика строится «снизу вверх», ступенчатым образом, причем импликация (а тем самым и отрицание) уже истолкованных суждений определяется с помощью чисто дедуктивных понятий.

(ii) Принцип Маркова $\neg\neg F \to F$ в применении к формулам языка $Я_\omega$ получает на основе (i) самостоятельное обоснование, которое с формальной точки зрения имеет некоторые черты сходства с появившимся гораздо позже методом Фридмана и Драгалина.

Мы опишем последовательность арифметических языков $Я_0$, $Я_1$, ..., $Я_\omega$, $Я_{\omega+1}$, имеющих (за исключением $Я_0$) ту же выразительную силу, что и соответствующие «буквенно-словарные» языки А. А. Маркова, и понятие истинности V_α для языков $Я_\alpha$, эквивалентное марковскому. Предикаты V_α для $\alpha \leqslant 2$ определяются в языке арифметики, а для $\alpha \geqslant 3$ — в языке, содержащем предикат фундированности, вводимый обобщенным индуктивным определением. Схема

$$V_\alpha(A) \leftrightarrow A, \qquad (1_\alpha)$$

выражающая эквивалентность истинности по Маркову и интуитивной истинности, доказывается для $\alpha \leqslant 2$ в HA^- (гейтинговская арифметика с бескванторной индукцией). Для $\alpha \geqslant 3$ используется схема бар-индукции и обобщенный принцип Маркова, позволяющий снимать двойное отрицание с утверждений о фундированности.

0. Язык $Я_0$. *Термы* строятся из переменных и константы 0 с помощью констант для элементарных по Кальмару функций (которые в свою очередь строятся из констант, проекций, $+$, $\times$ и $[a/b]$ с помощью ограниченного суммирования, ограниченного умножения и подстановок).

Элементарные формулы имеют вид $t = r$, $t \neq r$, где t, r — термы. Остальные формулы строятся из элементарных с помощью $\vee$, $\wedge$ и ограниченных кванторов $(\exists x \leqslant t)$, $(\forall x \leqslant t)$.

Истинность предложений (т. е. замкнутых формул) языка $Я_0$ определяется индуктивно. Формула $t = r$ истинна, если (числовые) значения термов t и r совпадают, а формула $t \neq r$ истинна, если эти значения различны. Истинность формулы $A \wedge B$

означает истинность обеих формул A, B. Истинность формулы $A \vee B$ означает возможность указания истинной формулы, совпадающей с одной из формул A, B. Истинность формулы $(\exists x \leqslant t) Ax$ означает возможность указать натуральное число n, не превосходящее значения терма t и такое, что истинна An. Аналогично, истинность $(\forall x \leqslant t) Ax$ означает, что An истинна для любого натурального n, не превосходящего значения терма t.

Известный алгорифм «сворачивания» формул, не содержащих неограниченных кванторов, в равенства (использующий шаги вроде $(\forall x \leqslant t)(f(x) = 0) \rightarrow \sum_{x \leqslant t} f(x) = 0$) позволяет задать примитивно рекурсивный предикат $V_0(A)$, удовлетворяющий описанному индуктивному определению и эквивалентности $V_0(A) \leftrightarrow A$ для $A \in \text{Я}_0$.

Замечание. Выразительная сила нашего языка Я_0 больше, чем у соответствующего языка А. А. Маркова, который подчеркивал «семиотический» характер своего Я_0, но мы сохранили основные черты: употребление только ограниченных кванторов и достаточность для задания предиката «быть протоколом вычисления».

1. Язык Я_1. Я_1-формулы строятся из Я_0-формул с помощью $\wedge$, $\vee$, $\exists$. *Истинность* определяется индуктивно с естественными пунктами для $\wedge$, $\vee$, $\exists$. Например, истинность формулы $\exists x Ax$ означает возможность указать натуральное число n, для которого истинна An.

Таким образом, Я_1-формулы задают перечислимые предикаты, и Я_1-истинность эквивалентна выводимости в системе S_1, аксиомами которой являются истинные Я_0-формулы, а правилами вывода — $\wedge$-, $\vee$-, $\exists$-введение:

$$\frac{A;\ B}{A \wedge B}; \qquad \frac{A_i}{A_0 \vee A_1}\ (i = 0,\ 1); \qquad \frac{An}{\exists x Ax}.$$

Таким образом, можно положить $V_1(A) \equiv \exists x\, \text{Prov}_1(x, A)$, где Prov_1 — предикат доказуемости в S_1, и доказать $V_1(A) \leftrightarrow A$ индукцией по построению A.

2. Язык Я_2. *Я_2-формулы* строятся из Я_1-формул с помощью однократного применения импликации $\rightarrow$ и неограниченного применения $\wedge$, $\forall$. Точнее, $(A \rightarrow B)$ является Я_2-формулой только в случае, когда A, B — Я_1-формулы, а $\forall xA$, $A \wedge B$ являются Я_2-формулами для произвольных Я_2-формул A, B.

Истинность Я_2-конъюнкций определяется естественным образом, истинность формулы $\forall x Ax$ означает наличие общего метода, позволяющего убедиться в истинности формулы An при любом натуральном n.

Наконец, истинность импликации $A \rightarrow B$ означает допустимость правила

$$\frac{A}{B}$$

в системе S_1, т. е. наличие общего метода (алгорифма), позволяющего по всякому выводу формулы A в S_1 построить вывод формулы B в S_1.

Чтобы записать в языке арифметики предикат V_2, обозначим через A' результат вынесения вперед всех кванторов всеобщности из формулы A и сворачивания их в один с помощью спаривающих функций. Для $A \in \text{Я}_2$ имеем

$$A' \equiv \forall x (A_0 \wedge (A_1 \rightarrow B_1) \wedge \ldots \wedge (A_l \rightarrow B_l)), \tag{2}$$

где $A_i, B_i \in \text{Я}_1$. Таким образом, $V_1(A_i) \leftrightarrow \exists y_i \mathscr{A}_i(x, y_i)$, где $\mathscr{A}_i(x, y_i) \equiv \text{Prov}(y_i, \ulcorner A_i(\dot{x}) \urcorner)$. Точно так же $V_1(B_i) \equiv \exists z_i \mathscr{B}_i(x, z_i)$. Положим

$$V_2(A) \equiv \forall x (V_1(A_0) \wedge \exists e \forall y \exists z \Big[\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant l} (\neg \mathscr{A}_i(x, (y)_i)) \vee T((e)_i, (y)_i, (z)_i) \wedge \mathscr{B}_i(x, U((z)_i))\Big]^*). \tag{3}$$

Здесь T и U взяты из теоремы Клини о нормальной форме, $\{e\}(x) = U(\mu y T(e, x, y))$, C^* означает $V_0(C)$ для $C \in \text{Я}_0$, а $\lambda y (y)_i$ — обычная функция выделения i-го члена конечной последовательности. В НА$^-$ в силу (1), свойств упомянутых функций и эквивалентностей

$$\begin{gathered}(\exists y \mathscr{A}(y) \rightarrow \exists z \mathscr{B}(z)) \leftrightarrow \forall y \exists z (\mathscr{A}(y) \rightarrow \mathscr{B}(z)); \\ \forall y \exists z \mathscr{C}(y, z) \leftrightarrow \exists e \forall y \exists z (T(e, y, z) \wedge \mathscr{C}(y, U(z)))\end{gathered} \tag{4}$$

для $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C} \in \text{Я}_0$ (в (4) берем $\{e\}(y) = \mu z \mathscr{C}(y, z)$) имеем $V_2(A) \leftrightarrow A'$. Ввиду $A' \leftrightarrow A$ получаем (1).

Замечание. Используя тот же прием, что в (4), можно средствами НА$^-$ привести $V_2(A)$ к эквивалентному виду $\exists e \forall x \exists y \mathscr{A}$, где $\mathscr{A} \in \text{Я}_0$. Этот вид менее обозрим, но в большей степени соответствует пониманию квантора всеобщности в формуле $\forall x Fx$ как указания на наличие единого общего метода e, строящего по каждому x обоснование Fx.

Рассмотрим теперь обычные правила натурального исчисления, включая ω-варианты правил $\forall$-введения и $\exists$-удаления.

Они формулируются в терминах секвенций $\Gamma \vdash A$, где Γ — конечное множество формул, A — формула.

$$(\wedge^+)\ \frac{\Gamma \vdash A;\ \Sigma \vdash B}{\Gamma\Sigma \vdash A \wedge B} \qquad (\vee^-)\ \frac{\Gamma \vdash A_0 \wedge A_1}{\Gamma \vdash A_i}\ (i = 0,\ 1)$$

$$(\vee^+)\ \frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_0 \vee A_1}\ (i = 0,\ 1) \qquad (\vee^-)\ \frac{\Gamma \vdash A \vee B;\ A\Sigma \vdash C;\ B\Omega \vdash C}{\Gamma\Sigma\Omega \vdash C}$$

$$(\exists^+)\ \frac{\Gamma \vdash An}{\Gamma \vdash \exists x Ax} \qquad (\exists^-)\ \frac{\Gamma \vdash \exists x A;\ \ldots;\ A[n]\Sigma \vdash C;\ \ldots}{\Gamma\Sigma \vdash C}$$

$$(\to^+)\ \frac{A^0\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad (\to^-)\ \frac{\Gamma \vdash A \to B;\ \Sigma \vdash A}{\Gamma\Sigma \vdash B}$$

$$(\forall^+)\ \frac{\ldots\ \Gamma \vdash A[n]\ \ldots}{\Gamma \vdash \forall x A} \qquad (\forall^-)\ \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[n]}$$

$$(\neg\neg^-)\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg \exists x A}{\Gamma \vdash \exists x A}$$

A^0 в правиле $\to^+$ указывает, что возможно отсутствие формулы A в посылке. Напомним, что $\exists x A \in Я_\omega$ влечет $A \in Я_1$.

Аксиомы: $\Gamma\mathbf{F} \vdash E$; $\Gamma \vdash \mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ — истинная замкнутая $Я_0$-формула, $\mathbf{F}$ — ложная замкнутая $Я_0$-формула, E — произвольная $Я_0$-формула.

$\neg B$ означает $B \to 0 = 1$.

Локальная корректность дерева f относительно правил натурального исчисления определяется так же, как в Добавлении 3 (для правил $\tilde{\exists}$, $\tilde{\forall}$, $\tilde{\mathbf{F}}$), и обозначается посредством $\mathrm{LC}^{\mathrm{N}}(f)$.

Введем предикаты выводимости для деревьев и секвенций:

$$\mathrm{Der}(f) \equiv \mathrm{LC}^{\mathrm{N}}(f) \wedge W(f);$$

$$\mathrm{Der}(S) \equiv \exists e\,[\mathrm{Der}(\{e\}) \wedge \lambda(\{e\}) = S \wedge \forall a \exists y T(e,\ a,\ y)];$$

$$\mathrm{Der}(f,\ S) \equiv \mathrm{Der}(f) \wedge \lambda(f) \equiv S,$$

где подразумевается, что предикат фундированности $W(f)$ введен обобщенным индуктивным определением. Последнее означает, что рассуждения, где участвует этот предикат, будут оформляться в системе ID из Добавления 3, т. е. HA плюс аксиомы (6), (7) Добавления 3. Der^n обозначает результат добавления к Der условия: все формулы, входящие в рассматриваемый вывод, принадлежат $Я_n$ и при $n < 3$ в выводе не применяется правило $(\neg\neg^-)$.

Замечание. А. А. Марков оформлял индуктивное определение вывода и соответствующий принцип бар-индукции несколько иным (но эквивалентным нашему) способом: «индукционный переход» состоял из стольких пунктов, сколько было правил исчисления.

Назовем *натуральный вывод* (т. е. фигуру f такую, что $\mathrm{Der}(f)$) *нормальным*, если главная формула никакого правила удаления, кроме $\neg\neg^-$, не получается ни по правилу введения, ни по правилам $\vee$-, $\exists$-удаления. $\mathrm{Norm}(f)$ будет означать, что f — нормальный вывод.

