СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Часть II

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

В ЧЕТЫРЕХ ЧАСТЯХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ДЖ. БАРВАЙСА

Часть II

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Перевод с английского
В. Г. Кановея

Под редакцией
В. Н. Гришина

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

HANDBOOK OF MATHEMATICAL LOGIC

J. BARWISE (ED.)

NORTH-HOLLAND
PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM·NEW YORK·OXFORD
1977

Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/Под ред. Дж. Барвайса. — Ч. II. **Теория множеств:** Пер. с англ. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982 — 376 с.

170000000—110
С ... 053(02)-82 Подписное.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Настоящая книга состоит из ряда глав и добавления, написанных видными специалистами по теории множеств. Каждая глава — это самостоятельная статья. Она содержит в основном замкнутый в себе материал и может читаться независимо от остальных глав сборника. Главы очень разные по характеру и подробности изложения. Например, глава 2, написанная Т. Йехом, представляет собой весьма беглый обзор проблематики и результатов, относящихся к аксиоме выбора. Написанная Берджесом глава 4 о методе вынуждения, напротив, дает довольно подробное изложение доказательств некоторых основных результатов. Упор в справочном руководстве по теории множеств сделан на разъяснение основных идей и методов аксиоматической теории множеств, а не на охват как можно большего числа результатов. В этом отношении наиболее показательна глава 5 о комбинаторике, написанная К. Кюненом. Вводная глава, принадлежащая Дж. Шенфилду, посвященная аксиоматике системы Цермело — Френкеля, доступна широкому кругу читателей. Наиболее трудна для чтения написанная К. Девлином глава 5 об аксиоме конструктивности, излагающая громоздкие конструкции и насыщенная большим количеством формул. В книгу включены также топологические приложения аппарата аксиоматической теории множеств. В главах 6 и 7, принадлежащих М. Рудин и И. Юхасу, рассматриваются топологические следствия аксиомы Мартина и различных комбинаторных принципов, вытекающих из аксиомы конструктивности Гёделя.

Было решено перенести в русский перевод второй части справочника из его третьей части — Теории рекурсии — главу о дескриптивной теории множеств, написанную Д. Мартином (глава 8 данной книги). Дело в том, что материал этой главы как по своим истокам, так и применяемым в доказательствах методам тесно связан с аксиоматической теорией множеств. К сожалению, Мартин не включил в свою главу интересный материал, связывающий дескриптивную теорию с основными идеями аксиоматической теории (с конструктивными по Гёделю множествами и методом вынуждения). Этот пробел воспол-

няется в добавлении переводчика к главе 8, в котором рассматриваются также некоторые классические дескриптивные проблемы, не нашедшие места в самой главе, и обсуждается их состояние на сегодняшний день. Кроме того, дескриптивная теория множеств представляет такую область теории множеств, в которой применяется весь арсенал средств аксиоматической теории множеств. Поэтому обращение к этому материалу позволяет показать «в работе» методы аксиоматической теории, изложенные в разных главах книги. Более подробно о выборе темы для дополнения рассказано в предисловии переводчика к добавлению.

Следует отметить, что по охвату материала настоящая книга на самом деле не может служить справочником по теории множеств. Это сборник статей, рассчитанный на широкий круг читателей-математиков. Цель ее — дать представление об аксиоматической теории множеств, основанной на аксиоматике Цермело — Френкеля.

Аксиоматическая система Цермело — Френкеля хорошо отражает свойства интуитивного мира множеств, описанного в главе 1. Она служит основой для других более сильных систем, также не вступающих в явное противоречие с интуитивным универсумом главы 1. На ее основе осуществляется естественная формализация понятий и доказательств реальной классической математики, благодаря чему результаты о невыводимости в системе Цермело — Френкеля имеют особую значимость.

Вопросы, не освещенные подробно в главах данной книги, можно найти в достаточно представительной библиографии к этим главам.

При переводе были исправлены незначительные неточности и опечатки без специальных оговорок. Немногочисленные ссылки на материал других частей справочника оформлены следующим образом. Если в английском издании имеется ссылка на главу 3 части III (например), то в настоящем переводе написано: см. гл. 3 «Теории рекурсии».

В. Н. Гришин

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие теории множеств, последовавшее за фундаментальными открытиями Гёделя и Коэна, привело к многочисленным результатам о непротиворечивости в различных областях математики. Основной целью настоящей книги является изложение ряда основных методов и результатов теории множеств в доступном виде.

Вводная глава написана Дж. Шенфилдом. В ней на основании анализа интуитивного теоретико-множественного универсума вводятся и рассматриваются аксиомы системы Цермело — Френкеля ZF. Мы настоятельно рекомендуем прочесть эту главу каждому, кто не очень искушен в аксиоматической теории ZF, а также каждому, кто считает, что аксиомы придуманы только лишь для того, чтобы избежать парадоксов.

Следующая глава, написанная Т. Йехом, раскрывает особую роль аксиомы выбора AC. Автор анализирует характерные примеры использования аксиомы выбора в математике и показывает, как выглядела бы математика без аксиомы выбора. В этой главе также содержится обзор результатов о непротиворечивости (совместимости) и невыводимости, относящиеся к AC.

Предложение φ языка ZF называется *совместимым* с ZF, если мы не можем вывести его отрицание $\neg\varphi$ из аксиом ZF. Иными словами, φ совместимо с ZF, если теория $\mathrm{ZF}+\varphi$ непротиворечива. Предложение φ называется *невыводимым* в ZF, если φ не является теоремой ZF, т. е. если $\neg\varphi$ совместимо с ZF. Имеются два способа доказательства совместимости математических предложений с аксиомами теории множеств — легкий способ и трудный способ.

Легкий способ доказательства совместимости некоторого предложения φ с ZF состоит в подыскании другого предложения ψ, совместимость которого с ZF уже известна, и в доказательстве средствами ZF того, что из ψ следует φ. Известно несколько хороших кандидатов на роль предложения ψ. Математик, знакомый с ними, может вообще не знать логики, получая результаты о непротиворечивости. Можно упомянуть, в частности, аксиому Мартина MA, континуум-гипотезу CH и бо-

лее сильный принцип Йенсена $\diamondsuit$. Аксиома Мартина и ее приложения рассматриваются в шестой главе, написанной М. Рудин. Приложения CH и $\diamondsuit$ рассматриваются в третьей и седьмой главах, написанных соответственно К. Кюненом и И. Юхасом.

Трудный способ состоит в построении моделей. Именно, если мы хотим доказать, что некоторое предложение φ совместимо с ZF, то мы строим модель $\mathfrak{M}$, в которой истинны все аксиомы (а следовательно, и теоремы) теории ZF, а также истинно рассматриваемое предложение φ.

Первой такой моделью был построенный Гёделем универсум L всех конструктивных множеств. Он является очень естественной моделью — именно, наименьшей моделью теории ZF, содержащей все ординалы. Гёдель доказал, что в модели L истинны аксиома выбора AC и континуум-гипотеза CH. Следовательно, AC и CH совместимы с аксиомами теории множеств. Многие красивые и более глубокие свойства этой модели такие, как принцип $\diamondsuit$, были открыты Йенсеном. Эти результаты Гёделя и Йенсена представлены К. Девлином в главе 5.

Второй чрезвычайно плодотворный метод построения моделей — это метод вынуждения Коэна. Сам Коэн использовал свой метод для установления невыводимости AC и CH в ZF. Впоследствии этот метод был усовершенствован и упрощен Соловеем и другими математиками и в настоящий момент является мощным и не таким уж сложным методом получения результатов о непротиворечивости. Берджес в главе 4 излагает метод вынуждения в доступном для математиков-нелогиков виде, позволяющем им получать собственные результаты о непротиворечивости. Предварительный материал этой главы (об абсолютности) используется в пятой главе.

Написанная К. Кюненом третья глава посвящена комбинаторике и не предполагает никакого знакомства читателя с логикой. В ней рассматриваются инфинитарные комбинаторные принципы теории множеств (некоторые из этих принципов возникли из работ по логике), нашедшие широкое распространение. В частности, показано, что AC, CH и $\diamondsuit$ можно рассматривать как возрастающие по силе принципы «перечисления», и указаны примеры их использования в математике. Обсуждается также теорема Рамсея и ее обобщения на несчетные кардиналы. Заканчивается глава введением в теорию больших кардиналов, появляющихся при анализе указанных обобщений теоремы Рамсея. В добавлении к этой главе рассмотрены большие кардиналы другой природы.

К. Кюнен

Глава 1

АКСИОМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Джозеф Р. Шенфилд

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение 9
§ 2. Множества и образование множеств 9
§ 3. Аксиомы 12
§ 4. Развитие теории множеств 16
§ 5. Ординалы 19
§ 6. Аксиома выбора 24
§ 7. Классы 27
§ 8. Новые аксиомы 30

§ 1. Введение

В принципе аксиоматическая система строится следующим образом. Сначала мы выбираем основные понятия и как можно полнее разъясняем их природу. Затем пишем аксиомы для этих понятий. При этом наши разъяснения должны сделать очевидной истинность написанных аксиом.

Попытаемся представить аксиомы теории множеств именно таким образом. Начнем с объяснения понятия множества. Наше объяснение может показаться слишком сложным математику, считающему, что он понимает множества достаточно хорошо. Мы увидим, однако, что это объяснение довольно полезно, и не только для проверки аксиом теории множеств, но и для введения новых аксиом, а также для доказательства теорем о множествах.

Представленные здесь идеи развивались постепенно на протяжении последнего столетия. Но они редко появлялись в печати в последовательном изложении, хотя и хорошо известны для большинства специалистов по теории множеств. Этим объясняется отсутствие библиографии.

§ 2. Множества и образование множеств

Как объяснить понятие множества? В первом приближении множество есть совокупность объектов. Множество образуется путем отбора определенных объектов, называемых его элементами; множество полностью определено своими элементами.

Элементы множеств могут быть объектами любой природы. В частности, мы хотим рассматривать любое множество как объект и поэтому разрешим ему быть элементом другого множества. Объекты, не являющиеся множествами, но используемые в качестве элементов множеств, называются *праэлементами.*

Даже без помощи праэлементов мы можем построить достаточно много множеств. Можно образовать пустое множество $\varnothing$; множество $\{\varnothing\}$, состоящее из единственного элемента $\varnothing$; множество, элементами которого являются только $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$, и т. д. Ограничимся только такими множествами и будем использовать буквы x, y, z для их обозначения. Мы объясним позже, почему это ограничение ничего не упускает.

Итак, мы приходим к тому, что любое множество x образовано отбором тех множеств, которые являются элементами x. Существуют ли какие-нибудь ограничения на такой способ образования множеств? Как показывают парадоксы теории множеств, ограничения действительно существуют.

Напомним парадокс Рассела. Пусть r есть множество, элементами которого являются все такие множества x, что x не есть элемент x. Тогда для любого множества x будет

$$x \in r \leftrightarrow x \notin x. \tag{1}$$

Подставив r вместо x, получим противоречие.

Объяснение в сущности не сложно. Когда мы строим какое-то множество z, выбирая его элементы, мы еще не имеем z как объект и поэтому не можем использовать его в качестве элемента множества z. По той же причине некоторые другие множества также не могут быть элементами z. Например, предположим, что $z \in y$. Тогда мы не можем образовать множество y, пока не построено z. Следовательно, при построении z у нас нет в распоряжении множества y, и поэтому y не может быть элементом z. Иными словами, элементами множества z могут быть лишь те множества, которые построены раньше[1]) z. Таким образом, для построенного выше множества r условие (1) выполняется только для множеств, построенных раньше r; поэтому нельзя подставлять r вместо x.

Продолжая этот анализ, приходим к следующей схеме. Множества строятся последовательно по шагам. Для каждого шага S имеются шаги, предшествующие шагу S, т. е. осуществляющиеся раньше шага S. Каждая совокупность, которую мы строим на шаге S из множеств, построенных на шагах раньше

[1]) Слово «раньше» понимается здесь скорее в логическом, чем во временно́м смысле, аналогично тому, что мы имеем в виду, когда говорим, что одна теорема должна быть доказана раньше другой.

S, является множеством[1]). Нет других множеств, кроме построенных на одном из шагов.

Эта схема достаточно ясно поясняет понятие множества в терминах понятий *шаг* и *раньше*. Что можно сказать об этих понятиях? Несомненно, отношение *раньше* должно частично упорядочивать шаги; и это является единственным свойством указанного отношения, необходимым для наших аксиом.

Шаги важны для нас потому, что они дают возможность строить множества. Предположим, что x есть совокупность множеств, а $\boldsymbol{S}$ есть такая совокупность шагов, что каждый элемент множества x строится на каком-нибудь шаге из $\boldsymbol{S}$. Если существует шаг после всех шагов из $\boldsymbol{S}$, то на этом шаге можно построить множество x. Поэтому возникает следующий фундаментальный вопрос: если дана совокупность $\boldsymbol{S}$ шагов, то существует ли шаг, следующий за каждым шагом из $\boldsymbol{S}$?

Мы хотели бы иметь положительный ответ на этот вопрос всегда, когда это возможно. Теоретико-множественные парадоксы не разрешают каждой совокупности множеств быть множеством, но мы избежали парадоксов, ограничившись множествами, которые строятся на каком-то шаге. И мы хотим иметь достаточно много шагов, чтобы не слишком ограничивать понятие множества.

Тем не менее ответ на наш вопрос не всегда может быть положительным. Например, если $\boldsymbol{S}$ есть совокупность всех шагов, то, разумеется, нет ни одного шага после всех шагов из $\boldsymbol{S}$.

Возможный ответ на наш фундаментальный вопрос таков: если можно представить себе ситуацию, когда все шаги из $\boldsymbol{S}$ осуществлены, то существует шаг после всех шагов из $\boldsymbol{S}$. В случае, когда $\boldsymbol{S}$ содержит все шаги, мы не можем представить себе такую ситуацию, поскольку всегда имеем в виду следующий шаг. Но это в лучшем случае довольно неопределенный ответ, так как, вообще говоря, не всегда ясно, что мы можем, а что не можем себе представить. Тем не менее этот ответ дает полезный ключ для получения более ясных принципов, на которых основаны наши аксиомы.

В частности, существуют три случая, в которых наш неопределенный ответ приводит к выводу, что существует шаг после всех шагов из $\boldsymbol{S}$. Первым является случай, когда $\boldsymbol{S}$ состоит из единственного шага. Вторым — когда $\boldsymbol{S}$ состоит из бесконечной последовательности S_0, S_1, ... шагов. И третьим — тот случай, когда мы имеем множество x и шаг S_y для каждого y из x, и $\boldsymbol{S}$ состоит из всех таких шагов S_y.

[1]) Заметим, что множество, построенное на шаге S, может быть построено и на любом последующем шаге. Можно было бы организовать схему так, что каждое множество строилось бы только на одном шаге. Однако нет оснований стремиться к этому.

В первых двух случаях мы отчетливо можем представить себе ситуацию, когда все шаги из $\boldsymbol{S}$ уже осуществлены. В третьем случае можно рассуждать следующим образом. Если какое-то y из x построено, то мы считаем шаг S_y осуществленным. Когда мы дойдем до шага, на котором строится множество x, каждое y из x уже будет построено, и, следовательно, каждый шаг S_y из $\boldsymbol{S}$ будет осуществлен.

Мы уже продвинулись в наших рассуждениях достаточно далеко для получения обычных аксиом теории множеств. Все же остается еще немало темных пятен, дальнейший анализ которых мог бы привести к лучшему пониманию аксиом или к новым аксиомам. По мере дальнейшего продвижения мы будем обращать внимание на некоторые из них.

Конечно, не исключено, что возможен совсем иной анализ понятия множества, и это могло бы привести к совершенно другой системе аксиом. Однако в настоящее время нет анализа понятия множества, существенно отличающегося от предложенного здесь и приводящего к удовлетворительной системе аксиом.

§ 3. Аксиомы

Перед тем, как обратиться к аксиомам, нужно описать язык теории множеств. Этот язык содержит *переменные для множеств* x, y, z, ..., которые обозначают произвольные множества. Он также содержит символ $\in$ для отношения принадлежности.

Остальные обозначения являются логическими. Мы имеем символ $=$ для *тождественно с*. Мы имеем пропозициональные связки: $\neg$ для *не*, $\vee$ для *или*, $\wedge$ для *и*, $\rightarrow$ для *влечет*, $\leftrightarrow$ для *если и только если*. Имеются кванторы: $\forall$ для *для всех*, $\exists$ для *для некоторого*, и $\exists!$ для *существует и единственно*. Переменные, следующие за квантором, могут быть ограничены некоторым множеством; например, $\forall x{\in}y$ означает *для всех x из y*.

Конечно, одни логические обозначения могут быть выражены через другие, но мы интересуемся теорией множеств, а не логикой. По этой причине мы не будем формулировать аксиомы логики первого порядка и даже не будем давать точное определение формулы логики первого порядка. Все это подробно обсуждается в вводной главе 1 «Теории моделей», написанной Барвайсом.

Напомним, как вводятся операции в логических системах. Унарная операция F вводится путем определения $F(x)$ как единственного y такого, что $\varphi(x, y)$ (где $\varphi(x, y)$ есть произвольная формула нашего языка, не содержащая F). Точнее, мы сперва доказываем $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$, а затем вводим F аксиомой $\varphi(x, F(x))$.

При этом формула $\psi(F(x))$ рассматривается как сокращение для $\exists y(\varphi(x, y) \wedge \psi(y))$. Бинарные и n-арные операции рассматриваются аналогично.

Замечание. Операции могут зависеть от параметров. Можно определить, например, $F(x) = x \cup y$, так что F зависит от y.

Теперь обратимся к аксиомам. В самом начале нашего анализа было установлено, что любое множество полностью определяется своими элементами. Это и является содержанием нашей первой аксиомы.

Аксиома объемности. $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$.

Одним из наиболее важных моментов нашего анализа является утверждение, что определенные совокупности множеств будут множествами. Переводя это в наш язык, мы встречаемся с трудностью: нет возможности говорить о совокупностях в этом языке, если уже не установлено, что они являются множествами. Существуют однако совокупности, о которых мы можем говорить. Именно, если дана формула $\varphi(x)$, то можно выражать определенные суждения о совокупности всех таких множеств x, что $\varphi(x)$. В частности, мы можем следующим образом сказать, что указанная совокупность есть множество: $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$. Сокращением этого выражения является $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$.

Нашим первым принципом существования множеств будет следующий: если каждый элемент некоторой совокупности множеств принадлежит определенному множеству y, то эта совокупность есть множество. Чтобы понять это, предположим, что y строится на шаге S. Тогда каждый элемент множества y уже построен раньше S, и, следовательно, таковым является каждый элемент рассматриваемой совокупности. Таким образом, сама совокупность может быть построена на шаге S как множество. Мы выражаем этот принцип следующей аксиомой:

Аксиома выделения. $\forall x(\varphi(x) \rightarrow x \in y) \rightarrow \mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$.

Заметим, что аксиома выделения является не одной аксиомой, а бесконечным семейством аксиом, содержащим по одной аксиоме для каждой формулы $\varphi(x)$. Название аксиомы объясняется тем, что мы выделяем такие x, которые удовлетворяют $\varphi(x)$, из всех элементов множества y.

Наш следующий принцип утверждает: объединение всех элементов любого множества x есть множество. Предположим, что x строится на шаге S. Тогда каждый элемент множества x построен раньше S, и тем самым каждый элемент элемента множества x также построен раньше S. Это означает, что каждый элемент рассматриваемого объединения уже построен раньше S, и поэтому объединение может быть построено на шаге S. Этот принцип сформулирован в следующей аксиоме:

Аксиома объединения. $\mathrm{Set}\{z\colon \exists y \in x (z \in y)\}$.

Следующий принцип таков: совокупность всех подмножеств произвольного множества x является множеством. Предположим, что x строится на шаге S. Поскольку каждый элемент множества x построен раньше S, то каждое подмножество множества x строится на шаге S. Таким образом, множество всех подмножеств множества x может быть построено на любом шаге после S.

Чтобы сформулировать этот принцип в виде аксиомы, определяем

$$x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y).$$

Аксиома степени. $\mathrm{Set}\{y\colon y \subseteq x\}$.

Нашим следующим принципом будет: если F есть унарная операция, а x является множеством, то совокупность всех таких $F(y)$, что $y \in x$, является множеством. Чтобы проверить это, допустим, что S_y есть шаг, на котором строится множество $F(y)$. Тогда существует шаг после всех шагов S_y. На этом шаге можно построить искомое множество всех таких $F(y)$, что $y \in x$.

Аксиома подстановки. $\mathrm{Set}\{z\colon \exists y \in x (z = F(y))\}$[1]).

Наша следующая аксиома гарантирует существование бесконечного множества. Это не совсем просто, поскольку в нашем языке нет прямого способа выражения бесконечности множества.

Аксиома бесконечности. $\exists x ((\exists y \in x \forall z (z \notin y))$

$$\wedge \forall y \in x \exists z \in x \forall w (w \in z \leftrightarrow w \in y \vee w = y))$$[2]).

Покажем, почему аксиома бесконечности истинна. Пусть x_0 — пустое множество, и для каждого n пусть x_{n+1} есть множество, элементами которого являются только элементы множества x_n, а также само x_n. Мы можем построить x_0 на любом шаге, и если x_n построено на некотором шаге, то x_{n+1} можно построить на следующем шаге. Предположим, что x_n строится на шаге S_n. Тогда существует шаг после всех шагов S_n. На этом шаге мы можем построить множество x, элементами которого будут x_0, x_1, ... Это x и будет множеством, существование которого утверждается аксиомой бесконечности.

Элемент y множества x называется *минимальным элементом* x, если y и x не имеют общих элементов. Наша следующая

[1]) Здесь снова речь идет о бесконечном семействе (иногда пишут — схеме) аксиом, поскольку аксиому подстановки можно записать в виде $\forall y \exists! z\, \varphi(y, z) \rightarrow \mathrm{Set}\{z\colon \exists y \in x \varphi(y, z)\}$, где $\varphi(y, z)$ — произвольная формула. — *Прим. перев.*

[2]) Таким образом, аксиома бесконечности утверждает существование непустого множества x, одним из элементов которого является пустое множество и которое содержит вместе с каждым своим элементом $y \in x$ множество $z = \{w\colon w \in y \vee w = y\}$. — *Прим. ред.*

аксиома утверждает, что каждое непустое множество имеет минимальный элемент.

Аксиома регулярности[1]). $\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y \in x \forall z \in y (z \notin x)$.

Покажем, почему истинна аксиома регулярности. Скажем, что шаг S *минимален* для x, если некоторый элемент множества x строится на шаге S, но никакой элемент x не строится раньше S. Если шаг S минимален для x и y есть элемент множества x, строящийся на шаге S, то y является минимальным элементом x, поскольку каждый элемент этого множества y строится раньше S и поэтому не может быть элементом x.

Таким образом, достаточно показать, что для каждого непустого множества x существует шаг, минимальный для S. Это часто признается очевидным свойством шагов. Мы приведем однако принадлежащее Д. Скотту доказательство того, что это свойство следует из фактов, которые мы уже знаем о шагах.

Множество x называется *фундированным*, если каждое множество, содержащее x, имеет минимальный элемент. (Конечно, если аксиома регулярности истинна, то каждое множество является фундированным.)

Если каждый элемент множества x является фундированным, то таково же и само x. Действительно, пусть $x \neq y$. Если x и y не пересекаются, то x есть искомый минимальный элемент множества y.

В противном случае y содержит некоторый элемент множества x, который является фундированным по предположению. Следовательно, множество y снова содержит минимальный элемент.

Для каждого шага S пусть G_S есть множество всех фундированных множеств, построенных перед S. Это G_S на самом деле будет множеством, поскольку оно может быть построено на шаге S, и G_S является фундированным, как показано выше. Если шаг T находится раньше S, то множество G_T фундировано и строится на шаге T раньше S; поэтому $G_T \in G_S$.

Пусть теперь множество x непусто и строится на шаге S. Пусть y есть множество всех таких G_T, что шаг T находится раньше S и некоторый элемент множества x строится на шаге T. Это y будет множеством, так как каждое G_T построено перед S. Оно непусто (поскольку x непусто) и все его элементы фундированы. Следовательно, y имеет минимальный элемент G_T. Мы утверждаем, что T является минимальным шагом для x. В самом деле, иначе найдется шаг U раньше T, на котором построен какой-то элемент множества x. Как показано выше, $G_U \in G_T$, а поскольку U находится перед S, то $G_U \in y$. Это противоречит выбору G_T. Доказательство закончено.

[1]) Называемая также аксиомой фундирования. — *Прим. ред.*

Ниже будет добавлена еще одна аксиома — аксиома выбора. Аксиоматическая система, состоящая из всех этих аксиом, обозначается через ZFC. Она обычно рассматривается как стандартная система аксиом для теории множеств.

§ 4. Развитие теории множеств

Мы собираемся лишь показать, как различные аксиомы участвуют в построении теории множеств, но не проводить это построение в деталях. Будет использоваться обозначение $\{x\colon \varphi(x)\}$ для множества таких x, что $\varphi(x)$. Более строго, $\{x\colon \varphi(x)\}$ вводится аксиомой

$$\forall x\,(x \in \{x\colon \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Однако перед введением этой аксиомы нужно доказать следующую формулу:

$$\exists! y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Если такое y существует, то оно единственно по аксиоме объемности, и утверждение о существовании такого y и есть $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$. Значит, мы можем использовать $\{x\colon \varphi(x)\}$ только в предположении, что уже доказано $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$.

Будем писать $\{F(x)\colon \varphi(x)\}$ вместо $\{y\colon \exists x\,(\varphi(x) \wedge y = F(x))\}$. Таким образом, аксиому подстановки можно записать в виде $\mathrm{Set}\{F(x)\colon x \in y\}$.

Прежде всего введем обычные теоретико-множественные операции. Главной ролью аксиом при этом будет доказательство существования тех или иных множеств. Покажем, как это делается.

Сначала определим пустое множество

$$\varnothing = \{x\colon x \neq x\}.$$

Чтобы доказать его существование, возьмем какое-нибудь множество y. (Аксиома бесконечности гарантирует существование хотя бы одного множества. Из обычных аксиом логики также можно получить существование хотя бы одного множества.) Тогда $\forall x\,(x \neq x \rightarrow x \in y)$, и, следовательно, $\mathrm{Set}\{x\colon x \neq x\}$ по аксиоме выделения.

Теперь мы определим множество

$$\bigcup z = \{x\colon \exists y \in z\,(x \in y)\},$$
$$\mathscr{P}(y) = \{x\colon x \subseteq y\}.$$

Эти множества существуют по аксиомам объединения и степени. Множество $\bigcup z$ называется *объединением* z, а множество $\mathscr{P}(y)$ называется *степенью* y.

Далее, определяем множество, состоящее из x и y:

$$\{x, y\} = \{z\colon z = x \vee z = y\}.$$

Доказательство существования этого множества требует небольших усилий. Введем операцию F условиями $F(\varnothing) = x$ и $F(w) = y$ при $w \neq \varnothing$. Каково бы ни было множество v, совокупность $\{F(w)\colon w \in v\}$ будет множеством по аксиоме подстановки. Следовательно, в силу аксиомы выделения достаточно построить v так, чтобы x и y принадлежали $\{F(w)\colon w \in v\}$. Это означает, что v должно содержать как $\varnothing$, так и множество, отличное от $\varnothing$. Легко видеть, что такому свойству удовлетворяет множество $v = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$.

Теперь можно определить булевы операции:

$$x \cup y = \bigcup\{x, y\},$$
$$x \cap y = \{z\colon z \in x \wedge z \in y\},$$
$$x - y = \{z\colon z \in x \wedge z \notin y\}.$$

Последние два множества существуют по аксиоме выделения.

Далее, можно определить множество, элементами которого являются множества $x_1, \ldots, x_n$ (и только они), индукцией по n:

$$\{x_1\} = \{x_1, x_1\},$$
$$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}.$$

После этого без труда определяются и другие операции над множествами.

Теория множеств имеет дело не только с множествами, но также и с отношениями и функциями, которые являются множествами упорядоченных пар [1]). Обычно упорядоченную пару не рассматривают как множество, однако мы можем отождествить ее с множеством, если это множество обладает всеми желаемыми свойствами упорядоченной пары. К этим свойствам относится лишь способность полностью определяться своими первым и вторым членами. Иными словами, единственным существенным свойством упорядоченной пары является

$$\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \rightarrow x = z \wedge y = w. \qquad (2)$$

Известно несколько определений $\langle x, y\rangle$, обеспечивающих выполнение записанной формулы; простейшим является

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Мы оставляем читателю проверку (2).

[1]) Мы отождествляем функцию f с множеством упорядоченных пар $\langle x, f(x)\rangle$, а не с множеством упорядоченных пар $\langle f(x), x\rangle$.

Теперь можно определить декартово произведение:

$$x \times y = \{\langle z, w\rangle\colon z \in x \wedge w \in y\}.$$

Чтобы показать его существование (как множества), заметим, что

$$z \in x \wedge w \in y \to \langle z, w\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(x \cup y)),$$

а затем используем аксиому выделения.

Можно обобщить аксиому подстановки на случай двух (или большего числа) аргументов:

$$\mathrm{Set}\{F(z, w)\colon z \in x \wedge w \in y\}. \tag{3}$$

В самом деле, введем новую операцию G условием $G(\langle z, w\rangle) = F(z, w)$ и $G(v) = \varnothing$ в случае, когда v не является упорядоченной парой. (В силу (2) это определение корректно.) Тогда

$$\{F(z, w)\colon z \in x \wedge w \in y\} = \{G(v)\colon v \in x \times y\},$$

и поэтому (3) следует из аксиомы подстановки.

Теперь мы собираемся показать, что в нашей теории можно работать с обычными математическими объектами. Такие объекты строятся из чисел с помощью теоретико-множественных операций. Однако хорошо известно, что все числа (действительные, комплексные, рациональные) могут быть построены из натуральных чисел с помощью теоретико-множественных операций. Мы покажем, как определяются натуральные числа в ZFC.

Очевидно, что каждое натуральное число n должно быть отождествлено с каким-нибудь множеством; какое же множество целесообразнее выбрать? Естественным является выбор n-элементного множества, а из таких множеств напрашивается выбор множества всех натуральных чисел, меньших чем n. Таким образом, 0 отождествляется с пустым множеством $\varnothing$, 1 отождествляется с $\{0\}$, 2 с $\{0, 1\}$ и т. д. При этом операция перехода к следующему натуральному числу должна быть определена так:

$$\mathrm{Sc}(x) = x \cup \{x\}.$$

Будем говорить, что множество является *индуктивным*, если оно содержит 0 и замкнуто относительно операции Sc.

Натуральным числом назовем каждое множество, принадлежащее любому индуктивному множеству.

Нужно доказать аксиомы Пеано для так определенных натуральных чисел. Единственной аксиомой, проверка которой нетривиальна, является

$$\mathrm{Sc}(x) = \mathrm{Sc}(y) \to x = y. \tag{4}$$

Пусть $\mathrm{Sc}(x) = \mathrm{Sc}(y)$. По аксиоме регулярности множество $\{x, y\}$ содержит минимальный элемент, а в силу симметричности можно считать, что этим элементом является y. Тогда $x \notin y$. Но $x \in \mathrm{Sc}(x) = \mathrm{Sc}(y) = y \cup \{y\}$, и поэтому либо $x \in y$, либо $x = y$. Следовательно, $x = y$. (В случае, когда x и y являются натуральными числами, мы можем доказать (4) без использования аксиомы регулярности. Однако (4) иногда используется для произвольных множеств x и y.)

Аксиома бесконечности утверждает, что индуктивные множества существуют. Отсюда и из аксиомы выделения следует существование множества всех натуральных чисел.

Теперь видно, почему праэлементы не являются необходимыми: все объекты, которые мы хотели бы изучать, являются множествами или по крайней мере могут быть отождествлены с множествами. На самом деле лишь небольшое дополнительное усилие требуется для переформулировки нашей аксиоматической системы с тем, чтобы она допускала праэлементы, и это иногда бывает полезным.

Довольно удивительным является то, что мы можем определить все обычные математические объекты и доказать их свойства в ZFC. Несомненно, это показывает, что ZFC является очень сильной аксиоматической системой. Тем не менее мы не склонны преувеличивать это. Было бы ошибочным и бесполезным отождествить математику с ZFC или рассматривать ZFC как основание математики. Такой взгляд привел бы к тому, что объекты, неопределимые в ZFC, не считались бы математическими объектами, а факты, недоказуемые в ZFC, — математическими фактами. Это было бы бесплодным ограничением математики.

§ 5. Ординалы

Хотя понятие шага и фигурировало в нашем описании множеств, но оно не вошло в формулировки аксиом. Чтобы показать, что при этом ничего не потеряно, мы в ZFC определим шаги и докажем, что они имеют соответствующие свойства.

Мы собираемся отождествить шаги с определенными множествами, которые называются ординалами. Грубо говоря, ординалы получаются продолжением последовательности натуральных чисел.

Множество x называем *транзитивным*, если каждый элемент множества x является подмножеством x. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и каждый элемент множества x также транзитивен. Для обозначения ординалов будем использовать греческие буквы.

5.1. Теорема. *Множество* 0 *есть ординал. Если* α *— ординал, то* $\mathrm{Sc}(\alpha)$ *также будет ординалом.*

Доказательство. Доказательство тривиально и оставляется читателю. □

Следствие. *Каждое натуральное число является ординалом.*

5.2. Теорема. *Каждый элемент ординала есть ординал.*

Доказательство. Пусть $x \in \alpha$. Тогда x транзитивно, и поэтому остается проверить, что каждый элемент y множества x является транзитивным множеством. Поскольку α транзитивно, то $x \subseteq \alpha$; следовательно, $y \in \alpha$, и поэтому y транзитивно, что и требовалось. □

Определим теперь для ординалов α и β:

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta,$$
$$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta.$$

Докажем сначала, что $<$ частично упорядочивает ординалы, т. е.

$$\neg(\alpha < \alpha), \tag{5}$$
$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma. \tag{6}$$

По аксиоме регулярности α является минимальным элементом множества $\{\alpha\}$. Это означает, что $\alpha \notin \alpha$, т. е. (5). А (6) есть следствие транзитивности γ. □

5.3. Теорема. *Если* $\forall\alpha((\forall\beta < \alpha\, \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha))$, *то* $\forall\alpha\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что посылка верна, но $\neg\varphi(\alpha_0)$, и получим противоречие. Пусть

$$x = \{\alpha\colon \alpha < \alpha_0 \wedge \neg\varphi(\alpha)\};$$

это множество существует потому, что каждое такое α принадлежит α_0. Более того, $x \neq \varnothing$, так как иначе посылка дала бы $\varphi(\alpha_0)$. Таким образом, x имеет минимальный элемент α. Если $\beta < \alpha$, то $\beta < \alpha_0$ по (6) и $\beta \notin x$ по выбору α. Значит, при $\beta < \alpha$ будет $\varphi(\beta)$. Теперь посылка дает $\varphi(\alpha)$, что противоречит выбору α. □

Теорема 5.3 говорит нам, что если мы хотим доказать $\varphi(\alpha)$ для произвольного ординала α, то можно предполагать, что $\varphi(\beta)$ выполняется при любом $\beta < \alpha$. Такой метод доказательства называется доказательством $\varphi(\alpha)$ *индукцией по* α; предположение о том, что $\varphi(\beta)$ выполняется для всех $\beta < \alpha$, называется *индуктивным предположением.*

Докажем теперь, что $<$ линейно упорядочивает ординалы, т. е.

$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha. \tag{7}$$

Обозначим (7) через $C(\alpha, \beta)$ и докажем $\forall\beta C(\alpha, \beta)$ индукцией по α. Для этого докажем $C(\alpha, \beta)$ индукцией по β (при фиксированном α). Таким образом, мы доказываем $C(\alpha, \beta)$ с помощью двух индуктивных предположений:

$$\forall\gamma < \alpha C(\gamma, \beta), \tag{8}$$
$$\forall\gamma < \beta C(\alpha, \gamma). \tag{9}$$

Ясно, что либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha - \beta \neq \varnothing$, либо $\beta - \alpha \neq \varnothing$. Если $\alpha = \beta$, то $C(\alpha, \beta)$ очевидно. Предположим теперь, что $\alpha - \beta \neq \varnothing$. По теореме 5.2 и определению $<$ найдется такое γ, что $\gamma < \alpha$ и $\neg(\gamma < \beta)$. Согласно (8) будет $C(\gamma, \beta)$, т. е. либо $\gamma < \beta$, либо $\beta \leqslant \gamma$. Так как первое ложно, то выполняется $\beta \leqslant \gamma$. Теперь, поскольку $\gamma < \alpha$, то из (6) следует $\beta < \alpha$, т. е. $C(\alpha, \beta)$. Аналогичное доказательство (с использованием (9) вместо (8)) проходит и в случае $\beta - \alpha \neq \varnothing$.

Итак, (7) доказано. С помощью этого утверждения докажем

$$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta. \tag{10}$$

В самом деле, если $\alpha \leqslant \beta$, то из $\gamma < \alpha$ следует $\gamma < \beta$ по (6), и $\alpha \subseteq \beta$ вытекает из теоремы 5.2. Если же $\neg(\alpha \leqslant \beta)$, то $\beta < \alpha$ согласно (7) и $\neg(\beta < \beta)$ согласно (5). Таким образом, $\beta \in \alpha - \beta$, т. е. $\neg(\alpha \subseteq \beta)$.

Будем говорить, что α есть *наименьший ординал такой, что* $\varphi(\alpha)$, если имеет место $\varphi(\alpha)$, но для любого ординала $\beta < \alpha$ выполняется $\neg\varphi(\beta)$. В силу утверждения (7) существует не более одного такого ординала α.