Теорема о нормализации. *Всякий натуральный вывод f можно привести к нормальной форме $|f|$. При этом* $\mathrm{Der}^n(f) \to \mathrm{Der}^n(|f|)$.

Мы не будем воспроизводить доказательство этого утверждения: оно проводится в ID по аналогии с главой 1.

2.1$_n$. Лемма. (a) $V_n(A) \leftrightarrow \mathrm{Der}^n(A)$;

(b) $\mathrm{Der}^n(A_1, \ldots, A_k \vdash A) \wedge V_n(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \to V_n(A)$ *для предложений* $A_1, \ldots, A_k$, $A \in Я_n$.

При этом импликации $\exists e F(e) \to \exists d G(d)$ *в* (a) *реализуются примитивно рекурсивными функциями* φ: $F(e) \to G(\varphi(e))$ *и аналогично для* (b).

В данный момент формулировка этой леммы осмысленна только для $n \leqslant 2$, так как V_n определен только для этих n. Для $n = 0$ лемма очевидна, так как выводимость секвенции $A_1, \ldots, A_k \to A$ означает, что она есть аксиома. Для $n = 1$ используется эквивалентность V_1 и предиката выводимости в системе S_1.

Импликация $V_2(A) \to \mathrm{Der}^2(A)$ для (a) устанавливается индукцией по построению формулы A. Точнее, вывод секвенции $\to A$, нужный для обоснования $\mathrm{Der}^2(A)$, строится рекурсией по A с использованием информации, содержащейся в $V_2(A)$. Рассмотрим для простоты записи случай

$$A \equiv \forall x((\exists y_1 \mathscr{A}_1(x,\ y_1) \to \exists z_1 \mathscr{B}_1(x,\ z_1)) \wedge (\exists y_2 \mathscr{A}_2(x,\ y_2) \to \exists z_2 \mathscr{B}_2(x,\ z_2))).$$

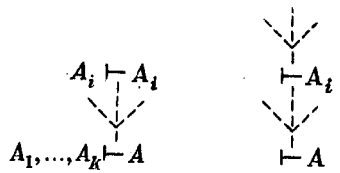
Обозначим $e_i \equiv \Lambda x\, \Lambda y_i \mu z_i\, [(\neg \mathscr{A}_i(x, y_i) \wedge z_i = 0) \vee \mathscr{B}_i(x, z_i)]$, $i = 1, 2$, где Λxt обозначает гёделев номер частично рекурсивной функции λxt. Легко показать (в HA^-), что из A (а тем самым из $V_2(A)$) следует, что $\{e_i\}$ — всюду определенные функции, а с их помощью очевидным образом строятся выводы секвенций

$$\exists y_i \mathscr{A}(n,\ y_i) \vdash \exists z_i \mathscr{B}(n,\ z_i) \qquad (5)$$

для любой цифры n, а из выводов секвенций (5) с помощью правил $\to^+$, $\forall^+$ строится вывод формулы A.

Импликация $\mathrm{Der}^2(A) \to V_2(A)$ доказывается аналогично: из нормального вывода формулы A легко извлекается информация, нужная для обоснования $V_2(A)$.

Утверждение (b) получается из (a). Вывод секвенции $A_1, \ldots, A_k \vdash A$ имеет вид, указанный слева, и мы преобразуем его к виду, указанному справа, вычеркивая формулы A_i слева от стрелки и дописывая над бывшими аксиомами выводы формул A_i, которые извлекаются из вывода формулы $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$, существующего в силу (a).



Затем снова применяем (a).

3. Язык $\mathrm{Я}_{n+1}$ ($n \geqslant 2$). Пусть же определены языки $\mathrm{Я}_i$ для $i \leqslant n$, понятия истинности для этих языков и установлено, что имеет место лемма 2.1_n. $\mathrm{Я}_{n+1}$-формулы строятся из $\mathrm{Я}_n$-формул с помощью однократного применения импликации и неограниченного применения $\wedge$, $\forall$. Истинность $\wedge$-, $\forall$-формул определяется так же, как и раньше. Истинность импликации $A \to B$ для случая, когда она не является $\mathrm{Я}_n$-формулой, определяется как выводимость B из A по правилам натурального исчисления. Иными словами,

$$V_{n+1}(A \to B) \equiv \mathrm{Der}^n(A \vdash B).$$

Подразумевается, что квантор по формулам обозначает квантор по их номерам. Предикат V_{n+1} для произвольных $\mathrm{Я}_n$-формул A определяется теперь тем же методом, что предикат V_2. Формула A приводится к виду (2), где теперь $A_i, B_i \in \mathrm{Я}_n$, а затем все выводы $\{e_i\}$ секвенций $A_i \vdash B_i$ объединяются в один вывод e:

$$\forall x (V_n(A_0) \wedge \exists e (\forall i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant l)\, \mathrm{Der}^n(\{(e)_i\},\ \dot{A}_i \vdash \dot{B}_i)). \qquad (6$$

Точки над формулами имеют тот же смысл, что в гл. 5: $\dot{F}$ означает $\mathrm{sub}(\ulcorner F \urcorner, \mathrm{num}(x))$, т. е. номер результата подстановки цифры $0^{(x)}$ вместо переменной x. Наконец, используя преобразование

$$\forall x \exists e F(x, e) \longmapsto \exists e \forall x \exists z\, [T(e, x, z) \wedge F(x, U(z))] \qquad (7)$$

для вынесения кванторов существования из (6) и записывая $V_n(A_0)$ в виде $\exists e_0 \mathscr{V}(x, e_0)$, полагаем

$$V_{n+1}(A) \equiv \exists e \forall x \exists z\, [T(e, x, z) \wedge \mathscr{V}(x, (U(z))_0)$$
$$\wedge (\forall i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant l)\, \mathrm{Der}^n(\{(U(z))_i\},\ \dot{A}_i \vdash \dot{B}_i)]. \qquad (8)$$

Замечание. А. А. Марков определял истинность $\mathrm{Я}_{n+1}$-формулы $A \vdash B$ через выводимость B из A и истинных $\mathrm{Я}_n$-формул, не накладывая ограничений на число таких формул. При этом он использовал правила, отличные от правил натурального исчисления. Наше определение по существу эквивалентно определению, данному А. А. Марковым, ввиду леммы 2.1_n и того обстоятельства, что правила А. А. Маркова производны (т. е. моделируются с помощью «вставок») в натуральном исчислении.

Чтобы придать нашей последовательности определений законченный вид, мы должны еще вывести лемму 2.1_n из 2.1_{n-1}. Импликация $V_n(A) \to \mathrm{Der}^n(A)$ устанавливается аналогично случаю $n = 2$. Из $V_n(A)$ для формулы A вида (2) извлекаются (с учетом (6)) выводы импликаций $\tilde{A}_i \to \tilde{B}_i$ (где тильда обозначает подстановку произвольной цифры вместо x) и обоснование $V_{n-1}(\tilde{A}_0)$, откуда в силу леммы 2.1_{n-1} (a) получается вывод A_0. Вместе эти выводы дают вывод формулы A.

Для обоснования обратной импликации заметим, что свойство подформульности в нормальном выводе может нарушаться разве лишь в применениях правила $\neg\neg\vdash$. Главные формулы этих правил принадлежат $\mathrm{Я}_3$, поэтому для $n \neq 3$ нормальный вывод секвенции $A_1, \ldots, A_k \to B$ при $A_1, \ldots, A_k, B \in \mathrm{Я}_{n-1}$ удовлетворяет условию Der^{n-1}. [Для $n = 3$ это не так из-за появления в Der^3 «лишнего» правила $(\neg\neg\vdash)$.] Поэтому из нормального вывода формулы $A \in \mathrm{Я}_n$ при $n \neq 3$ легко извлекается информация, нужная для обоснования $V_n(A)$. Действительно, для формулы A вида (2) мы примитивно рекурсивно получаем нормальные выводы секвенций $\tilde{A}_i \to \tilde{B}_i$ и формулы $\tilde{A}_0$, которые удовлетворяют условию Der^{n-1}. Применяя лемму 2.1_{n-1}, получаем $V_n(A)$.

Для аналогичного обоснования импликации $\mathrm{Der}^3(A) \to V_3(A)$ осталось доказать следующее утверждение.

3.1. Теорема (обоснование принципа Маркова). (a) *Если* $A_1, \ldots, A_k$ — *предложения языка* $\mathrm{Я}_2$, A, Θ — *предложения языка* $\mathrm{Я}_1$, $\mathrm{Der}^2(f) \wedge (\lambda(f) \equiv A_1, \ldots, A_k, \neg A \vdash \Theta) \wedge \mathrm{Norm}(f)$, *то* $\mathrm{Der}^2(A_1, \ldots, A_k \to \Theta \vee A)$;

(b) $(A_1, \ldots, A_k, C \in \mathrm{Я}_2) \wedge \mathrm{Der}^3(A_1, \ldots, A_k \vdash C) \to$
$\to \mathrm{Der}^2(A_1, \ldots, A_k \vdash C)$;

(c) $\mathrm{Der}^3(A) \to V_3(A)$.

Доказательство. (a) Допишем A дизъюнктивно к сукцедентам всех секвенций, входящих в вывод, и вычеркнем $\neg A$ из антецедентов. После этого можно сделать «вставки» для всех правил, кроме $\forall^+$, $\to^+$. Например: аксиома $\Gamma, \neg A \vdash \Theta$ перей-

дет в секвенцию $\Gamma \vdash \Theta \vee A$, которая получается из аксиомы $\Gamma \vdash \Theta$ по правилу V^+. Правило $\to^-$ перейдет в фигуру

$$\frac{(C \to D) \vdash (C \to D);\ C \vdash C}{(C \to D),\ C \vdash D}$$

$$\frac{\Gamma \to (C \to D) \vee \Theta;\ (C \to D),\ C \vdash D \vee \Theta;\ \Theta \vdash D \vee \Theta}{\Sigma \vdash C \vee \Theta; \qquad \Gamma C \vdash D \vee \Theta; \qquad \Theta \vdash D \vee \Theta}$$

$$\Gamma\Sigma \vdash D \vee \Theta$$

Так как правила $\forall^+$, $\to^+$, не применяются в силу нормальности вывода f и отсутствия у его последней секвенции положительных подформул с главными знаками $\forall$, $\to$, то результирующая фигура снова будет выводом, так что (a) доказано.

(b) Применим бар-индукцию по данному нормальному выводу секвенции $A_1, \ldots, A_k \vdash C$. Будем считать, что всякое применение правила $(\neg\neg^-)$ в f непосредственно следует за $\to^+$. Базис и индукционный переход в случае, когда f не кончается правилом $(\neg\neg^-)$, очевидны. Если f кончается правилом $(\neg\neg^-)$, то в силу нормальности f и нашего допущения применим (a), и обоснование индукционного перехода завершается с помощью фигуры

$$\frac{\Gamma \vdash 0 = 1 \vee \exists x B;\quad 0 = 1 \vdash \exists x B;\quad \exists x B \vdash \exists x B}{\Gamma \vdash \exists x B}\ \vee^-$$

(c) Теперь можно рассуждать точно так же, как при $n \neq 3$ в лемме 2.1_n. □

Итак, определение предикатов V_n и доказательство леммы 2.1_n закончено. При этом теорема 3.1 установлена без содержательного применения принципа Маркова. Следующее утверждение использует обобщенный принцип Маркова.

3.2. Теорема. *Для любой формулы* $A \in \text{Я}_n$

(a) $A \to V_n(A)$; (b) $V_n(A) \to A$.

Доказательство. (a) В силу теоремы 6 Добавления 3 из A следует, что дерево T_A фундировано. Делая в правила $(\tilde{\forall})$, $(\tilde{\exists})$, $(\tilde{\text{F}})$ вставки в натуральном исчислении (при интерпретации списка $A_1, \ldots, A_n$ как $\neg(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n)$) с использованием доказуемого для $A \in \text{Я}_n$ принципа $\neg\neg A \to A$), нормализуя вывод и применяя 2.1_n, получаем искомое.

(b) Применяем 2.1_n (a) и бар-индукцию по выводу. Для правила $(\neg\neg^-)$ используется принцип Маркова. □

4. Язык Я_ω. Полагаем $\text{Я}_\omega = \bigcup_n \text{Я}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

5. Язык $\text{Я}_{\omega+1}$. $\text{Я}_{\omega+1}$-формулы — это обычные формулы арифметики первого порядка с (несущественным) ограничением на

применение дизъюнкции. Они строятся из Я_1 формул с помощью $\wedge$, $\to$, $\forall$, $\exists$. Семантика $\text{Я}_{\omega+1}$-формул вводится с помощью алгорифма выявления конструктивной задачи, доказуемо эквивалентного рекурсивной реализуемости (см. ниже), но имеющего перед ней то преимущество, что он «не портит» формул, не содержащих конструктивной задачи.

Определение. $\text{Ш}(F) = F$, если $F \in \text{Я}_\omega$. В противном случае применим рекурсию по длине F.

Пусть $\text{Ш}(A) = \exists u \mathscr{A}u$, $\text{Ш}(B) = \exists v \mathscr{B}v$, где $\mathscr{A}$, $\mathscr{B} \in \text{Я}_\omega$ и кванторы $\exists u$, $\exists v$ могут отсутствовать. Полагаем

$\text{Ш}(A \wedge B) = \exists w(\mathscr{A}(j_1 w) \wedge \mathscr{B}(j_2 w))$;

$\text{Ш}(A \to B) = \exists w \forall u(\mathscr{A}u \to \exists x T(w, u, x) \wedge \forall x(T(w, u, x) \to \mathscr{B}(Ux)))$;

$\text{Ш}(\forall y A y) = \exists w \forall y(\exists x T(w, y, x) \wedge \forall x(T(w, y, x) \supset \mathscr{A}(Ux)))$;

$\text{Ш}(\exists y A y) = \exists w \mathscr{A}(j_1 w, j_2 w)$, где $\text{Ш}(A) = \exists u \mathscr{A}(u, y)$.

Здесь j_1, j_2 — спаривающие функции, w — новая переменная, T, U — предикат и функция из теоремы Клини о нормальной форме. Формула A языка $\text{Я}_{\omega+1}$, не являющаяся формулой языка Я_ω, считается *истинной*, если осуществимо натуральное число n такое, что истинна формула $\mathscr{A}n$, где $\text{Ш}(A) = \exists u \mathscr{A}u$.

Теорема. *В* НА$^-$ *выводимо*

$$\text{Ш}(A) \leftrightarrow \exists x(x \mathbf{r} A) \quad \text{(см. 4.3 гл. 5).}$$

Доказательство. Для $A \in \text{Я}_\omega$ это — лемма 4.5 гл. 5. В остальных случаях применяем индукцию по длине формулы A, используя тесную связь соотношений $\mathbf{r}(\text{ii})$, $\mathbf{r}(\text{iv})$, $\mathbf{r}(\text{v})$, $\mathbf{r}(\text{vi})$ с соответствующими пунктами определения алгорифма Ш. □

ЛИТЕРАТУРА

Марков А. А.
1. О логике конструктивной математики. — М.: Знание, 1972.
2. Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive. — Rev. Int. Phil., 1978, 98, № 4, p. 477—507.
3. Попытка построения логики конструктивной математики. — В кн.: Исследования по теории алгорифмов и математической логике. М., 1976, с. 3—31.

Добавление 5. МАЖОРАНТНАЯ СЕМАНТИКА Н. А. ШАНИНА

Г. Е. Минц

Основной замысел мажорантной семантики состоит в сопоставлении каждой арифметической формуле F трансфинитной последовательности $\{F^\alpha\}$, состоящей из формул гораздо меньшей сложности, таким образом, чтобы импликации $F^\alpha \to F$

могли быть установлены средствами конструктивной математики плюс трансфинитная индукция по α. Такие формулы F^α называются *мажорантами* формулы F, а сама F называется *истинной формулой ранга* α, если истинна формула F^α. Первым шагом построения мажорант формулы F является применение к ней алгорифма выявления конструктивной задачи (таков, например, алгорифм Ш из предыдущего добавления, дополненный вставкой двойных отрицаний перед всеми $\dot\exists$, кроме самого внешнего), который сводит F к виду $\dot\exists x F'$, где F' — отрицательная формула, т. е. не содержит $\dot\vee$, $\dot\exists$. После этого преобразуется, по существу, только формула F'. Поэтому в дальнейшем мы определяем мажоранты только для отрицательных формул.

Мажоранты будут иметь вид

$$\dot\exists x \forall y \dot\exists z \mathscr{A} \tag{1}$$

с бескванторной $\mathscr{A}$ (некоторые кванторы могут отсутствовать), причем квантор $\dot\exists$ будет пониматься конструктивно. (В действительности Н. А. Шанин пишет $\neg\forall z\neg$ вместо $\dot\exists z$, но это различие несущественно ввиду принимаемого им принципа Маркова.) «Классические» существование и дизъюнкция вводятся как сокращения:

$$\dot\exists x A \equiv \neg\forall x \neg A; \quad A \mathbin{\dot\vee} B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B). \tag{2}$$

Конструкция мажорант основана на следующих соотношениях:

$$(\dot\exists x Ax \mathbin{\dot\vee} C) \leftrightarrow \dot\exists x (Ax \mathbin{\dot\vee} \dot\exists x Ax \mathbin{\dot\vee} C), \tag{3}$$

$$(\forall x \neg Ax \mathbin{\dot\vee} C) \leftrightarrow \forall x (\neg Ax \mathbin{\dot\vee} C), \tag{4}$$

$$Qx Qy Axy \leftrightarrow Qx A(j_1 x)(j_2 x), \quad Q \equiv \forall, \dot\exists, \tag{5}$$

$$\dot\exists e \forall x [\dot\exists z T(e, x, z) \wedge \forall v (T(e, x, v) \to AxU(v))] \to \forall x \dot\exists y Axy, \tag{6}$$

$$\forall x \dot\exists y Axy \to \dot\exists e \forall x [\dot\exists z T(e, x, z) \wedge \forall v (T(e, x, v) \to AxU(v))]. \tag{7}$$

Из них (3)—(6) выводимы в $\mathrm{HA}^\sim$ (т. е. HA с индукцией только по бескванторным формулам), а (7) представляет собой схему, называемую иногда тезисом Чёрча и обозначаемую через CT. Схема (3) позволяет «выносить» классический квантор $\dot\exists$ вперед в виде конструктивного $\dot\exists$, (5)—(7) дают возможность «сворачивать» длинные цепочки конструктивных кванторов, переставляя предварительно $\dot\exists$-кванторы вперед. Уточним последнее замечание.

1. Лемма. *В* $\mathrm{HA}^\sim$

$$\dot\exists x \forall y \forall z \dot\exists u (K(x, y, u) \wedge [K(x, y, z) \to B(x)_0 (y)_1 (U(z)_1)(y)_2 \dots (U(z)_k)(y)_{k+1}]) \vdash \dot\exists x_0 \forall y_1 \dot\exists x_1 \forall y_2 \dots \dot\exists x_k \forall y_{k+1} B x_0 y_1 x_1 y_2 \dots x_k y_{k+1}, \tag{8}$$

где $K(x, y, z) \equiv T((x)_1, (y)_1, (z)_1) \wedge T((x)_2, \langle (y)_1, (y)_2\rangle, (z)_2) \wedge \dots \wedge T((x)_k, \langle (y)_1, \dots, (y)_k\rangle, (z)_k)$.

В $\mathrm{HA}^\sim + \mathrm{CT}$ *вместо* $\vdash$ *можно поставить* $\leftrightarrow$.

Доказательство проводится индукцией по k. □

Положим

$$(\dot\exists u \dot\exists x \forall y \dot\exists z \mathscr{A} u x y z)^* \equiv \dot\exists x \forall y \dot\exists z \mathscr{A}(j_1 x)(j_2 x) y z \tag{9}$$

($\forall y \dot\exists z$ может отсутствовать);

$$(\forall u \forall y \dot\exists z \mathscr{A} u y z)^* \equiv \forall y \dot\exists z \mathscr{A}(j_1 y)(j_2 y) z; \tag{10}$$

$$(\forall u \dot\exists x \forall y \dot\exists z \mathscr{A})^* \equiv \dot\exists x \forall y \dot\exists z [T(x, (j_1 j_1 y), (j_1 z)) \wedge T(x, (j_1 j_1 y), (j_2 j_1 y)) \to \mathscr{A}(j_1 j_1 y)(U(j_2 j_1 y))(j_2 y)(j_2 z)], \tag{11}$$

$A^* \equiv A$, если A не имеет ни одного из предыдущих видов. (12)

2. Лемма $\mathrm{HA}^\sim \vdash A^* \to A$; $\mathrm{HA}^\sim + \mathrm{CT} \vdash A^* \leftrightarrow A$.

Доказательство. (9), (10) — частные случаи (5), для (12) все очевидно, (11) получается с помощью (6), (5) и (7) (для доказательства эквивалентности). □

Будем использовать определение истинности 5.2 гл. 2 для $\dot\exists\forall\dot\exists$-формул, т. е. формулу $\mathrm{Tr}^+(a)$ вида $\dot\exists x \forall y \dot\exists z \mathscr{A}(x, y, z, a)$ с бескванторной $\mathscr{A}$ такую, что в $\mathrm{HA}^\sim$ выводимо

$$\varphi(a) \leftrightarrow \mathrm{Tr}^+(\ulcorner \varphi(\dot a)\urcorner) \tag{13}$$

для любой формулы $\varphi(a)$ вида $\dot\exists u \forall v \dot\exists w \mathscr{B}(u, v, w, a)$ с бескванторной $\mathscr{B}$ (некоторые кванторы могут отсутствовать). Построение в 5.2.1 гл. 2 таково, что выводимо

$$\mathrm{Tr}^+(\ulcorner Qu\varphi(u, \dot a)\urcorner) \leftrightarrow Qu\, \mathrm{Tr}^+(\ulcorner \varphi(\dot u, \dot a)\urcorner), \quad Q \equiv \forall, \dot\exists, \tag{14}$$

и потому в $\mathrm{HA}^\sim + \mathrm{CT}$ выводимо

$$\mathrm{Tr}^+(\ulcorner A^*\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Tr}^+(\ulcorner A\urcorner), \tag{14'}$$

$$\mathrm{Tr}^+(\ulcorner (QuAu)^*\urcorner) \leftrightarrow Qu\, \mathrm{Tr}^+(\ulcorner A^*(\dot u)\urcorner). \tag{14''}$$

Приводимое ниже определение приспособлено к ситуации, когда задана некоторая система ординальных обозначений, в которой ординалы кодируются натуральными числами, 0 кодируется числом $\hat 0$ и имеется примитивно рекурсивная функция π такая, что $\pi(\hat 0) = \hat 0$ и для любого числа $\alpha \neq \hat 0$, кодирующего

ординал, функция $\pi_\alpha = \lambda n \pi(\alpha, n)$ перечисляет коды всех ординалов $\beta < \alpha$. Такая ситуация имеет место для систем, используемых в теории доказательств (ординалы $<\varepsilon_0$, предикативные ординалы $<\Gamma_0$, ординальные диаграммы Такеути, системы Бухгольца) и для клиниевской системы O. Соответствующая схема индукции по α имеет вид

$$A(\hat{0}) \wedge \forall\alpha(\forall n A(\pi_\alpha(n)) \to A(\alpha)) \to \forall\alpha A(\alpha).$$

Будем рассматривать формулы A вида

$$\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_l \forall y_l \exists x_{l+1} \mathscr{A} \tag{15}$$

с бесквантором $\mathscr{A}$ (некоторые кванторы могут отсутствовать) и списки Γ таких формул.

Через Γ^{QF} обозначим дизъюнкцию всех бесквантором членов списка Γ (напомним, что пустая дизъюнкция обозначает ложь $0 = 1$).