5.4. Теорема. *Если* $\exists\alpha\varphi(\alpha)$, *то существует наименьший ординал* α *такой, что* $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что таких α нет, и докажем $\neg\varphi(\alpha)$ индукцией по α. Если $\varphi(\beta)$, то из индуктивного предположения следует $\neg(\beta < \alpha)$, т. е. $\alpha \leqslant \beta$. Таким образом, $\neg\varphi(\alpha)$, так как иначе α было бы наименьшим ординалом таким, что $\varphi(\alpha)$. □

Существуют два тривиальных примера наименьших ординалов: 0 есть наименьший ординал, а $\mathrm{Sc}(\alpha)$ есть наименьший ординал β такой, что $\alpha < \beta$.

5.5. Теорема. *Если* x *есть множество ординалов, то* $\bigcup x$ *является наименьшим ординалом* α *таким, что* $\forall\beta \in x(\beta \leqslant \alpha)$.

Доказательство. Объединение множества, состоящего из транзитивных множеств, транзитивно; поэтому $\bigcup x$ транзитивно. Каждый элемент множества $\bigcup x$ принадлежит некоторому ординалу из x и, следовательно, является транзитивным. Таким образом, $\bigcup x$ есть ординал. Теперь теорема следует из (10). □

Следствие. *Если* x *есть множество ординалов, то существует ординал, превосходящий все ординалы из* x.

Доказательство. Нужно взять $\alpha = \mathrm{Sc}(\bigcup x)$. □

Согласно этому следствию существует ординал, не являющийся натуральным числом. Наименьший такой ординал обо-

значается через ω. Поскольку $\omega \neq 0$ и 0 есть наименьший ординал, то

$$0 < \omega. \tag{11}$$

Также имеет место

$$\alpha < \omega \to \mathrm{Sc}(\alpha) < \omega. \tag{12}$$

В самом деле, если $\alpha < \omega$, то $\mathrm{Sc}(\alpha) \leqslant \omega$, так как $\mathrm{Sc}(\alpha)$ есть наименьший ординал, больший, чем α. Но поскольку $\alpha < \omega$, то α — натуральное число. Тем самым $\mathrm{Sc}(\alpha)$ — также натуральное число, и, следовательно, $\mathrm{Sc}(\alpha) \neq \omega$.

Из (11) и (12) следует, что каждое натуральное число принадлежит ω. Но каждый элемент ω является ординалом, меньшим, чем ω, и тем самым является натуральным числом. Таким образом, ω есть множество всех натуральных чисел.

Теперь обратимся к определениям по индукции. Идея состоит в том, что мы хотим определить $F(\alpha)$ через α и $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$. Все эти $F(\beta)$ можно собрать в одно множество $F \restriction \alpha$, определяемое равенством

$$F \restriction \alpha = \{\langle \beta, F(\beta)\rangle \colon \beta < \alpha\}.$$

5.6. Теорема. *Если G есть бинарная операция, то существует такая унарная операция F, что $F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha)$ для всех ординалов α.*

Доказательство. Под α-функцией будем понимать функцию f, определенную на α и удовлетворяющую равенству $f(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta)$ для всех $\beta < \alpha$. Легко видеть, что если f есть α-функция и $\beta < \alpha$, то $f \restriction \beta$ будет β-функцией.

Покажем, что для каждого α существует не более одной α-функции. Действительно, предположим, что f и g являются α-функциями, и докажем

$$\beta < \alpha \to f(\beta) = g(\beta)$$

индукцией по β. Если $\gamma < \beta$, то $f(\gamma) = g(\gamma)$ по индуктивному предположению. Таким образом, $f \restriction \beta = g \restriction \beta$, и поэтому

$$f(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta) = G(\beta, g \restriction \beta) = g(\beta).$$

Если существует α-функция f, то полагаем $F(\alpha) = G(\alpha, f)$; в противном случае полагаем $F(\alpha) = 0$. (Этот второй случай на самом деле не имеет места ни при каком α.)

Докажем для начала, что если α-функция существует, то выполняется $F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha)$. Достаточно показать, что если f есть α-функция, то $F \restriction \alpha = f$. Если $\beta < \alpha$, то $f \restriction \beta$ является β-функцией; поэтому $F(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta) = f(\beta)$, так как f есть α-функция. Таким образом, $F \restriction \alpha = f$, что и требовалось.

Осталось проверить, что для каждого α существует α-функция. Докажем, что $F \restriction \alpha$ будет α-функцией, индукцией по α.

Пусть $f = F \restriction \alpha$. Если $\beta < \alpha$, то из индуктивного предположения и результата предыдущего абзаца следует $F(\beta) = G(\beta, F \restriction \beta)$. Но это равенство эквивалентно равенству $f(\beta) = G(\beta, f \restriction \beta)$, которое и требовалось установить. □

На практике теорема 5.6 обосновывает любое определение, в котором $F(\alpha)$ выражается через α и $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$. Например, пусть x — произвольное множество. Положим $F(\alpha)$ равным $\{x\}$ при $\alpha = 0$, равным $\bigcup(F(\beta))$ при $\alpha = \mathrm{Sc}(\beta)$ и равным $\bigcup\{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}$ в остальных случаях. Нетрудно подобрать G так, что теорема 5.6 дает эту операцию F. Важность рассмотренного примера заключается в том, что $F(\omega)$ есть транзитивное множество, содержащее x как элемент. В самом деле, по (11) и (12) $F(\omega)$ будет объединением всех $F(\alpha)$ для $\alpha < \omega$. В частности, $F(0) \subseteq F(\omega)$, и поэтому $x \in F(\omega)$. Далее, если $y \in F(\omega)$, то $y \in F(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \omega$. Это означает, что $y \subseteq \bigcup(F(\alpha)) = F(\mathrm{Sc}(\alpha)) \subseteq F(\omega)$ по (12). Таким образом, $F(\omega)$ является транзитивным множеством.

5.7. Теорема. *Если $\forall x((\forall y \in x \varphi(y)) \to \varphi(x))$, то $\forall x \varphi(x)$.*

Доказательство. Предположим, что посылка выполняется, но $\neg\varphi(z)$, и получим отсюда противоречие. Как показано выше, существует транзитивное множество w, содержащее z. Полагаем $v = \{x\colon x \in w \wedge \neg\varphi(x)\}$. Поскольку $z \in v$, то v имеет минимальный элемент $x \in v$. Если теперь $y \in x$, то $y \in w$ (так как w транзитивно) и $y \notin v$, т. е. $\varphi(y)$. В этой ситуации посылка теоремы дает $\varphi(x)$, что противоречит выбору $x \in v$. □

Теорема 5.7 говорит нам, что если мы хотим доказать $\varphi(x)$ для произвольного множества x, то можно предполагать, что $\varphi(y)$ выполняется для всех $y \in x$. Такой метод доказательства называется доказательством $\varphi(x)$ с помощью *$\in$-индукции по x*; предположение о том, что $\varphi(y)$ справедливо для всех $y \in x$, называется *индуктивным предположением*.

Теперь мы отождествляем шаги с ординалами, а отношение *раньше* — с порядком $<$ на ординалах. Скажем, что множество x строится на шаге α, если $x \subseteq R(\alpha)$, где операция R определена индукцией по α следующим образом:

$$R(\alpha) = \bigcup\{\mathscr{P}(R(\beta))\colon \beta < \alpha\}\ ^{1}).$$

Таким образом, мы определили понятия § 2 в ZFC. Теперь уже можно доказать соответствующие свойства этих понятий.

По определению R, выполняется

$$y \in R(\alpha) \leftrightarrow \exists \beta < \alpha (y \subseteq R(\beta)); \tag{13}$$

таким образом, y принадлежит $R(\alpha)$, если и только если y строится раньше α. Следовательно, x строится на шаге α, если

[1]) При $\alpha = 0$ это определение дает $R(\alpha) = \varnothing$, так как множество в фигурных скобках оказывается пустым при $\alpha = 0$. — *Прим. перев.*

и только если каждый элемент множества x построен раньше α. Это и есть первое основное свойство процесса построения множеств.

Далее, мы должны доказать, что если каждый элемент некоторой совокупности построен раньше α, то эта совокупность является множеством. Согласно (13) сказанное записывается следующей формулой:

$$\forall x(\varphi(x) \to x \in R(\alpha)) \to \mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}.$$

Но записанная формула есть следствие аксиомы выделения.

Наконец, нужно доказать, что каждое множество строится на каком-нибудь шаге, т. е.

$$\exists \alpha (x \subseteq R(\alpha)). \tag{14}$$

Доказываем это утверждение $\in$-индукцией по x. Пусть $F(y)$ есть наименьший ординал β такой, что $y \subseteq R(\beta)$, или 0, если таких β нет. Используя следствие к теореме 5.5, выбираем ординал α, превосходящий все ординалы из $\{F(y)\colon y \in x\}$. Если $y \in x$ и $\beta = F(y)$, то $y \subseteq R(\beta)$ по индуктивному предположению и в силу $\beta < \alpha$. Из (13) следует, что $y \in R(\alpha)$. Таким образом, $x \subseteq R(\alpha)$, что и требовалось.

Если мы заменим x на $\{x\}$ в утверждении (14), то получим: каждое множество принадлежит какому-нибудь $R(\alpha)$. Этот факт часто используется. Например, можно вводить операцию F на всех множествах путем определения ее на всех множествах из $R(\alpha)$ индукцией по α. Другое применение будет указано в следующем параграфе. Итак, мы видим, что шаги полезны не только при проверке аксиом, но и в доказательстве теорем.

§ 6. Аксиома выбора

Функцией выбора на множестве x называется функция f с областью определения $x - \{\varnothing\}$ такая, что $f(y) \in y$ для всех y из области определения f. *Аксиома выбора* утверждает, что для каждого множества x существует функция выбора на x. (Строго говоря, аксиомой выбора является перевод этого предложения на язык теории множеств.)

Почему аксиома выбора истинна? Мы уже знаем, что $x \times \bigcup x$ есть множество, и, следовательно, оно строится на некотором шаге S. Тогда каждая пара $\langle y, z\rangle$, где $z \in y \wedge y \in x$ построена раньше S. На шаге S мы можем взять одну такую пару $\langle y, z\rangle$ для каждого y из $x - \{\varnothing\}$ и построить множество всех таких $\langle y, z\rangle$. Это множество и будет искомой функцией выбора на x.

В этом рассуждении есть одно слабое место: что́ мы имеем в виду, когда говорим, что можно выбрать *одну* пару $\langle y, z$

для каждого y? Конечно, мы не имеем в виду, что человек фактически в состоянии выбрать эти пары, так как возможен случай бесконечного числа таких пар. Мы также не имеем в виду, что есть какой-то закон для выбора таких пар, поскольку независимо от нашего понимания слова *закон* мы не видим причин, почему такой закон должен быть для каждого множества x. Таким образом, мы имеем в виду лишь существование совокупности множеств, содержащей ровно по одной паре $\langle y, z\rangle$ для каждого y из $x - \{\varnothing\}$. Если совокупность понимать как произвольное разбиение рассматриваемых объектов на принадлежащие и не принадлежащие к этой совокупности, то разумно было бы утверждать, что такая совокупность существует.

Аксиома выбора имеет много приложений в математике; некоторые из них рассматриваются в гл. 2. В теории множеств наиболее интересными являются приложения к теории кардиналов. Сделаем краткое введение в эту теорию.

Будем говорить, что множества x и y *равномощны*, и писать $x \sim y$, если существует взаимно однозначное отображение x на y. Тривиально проверяется, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Мы хотим сопоставить каждому множеству x другое множество $|x|$, называемое *кардиналом* или *мощностью* x, так, чтобы

$$|x| = |y| \leftrightarrow x \sim y. \tag{15}$$

Напрашивается использование классов эквивалентности, т. е. $|x| = \{y\colon y \sim x\}$. Но это не проходит, поскольку $\{y\colon y \sim x\}$ не является множеством при $x \neq \varnothing$. Предыдущий параграф подсказывает такое определение: $|x| = \{y\colon y \in R(\alpha) \wedge y \sim x\}$, где α есть наименьший ординал такой, что $\exists y \in R(\alpha)\ (y \sim x)$. (Такой ординал существует, так как $x \sim x$ и x принадлежит некоторому $R(\alpha)$.) Хотя такое определение достаточно приемлемо, существует еще более удобное определение. Именно, определим $|x|$ как наименьший ординал, равномощный с x. Прежде всего, нужно доказать, что такой ординал существует.

6.1. Теорема. *Если f является функцией выбора на $\mathcal{P}(x)$, то существует взаимно однозначное отображение g некоторого ординала α на множество x, удовлетворяющее равенству $g(\beta) = f(x - \{g(\gamma)\colon \gamma < \beta\})$ для всех $\beta < \alpha$.*

Доказательство. Определяем F индукцией следующим образом:

$$F(\alpha) = f(x - \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}).$$

(Здесь в качестве $f(0)$ можно взять любое множество, например $\varnothing$.) Тогда

$$x - \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\} \neq \varnothing \to F(\alpha) \in x \wedge \forall \beta < \alpha\,(F(\beta) \neq F(\alpha)). \tag{16}$$

Докажем сначала, что $x \subseteq \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}$ для некоторого ординала α. Если это не так, то (16) показывает, что F взаимно

однозначно отображает совокупность всех ординалов в множество x. Тогда обратная к F операция отображает некоторое подмножество множества x на совокупность всех ординалов, ввиду чего эта совокупность является множеством по аксиоме подстановки. Получилось противоречие со следствием к теореме 5.5.

Пусть α — наименьший ординал такой, что $x \subseteq \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}$. Согласно (16) $F \restriction \alpha$ будет отображать α взаимно однозначно на x и, следовательно, $g = F \restriction \alpha$ и есть искомое отображение. □

Итак, мы обосновали возможность определить $|x|$ как наименьший ординал, равномощный множеству x. Как отмечено выше, $|x|$ называется *кардиналом* x. Множество называется *кардиналом*, если оно есть кардинал некоторого множества. Каждый кардинал является ординалом, и ординал α будет кардиналом, если и только если $\alpha = |\alpha|$.

Теперь мы собираемся исследовать отношение $<$ на кардиналах. Во-первых, докажем

$$x \subseteq \delta \to |x| \leqslant \delta. \tag{17}$$

Определим функцию выбора f на $\mathscr{P}(x)$ следующим образом: если $y \in \mathscr{P}(x) - \{\varnothing\}$, то $f(y)$ есть наименьший ординал в множестве y. Пусть g и α таковы, как в теореме 6.1. Легко проверяется, что

$$\beta < \gamma \to g(\beta) < g(\gamma). \tag{18}$$

Теперь докажем

$$\beta < \alpha \to \beta \leqslant g(\beta) \tag{19}$$

индукцией по β. Предположим, что $\beta < \alpha$, но $g(\beta) < \beta$. Из (18) следует $g(g(\beta)) < g(\beta)$. Но так как $g(\beta) < \beta$, то индуктивное предположение дает $g(\beta) \leqslant g(g(\beta))$. Полученное противоречие доказывает (19).

Теперь завершаем доказательство утверждения (17). Предположим, что $\delta < |x|$. Поскольку $|x| \leqslant \alpha$, то $\delta < \alpha$, и, следовательно, $\delta \leqslant g(\delta)$ по (19). Но $g(\delta) \in x$. Значит, $g(\delta) \in \delta$, т. е. $g(\delta) < \delta$. Это дает противоречие, завершающее доказательство (17).

6.2. Теорема. *Пусть α и β — кардиналы. Тогда $\alpha \leqslant \beta$, если и только если найдется множество, имеющее кардинал β, некоторое подмножество которого имеет кардинал α.*

Доказательство. Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$ по (10). Так как $|\alpha| = \alpha$ и $|\beta| = \beta$, то β будет искомым множеством. Пусть теперь $|x| = \alpha$, $|y| = \beta$, $x \subseteq y$. Тогда существует взаимно однозначное отображение y на β; оно отображает x на некоторое множество $z \subseteq \beta$. Таким образом, $\alpha = |x| = |z| \leqslant \beta$ по (17).

Довольно легко можно показать, что каждое натуральное число есть кардинал и ω — также кардинал. Бóльшие кардиналы могут быть получены благодаря следующей теореме:

6.3. Теорема. *Для любого множества x выполняется неравенство $|x| < |\mathscr{P}(x)|$.*

Доказательство. Существует взаимно однозначное отображение x в $\mathscr{P}(x)$. По теореме 6.2 имеем $|x| \leqslant |\mathscr{P}(x)|$. Предположим теперь, что $|x| = |\mathscr{P}(x)|$, и получим противоречие. Согласно (15) существует взаимно однозначное отображение f множества x на $\mathscr{P}(x)$. Пусть $y = \{z\colon z \in x \wedge z \notin f(z)\}$. Тогда $y = f(w)$ для некоторого $w \in x$. Теперь получаем противоречие

$$w \in y \leftrightarrow w \notin f(w) \leftrightarrow w \notin y. \quad \square$$

Это краткое введение в теорию кардиналов дает некоторое представление о ней, но, возможно, не раскрывает ключевой роли аксиомы выбора. Без использования этой аксиомы мы можем определить кардиналы первым из упомянутых выше способов. При этом можно определить, что $\alpha \leqslant \beta$ (для кардиналов α и β), если существует множество, имеющее кардинал β, некоторое подмножество которого имеет кардинал α. При таком определении без помощи аксиомы выбора невозможно доказать, что для произвольных кардиналов α и β выполняется $\alpha \leqslant \beta \vee \beta \leqslant \alpha$.

В заключение этого параграфа покажем, как лемма Цорна следует из аксиомы выбора. Частично упорядоченное множество называется *индуктивно упорядоченным*, если каждое линейно упорядоченное подмножество этого множества имеет верхнюю грань. Лемма Цорна утверждает, что каждое индуктивно упорядоченное множество x имеет максимальный элемент.

Для доказательства возьмем какую-нибудь функцию выбора f на $\mathscr{P}(x)$. Определим индукцией операцию F следующим образом. Пусть x_α есть совокупность всех таких $y \in x$, что $F(\beta) < y$ для любого $\beta < \alpha$. Положим $F(\alpha) = f(x_\alpha)$ при $x_\alpha \neq \varnothing$ и $F(\alpha) = 0$ при $x_\alpha = \varnothing$. Аналогично доказательству теоремы 6.1 можно показать, что $x_\alpha = \varnothing$ для некоторого α. Выберем наименьшее такое α. Тогда по выбору $F(\beta)$ при $\gamma < \beta < \alpha$ будет $F(\gamma) < F(\beta)$. Следовательно, множество $\{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}$ линейно упорядочено. Значит, оно имеет верхнюю грань y; это y и будет искомым максимальным элементом, так как любой больший элемент множества x должен был бы принадлежать множеству x_α.

§ 7. Классы

Мы уже отмечали, что в языке теории множеств можно говорить и о некоторых совокупностях множеств, не являющихся множествами. Остановимся на этом более подробно.

Впредь $\{x\colon \varphi(x)\}$ обозн
x, что имеет место $\varphi(x)$,
ляется множеством. Такие
Точнее, если каждая свобо
личная от x, замещена как
является определимой сов
купность мы называем *клас*

Каждое множество x ес
Но не каждый класс являе
Рассела показывает, что $\{$
следствие к теореме 5.5 по
диналов (очевидно, являю
множеством. Класс, котор
зываем *собственным* классо

Мы хотим, чтобы $\{x\colon \varphi$
т. е. чтобы каждое предло
было сокращением некото
множеств. Но мы не може
того, что символ $\{x\colon \varphi(x)$
рассмотрим способы вхожд

Желательно разрешить
перед, так и после знаков
чается сразу после $\in$, поло

$$y \in \{x$$

Перед тем как продвиг
ределение. *Термом* назыв
либо переменной, либо зап
ния термов используем бук

Если $\{x\colon \varphi(x)\}$ встреча

$$A = B \leftrightarrow$$

Вхождения $x \in A$ и $x \in B$
крываются с помощью пред

Строго говоря, (20) я
по крайней мере один из т
если же оба этих терма яв
будет выражением языка
будет истинно и в этом сл

Наконец, если $\{x\colon \varphi(x)$
ку $\in$, то

$$\{x\colon \varphi(x)\} \in B \leftrightarrow$$

Таким образом, $\{x\colon \varphi(x$
$\{x\colon \varphi(x)\}$ не является мн
одинаки, каждый элемент

об одной технической детали.
термами является теперь опре-
нтием, то свойства этого отно-
не извлекаться из аксиом ло-
о скучно, но несложно; из всех
пользует лишь аксиому объем-

класс всех множеств, опреде-

$x = x\}$.

из способов выражения того
множеством. В частности, наше
$\{x\colon \varphi(x)\}$ можно заменить на

еобходима определенная осто-
пользовать $\{x\colon \varphi(x)\}$, не дока-
окупность есть множество. Од-
утверждать $\psi(\{x\colon \varphi(x)\})$, если
у $\forall y$ означает «для всех *мно*
но доказать, что $\{x\colon \varphi(x)\}$ яв-

ерации и понятия естественным
сы. Так, можно определить

$= A \wedge x \in B\}$.

орая осторожность. Мы можем
нужно иметь в виду, что если
$\{A\}$ будет пустым множеством
авно A).
ами, то естественно разрешить
классами (а не только множе-
в таком подходе теоретико-мно-
ествами) могут рассматривать-
ерация $\bigcup$ становится классом
$x = y \bigcup z$. (Легко видеть, что
.)
ыразить все, что хотим сказать
ни одна формула теории мно-
обо всех классах. Покажем на
можно устранить.
казательство простейшего свой-
вен самому себе. Чтобы пока-
во $A = A$ для любого терма A.
гласно (20), $A = A$ означает

$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in A)$, а последнее утверждение следует из аксиом логики.

Этот простой пример иллюстрирует общую процедуру. Мы доказываем истинность какого-нибудь утверждения для всех классов тем, что докажем $\varphi(A)$ для произвольного терма A. Для этого надо доказать не одну формулу языка теории множеств, а бесконечно много формул, по одной для каждого терма A. Но обычно это несущественно, так как за редкими исключениями доказательство одно и то же для всех A.

Все оказывается несколько более сложным, когда мы хотим утверждать существование класса с определенными свойствами. Проиллюстрируем ситуацию, переформулировав теорему 5.6 с тем, чтобы в ней речь шла о классах, а не об операциях. Пусть $\varphi(A, B)$ есть результат перевода на язык теории множеств следующего выражения: если A есть функция с областью определения $V \times V$, то B есть функция, определенная на классе всех ординалов, удовлетворяющая равенству $B(\alpha) = A(\alpha, B \restriction \alpha)$ для всех α. Тогда теорема, о которой идет речь, интуитивно выражается посредством $\forall A \exists B \varphi(A, B)$. Но эта запись не является формулой языка теории множеств даже в смысле введенных выше правил обращения с термами, поскольку термы, не являющиеся переменными, не могут стоять после кванторов.

Что значит доказать $\forall A \exists B \varphi(A, B)$ в ZFC? Анализ нашего доказательства теоремы 5.6 дает ответ. Это значит, что мы должны показать, как по данному произвольному терму A можно построить другой терм B так, чтобы затем можно было доказать $\varphi(A, B)$ в ZFC.

Эти процедуры делают возможным обращение с любыми предложениями о классах. Имеется и еще один путь, состоящий в расширении языка введением специальных переменных для классов и разрешении таким переменным появляться после кванторов. Этот путь дает более простое и непосредственное решение проблем, обсуждавшихся выше. Однако существует и недостаток: дополнительная символика приносит и дополнительные хлопоты при проведении доказательств непротиворечивости. В целом в настоящее время существует тенденция придерживаться языка теории множеств и использовать методы, изложенные в этом параграфе.

§ 8. Новые аксиомы

Наиболее значительным открытием в теории множеств за последние годы является открытие невозможности решения средствами ZFC многих важных нерешенных проблем теории множеств. Среди них — гипотеза континуума и проблема Суслина. Было бы интересно найти новые аксиомы, которые решали бы эти проблемы. Попробуем познакомить читателя с тем, что сделано в этой области и что еще предстоит сделать.

Как можно искать новые аксиомы? Одна идея вытекает из материала § 4. Там сформулированы два принципа следующего вида: каждая *совокупность* множеств, удовлетворяющая определенным условиям, является множеством. Когда мы переходим к формулировке этих принципов в виде аксиом в языке теории множеств, мы можем сказать только, что каждый *класс*, удовлетворяющий этим условиям, является множеством. Нетривиальность этого момента обнаруживается некоторыми моделями теории множеств, используемыми в доказательствах непротиворечивости. Эти модели всегда имеют множество, принадлежащее рассматриваемой модели, некоторое подмножество которого этой модели не принадлежит.

К несчастью, затруднительно иметь дело с совокупностями, которые не являются классами. Рассмотрим, например, подход, связанный с добавлением новых переменных, обозначающих произвольные совокупности. Нетрудно написать аксиомы, которые говорят, что каждая совокупность, имеющая определенные свойства, является множеством. Однако этими аксиомами нельзя пользоваться, пока нет аксиом, утверждающих существование совокупностей. Очевидными аксиомами такого вида являются аксиомы, утверждающие, что каждый класс есть совокупность. Когда такие аксиомы введены, мы приходим к тому, с чего начали.

Лучшей была бы идея ввести в язык символы для новых операций над множествами так, чтобы было больше совокупностей вида $\{x\colon \varphi(x)\}$. Конечно, такие операции должны в самом деле быть новыми, т. е. они не должны быть определимыми в языке теории множеств. В настоящее время известно очень мало таких операций; к тому же их введение в язык не решает ни одной из открытых проблем теории множеств. Таким образом, мы ничего не достигаем, используя этот подход.

Использование произвольных совокупностей может происходить другим путем. Если $\varphi(x)$ есть формула некоторого разумного языка, то мы можем думать о ней как о формуле, дающей закон для определения, какие множества принадлежат совокупности $\{x\colon \varphi(x)\}$. Как было отмечено при обсуждении аксиомы выбора, нет оснований считать, что каждая совокупность должна иметь такой закон. Если бы мы смогли глубже проанализировать понятие совокупности, построенной не в соответствии с каким-нибудь законом, то мы могли бы получить другие аксиомы, помимо аксиомы выбора, использующие такие совокупности, или по крайней мере найти более приемлемые аргументы для принятия самой аксиомы выбора.

Существует другой, более успешный подход к поиску новых аксиом. Напомним, что в § 2 был сформулирован неопределенный принцип существования шагов, из которого следуют три более определенных принципа. Если бы мы могли получить другие более определенные принципы, то можно было бы надеяться на получение новых аксиом.

Упомянутый неопределенный принцип утверждает существование шагов, находящихся после многих других шагов. Таким образом, в свете отождествления шагов и ординалов в § 5 можно ожидать, что новые аксиомы будут утверждать существование очень больших ординалов. Так как эти ординалы обычно оказываются кардиналами, то новые аксиомы называются *аксиомами больших кардиналов*. Такие аксиомы интенсивно исследуются; мы собираемся только указать направления этих исследований. По этому вопросу см. также § 7 гл. 3 и добавление после указанного параграфа.

Пусть S есть совокупность всех шагов, которые могут быть получены с помощью трех более ясных принципов § 2. Очевидно, что самым слабым следующим принципом такого рода было бы утверждение: существует шаг после всех шагов из S. Чтобы проверить это с помощью нашего неопределенного принципа, мы должны быть в состоянии представить себе такую ситуацию, когда все шаги из S полностью осуществлены, т. е. когда три принципа § 2 не приводят к новым шагам. Без некоторых дополнительных рассуждений неясно, можем ли мы в самом деле представить себе такую ситуацию. (Здесь начинает проявляться слабость нашего неопределенного принципа.) Предположим тем не менее, что наше воображение достаточно развито для выполнения этой задачи, и посмотрим, какая при этом получится новая аксиома.

Наша аксиома должна утверждать, что существует такой большой ординал α, что три принципа § 2, применяемые к ординалам до α и множествам, строящимся раньше α, дают в результате снова ординалы, меньшие чем α. Что касается третьего принципа, то это означает, что если $x \in R(\alpha)$ и f есть функция из x в α, то $\bigcup$ (*область значений* f) $< \alpha$ (см. теорему 5.5). Если мы теперь предположим $\omega < \alpha$, то будет $\omega \in R(\alpha)$. Отсюда следует, что если y является счетным множеством ординалов, меньших чем α, то $\bigcup y < \alpha$. Таким образом, справедливы и первые два принципа § 2, применяемые только к ординалам, меньшим чем α.

Итак, мы пришли к следующему определению: ординал α называется *недостижимым*, если $\omega < \alpha$, и всякий раз, когда f есть отображение некоторого множества, принадлежащего $R(\alpha)$, в α, то $\bigcup$ (*область значений* f) $< \alpha$. Нетрудно проверить, что каждый недостижимый ординал является кардиналом и что данное определение недостижимого кардинала эквивалентно стандартному [1]).

Наша первая аксиома больших кардиналов утверждает, что существует недостижимый кардинал. Необходимо проверить, что это будет в самом деле новая аксиома, т. е. она недоказуема в ZFC. Сделаем набросок такой проверки.

Все, что нам нужно, — это построить модель теории ZFC, в которой эта новая аксиома ложна. Если недостижимых кардиналов нет в классе всех множеств, то этот класс и образует такую модель. В противном случае предположим, что α есть наименьший недостижимый кардинал. Поскольку α и $R(\alpha)$ удовлетворяют трем принципам § 2, то можно ожидать, что $R(\alpha)$ является моделью ZFC. Это и в самом деле так; доказательство очень похоже на наш вывод аксиом ZFC из принципов § 2. То, что новая аксиома (существования недостижимого кардинала) не выполняется в $R(\alpha)$, выводится из отсутствия недостижимых кардиналов в $R(\alpha)$.

Влечет ли новая аксиома какие-нибудь интересные следствия? Известно по крайней мере одно из них. Знаменитая теорема Гёделя утверждает, что непротиворечивость ZFC не может быть доказана в ZFC. Но эта непротиворечивость может быть доказана с помощью нашей новой аксиомы. Ключевой факт уже сформулирован: если ординал α недостижим, то $R(\alpha)$ есть модель теории ZFC. Поскольку мы имеем множество, являющееся моделью ZFC, то нетрудно доказать, что ZFC непротиворечива.

В то же время эта аксиома не дает ничего нового для решения проблем, упомянутых в начале этого параграфа; известные доказательства независимости сохраняют силу при добавлении аксиомы недостижимого кардинала. Это означает, что нужно искать более сильные аксиомы больших кардиналов.

Рассмотрим одну такую аксиому, которая утверждает существование измеримого кардинала. Мы не приводим точного определения измеримого кардинала (см. § 7 гл. 3). Достаточно сказать, что в этом определении нет ничего, указывающего на то, что измеримый кардинал должен быть большим. Тем не менее можно доказать, что измеримые кардиналы являются недостижимыми и, более того, в определенном смысле они превосходят по величине недостижимые кардиналы. Например, если α является измеримым кардиналом, то существует α недостижимых кардиналов, меньших, чем α.

Что мы хотели бы на самом деле сделать (но в настоящий момент не можем), так это переформулировать определение измеримого кардинала следующим образом: α является изме-

[1]) См. гл. 3. — *Прим. перев.*

римым, если и только если α и $R(\alpha)$ замкнуты относительно некоторых операций. Тогда мы смогли бы обосновать существование измеримого кардинала, представив себе ситуацию, в которой эти операции не дают новых ординалов.

Мы видим, таким образом, что имеется меньше причин верить в существование измеримого кардинала, чем в существование недостижимого. С другой стороны, первое предположение решает различные интересные проблемы теории множеств. Упомянем один результат, который, вероятно, интересует математиков. Если существует измеримый кардинал, то каждое множество действительных чисел, являющееся непрерывным образом дополнения непрерывного образа борелевского множества, измеримо в смысле меры Лебега. Удивительно, что существование большого кардинала влечет измеримость определенных множеств действительных чисел.

Упомянем здесь еще одну аксиому (не относящуюся к аксиомам больших кардиналов): аксиому проективной детерминированности. Эта аксиома (о ней пойдет речь в § 10 гл. 2) решает значительно больше проблем, чем аксиома существования измеримого кардинала. С другой стороны, нет оснований верить в истинность этой аксиомы, за исключением того, что она является красивой аксиомой с интересными следствиями.

Итак, мы видим, что чем больше проблем решается новой аксиомой, тем меньше оснований имеется для того, чтобы поверить в ее истинность. Более того, вообще нет ни одной приемлемой аксиомы, которая решала бы самую важную из нерешенных проблем — гипотезу континуума. Поэтому мы находимся очень далеко от цели решить наши проблемы с помощью новых аксиом. Однако нет оснований огорчаться. Если очень простые рассуждения § 2 привели нас так далеко, то есть надежда на то, что более глубокий анализ приведет нас к новым аксиомам с далеко идущими следствиями.

Глава 2

ОБ АКСИОМЕ ВЫБОРА

Томас Дж. Йех

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение 35
§ 2. Нужна ли нам аксиома выбора? 38
§ 3. «Парадоксальное» разбиение шара 41
§ 4. Некоторые применения аксиомы выбора 44
§ 5. Непротиворечивость аксиомы выбора 49
§ 6. Невыводимость аксиомы выбора 51
§ 7. Теоремы о переносе 55
§ 8. Математика без аксиомы выбора 57
§ 9. Определимый выбор 61
§ 10. Аксиома детерминированности — альтернатива к аксиоме выбора 62
Литература 63

§ 1. Введение

Будем предполагать знакомство читателя с аксиомой выбора и с доказательствами некоторых теорем, использующими аксиому выбора.

Формулировка аксиомы выбора очень проста и часто фигурирует в дискуссиях по проблемам оснований математики.

1.1. Аксиома (рис. 1). *Пусть $\mathcal{F} = \{A_i: i \in I\}$ есть совокупность попарно непересекающихся непустых множеств. Тогда найдется множество $C = \{x_i: i \in I\}$, содержащее ровно по одному элементу x_i из каждого множества $A_i \in \mathcal{F}$.*

Почему же эта простая (если не самоочевидная) аксиома привела к столь многочисленным обсуждениям? Ни одна из аксиом после пятого постулата Евклида о параллельных прямых не вызвала такого волнения в математических кругах и не возбудила так много споров по проблемам оснований математики.

Ответ состоит в неконструктивной природе аксиомы выбора. Эта аксиома утверждает существование множества C с определенными свойствами (именно, выбирающего ровно по одному элементу из каждого A_i), но не дает ни малейшего намека, как такое множество построить. Напротив, все остальные ак-

сиомы теории множеств утверждают, что определенные конструкции, отправляясь от множеств, снова дают множества, и построенные определенным образом совокупности множеств также являются множествами. Например, аксиома степени утверждает, что для любого множества X совокупность $\mathcal{P}(X)$ всех его подмножеств является множеством.

Если читатель не считает это различие очень существенным, то я напомню, что вплоть до конца девятнадцатого века существование в математике по традиции считалось синонимом возможности построения. Сделанное Кантором альтернативное доказательство существования трансцендентных чисел и предложенное Гильбертом решение проблемы Гордана встретили скептическую реакцию и даже непризнание ведущих математиков своего времени. (В широких математических кругах упор на построение был даже еще сильнее: профессор Гермес потратил десять лет своей жизни на построение правильного 65 537-угольника, существование которого было доказано Гауссом столетием раньше.)

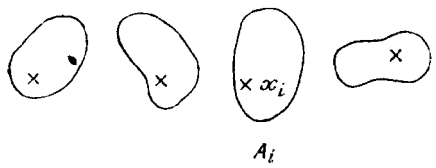

Рис. 1.

Явная формулировка аксиомы выбора обычно приписывается Цермело. Согласно Френкелю, Бар-Хиллелу и Леви [1] (дающим прекрасный обзор не только аксиомы выбора, но и проблем аксиоматических оснований теории множеств вообще) первая ясная ссылка на аксиому выбора сделана Пеано в работе по дифференциальным уравнениям, хотя Кантор еще раньше применял эту аксиому без явного упоминания.

В 1904 г. Цермело доказал, что каждое множество может быть вполне упорядочено (линейный порядок $<$ на множестве S называется *полным порядком*, если каждое непустое подмножество множества S имеет наименьший элемент). Ранее, построив теорию кардинальных чисел, Кантор поставил проблему определения величины континуума (*континуум-гипотезу*) и выдвинул предположение, что множество всех действительных чисел (континуум) может быть вполне упорядочено, или, что то же самое, это множество можно расположить в трансфинитную последовательность. Излишне говорить, что это предположение было встречено в штыки, так как никакого полного упорядочения континуума не было построено.

Для доказательства того, что *каждое* множество может быть вполне упорядочено, Цермело сформулировал аксиому выбора примерно в той же форме, в какой она используется теперь. В современной терминологии эта аксиома формулируется следующим образом.

1.2. Аксиома выбора. *Для каждого семейства $\mathcal{F}$ непустых множеств найдется такая функция f, что $f(X) \in X$ для каждого множества X из семейства $\mathcal{F}$.*

Такая функция называется *функцией выбора* на $\mathcal{F}$. Перед тем, как взглянуть на доказательство Цермело, убедимся, что формулировка 1.2 эквивалентна первой формулировке 1.1. Конечно, 1.1 есть частный случай 1.2, так как если семейство $\mathcal{F}$ состоит из попарно непересекающихся множеств, то 1.1 и 1.2, очевидно, выражают одно и то же. Теперь покажем, что если предположить принцип выбора для семейств непересекающихся множеств, то можно доказать общую формулировку 1.2.

Пусть $\mathcal{F}$ есть семейство непустых множеств: $\mathcal{F} = \{X\colon X \in \mathcal{F}\}$. Чтобы применить 1.1, используем следующий прием, «делающий множества из $\mathcal{F}$ непересекающимися». Для каждого $X \in \mathcal{F}$, пусть A_X есть совокупность всех таких упорядоченных пар $\langle X, a\rangle$, что $a \in X$:

$$A_X = \{X\} \times X.$$

Теперь совокупность $\{A_X\colon X \in \mathcal{F}\}$ состоит из попарно непересекающихся непустых множеств, и с помощью 1.1 мы можем выбрать по одному элементу z_X из каждого множества A_X. Но каждое множество z_X имеет вид $\langle X, a_X\rangle$, где $a_X \in X$. Следовательно, мы можем легко получить искомую функцию выбора на $\mathcal{F}$, определив $f(X) = a_X$ для каждого $X \in \mathcal{F}$.

Снова вернемся к Цермело. Доказательство теоремы о полном упорядочении проходит примерно так. Пусть S — произвольное множество; мы хотим построить полное упорядочение этого множества. Используя аксиому выбора, заключаем, что существует функция выбора f на семействе $\mathcal{F}$ всех непустых подмножеств множества S. С помощью трансфинитной индукции можно построить трансфинитную последовательность $\langle a_\alpha\colon \alpha < \theta\rangle$ элементов множества S следующим образом: если уже построены первые α членов $a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots$ $(\xi < \alpha)$ этой последовательности, то проверяем, существуют ли элементы множества S, не фигурирующие среди этих членов, т. е. является ли непустым множество $X = S - \{a_\xi\colon \xi < \alpha\}$. Если это множество непусто, то выбираем a_α с помощью нашей функции выбора f: $a_\alpha = f(X)$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока для некоторого ординала θ множество $S - \{a_\xi\colon \xi < \theta\}$ не станет пустым; иными словами, пока не будет $S = \{a_\xi\colon \xi < \theta\}$. Такое перечисление множества S ординалами и дает полное упорядочение S.

Теперь видно, что хотя мы и доказали предположение Кантора о возможности полного упорядочения континуума, мы,

однако, не построили никакого «осязаемого» полного упорядочения. В сущности, одно сомнительное предположение мы лишь заменили другим столь же сомнительным предположением, именно аксиомой выбора.

Фактически аксиома выбора и теорема Цермело о полном упорядочении являются логически эквивалентными. Покажем, как аксиома выбора выводится из предположения о том, что каждое множество можно вполне упорядочить. Возьмем произвольное семейство $\mathscr{F}$ непустых множеств и через S обозначим объединение всех множеств этого семейства: $S=\bigcup\{X\colon X\in\mathscr{F}\}$. С помощью какого-нибудь полного упорядочения $<$ множества S мы можем определить функцию выбора f на семействе F следующим образом: если $X\in\mathscr{F}$, то $f(X)$ есть наименьший элемент множества X в смысле порядка $<$.

§ 2. Нужна ли нам аксиома выбора?

Ответ, конечно, зависит от того, в какой области математики мы работаем. Если речь идет о решении дифференциальных уравнений, о расслоенных многообразиях или об исследовании групп большого, но конечного порядка, то мы никогда не столкнемся с проблемой, имеющей отношение к аксиоме выбора. Однако значительная часть современной математики имеет дело с абстрактными бесконечными структурами, и во многих областях математической науки все больше и больше интересуются вопросами оснований теории множеств. Без аксиомы выбора нельзя обойтись не только в логике (теории множеств и теории моделей), но и в других современных областях: теоретико-множественной топологии, алгебре, функциональном анализе, теории меры.

Чтобы проиллюстрировать использование аксиомы выбора, давайте рассмотрим следующий общеизвестный факт: объединение счетного семейства счетных множеств является счетным. Это утверждение широко используется в математическом анализе, и большинство математиков даже не подозревают, что его доказательство использует аксиому выбора. Обычно доказательство проходит примерно так:

$$\begin{array}{llllll} A_0 & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \dots \\ A_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \qquad (1)$$

Мы имеем счетное семейство множеств $A_0, A_1, \dots, A_m, \dots$, и каждое A_m также счетно, таким образом $A_m=\{a_{mn}\colon n\in\omega\}$.

Значит, элементы объединения $A=\bigcup\limits_{m\in\omega} A_m$ можно расположить в счетную последовательность с помощью хорошо известного метода пересчета:

$$a_{00},\ a_{01},\ a_{11},\ a_{10},\ a_{02},\ a_{12},\ a_{22},\ a_{21},\ a_{20}, \dots$$

Но где же здесь аксиома выбора?

Давайте, еще раз просмотрим доказательство. У нас есть счетное семейство $\mathscr{A}$ множеств; поэтому можно занумеровать элементы семейства $\mathscr{A}$ натуральными числами и получить

$$\mathscr{A}=\{A_0, A_1, \dots, A_m, \dots\}_{m\in\omega}.$$

Каждое множество A_m также является счетным, и поэтому для каждого m существует нумерация множества A_m натуральными числами:

$$A_m=\{a_{m0}, a_{m1}, \dots, a_{mn}, \dots\}_{n\in\omega}. \qquad (2)$$

Однако существует более чем одна нумерация каждого множества A_m. Если при любом m через E_m обозначено множество всех нумераций множества A_m вида (2), то возникает следующая проблема: если мы хотим применить диаграмму (1), то нужно *выбрать* одну конкретную нумерацию для каждого множества A_m. Иными словами, мы должны выбрать по одному элементу из каждого множества E_m. Таким образом, нам нужна функция выбора на семействе множеств $\{E_0, E_1, \dots, E_m, \dots\}_{m\in\omega}$.

Конечно, это рассуждение показывает, что аксиома выбора используется лишь в данном доказательстве теоремы о том, что объединение счетного числа счетных множеств счетно, оставляя открытым вопрос о возможности другого доказательства, не опирающегося на аксиому выбора. Однако уже установлено (с помощью методов, о которых речь пойдет ниже в этой главе), что без использования аксиомы выбора *нельзя* доказать, что объединение счетного числа счетных множеств счетно. Более того, нельзя доказать даже, что множество всех действительных чисел не является объединением счетного числа счетных множеств (!).

Нужда в аксиоме выбора становится все более сильной по мере того, как мы переходим от континуума к абстрактным структурам и пространствам. Ниже будут указаны примеры фундаментальных теорем абстрактной алгебры и топологии, в доказательствах которых используется аксиома выбора. В некоторых случаях эти теоремы столь же сильны, как и сама аксиома выбора: примером утверждения, эквивалентного аксиоме выбора, является теорема Тихонова о произведении в теоретико-множественной топологии.

Если мы хотим в качестве критерия для принятия аксиомы выбора рассмотреть *степень ее использования*, то широкое применение этой аксиомы в различных ветвях математики за последние 50 лет недвусмысленно говорит в ее пользу. С другой стороны, заметив, что неконструктивный характер этой аксиомы делает ее менее самоочевидной, чем остальные аксиомы, мы должны поставить вопрос о ее формальной *непротиворечивости:* не приведет ли к противоречию добавление этой аксиомы к остальным аксиомам теории множеств? К счастью, Гёделем было установлено в 1939 г., что аксиома выбора не противоречит теории множеств (если эта теория сама непротиворечива). Кроме того, нельзя удовлетворяться формальной непротиворечивостью аксиомы. Если мы собираемся принять ее, то мы должны поверить в ее *правдоподобность*. Мы должны быть уверены, что доказательства, использующие аксиому выбора, и результаты, получаемые с ее помощью, не противоречат нашим представлениям о математическом мире. (Впрочем, я бы не слишком настаивал на этом. В конце концов, математика изобилует «противоестественными» примерами. Достаточно вспомнить построение Вейерштрассом непрерывной недифференцируемой функции.) Наконец, снова в силу неконструктивного характера этой аксиомы было бы интересно выяснить, действительно ли необходимо использование аксиомы выбора в доказательствах некоторых теорем, и в какой степени: это поднимает вопрос об *относительной силе* различных ослабленных форм и следствий аксиомы выбора.

Сначала займемся вопросом правдоподобности. На первый взгляд аксиома выглядит почти очевидной: мы должны выбрать по одному элементу $f(X)$ из каждого множества X, принадлежащего данному семейству $\mathcal{F}$.

В популярных изложениях аксиому выбора часто сравнивают с выборами кандидатов на должность: на каждое множество X нужно смотреть как на список кандидатов на данную должность, и процесс голосования дает функцию выбора, определяющую избранного кандидата $f(X)$ для каждого списка X.

Конечно, эта аналогия дает обоснование аксиомы выбора в ее конечном случае, когда как семейство $\mathcal{F}$, так и все множества $X \in \mathcal{F}$ являются конечными. Однако, как известно, нельзя опрометчиво переносить на бесконечные множества наши представления, основанные на мире конечных множеств. Все же аксиома выбора доказуемо истинна в случае, когда семейство $\mathcal{F}$ конечно, независимо от того, являются ли конечными множества $X \in \mathcal{F}$.

Это доказывается индукцией по количеству множеств в $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ состоит из одного непустого множества X, то любая функция f, единственным аргументом которой является X и значение которой на X является (произвольным) элементом a множества X, будет функцией выбора на X. А существование такой функции легко следует из того, что множество X непусто: последнее означает, что существует некоторое $a \in X$.

Предполагая, что аксиома выбора выполняется для всех n-элементных семейств $\mathcal{F}$, мы без труда докажем, что она выполняется и для всех $n+1$-элементных семейств. Пусть $\mathcal{F} = \{X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}\}$ есть семейство, состоящее из $n+1$ непустых множеств. По индуктивному предположению семейство $\{X_1, \ldots, X_n\}$ имеет функцию выбора g. Но поскольку X_{n+1} не пусто, то существует продолжение f функции g на все семейство $\mathcal{F}$, значение которого на множестве X_{n+1} есть некоторое $a \in X_{n+1}$. Такая функция, очевидно, и будет функцией выбора на $\mathcal{F}$.

Другим случаем, когда аксиома выбора доказуемо истинна, является случай, при котором каждое $X \in \mathcal{F}$ состоит всего из одного элемента. Тогда $\mathcal{F}$ имеет функцию выбора, причем такая функция единственна.

Мы уже видели, что каждое конечное семейство $\mathcal{F}$ имеет функцию выбора. Напротив, конечность элементов семейства $\mathcal{F}$, вообще говоря, не обеспечивает существования функции выбора. В некоторых случаях конечность все же помогает: в особенности если множества $X \in \mathcal{F}$ связаны с некоторой внешней структурой. Например, если $\mathcal{F}$ есть семейство конечных множеств действительных чисел, то функция выбора на $\mathcal{F}$ существует. Именно, для каждого $X \in \mathcal{F}$ можно определить $f(X)$ как наименьший элемент множества X. С другой стороны, если $\mathcal{F}$ состоит из конечных множеств множеств действительных чисел, то не видно способа найти функцию выбора на $\mathcal{F}$ (на самом деле в этом случае нельзя доказать существование функции выбора).

В классической иллюстрации, сделанной на эту тему Расселом, случай бесконечного множества пар ботинок сопоставляется со случаем бесконечного множества пар шнурков. В то время как множество пар обуви, очевидно, имеет функцию выбора (именно, берем правый ботинок из каждой пары), нет видимого пути для выбора (без обращения к аксиоме выбора) одного шнурка из каждой пары одновременно для всех пар шнурков.

§ 3. «Парадоксальное» разбиение шара

Некоторые возражения против аксиомы выбора основывались на том, что эта аксиома имеет парадоксальные следствия. С ее помощью можно получить результаты, противоречащие нашей интуиции. Наиболее известным примером такого рода является следующий парадокс.

3.1. Парадокс Банаха—Тарского. *Используя аксиому выбора, можно разбить шар на конечное число частей, которые можно переставить так, что получится два шара такого же размера, как и исходный шар.*

Дадим набросок доказательства этого «парадокса» с тем, чтобы показать, как используется аксиома выбора, и для того, чтобы выяснить, что в теореме в сущности нет ничего парадоксального, так как части шара, о которых идет речь, окажутся неизмеримыми множествами, конструкция которых по существу мало чем отличается от хорошо известной конструкции неизмеримого множества действительных чисел.

Конечно, части, на которые указанным образом разбивается шар, не могут быть измеримыми множествами, так как иначе получилось бы противоречие со свойством аддитивности меры. Напомним принадлежащую Витали известную конструкцию неизмеримого множества действительных чисел. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на действительных числах интервала $[0, 1]$:

$$x \sim y, \text{ если и только если } x - y \text{ рационально.}$$

Это отношение эквивалентности порождает разбиение единичного интервала на классы эквивалентности. Используя аксиому выбора, мы выбираем по одному элементу из каждого класса эквивалентности и собираем эти элементы в множество M. Это множество $M \subseteq [0, 1]$ не может быть измеримым. Действительно, определим для каждого рационального r множество $M_r = \{x + r: x \in M\}$. По построению M множества M_r попарно дизъюнктны, и каждое действительное число принадлежит некоторому (единственному) M_r. Если бы M было измеримо, то каждое M_r имело бы ту же меру, что и M. Если M имеет меру 0, то каждое M_r имеет также меру 0, и действительная прямая оказывается объединением счетного числа множеств, имеющих меру 0, чего не может быть. Если, напротив, M имеет положительную меру, то объединение $\bigcup\{M_r: r$ рационально и $0 \leqslant r \leqslant 1\}$ бесконечного числа непересекающихся множеств одинаковой положительной меры должно иметь бесконечную меру. Но этого также не может быть, поскольку указанное объединение включено в интервал $[0, 2]$.

Парадокс Банаха—Тарского базируется на более ранней теореме Хаусдорфа, дающей парадоксальное разбиение сферы.

3.2. Теорема Хаусдорфа. *Сфера S может быть разбита на непересекающиеся множества $S = A \cup B \cup C \cup Q$ так, что:*

(i) *множества A, B, C конгруэнтны между собой;*

(ii) *множество $B \cup C$ конгруэнтно каждому из множеств A, B и C;*

(iii) *множество Q счетно.*

Дадим очень краткий набросок доказательства. Более подробное доказательство содержится в книге Йеха [1].

Рассмотрим две оси a_φ и a_ψ вращения сферы и рассмотрим группу всех вращений, порожденных поворотом φ на 180° вокруг оси a_φ и поворотом ψ на 120° вокруг a_ψ. Каждое вращение из этой группы может быть описано формальным произведением («словом»), составленным из φ, ψ и ψ^2, с учетом того, что $\varphi^2 = 1$ и $\psi^3 = 1$ (получилось, если угодно, свободное произведение групп $\{1, \varphi\}$ и $\{1, \psi, \psi^2\}$).

Во-первых, мы утверждаем, что оси a_φ и a_ψ можно выбрать таким образом, что разные «слова» описывают разные вращения, порожденные поворотами φ и ψ. Чтобы доказать это, достаточно определить угол θ между a_φ и a_ψ так, чтобы никакое нетривиальное слово не описывало тождественного вращения. Если некоторое слово описывает тождественное вращение, то θ будет решением определенного уравнения. При этом оказывается, что это уравнение имеет только конечное число решений, и, следовательно, существует лишь счетное множество таких углов θ, что некоторое нетривиальное слово описывает тождественное вращение. Значит, любой угол, не принадлежащий этому счетному множеству, будет искомым.

Пусть G есть группа всех слов (или вращений, порожденных поворотами φ и ψ). Решающим моментом доказательства является разбиение множества G на три непересекающихся множества $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ таких, что

$$\mathscr{A} \cdot \varphi = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}, \quad \mathscr{A} \cdot \psi = \mathscr{B}, \quad \mathscr{A} \cdot \psi^2 = \mathscr{C}.$$

Построение такого разбиения несложно, и читатель, вероятно, сумеет самостоятельно его осуществить.

Теперь используем аксиому выбора аналогично тому, как это сделано в построении Витали. Каждое вращение $a \in G$ имеет две неподвижные точки на сфере. Значит, совокупность Q всех точек сферы, остающихся неподвижными при каком-нибудь отличном от тождественного вращения из G, является счетной, а множество $S - Q$ есть объединение непересекающихся классов эквивалентности («орбит»), соответствующих отношению эквивалентности: $x \sim y$, если и только если $y = x\alpha$ для некоторого $\alpha \in G$. Согласно аксиоме выбора существует множество M, содержащее ровно по одному элементу из каждой орбиты. Если мы теперь положим

$$A = M \cdot \mathscr{A}, \quad B = M \cdot \mathscr{B}, \quad C = M \cdot \mathscr{C},$$

то множества A, B, C и Q будут удовлетворять требованиям теоремы Хаусдорфа.

Теперь, чтобы получить парадокс Банаха — Тарского, рассмотрим следующее отношение эквивалентности между множествами в трехмерном евклидовом пространстве: $X \approx Y$, если и только если существует такое разбиение $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ множества X на конечное число непересекающихся множеств и такое разбиение $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ на то же самое число непересекающихся множеств, что X_i конгруэнтно Y_i для каждого $i = 1, \ldots, m$.

Нетрудно проверить, что $\approx$ действительно будет отношением эквивалентности, причем, если X не пересекается с X', Y не пересекается с Y', $X \approx Y$ и $X' \approx Y'$, то $X \cup X' \approx Y \cup Y'$. Более важным свойством является следующее: если $X \subseteq Y \subseteq Z$ и $X \approx Z$, то $X \approx Y$. (Доказательство этого свойства похоже на доказательство теоремы Кантора — Бернштейна: если $X \subseteq Y \subseteq Z$ и $|X| = |Z|$, то $|X| = |Y|$.)

Имея в нашем распоряжении разбиение сферы, даваемое теоремой Хаусдорфа, можно без особого труда с помощью упомянутых свойств отношения $\approx$ доказать следующую теорему:

3.3. Теорема (Банах — Тарский, 1924). *Замкнутый шар U может быть разбит на два непересекающихся множества $U = X \cup Y$ так, что $U \approx X$ и $U \approx Y$.*

§ 4. Некоторые применения аксиомы выбора

В этом параграфе рассмотрим некоторые типичные приложения аксиомы выбора в математике. Уже была упомянута теорема Тихонова, утверждающая, что топологическое произведение любого семейства компактных пространств является компактным. Не удивительно, что эта теорема использует аксиому выбора; утверждение о том, что декартово произведение любого семейства непустых множеств непусто, само является переформулировкой аксиомы выбора. (Элементы декартова произведения являются функциями выбора.)

Связь между теоремой Тихонова и аксиомой выбора действительно очень близкая: Келли показал, что аксиому выбора можно вывести из предположения о том, что теорема Тихонова справедлива. Таким образом, эти два утверждения логически эквивалентны (в теории множеств без аксиомы выбора).

Большое число доказательств, использующих аксиому выбора (в частности, в алгебре), проходит примерно одинаковым путем. Рассматриваемая теорема сводится к утверждению, говорящему о существовании *максимального* объекта в определенном классе объектов. Например, рассмотрим теорему, утверждающую, что каждое векторное пространство имеет базис. Очевидно, что множество векторов образует базис, если и только если оно линейно независимо и, кроме того, максимально

среди всех линейно независимых множеств (т. е. нет строго большего линейно независимого множества). Таким образом, для доказательства этой теоремы достаточно показать, что существует максимальное линейно независимое множество векторов.

Другим примером такого рода является теорема Хана — Банаха в функциональном анализе. Один из вариантов этой теоремы утверждает, что каждый линейный функционал, определенный на подпространстве данного векторного пространства, может быть продолжен на все пространство. Если снова рассмотреть семейство $\mathcal{F}$ всех продолжений данного функционала (не обязательно всюду определенных), то искомые всюду определенные продолжения этого функционала будут в точности максимальными элементами семейства $\mathcal{F}$.

Когда это явление было осознано, оно привело к формулировке некоторого общего принципа, на который часто ссылаются как на лемму Цорна (этот принцип был впервые доказан Куратовским и через двадцать лет после этого передоказан Цорном).

Пусть $\langle P, < \rangle$ есть частично упорядоченное множество.

Множество $C \subseteq P$ называется *цепью*, если оно линейно упорядочено отношением $<$. Элемент $a \in P$ называется *верхней гранью* C, если для каждого $c \in C$ выполняется $c \leqslant a$. Элемент $a \in P$ называется *максимальным*, если нет таких $x \in P$, что $a < x$.

4.1. Лемма Цорна. *Пусть $\langle P, < \rangle$ есть непустое частично упорядоченное множество, удовлетворяющее следующему условию: каждая цепь в P имеет верхнюю грань. Тогда в P найдется максимальный элемент.*

Давайте посмотрим, как лемма Цорна может быть использована в примерах, о которых шла речь выше. В первом примере пусть P есть совокупность всех линейно независимых подмножеств данного векторного пространства, и $X < Y$ означает $X \subset Y$. Цепью в P будет каждое семейство $C \subseteq P$ линейно независимых множеств, удовлетворяющее такому условию: если $X, Y \in C$, то либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Для каждой такой цепи C множество $\bigcup \{X: X \in C\}$ будет линейно независимым и будет верхней гранью для C. Следовательно, $\langle P, < \rangle$ удовлетворяет посылке леммы Цорна и поэтому имеет максимальный элемент $B \in P$. Это B и будет базисом рассматриваемого векторного пространства.

Аналогично проходит доказательство теоремы Хана — Банаха. В качестве P возьмем совокупность всех линейных функционалов, продолжающих данный функционал, и определим $f < g$ в случае, когда g продолжает f. Легко проверяется, что лемма Цорна применима к нашему множеству $\langle P, < \rangle$, а соот-

ветствующий максимальный элемент будет искомым продолжением.

Лемма Цорна без труда доказывается в предположении аксиомы выбора. Действительно, пусть $\langle P, <\rangle$ есть такое частично упорядоченное множество, каждая цепь в котором имеет верхнюю грань. Строим возрастающую трансфинитную последовательность элементов множества P: $a_0 < a_1 < \ldots < a < \ldots$ Пока мы не достигаем максимального элемента, все время можно находить еще больший элемент (и достраивать им последовательность), так как каждая цепь имеет верхнюю грань. В конце концов будет получен максимальный элемент.

Стоит отметить, что и наоборот, из леммы Цорна вытекает аксиома выбора. Давайте посмотрим, как получить функцию выбора для произвольного семейства $\mathscr{F}$ непустых множеств с помощью леммы Цорна. Пусть P есть совокупность всех функций выбора на различных подсемействах семейства $\mathscr{F}$, упорядоченная следующим образом: $f < g$, если и только если g продолжает f. Применяя лемму Цорна, получаем функцию выбора на $\mathscr{F}$.

Рассмотрим теперь одно следствие аксиомы выбора, обладающее тем замечательным свойством, что ряд казалось бы не имеющих к нему никакого отношения теорем оказываются эквивалентными этому следствию.

Предполагается знакомство читателя с понятием булевой алгебры. Подмножество I булевой алгебры B называется *идеалом*, если имеют место следующие три условия:

(i) $0 \in I$, $1 \notin I$,
(ii) если $a \in I$ и $b \leqslant a$, то $b \in I$.
(iii) если $a \in I$ и $b \in I$, то $a + b \in I$.

Идеал I в алгебре B называется *простым идеалом*, если для каждого $a \in B$ выполняется либо $a \in I$, либо $-a \in I$.

4.2. Теорема о простом идеале (Тарский). *Каждая булева алгебра имеет простой идеал.*

Доказательство теоремы о простом идеале снова является типичным приложением леммы Цорна. Так как идеал в алгебре B будет простым, если и только если он является максимальным в совокупности всех идеалов, мы просто применяем лемму Цорна к совокупности всех идеалов алгебры B.

Отметим, что теерема о простом идеале влечет свой более сильный вариант: *в любой булевой алгебре каждый идеал можно вложить в простой идеал.*

В самом деле, пусть I — идеал в алгебре B. Рассмотрим фактор-алгебру B/I. В ней существует простой идеал. Возьмем прообраз этого простого идеала относительно естественного гомоморфизма h: $B \to B/I$.

В частном случае, когда B является алгеброй всех подмножеств некоторого множества S, указанный более сильный вариант означает, что каждый идеал над S можно вложить в главный идеал над S. Соответственно, используя двойственное понятие фильтра и ультрафильтра, можно доказать, что каждый фильтр над любым множеством S может быть вложен в ультрафильтр. (На самом деле это утверждение эквивалентно теореме о простом идеале.)

В свете формулировки теоремы о простом идеале в терминах ультрафильтров становится ясным, насколько важна эта теорема в теоретико-множественной топологии. Это подчеркивается еще и тем, что теорема о простом идеале эквивалентна теореме Тихонова для произведений компактных хаусдорфовых пространств.

Теорема о простом идеале является важным инструментом и в логике. Например, одним из основных принципов теории моделей является *теорема компактности*: *если каждое конечное подмножество некоторого множества предложений* Σ *имеет модель, то* Σ *само имеет модель.* (См. «Теорию моделей»). Оказывается, что теорема компактности эквивалентна теореме о простом идеале.

Посмотрим теперь, как теорема компактности может быть использована в некоторых доказательствах вместо аксиомы выбора. Докажем, что каждое множество можно линейно упорядочить. (Так как теорема о простом идеале слабее, чем аксиома выбора, то мы не будем пытаться доказать, что каждое множество можно вполне упорядочить.) Пусть множество S произвольно. Рассмотрим язык, содержащий имя $\overset{\circ}{x}$ для каждого элемента x множества S и имеющий бинарный предикат $<$. Пусть Σ есть следующее множество предложений:

$$\left.\begin{array}{l} \neg(\overset{\circ}{x} < \overset{\circ}{x}), \\ (\overset{\circ}{x} < \overset{\circ}{y} \wedge \overset{\circ}{y} < \overset{\circ}{z}) \to \overset{\circ}{x} < \overset{\circ}{z}, \\ \overset{\circ}{x} < \overset{\circ}{y} \vee \overset{\circ}{y} < \overset{\circ}{x} \vee \overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{y} \end{array}\right\} \text{для всех } x, y, z \in S.$$

Поскольку каждое конечное подмножество множества S можно линейно упорядочить, то, следовательно, каждое конечное подмножество множества Σ имеет модель. По теореме компактности само Σ также будет иметь модель, и эта модель дает линейное упорядочение множества S.

Для тех читателей, которым больше нравятся аргументы топологического характера, приведем пример доказательства, использующего топологический вариант теоремы о простом идеале. Следующий принцип довольно часто встречается в раз-

личных ситуациях и в разных видах (одна из версий называется *леммой Радо о селекции*):

4.3. Лемма. *Пусть S — произвольное множество, E — конечное множество, а $\mathscr{F}$ является таким семейством функций t, что*:

(i) $\mathrm{dom}(t)$ *есть конечное подмножество множества* S, *а* $\mathrm{ran}(t) \subseteq E$, *где* $\mathrm{dom}(t) = \{x\colon \exists y(\langle x, y\rangle \in t)\}$ — *область определения функции* t, *а* $\mathrm{ran}(t) = \{y\colon \exists x(\langle x, y\rangle \in t)\}$ — *область всех значений* t,

(ii) *если* $t \in \mathscr{F}$ *и* $t' \subseteq t$, *то* $t' \in \mathscr{F}$,

(iii) *для каждого конечного* $X \subseteq S$ *найдется такое* $t \in \mathscr{F}$, *что* $X \subseteq \mathrm{dom}(t)$.

Тогда найдется такая функция $f\colon S \to E$, *что для каждого конечного множества* $X \subseteq S$ *сужение* $f \restriction X$ *принадлежит* $\mathscr{F}$.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим топологическую степень E^S (топология на E считается дискретной). Согласно теореме Тихонова для хаусдорфовых пространств E^S будет компактным пространством. Для каждого конечного $X \subseteq S$ положим $\mathscr{F}_X = \{f \in E^S\colon f \restriction X \in \mathscr{F}\}$. Каждое множество $\mathscr{F}_X$ замкнуто, а семейство $\mathscr{C} = \{\mathscr{F}_X\colon X \subseteq S$ *конечно*$\}$ удовлетворяет требованию непустоты конечных пересечений. Следовательно, пересечение всех множеств $\mathscr{F}_X$ из $\mathscr{C}$ непусто и дает искомую функцию f. □

Поскольку теорема Радо о селекции может быть использована для доказательства теоремы компактности, то она эквивалентна теореме о простом идеале.

Заметим, что теорема Хана — Банаха является на самом деле следствием теоремы о простом идеале; поэтому для ее доказательства полная аксиома выбора не является необходимой. Еще одно замечательное следствие теоремы о простом идеале — это теорема Стоуна — Чеха о компактификации.

В различных приложениях аксиомы выбора не всегда обязательно использовать ее самый общий вариант, утверждающий существование функции выбора на любом семействе непустых множеств. Во многих доказательствах, в частности в анализе, достаточно использовать утверждение о том, что каждое *счетное* семейство непустых множеств имеет функцию выбора. Довольно странно, что этот вариант аксиомы выбора более приемлем для критиков этой аксиомы, ведь он имеет такой же неконструктивный характер, как и общая формулировка, и лично мне не ясно, почему он должен быть более правдоподобным.

Одним из очевидных следствий счетной аксиомы выбора является утверждение о том, что объединение счетного числа счетных множеств счетно (см. доказательство в § 2). Этот факт часто используется в классическом анализе и теории меры, в частности для доказательства основных свойств борелевских

множеств и меры Лебега или утверждения о том, что множества первой категории (т. е. объединения счетного числа нигде не плотных множеств) замкнуты относительно счетных объединений.

Счетная аксиома выбора также необходима в дескриптивной теории множеств (гл. 8); без нее, например, может случиться так, что континуум будет объединением счетного числа счетных множеств. Она используется и в некоторых других теоремах дескриптивной теории множеств. Однако специалисты по дескриптивной теории множеств больше любят следующий более сильный принцип (*принцип зависимого выбора*):

Если ρ есть бинарное отношение на непустом множестве A, причем для каждого $x \in A$ найдется такое $y \in A$, что $x \rho y$, то существует такая последовательность $\langle x_m\colon m \in \omega\rangle$ элементов множества A, что

$$x_0 \rho x_1, \quad x_1 \rho x_2, \quad \ldots, \quad x_m \rho x_{m+1}, \ldots$$

Принцип зависимого выбора влечет счетную аксиому выбора. Действительно, пусть дана счетная последовательность непустых множеств S_0, S_1, S_2, ... Определим A как совокупность всех функций выбора на первых n множествах $S_0, \ldots, S_{n-1}$ для всех натуральных n. Определим также $f \rho g$ в случае, когда g продолжает f. Последовательность f_0, f_1, f_2, ..., удовлетворяющая $f_0 \rho f_1$, $f_1 \rho f_2$ и т. д., порождает функцию выбора на всём семействе $\{S_n\colon n \in \omega\}$.

Принцип зависимого выбора влечет и некоторые другие замечательные следствия. Например, если линейный порядок $<$ не является полным порядком, то существует бесконечная убывающая последовательность $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$

§ 5. Непротиворечивость аксиомы выбора

В отличие от вопроса правдоподобия, непротиворечивость аксиомы выбора является чисто формальной проблемой аксиоматической теории множеств.

Система аксиом Σ для какой-то математической теории называется *непротиворечивой*, если нельзя получить противоречие, опираясь на аксиомы из Σ. Теорема Гёделя о неполноте утверждает, что непротиворечивость достаточно сильной теории (как, например, теория множеств) не может быть установлена методами, формализуемыми в рассматриваемой теории. Иными словами, нельзя формально доказать непротиворечивость аксиоматической арифметики, теории множеств и тому подобных теорий в рассматриваемой теории.

Однако можно все же поставить вопрос, является ли определенная аксиома A *непротиворечивой относительно* некоторой

аксиоматической системы Σ, т. е. будет ли система Σ с добавленной аксиомой A непротиворечивой в предположении, что сама Σ непротиворечива. Иными словами, это означает, что отрицание аксиомы A нельзя доказать в теории Σ (в указанном предположении). В случае аксиомы выбора вопрос состоит в том, чтобы доказать, что она непротиворечива относительно остальных аксиом теории множеств, т. е. ее нельзя опровергнуть, используя остальные аксиомы (если эти аксиомы сами образуют непротиворечивую теорию).

Непротиворечивость аксиомы выбора в этом смысле была доказана Гёделем в 1939 г. (вместе с непротиворечивостью континуум-гипотезы). Перед тем как наметить основную идею доказательства Гёделя (подробное доказательство — в гл. 5), скажем несколько слов о доказательствах непротиворечивости вообще.

Читатель, вероятно, знаком с проблемой постулата Евклида о параллельных прямых и с различными моделями неевклидовой геометрии. Эти модели устанавливают недоказуемость постулата о параллельных в геометрии тем, что они удовлетворяют всем остальным аксиомам геометрии, кроме постулата о параллельных. Вообще, для того чтобы доказать непротиворечивость некоторой аксиомы относительно какой-то теории Σ (или, что то же самое, недоказуемость отрицания), обычно строят модель теории Σ, в которой эта аксиома истинна, отправляясь от некоторой данной модели теории Σ.

Укажем два метода получения моделей теории множеств, которые удовлетворяют аксиоме выбора. Оба метода принадлежат Гёделю.

Первая модель состоит из *конструктивных множеств*. В основе конструктивных множеств лежит следующая идея. Так как аксиомы теории множеств постулируют возможность различных построений, то должна существовать минимальная совокупность множеств, замкнутых относительно всех возможных теоретико-множественных конструкций. Таким образом, *конструктивную модель* L (универсум всех конструктивных множеств) строят трансфинитной индукцией, отправляясь от пустого множества и производя замыкания относительно теоретико-множественных операций. (Детали этого построения содержатся в главе 5 о конструктивных множествах.) Конструктивная модель удовлетворяет всем аксиомам теории множеств, а также аксиоме выбора. Аксиома выбора оказывается истинной в этой модели по той причине, что все множества в конструктивной модели можно расположить в трансфинитную последовательность: конструктивное множество X предшествует конструктивному множеству Y, если X строится раньше Y.

Иными словами, в модели L мы имеем полное упорядочение универсума, и поэтому аксиома выбора выполняется в L.

Другая модель (модель HOD) использует *определимые множества*. Она состоит из всех множеств, которые являются *наследственно ординально определимыми*. Это означает, что берутся множества, определимые формулой, содержащей только ординалы в качестве параметров, причем таким же образом определимы элементы этих множеств, элементы их элементов и т. д. Модель HOD замкнута относительно теоретико-множественных операций и в основном по этой причине удовлетворяет всем аксиомам теории множеств. Снова существует полное упорядочение универсума HOD: мы можем перенумеровать все возможные способы определения множеств, и с помощью этой нумерации и естественного полного упорядочения ординальных параметров устроить полное упорядочение HOD множеств.

§ 6. Невыводимость аксиомы выбора

В 1963 г. Коэн построил модель теории множеств, в которой аксиома выбора оказалась ложной, доказав таким образом, что аксиому выбора нельзя вывести из остальных аксиом теории множеств. Коэн ввел новый мощный метод построения моделей, метод *вынуждения* (форсинга), и использовал этот метод для доказательств невыводимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы.

Поскольку метод вынуждения подробно изложен в гл. 4, то мы здесь лишь наметим основные идеи этого метода и главные свойства генерических моделей. Построение генерической модели начинают с некоторой данной модели теории множеств, которая называется *исходной моделью*, и пробуют расширить эту модель до большей модели, в которой те же ординалы, что и в исходной модели, однако есть новые множества, которых в исходной модели нет. Поскольку все делается в исходной модели, то новые множества являются только гипотетическими, или воображаемыми, и не могут быть полностью описаны внутри исходной модели. Вместо этого выделяются некоторые условия, вынуждающие частичную информацию о новых множествах. Основной концепцией понятия *вынуждения* является отношение «p вынуждает σ», где p есть вынуждающее условие, а σ — предложение, содержащее имена для новых множеств. Для каждого такого предложения σ некоторые условия могут вынуждать его истинность, некоторые другие — его ложность, а могут быть и такие, которые не вынуждают ни того, ни другого. Однако всегда существует такое условие p, которое *решает* σ, т. е. либо p вынуждает σ, либо p вынуждает $\neg\sigma$.

Для построения генерических моделей постулируют существование *генерического* множества G условий, т. е. такого непротиворечивого множества вынуждающих условий, что для каждого предложения σ в G найдется условие, решающее σ. Генерическое множество, вообще говоря, не принадлежит исходной модели. С помощью такого множества G каждое предложение рассматриваемого языка объявляется либо истинным, либо ложным, а каждому имени приписывается вполне определенное множество (возможно принадлежащее, а возможно и не принадлежащее исходной модели). Совокупность множеств, которые получаются таким способом, включает все множества из исходной модели и множество G и является замкнутой относительно всех теоретико-множественных построений. Эта совокупность является моделью теории множеств и называется *генерическим расширением* исходной модели. Важным свойством генерического расширения является то, что его можно изучать, не выходя из исходной модели, так как любое предложение будет истинным в расширении, если и только если оно вынуждается некоторым условием из G.

Если в исходной модели M истинна аксиома выбора, то она остается истинной и в любом ее генерическом расширении. Таким образом, если мы хотим построить модель, в которой аксиома выбора ложна, то мы должны провести дополнительное построение. Идея этого построения состоит в том, что новые множества в некоторых типах расширений $M[G]$ очень похожи друг на друга, и поэтому не существует *определимых* полных упорядочений в $M[G]$. Мы берем бесконечное семейство $A \in M[G]$, состоящее, скажем, из новых множеств натуральных чисел, $A = \{a\colon a \in A\}$, и рассматриваем модель $N = M(\{a\colon a \in A\})$, полученную добавлением всех множеств $a \in A$ к исходной модели. При этом получится $M \subset N \subset M[G]$, и поскольку мы не добавили к M полного упорядочения множества A, то можно ожидать, что в N не окажется полных упорядочений этого множества.

Такое построение модели N, называемой *симметрическим расширением* M, использует идею, восходящую еще к Френкелю, который в двадцатых годах предложил метод установления недоказуемости аксиомы выбора. Его идеи были разработаны Мостовским в тридцатых годах. Мостовский ввел метод построения моделей, известных как модели Френкеля — Мостовского, или *пермутационные модели*.

Хотя метод Френкеля — Мостовского и привел к моделям, в которых аксиома выбора ложна, но он не решил полностью проблему недоказуемости аксиомы выбора в теории множеств, так как полученные модели оказались не совсем моделями теории множеств. Универсум Френкеля — Мостовского (рис. 2) отличается от обычной теории множеств тем, что в нем есть *атомы*, или *праэлементы* — объекты, не содержащие элементов (но и не совпадающие с пустым множеством, которое также не содержит элементов). Универсум Френкеля — Мостовского состоит из всех множеств, которые строятся из атомов, в то время как настоящий универсум теории множеств строится только из пустого множества. (См. обсуждение в гл. 1.)