По теореме Клини о примитивной рекурсии определим примитивно рекурсивную функцию ρ, удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$\rho(\ulcorner\Gamma\urcorner, \hat{0}) = \ulcorner\Gamma^{QF}\urcorner, \tag{16}$$

а для $\alpha \neq \hat{0}$

$$\rho(\ulcorner\exists u A(u), \Gamma\urcorner, \alpha) = \ulcorner(\exists u \exists n \mathrm{Tr}^+(\rho(\ulcorner A(\dot{u})\urcorner, \Gamma, \exists u A(u)\urcorner, \pi_\alpha(n))))^{**}\urcorner, \tag{17}$$

$$\rho(\ulcorner\forall u A(u)\urcorner, \Gamma\urcorner, \alpha) = \ulcorner(\forall u \exists n\, \mathrm{Tr}^+(\rho(\ulcorner\Gamma, A(\dot{u})\urcorner, \pi_\alpha(n))))^{**}\urcorner, \tag{18}$$

$$\rho(\ulcorner\mathscr{A}, \Gamma\urcorner, \alpha) = \ulcorner(\exists n \mathrm{Tr}^+(\rho(\Gamma, \ulcorner\mathscr{A}\urcorner, \pi_\alpha(n))))^{*}\urcorner \tag{19}$$

для бесквантором формулы $\mathscr{A}$. Положим

$$\Gamma^\alpha \equiv \mathrm{Tr}^+(\rho(\ulcorner\Gamma\urcorner, \alpha)). \tag{20}$$

Формулу A^α назовем *мажорантой ранга* α формулы A.

Из (18)—(20), (14), (15) получаем для $\alpha \neq \hat{0}$ следующие (не вполне строго сформулированные) соотношения, выводимые в $\mathrm{HA}^- + \mathrm{CT}$:

Если $\Delta \equiv \exists x A x, \Gamma$, то $\Delta^\alpha \leftrightarrow \exists n \exists u \Delta'^{\pi_\alpha(n)}$, где

$$\Delta' \equiv A(\dot{u}), \Gamma, \exists x A x. \tag{$21_\exists$}$$

Если $\Delta \equiv \forall x A x, \Gamma$, то $\Delta^\alpha \leftrightarrow \forall u \exists n \Delta'^{\pi_\alpha(n)}$, где

$$\Delta' \equiv \Gamma, A(\dot{u}). \tag{$21_\forall$}$$

Если $\Delta \equiv \mathscr{A}, \Gamma$, то $\Delta^\alpha \leftrightarrow \exists n \Delta'^{\pi_\alpha(n)}$, где $\Delta' \equiv \Gamma, \mathscr{A}$. (21)

Докажем, например, $(21_\exists)$.

$$\Delta^\alpha \equiv \mathrm{Tr}^+(\rho(\ulcorner\Delta\urcorner, \alpha)) \underset{(17)}{\leftrightarrow} \mathrm{Tr}^+(\ulcorner(\exists u \exists n \mathrm{Tr}^+(\rho(\ulcorner\Delta'\urcorner, \pi_\alpha(n))))^{**}\urcorner)$$

$$\underset{(13),\,(14)}{\leftrightarrow} \exists n \exists u \mathrm{Tr}^+(\rho(\ulcorner\Delta'\urcorner, \pi_\alpha(n))) \equiv \exists n \exists u \Delta'^{\pi_\alpha(n)}.$$

CT здесь не использовался. Он нужен для $(21_\forall)$. □

Докажем монотонность мажорант

$$\forall n \forall \Delta(\Delta^{\pi_\alpha(n)} \supset \Delta^\alpha) \tag{22}$$

с помощью индукции по α.

Обозначим формулу (22) через $F(\alpha)$. Базис $F(0)$ очевиден. Допустим

$$\forall n F(\pi_\beta(n)). \tag{23}$$

Чтобы получить $F(\beta)$, возьмем произвольные n, Δ, допустим

$$\Delta^{\pi_\beta(n)}, \tag{24}$$

и докажем Δ^β, рассматривая возможные случаи и полагая $\varepsilon \equiv \pi_\beta(n)$.

1. $\Delta \equiv \exists u A(u), \Gamma$. Тогда имеем по $(21_\exists)$ и индукционному предположению

$$\Delta^\varepsilon \leftrightarrow \exists m \exists u \Delta'^{\pi_\varepsilon(m)}; \quad \Delta'^{\pi_\varepsilon(m)} \supset \Delta'^\varepsilon.$$

Отсюда

$$\Delta^\varepsilon \to \exists u \Delta'^\varepsilon \to \exists n \exists u \Delta'^{\pi_\beta(n)} \underset{(21_\exists)}{\leftrightarrow} \Delta^\beta.$$

2. $\Delta \equiv \forall u A(u), \Gamma$.

$$\Delta^\varepsilon \leftrightarrow \forall u \exists m \Delta'^{\pi_\varepsilon(m)} \to \forall u \exists m \Delta'^\varepsilon \leftrightarrow \forall u \Delta'^\varepsilon \to \forall u \exists n \Delta'^{\pi_\beta(n)} \leftrightarrow \Delta^\beta.$$

3. $\Delta \equiv \mathscr{A}, \Gamma$.

$$\Delta^\varepsilon \leftrightarrow \exists m \Delta'^{\pi_\varepsilon(m)} \to \exists m \Delta'^\varepsilon \leftrightarrow \Delta'^\varepsilon \to \exists n \Delta'^{\pi_\beta(n)} \leftrightarrow \Delta^\beta. \quad \square$$

Будем использовать определения истинности для отрицательных формул ограниченной сложности, т. е. формулы Tr_n такие, что для любой отрицательной формулы $A(x)$ сложности $\leqslant n$ с единственной свободной переменной x в HA^- доказуемо

$$A(x) \leftrightarrow \mathrm{Tr}_n(\ulcorner A(\dot{x})\urcorner). \tag{25}$$

В качестве меры сложности $\mathrm{comp}(\Delta)$ для формул и списков формул Δ выберем длину самой длинной цепочки чередующихся кванторов, так что пропозициональные связки $\to$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$,

не меняют сложности, и в HA^- выводимо

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_n(\ulcorner A \odot B\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Tr}_n(\ulcorner A\urcorner) \odot \mathrm{Tr}_n(\ulcorner B\urcorner), \quad \odot \equiv \wedge, \to, \vee;\\
&\mathrm{Tr}_n(\ulcorner \neg A\urcorner) \leftrightarrow \neg \mathrm{Tr}_n(A);\\
&\mathrm{Tr}_{n+1}(\ulcorner Qx A(x)\urcorner) \leftrightarrow Qx\, \mathrm{Tr}_n(\ulcorner A(\dot{x})\urcorner), \quad Q \equiv \forall, \exists;\\
&\mathrm{Tr}_n(\ulcorner Qx Qy A(x, y)\urcorner) \leftrightarrow Qx\, \mathrm{Tr}_n(\ulcorner Qy A(\dot{x}, y)\urcorner)
\end{aligned} \tag{26}$$

для формул A, B, $QyA(x, y)$ сложности $\leqslant n$.

Распространим Tr_n на списки формул, полагая

$$\mathrm{Tr}_n(\ulcorner A_1, \ldots, A_k\urcorner) \equiv \mathrm{Tr}_n(\ulcorner A_1 \vee \ldots \vee A_k\urcorner). \tag{27}$$

Тогда из (26), (27) имеем

$$\mathrm{Tr}_n(\ulcorner A, \Gamma\urcorner) \leftrightarrow A \vee \mathrm{Tr}_n(\ulcorner \Gamma\urcorner). \tag{28}$$

Докажем теперь, что A^α — действительно мажоранты. Если $\Gamma \equiv A_1, \ldots, A_k$, то $\bigvee\Gamma \equiv A_1 \vee \ldots \vee A_k$.

3. Теорема.

$$(\forall \Delta : \mathrm{comp}(\Delta) \leqslant k)(\Delta^\alpha \to \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta\urcorner)). \tag{29}$$

Применим индукцию по α. Базис $\alpha = \hat{0}$ очевиден. Для обоснования индукционного перехода рассмотрим возможные случаи, предполагая $\alpha \neq \hat{0}$ и обозначая $\varepsilon \equiv \pi_\alpha(n)$.

1. $\Delta \equiv \exists u A(u), \Gamma$. По индукционному предположению $\Delta'^\varepsilon \to \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'^\varepsilon\urcorner)$. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta^\alpha &\underset{(21)}{\leftrightarrow} \exists n \exists u \Delta'^\varepsilon \to \exists n \exists u\, \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'\urcorner) \leftrightarrow \exists u\, \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'\urcorner)\\
&\underset{(28),\,(25)}{\leftrightarrow} \exists u (A(u) \vee \exists x A(x) \vee \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Gamma\urcorner))\\
&\underset{(3)}{\leftrightarrow} \exists x A(x) \vee \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Gamma\urcorner) \underset{(28)}{\leftrightarrow} \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta\urcorner).
\end{aligned}$$

2. $\Delta \equiv \forall u A(u), \Gamma$.

$$\begin{aligned}
\Delta^\alpha &\leftrightarrow \forall u \exists n \Delta'^\varepsilon \to \forall u \exists n\, \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'\urcorner) \leftrightarrow \forall u\, \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'\urcorner)\\
&\leftrightarrow \forall u (Au \vee \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Gamma\urcorner)) \leftrightarrow \forall u (\neg\neg Au \vee \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Gamma\urcorner))\\
&\underset{(4)}{\leftrightarrow} \forall u Au \vee \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Gamma\urcorner) \underset{(28)}{\leftrightarrow} \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta\urcorner).
\end{aligned}$$

3. $\Delta \equiv \mathscr{A}, \Gamma$.

$$\begin{aligned}
\Delta^\alpha &\leftrightarrow \exists n \Delta'^\varepsilon \to \exists n\, \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Delta'\urcorner)\\
&\leftrightarrow \mathscr{A} \vee \mathrm{Tr}_k(\ulcorner \Gamma\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{Tr}_k(\Delta). \quad \square
\end{aligned}$$

Сформулируем явно связь между доказуемостью и мажорированием.

4. Теорема. $\forall \Delta (\exists f\, \mathrm{Prf}(\Delta, f, \alpha) \leftrightarrow \Delta^\alpha)$, где f *пробегает общерекурсивные функции.*

Доказательство. Импликация от доказуемости к Δ^α без труда доказывается индукцией по α, так как пункты определения мажорант копируют правила вывода.

Обратное утверждение

$$\forall \Delta (\Delta^\alpha \to \exists f\, \mathrm{Prf}(\Delta, f, \alpha))$$

также устанавливается индукцией по α.

Базис: $\alpha = \hat{0}$, $\Delta^\alpha \leftrightarrow \Delta^{QF}$ и в качестве искомой функции f можно выбрать аксиому.

Индукционный переход обосновывается разбором случаев.

1. $\Delta \equiv \exists u A(u), \Gamma$. Тогда $\Delta^\alpha \leftrightarrow \exists n \exists u \Delta'^\varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \pi_\alpha(n)$, $\Delta' \equiv A(\bar{u}), \Gamma, \exists u A(u)$. Строим функцию f' по индукционному предположению, примененному к Δ', и дополняем ее до искомой функции f применением правила $(\exists)$:

$$\begin{array}{ll}
f': & A(\bar{u}), \Gamma, \exists u A(u) \quad \varepsilon\\
\hline
f: & \exists u A(u), \Gamma \quad \alpha
\end{array}$$

2. $\Delta \equiv \forall u A(u), \Gamma$. Тогда $\Delta^\alpha \leftrightarrow \forall u \exists n \Delta'^\varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \pi_\alpha(n)$, $\Delta' \equiv \Gamma, A(\bar{u})$. По индукционному предположению для каждого u имеется функция f'_u такая, что $\mathrm{Prf}(\Delta', f'_u, \varepsilon)$. Применяя тезис Чёрча, получаем, что имеется число e такое, что для каждого u можно взять $f'_u = \{e\}(u)$. Добавляя снизу применение правила $(\forall)$, получаем искомую f.

3. $\Delta \equiv \mathscr{A}, \Gamma$. Тогда $\Delta^\alpha \leftrightarrow \exists n \Delta^\varepsilon$, и достаточно применить индукционное предположение.