Как показано на рис. 2, настоящий универсум представляет собой часть универсума Френкеля — Мостовского; будем называть его ядром последнего.

Полезным свойством атомов является то, что они очень похожи друг на друга. Этот факт используется как главный инструмент в методе Френкеля — Мостовского.

Рассмотрим простейший пример пермутационной модели. Пусть множество A всех атомов бесконечно. Каждая перестановка π множества A естественным образом продолжается на универсум FM (Френкеля — Мостовского). Именно, если множество X таково, что $\pi(x)$ уже определено для всех $x \in X$, то полагаем $\pi(X) = \{\pi(x)\colon x \in X\}$. Перестановка π может сдвигать лишь множества, не входящие в ядро, так как $\pi(\varnothing) = \varnothing$, и поэтому $\pi(X) = X$ для каждого множества X, входящего в ядро.

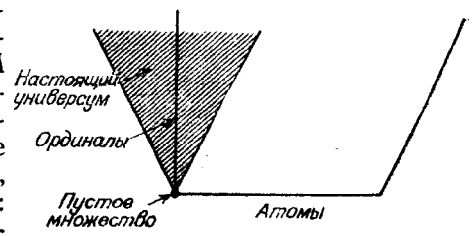

Рис. 2.

Назовем множество X *симметрическим*, если найдется такое конечное множество атомов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (*основание* X), что $\pi(X) = X$ для каждой перестановки π, оставляющей все a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, неподвижными: $\pi(a_1) = a_1, \ldots, \pi(a_n) = a_n$. Пусть $\mathcal{U}$ есть класс всех наследственно симметрических множеств X (т. е. симметрическим является само X, все элементы X, все элементы элементов X и т. д.). Этот класс $\mathcal{U}$ замкнут относительно всех операций, и тем самым $\mathcal{U}$ является моделью теории множеств с атомами. Ясно, что все элементы ядра симметрические, и поэтому $\mathcal{U}$ содержит ядро; $\mathcal{U}$ содержит и все атомы, поскольку каждый атом образует свое основание. Заметим также, что если некоторая совокупность S атомов принадлежит универсуму $\mathcal{U}$, то либо S конечно, либо $A - S$ конечно: нетрудно проверить, что бесконечное множество атомов с бесконечным дополнением не может иметь конечное основание!

Теперь понятно, почему аксиома выбора не верна в $\mathcal{U}$. Множество A нельзя вполне упорядочить в $\mathcal{U}$, так в противном случае его можно было бы разбить на два бесконечных множества.

Метод Френкеля — Мостовского очень прост и был использован для получения многих результатов о независимости. Однако эти результаты ничего не давали для настоящих множеств, поскольку ядро не затрагивается построением перестановочной модели. В нашем примере есть множество, которое не может быть вполне упорядочено, но оно является множеством атомов, а не множеством действительных чисел или каких-нибудь других истинно математических объектов.

Идею перестановочных моделей можно использовать в методе вынуждения и построить модели настоящей теории множеств, в которых не выполняется аксиома выбора. Как сказано выше, строится *симметрическая модель* N такая, что $M \subset N \subset \subset M[G]$. Идея перестановок используется следующим образом. Рассмотрим перестановки множества вынуждающих условий (или автоморфизмы соответствующей булевой алгебры) и применим эти перестановки для построения перестановок *имен* (или для построения автоморфизмов булевозначной модели). Затем расширим исходную модель M добавлением только тех новых множеств, которые имеют *симметрические имена* (и такие же имена имеют их элементы, элементы их элементов и т. д.). Таким образом, получится совокупность $N \subseteq M[G]$, которая включает M, так как никакая перестановка не изменяет канонические имена для множеств из исходной модели. N будет моделью теории множеств, называемой *симметрическим расширением модели* M.

Этот метод использует аргументы, очень похожие на те, которые участвуют в построении перестановочных моделей. С его помощью получены модели, в которых ложна аксиома выбора. Самым простым примером симметрической модели является расширение с помощью бесконечного множества A имен для генерических множеств натуральных чисел. При этом аналогично случаю универсума U нужно использовать перестановки множества A и конечные основания. Получается модель $N = M(\{a\colon a \in A\})$, в которой множество A является бесконечным множеством множеств натуральных чисел и не может быть вполне упорядочено. На самом деле, никакое бесконечное подмножество множества A не может быть вполне упорядочено, и, таким образом, A будет примером *дедекиндова множества*, т. е. бесконечного множества, не имеющего счетных подмножеств. Поскольку множества натуральных чисел можно отождествить с действительными числами, то мы имеем пример дедекиндова множества действительных чисел.

Сходство между перестановочными моделями и симметрическими моделями лежит в основе многих построений, и в следующем параграфе мы обсудим, как результаты для теории множеств с атомами можно некоторым единым методом преобразовать в соответствующие результаты для теории множеств без атомов.

§ 7. Теоремы о переносе

Как уже упоминалось выше, метод симметрических моделей теории множеств использует идеи, которые были ранее разработаны для моделей Френкеля — Мостовского. Например, модель $M(\{a\colon a \in A\})$, построенная Коэном для доказательства независимости аксиомы выбора, аналогична рассмотренной выше простейшей перестановочной модели. Вместо атомов в модели Коэна фигурируют генерические множества натуральных чисел. Все же аналогия между перестановочной моделью и моделью Коэна не совсем полная. Мы видели, что в перестановочной модели множество A нельзя разбить на два непересекающихся бесконечных множества. С другой стороны, в модели Коэна A есть множество действительных чисел, а каждое бесконечное множество действительных чисел можно разбить на два непересекающихся бесконечных подмножества (в действительности это можно сделать с каждым бесконечным линейно упорядоченным множеством). Различие объясняется тем, что в модели Коэна множество A имеет внешнюю структуру (наличие линейного порядка), которая и препятствует его элементам быть совершенно похожими, как это получается в случае атомов.

В другой модели Френкеля — Мостовского множество A является объединением счетной совокупности пар $\{a_n, b_n\}$ атомов, и при этом счетное семейство пар $\{\{a_n, b_n\}\colon n \in \omega\}$ не обладает функцией выбора. (Здесь атомы играют роль шнурков в примере Рассела.) Поскольку каждое семейство конечных множеств действительных чисел имеет функцию выбора, то нельзя надеяться на построение симметрической модели, которая была бы аналогична этой FM модели с заменой атомов действительными числами. Однако другая модель Коэна дает как раз такой результат; в ней множества a_n и b_n являются *множествами действительных чисел*. Иными словами, более точной будет такая аналогия между перестановочными моделями и симметрическими расширениями, когда вместо атомов берутся более абстрактные, менее различимые множества. Оказывается, что если роль атомов будет поручена *множествам множеств ординалов*, то мы получим достаточно удовлетворительную аналогию между перестановочными моделями и симметрическими моделями. Следующая теорема показывает, что любую перестановочную модель можно вложить в симметрическую модель теории множеств «с достаточной степенью точности».

Для каждого множества S и каждого ординала α вводим α-ю итерацию $\mathcal{P}^\alpha(S)$ операции степени (множества всех подмножеств):

$$\mathcal{P}^1(S) = \mathcal{P}(S) = \{X\colon X \subseteq S\},$$

$$\mathcal{P}^{\alpha+1}(S) = \mathcal{P}^\alpha(S) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(S)).$$

$$\mathcal{P}^\alpha(S) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}^\beta(S), \text{ если ординал } \alpha \text{ предельен.}$$

7.1. Теорема о вложении (Йех — Сохор, см. рис. 3). *Пусть A является множеством всех атомов некоторой перестановочной модели $\mathcal{U}$, а α — некоторый ординал в $\mathcal{U}$. Тогда существует симметрическая модель N теории множеств и вложение*

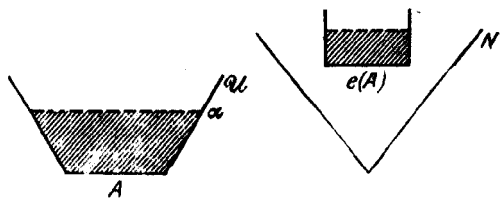

Рис. 3.

$e\colon \mathcal{U} \to N$ такие, что множество $\mathcal{P}^\alpha(A)$ в $\mathcal{U}$ и множество $\mathcal{P}^\alpha(e(A))$ в N окажутся при этом $\in$-изоморфными.

Модель N строится как симметрическое расширение ядра M модели $\mathcal{U}$, а множество $e(A)$ состоит из множеств множеств ординалов в N.

Эта теорема о вложении играет большую роль потому, что многие результаты о независимости, полученные для теории множеств с атомами методом Френкеля — Мостовского, могут быть автоматически перенесены на обычную теорию множеств. Этот метод переноса годится для довольно широкого класса утверждений (который здесь не будет описан); речь идет об *экзистенциальных* утверждениях определенного вида.

Типичным примером является утверждение «существует множество, которое нельзя линейно упорядочить». Пусть $\mathcal{U}$ есть перестановочная модель, содержащая множество, которое невозможно упорядочить. Для простоты предположим, что само A нельзя упорядочить в $\mathcal{U}$. В этой ситуации мы строим модель теории множеств, в которую можно так вложить $\mathcal{U}$, что $\mathcal{P}^\omega(A)$ окажется изоморфным множеству $\mathcal{P}^\omega(e(A))$. Отсюда следует, что $e(A)$ нельзя упорядочить в N, поскольку каждое упорядочение множества A, будучи бинарным отношением на A, обязано принадлежать множеству $\mathcal{P}^\omega(A)$.

Известны многочисленные приложения этого метода переноса, причем рассматриваемые утверждения всегда оказываются экзистенциальными. Однако описанный метод неприменим, когда мы хотим доказать невыводимость одного утверждения из другого. Рассмотрим следующий пример: мы хотим доказать, что аксиома выбора сильнее, чем теорема об упорядочении; для этого нужна модель, в которой аксиома выбора не выполняется, но каждое множество может быть линейно упорядочено. Такая модель существует (результат Леви).

Мы строим перестановочную модель методом Френкеля — Мостовского и пытаемся перенести этот результат о невыводимости с теории множеств с атомами на обычную теорию множеств. Отрицание аксиомы выбора легко переносится указанным методом, но утверждение «каждое множество можно линейно упорядочить» не переносится. Все же оказалось возможным, исследовав структуру перестановочной модели, «наложить» затем эту структуру на соответствующую симметрическую модель. Для случая теоремы об упорядочении можно использовать технику конечных оснований, упомянутую в § 6, и ввести аналогичную структуру в модель N. Этого оказывается достаточно для того, чтобы перенести утверждение «каждое множество можно линейно упорядочить».

Метод переноса усовершенствован в последние годы Д. Пинкусом, и теперь теоремам о переносе поддается большинство результатов о невыводимости, полученных методом Френкеля — Мостовского, несмотря на то, что эти теоремы имеют дело со слишком специфическими на первый взгляд формулами.

Поскольку присутствие атомов отличает модели Френкеля — Мостовского от моделей теории множеств, то нужно иметь в виду, что не всякий результат о невыводимости может быть перенесен. Закончим этот параграф примером утверждения, которое эквивалентно аксиоме выбора в обычной теории множеств, но имеет перестановочную модель, в которой не выполняется аксиома выбора.

(*Аксиома кратного выбора.*) Для каждого семейства $\mathcal{F}$ непустых множеств найдется такая функция f, определенная на $\mathcal{F}$, что $f(X)$ будет непустым конечным подмножеством множества X при любом $X \in \mathcal{F}$.

§ 8. Математика без аксиомы выбора

Так как аксиома выбора не противоречит остальным аксиомам теории множеств, то не видно причин, почему ее нельзя было бы применять в математических доказательствах. Тем не менее в силу того, что характер этой аксиомы отличает ее от остальных аксиом, имеет смысл исследовать модели теории мно-

жеств, которые не удовлетворяют аксиоме выбора. Ситуация аналогична неевклидовым геометриям: изучая такие модели, мы узнаем, какие теоремы в действительности опираются на аксиому выбора и каковы связи между следствиями и различными ослабленными формами этой аксиомы.

Наиболее интересными из большого числа известных результатов являются те, которые относятся к действительным числам. Особенно интересен результат Соловея, построившего модель теории множеств, где каждое множество действительных чисел измеримо по Лебегу. В модели Соловея также выполняется принцип зависимого выбора, и поэтому могут быть доказаны все стандартные теоремы из теории меры Лебега и дескриптивной теории множеств. Кроме того, универсум модели Соловея привлекает специалистов по анализу тем, что в нем нет таких искусственных контрпримеров, как неизмеримое множество Витали, множество, не имеющее свойства Бэра, разрывная аддитивная функция и т. д.

Как мы уже указывали, в построенной Коэном модели имеется *дедекиндово* множество действительных чисел, т. е. бесконечное множество, не содержащее счетных подмножеств. Такое множество A порождает ряд интересных примеров. Нетрудно показать существование предельной точки у множества A. Однако эта предельная точка a не может быть пределом никакой последовательности элементов множества $A-\{a\}$, так как A дедекиндово. Это показывает, что два стандартных определения предельной точки (одно через окрестности, а другое через последовательности) не будут эквивалентными, если нет аксиомы выбора.

Непрерывность функции действительной переменной также определяется двумя способами: один через $\varepsilon-\delta$-определение, а другой говорит, что из $\lim x_n = x$ следует $\lim f(x_n) = f(x)$. С помощью дедекиндова множества действительных чисел можно построить функцию, которая непрерывна в смысле определения через пределы, но разрывна в смысле $\varepsilon-\delta$-определения.

Другая интересная модель построена Феферманом и Леви; в ней множество всех действительных чисел является объединением счетного числа счетных множеств.

Пермутационные модели вместе с теоремами о переносе являются источником некоторых других интересных контрпримеров. Следующие примеры были построены Лёйхли в пермутационных моделях, а затем перенесены на теорию множеств с помощью теоремы о вложении (за исключением примера поля без алгебраического замыкания, перенос которого сделал Пинкус):

(a) векторное пространство, не имеющее базиса;

(b) векторное пространство, у которого есть два базиса различной мощности;

(c) свободная группа, коммутант которой не является свободной группой;

(d) поле, не имеющее алгебраического замыкания.

В § 4 подробно обсуждалась теорема о простом идеале. Поскольку она влечет теорему об упорядочении, а эта последняя недоказуема в теории множеств (без аксиомы выбора), то, следовательно, и теорема о простом идеале будет недоказуема. Она следует из аксиомы выбора, но не эквивалентна ей: Халперн и Леви показали, что аксиома выбора не следует из теоремы о простом идеале.

Несколько слов об ультрафильтрах. Феферман построил модель, в которой нет нетривиальных ультрафильтров над множеством всех натуральных чисел; этот результат был усилен Блассом, который построил модель, где вообще нет нетривиальных ультрафильтров.

Теория кардинальных чисел становится весьма интересной, если убрать аксиому выбора. К примеру, без аксиомы выбора нельзя доказать, что любые два кардинала сравнимы; справедливо только то, что отношение $|X| < |Y|$ является частичным порядком на совокупности всех кардиналов. Не слишком много фактов можно установить об этом порядке, поскольку, согласно результату автора этой главы, для любого частично упорядоченного множества существует модель теории множеств, в которой есть множество кардиналов, изоморфное данному частично упорядоченному множеству.

Известно много результатов, относящихся к *дедекиндовым кардиналам* (кардиналам дедекиндовых множеств). Например, можно построить модель с таким бесконечным кардиналом $\varkappa$, что $2^{\varkappa}$ является в этой модели дедекиндовым кардиналом. (В то же время нетрудно показать, что для каждого бесконечного кардинала $\varkappa$ будет $2^{2^{\varkappa}} \geqslant \aleph_0$.)

Один старый результат Тарского утверждает, что если для каждого бесконечного кардинала $\varkappa$ выполняется $\varkappa \cdot \varkappa = \varkappa$, то аксиома выбора имеет место. Недавняя конструкция Сагеева показывает, что для равенства $\varkappa + \varkappa = \varkappa$ ситуация иная. В модели Сагеева это равенство истинно для всех бесконечных $\varkappa$, но аксиома выбора не верна.

Если аксиома выбора имеет место, то каждый непредельный кардинал $\aleph_{\alpha+1}$ регулярен. В упомянутой выше модели Леви — Фефермана кардинал $\aleph_1$ оказывается сингулярным, так как в ней существует возрастающая счетная последовательность ординалов $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots$, предел которой равен ω_1. Вот одна открытая проблема: построить модель теории мно-

жеств, в которой *каждый* кардинал является пределом счетной последовательности [1]). Известно только, что для такого построения требуется предположение о существовании некоторого большого кардинала.

Закончим этот параграф формулировкой одной интересной проблемы комбинаторного характера, ставшей предметом большого числа статей и решение которой может включать не только описанные выше теоретико-множественные методы, но и некоторые фрагменты теории чисел и теории конечных групп. Для каждого натурального n рассматривается утверждение:

C_n: Если $\mathcal{F}$ есть семейство множеств, каждое из которых имеет ровно n элементов, то существует функция выбора на семействе $\mathcal{F}$.

Изучение этих утверждений было начато Тарским: он, в частности, заметил, что из C_2 следует C_4.

Пусть множество A четырехэлементно, и предположим, что существует функция f, осуществляющая выбор на двухэлементных множествах. Используем f для выбора некоторого элемента из множества A. (Предлагаемая процедура выбора окажется вполне определенной и одинаковой для всех четырехэлементных множеств A.) Имеется шесть двухэлементных подмножеств множества A. Для каждого $x \in A$ пусть $q(x)$ есть количество таких пар $\{x, y\} \subseteq A$, что $f(\{x, y\}) = x$. Пусть q есть наименьшее из всех $q(x)$, и $B = \{x \in A: q(x) = q\}$. Нетрудно проверить, что $B \neq A$, и, следовательно, B имеет один, два или три элемента. Если B имеет один элемент, то мы и выбираем этот элемент; если B имеет три элемента, то выбирается оставшийся элемент из A. Наконец, если B имеет два элемента, то выбираем элемент $f(B)$.

Это тонкое рассуждение поднимает ряд вопросов. Общая проблема состоит в том, чтобы установить, какие комбинации утверждений C_n выводятся из остальных комбинаций этих утверждений. Разные теоремы в литературе дают необходимые достаточные условия (носящие теоретико-числовой или теоретико-групповой характер) для такой выводимости. Одним из примеров таких теорем является теорема о том, что имплика ция $C_2 \to C_n$ доказуема, если и только если $n = 1$, 2 или 4 Часть «только если» в этой теореме была доказана Мостовски для теории множеств с атомами, а затем перенесена на теори множеств методом Йеха — Сохора и Пинкуса. Читателю, може быть, будет интересно узнать, что доказательство Мостовског использует идеи теории чисел, в частности постулат Бертран

[1]) Эта проблема решена в работе: Гитик (Gitik M.) All uncountab cardinals can be singular. — Israel J. Math., 1980, 35, № 1—2, p. 61—88. *Прим. перев.*

§ 9. Определимый выбор

В этом параграфе рассматривается вопрос, когда можно явно определить функцию выбора. В § 5 были упомянуты две модели теории множеств: конструктивный универсум L и модель HOD всех наследственно ординально определимых множеств. В обеих этих моделях универсум имеет определимое полное упорядочение. (Модель L является наименьшей моделью, содержащей все ординалы, а модель HOD есть наибольшая модель, в которой существует определимое полное упорядочение универсума.)

Генерические модели дают различные примеры определимого выбора. С одной стороны, известны модели, содержащие неконструктивные множества и имеющие определимое полное упорядочение универсума. С другой стороны, есть модели, удовлетворяющие аксиоме выбора, но не имеющие определимых функций выбора для некоторых семейств множеств. Например, в модели Коэна $M(G)$, упомянутой в § 6, множество всех действительных чисел не имеет определимого полного упорядочения. В некоторой другой модели каждое определимое полное упорядочение множества всех действительных чисел счетно (а аксиома выбора верна).

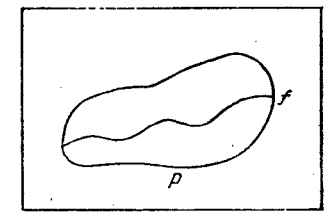

Рис. 4.

Следующий вопрос относится скорее к дескриптивной теории множеств. Пусть A есть множество действительных чисел, а $\mathcal{F} = \{S_x: x \in A\}$ является семейством непустых множеств действительных чисел, причем каждое S_x определимо относительно x некоторым равномерным образом (например, каждое S_x есть Π^1_1-множество с кодом x). Можно ли определить функцию выбора $\{a_x: x \in A\}$ на семействе F?

Вопросы такого типа часто возникают в дескриптивной теории множеств (см. гл. 8). В частности, *теорема униформизации* Новикова — Кондо — Аддисона утверждает, что для каждого бинарного Π^1_1-отношения P на множестве всех действительных чисел найдется такая Π^1_1-функция f, которая является подмножеством множества P и имеет ту же проекцию, что и P (рис. 4). Этот рисунок объясняет, как теорема униформизации связана с поставленным выше вопросом.

Никакой теоремы такого рода нельзя доказать для Π^1_2-множеств, так как множество всех неконструктивных действительных чисел принадлежит Π^1_2, а в упоминавшейся выше модели

Коэна нет определимых неконструктивных действительных чисел. Это дает пример непустого Π^1_2-множества действительных чисел, не содержащего определимых элементов.

§ 10. Аксиома детерминированности — альтернатива к аксиоме выбора

Аксиома выбора имеет ряд следствий, являющихся до определенной степени нежелательными (таких, как существование неизмеримого множества действительных чисел). В связи с этим было сделано несколько попыток формулировать аксиомы, противоречащие аксиоме выбора, из которых вытекают более привлекательные следствия. (Здесь снова проявляется аналогия с неевклидовой геометрией.) Наиболее интересной известной альтернативой к аксиоме выбора является *аксиома детерминированности*.

Каждое множество A бесконечных последовательностей натуральных чисел определяет следующую бесконечную игру G_A двух игроков. Игрок I пишет натуральное число n_0, игрок II отвечает тем, что пишет натуральное число n_1, затем игрок I пишет n_2, игрок II пишет n_3 и т. д. Если получающаяся в результате игры последовательность n_0, n_1, n_2, ... принадлежит множеству A, то выигравшим считается игрок I, в противном случае выигрывает игрок II. Игра G_A называется *детерминированной*, если либо игрок I имеет выигрывающую стратегию, либо игрок II имеет выигрывающую стратегию. *Аксиома детерминированности* утверждает, что для каждого такого множества последовательностей A игра G_A является детерминированной.

Используя полное упорядочение множества всех последовательностей натуральных чисел, можно построить игру, которая не будет детерминированной. Следовательно, аксиома детерминированности противоречит аксиоме выбора.

Специалисты в области дескриптивной теории множеств особенно оценили аксиому детерминированности. Эта аксиома влечет счетную аксиому выбора, и вследствие этого основные теоремы теории действительных чисел не страдают от отсутствия аксиомы выбора. Из этой аксиомы также следует, что каждое множество действительных чисел измеримо по Лебегу, имеет свойство Бэра и либо счетно, либо имеет мощность континуума. Кроме того, аксиома детерминированности разрешает различные проблемы дескриптивной теории множеств вроде теорем униформизации и редукции, см. гл. 8.

Помимо тех желательных следствий, которые аксиома детерминированности имеет в дескриптивной теории множеств, мало что можно было бы сказать в пользу этой аксиомы как альтернативы к аксиоме выбора. Можно отметить, например,

что из нее вытекает, что кардиналы $\aleph_1$ и $\aleph_2$ измеримы, кардиналы $\aleph_3$, $\aleph_4$, $\aleph_5$, ... сингулярны, а кардиналы $\aleph_{\omega+1}$ и $\aleph_{\omega+2}$ опять измеримы [1]). Все же эта аксиома чрезвычайно интересна. Поскольку она влечет выполнение различных свойств типа больших кардиналов, то нужно отправляться от больших кардиналов, если мы хотим доказать непротиворечивость аксиомы детерминированности. Это выглядит очень трудной проблемой, так как мы до сих пор не знаем даже, являются ли непротиворечивыми некоторые следствия детерминированности. Одним из следствий этой аксиомы является, к примеру, такое утверждение:

(*) Каждое подмножество кардинала $\aleph_1$ либо содержит некоторое замкнутое неограниченное в $\aleph_1$ множество, либо не пересекается с некоторым таким множеством [2]).

Это утверждение влечет измеримость кардинала $\aleph_1$. Но даже если считать установленной непротиворечивость предложения об измеримости $\aleph_1$, утверждение (*) выглядит значительно более сильным. Недавно Мартин и Митчелл [3]) подтвердили это, построив модель теории множеств, в которой есть много измеримых кардиналов, отправляясь от утверждения (*).

Мы считаем, что доказательство непротиворечивости (*) или других утверждений такого же рода должно быть первым шагом на пути решения проблемы непротиворечивости аксиомы детерминированности, которая определенно является наиболее интересной проблемой, относящейся к аксиоме выбора.

ЛИТЕРАТУРА

Йех (Jech T.)
1. The Axiom of Choice. — Amsterdam: North-Holland, 1973.
Френкель, Бар-Хиллел, Леви (Fraenkel A, Bar-Hillel Y., Levy A.)
1. Foundations of Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973.

Если читатель хотел бы получить ссылки на оригинальные работы, в которых доказаны обсуждавшиеся в этой статье результаты, то он может найти исчерпывающую библиографию в книгах Френкеля, Бар-Хиллела и Леви [1] и Йеха [1].

---

[1]) См. книгу Клейнберга, добавленную к библиографии гл. 3 при переводе. — *Прим. перев.*

[2]) См. Bull E. L., Kleinberg E. M. A consistent consequence of AD.— Trans. Amer. Math. Soc., 1979, **247**, p. 211—216, где доказана непротиворечивость аналогичного утверждения для χ_2. — *Прим. перев.*

[3]) Martin D. A., Mitchell W. On the ultrafilter of closed unbounded sets. — J. Symbolic Logic, 1979, **44**, № 4, p. 503—506. — *Прим. перев.*

Глава 3

КОМБИНАТОРИКА

Кеннет Кюнен

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 64
§ 1. Обозначения 65
§ 2. Замкнутые неограниченные и стационарные множества 65
§ 3. Принципы перечисления 68
§ 4. Деревья 75
§ 5. Почти дизъюнктные множества 82
§ 6. Партиционное исчисление 85
§ 7. Большие кардиналы 92
Добавление. Чрезвычайно большие кардиналы 95
Литература 97

Введение

Мы рассматриваем эту главу как небольшую статью, а не как обзор: большинство сформулированных теорем снабжено доказательствами. Наша цель — ввести читателя в круг основных методов комбинаторной теории множеств.

Предполагается знакомство читателя с «наивной» теорией множеств в рамках, скажем, книги Халмоша [1] или гл. 1. Знание логики не только не считается необходимым, но и нежелательно.

За исключением одного тривиального замечания, ни один из результатов этой главы не принадлежит автору. Мы не стали указывать авторство каждой теоремы или делать ссылки на оригинальные статьи; библиография приведена в основном для дальнейшего знакомства с темой. Некоторые понятия оказались столь близко связанными с фамилиями (например, преобразование Лапласа), что уже невозможно упоминать их вне связи с первооткрывателем. Но некоторые другие, часто значительно более важные понятия, уже стали частью математического фольклора. Тот, кто считает, что его имя должно было бы быть упомянуто в этой главе, может утешиться тем обстоятельством, что Ньютон и Лейбниц не упоминаются всякий раз, когда речь идет о производной.

§ 1. Обозначения

Напомним терминологию. Греческие буквы употребляются для обозначения ординалов (по фон Нейману). Через $\mathrm{cf}(\alpha)$ обозначается *конфинальность* α, т. е. наименьший ординал β такой, что найдется сохраняющее порядок отображение $f\colon \beta \to \alpha$, область значений которого неограничена в α. Кардиналами являются начальные ординалы; ω_α есть α-й бесконечный кардинал (счет начинается с $\alpha = 0$: $\omega = \omega_0$ — наименьший бесконечный кардинал). Через λ^+ обозначается наименьший кардинал, больший чем λ. $|X|$ есть кардинал (мощность) множества X. Кардинал $\varkappa$ называется *регулярным*, если и только если $\mathrm{cf}(\varkappa) = \varkappa$; в противном случае говорят, что он *сингулярен*.

$\mathscr{P}(X)$ есть совокупность всех подмножеств множества X, а ${}^{Y}X$ — совокупность всех функций из Y в X. Далее, ${}^{<\alpha}X = \bigcup\{{}^{\xi}X\colon \xi < \alpha\}$; $f \restriction X$ обозначает сужение функции f на множество X, а $\mathrm{ran}(f)$ — область всех значений функции f.

Если $\varkappa$ и λ — кардиналы, то через $\varkappa^\lambda$ и $\varkappa^{<\lambda}$ будем обозначать мощности множеств ${}^{\lambda}\varkappa$ и ${}^{<\lambda}\varkappa$ соответственно. Таким образом, если кардинал λ бесконечен, то $\varkappa^{<\lambda} = \sup\{\varkappa^\theta\colon \theta < \lambda \wedge \theta$ является кардиналом$\}$. Иногда вместо 2^λ будем писать $\exp(\lambda)$, если это диктуется типографскими соображениями, как в случае $\exp(\exp(\exp(\lambda)))$.

$\mathbb{R}$ есть множество всех действительных чисел, $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, $c = |\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)| = 2^\omega$ — мощность континуума.

§ 2. Замкнутые неограниченные и стационарные множества

Основное отличие предмета этой главы от элементарной теории множеств, изучаемой в университетах, состоит в использовании трансфинитной индукции на бесконечных ординалах.

В этом параграфе мы постараемся развить у читателя интуитивное представление об ординалах, а также ввести новые понятия, которые окажутся полезными позже. Во многих случаях можно рассматривать ординалы как естественное продолжение натуральных чисел. Однако замкнутые неограниченные и стационарные множества являются принципиально новым явлением, появляющимся лишь на несчетном уровне.

Несколько определений. Фиксируем регулярный несчетный кардинал $\varkappa$. Множество $C \subseteq \varkappa$ называется *замкнутым*, если всякий раз, когда $\gamma < \varkappa$ и $C \cap \gamma$ неограничено в γ, будет $\gamma \in C$ (эквивалентное определение: C замкнуто в порядковой топологии). Множество $C \subseteq \varkappa$ называется *з. н. о.* (*замкнутым неограниченным*), если оно замкнуто и неограничено в $\varkappa$.

Примерами з. н. о. множеств являются: множество всех предельных ординалов $<\varkappa$ и множество всех ординалов, которые предельны в ряду предельных ординалов $<\varkappa$. Множество $\{\gamma<\varkappa$: γ есть кардинал$\}$ всегда замкнуто в $\varkappa$; оно является неограниченным, если и только если кардинал $\varkappa$ пределен (и, следовательно, слабо недостижим, поскольку $\varkappa$ предполагается регулярным) в ряду кардиналов.

Существует определенная аналогия с теорией меры. Именно, о з. н. о. множествах можно думать как о больших, или почти полных, или имеющих меру 1. При таком подходе необходимо доказать, что пересечение двух больших множеств снова будет большим. В действительности имеет место следующая

2.1. Лемма. *Пересечение з. н. о. подмножеств кардинала $\varkappa$ в числе $<\varkappa$ будет з. н. о. множеством.*

Доказательство. Пусть $\alpha<\varkappa$ и для каждого $\xi<\alpha$ дано з. н. о. множество $C_\xi\subseteq\varkappa$. Нетрудно проверить, что пересечение $\bigcap\limits_{\xi<\alpha} C_\xi$ замкнуто. Чтобы проверить его неограниченность, определим для каждого $\xi<\alpha$ функцию f_ξ: $\varkappa\to\varkappa$ так, что $f_\xi(\gamma)$ есть наименьший ординал в C_ξ, больший, чем γ. Положим $g(\gamma)=\sup\{f_\xi(\gamma)$: $\xi<\alpha\}$. Тогда из регулярности $\varkappa$ следует $g(\gamma)<\varkappa$. Определяем $h(\gamma, n)$ индукцией по n так: $h(\gamma, 0)=\gamma$, и $h(\gamma, n+1)=g(h(\gamma, n))$. Наконец, положим $\gamma^*=\sup_n h(\gamma, n)$. Тогда $\gamma<\gamma^*<\varkappa$, и для каждого $\xi<\alpha$ множество $C_\xi\cap\gamma^*$ будет неограниченным в γ^*, и поэтому $\gamma^*\in\bigcap\limits_{\xi<\alpha} C_\xi$. □

Читателю стоит обратить внимание на то, что все вышесказанное теряет смысл при кардинале $\varkappa$, равном ω.

Продолжая нашу аналогию с теорией меры, мы введем стационарные множества как те, которые не имеют меру 0. Именно, назовем множество $S\subseteq\varkappa$ *стационарным*, если пересечение $C\cap S$ непусто, каково бы ни было з. н. о. множество $C\subseteq\varkappa$. Тогда A будет нестационарным (аналог меры 0), если $A\cap C=\varnothing$ для некоторого з. н. о. множества $C\subseteq\varkappa$.

2.2. Лемма. (a) *Объединение в числе $<\varkappa$ нестационарных множеств нестационарно.*

(b) *Если S стационнарно, а C является з. н. о., то $S\cap C$ будет стационарным.*

(c) *Если $\alpha<\varkappa$, множество S стационарно и f: $S\to\alpha$ есть произвольная функция из S в α, то найдется такое $\xi<\alpha$, что множество $f^{-1}\{\xi\}=\{\beta\in S$: $f(\beta)=\xi\}$ стационарно.*

Лемма легко проверяется с помощью 2.1. Интуитивно (a) говорит, что объединение небольшого числа малых множеств будет малым множеством, (b) говорит, что пересечение множества меры 1 с множеством положительной меры остается множеством положительной меры, а (c) утверждает, что множество положительной меры нельзя разбить на небольшое число множеств меры 0.

Аналогия с теорией меры, однако, заходит не очень далеко. Например, мы увидим в § 3, что существует семейство, состоящее из $\varkappa$ попарно дизъюнктных (непересекающихся) стационарных множеств $S\subseteq\varkappa$. Отметим, что пока еще не является очевидным существование хотя бы двух таких множеств.

Следующее усиление 2.2 (c), известное как лемма о сдавливании, играет фундаментальную роль в многих комбинаторных доказательствах.

2.3. Теорема (Фодор). *Пусть $S\subseteq\varkappa$ стационарно, f есть функция из S в $\varkappa$, причем $f(\eta)<\eta$ для всех $\eta\in S$. Тогда найдется такое $\xi<\varkappa$, что множество $f^{-1}\{\xi\}$ стационарно.*

В частности, теорема 2.3 означает, что не может быть взаимно однозначных функций f: $\{\eta$: $0<\eta<\varkappa\}\to\varkappa$ таких, что $\forall\eta(f(\eta)<\eta)$. Это выглядит неестественным, если иметь в виду функцию $n-1$ на натуральных числах, но нужно помнить, что $\varkappa>\omega$.

Доказательство теоремы 2.3. Предположим, что таких ξ нет. Тогда для каждого $\xi<\varkappa$ найдется такое з. н. о. множество C_ξ, что $\forall\eta\in C_\xi\cap S(f(\eta)\neq\xi)$. Пусть $D=\{\eta$: $\forall\xi<\eta(\eta\in C_\xi)\}$. Тогда $D\cap S=\varnothing$, поэтому мы получим противоречие, если только докажем, что D есть з. н. о. множество. Как и выше, замкнутость D тривиальна. Для проверки неограниченности D фиксируем $\gamma<\varkappa$. Пусть $\gamma_0=\gamma$ и γ_{n+1} является произвольным ординалом $>\gamma_n$ в множестве $\bigcap\{C_\xi$: $\xi<\gamma_n\}$ (которое будет з. н. о. в силу 2.1). Тогда $\sup_n\gamma_n\in D$. □

Мы закончим этот параграф вариантом теоремы Скулема — Лёвенгейма (см. гл. 2 «Теории моделей»). Хорошо известно, что каждая группа имеет счетную подгруппу. Мы покажем, что если на множестве ω_1 задана групповая операция $\cdot$, то $\{\alpha<\omega_1$: $(\alpha, \cdot)$ *есть подгруппа группы* $(\omega_1, \cdot)\}$ будет з. н. о. множеством в ω_1. Финитарной функцией на $\varkappa$ называется функция из ${}^m\varkappa$ в $\varkappa$ для некоторого $m\in\omega$. Имеет место

2.4. Теорема. *Если $\varkappa>\omega$ — регулярный кардинал и $\{f_n$: $n\in\omega\}$ — семейство финитарных функций на $\varkappa$, то множество $C=\{\alpha<\varkappa$: $\forall n(\alpha$ замкнуто относительно $f_n)\}$ является з. н. о.*

Доказательство. Ясно, что C замкнуто. Чтобы проверить его неограниченность, фиксируем $\gamma<\varkappa$. Пусть каждая f_n есть функция из ${}^{m_n}\varkappa$ в $\varkappa$. Положим $\gamma_0=\gamma$, а γ_{k+1} определим как наибольший из ординалов γ_k и $\sup\{f_n(s)$: $s\in{}^{m_n}(\gamma_k)\wedge n\in\omega\}$. Тогда $\sup_k\gamma_k>\gamma$ и $\sup_k\gamma_k\in C$. □

Хотя мы избежали прямого употребления теоретико-модельных понятий в теореме 2.4, читатель может заметить, что эта теорема утверждает следующее: если $\mathfrak{A}$ является алгебраической системой в счетном языке, имеющей основное множество $\varkappa$, то множество $\{\alpha < \varkappa\colon \mathfrak{A} \restriction \alpha \prec \mathfrak{A}\}$ являются з. н. о. в $\varkappa$.

§ 3. Принципы перечисления

Этим общим названием мы объединяем три сходных принципа комбинаторной теории множеств.

В качестве первого принципа перечисления рассмотрим аксиому выбора AC. Эта аксиома не может быть доказана с помощью остальных аксиом теории множеств (см. гл. 2). Сформулированная в виде утверждения о непустоте декартова произведения непустых множеств, эта аксиома интуитивно очевидна. Однако она становится подозрительной, если ее сформулировать в виде утверждения о том, что каждое множество может быть вполне упорядочено, поскольку нет естественного способа вполне упорядочить континуум действительных чисел. Тем не менее в соответствии с распространенной математической практикой мы будем продолжать использовать AC (как мы делали это в § 2) без дальнейших комментариев.

Аксиома выбора имеет несколько следствий в анализе, которые выглядят в каком-то смысле патологическими. Один из простых примеров:

3.1. Теорема. *Существует функция* $f\colon [0,1]\to[0,1]$, *график которой имеет внешнюю лебегову меру* 1 *в плоскости.*

Конечно, график любой разумной функции имеет меру 0. Все же функцию f, удовлетворяющую 3.1, легко можно построить трансфинитной индукцией. Пусть K_α $(\alpha < c)$ есть пересчет всех замкнутых подмножеств квадрата $[0,1]\times[0,1]$, имеющих положительную меру. Индукцией по $\beta < c$ построим p_β, q_β так, чтобы

$$1)\ \alpha < \beta \to p_\alpha \neq p_\beta,$$
$$2)\ \langle p_\beta, q_\beta\rangle \in K_\beta.$$

Заметим, что выбор таких p_β, q_β возможен, так как, согласно теореме Фубини, множество $\{p\colon \exists q(\langle p, q\rangle \in K_\beta)\}$ имеет положительную меру и тем самым мощность c. Определим теперь f равенством $f(p_\beta) = q_\beta$ для всех β. Тогда дополнение графика f не будет содержать ни одного замкнутого подмножества положительной меры и, следовательно, будет иметь внутреннюю меру 0. □

Более глубоким следствием AC является парадокс Банаха—Тарского [1], который утверждает, что земной шар можно разбить на конечное число частей так, что из этих частей можно составить шар величиной с Солнце. Чтобы доказать это утверждение, используют теорему 3.3 гл. 2 с учетом сделанных там же замечаний об отношении $\approx$.

Более близким к материалу этой главы следствием AC является

3.2. Теорема (Улам [1]). *Если множество* $S \subseteq \omega_1$ *стационарно, то* S *можно разбить на* ω_1 *непересекающихся стационарных множеств.*

Доказательство. С помощью AC выбираем для каждого $\alpha < \omega_1$ некоторую функцию f_α из ω на α. Для $n \in \omega$ и $\xi \in \omega_1$ полагаем $A^n_\xi = S \cap \{\alpha\colon f_\alpha(n) = \xi\}$. Каково бы ни было $n \in \omega$, множества $A^n_\xi (\xi < \omega_1)$ попарно дизъюнктны. Не все они могут быть стационарными; однако достаточно доказать следующую лемму:

3.3. Лемма. *Найдется такое* $n \in \omega$, *что среди множеств* A^n_ξ *встретится* ω_1 *стационарных.*

Таким образом, совокупность $\{A^n_\xi\colon A^n_\xi \text{ стационарно}\}$ удовлетворяет теореме 3.2 (нужно только добавить к одному из стационарных множеств A^n_ξ объединение всех нестационарных A^n_ξ).

Для доказательства леммы отметим, что для каждого ξ множество $\bigcup\limits_{n\in\omega} A^n_\xi = \{\alpha\colon \alpha > \xi\}$ стационарно, и поэтому в силу 2.2(а) найдется такое n_ξ, что $A^{n_\xi}_\xi$ будет стационарным. Теперь выбираем n так, чтобы $|\{\xi\colon n_\xi = n\}| = \omega_1$. □

Матрицу множеств A^n_ξ размерности $\omega \times \omega_1$ называют *матрицей Улама.*

Теорема 3.2 остается справедливой, если ω_1 заменить любым регулярным кардиналом $\varkappa > \omega_1$. Если $\varkappa$ есть кардинал вида $\omega_{\alpha+1}$, то доказательство остается в сущности тем же. Если же $\varkappa$ слабо недостижим, то теорема 3.2 тривиальна при $S = \varkappa$, так как множества $\{\alpha\colon \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$, где $\lambda < \varkappa$ — регулярный кардинал, образуют искомое разбиение. Теорема 9 из статьи Соловея [1] показывает, что 3.2 выполняется при произвольном S.

Нашим вторым принципом перечисления будет континуум-гипотеза CH. Если она формулируется как утверждение о том, что нет множеств, мощность которых заключена между ω и C, то в нее легко поверить (попробуйте представить себе множество промежуточной мощности!). Однако если мы используем эквивалентную формулировку, утверждающую существование такого полного упорядочения всех действительных чисел, что каждое из них имеет лишь счетное число предшественников, то CH выглядит еще более недоказуемой, чем аксиома выбора.

Поэтому мы не будем в этой главе предполагать CH и всегда будем явно указывать места, где CH используется как гипотеза. Как известно, CH нельзя ни доказать, ни опровергнуть с помощью обычных аксиом теории множеств, см. гл. 4 и 5.

Имеется довольно много приложений CH к теории действительных чисел (см. Серпинский [1]). В первом приближении эти результаты можно разбить на два класса. Один из них содержит, в сущности, комбинаторные утверждения, всегда истинные для ω_1 и перенесенные с помощью CH на континуум. Другой класс образуют собственно теоремы о действительных числах, от которых ничего не остается, если не предполагать CH.

Примером результата из первого класса является

3.4. Теорема (CH). *Существует такое счетное семейство функций* f_n: $[0,1]\to[0,1]$, *что* $\left(\bigcup_{n\in\omega} f_n\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}\right)=[0,1]\times[0,1]$.

Здесь мы отождествляем функцию с ее графиком. Эту теорему можно сравнить с 3.1. Для доказательства 3.4 достаточно доказать аналогичный результат с ω_1 вместо $[0,1]$; в этом случае CH не нужна. Пусть для каждого $\alpha<\omega_1$ через g_α обозначено какое-нибудь отображение ω на $\alpha+1$. Положим $f_n(\alpha)=g_\alpha(n)$. □

Примером результата из второго класса является существование множества Лузина. Множество $L\subseteq\mathbb{R}$ называется *множеством Лузина*, если L несчетно, но $L\cap K$ счетно всякий раз, когда множество $K\subseteq\mathbb{R}$ замкнуто и нигде не плотно (з. н. н. п.). Такое множество L имеет несколько специфических свойств. Что касается категории, то оно не очень мало, так как никакое несчетное подмножество множества L не будет множеством первой категории. Что же касается меры, то L является настолько малым, насколько это возможно: L имеет меру 0 в смысле меры Лебега, а также в смысле любой неатомарной меры Бореля (поскольку для каждого $\varepsilon>0$ существует такое з. н. н. п. множество $K\subseteq\mathbb{R}$, что разность $\mathbb{R}-K$ имеет меру $<\varepsilon$).

Существование множеств Лузина нельзя доказать без использования некоторых дополнительных теоретико-множественных аксиом. В частности, аксиома Мартина (см. гл. 6) вместе с отрицанием CH влечет отсутствие множеств Лузина. Однако имеет место

3.5. Теорема (Лузин [1]). *Из* CH *следует существование множеств Лузина.*

Доказательство. Пусть K_α $(\alpha<\omega_1)$ есть пересчет всех з. н. н. п. множеств $K\subseteq\mathbb{R}$. По индукции выбираем $p_\beta\in\mathbb{R}$ так, что:

$$1)\ \alpha<\beta\to p_\alpha\neq p_\beta,$$

$$2)\ p_\beta\notin\bigcup_{\alpha<\beta}K_\alpha.$$

Возможность построения на шаге β следует из теоремы Бэра о категории, утверждающей, что $\mathbb{R}$ не является объединением ω з. н. н. п. множеств. В частности,

$$\mathbb{R}-\left[\left(\bigcup_{\alpha<\beta}K_\alpha\right)\cup\left(\bigcup_{\alpha<\beta}\{p_\alpha\}\right)\right]\neq\varnothing.$$

Множество $\{p_\beta\colon \beta<\omega_1\}$ будет множеством Лузина. □

Основные свойства множества Лузина можно сформулировать как внутренние свойства самого этого множества. Именно, справедлива

3.6. Теорема (CH). *Существует такое множество* L *с порядком* $<$ *на нем, что*:

(a) $<$ *есть плотный линейный порядок без конечных точек.*

(b) *Каждое з. н. н. п. (в смысле порядковой топологии) множество* $K\subseteq L$ *не более чем счетно.*

(c) *Само* L *несчетно.*

Доказательство. Следуя обозначениям из доказательства теоремы 3.5, положим $L=\{p_\beta\colon \beta<\omega_1\}\cup\mathbb{Q}$. Тогда (a) и (c) очевидны, а (b) имеет место в силу того, что если K является з. н. н. п. в L, то замыкание K в $\mathbb{R}$ будет з. н. н. п. в $\mathbb{R}$. □

Большинство утверждений о действительных числах, доказуемых с помощью CH, являются независимыми от отрицания CH. Это касается и теорем 3.5 и 3.6. Приведем без доказательства утверждение, которое, напротив, эквивалентно CH.

3.7. Теорема (Эрдёш). *Гипотеза* CH *эквивалентна следующему утверждению: существует несчетное семейство* $\mathcal{F}$ *целых функций такое, что для каждого комплексного числа* z *множество* $\{f(z)\colon f\in\mathcal{F}\}$ *счетно.*

Нашим следующим принципом перечисления будет принцип ◇ Йенсена. Этот принцип утверждает:

Существует такая последовательность $\langle A_\alpha\colon \alpha<\omega_1\rangle$, что $A_\alpha\subseteq\alpha$ при любом $\alpha<\omega_1$ и, кроме того, выполняется

$(*)\ \forall A\subseteq\omega_1$ (множество $\{\alpha\colon A\cap\alpha=A_\alpha\}$ стационарно).

Из ◇ следует CH, так как $(*)$ влечет $\forall A\subseteq\omega\ \exists\alpha(A=A_\alpha)$. Однако из CH не следует ◇ (Йенсен, см. Девлин и Юнсбротен [1]). С другой стороны, ◇ вытекает из аксиомы конструктивности Гёделя (теорема 11.2 гл. 5). Непротиворечивость принципа ◇ может быть также доказана методом вынуждения (упражнение 4.18 гл. 4).

Как и CH, принцип ◇ дает пересчет счетных множеств, но теперь этот пересчет аппроксимирует все подмножества ординала ω_1. Доказательства, использующие ◇, похожи на доказательства с помощью CH, однако дают более сильные результаты. Это можно проиллюстрировать следующей конструкцией континуума Суслина.

Гипотезой Суслина (SH) называется утверждение о том, что каждое множество L с порядком $<$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $<$ есть плотный линейный порядок без конечных точек;

(ii) L удовлетворяет условию счетности цепей (у. с. ц.), т. е. каждое семейство непересекающихся интервалов в L счетно;

(iii) L с порядком $<$ является полным по Дедекинду, — изоморфно действительной прямой $\mathbb{R}$ с естественным порядком.

Гипотеза SH не противоречит теории множеств; например, она следует из аксиомы Мартина плюс отрицание CH (см. гл. 6). Более того, SH не противоречит CH (Йенсен; см. Девлин и Юнсбротен [1]). С другой стороны, из $\diamondsuit$ следует отрицание SH. Чтобы показать это, построим в предположении $\diamondsuit$ множество L с порядком $<$, удовлетворяющее требованиям (i)—(iii), но не изоморфное $\mathbb{R}$ (с естественным порядком). Такое множество L называется *континуумом Суслина*.

Мы докажем следующую теорему, аналогичную 3.6.

3.8. Теорема ($\diamondsuit$). *Существует такое множество L с порядком $<$, что:*

(a) $<$ *есть плотный линейный порядок без конечных точек.*

(b) *Каждое з. н. н. п. множество $K \subseteq L$ не более чем счетно.*

(c^+) *L не является сепарабельным.*

Условие (c^+) означает, что каждое плотное в L множество несчетно. Перед доказательством 3.8 покажем, как эта теорема дает нам континуум Суслина. Пусть L с порядком $<$ удовлетворяет 3.8. Тогда L удовлетворяет требованию (ii). В самом деле, предположим противное, т. е. пусть $\{(a_i, b_i): i \in I\}$ есть несчетное семейство непересекающихся открытых интервалов. Благодаря лемме Цорна мы можем предполагать, что это семейство максимально. Тогда множество $K = L - \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ будет з. н. н. п. и в то же время будет содержать все точки a_i и b_i, нарушая (b). Далее, L может и не быть полным по Дедекинду, поэтому пусть L^* есть дедекиндово пополнение L. Нетрудно проверить, что свойство (ii) переходит с L на L^* (этого нельзя утверждать о свойстве (b)). Теперь L^* удовлетворяет (i)—(iii), но не может быть изоморфным $\mathbb{R}$, поскольку иначе L было бы изоморфным некоторому подпространству прямой $\mathbb{R}$ и, следовательно, сепарабельным.

Как и в построении множества Лузина, будем строить искомое в смысле 3.8 множество L индукцией, избегая в ходе построения все з. н. н. п. множества. Но поскольку L не может быть подпространством прямой $\mathbb{R}$, то у нас нет заранее данного упорядоченного множества, из которого можно выбирать точки. В связи с этим мы должны по ходу построения индуктивно определять также и порядок на точках пространства L. При этом совершенно неважно, чем на самом деле являются точки пространства L; для определенности возьмем в качестве L множество ω_1. Теперь будем строить порядок $\lhd$ на ω_1, удовлетворяющий требованиям 3.8.

Порядок $\lhd$ определяется шагами длины ω. В следующем рассуждении α и β пробегают совокупность всех счетных предельных ординалов. Индукцией по α мы определяем порядок $\lhd_\alpha$ на множестве α так, что:

(i) Каждое $\lhd_\alpha$ является плотным линейным порядком без конечных точек.

(ii) Если $\alpha < \beta$, то $\lhd_\alpha = \lhd_\beta \cap (\alpha \times \alpha)$.

Согласно (ii) каждый последующий порядок продолжает предыдущий, а (i) означает, что каждое α с порядком $\lhd_\alpha$ изоморфно совокупности $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Очень важно, однако, каким образом одно упорядочение «вставляется» в другое. Мы можем в качестве $\lhd_\omega$ взять любой порядок на ω, изоморфный $\mathbb{Q}$. Если ординал β предален в ряду предельных ординалов, что (ii) заставляет нас определить $\lhd_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \lhd_\alpha$. Аналогично, положим $\lhd = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \lhd_\alpha$; тогда ω_1 с порядком $\lhd$ удовлетворяет требованию (a) из 3.8. Осталось только лишь уточнить это построение в переходе от $\lhd_\beta$ к $\lhd_{\beta+\omega}$; это нужно сделать так, чтобы обеспечить выполнение (b) и (c^+).

С (c^+) дело обстоит просто. Достаточно гарантировать, что никакое β не будет плотным в ω_1 (в смысле порядка $\lhd$). Пусть $\lhd_\beta$ уже построено. Пусть D_β есть какое-нибудь собственное дедекиндово сечение в β в смысле $\lhd_\beta$ (иными словами, D_β есть собственный начальный сегмент в β, не имеющий наибольшего элемента). Строим $\lhd_{\beta+\omega}$, помещая копию $\mathbb{Q}$ в D_β, т. е. упорядочиваем ординалы $\beta + n$ ($n \in \omega$) изоморфно порядку $\mathbb{Q}$ и помещаем их после всех ординалов из D_β, но перед всеми ординалами из $\beta - D_\beta$. Тогда β не будет плотным в $\beta + \omega$ и поэтому, конечно, не будет плотным и в ω_1.

Теперь покажем, как с помощью подходящего выбора D_β можно добиться того, чтобы ω_1 с порядком $\lhd$ удовлетворяло (b). Идея состоит в использовании теоремы Бэра с целью избежать все предварительно выписанные з. н. н. п. множества. Сначала нужно посмотреть, что́ теорема Бэра дает для счетных упорядоченных множеств вроде $\mathbb{Q}$. Пусть K является з. н. н. п. в $\mathbb{Q}$, а D есть собственное дедекиндово сечение в $\mathbb{Q}$. Будем говорить, что D *избегает* K, если найдутся такие a и b, принадлежащие множеству $\mathbb{Q}$, что $a < b$ в $\mathbb{Q}$, $[a, b] \cap K = \varnothing$ и $a < D < b$. Теперь из теоремы Бэра следует

3.9. Лемма. *Если K_n $(n \in \omega)$ есть з. н. н. п. в $\mathbb{Q}$ множество, то найдется собственное дедекиндово сечение D в $\mathbb{Q}$, избегающее каждое из множеств K_n.*

Доказательство. Замыкания всех множеств K_n в $\mathbb{R}$ являются з. н. н. п. в $\mathbb{R}$. Поэтому найдется иррациональное x, не принадлежащее ни одному из замыканий множеств K_n. В качестве D берем сечение, определяемое этим x. □

Пусть теперь $\langle A_\alpha\colon \alpha < \omega_1\rangle$ — последовательность, удовлетворяющая (*), существование которой утверждается принципом $\diamondsuit$. Используя доказанную лемму, строим каждое D_β так, чтобы оно избегало все з. н. н. п. в β (в смысле $\lhd_\beta$) множества вида A_α, где $\alpha < \beta$.

Таким образом, построение порядков $\lhd_\beta$ индукцией по β закончено. Осталось проверить, что оно приводит к искомому результату — выполнению требования (b) из 3.8.

Пусть множество $K \subseteq \omega_1$ является з. н. н. п. в ω_1 в смысле $\lhd$. Тогда множество $K \cap \alpha$ не обязательно будет з. н. н. п. в α для всех α, однако будет таковым для достаточного числа ординалов $\alpha < \omega_1$. Чтобы увидеть это, рассмотрим такие функции f, $g\colon \omega_1 \to \omega_1$ и h, $h'\colon \omega_1^2 \to \omega_1$, что для каждого $\xi \in \omega_1 - K$ будет $f(\xi) \lhd \xi \lhd g(\xi)$ и $(f(\xi), g(\xi)) \cap K = \varnothing$ и для всех $\xi \lhd \eta$ будет $h(\xi, \eta)$, $h'(\xi, \eta) \in (\xi, \eta)$, $h(\xi, \eta) \notin K$ и $h'(\xi, \eta) \in K$ всякий раз, когда $K \cap (\xi, \eta) \neq \varnothing$. Согласно теореме 2.4 множество $C = \{\alpha < \omega_1\colon \alpha$ — *предельный ординал, замкнутый относительно* f, g, h, $h'\}$ будет з. н. о. Отметим, что если $\alpha \in C$, то замкнутость относительно f и g означает, что $K \cap \alpha$ замкнуто в α в смысле $\lhd_\alpha$, а замкнутость относительно h означает, что $K \cap \alpha$ является н. н. п. в α.

Используя (*), фиксируем такое $\alpha \in C$, что $K \cap \alpha = A_\alpha$. Счетность K будет доказана, если мы сможем доказать $K \subseteq \alpha$. А это вытекает из утверждения (i) следующей леммы:

3.10. Лемма. *Для всех предельных ординалов $\beta \geqslant \alpha$ выполняется:*

(i) $K \cap \beta = K \cap \alpha$,

(ii) *если $\gamma \in \beta - K$, то найдутся такие ξ, $\eta \in \alpha$, что $\xi \lhd \gamma \lhd \eta$ и $(\xi, \eta) \cap K = \varnothing$ в ω_1 с порядком $\lhd$.*

Доказательство проходит индукцией по β. Если $\beta = \alpha$, то используем замкнутость α относительно f и g. Индукция тривиальна на предельных шагах. Предположим теперь, что 3.10 выполняется для β, и докажем эту лемму для $\beta + \omega$. По индуктивному предположению для β множество $A_\alpha = K \cap \beta$ будет з. н. н. п. в β в смысле $\lhd_\beta$; поэтому D_β избегает A_α. Тем самым найдутся такие принадлежащие β ординалы γ, γ', что $[\gamma, \gamma'] \cap K \cap \beta = \varnothing$, и каждый ординал $\beta + n (n \in \omega)$ лежит в (γ, γ'). Пусть ξ, η, ξ', $\eta' < \alpha$ — такие ординалы, существование которых следует из (ii), примененного соответственно к γ и γ'. Тогда $(\xi, \eta') \cap K \cap \alpha = \varnothing$, откуда в силу замкнутости α относительно h' вытекает $(\xi, \eta') \cap K = \varnothing$. Теперь свойства (i) и (ii) для $\beta + \omega$ немедленно следуют из того, что каждое $\beta + n$ лежит в интервале (ξ, η'). □

На этом мы закончим обсуждение AC, CH и $\diamondsuit$. Более полное обсуждение комбинаторных принципов, обобщающих $\diamondsuit$, можно найти в гл. 5 или в книге Девлина и Юнсбротена [1].

§ 4. Деревья

Индукция вдоль дерева является обобщением индукции по ординалу и часто используется в комбинаторных рассуждениях. Теоремы, доказанные в этом параграфе с помощью деревьев, достаточно элементарны. Более глубокие результаты будут получены в § 6.

Несколько определений. Множество T с частичным порядком $<$ называется *деревом*, если для каждого $y \in T$ совокупность $\{x\colon x < y\}$ вполне упорядочена порядком $<$. *α-уровень* T есть множество $\{y\colon \{x\colon x < y\}$ *имеет порядковый тип* $\alpha\}$. *Высотой* T называется первый ординал α такой, что α-й уровень дерева T есть пустое множество; все более высокие уровни в этом случае также будут пустыми, но все меньшие уровни непусты.

T' называется *поддеревом* дерева T, если T' получается удалением из T некоторых ветвей, т. е. $T' \subseteq T$ и $\forall y \in T' \forall x \in T$ $(x < y \to x \in T')$.

Для каждого ординала α и каждого множества A построим *полное A-арное дерево* ${}^{<\alpha}A$ высоты α: ${}^{<\alpha}A = \bigcup \{{}^{\xi}A\colon \xi < \alpha\}$. Для s, $t \in {}^{<\alpha}A$ положим $s \leqslant t$, если и только если $s \subseteq t$. Таким образом, ${}^{<\alpha}A$ — это дерево всех $<\alpha$-последовательностей элементов множества A. Говоря о таких деревьях, мы будем использовать запись $s^\frown a$ (где $s \in {}^{\xi}A$, $a \in A$) для обозначения такого $t \in {}^{\xi+1}A$, что $t \restriction \xi = s$ и $t(\xi) = a$; $\langle\,\rangle$ обозначает пустую последовательность, а $\operatorname{lh} s = \operatorname{dom}(s)$ (длина s); формально $\langle\,\rangle = \varnothing$ и $s^\frown a = s \cup \{\langle \operatorname{lh} s, a\rangle\}$.

Дерево T, изображенное на рис. 5, является поддеревом полного бинарного (2-арного) дерева высоты 3; T имеет высоту 3, т. е. три непустых уровня. 0-м, 1-м и 2-м уровнями дерева T являются соответственно множества $\{\langle\,\rangle\}$, $\{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\}$, $\{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$. Заметим, что математическое дерево — это то, что остается от настоящего дерева после того, как от него отделить все ветки, корни, листья и ствол.

Ординал α образует тривиальный пример дерева высоты α; его ξ-м уровнем будет множество $\{\xi\}$.

Следующая теорема представляет простой пример использования индукции на дереве ${}^{<\omega}2$.

4.1. Теорема. *Если X является замкнутым непустым подмножеством отрезка $[0, 1]$ и не содержит изолированных точек, то $|X| = c$.*

Множество X, удовлетворяющее посылке теоремы 4.1, называется совершенным. Для доказательства теоремы сначала отметим следующий факт:

4.2. Лемма. *Если множество X совершенно, то найдутся непересекающиеся совершенные множества X_0, $X_1 \subseteq X$.*

Доказательство теоремы 4.1. Определяем совершенное множество $X_s\,(s \in {}^{<\omega}2)$ следующим образом: $X_{\langle\rangle} = X$; если X_s уже построено, то в качестве $X_{s^\frown 0}$ и $X_{s^\frown 1}$ берем какие-нибудь непересекающиеся совершенные подмножества множества X_s. Для каждого $f \in {}^{\omega}2$ полагаем $X_f = \bigcap_{n\in\omega} X_{f\restriction n}$. Если f пробегает множество ${}^{\omega}2$, то множества X_f будут непустыми (в силу компактности) и непересекающимися, и поэтому $|X| \geqslant c$. Наконец, поскольку $X \subseteq [0, 1]$, то $|X| = c$. □

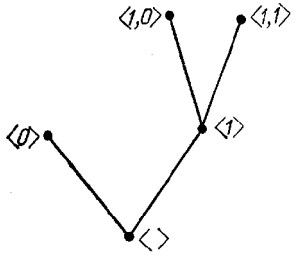

Рис. 5.

Очевидно, обобщением теоремы 4.1 с тем же самым доказательством является утверждение о том, что каждое компактное хаусдорфово пространство без изолированных точек удовлетворяет неравенству $|X| \geqslant c$. Аналогичный результат, использующий индукцию на дереве ${}^{<\omega_1}2$, представляет следующая

4.3. Теорема (Чех — Поспишил). *Если X есть компактное хаусдорфово пространство, никакая точка которого не образует G_δ-множество, то $|X| \geqslant 2^{\omega_1}$.*

Такие пространства X будем называть *глубоко совершенными*. Глубоко совершенные пространства не часто возникают в обычной математике. Стандартные примеры: $\beta N - N$, единичный шар пространства, дуального к пространству $L^\infty(\mathbb{R})$ в слабой топологии, и любое произведение несчетного числа компактных хаусдорфовых пространств, содержащих более чем по две точки. Перед доказательством 4.3 докажем три легких леммы о глубоко совершенном пространстве X.

4.4. Лемма. *Если $Y \subseteq X$ является замкнутым G_δ-множеством в X, то Y глубоко совершенно.*

Доказательство. Если какая-нибудь точка y множества Y образует G_δ-множество в Y, т. е. $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n \cap Y$, то она образует G_δ-множество и в X, так как $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n \cap V_n$, где $V_n \subseteq X$ открыты и таковы, что $Y = \bigcap_{n\in\omega} V_n$. □

4.5. Лемма. *Для каждого непустого открытого множества $U \subseteq X$ найдется непустое замкнутое G_δ-множество $Y \subseteq U$.*

Доказательство. Фиксируем $p \in U$. Индуктивно определяем открытое множество V_n, содержащее точку p, так, что выполняется $U \supseteq \bar{V}_0 \supseteq V_0 \supseteq \bar{V}_1 \supseteq V_1 \supseteq \bar{V}_2 \supseteq \ldots$ Теперь полагаем $Y = \bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} \bar{V}_n$. □

4.6. Лемма. *Существуют непересекающиеся замкнутые непустые G_δ-множества X_0, $X_1 \subseteq X$.*

Доказательство. Берем два непересекающихся открытых непустых множества и применяем 4.5. □

Доказательство теоремы 4.3. Определяем непустые G_δ-множества $X_s\,(s \in {}^{<\omega_1}2)$ следующим образом: $X_{\langle\rangle} = X$; если X_s уже построено, то в качестве $X_{s^\frown 0}$ и $X_{s^\frown 1}$ берем непустые непересекающиеся замкнутые G_δ-подмножества множества X_s; если ординал $\operatorname{lh} s$ пределен, то $X_s = \bigcap \{X_{s\restriction\alpha} : \alpha < \operatorname{lh} s\}$. Теперь для каждого $f \in {}^{\omega_1}2$ полагаем $X_f = \bigcap_{\alpha<\omega_1} X_{f\restriction\alpha}$. Тогда множества $X_f\,(f \in {}^{\omega_1}2)$ будут непустыми и непересекающимися, и поэтому $|X| \geqslant 2^{\omega_1}$. □

Доказательство теоремы 4.3 без труда обобщается на следующее утверждение: если хаусдорфово компактное пространство X таково, что каждая его точка имеет характер $\geqslant \varkappa$, то $|X| \geqslant 2^\varkappa$. Дополнительную информацию о приложениях деревьев к топологии можно найти в гл. 7 и в работе Юхаса [1].

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, относящиеся к путям сквозь деревья. Называем P *путем сквозь* дерево T, если P линейно упорядочено порядком $<$ на T и содержит ровно по одному элементу из каждого непустого уровня T. Если T имеет высоту α и является поддеревом дерева ${}^{<\omega}A$, то будем отождествлять путь P с такой функцией $f\colon \alpha \to A$, что $P = \{f \restriction \xi : \xi < \alpha\}$. Деревья вида ${}^{<\alpha}A$ и все деревья непредельной высоты тривиально имеют пути, но некоторые деревья не имеют путей. Например, фиксируем $\gamma \geqslant \omega$ и положим $T = \{s \in {}^{<\omega}\gamma : s(0) > s(1) > s(2) > \ldots\}$. Тогда T имеет высоту ω, но не имеет путей, поскольку нет убывающих ω-последовательностей ординалов.

Для деревьев высоты ω справедлива следующая

4.7. Лемма (Кёниг). *Если дерево T имеет высоту ω и каждый уровень T конечен, то найдется путь сквозь T.*

Доказательство. Выберем такое x_0 из 0-го уровня T, что множество $\{y \in T\colon y > x_0\}$ бесконечно; такой выбор возможен, так как T бесконечно, а каждый уровень конечен. Далее, индукцией по n выбираем x_n ($n \in \omega$) из n-го уровня дерева T так, что для каждого n выполняется $x_{n+1} > x_n$ и множество $\{y \in T\colon y > x_{n+1}\}$ бесконечно. Множество $\{x_n\colon n \in \omega\}$ будет путем сквозь T. □

Очевидное обобщение леммы Кёнига на ω_1 не проходит:

4.8. Теорема. *Существует такое дерево T высоты ω_1, что каждый уровень T счетен, но нет путей сквозь T.*

Доказательство. Пусть $S = \{s \in {}^{<\omega_1}\omega\colon S$ *взаимно однозначно*$\}$. Это S будет поддеревом дерева ${}^{<\omega_1}\omega$. Поскольку множества ω и ω_1 неравномощны, то не существует путей сквозь S. Конечно, уровни S несчетны, и поэтому нужно выбрать подходящее поддерево дерева S. Если $s, t \in {}^{\alpha}\omega$ таковы, что множество $\{\xi\colon s(\xi) \neq t(\xi)\}$ конечно, то пишем $s \approx t$.

4.9. Лемма. *Найдется последовательность $\langle s_\alpha\colon \alpha < \omega_1\rangle$ элементов дерева T такая, что $s_\alpha \approx s_\beta \restriction \alpha$ всякий раз, когда $\alpha < \beta$.*

Если лемма уже доказана, то дерево $T = \bigcup\limits_{\alpha < \omega_1} \{s \in {}^{\alpha}\omega\colon s \in S \wedge s \approx s_\alpha\}$ удовлетворяет 4.8. Для доказательства 4.9 определим s_α индукцией по α, обеспечивая бесконечность разности $\omega - \operatorname{ran}(s_\alpha)$. Тогда $s_{\alpha+1}$ может быть любым взаимно однозначным продолжением s_α. Если же ординал γ пределен и все s_α ($\alpha < \gamma$) уже построены, то выберем сначала последовательность ординалов $\langle \gamma_n\colon n \in \omega\rangle$, возрастающую и сходящуюся к γ. Индукцией по n найдем такое $s'_{\gamma_n} \in S$, что $s'_{\gamma_n} \approx s_{\gamma_n}$ и $m < n \to s'_{\gamma_m} = s'_{\gamma_n} \restriction \gamma_m$. Определим $t = \bigcup\limits_n s'_{\gamma_n}$. Наконец, подберем такое $s_\gamma \in S$, чтобы $s_\gamma(\xi) = t(\xi)$ для всех $\xi \notin \{\gamma_n\colon n \in \omega\}$ и чтобы множество $\omega - \operatorname{ran}(s_\gamma)$ было бесконечно. □

Для любого регулярного кардинала $\varkappa$, *$\varkappa$-деревом Ароншайна* называется всякое дерево высоты $\varkappa$, каждый уровень которого имеет мощность меньше $\varkappa$ и которое не имеет сквозных путей. Тогда лемма Кёнига утверждает, что не существует ω-деревьев Ароншайна, в то время как 4.8 показывает, что ω_1-деревья Ароншайна имеются. Доказательство 4.8 нетрудно обобщить для построения $\varkappa$-дерева Ароншайна в случае, когда $\varkappa = \lambda^+$, кардинал λ регулярен, и для всех кардиналов $\theta < \lambda$ выполняется $2^\theta \leqslant \lambda$ (в доказательстве аналога леммы 4.9 нужно обеспечивать нестационарность множеств $\operatorname{ran}(s_\alpha)$). В частности, если выполняется обобщенная континуум-гипотеза GCH, то $\varkappa$-деревья Ароншайна существуют для каждого кардинала $\varkappa$, следующего за регулярным кардиналом. Для кардиналов, следующих за сингулярным кардиналом, этот вопрос остается открытым в предположении GCH, хотя если выполняется аксиома конструктивности V = L, то $\varkappa$-деревья Ароншайна существуют и для таких $\varkappa$ (Йенсен — см. гл. 5). С равенством $c = \omega_2$ совместимо отсутствие ω_2-деревьев Ароншайна (Митчелл [1]). Обсуждение деревьев Ароншайна для сильно недостижимых кардиналов будет сделано в § 6.

Деревья очень тесно связаны с линейными порядками и проблемой Суслина (см. § 3). Вообще, если дано дерево T с порядком $<$, то мы можем следующим образом получить линейное упорядочение $\lhd$ всех точек дерева T. Сначала представим T нарисованным на доске, а не растущим из земли. Тогда точки каждого уровня упорядочиваются слева направо. Чтобы сравнить точки разных уровней, прижмем дерево T вниз на планку для мела (прижимаем только точки дерева, но не линии между ними, см. рис. 6). Более формально, линейный порядок $\lhd$ на T называется *сжатием* частичного порядка $<$, если справедливы следующие утверждения:

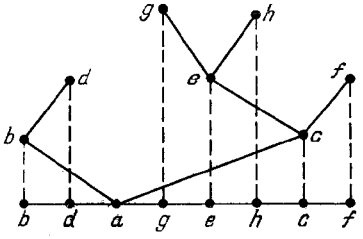

Рис. 6.

(a) Если b и c принадлежат одному уровню дерева T, $b \leqslant d$, $c \leqslant g$ и $b \lhd c$, то $d \lhd g$.

(b) Если $a < c < e$, то $a \lhd c$, если и только если $a \lhd e$.

Такой порядок $\lhd$ без труда строится индукцией по уровням T, однако он не является единственным; мы совершенно свободны в устройстве порядка на точках, непосредственно следующих за какой-нибудь точкой x, и положение x относительно этих точек также совершенно произвольно. Заметим, что если T является поддеревом дерева вида ${}^{<\alpha}2$, то лексикографический порядок будет сжатием естественного порядка на T.

4.10. Теорема. *Пусть кардинал $\varkappa$ регулярен, множество T с порядком $<$ является $\varkappa$-деревом Ароншайна, а $\lhd$ есть сжатие $<$. Тогда не существует строго возрастающих или строго убывающих $\varkappa$-последовательностей в T в смысле $\lhd$.*

Доказательство. Пусть, напротив, $\langle x_\alpha\colon \alpha < \varkappa\rangle$ есть, к примеру, возрастающая последовательность. Для каждого $\xi < \varkappa$ выберем точку y_ξ из ξ-го уровня следующим образом. Фиксируем такое $\alpha < \varkappa$, что для всех $\beta > \alpha$ точка x_β лежит выше уровня ξ. Для каждого $\beta > \alpha$ через z_β обозначаем элемент ξ-го уровня, лежащий под x_β. Тогда последовательность $\langle z_\beta\colon \alpha < \beta < \varkappa\rangle$ будет неубывающей в смысле $\lhd$, и тем самым она в конце концов стабилизируется, сохраняя постоянное зна-

чение. Это значение и обозначим через y_ξ. Теперь $\{y_\xi\colon \xi<\varkappa\}$ есть путь сквозь T — противоречие. □

Деревья Суслина являются весьма изящными деревьями Ароншайна. Сжатое дерево Суслина становится (после незначительного преобразования) континуумом Суслина. С другой стороны, отправляясь от континуума Суслина, с помощью метода доказательства теоремы Чеха — Поспишила можно получить дерево Суслина.

Более формально, *антицепью* в T называется такое множество $A\subseteq T$, что для любых различных x, $y\in A$ будет $x\not<y$ и $y\not<x$. Каждое $\varkappa$-дерево Ароншайна, не имеющее антицепей мощности $\varkappa$, называется *$\varkappa$-деревом Суслина*. Справедлива

4.11. Теорема. *Континуум Суслина существует, если и только если существует ω_1-дерево Суслина.*

Доказательство. Пусть сначала T с порядком $<$ является ω_1-деревом Суслина. Достаточно построить плотный линейный несепарабельный порядок, удовлетворяющий у. с. ц., поскольку дедекиндово пополнение такого порядка (с удаленными первым и последним элементами) окажется континуумом Суслина.

Пусть $\lhd$ есть какое-нибудь сжатие порядка $<$. Порядок $\lhd$ удовлетворяет всем необходимым условиям, за исключением того, что он может не быть плотным и не удовлетворять у. с. ц. Чтобы обеспечить плотность, назовем точки x и y эквивалентными ($x\sim y$), если между ними имеется не более чем счетное число элементов в смысле $\lhd$. Положим $L=T/\sim$ с естественным отношением порядка, который также обозначим через $\lhd$.

Пусть $[x]$ есть класс эквивалентности точки x.