Действительно, $\mathrm{Prf}(\Gamma\mathscr{A}, g, \beta)$ влечет $\mathrm{Prf}(\Gamma, \bar{g}, \beta)$, где вывод $\bar{g}$ — аксиома, если $\mathscr{A}$ — истинное предложение; если же $\mathscr{A}$ — ложное предложение, то $\bar{g}$ получается из g вычеркиванием применений правила $(\mathbf{F})$, относящихся к $\mathscr{A}$.

Теперь можно оценить ординалы β такие, что A^β верно для формул A, доказуемых теми или иными формальными средствами, а также описать следующий «уровень разъяснения» по Шанину. $\mathrm{TI}(\alpha)$ означает ниже схему трансфинитной индукции по α:

$$\forall y (\forall n A(\pi_n(y)) \to A(y)) \wedge \beta < \alpha \to A(\beta).$$

5. Теорема. (а) *Если* $\mathrm{PA} + \mathrm{TI}(\alpha) \vdash A$, *то* $\mathrm{HA} + \mathrm{TI}(\alpha) \vdash A^\beta$ *для некоторого* $\beta < \varepsilon(\alpha)$, *где* $\varepsilon(\alpha)$ — *первое* ε-*число, большее* α.

В частности, $\mathrm{PA} \vdash A$ *влечет* $\mathrm{HA} \vdash A^\beta$ *для некоторого* $\beta < \varepsilon_0$.

(b). *Если* A *выводима в* PA_0 (*т. е.* PA *с бесквантор ной индукцией*), *то* $\mathrm{HA} \vdash A^k$ *для некоторого* $k < \omega$.

Доказательство. (a) Выводимость в $\mathrm{PA} + \mathrm{TI}(\alpha)$ влечет в силу известной конструкции (воспроизведенной, например, у Минца [1]) наличие вывода без сечения с ω-правилом высоты $\gamma < \varepsilon(\alpha)$. По теореме 3 Добавления 3 отсюда следует $\mathrm{Prf}(f, A, \omega\cdot\gamma)$ для некоторого f. Остается заметить, что $\omega\cdot\gamma < \varepsilon(\alpha)$ и что импликация $\to$ в предыдущей теореме требует только индукции по α.

(b). Пусть A выводима в PA_0. Как уже отмечалось в Добавлении 2, конъюнкция аксиом арифметики, включая бесквантор ную индукцию, эквивалентна формуле вида $\forall z S(z)$ с бескванторной $S(z)$. Поэтому без индукции выводима формула вида $\forall z S(z) \to A$. По теореме об устранимости сечения получаем вывод секвенции $\exists z \neg S(z), A$ без сечения, который перестраивается в вывод формулы A с ω-правилом (конечной высоты) путем вычеркивания всех применений правила $(\exists)$ к $\exists z \neg S(z)$. При этом не могут испортиться аксиомы, так как все формулы $\neg S(N)$ ложны: именно при обосновании этого шага используются арифметические аксиомы из HA^-. Заметим, что справедлив аналог теоремы 3 добавления 3 для конечных выводов без ω-правила, дающий конечную оценку. Он использует аналог леммы 1 Добавления 3, где утверждение (ii) требуется только для подстановки термов, входящих в исходный вывод, а не произвольных натуральных чисел. Поэтому мы можем считать, что полученный вывод формулы A построен по правилам $(\forall)$, $(\exists)$, **(F)**. Теперь получаем A^k по предыдущей теореме. При этом ввиду конечности k индукция не применяется. □

После редукции к $\exists\forall\exists$-виду Н. А. Шанин рассматривает дальнейшее разъяснение, при котором требуется явная реализация кванторов существования. Пусть Θ — некоторый класс общерекурсивных функций. Скажем, что формула

$$\exists x \forall y \exists z R(x, y, z) \tag{30}$$

с бескванторной R является Θ-истинной, если истинна некоторая формула вида

$$R(X, y, Z(y)), \tag{31}$$

где X — натуральное число, Z — функция из класса Θ. Подразумевается квантор всеобщности по y. Очевидно, что формула (31) является (после добавления квантора $\forall y$) мажорантой формулы (30). Очевидно также, что можно положить $Z(y) = \mu z R(X, y, z)$, если X известен.

Пусть $\mathscr{C}$ — бескванторное исчисление в языке, содержащем символы для функций из Θ. $(\mathscr{C}, \Theta)$-обоснование формулы (30) — это тройка $\langle X, Z, d\rangle$, где d — вывод формулы (31) в исчислении $\mathscr{C}$.

Если α — ординал, то обозначим через $\Theta(\alpha)$ класс функций, определимых ординальной рекурсией по ординалам $\beta < \alpha$:

$$f(x, 0) = \zeta(x),$$

$$f(x, y) = \varphi(x, y, f(x, [\psi(x, y)]_{y,\beta})),$$

где $[z]_{y,\beta} = z$, если $z \prec y$ и $z \prec \beta$ в упорядочении $\prec$ по типу α, и $[z]_{y,\beta} = 0$ в противном случае.

Через $\mathscr{C}(\alpha)$ обозначим расширение примитивно рекурсивной арифметики PRA символами и определяющими равенствами для функций из $\Theta(\alpha)$, а также правилом индукции по ординалам $\beta < \alpha$.

6. Теорема. (a) *Если* $\mathrm{PA} + \mathrm{TI}(\alpha) \vdash A$, *то имеется* $(\mathscr{C}(\varepsilon(\alpha)), \Theta(\varepsilon(\alpha)))$*-обоснование формулы* A^β *для некоторого* $\beta < \varepsilon(\alpha)$.

(b) *Если* $\mathrm{PA}_0 \vdash A$, *то имеется* (PRA, PR)*-обоснование формулы* A^β *для некоторого* $\beta < \omega$.

Доказательство. В силу теоремы 5 Добавления 3 мы имеем вывод формулы A^β вида (30) для подходящего β в подходящем расширении системы HA^-. Применяя рекурсивную реализуемость (§ 4 гл. 5), находим для формулы (30) число X такое, что в рассматриваемом расширении HA^- выводимо

$$\forall y \exists z R(X, y, z). \tag{32}$$

Теперь (b) получается из теоремы 4 Добавления 2. Займемся утверждением (a). Чтобы построить функцию $Z(y)$ и вывод формулы (31) в бескванторном исчислении, применяем ту же конструкцию, что в доказательстве теоремы 5. Строим вывод формулы (32) без сечения с ω-правилом. Высота γ этого вывода будет не больше $\omega_l(\beta)$ для некоторого $l < \omega$, где $\omega_0(\beta) = \beta$, $\omega_{l+1}(\beta) = \omega^{\omega_l(\beta)}$. Тем самым $\gamma < \varepsilon(\alpha)$, так как $\beta < \varepsilon(\alpha)$. То, что эта фигура действительно является выводом, доказывается в примитивно рекурсивной арифметике (при условии, что вывод описан примитивно рекурсивно, см. Минц [1]. Она заканчивается ω-правилом

$$\frac{\exists z R(X, 0, z);\ \exists z R(X, 1, z);\ \ldots;\ \exists z R(X, i, z);\ \ldots}{\forall y \exists z R(X, y, z)}.$$

Чтобы вычислить $Z(i)$, поднимаемся по i-й ветви вывода, пока не встретим применение

$$\frac{R(X, i, j)}{\exists z R(X, i, z)}(\exists),$$

где $R(X, i, j)$ истинно, и полагаем $Z(i) = j$. Формально «подъем по i-й ветви» оформляется в виде рекурсии по орди-

налу γ. Между нижним ω-правилом и рассматриваемым применением ($\exists$) могут встретиться лишь применения правила повторения. Все это рассуждение оформляется в исчислении $\mathscr{C}(\varepsilon(\alpha))$, что дает искомое обоснование формулы A.

ЛИТЕРАТУРА

Минц Г. Е.
1. Трансфинитные развертки арифметических формул. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1974, 49, с. 51—66.
Шанин Н. А.
1. Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 129. М.: Наука, 1973, с. 203—266.

Добавление 6. РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНОЕ КОНСТРУКТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КВАДРАТА В СЕБЯ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

В. П. Оревков

Введение

Ниже будут доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Каково бы ни было конструктивное вещественное число u, если $0 < u < 1/2$, то можно построить такое локально равномерно непрерывное конструктивное отображение F квадрата $[0,1]\times[0,1]$ в себя, что для любой конструктивной точки v этого квадрата*

$$\rho(F(v), v) = u,$$

где ρ — евклидова метрика конструктивной плоскости.

Теорема 2. *Можно построить равномерно непрерывное конструктивное отображение квадрата $[0,1]\times[0,1]$ в себя, сдвигающее каждую конструктивную точку.*

В работе Оревкова [1] был намечен план доказательства этих теорем. Подробное доказательство приведено в работе Оревкова [2], однако в этой работе много неточностей (список исправлений дан в т. 93 Трудов Математического института АН СССР). Излагаемое доказательство принадлежит конструктивному направлению в математике (CRA в терминологии 1.1 гл. 5) и отличается от предыдущего методическими улучшениями и тем, что в нем не используется введенный А. А. Марковым принцип конструктивного подбора.

Основные черты конструктивного направления в математике охарактеризованы в работе Маркова [2]. Приведем определения исходных понятий конструктивного математического анализа. Подробному изложению конструктивного анализа посвящены работа Шанина [1] и книга Кушнера [1].

Под *конструктивными последовательностями* конструктивных объектов понимаются алгорифмы, перерабатывающие натуральные числа в коды объектов (т. е. общерекурсивные функции, если объекты кодируются натуральными числами). Конструктивными *вещественными* числами называются, во-первых, рациональные числа и, во-вторых, пары, состоящие из кода какой-нибудь конструктивной фундаментальной последовательности φ рациональных чисел и кода регулятора сходимости в себе последовательности φ, т. е. такой общерекурсивной функции ψ, что при всех натуральных n, m и k

$$n \geqslant \psi(k) \wedge m \geqslant \psi(k) \rightarrow |\varphi(n) - \varphi(m)| < 2^{-k}.$$

При таком определении конструктивного вещественного числа можно построить *алгорифм вычисления рационального приближения* с заданной точностью. Для предложенного в 5.3 гл. 5 определения конструктивного вещественного числа подобный алгорифм построить нельзя.

Под конструктивными *функциями*, заданными на всей вещественной оси, понимаются алгорифмы, перерабатывающие конструктивные вещественные числа в конструктивные числа и при этом равные числа в равные числа. Аналогично определяются конструктивные функции, заданные на сегменте, многоместные конструктивные функции, конструктивные отображения конечномерных пространств в себя и т. п. В дальнейшем прилагательное «конструктивный» перед словами «последовательность», «вещественное число», «точка», «функция», «отображение» и т. п. часто будет опускаться.

В 1967 г. профессор А. Гейтинг любезно сообщил автору, что в работе Брауэра [1] показано, что теорема о неподвижной точке для квадрата не имеет места в интуиционистской математике. При доказательстве этого утверждения Л. Э. Я. Брауэр существенно использовал понятие свободно становящейся последовательности. Таким образом, это доказательство нельзя непосредственно перенести в конструктивную математику. В этой же работе Л. Э. Я. Брауэр приводит доказательство, которое легко переносится в конструктивную математику, следующего *ε-варианта* теоремы о неподвижной точке.

Каковы бы ни были рациональное положительное число ε *и равномерно непрерывное отображение* F *квадрата* I^2 *в себя, можно построить такую точку* v *квадрата* I^2, *что*

$$\rho(F(v), v) < \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем посредством I обозначается сегмент $[0, 1]$, а посредством I^2 — квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$.

Другое конструктивное доказательство этого ε-варианта и некоторых его обобщений приведены у Оревкова [3]. Это доказательство основано на формуле Эйлера — Пуанкаре — Хопфа (см., например, Понтрягин [1]). Конструктивное доказательство ε-варианта теоремы о неподвижной точке можно также получить из подходящего классического доказательства с помощью гёделевской интерпретации (12.4 гл. 5) или с помощью работы Гельфонда [1].