Построенное L, очевидно, плотно в себе. Чтобы проверить у. с. ц. для L, предположим противное, т. е. существует несчетное семейство F непересекающихся открытых интервалов в L. Если $([x],\ [y])\in F$, то между x и y имеется несчетно много элементов из T в смысле $\lhd$. Это позволяет индукцией по $\alpha<\omega_1$ выбрать x_α, y_α, z_α так, что $([x_\alpha],\ [y_\alpha])\in F$, $x_\alpha\lhd z_\alpha\lhd y_\alpha$, уровень z_α в T выше уровней x_α и y_α, а уровни x_α и y_α в T выше уровня каждого z_β, $\beta<\alpha$. Теперь множество $\{z_\alpha\colon \alpha<\omega_1\}$ оказывается несчетной антицепью в T.

Докажем несепарабельность L. Пусть множество $X\subseteq L$ счетно. Выбираем ординал $\alpha<\omega_1$, превосходящий уровни всех элементов классов эквивалентности, принадлежащих X. Если x принадлежит α-му уровню дерева T, то $[x]$ и все классы эквивалентности точек, лежащих над x в T, определяют одно и то же дедекиндово сечение в X. Поэтому не более чем два из таких классов могут принадлежать замыканию X. Таким образом, замыкание X счетно.

Построение дерева из континуума Суслина аналогично доказательствам 4.1 и 4.3. Пусть L с порядком $<$ — континуум Суслина. Положим $L'=L\cup\{-\infty,+\infty\}$ с очевидным порядком; тогда L' будет компактным. Теперь индукцией по $s\in{}^{<\omega_1}2$ определим замкнутые (возможно, вырожденные) интервалы $[a_s,b_s]\subseteq L'$ $(a_s\leqslant b_s)$. Положим $[a_{\langle\rangle},b_{\langle\rangle}]=L'=[-\infty,+\infty]$. Если $a_s=b_s$, то положим $[a_{s^\frown 0},b_{s^\frown 0}]=[a_{s^\frown 1},b_{s^\frown 1}]=[a_s,b_s]$. Если же $a_s<b_s$, то в качестве $a_{s^\frown 1}=b_{s^\frown 0}$ возьмем какую-нибудь точку из (a_s,b_s) и определим $a_{s^\frown 0}=a_s$, $b_{s^\frown 1}=b_s$, т. е. интервал $[a_s,b_s]$ расщепляется на два смежных интервала. Если же ординал $\operatorname{lh} s$ предел, то положим $[a_s,b_s]=\bigcap\{[a_{s\restriction\alpha},b_{s\restriction\alpha}]\colon \alpha<\operatorname{lh} s\}$.

Пусть $T=\{s\in{}^{<\omega_1}2\colon a_s<b_s\}$. Тогда T будет поддеревом дерева ${}^{<\omega_1}2$; проверим, что оно является ω_1-деревом Суслина. Во-первых, для каждого $p\in L$ мы можем выбрать функцию $f_p\colon \omega_1\to 2$ так, что $\forall\alpha<\omega_1\big(p\in[a_{f_p\restriction\alpha},\ b_{f_p\restriction\alpha}]\big)$. Поскольку не может быть строго убывающих ω_1-последовательностей интервалов, то должно существовать такое α, что $a_{f_p\restriction\alpha}=b_{f_p\restriction\alpha}=p$. Если α — наименьшее из таких, то положим $s_p=f_p\restriction\alpha$. Тогда ординал $\operatorname{lh}(s_p)$ предел и для всех $\xi<\operatorname{lh}(s_p)$ выполняется $s_p\restriction\xi\in T$. Так как

$$\{p\}=\bigcap\{[a_{s_p\restriction\xi},\ b_{s_p\restriction\xi}]\colon \xi<\operatorname{lh}(s_p)\},$$

то множество $\{a_t\colon t\in T\}\cup\{b_t\colon t\in T\}$ будет плотным в L' и, следовательно, несчетным. Поэтому и само T несчетно. С другой стороны, каждая антицепь (и, следовательно, каждый уровень) в T счетна, так как если A — антицепь, то все интервалы (a_s,b_s), где $s\in A$, попарно не пересекаются. Наконец, T будет деревом Ароншайна, поскольку любой путь сквозь T порождает строго убывающую ω_1-последовательность интервалов в L'. □

Согласно теоремам 3.8 и 4.11 принцип $\diamondsuit$ обеспечивает существование ω_1-деревьев Суслина. Такое дерево можно построить также с помощью прямого применения $\diamondsuit$. Как раз это построение более полезно для обобщений на большие кардиналы (см. § 11 гл. 5).

Хотя в элементарной топологии континуум Суслина вызывает более значительный интерес, дерево Суслина может быть непосредственно использовано для построения различных топологических пространств (см. Рудин [1]).

Более подробно о деревьях вообще см. Йех [1].

§ 5. Почти дизъюнктные множества

Ясно, что ω нельзя разбить на несчетное число непустых попарно непересекающихся (дизъюнктных) множеств. Тем не менее, если назвать множества x, $y \subseteq \omega$, удовлетворяющие условиям $|x| = |y| = \omega$ и $|x \cap y| < \omega$, *почти дизъюнктными*, то будет справедлива

5.1. Теорема. *Существует такое семейство* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, *что* $|\mathcal{A}| = 2^\omega$ *и элементы семейства* $\mathcal{A}$ *попарно почти дизъюнктны.*

Доказательство. Идея состоит в том, что любые два различных пути сквозь полное бинарное дерево высоты ω являются почти дизъюнктными. Поскольку ${}^{<\omega}2$ и ω равномощны, то будем строить $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}({}^{<\omega}2)$. Для каждого $f \in {}^{\omega}2$ положим $a_f = \{f \restriction n: n \in \omega\}$ и возьмем $\mathcal{A} = \{a_f: f \in {}^{\omega}2\}$. □

Обобщения на большие кардиналы зависят от дополнительных аксиом. Если x, $y \subseteq \varkappa$ таковы, что $|x| = |y| = \varkappa$, но $|x \cap y| < \varkappa$, то x, y назовем *почти дизъюнктными*. Чтобы повторить приведенное выше доказательство, дерево ${}^{<\varkappa}2$ должно иметь мощность ровно $\varkappa$, а это не обязательно так. Известно, что существование семейства, состоящего из 2^{ω_1} попарно почти дизъюнктных подмножеств ординала ω_1, нельзя ни доказать, ни опровергнуть в теории $\mathrm{ZFC} + 2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_3$.

Метод доказательства теоремы 5.1 оказалось возможным использовать и для доказательства утверждений о поведении степеней сингулярных кардиналов. Теории ZFC не противоречит утверждение о том, что функция степени exp на регулярных кардиналах может принимать любые значения, подчиняясь лишь некоторым очевидным ограничениям (например, утверждения $\exp(\omega) = \omega_{\omega_1}$, $\exp(\omega_1) = \exp(\omega_2) = \omega_{\omega_{17}+35}$ и т. п. непротиворечивы, см. статью Истона [1] или теорему 5.9 гл. 4). Но для сингулярных кардиналов положение остается неопределенным. Неизвестно, непротиворечиво ли утверждение о том, что GCH впервые нарушается на кардинале ω_ω (т. е. $\forall n < \omega (\exp(\omega_n) = \omega_{n+1})$, но $\exp(\omega_\omega) \geqslant \omega_{\omega+2}$). Однако этого не может быть для ω_{ω_1} в силу следующей теоремы:

5.2. Теорема (Сильвер). *Если для всех* $\alpha < \omega_1$ *выполняется* $\exp(\omega_\alpha) = \omega_{\alpha+1}$, *то* $\exp(\omega_{\omega_1}) = \omega_{\omega_1+1}$.

Доказательство Сильвера включало метаматематические идеи, лежащие вне материала этой главы. Мы изложим прямое комбинаторное доказательство, найденное независимо Баумгартнером, Йенсеном и Прикры.

Следующая лемма является обобщением теоремы 5.1, хотя в ней речь идет о почти дизъюнктных функциях.

5.3. Лемма. *Предположим, что* $\exp(\omega_\alpha) = \omega_{\alpha+1}$ *для всех* $\alpha < \omega_1$. *Тогда найдется такое* $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}(\omega_{\omega_1})$, *что:*

(a) $\forall f, g \in \mathcal{F} (f \neq g \to \exists \alpha < \omega_1 \forall \beta > \alpha (f(\beta) \neq g(\beta)))$.

(b) $\forall f \in \mathcal{F} \forall \alpha < \omega_1 (f(\alpha) < \omega_{\alpha+1})$.

(c) $|\mathcal{F}| = \exp(\omega_{\omega_1})$.

Доказательство. Для каждого $\alpha < \omega_1$ зафиксируем биекцию φ_α из $\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ в $\omega_{\alpha+1}$. Если $X \subseteq \omega_{\omega_1}$, то положим $f_X(\alpha) = \varphi_\alpha(X \cap \omega_\alpha)$. Теперь определим $\mathcal{F}$ равенством $\mathcal{F} = \{f_X: X \subseteq \omega_{\omega_1}\}$. □

Попытаемся ограничить мощность $\mathcal{F}$. Если в (b) написать $f(\alpha) < \omega_\alpha$, то искомое ограничение можно было бы получить из леммы о сдавливании 2.3. Имеет место более общая

5.4. Лемма. *Пусть* $\exp(\omega_\alpha) = \omega_{\alpha+1}$ *для всех* $\alpha < \omega_1$. *Пусть также* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет* 5.3 (a) *и следующему условию:*

(b′) $\forall f \in \mathcal{F}$ (*множество* $\{\alpha: f(\alpha) < \omega_\alpha\}$ *стационарно*).

Тогда $|\mathcal{F}| \leqslant \omega_{\omega_1}$.

Доказательство. Для каждого $f \in \mathcal{F}$ определим f^*: $\omega_1 \to \omega_1$ так, что $|f(\alpha)| = \omega_{f^*(\alpha)}$. Тогда множество $\{\alpha: f^*(\alpha) < \alpha\}$ стационарно, и поэтому, согласно 2.3, найдется такое $\beta_f < \omega_1$ и такое стационарное $S_f \subseteq \omega_1$, что $\forall \alpha \in S_f (f^*(\alpha) = \beta_f)$.

Мы имеем только ω_1 возможных значений величин β_f и ω_2 возможных значений величин S_f. Более того, для любых фиксированных β и S выполняется

$$|\{f \in \mathcal{F}: \beta_f = \beta \text{ и } S_f = S\}| \leqslant (\omega_{\beta+1})^{\omega_1} \leqslant \omega_{\beta+2},$$

так как все функции вида $f \restriction S$ являются различными (по (a)) функциями из S в $\omega_{\beta+1}$. Таким образом, $|\mathcal{F}| \leqslant \omega_{\omega_1}$. □

Можно получить следующее обобщение доказанной леммы:

5.5. Лемма. *Пусть* $\exp(\omega_\alpha) = \omega_{\alpha+1}$ *для всех* $\alpha < \omega_1$. *Пусть функция* g: $\omega_1 \to \omega_{\omega_1}$ *такова, что* $\forall \alpha (g(\alpha) < \omega_{\alpha+1})$. *Пусть, наконец, семейство* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет* 5.3 (a) *и следующему условию:*

(b″) $\forall f \in \mathcal{F}$ (*множество* $\{\alpha: f(\alpha) < g(\alpha)\}$ *стационарно*).

Тогда $|\mathcal{F}| \leqslant \omega_{\omega_1}$.

Доказательство. Для каждого $\alpha < \omega_1$ фиксируем биекцию ψ_α из $g(\alpha)$ в ω_α. Пусть $f'(\alpha)$ равно $\psi_\alpha(f(\alpha))$ при $f(\alpha) < g(\alpha)$ и равно $f(\alpha)$ при $f(\alpha) \geqslant g(\alpha)$. Теперь применим лемму 5.4 к семейству $\{f': f \in \mathcal{F}\}$. □

Пусть теперь семейство $\mathcal{F}$ таково, как в 5.3. Для завершения доказательства теоремы 5.2 достаточно установить равенство $|\mathcal{F}| = \omega_{\omega_1+1}$. Если f, $g \in \mathcal{F}$ различны и множество $\{\alpha:$

$f(\alpha) < g(\alpha)\}$ нестационарно (т. е. множество $\{\alpha\colon g(\alpha) < f(\alpha)\}$ содержит з. н. о. подмножество), то будем писать $g < f$. Тогда лемма 5.5 утверждает, что, каково бы ни было $g \in \mathscr{F}$, неравенство $g < f$ выполняется для всех, за исключением не более чем ω_{ω_1}, элементов f семейства $\mathscr{F}$. Тем самым мы можем индукцией по $\mu < \omega_{\omega_1+1}$ выбрать $f_\mu \in \mathscr{F}$ так, что будет $\mu < \gamma \to f_\mu < f_\nu$. Положим $\mathscr{F}_\mu = \{g \in \mathscr{F}\colon g < f_\mu\}$. Из 5.5 следует равенство $\bigcup\{\mathscr{F}_\mu\colon \mu < \omega_{\omega_1+1}\} = \mathscr{F}$, но снова из 5.5 вытекает $|\mathscr{F}_\mu| \leqslant \omega_{\omega_1}$ для каждого μ. Это и дает $|\mathscr{F}| = \omega_{\omega_1+1}$. □

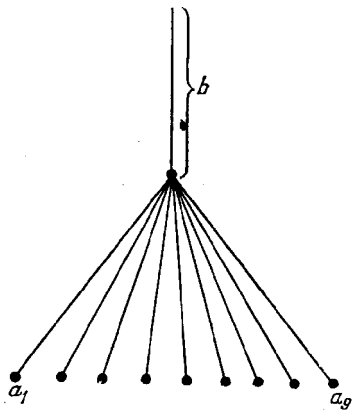

Рис. 7.

Теорема 5.2 допускает следующее обобщение:

5.6. Теорема. *Если* $\omega < \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ *и множество* $\{\varkappa < \lambda\colon \exp(\varkappa) = \varkappa^+\}$ *стационарно в* λ, *то* $\exp(\lambda) = \lambda^+$.

О дальнейших обобщениях см. Галвин и Хайнал [1].

С почти дизъюнктными семействами связано следующее понятие квазидизъюнктности. Если семейство $\mathscr{A}$ таково, что для некоторого фиксированного b равенство $a \cap a' = b$ выполняется для любых различных a, $a' \in \mathscr{A}$, то говорят, что семейство $\mathscr{A}$ *квазидизъюнктно*, или образует Δ-систему (см. рис. 7). Это b называется корнем $\mathscr{A}$. Следующая «лемма о Δ-системах» часто используется в топологии и комбинаторике.

5.7. Теорема. *Если* $\mathscr{A}$ *есть несчетное семейство конечных множеств, то найдется несчетное квазидизъюнктное семейство* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.

Доказательство. Поскольку существует только ω конечных кардиналов, то мы можем предполагать, что все множества из $\mathscr{A}$ имеют мощность n для некоторого фиксированного $n \in \omega$. Теперь проводим доказательство индукцией по n. Для $n = 1$ теорема 5.7 тривиальна (корень $b = 0$). Пусть $n = m + 1$, где $m \geqslant 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: некоторый элемент p принадлежит несчетному числу членов семейства $\mathscr{A}$. Применим индуктивное предположение к семейству $\{a - \{p\}\colon a \in \mathscr{A}$ и $p \in a\}$.

Случай 2: такого p нет. Индукцией по $\alpha < \omega_1$ подберем $a_\alpha \in \mathscr{A}$ так, чтобы $a_\alpha \cap a_\beta = 0$ для всех $\beta < \alpha$. Положим $\mathscr{B} = \{a_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$. □

Относительно обобщений теоремы 5.7 на другие кардиналы см. Юхас [1].

Укажем одно из элементарных топологических приложений теоремы 5.7. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет у. с. ц., если не существует несчетных семейств попарно непересекающихся непустых открытых в X множеств. Пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет у. с. ц. для всех n. Континуум Суслина (если он существует — см. § 3) также удовлетворяет у. с. ц., но его квадрат не удовлетворяет. Теории множеств не противоречит утверждение о том, что любое произведение пространств, удовлетворяющих у. с. ц., также удовлетворяет у. с. ц. (см. гл. 6). Следующая теорема показывает, что в этом вопросе достаточно смотреть только на конечные произведения. Из нее также следует у. с. ц. для пространств $\mathbb{R}^\varkappa$ при любом кардинале $\varkappa$.

5.8. Теорема. *Пусть* $\prod_{i \in I} X_i$ *есть произведение пространств* X_i, *не удовлетворяющее у. с. ц. Тогда найдется такое конечное* $b \subseteq I$, *что* $\prod_{i \in b} X_i$ *не удовлетворяет у. с. ц.*

Доказательство. Пусть множество $\{V_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ состоит из попарно непересекающихся базисных открытых множеств в данном произведении. Каждое V_α зависит лишь от конечного множества координат $a_\alpha \subseteq I$. Согласно 5.7 найдется такое несчетное множество $T \subseteq \omega_1$, что семейство $\{a_\alpha\colon \alpha \in T\}$ образует Δ-систему с корнем b. Через V_α^* обозначим проекцию V_α на $\prod_{i \in b} X_i$. Тогда все $V_\alpha^*(\alpha \in T)$ попарно не пересекаются, и поэтому $\prod_{i \in b} X_i$ не будет удовлетворять у. с. ц. □

§ 6. Партиционное исчисление

Интуитивно, графом является любое множество точек пространства, некоторые из которых соединены линиями (рис. 8). Формально пусть $[I]^2 = \{\{x, y\}\colon x, y \in I$ и $x \neq y\}$. Тогда *графом* является такая пара $\langle I, \mathscr{E}\rangle$, что $\mathscr{E} \subseteq [I]^2$. Таким образом, в графе на рис. 8А $I = 4$ и $\mathscr{E} = \{\{0, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\}$. Граф $\langle I', \mathscr{E}'\rangle$ называется *подграфом* графа $\langle I, \mathscr{E}\rangle$, если $I' \subseteq I$ и $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \cap [I']^2$; поэтому граф А будет подграфом графа В. *Полным графом* на I называется граф $\langle I, [I]^2\rangle$, а *пустым* — граф $\langle I, \varnothing\rangle$.

Один из частных случаев конечного варианта теоремы Рамсея утверждает, что если граф имеет не менее шести точек, то либо он содержит пустой трехточечный подграф (например, {1, 4, 5} в графе В), либо содержит трехточечный полный подграф (например, {0, 1, 2} в графе Г). Граф Б показывает, что это может быть не так для графов, содержащих лишь пять точек. Мы предлагаем читателю проверить, что шести точек оказывается достаточным.

Рамсей доказал следующее общее утверждение: для каждого $j \in \omega$ найдется такое $i \in \omega$, что если граф $\langle I, \mathscr{E} \rangle$ имеет по меньшей мере i точек, то у него есть либо пустой, либо полный подграф с j точками. Через $R(j)$ обозначаем наименьшее из таких i; тогда $R(2) = 2$ и $R(3) = 6$. К несчастью, мы не имеем хорошей формулы для $R(j)$. С другой стороны, бесконечная комбинаторика, к счастью, оказывается более простой,

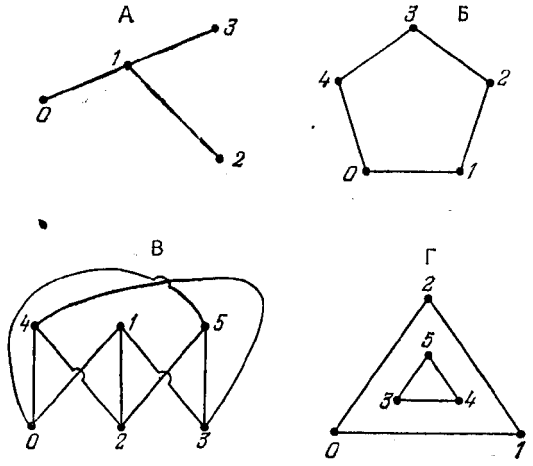

Рис. 8.

чем конечная: $R(\omega) = \omega$, и R для большинства остальных бесконечных кардиналов можно явно выразить в терминах кардинальной арифметики.

Все эти понятия могут быть обобщены двумя способами.

Во-первых, если σ есть кардинал, то функция P: $[I]^2 \to \sigma$ называется *разбиением* $[I]^2$ на σ частей. Это P можно представлять себе как раскраску ребер полного графа на I в одну из σ возможных красок. При этом графы в предыдущем смысле можно рассматривать как разбиения множества $[I]^2$ на две части; например на рис. 8 в графе А ребра $\{0, 1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2\}$ раскрашены в черный цвет, а остальные три ребра — в белый (и поэтому их не видно).

Во-вторых, можно рассматривать множества $[I]^n = \{F \subseteq I : |F| = n\}$ и разбиения P: $[I]^n \to \sigma$.

Если P: $[I]^n \to \sigma$ и множество $H \subseteq I$ таково, что функция P постоянна на $[H]^n$, то назовем H *однородным* для P. Обозначение Эрдёша $\varkappa \to (\lambda)^n_\sigma$ используется как сокращение следующего утверждения: для каждого разбиения P: $[\varkappa]^n \to \sigma$ найдется однородное для P множество $H \subseteq \varkappa$ мощности λ. В частности,

выполняется $6 \to (3)^2_2$, но $5 \not\to (3)^2_2$. Заметим, что если $\varkappa \to (\lambda)^n_\sigma$, $\varkappa' \geqslant \varkappa$, $\lambda' \leqslant \lambda$, $\sigma' \leqslant \sigma$ и $n' \leqslant n$, то $\varkappa' \to (\lambda')^{n'}_{\sigma'}$.

Конечный вариант теоремы Рамсея, который мы не будем доказывать, утверждает, что для всех натуральных n, σ, λ найдется такое натуральное $\varkappa$, что $\varkappa \to (\lambda)^n_\sigma$. Вопрос о том, насколько малым может быть $\varkappa$, все еще остается предметом многих исследований (см. Эрдёш, Хайнал и Радо [1]). Ниже $\varkappa$ и λ всегда будут бесконечными кардиналами. Эрдёш и Радо [1] заметили, что $\varkappa \not\to (\omega)^\omega_2$ для любого $\varkappa$, и поэтому n всегда будет конечным (если опустить аксиому выбора, то отношения вроде $\varkappa \to (\lambda)^\omega_2$ могут быть непротиворечивыми, см. Клейнберг [1]).

Мы докажем, что для любых n, σ и λ найдется такое $\varkappa$, что $\varkappa \to (\lambda)^n_\sigma$, и во многих случаях будет получена формула, дающая наименьшее из таких $\varkappa$. Начнем со следующей теоремы.

6.1. Теорема (Рамсей). $\omega \to (\omega)^n_\sigma$ *для любых* n, $\sigma \in \omega$.

Первым нетривиальным случаем этой теоремы является $\omega \to (\omega)^2_2$.

Доказательство 6.1 будет проведено после того, как мы обсудим ситуацию для больших кардиналов, так как довольно много результатов можно получить одним и тем же методом.

Если в 6.1 заменить ω на ω_1, то теорема станет ложной. Это показывает любое из утверждений (a), (b) следующей теоремы (нужно взять $\varkappa = \omega$):

6.2. Теорема. *Для любого* $\varkappa$ *выполняется*:

$$\text{(a)}\ 2^\varkappa \not\to (3)^2_\varkappa,$$

$$\text{(b)}\ 2^\varkappa \not\to (\varkappa^+)^2_2.$$

Доказательство. Для доказательства (a) отождествим $2^\varkappa$ с множеством всех функций из $\varkappa$ в 2 и положим $P(\{f, g\})$ равным наименьшему из таких ординалов α, что $f(\alpha) \neq g(\alpha)$.

Перед доказательством (b) сначала докажем лемму.

6.3. Лемма. *Если* $\varkappa \to (\lambda)^2_2$ *и множество* L *с линейным порядком* $<$ *имеет мощность* $\varkappa$, *то найдется либо возрастающая, либо убывающая* λ*-последовательность элементов* L.

Доказательство. Пусть $\lhd$ есть произвольный полный порядок на L. Определим разбиение P: $[L]^2 \to 2$ следующим образом: $P(\{x, y\}) = 0$, если и только если $<$ и $\lhd$ совпадают на x, y. Теперь однородное для P множество мощности λ дает искомую последовательность. □

Чтобы вывести (b) из леммы, достаточно построить упорядоченное множество мощности $2^\varkappa$, не имеющее возрастающих и убывающих $\varkappa^+$-последовательностей. Если $\varkappa = \omega$, то подходит

совокупность всех действительных чисел. В общем случае берем в качестве L упорядоченное лексикографически множество всех функций из $\varkappa$ в 2. Требуемые свойства этого множества доказываются совершенно аналогично доказательству теоремы 4.10. □

Если перейти в 6.2 к кардиналу $(2^{\varkappa})^+$, то можно получить положительный результат, именно $(2^{\varkappa})^+ \to (\varkappa^+)^2_{\varkappa}$. Вообще, определим $\exp_0(\varkappa) = \varkappa$; $\exp_{n+1}(\varkappa) = 2^{\exp_n(\varkappa)}$. Тогда справедлива

6.4. Теорема. (Эрдёш и Радо [2]). *Для любого $\varkappa$ и любого $n \geqslant 1$ выполняется* $(\exp_{n-1}(\varkappa))^+ \to (\varkappa^+)^n_{\varkappa}$.

Мы докажем эту теорему позже, но сформулируем здесь без доказательства утверждение о том, что она дает наилучший возможный результат. Доказательство может быть извлечено из статьи Эрдёша, Хайнала и Радо [1].

6.5. Теорема. *Для всех $n \geqslant 1$ справедливо*:

$$(\mathrm{a})\ \exp_{n-1}(\varkappa) \not\to (\varkappa^+)^n_2,$$
$$(\mathrm{b})\ \exp_{n-1}(\varkappa) \not\to (n+2)^n_{\varkappa}.$$

В силу 6.4 для любых n, σ и λ найдется такое $\varkappa$, что $\varkappa \to (\lambda)^n_{\sigma}$. В некоторых случаях, например, когда λ не предел и $\sigma < \lambda$, теоремы 6.4 и 6.5 дают наилучшее из таких $\varkappa$. Можно указать наилучшее $\varkappa$ и для большинства остальных случаев (см. Эрдёш, Хайнал и Радо [1]), но результаты выглядят слишком скучными, чтобы их здесь приводить. Наиболее интересный вопрос: может ли $\varkappa$ равняться λ? Первая нетривиальная возможность $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$ немедленно приводит к большим кардиналам.

6.6. Теорема. *Если $\varkappa > \omega$ и $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$, то кардинал $\varkappa$ сильно недостижим.*

Доказательство. В силу 6.2(b) для каждого $\lambda < \varkappa$ будет $2^{\lambda} \not\to (\lambda^+)^2_2$. В то же время поскольку $\lambda^+ \leqslant \varkappa$, то $\varkappa \to (\lambda^+)^2_2$. Таким образом, из $\lambda < \varkappa$ вытекает $2^{\lambda} < \varkappa$. Предположим, что $\varkappa$ нерегулярен, скажем, $\varkappa = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} A_{\xi}$, где все A_{ξ} попарно не пересекаются, имеют мощность $< \varkappa$, и $\alpha < \varkappa$. Определим разбиение P: $[\varkappa]^2 \to 2$, положив $P(\{x, y\}) = 0$, если и только если x и y принадлежат одному и тому же A_{ξ}. Тогда P не может иметь однородное множество мощности $\varkappa$. □

На самом деле $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$ влечет даже, что $\varkappa$ является $\varkappa$-м по счету сильно недостижимым кардиналом (см. § 7).

Теперь перейдем к рассмотрению полного спектра свойств: $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$, $\varkappa \to (\varkappa)^3_2$ и т. д. К счастью, все они в сущности совпадают:

6.7. Теорема. *Если $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$, то $\varkappa \to (\varkappa)^n_{\sigma}$ выполняется для всех $n < \omega$ и $\sigma < \varkappa$.*

Мы должны теперь представить читателю три доказательства: 6.1, 6.4 и 6.7. Мы отложили их потому, что они настолько похожи, что с одинаковым успехом могут быть сделаны одновременно. Сходство наблюдается в четырех моментах. Во-первых, все три теоремы доказываются индукцией по n. Во-вторых, они тривиальны для $n = 1$.

В-третьих, все они используют понятие предоднородного множества в осуществлении индуктивного шага. Пусть P: $[\theta]^{n+1} \to \sigma$ и $H \subseteq \theta$. Множество H называется *предоднородным* (п. о.) для P, если P на $[H]^{n+1}$ не зависит от последнего элемента $(n+1)$-ки, т. е. $P(\{x_1, \ldots, x_n, y\}) = P(\{x_1, \ldots, x_n, z\})$ всякий раз, когда $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_n < y$, $x_n < z$ и $x_1, \ldots, x_n, y, z \in H$. Если H является п. о. для P и H не имеет наибольшего элемента, то можно определить Q: $[H]^n \to \sigma$, полагая $Q(\{x_1, \ldots, x_n\}) = P(\{x_1, \ldots, x_n, y\})$ для некоторого (любого) $y \in H$, превосходящего все ординалы $x_1, \ldots, x_n$. Если множество $K \subseteq H$ однородно для Q, то оно будет однородным и для P. Тем самым существование большого п. о. множества вместе с индуктивным предположением о разбиениях n-ок может дать партиционное отношение для $n+1$-ок. Точнее, теоремы 6.1, 6.4 и 6.7 доказываются индукцией с использованием соответственно утверждений (a), (b), (c) следующей леммы:

6.8. Лемма. *Пусть $n \geqslant 1$ Тогда*:

(a) *Если $\sigma < \omega$ и P: $[\omega]^{n+1} \to \sigma$, то существует бесконечное п. о. множество для P.*

(b) *Если $\theta > \sigma^{<\lambda}$ и P: $[\theta]^{n+1} \to \sigma$, то найдется п. о. множество для P мощности λ.*

(c) *Если $\sigma < \varkappa$, $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$ и P: $[\varkappa]^{n+1} \to \sigma$, то найдется п. о. множество для P мощности $\varkappa$.*

Заметим, что в доказательстве 6.4 утверждение (b) используется при $\theta = (\exp_n(\varkappa))^+$, $\lambda = (\exp_{n-1}(\varkappa))^+$ и $\sigma = \varkappa$. Утверждение (b) применяется также для получения других партиционных отношений, не покрывающихся сформулированными выше теоремами. Например, если $\varkappa$ строго недостижим, то $\varkappa^+ \to (\varkappa)^2_{\sigma}$ для любого $\sigma < \varkappa$ (нужно взять $\theta = \varkappa^+$ и $\lambda = \varkappa$). Вероятно, целесообразнее помнить доказательство леммы 6.8 (оно следует ниже), чем большое количество разрозненных на первый взгляд партиционных отношений.

Четвертым моментом сходства наших доказательств является то, что искомое п. о. множество строится по некоторому пути сквозь подходящее дерево. В доказательстве 6.8 (a) используется лемма Кёнига 4.7 о том, что нет ω-деревьев Ароншайна. В доказательстве 6.8 (b) используются прямые мощностные соображения. Наконец, доказательство 6.8(c) основано на следующей лемме Кёнига для $\varkappa$:

6.9. Лемма. *Если* $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$, *то нет* $\varkappa$*-деревьев Ароншайна.*

Доказательство. По теореме 4.10 $\varkappa$-дерево Ароншайна может быть сжато до линейного порядка мощности $\varkappa$, не имеющего возрастающих и убывающих $\varkappa$-последовательностей. Но тогда, согласно 6.3, мы получим $\varkappa \not\to (\varkappa)^2_2$. □

Докажем теперь лемму 6.8 для случая $n = 1$. Общая картина такова: мы имеем разбиение P: $[\theta]^2 \to \sigma$ и хотим получить п. о. множество мощности λ. Будет определено дерево T, являющееся поддеревом полного σ-арного дерева ${}^{<\lambda}\sigma$. Также будет построена функция h: $T \to \theta$, удовлетворяющая условию: если f: $\lambda \to \sigma$ есть путь сквозь T, то $\{h(f \restriction \xi)$: $\xi < \lambda\}$ является п. о. множеством для P, занумерованным в возрастающем порядке. Кроме того, разбиение Q, определяемое так, как указано перед 6.8, будет связано с функцией f равенством $Q(\{h(f \restriction \xi)\}) = f(\xi)$. Поэтому T окажется деревом возможных разбиений Q, а h будет определять возможные п. о. множества для элементов дерева T.

Перейдем к деталям. Для каждого $s \in {}^{<\lambda}\sigma$ определим $h(s) \in \theta$ и $A(s) \subseteq \theta$ следующим образом:

(i) $A(\langle\,\rangle) = \theta$.

(ii) Если $A(s) \neq \varnothing$, то $h(s)$ является наименьшим элементом множества $A(s)$; в противном случае $h(s) = 0$ (второй случай несуществен).

(iii) Если ординал $\operatorname{lh} s$ пределен, то $A(s) = \bigcap\{A(s \restriction \xi)$: $\xi < \operatorname{lh} s\}$.

(iv) $A(s^\frown\mu) = A(s) \cap \{\gamma > h(s)$: $P(\{h(s), \gamma\}) = \mu\}$.

Пусть $T = \{s$: $A(s) \neq \varnothing\}$. Если теперь функция f: $\lambda \to \sigma$ такова, что $\forall \xi < \lambda\,(f \restriction \xi \in T)$, то для всех $\xi < \eta < \lambda$ будет $h(f \restriction \eta) \in A(f \restriction (\xi + 1))$, и поэтому $P(\{h(f \restriction \xi), h(f \restriction \eta)\}) = f(\xi)$. Таким образом, множество $\{h(f \restriction \xi)$: $\xi < \lambda\}$ будет п. о. множеством. Чтобы убедиться в существовании такой функции f, заметим, что если для всякого $s \in {}^{<\lambda}\sigma$ ординал $\gamma < 0$ не равен $h(s)$, то можно построить функцию f индукцией так, что $\gamma \in A(f \restriction \xi)$ для всех ξ. Такое построение осуществимо, поскольку $h(s)$ есть единственный элемент множества $A(s)$, не принадлежащий множеству $\bigcup\{A(s^\frown\mu)$: $\mu < \sigma\}$ и, таким образом, $\gamma \in A(s^\frown\mu)$ для некоторого (единственного) $\mu < \sigma$.

Это рассуждение приводит нас к желаемому результату в случае, когда кардинал $\sigma^{<\lambda}$ меньше чем θ. Таким образом, 6.8 (b) доказано (при $n = 1$). Что касается 6.8 (a) и (c), то здесь $\theta = \lambda$ и θ есть либо ω, либо недостижимый кардинал, и поэтому $\sigma^{<\lambda} = \theta$, но $\sigma^{<\alpha} < \theta$ для всех $\alpha < \theta$. В этом случае наше рассуждение показывает только, что рассматриваемое дерево имеет высоту θ, так как для любого $\alpha < \theta$ мы можем выбрать ординал γ, не равный никакому $h(s)$ при $\operatorname{lh} s < \alpha$, и получить такое f длины α, что $\gamma \in A(f)$. Таким образом, если нет путей сквозь T, то T должно быть деревом Ароншайна. Поэтому 6.8 (a) и (c) (для $n = 1$) следуют соответственно из леммы Кёнига и леммы 6.9.

Чтобы доказать 6.8 для произвольного $n \geqslant 1$, мы будем работать не с ${}^{<\lambda}\sigma$, а с деревом всех возможных разбиений n-ок. Для каждого $\xi < \lambda$ положим $S^n_\xi = \{s$: s: $[\xi]^n \to \sigma\}$. Тогда S^n_ξ будет ξ-м уровнем дерева $S^n = \bigcup\{S^n_\xi$: $\xi < \lambda\}$, упорядоченного так: $s \leqslant t$, если и только если $s \subseteq t$. При $n = 1$ дерево S^n можно отождествить с ${}^{<\lambda}\sigma$.

Пусть P: $[\theta]^{n+1} \to \sigma$ — данное разбиение. Для каждого $s \in S^n$ определим $h(s) \in \theta$ и $A(s) \subseteq \theta$ так:

(i) $A(\varnothing) = \theta$.

(ii) $h(s)$ есть наименьший элемент множества $A(s)$, если $A(s) \neq \varnothing$; если же $A(s) = \varnothing$, то $h(s) = 0$.

(iii) Если ординал η пределен и $s \in S^n_\eta$, то $A(s) = \bigcap\{A(s \restriction [\xi]^n)$: $\xi < \eta\}$.

(iv) Если $s \in S^n_\xi$, $t \in S^n_{\xi+1}$ и $s \leqslant t$, то $A(t) = A(s) \cap \{\gamma > h(s)$: $\forall F \in [\xi + 1]^n\,(P(h(F) \cup \{\gamma\}) = t(F))\}$.

В записи (iv) $h(F)$ означает $\{h(t \restriction [\eta_1]^n), h(t \restriction [\eta_2]^n), \ldots, h(t \restriction [\eta_n]^n)\}$, где $F = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$. После этих определений доказательство для произвольного n проходит совершенно аналогично доказательству для $n = 1$. □

Таким образом, доказана лемма 6.8 и теоремы 6.1, 6.4 и 6.7. Более внимательный просмотр рассуждений, относящиеся к 6.7, показывает, что фактически доказана

6.10. Теорема. *Пусть* $\varkappa > \omega$. *Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны*:

(i) $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$.

(ii) *Для всех* $n < \omega$ *и* $\sigma < \varkappa$ *выполняется* $\varkappa \to (\varkappa)^n_\sigma$.

(iii) $\varkappa$ *сильно недостижим и нет* $\varkappa$*-деревьев Ароншайна.*

(iv) *В каждом линейно упорядоченном множестве мощности* $\varkappa$ *найдется возрастающая или убывающая* $\varkappa$*-последовательность.*

Доказательство. (ii)→(i) тривиально. (i)→(iv) есть лемма 6.3. Доказательство 6.9 обеспечивает (iv)→(iii), если только мы докажем, что (iv) влечет сильную недостижимость $\varkappa$. Чтобы проверить это, вернемся назад к доказательству 6.6. Доказательство того, что из $\lambda < \varkappa$ следует $2^\lambda < \varkappa$, остается тем же.

Если $\varkappa$ нерегулярен, то мы могли бы, следуя обозначениям 6.6, определить порядок $\lhd$ на $\varkappa$ следующим образом: $x \lhd y$, если либо $x < y$ и x, y принадлежат одному и тому же A_ξ, либо же $x \in A_\xi$, $y \in A_\eta$ и $\xi > \eta$. Тогда в $\varkappa$ не может быть возрастающих или убывающих в смысле $\lhd$ $\varkappa$-последовательностей. Наконец, наше доказательство теоремы 6.7 позволяет установить (iii)$\to$ $\to$(i). □

Работа Эрдёша, Хайнала, Мате и Радо [1] содержит еще k теорем о партиционном исчислении.

§ 7. Большие кардиналы

Математики часто играют в следующую детскую игру: игроки по очереди называют числа с целью превзойти число соперника. Это является игрой скорее в психологическом, чем в формальном смысле, так как я могу всегда добавить единицу к числу соперника. Однако моей целью будет попытка полностью подавить соперника, превзойдя его число с помощью какого-то совершенно нового принципа. Таким образом, последовательность ходов может быть такой:

я: 17,

противник: 1 295 387,

я: $10^{10^{10}}$,

противник: ω,

я: $\omega_{(\omega_\omega)}$,

...

Следующие этапы этой игры, являющиеся предметом рассмотрений этого параграфа, основаны на различных свойствах недостижимости. Мы будем проводить здесь различие между слабыми и сильными свойствами. Например, кардинал $\varkappa$ называется (*слабо*) *предельным*, если $\lambda^+ < \varkappa$ всякий раз, когда $\lambda < \varkappa$, и он называется *сильно предельным*, если $2^\lambda < \varkappa$ всякий раз, когда $\lambda < \varkappa$. Кардинал $\varkappa$ называется *слабо недостижимым*, если он регулярен, предел и $> \omega$; кардинал $\varkappa$ называется *сильно недостижимым*, если он регулярен, сильно предел и $> \omega$. В предположении GCH слабые и сильные свойства совпадают, но непротиворечиво предположение о том, что существует слабо недостижимый кардинал $< 2^\omega$, если существование какого-нибудь недостижимого кардинала не приводит к противоречию.

После того как противник назвал первый недостижимый кардинал, с моей стороны было бы не очень большой хитростью назвать второй недостижимый, поэтому взамен я назову первый гипернедостижимый кардинал. Кардинал $\varkappa$ называется (*слабо/сильно*) *гипернедостижимым кардиналом*, если он регулярен и является пределом слабо/сильно недостижимых кардиналов. Понятие гипергипернедостижимости и т. д. будет после этого очевидным, и поэтому противнику придется использовать первый кардинал Мало.

Кардинал $\varkappa$ называется *слабо Мало* кардиналом, если $\varkappa > \omega$ регулярен и совокупность всех регулярных кардиналов $< \varkappa$ стационарна в $\varkappa$. Кардинал $\varkappa$ называется *сильно Мало* кардиналом, если он слабо Мало и сильно недостижим.

7.1. Лемма. *Если $\varkappa$ является (слабо/сильно) Мало, то множество $\{\alpha < \varkappa$: α (слабо/сильно) недостижим$\}$ стационарно в $\varkappa$.*

Доказательство. Заметим, что множество $\{\alpha < \varkappa$: α (слабо/сильно) предел$\}$ является з. н. о. в $\varkappa$, а пересечение з. н. о. множества и стационарного множества стационарно. □

Теперь легко видеть, что в 7.1 мы можем заменить «недостижим» на «гипернедостижим» или «гипергипернедостижим».

Далее возникает понятие кардинала гипер-Мало, получающееся, когда мы потребуем, чтобы множество всех кардиналов Мало до $\varkappa$ было стационарным в $\varkappa$, а затем и очевидный переход к гипергипер-Мало, и т. д. В этой ситуации я полностью уничтожу противника, назвав первый слабо компактный кардинал.

Кардинал $\varkappa$ называется *слабо компактным*, если $\varkappa > \omega$ и $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$. В 6.10 мы получили различные комбинаторные утверждения, эквивалентные этому определению. Оно также эквивалентно различным логическим предложениям, включающим инфинитарные формулы длины $< \varkappa$ (см., например, Барвайс [1]).

Сразу не очевидно, что слабая компактность является свойством больших кардиналов, хотя мы знаем (6.6), что она влечет сильную (!) недостижимость (к несчастью, «сильная компактность» употребляется совсем в другом смысле, см. добавление или Дрейк [1]). Однако справедлива

7.2. Теорема. *Если кардинал $\varkappa$ слабо компактен, то $\varkappa$ является сильно гипергипер-Мало.*

Сначала удобно доказать следующую теорему:

7.3. Теорема. *Если кардинал $\varkappa$ слабо компактен, а множество $S \subseteq \varkappa$ стационарно, то найдется такой регулярный кардинал $\lambda < \varkappa$, что $S \cap \lambda$ стационарно в λ.*

Чтобы получить 7.2 из 7.3, применим сперва 7.3 к произвольному з. н. о. множеству $S \subseteq \varkappa$. Получим регулярный кардинал $\lambda \in S$; поэтому $\varkappa$ является сильно Мало. Далее, пусть $S_1 = \{\lambda < \varkappa$: λ сильно недостижим$\}$. Каково бы ни было з. н. о.

$C \subseteq \varkappa$, мы можем применить 7.3 к множеству $S = C \cap S_1$ и получить такой регулярный кардинал $\lambda \in C$, что $S_1 \cap \lambda$ стационарно в λ (т. е. λ является сильно Мало). Итак, совокупность сильно Мало кардиналов $< \varkappa$ стационарна в $\varkappa$. Теперь мы можем заменить S_1 на $S_2 = \{\lambda < \varkappa$: λ сильно Мало$\}$ в предыдущем рассуждении, и доказать, что $\varkappa$ будет сильно гипергипер-Мало.

Доказывая 7.3, мы можем предполагать, что S состоит только из бесконечных кардиналов. Пусть f: $\varkappa \to \varkappa$ — возрастающая взаимно однозначная функция, перенумеровывающая S. Положим $T = \{s \in {}^{<\varkappa}\varkappa$: s — биекция и $\forall \xi < \mathrm{lh}\, s\, (s(\xi) < f(\xi))\}$.

Это T является поддеревом дерева ${}^{<\varkappa}\varkappa$. Если бы высота T равнялась $\varkappa$, то T было бы $\varkappa$-деревом Ароншайна, так как любой путь сквозь T порождает взаимно однозначную сдавливающую функцию на S, что противоречит 2.3. С другой стороны, в силу 6.10 не существует $\varkappa$-деревьев Ароншайна. Поэтому 7.3 следует из такой леммы:

7.4. Лемма. *Пусть A является таким множеством бесконечных кардиналов, что для любого регулярного λ множество $A \cap \lambda$ не стационарно в λ. Тогда существует взаимно однозначная функция g, определенная на множестве A и удовлетворяющая неравенству $g(\alpha) < \alpha$ при любом $\alpha \in A$.*

Доказательство. Обозначим $\gamma = \sup(A)$ и предположим, что 7.4 справедливо для всех A' с меньшим sup. Имеем три случая:

Случай 1: кардинал γ непределен. Этот случай тривиален.

Случай 2: кардинал γ сингулярен. Пусть $\theta = \mathrm{cf}(\gamma)$, а $\langle \delta_\mu$: $\mu < \theta\rangle$ является непрерывно возрастающей конфинальной в γ последовательностью, причем каждое δ_μ — кардинал и $\delta_0 > \theta$.

Пусть g_μ: $A \cap \delta_\mu \to \delta_\mu$ удовлетворяет 7.4. Определим g: $A \to$ следующим образом:

$$g(\alpha) = \begin{cases} g_0(\alpha) + 1, & \text{если } \alpha < \delta_0, \\ \delta_\mu + g_{\mu+1}(\alpha), & \text{если } \delta_\mu < \alpha < \delta_{\mu+1}, \\ \omega \cdot \mu, & \text{если } \alpha = \delta_\mu. \end{cases}$$

Случай 3: кардинал γ регулярен и предел. Действуем аналогично случаю 2 (с $\theta = \gamma$), но обеспечиваем $\delta_\mu \notin A$ для всех μ. □

Можно было бы предполагать, что заключение теоремы 7.3 эквивалентно слабой компактности, но это оказывается неопровержимым (Йенсен, см. теорему 14.2 гл. 5) и недоказуемым (Кюнен [2]) в теории ZFC + GCH (см. § 3 гл. 3).

Слабо компактные кардиналы являются началом, а не концом теории больших кардиналов. Эта игра продолжается уже на значительно более высоких уровнях (см. Сильвер [1], Шенфилд [1], Соловей, Рейнгардт и Канамори [1]). Необходимо отметить, что можно ошибочно назвать несуществующее число. Уже было несколько случаев, когда правдоподобные предположения о больших кардиналах оказывались противоречащими теории ZFC (Кюнен [1]). Противоречивость слабо компактных кардиналов не установлена. Однако возможно сама ZFC противоречива.

Добавление [1]). Чрезвычайно большие кардиналы

Задаваясь каким-нибудь свойством P кардиналов $\varkappa$, мы исследуем, будет или не будет выполняться $P(\varkappa)$ для некоторых, большинства или всех кардиналов $\varkappa$. В этой главе обсуждались результаты именно такого рода, в которых P есть какое-то комбинаторное свойство. Иногда обнаруживалось, что некоторое комбинаторное свойство, как, например, $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$, встречается чрезвычайно редко, поскольку наименьшее $\varkappa$, удовлетворяющее $P(\varkappa)$, невероятно велико: настолько велико, что мы даже не можем доказать с помощью обычных аксиом теории множеств, что найдется кардинал $\varkappa$, удовлетворяющий $P(\varkappa)$. В таких случаях предложение «существует кардинал $\varkappa$ такой, что $P(\varkappa)$» называют гипотезой большого кардинала, по крайней мере до тех пор, пока оно не опровергнуто.

Для всех гипотез больших кардиналов, рассмотренных в § 7 этой главы, можно предложить более или менее удовлетворительное обоснование, следуя идеям, изложенным в конце главы 1, — удовлетворительное во всяком случае настолько, что, пожалуй, никто не ожидает, что эти гипотезы будут опровергнуты.

Существуют, однако, другие, более проблематичные гипотезы больших кардиналов. Для них до сих пор нет удовлетворительного обоснования. Тем не менее они далеки от того, чтобы быть опровергнутыми, и приводят к построению чрезвычайно красивых теорий. Исследования в этом направлении очень полно представлены в литературе, и поэтому мы только наметим основные направления и укажем соответствующие источники из списка литературы.

Две гипотезы больших кардиналов можно рассматривать как непосредственные усиления слабой компактности. Это гипотеза кардинала Рамсея и невыразимого кардинала. Через $\chi \to (\lambda)^{<\omega}_\sigma$ обозначим следующее утверждение: каково бы ни было семейство $\langle P_n$: $n \in \omega\rangle$ разбиений P_n: $[\chi]^n \to \sigma$, найдется множество $H \subseteq \chi$ мощности λ, однородное для каждого разбие-

[1]) Добавлено редакторами английского издания книги.

ния P_n. *Кардиналом Рамсея* называется такой кардинал $\varkappa$, что $\varkappa \to (\varkappa)^{<\omega}_2$; последнее условие эквивалентно $\varkappa \to (\varkappa)^{<\omega}_\sigma$ для всех $\sigma < \varkappa$. Далее, через $\varkappa \to (\mathrm{stat})^n_\sigma$ обозначим следующее утверждение: для каждого разбиения P: $[\varkappa]^n \to \sigma$ найдется стационарное однородное для P множество $H \subseteq \varkappa$. *Невыразимым* называется такой кардинал $\varkappa$, что $\varkappa \to (\mathrm{stat})^2_2$; утверждение $\varkappa \to (\mathrm{stat})^2_2$ эквивалентно $\varkappa \to (\mathrm{stat})^2_\sigma$ для всех $\sigma < \varkappa$, но строго слабее, чем $\varkappa \to (\mathrm{stat})^3_2$ (Баумгартнер [1]).

Конечно, каждый невыразимый кардинал или кардинал Рамсея $\varkappa$ будет слабо компактным. Кроме того, множество всех слабо компактных кардиналов до такого $\varkappa$ стационарно в $\varkappa$. Первый кардинал Рамсея не является невыразимым, но невыразимые кардиналы образуют стационарное множество в любом кардинале Рамсея.

Существование невыразимого кардинала не противоречит аксиоме конструктивности $V = L$ Гёделя, в то время как существование кардинала Рамсея влечет счетность множества $\mathcal{P}(\omega) \cap L$ (см. Сильвер [1]). Оно также позволяет доказать измеримость по Лебегу каждого Σ^1_2-множества действительных чисел, в то время как это утверждение ложно в L (см. гл. 8).

Свойство, приводящее к еще бо́льшим кардиналам, — измеримость — исторически мотивировано проблемой совсем иного рода: может ли существовать счетно полный ультрафильтр. Кардинал $\varkappa > \omega$ называется *измеримым*, если существует $\varkappa$-полный неглавный ультрафильтр на $\varkappa$. Существование измеримого кардинала эквивалентно существованию счетно полного неглавного ультрафильтра на любом множестве. Если $\varkappa$ измерим, то он невыразим и является кардиналом Рамсея, причем множество всех кардиналов до $\varkappa$, удовлетворяющих этим обоим свойствам, стационарно в $\varkappa$.

В главе 3 «Теории моделей» рассматриваются ультрастепени. Многие из свойств измеримых кардиналов доказаны методом Скотта, состоящим в использовании ультрафильтра на $\varkappa$ для построения ультрастепени универсума всех множеств. Изложение этого материала, данное Шенфилдом [1], остается наилучшим.

Аксиомы существования еще бо́льших кардиналов получаются постулированием ультрафильтров некоторых специальных видов. Например, кардинал $\varkappa$ *сильно компактен*, если каждый $\varkappa$-полный фильтр на любом множестве может быть расширен до $\varkappa$-полного ультрафильтра. Соловей [2] доказал, что если кардинал $\varkappa$ сильно компактен, то GCH выполняется на всех сингулярных сильно предельных кардиналах выше $\varkappa$.

Известно (Леви и Соловей [1]), что существование измеримого кардинала не влечет ни CH, ни отрицание CH. Пока остается открытым следующий вопрос: могут ли кардиналы вроде сильно компактного давать что-нибудь интересное для дескриптивной теории множеств, скажем, измеримость по Лебегу всех Σ^1_3-множеств действительных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

Банах, Тарский (Banach S., Tarski A.)
1. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. — Fundam. math., 1924, **6**, p. 244—277.

Барвайс (Barwise J.)
1. Admissible Sets and Structures. — Berlin: Springer, 1975.

Баумгартнер (Baumgartner J.)
1. Ineffability properties of cardinals I. — In: Coll. Math. Soc. János Bolyai 10, Infinite and finite sets. Keszthely, 1973, p. 109—130.

Галвин, Хайнал (Galvin F., Hajnal A.)
1. Inequalities for cardinal powers. — Ann. Mat., 1975, **101**, p. 491—498.

Девлин, Юнсбротен (Devlin K., Johnsbråten H.)
1. The Souslin Problem. — Berlin: Springer, 1974.

Дрейк (Drake F.)
1. Set Theory, an Introduction to Large Cardinals. — Amsterdam: North-Holland, 1974.

Истон (Easton W.)
1. Powers of regular cardinals. — Ann. Math. Logic, 1970, **1**, p. 139—178.

Иех (Jech T.)
1. Trees. — J. Symbolic Logic, 1971, **36**, p. 1—14.

Клейнберг (Kleinberg E.)
1. Strong partition properties for infinite cardinals. — J. Symbolic Logic, 1970, **35**, p. 410—428.

Кюнен (Kunen K.)
1. Elementary embeddings and infinitary combinatorics. — J. Symbolic Logic, 1971, **36**, p. 406—413.
2. Saturated ideals. — J. Symbolic Logic, 1978, **43**, № 1, p. 65—76.

Леви, Соловей (Levy A., Solovay R.)
1. Measurable cardinals and the continuum hypothesis. — Israel J. Math., 1967, **5**, p. 234—248.

Лузин Н. Н.
1. Sur un problème de M. Baire. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1914, **158**, p. 1258—1261. [Русский перевод: Об одной проблеме Бэра. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 681—683.]

Митчелл (Mitchell W.)
1. Aronszajn trees and the independence of the transfer property. — Ann. Math. Logic, 1972, **5**, p. 21—46.

Рудин (Rudin M. E.)
1. Lectures on Set Theoretic Topology. — Providence, R. I., 1975.

Серпинский (Sierpiński W.)
1. Hypothèse du Continu. — Chelsea, N. Y., 1934. 2 ed. — Chelsea, N. Y., 1956.

Сильвер (Silver J.)
1. The bearing of large cardinals on constructibility. — In: Studies in Model Theory, MAA Studies in Math., **8**. Buffalo, N. Y., 1973, p. 158—182.

Соловей (Solovay R.)
1. Real-valued measurable cardinals. — In: AMS Proc. Symp. Pure Math., **13**, part 1. Providence, R. I., 1971, p. 397—428.

2. Strongly compact cardinals and the GCH. — In: AMS Proc. Symp. Pure Math., **25** Providence, R. I., 1974, p. 365—372.

Соловей, Рейнгардт, Канамори (Solovay R., Reinhardt W., Kanamori A.)
1. Strong axioms of infinity and elementary embeddings. — Ann. Math. Logic, 1978, **13**, № 1, p. 73—116.

Улам (Ulam S.)
1. Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. — Fundam. math., 1930, **16**, S. 140—150.

Халмош (Halmos P.)
1. Naive Set Theory. — N. Y.: Van Nostrand, 1960.

Шенфилд (Shoenfield J.)
1. Measurable cardinals. — In: Logic Collogium 69/Ed. Gandy R. D. and Yates C. M. E. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 19—49.

Эрдёш, Радо (Erdös P., Rado R.)
1. Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. — Proc. London Math. Soc., 1952, 2(3), p. 417—439.
2. A partition calculus in set theory. — Bull. Amer. Math. Soc., 1956, **62**, p. 427—489.

Эрдёш, Хайнал, Радо (Erdös P., Hajnal A., Rado R.)
1. Partition relations for cardinal numbers — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1965, **16**, p. 93—196.

Эрдёш, Хайнал, Мате, Радо (Erdös P., Hajnal A., Máté A., Rado R.)
1. Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals. — 1977.

Юхас (Juhász I.)
1. Cardinal Functions in Topology. — Amstredam: Mathematisch Centrum, 1971.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Абрамсон, Харрингтон, Клейнберг, Цвиккер (Abramson F., Harrington L., Kleinberg E., Zwicker W.)
1. Flipping properties: a unifying thread in the theory of large cardinals. — Ann. Math. Logic, 1977, **12**, p. 25—58.

Клейнберг (Kleinberg E.)
1. Infinitary Combinatorics and the Axiom of Determinateness. — Berlin: Springer, 1977.

Книга Клейнберга [1] содержит полное исследование комбинаторики в теории множеств с аксиомой детерминированности. Статья Абрамсона и др. [1] дает изложение теории больших кардиналов с помощью флип-определений. Оказывается, что большие кардиналы, имеющие довольно разнородные классические определения, получают «однородные» определения в терминах флипов.

Добавленная при переводе литература содержит обширную библиографию по вопросам комбинаторики. — *Прим. перев.*

Глава 4

ВЫНУЖДЕНИЕ

Джон П. Берджес

СОДЕРЖАНИЕ

§ 0. Введение 99
Добавление. Некоторые определения 102
§ 1. Анализ моделей теории множеств 104
§ 2. Вынуждение 109
§ 3. Континуум-гипотеза 118
§ 4. Полезные комбинаторные принципы 127
§ 5. Однократное расширение вместо двукратного 139
§ 6. Аксиома Мартина 147
Литература 156

§ 0. Введение

Коэн [1] доказал, что, добавляя отрицание ¬CH континуум-гипотезы CH к аксиомам теории множеств, мы не получим противоречия, если сами эти аксиомы непротиворечивы. Как говорят логики, ¬CH *совместимо* с аксиомами теории множеств, или *непротиворечиво* относительно этих аксиом. Поскольку вся классическая математика основана на этих аксиомах, то маловероятно, что в них удастся найти противоречие. Таким образом, результат Коэна исключает возможность опровержения ¬CH (т. е. доказательства CH) в обычном математическом смысле. Так как Гёдель [1] еще раньше исключил возможность опровергнуть CH (это обсуждается в гл. 5 о конструктивности), то ни положительное, ни отрицательное решение проблемы континуума не может быть дано в рамках классической математики.

Метод Коэна, называемый *вынуждением* (форсингом), с тех пор был использован для доказательства (относительной) непротиворечивости различных гипотез трансфинитной арифметики, инфинитарной комбинаторики, общей топологии, теории меры, топологии действительно прямой, универсальной алгебры и теории моделей. Мы надеемся представить этот метод в виде, доступном для читателя, неискушенного в логике и имеющего минимальные знания о теории множеств (в рамках, например,

книги Халмоша [1]). Наше изложение метода вынуждения сопровождается доказательствами непротиворечивости некоторых принципов, часто используемых в настоящей книге.

Аксиомами теории множеств мы называем аксиомы Цермело — Френкеля, включающие аксиому выбора (ZFC). (См. гл. 1. В книге Халмоша [1] в сущности используется теория ZFC.) Точное знание аксиом не является обязательным. Однако обязательной является вера в то, что вся классическая математика следует из этих аксиом. Основные определения, относящиеся к кардиналам и ординалам, собраны в добавлении к этому параграфу.

Непротиворечивость неевклидовой геометрии была доказана построением моделей для нее. Аналогично модели участвуют в доказательствах непротиворечивости методом вынуждения. Определение модели теории ZFC требует некоторых предварительных определений.

0.1. Формальные символы теории множеств. Для работы с множествами вводится некоторая формальная символика:

Переменные для множеств $x, y, z, \ldots$

Логические знаки $\neg$ (не),

$\wedge$ (и), $\vee$ (или),

$\rightarrow$ (если ..., то ...),

$\leftrightarrow$ (если и только если).

Кванторы $\forall$ (для каждого), $\exists$ (существует).

Знак равенства $=$.

Знак принадлежности $\in$.

Используются также круглые скобки.

Примеры. С помощью этой символики мы можем выразить (y есть подмножество множества x) так:

(i) $\forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x)$.

Далее, равенство $w = \mathcal{P}(x)$ (степень, или множество всех подмножеств множества x) можно выразить следующим образом:

(ii) $\forall y\,(y \in w \leftrightarrow \forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x))$.

Наконец, утверждение о том, что $\mathcal{P}(x)$ существует для каждого множества x, выражается так:

(iii) $\forall x \exists w \forall y\,(y \in w \leftrightarrow \forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x))$.

Это одна из аксиом теории ZFC.

0.2. Определение (синтаксис). Последовательность формальных символов, которая соответствует предложению русского[1]) языка и не является пустым выражением или бессмысленной комбинацией знаков, является (правильно построенной) *формулой*. Таким образом, записи 0.1 (i)—(iii) являются формулами, в то время как следующая запись формулой не является:

$$\forall z\,(z \in y \rightarrow \wedge \vee \exists x) y = \ .$$

[1]) В оригинале — английского. — *Прим. перев.*

Вхождение переменной x в формулу φ называется свободным, если она не является частью никакой подформулы φ, начинающейся с $\forall x$ или $\exists x$. Таким образом, в 0.1 (i) переменные x и y свободны. В 0.1 (ii) x и w свободны, а y и z нет. Формула 0.1 (iii) вообще не имеет свободных переменных. Такие формулы называются *замкнутыми формулами* или предложениями. (Более строгие определения см. в §§ 2 и 3 гл. 1 «Теории моделей».) Ниже в § 1 будут указаны другие примеры перевода русских предложений на язык формальной символики. Надеемся, что читатель поверит в возможность выражения даже таких утверждений, как CH, в виде замкнутой формулы.

0.3. Определение (семантика). Множество a называется *транзитивным*, если всякий раз, когда $b \in a$ и $c \in b$, мы имеем $c \in a$, или, эквивалентно, если каждый элемент множества a является подмножеством a. Пусть множество M транзитивно, а формула φ замкнута. Будем говорить, что φ *истинна внутри* M, и писать $M \models \varphi$, если φ становится истинной, когда мы будем истолковывать кванторы $\forall x$ и $\exists x$ в φ не буквально, т. е. «для всех множеств x» и «для некоторого множества x», а относительно, т. е. «для всех $x \in M$» и «для некоторого $x \in M$». Если формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ имеет свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$ и множества $a_1, \ldots, a_n$ принадлежат M, то будем писать $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, если φ становится истинной при вышеуказанном понимании кванторов и замене переменных $x_1, \ldots, x_n$ множествами $a_1, \ldots, a_n$ соответственно.

Пример. Пусть $\varphi(x, y)$ есть формула 0.1 (i), выражающая $y \subseteq x$. Тогда $M \models \varphi(a, b)$, если и только если для каждого $c \in M$ из $c \in b$ следует $c \in a$. Поскольку в силу транзитивности M содержит все $c \in b$, то это означает, что все $c \in b$ удовлетворяют $c \in a$, т. е. $b \subseteq a$. Таким образом, в этом случае $M \models \varphi(a, b)$, если и только если $\varphi(a, b)$ на самом деле истинно.

Пусть теперь $\psi(x, w)$ есть формула $\forall y\,(y \in w \leftrightarrow \varphi(x, y))$, выражающая равенство $w = \mathcal{P}(x)$. Тогда $M \models \psi(a, d)$, если и только если для всех $b \in M$ мы имеем: $b \in d$, если и только если $M \models \varphi(a, b)$, т. е. $b \subseteq a$. Поскольку все $b \in d$ принадлежат M, то это означает, что все $b \in d$ являются подмножествами a, а все подмножества a, *которые принадлежат* M, будут принадлежать и d, т. е. $d = \mathcal{P}(a) \cap M$. Но так как вовсе не обязательно, чтобы все подмножества множества a принадлежали M, то мы можем получить $M \models \psi(a, d)$, в то время как

$\psi(a, d)$ на самом деле ложно, т. е. $d = \mathcal{P}(a) \cap M \neq \mathcal{P}(a)$. Аксиома степени $\forall x \exists w \psi(x, w)$ истинна в M, если всякий раз, когда $a \in M$, найдется такое $d \in M$, что $M \models \psi(a, d)$, или, что то же самое, если из $a \in M$ следует $\mathcal{P}(a) \cap M \in M$.

Моделью теории ZFC называется такое транзитивное множество, внутри которого истинны все аксиомы ZFC. Сокращение СТМ расшифровывается как счетная транзитивная модель ZFC. *Везде ниже предполагается, что СТМ существует.* Мы покажем, что это предположение влечет существование такой СТМ M, что $M \models \neg$CH. С помощью одного из нескольких известных логикам приемов доказательство этой импликации может быть превращено в доказательство того, что если в ZFC нет противоречия, то его не будет и в ZFC $+ \neg$CH. Это как раз и есть упомянутый выше результат об относительной непротиворечивости. (Указание. Нужно использовать теоремы компактности, отражения и Лёвенгейма — Скулема, см. также Коэн [1], гл. IV, § 11.)

Могло бы показаться (цитируем Скулема [1]) «весьма странным и, очевидно, парадоксальным положением дел», что теория ZFC, в которой можно доказать существование очень больших несчетных множеств, может иметь счетную модель. Кроме того, любой элемент a данной СТМ M будет подмножеством M и поэтому будет счетным, как и сама M. Тем не менее (снова цитируем Скулема) «в сущности нет никакого противоречия в том, что множество a ... несчетно в этом смысле [внутри M]; действительно, это означает только, что *в* M нет взаимно однозначного отображения Φ множества a на ... последовательность [натуральных] чисел», что вовсе не препятствует существованию такого отображения *вне* модели M.

Мы будем допускать вольность речи и говорить, что некоторое предложение русского языка истинно в модели, в то время как истинна формула, соответствующая этому предложению. В случае, когда имеются два «перевода» φ, ψ одного и того же русского предложения и когда они оба разумны, эквивалентность $\varphi \leftrightarrow \psi$ должна быть теоремой. Поэтому она должна быть истинной в любой СТМ M. Таким образом, $M \models \varphi$, если и только если $M \models \psi$, и не имеет значения, какую именно формулу мы берем в качестве «официального» перевода. Мы уже допускали ранее такую вольность речи, когда говорили о несчетности множества $a \in M$ в смысле модели M.

Добавление. Некоторые определения

См. также гл. 1 и гл. 3 (о з. н. о. множествах и деревьях).

Ординалы могут быть охарактеризованы либо как те транзитивные множества, все элементы которых транзитивны, либо как те транзитивные множества, элементы которых линейно упорядочены $\in$-отношением. Малые греческие буквы, кроме φ, ψ, χ, θ, резервируются для обозначения ординалов. Пишут $\alpha < \beta$, если и только если $\alpha \in \beta$. Тем самым, $\alpha = \{\beta\colon \beta < \alpha\}$. *Непосредственным последователем* $\alpha + 1$ ординала α является $\alpha \cup \{\alpha\}$. Ординал, не равный 0 и не являющийся последователем другого ординала, называется *предельным*. $\mathrm{Lim}(\alpha)$ означает, что α предален. Наименьший предельный ординал обозначается через ω, его элементы — это *конечные* ординалы. *Верхней гранью* $\sup X$ множества X ординалов называется наименьший ординал, который не меньше любого ординала из X. Это совпадает с объединением $\bigcup X$, состоящим из всех элементов элементов множества X. *Полным упорядочением* множества X является такое линейное упорядочение X, в смысле которого каждое непустое множество $Y \subseteq X$ имеет наименьший элемент; $\in$-отношение дает естественное полное упорядочение любого ординала α. На самом деле любое полное упорядочение изоморфно естественному упорядочению некоторого единственного ординала, называемого (порядковым) *типом* данного полного упорядочения.

Мощностью $\mathrm{card}\, X$ множества X называется наименьший ординал $\varkappa$ такой, что существует биекция между X и $\varkappa$. *Кардинал* — это любой ординал $\varkappa$, удовлетворяющий равенству $\mathrm{card}\, \varkappa = \varkappa$. Если $\varkappa$ есть кардинал, то через $2^{\varkappa}$, или $\exp_2(\varkappa)$, обозначаем $\mathrm{card}\, \mathcal{P}(\varkappa)$. $\varkappa^+$ есть наименьший кардинал $> \varkappa$. Через ω_1 обозначается ω^+, через $\omega_2 = \omega_1^+$ и т. д. *Континуум-гипотеза* (CH) — *это равенство* $2^{\omega} = \omega_1$. *Обобщенной континуум-гипотезой* GCH называется утверждение о том, что равенство $2^{\varkappa} = \varkappa^+$ справедливо для всех бесконечных кардиналов $\varkappa$. *Конфинальностью* $\mathrm{cf}\, \alpha$ предельного ординала α называется наименьший ординал λ такой, что найдется функция f с областью определения λ, удовлетворяющая равенству $\sup \mathrm{ran} f = \alpha$, где $\mathrm{ran} f$ есть множество всех значений f. Если $\varkappa$ — кардинал, то $\mathrm{cf}\, \varkappa$ есть наименьший кардинал λ такой, что $\varkappa$ является объединением λ множеств, каждое из которых имеет мощность $< \varkappa$. Кардинал $\varkappa$ *регулярен*, если $\mathrm{cf}\, \varkappa = \varkappa$, в противном случае $\varkappa$ *сингулярен*. Кардиналы вида $\varkappa^+$ называются *непредельными*, остальные кардиналы — *предельными*. *Сильно* предельным называется такой кардинал $\varkappa$, что $2^{\lambda} < \varkappa$ выполняется для всех кардиналов $\lambda < \varkappa$. Кардинал ω и все непредельные кардиналы регулярны. Регулярный сильно предельный кардинал называется (сильно) *недостижимым*.

Пусть ординал α предален. Множество $A \subseteq \alpha$ *неограничено* в α, если $\sup A = \alpha$. A *замкнуто* в α, если всякий раз, когда $\beta < \alpha$ и $\sup(A \cap \beta) = \beta$, будет $\beta \in A$. Множество $A \subseteq \alpha$ называется *з. н. о.* в α, если оно одновременно замкнуто и неограни-

чено в α. Множество $A \subseteq \alpha$ *стационарно* в α, если $A \cap C \neq \varnothing$ для любого з. н. о. $C \subseteq \alpha$. Эти определения тривиальны при $\mathrm{cf}\,\alpha = \omega$. Если $\mathrm{cf}\,\alpha > \omega$, то пересечение з. н. о. множеств в числе $< \mathrm{cf}\,\alpha$ снова будет з. н. о., а пересечение з. н. о. множества и стационарного множества стационарно. (См. § 2 гл. 3.)

Отношение $\leqslant$ *частично упорядочивает* множество X, если $\leqslant$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. *Деревом* называется пара $T = \langle |T|, \leqslant_T \rangle$ такая, что отношение $\leqslant_T$ частично упорядочивает множество $|T|$, причем существует $\leqslant_T$-наименьший элемент, и для любого $a \in |T|$ множество всех $\leqslant_T$-предшественников a вполне упорядочено отношением $\leqslant_T$. Тип этого полного порядка называется *рангом* a. Множество $T_\alpha = \{a$: ранг $a = \alpha\}$ есть α-й *уровень* дерева T. *Высота* T — это наименьший ординал α такой, что $T_\alpha = \varnothing$. *Путем сквозь* T является такое множество $B \subseteq |T|$, что любые два элемента множества B $\leqslant_T$-сравнимы и B содержит по одному элементу из каждого уровня T_α, где α меньше, чем высота T. Обычно мы будем отождествлять $|T|$ и T (ср. § 4 гл. 3).

§ 1. Анализ моделей теории множеств

Мы видели, что формула $\varphi(x, y)$, выражающая включение $y \subseteq x$, имеет следующее свойство: каковы бы ни были СТМ M и множества a, $b \in M$, утверждение $M \models \varphi(a, b)$ имеет место, если и только если $\varphi(a, b)$ на самом деле истинно. Такие формулы будем называть *абсолютными*. Неабсолютной является, например, формула $\psi(x, w)$, выражающая $w = \mathcal{P}(x)$. Будем говорить, что предложение русского языка абсолютно, если абсолютной является соответствующая формула.

1.1. Лемма. *Следующие формулы абсолютны*:

(i) $y = \bigcup x$, *множество всех элементов элементов множества* x;

(ii) $z = x \cap y$ (*или* $z = x \cup y$);

(iii) $z = \{x, y\}$, *неупорядоченная пара*;

(iv) $z = \langle x, y \rangle$, *упорядоченная пара*;

(v) $z = x \times y$, *декартово произведение*;

(vi) z *является функцией*;

(vii) (z *есть бинарное отношение*) $\wedge\, x = \mathrm{dom}\, z$, *где* $\mathrm{dom}\, z$ *есть множество всех первых членов элементов отношения* z (*или* $x = \mathrm{ran}\, z$, *т. е.* x *есть множество вторых членов, или* $x \subseteq \mathrm{dom}\, z$ *и т. п.*);

(viii) z *есть вложение* (*или биекция*) *из* x *в* (*на*) y;

(ix) *множество* x *транзитивно*;

(x) OR (x), *т. е.* x *является ординалом*;

(xi) Lim (x), *т. е.* x *является предельным ординалом* (*или ординал* x *непределен, или конечен, или равен ординалу* ω);

(xii) $\mathrm{Lim}(x) \wedge y \subseteq x \wedge y$ *неограничено* (*или замкнуто, или з. н. о.*) *в* x;

(xiii) y *является рефлексивным* (*или транзитивным, или антисимметричным и т. п.*) *отношением на* x.

Доказательство. См. леммы 1.3 и 1.4 ниже.

1.2. Определение. Будем использовать выражения $\forall x \in y \varphi(x)$ и $\exists x \in y \varphi(x)$ как сокращения для $\forall x (x \in y \to \varphi(x))$ и $\exists x (x \in y \wedge \varphi(x))$. Будем также использовать $\forall x \in\in z\, \varphi(x)$ и $\exists x \in\in z\, \varphi(x)$ как сокращения для формул $\forall y \in z \forall x \in y\, \varphi(x)$ и $\exists y \in z \exists x \in y\, \varphi(x)$. Новые комбинации символов, использованные в этих обозначениях, называются *ограниченными* кванторами. Если с помощью перечисленных сокращений некоторую формулу можно записать так, чтобы она содержала только ограниченные кванторы, но не содержала обычных, то такая формула называется Δ_0-формулой.

Следующий результат известен из статьи Леви [1], которая содержит много дополнительных сведений об абсолютности.

1.3. Предложение. *Все* Δ_0-*формулы абсолютны.*

Доказательство. Вообще говоря, высказывания «для каждого множества x» и «для каждого $x \in M$» не являются эквивалентными, поэтому истинность внутри некоторой СТМ M может отличаться от «настоящей» истинности. Но если $y \in M$, то высказывания «для каждого $x \in y$» и «для каждого $x \in M$ такого, что $x \in y$» означает одно и то же, так как в силу транзитивности все $x \in y$ принадлежат модели M. Поскольку Δ_0-формулы включают только ограниченные кванторы типа «для каждого $x \in y$», то для этих формул истинность внутри M и «настоящая» истинность совпадают. Это и означает, что такие формулы абсолютны.

1.4. Лемма. *Предложения, о которых идет речь в лемме* 1.1, *могут быть выражены* Δ_0-*формулами.*

Доказательство. Укажем подходящие Δ_0-формулы (построение соответствующих формул для предложений, записанных в 1.1 в скобках, оставляется читателю).