Теоремы 1 и 2 не переносятся на одномерный случай. Это вытекает из следующего утверждения (Марков [1], теорема 8.3).

Невозможно конструктивное отображение сегмента I *в себя, не имеющее на* I *неподвижных точек.*

В работе Цейтина [1] (см. также Цейтин [2], § 4, теорема 2) получено следующее усиление этого результата.

По любому конструктивному отображению f *сегмента* I *в себя можно построить такую конструктивную последовательность* φ *рациональных чисел из* I, *что выполняются условия*:

(i) *если можно указать регулятор сходимости* φ *в себе, то* φ *сходится к неподвижной точке отображения* f;

(ii) *неверно, что нельзя построить для* φ *регулятор сходимости в себе.*

В двумерном случае справедливо более слабое утверждение.

По любому конструктивному равномерно непрерывному отображению F *квадрата* I^2 *в себя можно построить такую конструктивную последовательность* φ *рациональных точек из* I^2, *что выполняются условия*:

(i) $$\rho(F(\varphi(n)), \varphi(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

(ii) *для любого положительного рационального* ε *можно указать такое натуральное* k, *что при всех* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$

$$\min_{1\leqslant i<k} \rho(\varphi(n_i), \varphi(n_{i+1})) < \varepsilon.$$

Это утверждение следует из теоремы 1 работы Лифшица [1]. При этом используется то обстоятельство, что задача нахождения неподвижных точек отображения F эквивалентна задаче нахождения точек, в которых достигается абсолютный минимум функции g, при всех v из I^2 удовлетворяющей равенству

$$g(v) = \rho(F(v), v).$$

Следует также заметить, что в классическом анализе условие (ii) эквивалентно условию Коши.

Важным источником формулировок конструктивных аналогов теоремы Брауэра о неподвижной точке является следующее предложение (Гжегорчик [1], § 4, теорема 4) классического рекурсивного анализа.

Какова бы ни была вычислимая равномерно непрерывная функция f *на сегменте* I, *если* f *принимает максимальное значение на* I *только в одной точке, то эта точка вычислима.*

Конструктивные варианты этого предложения и его обобщения на компакты приведены в работах Лифшица [1] и Кушнера [2]. В частности, из теоремы 4 работы Лифшица [1] вытекает следующее утверждение.

Каково бы ни было конструктивное равномерно непрерывное отображение F *квадрата* I^2 *в себя, если при всех положительных* δ *можно указать такое положительное* ε, *что расстояние между любыми точками* v_1 *и* v_2 *квадрата* I^2, *удовлетворяющими неравенству* (1), *меньше* δ, *то можно построить неподвижную точку отображения* F.

Очевидно, что это утверждение справедливо и в случае сегмента.

В заключение заметим, что в формулировке теоремы 1 нельзя условие $u < 1/2$ заменить на условие $u \leqslant 1/2$. Это вытекает из следующего утверждения.

Нельзя построить такое конструктивное отображение F *квадрата* I^2 *в себя, что для любой точки* v *из* I^2

$$\rho(F(v), v) \geqslant 1/2. \tag{2}$$

Доказательство этого утверждения основано на следующих предложениях:

1) конструктивные отображения квадрата в себя не имеют конструктивных разрывов (см., например, Марков [1]);

2) каков бы ни был открытый круг S радиуса $1/2$, если обе координаты центра S отличны от $1/2$ и расстояние от центра S до любой вершины квадрата I^2 не меньше $1/2$, то множество $I^2 - S$ несвязно.

§ 1. Основная лемма и доказательство теорем 1 и 2

Главную роль в доказательстве теорем 1 и 2 играет следующее утверждение.

Основная лемма. *Для любого рационального* b *из интервала* $(0, 1/2)$ *можно построить последовательность* $S_0, S_1, \ldots$

открытых прямоугольников, последовательность $F_0, F_1, \ldots$ *отображений плоскости в себя и алгорифм* α, *удовлетворяющие при всех натуральных* n *и* m *следующим условиям:*

(a) *стороны прямоугольника* S_n *параллельны координатным осям, а координаты вершин рациональны;*

(b) *алгорифм* α *перерабатывает любую точку* v *из* I^2 *в натуральное число и* $v \in S_{\alpha(v)}$;

(c) F_n *— равномерно непрерывное отображение всей плоскости в границу квадрата* I^2;

(d) *если* S_n *имеет общую точку с какой-нибудь стороной* I^2, *то* F_n *отображает плоскость в эту сторону;*

(e) *если* S_n *и* S_m *имеют общую точку, то* F_n *совпадает с* F_m на $S_n \cap S_m$;

(f) *если* S_n *имеет общую точку с какой-нибудь вертикальной стороной* I^2, *то* b *не превосходит длины прямоугольника* $I^2 \cap S_n$;

(g) *если* S_n *имеет общую точку с какой-нибудь горизонтальной стороной* I^2, *то* b *не превосходит высоты прямоугольника* $I^2 \cap S_n$.

Доказательству этой леммы посвящены §§ 2—4. Сейчас покажем, как с помощью основной леммы получить доказательства теорем 1 и 2.

Пусть вещественное число u принадлежит интервалу $(0, 1/2)$. Зафиксируем такое рациональное b, что

$$u \leqslant b < 1/2. \tag{1}$$

Предположим, что последовательности $S_0, S_1, \ldots$; $F_0, F_1, \ldots$ и алгорифм α удовлетворяют условиям (a)—(g) основной леммы.

Построим алгорифм G такой, что для любой точки v квадрата I^2

$$G(v) = F_{\alpha(v)}(v).$$

Из условий (b), (c) и (e) следует, что G является конструктивным локально равномерно непрерывным отображением квадрата I^2 на его границу.

Докажем три леммы.

Лемма 1.1. *Каковы бы ни были рациональные числа* a *и* c, *если* $a < c$, *то можно построить алгорифм* R, *при всяком вещественном* x *удовлетворяющий следующим условиям:*

(i) *алгорифм* R *перерабатывает* x *в* 0 *или* 1;

(ii) *если* $R(x) = 0$, *то* $x < c$;

(iii) *если* $R(x) = 1$, *то* $a < x$.

Доказательство. Пусть натуральное m таково, что

$$c - a > 2^{-m+1}.$$

Построим такой алгорифм R, что для любого вещественного x

$$R(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{если } D^m(x) < c - 2^{-m}, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где D^m — алгорифм вычисления рациональных приближений вещественных чисел с точностью до 2^{-m}. Очевидно, что алгорифм R требуемый. □

Лемма 1.2. *Пусть функция* f, *заданная на* I, *при любом вещественном* x *из* I *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $-b \leqslant f(x) \leqslant b$;

(ii) *если* $x < b$, *то* $-b \leqslant f(x) \leqslant 0$;

(iii) *если* $x > 1 - b$, *то* $0 \leqslant f(x) \leqslant b$.

Тогда для всех x *из* I

$$0 \leqslant x - f(x) \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть k — произвольное натуральное число. Рассмотрим три случая:

1) $0 \leqslant x < b$,

2) $b - 2^{-k} < x < 1 - b + 2^{-k}$,

3) $1 - b < x \leqslant 1$.

В каждом из этих случаев с помощью (1) получаем, что

$$-2^{-k} < x - f(x) < 1 + 2^{-k}.$$

В силу леммы 1.1 это неравенство выполняется и при всех x из I. Осталось перейти к пределу при $k \to \infty$. □

Лемма 1.3. *Какова бы ни была двухместная функция* f, *если для любой точки* v *квадрата* I^2 *выполняется неравенство*

$$0 \leqslant f(v) \leqslant 2b,$$

то для всякой v *из* I^2 *точка*

$$v - f(v) \cdot (G(v) - (1/2,\ 1/2))$$

принадлежит I^2.

Доказательство. Пусть точка (x, y) принадлежит квадрату I^2. Построим такие функции f^1 и f^2, что при всех z из I

$$f^1(z) \simeq f(z, y) \cdot (G^1(z, y) - 1/2),$$

$$f^2(z) \simeq f(x, z) \cdot (G^2(x, z) - 1/2),$$

где пара функций G^1 и G^2 является покоординатным представлением отображения G. Очевидно, что функции f^1 и f^2

удовлетворяют условию (i) леммы 1.2. Предположим, что $z < b$. Тогда из условий (b) и (f) вытекает, что

$$(z, y) \in S_{\alpha(0, y)}.$$

Отсюда и из условий (d) и (e) следует, что f^1 удовлетворяет условию (ii) леммы 1.2. Аналогично получаем, что f^1 удовлетворяет и условию (iii). Такими же рассуждениями, только заменив (f) на (g), докажем, что f^2 удовлетворяет условиям (ii) и (iii). Теперь осталось применить лемму 1.2. □

Вернемся к доказательствам теорем 1 и 2. Чтобы получить теорему 1, нужно в лемме 1.3 в качестве f взять такую функцию $\bar{f}$, что для любой точки v из I^2

$$\bar{f}(v) \simeq u/\rho(G(v), (1/2, 1/2)).$$

Для получения теоремы 2 построим последовательность $f_0, f_1, \ldots$ двухместных функций, удовлетворяющих при всех n следующим условиям:

1) f_n — равномерно непрерывная двухместная функция, заданная на всей плоскости;
2) вне прямоугольника S_n функция f_n равна нулю;
3) для любой точки v из S_n

$$0 < f_n(v) < 2^{-n}.$$

Используя полноту конструктивной прямой, построим также такую функцию J, что для любой точки v

$$J(v) = \sum_{i=0}^{\infty} b \cdot f_i(v).$$

Очевидно, что J равномерно непрерывна на всей плоскости и что для любой точки v из I^2

$$0 < J(v) \leqslant 2b.$$

Для любой точки v квадрата I^2 и любого натурального i имеет место равенство

$$f_i(v) \cdot F_i(v) = f_i(v) \cdot F_{\alpha(v)}(v). \qquad (2)$$

Это равенство для рациональных точек следует из (b) и (e), а на остальные точки в силу (c) продолжается по непрерывности. Из (2) вытекает равенство

$$J(v) \cdot G(v) = \sum_{i=0}^{\infty} b \cdot f_i(v) \cdot F_i(v). \qquad (3)$$

Чтобы получить теорему 2, возьмем в лемме 1.3 в качестве f функцию J. Равномерная непрерывность полученного отображения I^2 в себя следует из (c) и равномерной сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (3).

§ 2. Бесконечное дерево без конструктивных бесконечных ветвей

В работе Клини [1] (см. также Клини и Весли [1], § 9, лемма 9.8) построен пример дерева, удовлетворяющего следующим условиям:

1) ограничено число ветвлений в каждом узле,
2) есть сколь угодно длинные ветви,
3) нет конструктивных бесконечных ветвей.

Другой пример такого дерева независимо построен в работе Заславского [1], § 4. В конструкции последовательности прямоугольников $S_0, S_1, \ldots$ основную роль будет играть пример дерева, которое удовлетворяет тем же условиям и, кроме того, дополнительным условиям, сформулированным ниже в леммах 2.2 и 2.4. Перейдем к построению этого примера.

Мы будем пользоваться клиниевским предикатом T_1 (см. Клини [2], § 57). Напомним, что для любых натуральных l и m предикат $T_1(l, m, n)$ истинен не более чем для одного n и что частично рекурсивная функция $\{e\}$, т. е. функция с гёделевым номером e, определена в m тогда и только тогда, когда можно построить такое n, что $T_1(e, m, n)$. Посредством $\tilde{T}_1(m, n)$ будем обозначать предикат

$$\exists x (x \leqslant n \wedge T_1(m, m, x)).$$

Кортежем будем называть произвольное слово в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Пусть P и Q — кортежи. Будем говорить, что Q является *продолжением* P, и писать $P \subset Q$, если P является началом Q и отличен от Q. Будем говорить, что P *левее* Q, и писать $P \prec Q$, если длина P равна длине Q и P предшествует Q при лексикографическом упорядочении слов в алфавите $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Длину кортежа P будем обозначать посредством $l(P)$. Через $(P)_i$ при $1 \leqslant i \leqslant l(P)$ будем обозначать i-ю букву P. При $i = 0$ или $i > l(P)$ будем полагать $(P)_i = 0$.

Кортеж P будем называть *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) в P нет вхождений букв 0 и 4;
2) каково бы ни было i, если $1 \leqslant i \leqslant l(P)$ и $\tilde{T}_1(i, l(P))$, то

$$(P)_i = \bar{s}(\{i\}(i)),$$

где $\bar{s}$ — такая примитивно рекурсивная функция, что

$$\bar{s}(n) = \begin{cases} 3, & \text{если } n = 1, \\ 1, & \text{если } n \neq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что пустое слово Λ является регулярным кортежем и что множество регулярных кортежей разрешимо. Это множество и задает нужный нам пример бесконечного дерева без конструктивных бесконечных ветвей.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Каковы бы ни были кортежи P и Q, если P регулярен и $Q \subset P$, то и Q регулярен.*

Обозначим посредством Γ_n конечное множество таких натуральных i, что

$$1 \leqslant i \leqslant n \wedge \tilde{T}_1(i, n).$$

Лемма 2.2. *При всех натуральных n число регулярных n-членных кортежей нечетно.*

Действительно, это число равно

$$3^{n-|\Gamma_n|},$$

где $|\Gamma_n|$ — мощность множества Γ_n. □

Кортеж P будем называть *продолжимым*, если можно указать такой регулярный кортеж Q, что $P \subset Q$. Кортеж P будем называть *непродолжимым*, если P — регулярный кортеж, но ни один из кортежей $P1$, $P2$ и $P3$ не является регулярным.

Лемма 2.3. *Каков бы ни был продолжимый кортеж P, число непродолжимых кортежей левее P четно.*

Доказательство. Пусть P — продолжимый кортеж. Обозначим посредством C_P^i множество таких непродолжимых кортежей Q, что

$$l(Q) = l(P) \wedge (Q)_i < (P)_i$$

и, каково бы ни было j, если $1 \leqslant j < i$, то $(Q)_j$ совпадает с $(P)_j$. Через Γ_p^i обозначим множество таких натуральных j, что

$$i < j \leqslant l(P) \wedge \tilde{T}_1(j, l(P)),$$

а через Π_P^i — множество таких j, что

$$i < j \leqslant l(P) \wedge T_1(j, j, l(P)+1).$$

Нетрудно показать, что число непродолжимых кортежей левее P равно

$$\sum_{i=1}^{l(P)} |C_P^i|.$$

Осталось заметить, что при $1 \leqslant i \leqslant l(P)$ число $|C_P^i|$ четно.

В самом деле,

$$|C_P^i| = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{T}_1(i, l(P)), \\ ((P)_i - 1) \cdot A_P^i, & \text{если } T_1(i, i, l(P)+1) \wedge (P)_i \neq 2, \\ ((P)_i - 1) \cdot B_P^i, & \text{если } \neg \tilde{T}_1(i, l(P)+1), \end{cases}$$

где

$$A_P^i \rightleftharpoons 3^{l(P)-i-|\Gamma_P^i|}, \quad B_P^i \rightleftharpoons A_P^i - 3^{l(P)-i-|\Gamma_P^i|-|\Pi_P^i|}. \quad \square$$

Лемма 2.4. *Каков бы ни был продолжимый кортеж P, число регулярных кортежей левее P сравнимо по модулю 2 с числом регулярных кортежей левее $P1$.*

Доказательство. Обозначим через k число непродолжимых кортежей левее P, через n обозначим число регулярных кортежей левее P, а через m — число регулярных кортежей левее $P1$. Нетрудно показать, что

$$m = \begin{cases} n-k, & \text{если } \tilde{T}_1(l(P)+1, l(P)+1), \\ 3(n-k), & \text{если } \neg \tilde{T}_1(l(P)+1, l(P)+1). \end{cases}$$

Отсюда и из леммы 2.3 получаем, что $n \equiv m \pmod 2$. □

§ 3. Построение последовательности S_0, S_1, ...

Кортеж P будем называть *правильным*, если в P нет вхождений букв 0 и 4. Построим такие алгорифмы δ_1 и δ_2, что

$$\delta_1(\Lambda) \simeq 0$$

и для любого правильного кортежа P

$$\delta_1(Pn) \simeq \delta_1(P) + \left(\frac{1-2b}{5}\right)^{l(P)} \cdot \left(b + \frac{1-2b}{5} \cdot 2(n-1)\right), \quad n = 1, 2, 3,$$

$$\delta_2(P) \simeq \delta_1(P) + \left(\frac{1-2b}{5}\right)^{l(P)}.$$

Лемма 3.1. *Каковы бы ни были правильные кортежи P и Q:*
(i) *если $P \subset Q$, то*

$$\delta_1(P) < \delta_1(Q) < \delta_2(Q) < \delta_2(P);$$

(ii) *если $l(P) = l(Q)$ и $P < Q$, то $\delta_2(P) < \delta_1(Q)$.*

Эта лемма доказывается индукцией по максимуму длин кортежей P и Q. □

Кортеж P будем называть *n-нормальным*, если $l(P) \leqslant n$ и выполняется одно из трех условий:

1) P имеет вид $Q0$ или $Q4$, где Q — продолжимый кортеж;

2) P — непродолжимый кортеж;
3) $l(P) = n$ и P — регулярный кортеж.

Кортеж P будем называть *нормальным*, если он $l(P)$-нормален, и будем называть *вполне нормальным*, если он $(l(P)+1)$-нормален. Ясно, что множество вполне нормальных кортежей разрешимо.

Построим такие алгорифмы Δ_1 и Δ_2, что для любого продолжимого кортежа P выполняются следующие условия:

1) $\Delta_1(\Lambda) \simeq -b$, $\Delta_2(\Lambda) \simeq 1+b$, $\Delta_1(P0) \simeq \Delta_1(P)$, $\Delta_2(P4) \simeq \Delta_2(P)$;

2) если все три кортежа $P1$, $P2$ и $P3$ регулярны, то

$$\Delta_1(P4) \simeq \delta_2(P3), \qquad \Delta_2(P0) \simeq \delta_1(P1),$$
$$\Delta_1(P1) \simeq \delta_1(P), \qquad \Delta_2(P1) \simeq \delta_1(P2),$$
$$\Delta_1(P2) \simeq \delta_2(P1), \qquad \Delta_2(P2) \simeq \delta_1(P3),$$
$$\Delta_1(P3) \simeq \delta_2(P2), \qquad \Delta_2(P3) \simeq \delta_2(P);$$

3) если ровно один из кортежей $P1$, $P2$ и $P3$ регулярен, то

$$\Delta_1(P4) \simeq \delta_2(Pn), \qquad \Delta_2(P0) \simeq \delta_1(Pn),$$
$$\Delta_1(Pn) \simeq \delta_1(P), \qquad \Delta_2(Pn) \simeq \delta_2(P),$$

где $n = 1, 2, 3$ и кортеж Pn регулярен.

Из леммы 2.1 вытекает, что алгорифмы Δ_1 и Δ_2 перерабатывают каждый нормальный кортеж в рациональное число. С помощью лемм 1.1 и 3.1 индукцией по длине кортежа P можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Каков бы ни был продолжимый кортеж* P,

$$\Delta_1(P) < \delta_1(P), \qquad \delta_2(P) < \Delta_2(P),$$

$$(\Delta_1(P),\ \Delta_2(P)) = \bigcup_{i=0}^{k} (\Delta_1(Q_i)\ \Delta_2(Q_i)),$$

где $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ $(k = 2, 4)$ — *все* $(l(P)+1)$-*членные нормальные продолжения* P.

Лемма 3.3. *Каково бы ни было вещественное* x, *если* x *принадлежит* I, *то можно построить такой алгорифм* β_x, *что для любого* n *выполняются следующие условия*:

(i) β_x *перерабатывает* n *в* n-*нормальный кортеж*;

(ii) $\beta_x(n+1)$ *или совпадает с* $\beta_x(n)$, *или является его продолжением*;

(iii) $\Delta_1(\beta_x(n)) < x < \Delta_2(\beta_x(n))$.

Доказательство. Алгорифм β_x строится рекурсией по n. Свойства (i)—(iii) доказываются индукцией по n. База очевидна, а индукционный переход следует из леммы 3.2. □

Лемма 3.4. *Каково бы ни было вещественное число* x, *если* x *принадлежит* I, *то можно построить такой вполне нормальный кортеж* P, *что*

$$x \in (\Delta_1(P),\ \Delta_2(P)).$$

Доказательство. Пусть x принадлежит I, и пусть β_x — алгорифм, о возможности построения которого говорится в лемме 3.3. Построим такую общерекурсивную функцию φ_x, что

$$\varphi_x(n) = (\beta_x(n))_n.$$

Обозначим посредством e_x гёделев номер функции φ_x. Построим такое натуральное число k_x, что $T_1(e_x, e_x, k_x)$. Обозначим через P_x кортеж $\beta_x(\max(e_x, k_x))$. Если кортеж P_x не является правильным или непродолжим, то он и будет требуемым вполне нормальным кортежем. Так как кортеж P_x $\max(e_x, k_x)$-нормален, осталось привести к противоречию случай, когда $l(P_x) = \max(e_x, k_x)$ и кортеж P_x регулярен. В этом случае

$$(P_x)_{e_x} = \bar{s}(\{e_x\}(e_x)) = \bar{s}(\varphi_x(e_x)) = \bar{s}((\beta_x(e_x))_{e_x}).$$

С другой стороны, по лемме 3.3 кортеж P_x или совпадает с $\beta_x(e_x)$ или является его продолжением и $l(\beta_x(e_x)) = e_x$. Следовательно,

$$(P_x)_{e_x} = (\beta_x(e_x))_{e_x}.$$

Таким образом, мы получили противоречие с тем фактом, что при всех n

$$\bar{s}(n) \neq n. \quad \square$$

Перейдем к построению последовательности S_0, S_1, ... Элементами этой последовательности будут открытые прямоугольники вида

$$(\Delta_1(P),\ \Delta_2(P)) \times (\Delta_1(Q),\ \Delta_2(Q)),$$

где P и Q — произвольные вполне нормальные кортежи. Перечислимость множества всех пар таких кортежей очевидна. Очевидно также, что выполняется условие (a) основной леммы. Возможность построения алгорифма α, удовлетворяющего условию (b) этой леммы, вытекает из леммы 3.4. Условия (f) и (g) следуют из того факта, что для любого вполне нормального кортежа P, отличного от 0 и 4,

$$0 \leqslant \Delta_1(P) < \Delta_2(P) \leqslant 1$$

и что

$$b \leqslant \Delta_2(0), \qquad b \leqslant 1 - \Delta_1(4).$$

§ 4. Построение последовательности $F_0, F_1, \ldots$

Обозначим через A_n множество таких рациональных чисел a, что

$$a = \delta_1(P) \vee a = \delta_2(P), \tag{1}$$

где P — какой-нибудь n-членный регулярный кортеж, а δ_1 и δ_2 построены в начале § 3. Через A_∞ будем обозначать множество $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Для любого a из A_∞ посредством $\bar{\varkappa}(a)$ будем обозначать регулярный кортеж, удовлетворяющий условию (1). Из леммы 3.1 следует единственность такого кортежа. Посредством $\varkappa(a)$ будем обозначать длину $\bar{\varkappa}(a)$. Рациональный *сегмент* $[a, c]$ будем называть *неделимым*, если a и c принадлежат A_∞, $a < c$ и внутри $[a, c]$ нет точек из A_∞.

Из лемм 2.1 и 3.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Каков бы ни был неделимый сегмент* $[a, c]$, *если* $\varkappa(a) \neq \varkappa(c)$, *то выполняется одно из условий*:

(i) $\bar{\varkappa}(a) \subset \bar{\varkappa}(c)$, $\varkappa(c) = \varkappa(a) + 1$, $a = \delta_1(\bar{\varkappa}(a))$ *и* $c = \delta_1(\bar{\varkappa}(c))$;

(ii) $\bar{\varkappa}(c) \subset \bar{\varkappa}(a)$, $\varkappa(a) = \varkappa(c) + 1$, $a = \delta_2(\bar{\varkappa}(a))$ *и* $c = \delta_2(\bar{\varkappa}(c))$.

Лемма 4.2. *Каковы бы ни были вполне нормальные кортежи* P *и* Q, *если интервалы* $(\Delta_1(P), \Delta_2(P))$ *и* $(\Delta_1(Q), \Delta_2(Q))$ *имеют общую точку, то замыкание* $I \cap (\Delta_1(P), \Delta_2(P)) \cap (\Delta_1(Q), \Delta_2(Q))$ *однозначно разбивается на конечное число неделимых сегментов.*

Доказательство. Из леммы 3.1 вытекает, что замыкание $I \cap (\Delta_1(P), \Delta_2(P))$ однозначно разбивается на конечное число (не более трех) неделимых сегментов. Отсюда и следует лемма 4.2. □

Построим такой алгорифм h, что для любого рационального a и любого натурального n

$$h(n, a) = \frac{1 - (-1)^k}{2},$$

где k — число n-членных регулярных кортежей P, удовлетворяющих неравенству $\delta_1(P) < a$.

Лемма 4.3. *Каковы бы ни были неделимый сегмент* $[a, c]$ *и натуральное* n, *если* $n > \max(\varkappa(a), \varkappa(c))$ *или* $\varkappa(a) \neq \varkappa(c)$, *то*

$$h(\max(n, \varkappa(a)), a) = h(\max(n, \varkappa(c)), c). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Покажем, что выполняется равенство

$$h(\max(n, \varkappa(c)), a) = h(\max(n, \varkappa(c)), c). \tag{3}$$

В самом деле, предположим противное. Тогда

$$a = \delta_1(\bar{\varkappa}(a)), \quad \varkappa(a) = \max(n, \varkappa(c)).$$

Отсюда и из леммы 4.1 вытекает, что

$$\varkappa(a) = \varkappa(c) \geqslant n.$$

Мы получили противоречие с условиями доказываемой леммы. Следовательно, выполняется (3).

Если $\max(n, \varkappa(c)) = \max(n, \varkappa(a))$, то из (3) следует (2). Поэтому осталось рассмотреть случай, когда $\max(n, \varkappa(c))$ отлично от $\max(n, \varkappa(a))$. В этом случае $\varkappa(a) \neq \varkappa(c)$. Воспользовавшись леммами 2.4, 3.1, 4.1 и тем фактом, что для любого продолжимого кортежа P число его $(l(P)+1)$-членных регулярных продолжений нечетно, получим, что

$$h(\max(n, \varkappa(a)), a) = h(\max(n, \varkappa(c)), a).$$

Отсюда и из (3) вытекает (2). □

Построим алгорифмы H^1 и H^2 таким образом, чтобы для любых точек a и c из A_∞

$$H^1(a, c) = \begin{cases} h(\varkappa(c)+1, a), & \text{если } \varkappa(c) \geqslant \varkappa(a), \\ h(\varkappa(a), a), & \text{если } \varkappa(c) < \varkappa(a), \end{cases}$$

$$H^2(a, c) = h(\max(\varkappa(a), \varkappa(c)), c).$$

Лемма 4.4. *Каковы бы ни были неделимый сегмент* $[a_0, a_1]$ *и точка* c *из* A_∞, *если* $\varkappa(c) \geqslant \max(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1))$ *или* $\varkappa(a_0) \neq \varkappa(a_1)$, *то*

$$H^1(a_0, c) = H^1(a_1, c). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Если

$$\varkappa(c) \geqslant \max(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1)) \quad \text{или} \quad \min(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1)) > \varkappa(c),$$

то (4) следует из леммы 4.3. Допустим, что $\max(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1)) > \varkappa(c) \geqslant \min(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1))$. В этом случае $\varkappa(a_0)$ отлично от $\varkappa(a_1)$ и из леммы 4.1 вытекает, что

$$\max(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1)) = \min(\varkappa(a_0), \varkappa(a_1)) + 1 = \varkappa(c) + 1.$$

Следовательно,

$$H^1(a_0, c) = h(\varkappa(c)+1, a_0), \quad H^1(a_1, c) = h(\varkappa(c)+1, a_1).$$

Отсюда с помощью леммы 4.3 получаем (4). □

Замкнутый *прямоугольник* $[a_1, c_1] \times [a_2, c_2]$ будем называть *неделимым*, если сегменты $[a_1, c_1]$ и $[a_2, c_2]$ неделимы.

Лемма 4.5. *Для любого неделимого прямоугольника* $[a_1, c_1]\times[a_2, c_2]$ *выполняется одно из условий*:

(i) $H^1(a_1, a_2) = H^1(a_1, c_2) = H^1(c_1, c_2) = H^1(c_1, a_2)$,

(ii) $H^2(a_1, a_2) = H^2(a_1, c_2) = H^2(c_1, c_2) = H^2(c_1, a_2)$.

Доказательство. Пусть $[a_1, c_1]\times[a_2, c_2]$ — неделимый прямоугольник. Предположим, что $\max(\varkappa(a_2), \varkappa(c_2)) < \max(\varkappa(a_1), \varkappa(c_1))$. Заметим, что в этом случае

$$\max(\varkappa(a_2), \varkappa(c_2)) < \varkappa(a_1) \quad \text{или} \quad \max(\varkappa(a_2), \varkappa(c_2)) < \varkappa(c_1).$$

Отсюда вытекает, что выполняется одно из равенств

$$H^1(a_1, c_2) = H^1(a_1, a_2), \qquad H^1(c_1, c_2) = H^1(c_1, a_2). \tag{5}$$

В силу леммы 4.3 также выполняется одно из равенств

$$H^2(a_1, a_2) = H^2(a_1, c_2), \qquad H^2(c_1, a_2) = H^2(c_1, c_2). \tag{6}$$

Допустим, что $\varkappa(a_1) \neq \varkappa(c_1)$. Тогда по лемме 4.4 выполняются равенства

$$H^1(a_1, c_2) = H^1(c_1, c_2), \qquad H^1(a_1, a_2) = H^1(c_1, a_2). \tag{7}$$

Этих равенств вместе с любыми из равенств (5) достаточно для выполнения условия (i).

Допустим, что $\varkappa(a_1) = \varkappa(c_1)$. Тогда выполняются равенства

$$H^2(a_1, a_2) = H^2(c_1, a_2), \qquad H^2(a_1, c_2) = H^2(c_1, c_2). \tag{8}$$

Эти равенства и любое из равенств (6) вместе дают условие (ii).

Предположим, что $\max(\varkappa(a_2), \varkappa(c_2)) \geqslant \max(\varkappa(a_1), \varkappa(c_1))$. В этом случае выполняется одно из равенств (8) и по лемме 4.4 одно из равенств (7). Допустим, что $\varkappa(a_2) \neq \varkappa(c_2)$. Тогда по лемме 4.3 выполняются равенства (6) и, так как имеет место одно из равенств (8), условие (ii). Если $\varkappa(a_2)$ совпадает с $\varkappa(c_2)$, то выполняются равенства (5) и, следовательно, условие (i). □

Обозначим посредством S неделимый прямоугольник $[a_1, c_1]\times[a_2, c_2]$. Поставим в соответствие прямоугольнику S такой алгорифм F_S, что для любой рациональной точки (a, c) из S

$$F_S(a, c) = \bar{F}_S(a_1, c) + (\bar{F}_S(c_1, c) - \bar{F}_S(a_1, c)) \cdot \frac{a - a_1}{c_1 - a_1},$$

где для любых d и d' из A_∞

$$\bar{F}_S(d, c) = H(d, a_2) + (H(d, c_2) - H(d, a_2)) \cdot \frac{c - a_2}{c_2 - a_2}$$

и $H(d, d')$ обозначает точку

$$(H^1(d, d'), \quad H^2(d, d')).$$

Из леммы 4.5 вытекает, что F_S отображает рациональные точки прямоугольника S в одну из сторон квадрата I^2. Очевидно, что F_S равномерно непрерывно.

Пусть S_n — один из членов последовательности $S_0, S_1, \ldots$ Разобьем замыкание $I^2 \cap S_n$, применив лемму 4.2, на неделимые прямоугольники $S'_1, S'_2, \ldots, S'_k$. Склеим отображения $F_{S'_1}, F_{S'_2}, \ldots, F_{S'_k}$ в одно равномерно непрерывное отображение F'_n рациональных точек из $S'_1 \cup S'_2 \cup \ldots \cup S'_k$ в границу квадрата I^2. Такая склейка возможна, так как

$$F_{S'_i}(v) = F_{S'_j}(v)$$

для всех рациональных точек v из $S'_i \cap S'_j (1 \leqslant i, j \leqslant k)$. Теперь, чтобы построить нужное нам отображение F_n, достаточно сначала продолжить F'_n по непрерывности на все точки замыкания $I^2 \cap S_n$, а затем и на всю плоскость, воспользовавшись равномерно непрерывным отображением плоскости на замыкание $I^2 \cap S_n$, оставляющим точки из $I^2 \cap S_n$ неподвижными.

Ясно, что выполняется условие (c) основной леммы. Условие (d) этой леммы следует из того факта, что для всех натуральных n

$$0 = h(n, 0) = h(n + 1, \Delta_2(0))$$

и что в силу леммы 2.2 при всех n

$$1 = h(n, \Delta_1(4)) = h(n, 1).$$

Условие (e) вытекает из леммы 4.2. Основная лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Брауэр (Brouwer L. E. J.)
1. Door klassieke theorema's gesignaleerde pinkernen die onvindbaar zijn.— Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A, 1952, **55**, p. 443—445 = Indag. math. 1952, **14**, p. 443—445.

Гельфонд М. Г.
1. О соотношении классического и конструктивного вариантов построения математического анализа. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1972, **32**, с. 5—11.

Гжегорчик (Grzegorczyk A.)
1. Computable functionals. — Fundam. math., 1955, **42**, № 1, p. 168—202.

Заславский И. Д.
1. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **67**. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 385—457.

Клини (Kleene S. C.)
1. Recursive functions and intuitionistic mathematics. — Proc. Intern. Congress Math. (Cambridge, Mass., 1950), 1952, **1**, p. 679—685.
2. Introduction to Metamathematics. — Amsterdam: North-Holland, 1952. [Русский перевод: Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.]

Клини, Весли (Kleene S. C., Vesley R. E.)
1. The Foundations of Intuitionistic Mathematics, Especially in Relation to Recursive Functions. — Amsterdam: North-Holland, 1965. [Русский перевод: Клини С., Весли Р. Основания интуиционистской математики. — М.: Наука, 1978.]

Кушнер Б. А.
1. Лекции по конструктивному математическому анализу. — М.: Наука, 1973.
2. О вычислении изолированных корней конструктивных функций. — Z. math. Logik Grundl. Math., 1976, **22**, S. 311—322.

Лифшиц В. А.
1. Об исследовании конструктивных функций методом заполнений. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1971, **20**, с. 67—79.

Марков А. А.
1. О непрерывности конструктивных функций. — УМН, 1954, **9**, № 3, с. 226—230.
2. О конструктивной математике. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **67**. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 8—14.

Оревков В. П.
1. Конструктивное отображение квадрата в себя, сдвигающее каждую конструктивную точку. — ДАН СССР, 1963, **152**, № 1, с. 55—58.
2. О конструктивных отображениях круга в себя. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **72**. М.: Наука, 1964, с. 437—461.
3. О конструктивных отображениях конечных полиэдров. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **93**. М.: Наука, 1967, с. 142—163.

Понтрягин Л. С.
1. Основы комбинаторной топологии. — М.: Наука, 1976.

Цейтин Г. С.
1. Теорема о вложенных сегментах, теорема Коши и теорема Ролля в конструктивном анализе. — Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, **1**. М.: Изд. АН СССР, 1956, с. 186—187.
2. Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **67**. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 362—384.

Шанин Н. А.
1. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. — Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **67**. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 15—294.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

СОДЕРЖАНИЕ ЧАСТЕЙ I—III

Часть I. ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

Часть II. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Часть III. ТЕОРИЯ РЕКУРСИИ