(i) $\forall w \in y \exists z \in x (w \in z) \wedge \forall w \in\in x (w \in y)$,

(ii) $\forall w \in z (w \in x \wedge w \in y) \wedge \forall w \in\in x (w \in y \to w \in z)$,

(iii) $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z (w = x \vee w = y)$,

(iv) $\exists z_0 \in z \exists z_1 \in z (z = \{z_0, z_1\} \wedge z_0 = \{x, x\} \wedge z_1 = \{x, y\})$,

(v) $\forall w \in z \exists x' \in x \exists y' \in y (w = \langle x', y' \rangle) \wedge \forall x' \in x \forall y' \in y \exists w \in z (w = \langle x', y' \rangle)$,

(vi) $\forall w \in z \exists x \in\in w \exists y \in\in w (w = \langle x, y \rangle) \wedge \forall w_0 \in z \forall w_1 \in z \forall x_0 \in\in w_0 \forall x_1 \in\in w_1 \forall y_0 \in\in w_0 \forall y_1 \in\in w_1 (w_0 = \langle x_0, y_0 \rangle \wedge w_1 = \langle x_1, y_1 \rangle \wedge x_0 = x_1 \to y_0 = y_1)$,

(vii) $\forall w \in z \exists x' \in x \exists y \in\in w (w = \langle x', y\rangle) \wedge \forall x' \in x \exists w \in z \exists y \in\in w (w = \langle x', y\rangle)$,

(viii) (z является функцией) $\wedge x = \operatorname{dom} z \wedge \operatorname{ran} z \subseteq y \wedge \forall w_0 \in z \forall w_1 \in z \forall x_0 \in x \forall x_1 \in x \forall y_0 \in y \forall y_1 \in y (w_0 = \langle x_0, y_0\rangle \wedge w_1 = \langle x_1, y_1\rangle \wedge y_0 = y_1 \to x_0 = x_1)$,

(ix) $\forall y \in x \forall z \in y (z \in x)$,

(x) (x транзитивно) $\wedge \forall y \in x$ (y транзитивно),

(xi) $\operatorname{OR}(x) \wedge \forall z \in x \exists y \in x (z \in y)$,

(xii) $\operatorname{Lim}(x) \wedge y \subseteq x \wedge \forall z \in x \exists w \in y (z \in w)$,

(xiii) (y есть бинарное отношение) $\wedge x = \operatorname{dom} y \wedge x = \operatorname{ran} y \wedge \forall z \in x \exists w \in y (w = \langle z, z\rangle)$.

Ясно, что в (iv) равенство «$z = \{z_0, z_1\}$» можно записать в виде Δ_0-формулы с помощью (iii). □

1.5. Следствия абсолютности. (i) Нет необходимости постоянно писать длинные предложения вроде «пусть $f \in M$ таково, что $M \models$ (f есть функция)». Вполне достаточно написать «пусть $f \in M$ является функцией». В силу абсолютности формулы «быть функцией» истинность внутри M и «настоящая» истинность совпадают.

(ii) Благодаря абсолютности все СТМ замкнуты относительно многих теоретико-множественных операций. Если M есть СТМ, а $a \in M$ — бинарное отношение, то утверждение о существовании множества $\operatorname{ran} a$ вторых членов элементов множества a является теоремой (как «наивной» теории множеств, так и ZFC). Значит, это утверждение истинно в M, и поэтому найдется такое $b \in M$, что $M \models (b = \operatorname{ran} a)$. Но в силу абсолютности формулы $x = \operatorname{ran} z$ это множество b обязательно будет настоящей совокупностью всех вторых членов элементов множества a. Значит, $\operatorname{ran} a \in M$, т. е. M замкнуто относительно операции ran.

Аналогично M замкнуто относительно операции образования пар, относительно операций $\cap$ и $\times$ и т. п. Ординал ω и все конечные ординалы принадлежат M. А из нижеследующей леммы 1.6 мы получим замкнутость M относительно операции $\mathscr{P}_\omega(a) = \{b \subseteq a: b \text{ конечно}\}$.

(iii) Аксиома выделения Цермело, играющая важную роль в ZFC, утверждает, что для каждого множества a и любой формулы $\varphi(x)$ можно образовать множество $\{b \in a: \varphi(b)\}$. В приложении к СТМ M это означает, что для каждого $a \in M$ мы можем образовать множество $\{b \in a: M \models \varphi(b)\}$ внутри модели M. Если формула φ абсолютна, то это множество совпадает с множеством $\{b \in a: \varphi(b)\}$. Таким образом, можно «выделять» ординалы, функции и т. п. из любого множества $a \in M$, образовывая в M множества типа $\{b \in a: \operatorname{OR}(b)\}$, $\{b \in a: b \text{ является функцией}\}$.

(iv) Из уже известных свойств замкнутости данной СТМ M можно получать новые такие свойства. Например, если $a_1, \ldots, a_n \in M$, то в соответствии с замкнутостью относительно объединения и образования множества $\{x\}$, называемого *синглетом*, будет $\{a_1, \ldots, a_n\} \in M$. Таким образом, M замкнуто относительно образования конечных подмножеств.

Рассматривая замыкания относительно операций $\cap$, $\times$, ran и $\mathscr{P}_\omega$ и выделяя ординалы и функции, нетрудно доказать, что если множества a и b принадлежат M, то следующие множества принадлежат M:

$\{c \in \operatorname{ran} a: \exists d \in b (\langle d, c\rangle \in a)\} = \operatorname{ran}(a \cap (b \times \operatorname{ran} a))$,

$\{c \in \operatorname{ran} a: \operatorname{OR}(c)\}$,

$\{f: (f \text{ является функцией}) \wedge (\operatorname{dom} f \text{ конечно}) \wedge \operatorname{dom} f \subseteq a \wedge \operatorname{ran} f \subseteq b\} = \{f \in \mathscr{P}_\omega(a \times b): f \text{ является функцией}\}$.

Ниже при исследовании какой-нибудь СТМ M мы часто будем утверждать, что те или иные множества принадлежат M. Эти утверждения могут быть проверены указанным методом (хотя для такой проверки иногда бывает нужно использовать абсолютность формул, не упомянутых в лемме 1.1). При первом чтении мы рекомендуем принять эти утверждения на веру, чтобы не потерять нить рассуждений.

(v) В силу абсолютности для любой СТМ M и любого множества $a \in M$ мы имеем $M \models \operatorname{OR}(a)$, если и только если a на самом деле является ординалом. Пусть OR^M есть наименьший ординал $\alpha \notin M$. Тогда, если $\beta \in M$ и $\gamma < \beta$ (т. е. $\gamma \in \beta$), то $\gamma \in M$. Тем самым $\{\beta \in M: \operatorname{OR}(\beta)\} = \{\beta: \beta < \operatorname{OR}^M\} = \operatorname{OR}^M$.

(vi) Укажем некоторые неабсолютные понятия. Если M является СТМ и $a \in M$, то через $\mathscr{P}^M(a)$ обозначим степень множества a в смысле M, т. е. такое множество $b \in M$, что $M \models (b = \mathscr{P}(a))$. Мы уже видели выше в 0.3, что $\mathscr{P}^M(a) = \mathscr{P}(a) \cap M$ в силу абсолютности отношения «быть подмножеством». Аналогично через $\operatorname{card}^M a$ будем обозначать такое множество $b \in M$, что $M \models (b = \operatorname{card} a)$. Из абсолютности понятий ординала и биекции следует, что $\operatorname{card}^M a$ есть наименьший ординал $\alpha < \operatorname{OR}^M$ такой, что существует *принадлежащая* M биекция a на α. Если $a \in \mathscr{P}^M(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \operatorname{OR}^M$, то абсолютность понятия з. н. о. множества показывает, что $M \models (a$ стационарно), если $a \cap C \neq \varnothing$ для каждого з. н. о. множества $C \subseteq \alpha$, *принадлежащего* M.

Таким образом, хотя сами по себе понятия степени, мощности, стационарного множества и не являются абсолютными, но

абсолютность некоторых других понятий позволяет нам увидеть, как меняется смысл этих понятий при «погружении» в данную СТМ.

Грубо говоря, некоторое свойство абсолютно, если проверку его истинности для элементов произвольной СТМ M можно осуществить, оставаясь внутри M. Например, чтобы проверить, выполняется ли равенство $c=\{a, b\}$ для каких-то множеств a, b, $c\in M$, необходимо установить, что a и b принадлежат c и c не имеет других элементов, кроме a и b. Поскольку все элементы множества c принадлежат модели M, то для проверки указанного обстоятельства нет нужды выходить из M. Напротив, если $\alpha<\mathrm{OR}^M$ и $a\subseteq\alpha$, то для проверки стационарности множества a в α необходимо установить, что $a\cap C\neq\varnothing$ для всех з. н. о. множеств $C\subseteq\alpha$. Но так как, возможно, не все такие C принадлежат модели M, то мы не можем сделать этого внутри M.

1.6. Лемма. *Следующие формулы абсолютны*:

(i) *множество x конечно*,
(ii) $y=\mathscr{P}_\omega(x)$,
(iii) *y есть полное упорядочение множества x*,
(iv) (*y есть полное упорядочение множества x*) $\wedge\,\mathrm{OR}(z)\wedge$ $\wedge$(*z есть порядковый тип полного упорядочения y*).

Доказательство. Известно, что (i)—(iv) нельзя выразить Δ_0-формулами, поэтому придется обратиться к интуитивному пониманию абсолютности. Мы дадим доказательство (i), оставив (ii) читателю. Для доказательства (iii) достаточно заметить, что (iii) эквивалентно существованию изоморфизма упорядоченного множества x на некоторый ординал, см. Леви [1]. А (iv) доказывается с помощью (iii) и абсолютности понятия порядкового изоморфизма (незначительного усиления абсолютности понятия биекции).

Пусть M есть СТМ и $a\in M$. Для проверки конечности множества a нужно установить, существуют ли биекции из некоторого конечного ординала на a. Но понятия конечного ординала и биекции абсолютны. Кроме того, все конечные ординалы принадлежат M. Таким образом, для доказательства абсолютности достаточно показать, что если существует биекция f между a и некоторым конечным ординалом n, то f принадлежит модели M. Но f является конечным множеством упорядоченных пар элементов M, а M замкнуто относительно операций образования пар и конечных подмножеств, т. е. $\mathscr{P}_\omega(M)\subseteq M$. Таким образом, $f\in M$, что и требовалось. □

Вооружившись этими фактами о СТМ, можно перейти к изучению метода вынуждения, позволяющего строить различные СТМ, обладающие специальными свойствами.

§ 2. Вынуждение

Метод вынуждения Коэна (см. Коэн [1]) получил дальнейшее бурное развитие в работах многих специалистов по теории множеств (автор этой главы в их число не входит). Мы не указываем авторство основных лемм в этом и следующем пунктах, так как они стали частью теоретико-множественного фольклора. Напротив, отдельные результаты о непротиворечивости, полученные с помощью метода вынуждения, снабжены указанием их авторов. В предлагаемом изложении автор следует Шенфилду [1] и лекциям Соловея.

2.1. Определение. *ЧУ множеством* называется всякая пара $P=\langle|P|, \leqslant_P\rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) отношение $\leqslant_P$ частично упорядочивает множество $|P|$ (т. е. является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным отношением на $|P|$),

(ii) существует $\leqslant_P$-наибольший элемент 1_P,

(iii) не существует $\leqslant_P$-минимальных элементов.

Обычно мы будем отождествлять структуру P и ее *основное множество* $|P|$, а также опускать индексы у знаков $\leqslant$ и 1. Для каждого ЧУ множества P и любых $p, q\in P$ определим:

$p<q$, если $p\leqslant q$ и не выполняется $q\leqslant p$,

p и q *сравнимы*, если $p\leqslant q$ или $q\leqslant p$,

p и q *совместимы*, если найдется такое $r\in P$, что $r\leqslant p$ и $r\leqslant q$,

p и q *несовместимы*, если таких r нет.

Для каждого ЧУ множества P и любого $A\subseteq P$ определим:

A *открыто*, если из $p\in A$ и $q\leqslant p$ следует $q\in A$,

A *плотно*, если для каждого $p\in P$ найдется такое $q\in A$, что $q\leqslant p$,

A является *антицепью*, если любые два различных элемента множества A несовместимы.

Заметим, что антицепь $A\subseteq P$ будет *максимальной*, если и только если каждое $p\in P$ совместимо с некоторым $q\in A$. Множество $A\subseteq P$ назовем *плотным ниже* некоторого $p\in P$, если для каждого $p'\leqslant p$ найдется такое $q\in A$, что $q\leqslant p'$. Аналогично вводится определение *антицепи ниже* p.

Если ЧУ множества P, Q таковы, что $|Q|\subseteq|P|$, $1_P\in|Q|$ и $\leqslant_Q$ есть сужение порядка $\leqslant_P$ на множество $|Q|$, то Q назовем *подпорядком* ЧУ множества P. Пусть λ — предельный ординал. Назовем последовательность $\langle P_\alpha\colon \alpha<\lambda\rangle$ ЧУ множеств P_α возрастающей, если P_β является подпорядком P_α при $\beta<\alpha$. *Объединением* такой последовательности является ЧУ множество P, основное множество которого совпадает с объединением всех основных множеств $|P_\alpha|$ и отношение частичного порядка на котором совпадает с объединением всех частичных порядков

на ЧУ множествах P_α. Эти определения будут играть важную роль в § 5.

2.2. Определение. Пусть P есть ЧУ множество, а F — произвольное семейство множеств. Множество $G \subseteq P$ называется *F-генерическим*[1]), если выполнены условия:

(i) Если $p \in G$ и $p \leqslant q$, то $q \in G$.

(ii) Для любых p, $q \in G$ найдется такое $r \in G$, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$. В частности, любые два элемента множества G совместимы.

(iii) $G \cap D \neq \varnothing$ для каждого плотного принадлежащего семейству F множества $D \subseteq P$.

2.3. Предложение. *Пусть P есть ЧУ множество, $p \in P$ и семейство F содержит лишь счетное число плотных подмножеств множества P. Тогда найдется F-генерическое множество $G \subseteq P$, содержащее p.*

Доказательство. Пусть $\langle D_n\colon n \in \omega\rangle$ есть пересчет всех плотных подмножеств множества P, принадлежащих семейству F. Выберем элементы $p_n \in P$ следующим образом. Положим $p_0 = p$. Если p_n уже определено, то выберем $p_{n+1} \leqslant p_n$ так, чтобы $p_{n+1} \in D_n$. Такой выбор возможен в силу плотности D_n. Наконец, определим $G = \{q \in P\colon \exists n \in \omega\,(p_n \leqslant q)\}$. Ясно, что $p \in G$ и выполняются 2.2 (i), (iii). Проверка (ii) также несложна. Действительно, пусть q, $r \in G$, $p_n \leqslant q$, $p_m \leqslant r$ и $k = \max(m, n)$. Тогда, очевидно, $p_k \leqslant q$ и $p_k \leqslant r$. □

Пусть ЧУ множество P принадлежит некоторой СТМ M. Положив $F = M$ в 2.3, мы видим, что для любого $p \in P$ найдется M-генерическое множество $G \subseteq P$, содержащее p. Для большинства ЧУ множеств G можно показать, что такое G *не принадлежит* модели M.

2.4. Определение. Пусть P есть ЧУ множество. Любое подмножество множества вида $P \times a$ назовем *P-термом*. Если $t \subseteq P \times a$ есть P-терм и $G \subseteq P$, то *G-интерпретацию* $I_G(t)$ терма t определим равенством $I_G(t) = \{b \in a\colon \exists p \in G\,(\langle p, b\rangle \in t)\}$.

Примеры. Для каждого множества a пусть $a^* = P \times a$. Тогда $I_G(a^*) = a$, каково бы ни было непустое $G \subseteq P$. Пусть также $\check{G} = \{\langle p, p\rangle\colon p \in P\}$. Тогда $I_G(\check{G}) = G$, каково бы ни было $G \subseteq P$.

Доказательство следующей леммы, а также лемм 2.9 и 2.11 читатель найдет в статье Шенфилда [1]. Пусть читатель не удивляется, что в нашем кратком изложении приходится принимать некоторые результаты без доказательств. Подлинно удивительным является то, что эти три леммы содержат всю необходимую нам информацию о вынуждении.

[1]) Иногда пишут: P-генерическим над F. — *Прим. перев.*

2.5. Лемма существования и минимальности. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество и множество $G \subseteq P$ является M-генерическим. Тогда найдется наименьшая СТМ N, удовлетворяющая условиям $M \subseteq N$ и $G \in N$. Кроме того, если $a \subseteq M$ и $a \in N$, то $a = I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$.*

Эта модель N, обозначаемая через $M[G]$, называется *генерическим расширением, полученным присоединением G к исходной модели M.*

(Отметим, что N есть собственное расширение модели M, так как, как правило, $G \notin M$. Заметим также, что в соответствии со сказанным в 1.5 (iv) для любой СТМ N, содержащей G и t, выполняется $I_G(t) \in N$. Таким образом, произвольное множество $a \subseteq M$ принадлежит $M[G]$, если и только если оно имеет вид $I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$.)

2.6. Предложение. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество и $N = M[G]$, где множество $G \subseteq P$ является M-генерическим. Тогда* $\mathrm{OR}^N = \mathrm{OR}^M$.

Доказательство. Напомним, что $\mathrm{OR}^M = \{\alpha \in M\colon OR(\alpha)\}$ — наименьший ординал, не принадлежащий M. Поэтому достаточно показать $\mathrm{OR}^M \notin N$. Предположим противное. Тогда $\mathrm{OR}^M = I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$. Но, как отмечено в 1.5 (iv), мы имеем $\{\alpha \in \mathrm{ran}\, a\colon OR(\alpha)\} \in M$ всякий раз, когда $a \in M$. Следовательно, $\mathrm{OR}^M = \{\alpha \in \mathrm{ran}\, t\colon \mathrm{OR}(\alpha)\} \in M$ — противоречие. □

2.7. Определение. Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, $p \in P$, $t_1, \ldots, t_n \in M$ являются P-термами, а $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть формула со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Будем говорить, что p *P-вынуждает* формулу $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ над M, и писать

$$p \Vdash^P_M \varphi(t_1, \ldots, t_n),$$

если $M[G] \models \varphi(I_G(t_1), \ldots, I_G(t_n))$, каково бы ни было M-генерическое множество $G \subseteq P$, содержащее p. Верхний и нижний индексы при $\Vdash$ будут, как правило, опускаться.

Пример. Если $p \leqslant q$ и q^*, $\check{G}$ являются P-термами, определенными в 2.4, то $p \Vdash q^* \in \check{G}$. В самом деле, если p принадлежит M-генерическому множеству $G \subseteq P$, то $q = I_G(q^*) \in G = I_G(\check{G})$. Напротив, если p, $q \in P$ несовместимы, то $p \Vdash q^* \notin \check{G}$, так как $p \in G$ влечет $q \notin G$, каково бы ни было генерическое $G \subseteq P$.

Вынуждение предложений русского языка понимается в смысле вынуждения соответствующих формул, см. 0.3. Некоторое предложение вынуждается каким-то $p \in P$, если мы можем утверждать его истинность в генерическом расширении $M[G]$ всякий раз, когда знаем, что $p \in G$. Таким образом, эле-

менты множества P накладывают ограничения на то, что может иметь место в $M[G]$; поэтому их часто называют (*вынуждающими*) *условиями*. Если $p \leqslant q$, то p обладает большей ограничивающей способностью, чем q (из $p \in G$ следует $q \in G$ для генерических множеств $G \subseteq P$); в этом случае p называется *более сильным* условием.

2.8. Предложение. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, $p \in P$, $a \in M$, a φ, θ и т. п. являются формулами. Тогда справедливо следующее:*

(i) *Если $p \Vdash \varphi_1, \ldots, p \Vdash \varphi_n$ и из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и аксиом* ZFC *логически следует φ, то $p \Vdash \varphi$.*

(ii) *Не могут одновременно выполняться $p \Vdash \varphi$ и $p \Vdash \neg\varphi$.*

(iii) *Если $p \Vdash \varphi$ и $q \leqslant p$, то $q \Vdash \varphi$.*

(iv) *Если $p \Vdash \varphi$ и $q \Vdash \neg\varphi$, то p и q несовместимы.*

(v) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$, *если и только если* $p \Vdash \varphi$ *и* $p \Vdash \psi$.

(vi) $p \Vdash \forall x \in a^* \varphi(x)$, *если и только если для каждого* $b \in a$ *выполняется* $p \Vdash \varphi(b^*)$.

(vii) $p \Vdash \forall x (x \subseteq a^* \to \theta(x))$, *если и только если для каждого P-терма* $t \in M$, $t \subseteq a^*$, *выполняется* $p \Vdash \theta(t)$.

Доказательство. Читателю стоило бы попробовать доказать эти хорошие упражнения на проверку определений, прежде чем читать следующие указания:

(i) Для любого M-генерического множества $G \subseteq P$ такого, что $p \in G$, формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и все аксиомы ZFC истинны внутри $M[G]$; следовательно, там истинна и φ.

(ii) Согласно 2.3 найдется генерическое множество G такое, что $p \in G$. Но $M[G] \models \varphi$ и $M[G] \models \neg\varphi$ не могут выполняться одновременно.

(iii) Если $q \leqslant p$, то каждое генерическое множество G, содержащее q, содержит и p.

(vi) Следует из (ii) и (iii).

(v) Правая часть эквивалентности (v) значает, что для любого генерического G такого, что $p \in G$, будет как $M[G] \models \varphi$, так и $M[G] \models \psi$. А левая часть (v) означает, что для любого такого G выполняется $M[G] \models \varphi \wedge \psi$. Но это, очевидно, одно и то же.

(vi) Каково бы ни было генерическое G, любой элемент множества $I_G(a^*) = a$ имеет вид $b = I_G(b^*)$ для некоторого $b \in a$. После этого замечания (vi), так же как и (v), становится тавтологией.

(vii) Каково бы ни было генерическое G, любое принадлежащее $M[G]$ подмножество множества a имеет вид $I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$. Можно, не ограничивая общности, предполагать, что $t \subseteq a^*$, поскольку справедливо равенство $I_G(t \cap a^*) = I_G(t) \cap a$. После этого замечания (vii) становится тавтологией.

Чтобы определить, когда выполняется $p \Vdash \neg\varphi$, необходим более глубокий анализ, который дается следующей леммой (см. Шенфилд [1]). Отметим, что утверждение «если» этой леммы автоматически вытекает из определения 2.7.

2.9. Лемма об истинности. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, $G \subseteq P$ является M-генерическим, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая формула и $t_1, \ldots, t_n \in M$ являются P-термами. Тогда $M[G] \models \varphi(I_G(t_1), \ldots, I_G(t_n))$, если и только если найдется такое $p \in G$, что*

$$p \Vdash^P_M \varphi(t_1, \ldots, t_n).$$

2.10. Предложение. *В обозначениях* 2.8 *справедливо следующее:*

(i) $p \Vdash \neg\varphi$, *если и только если нет таких* $q \leqslant p$, *что* $q \Vdash \varphi$.

(ii) *Если множество $\{r \in P: r \Vdash \varphi\}$ плотно ниже p в P, то $p \Vdash \varphi$.*

(iii) $p \Vdash \varphi \vee \psi$, *если и только если для каждого* $q \leqslant p$ *найдется такое* $r \leqslant q$, *что либо* $r \Vdash \varphi$, *либо* $r \Vdash \psi$.

(iv) $p \Vdash \exists x \in a^* \theta(x)$, *если и только если для каждого* $q \leqslant p$ *найдутся такие* $r \leqslant q$ *и* $b \in a$, *что* $r \Vdash \theta(b^*)$.

(v) $p \Vdash \exists x (x \subseteq a^* \wedge \theta(x))$, *если и только если для каждого* $q \leqslant p$ *найдутся такие* $r \leqslant q$ *и* $t \in M$, $t \subseteq a^*$, *что* $r \Vdash \theta(t)$.

Доказательство. (i) Утверждение «только если» следует из 2.8 (iv). Для доказательства утверждения «если» предположим, что не выполняется $p \Vdash \neg\varphi$. Тогда найдется такое генерическое множество $G \subseteq P$, что $p \in G$ и $M[G] \models \varphi$. По лемме об истинности существует условие $q \in G$ такое, что $q \Vdash \varphi$. Не ограничивая общности, предполагаем $q \leqslant p$ (если это не так, то берем вместо q такое $q' \in G$, что $q' \leqslant q$ и $q' \leqslant p$; это q' по-прежнему вынуждает φ в силу 2.8 (iii)). Таким образом, если не выполняется $p \Vdash \neg\varphi$, то найдется такое $q \leqslant p$, что $q \Vdash \varphi$. Отсюда и следует утверждение «если» в (i).

(ii) Если множество $\{r \in P: r \Vdash \varphi\}$ плотно ниже p, то, согласно 2.8 (iv), никакое $q \leqslant p$ не может вынуждать $\neg\varphi$. Поэтому $p \Vdash \neg\neg\varphi$ в силу (i), и $p \Vdash \varphi$ в силу 2.8 (i).

Наконец, (iii), (iv) и (v) следуют из (i), 2.8 (v), (vi) и (vii) с учетом эквивалентности формул $\varphi \vee \psi$ и $\exists x \theta(x)$ соответственно формулам $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ и $\neg\forall x \neg\theta(x)$. □

2.11. Лемма об определимости. *Каждой формуле $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ можно сопоставить такую формулу $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, что, каковы бы ни были СТМ M, ЧУ множество $P \in M$, условие $p \in P$ и P-термы $t_1, \ldots, t_n \in M$, будет выполняться: $p \Vdash^P_M \varphi(t_1, \ldots, t_n)$, если и только если $M \models \varphi^*(t_1, \ldots, t_n, p, P)$.*

Доказательство этой леммы также см. в статье Шенфилда [1]. Отметим, что из нашего определения вынуждания 2.7

нельзя непосредственно получить такую формулу φ^*. Определение вынуждения через посредство генерических множеств сделано так, что о нем нельзя говорить внутри модели M хотя бы потому, что в M *нет* генерических множеств. Построение φ^* проходит окольным путем, в результате которого даже для таких простых формул φ, как $x \in y$, получаются довольно сложные формулы φ^*.

Из леммы 2.11 вытекает следующее важное свойство замкнутости: если ЧУ множество P принадлежит СТМ M, а $T_1, \ldots, T_n \in M$ являются множествами P-термов, то для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ множество

$$E = \{\langle p, t_1, \ldots, t_n\rangle \in P \times T_1 \times \ldots \times T_n\colon\ p \Vdash \varphi(t_1, \ldots, t_n)\}$$

принадлежит модели M. Это следует из аксиомы выделения (ср. 1. 5 (iii)), так как $E = \{\langle p, t_1, \ldots, t_n\rangle\colon\ M \models \varphi^*(t_1, \ldots, t_n, p, P)\}$.

Иногда мы будем писать, например, $M \models (p \Vdash {}^P t$ является кардиналом), когда хотим сказать, что $M \models \varphi^*(t, p, P)$, где $\varphi(t)$ есть формула «t является кардиналом», — иными словами, когда мы имеем в виду, что $p \Vdash^P_M$ (t есть кардинал). В любом рассуждении о вынуждении, проходящем внутри СТМ M, обязательно подразумевается ссылка на лемму об определимости.

Теперь полезно выяснить, что понятия, которые введены определениями 2.1 и 2.2, являются абсолютными.

2.12. Лемма. *Следующие формулы абсолютны*:

(i) *x является ЧУ множеством*,

(ii) (*x есть ЧУ множество*) $\wedge y, z \in |x| \wedge y \leqslant_x z$ (*или $y < z$, или y и z сравнимы, или совместимы, или несовместимы*),

(iii) (*x есть ЧУ множество*) $\wedge p \subseteq |x| \wedge y$ *открыто* (*или плотно, или антицепь, или плотно ниже $x' \in |x|$ и т. п.*),

(iv) (*x есть ЧУ множество*) $\wedge z \subseteq |x| \wedge$ (*z является y-генерическим*),

(v) (*x есть ЧУ множество*) $\wedge\, y \subseteq |x| \wedge z \in |x| \wedge$

$$\wedge\, \exists z' \in y\,(z \leqslant_x z').$$

Доказательство. Мы можем выразить (i)—(v) с помощью подходящих Δ_0-формул. Для (i), например, подходит формула

$$\exists x_0 \in\in x \exists x_1 \in\in x\,(x = \langle x_0, x_1\rangle \wedge (x_1 \text{ является}$$

рефлексивным, транзитивным, антисимметричным бинарным

$$\text{отношением на } x_0) \wedge \exists y \in x_0 \forall y' \in x_0 \exists z \in x_1$$

$$(z = \langle y', y\rangle) \wedge \forall y \in x_0 \exists y' \in x_0\,(\exists z \in x_1\,(z = \langle y', y\rangle)$$

$$\wedge\, \neg\, \exists z \in x_1\,(z = \langle y, y'\rangle))).$$

С другой стороны, мы могли бы в соответствии с нашим интуитивным пониманием абсолютности показать, что если множество P принадлежит некоторой СТМ M, то, не выходя из M, можно проверить, является ли это P ЧУ множеством. Это в сущности не очень сложно, так как благодаря присутствию в M всех элементов множества P мы без труда можем проверить существование наибольшего элемента и несуществование минимальных элементов.

Проверка абсолютности (ii)—(v) оставляется читателю. □

Наши замечания из 1.5 по поводу абсолютности различных понятий применимы и к понятиям, связанным с ЧУ множествами. Так, мы не будем говорить «пусть $P \in M$ таково, что $M \models (P$ является ЧУ множеством)». Вместо этого можно говорить просто «пусть $P \in M$ является ЧУ множеством». Аналогично, если ЧУ множество P принадлежит данной СТМ M и $A \in \mathscr{P}^M(P)$, то мы можем образовать множество $D = \{q \in P\colon\ \exists p \in A\ \ (q \leqslant p)\}$ внутри модели M, поскольку для этого достаточно «выделить» те элементы множества P, которые удовлетворяют определенному условию, а это условие абсолютно в силу 2.12 (v). Ниже мы часто будем утверждать, что некоторые множества, определения которых основаны на понятиях, относящихся к ЧУ множествам, могут быть образованы внутри рассматриваемой СТМ. При первом чтении мы рекомендуем принять на веру такие утверждения. Все они могут быть доказаны путем проверки абсолютности подходящих формул. Одно из таких утверждений используется в следующей лемме.

2.13. Лемма. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, $p \in P$, а $G \subseteq P$ является M-генерическим множеством, содержащим p. Тогда для любого плотного ниже p множества $D \in M$, $D \subseteq P$ выполняется $G \cap D \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $E = \{q \in P\colon\ q \in D \vee p,\ q$ несовместимы$\}$. Это множество может быть образовано внутри M, так как его определение абсолютно (ср. с 2.12 (ii)). Для каждого $q \in P$, не являющегося несовместимым с p, найдется такое $r \leqslant q$, что $r \leqslant p$. Следовательно, в силу плотности D ниже p для каждого такого q найдется $s \in D$ такое, что $s \leqslant q$. Это показывает, что E плотно в P, и тем самым $G \cap E \neq \varnothing$ согласно M-генеричности множества G. Но так как $p \in G$, то никакой элемент множества G не может быть несовместимым с p. Поэтому $G \cap D \neq \varnothing$, что и требовалось. □

Следующее усиление 2.10 (v) будет использовано только в § 6, и его можно опустить при первом чтении.

2.14. Теорема. *В обозначениях 2.8 и 2.10 выполняется следующая эквивалентность: $p \Vdash \exists x\,(x \subseteq a^* \wedge \theta(\dot{x}))$, если и только если найдется такой P-терм $t \in M$, $t \subseteq a^*$, что $p \Vdash \theta(t)$.*

Доказательство. Утверждение «если» очевидно. Довольно тонкое доказательство «только если» опирается на две леммы.

2.15. Лемма. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, $p \in P$ и $A \in M$, $A \subseteq P$ является максимальной антицепью ниже p. Тогда*:

(i) *для любого M-генерического множества $G \subseteq P$, содержащего p, существует единственное $q \in A \cap G$;*

(ii) *какова бы ни была формула φ, если $q \Vdash \varphi$ выполняется для всех $q \in A$, то $p \Vdash \varphi$.*

Доказательство. (i) Пусть $G \subseteq P$ — генерическое множество и $p \in G$. Поскольку элементы генерических множеств совместимы, то $A \cap G$ содержит не более одного элемента. Положим $D = \{r \in P\colon \exists q \subseteq A\,(r \leqslant q)\}$. Мы уже отмечали (после 2.12), что это множество может быть образовано в M. Докажем, что D плотно ниже p.

Действительно, рассмотрим произвольное $p' \leqslant p$. В силу максимальности A найдется условие $q \in A$, совместимое с p'. Значит, найдется такое $r \leqslant p'$, что $r \leqslant q \in A$. По определению D будет $r \in D$. Это завершает доказательство плотности.

Теперь из 2.13 следует $D \cap G \neq \varnothing$. Если $r \in D \cap G$, то найдется такое $q \in A$, что $r \leqslant q$. Тем самым $q \in G$. Итак, $A \cap G \neq \varnothing$, что и требовалось.

(ii) Предположим, что $q \Vdash \varphi$ для всех $q \in A$. Пусть G есть генерическое множество, содержащее p. В силу (i) выполняется $A \cup G \neq \varnothing$, т. е. найдется условие $q \in G$, вынуждающее φ. Таким образом, $M[G] \models \varphi$, что и означает $p \Vdash \varphi$. □

2.16. Лемма. *Пусть M есть СТМ, а $P \in M$ является ЧУ множеством. Тогда*:

(i) *Если $A \in M$, $A \subseteq P$ есть максимальная антицепь, а $F \in M$ — функция, определенная на множестве A и такая, что $F(q)$ является P-термом при любом $q \in A$, то найдется такой P-терм $t \in M$, что $q \Vdash t = F(q)$ для любого $q \in A$.*

(ii) *Если $p \in P$ и t, $u \in M$ являются P-термами, то найдется такой P-терм $v \in M$, что $p \Vdash v = t$, и для каждого условия q, несовместимого с p, будет $q \Vdash v = u$.*

Доказательство. (i) Поскольку A, $F \in M$, то мы можем образовать внутри M множество $a = \bigcup \{\operatorname{ran} F(q)\colon q \in A\}$. Очевидно, $F(q) \subseteq P \times a$ при любом $q \in A$. Аналогично в M можно образовать множество

$$t = \{\langle r, b\rangle \in P \times a\colon \exists q \in A \exists p \in P (r \leqslant q \wedge r \leqslant p \wedge \langle p, b\rangle \in F(q))\}.$$

Теперь нужно проверить, что для любого генерического $G \subseteq P$ и любого $q \in A \cap G$ выполняется

$$I_G(t) = I_G(F(q)).$$

Пусть сначала $b \in I_G(F(q))$. Тогда $\langle p, b\rangle \in F(q)$ для некоторого $p \in G$. Рассмотрим такое $r \in G$, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$. По построению $\langle r, b\rangle \in t$, т. е. $b \in I_G(t)$.

Обратно, пусть $b \in I_G(t)$, т. е. найдется такое $r \in G$, что $\langle r, b\rangle \in t$. Снова по построению найдутся такие условия $q' \in A$ и p, что $r \leqslant q'$, $r \leqslant p$ и $\langle p, b\rangle \in F(q')$. Из $r \leqslant q'$ следует $q' \in G$. Поскольку $A \cap G$ содержит *ровно один* элемент, то $q' = q$ и $\langle p, b\rangle \in F(q)$. Теперь из $r \leqslant p$ получим $p \in G$, и окончательно $b \in I_G(F(q))$, что и требовалось. □

(ii) Отметим, что в M истинна лемма Цорна, а понятие максимальной антицепи абсолютно, см. 2.12 (iii). Значит, существует максимальная антицепь $A \in M$, содержащая p. Рассмотрим функцию $F \in M$, определенную на множестве A так:

$$F(p) = t \text{ и } F(q) = u \text{ для всех } q \in A, \text{ не равных } p.$$

Применяя (i) к этой функции F, получаем такой P-терм $v \in M$, что $p \Vdash v = t$ и $q \Vdash v = u$ для всех остальных $q \in A$. Если теперь вынуждающее условие q несовместимо с p, то $A - \{p\}$ будет максимальной антицепью ниже q, и поэтому из 2.15 (ii) следует $q \Vdash v = u$, что и требовалось. □

Теперь с помощью лемм 2.15 и 2.16 докажем утверждение «только если» теоремы 2.14.

В обозначениях 2.8 и 2.10 мы имеем $p \Vdash \exists x\,(x \subseteq a^* \wedge \theta(x))$. Применяем (с учетом абсолютности) лемму Цорна внутри M и находим функцию $F \in M$, максимальную в смысле отношения $\subseteq$ среди функций F, обладающих следующим свойством:

(F есть функция, область определения $\operatorname{dom} F$ которой является антицепью ниже p) $\wedge$ ($q \Vdash \theta(F(q))$ для всех $q \in \operatorname{dom} F$).

(Напомним, что множество

$$E = \{\langle q,\ t\rangle \in P \times \mathscr{P}^M(a^*)\colon q \Vdash \theta(t)\}$$

принадлежит модели M вследствие леммы об определимости. А вторая часть конъюнкции, определяющей F, дает $F \subseteq E$.)

Мы утверждаем, что $\operatorname{dom} F$ является *максимальной* антицепью ниже p. Действительно, предположим противное: $p' \leqslant p$ несовместимо ни с каким $q \in \operatorname{dom} F$. Поскольку $p \Vdash \exists x\,(x \subseteq a^* \wedge \theta(x))$, то в силу 2.10 (v) и 2.8 (iii) найдутся такие $p'' \leqslant p'$ и $t \in M$, $t \subseteq a^*$, что $p'' \Vdash \theta(t)$. Ясно, что p'' несовместимо ни с каким $q \in A$. Поэтому функция $F \cup \{\langle p'', t\rangle\}$ дает противоречие с максимальностью F.

Теперь применим 2.16 (i) к этой функции F. Получим такой P-терм $t \in M$, что $q \Vdash t = F(q)$ для всех $q \in \operatorname{dom} F$. Но так как $q \Vdash \theta(F(q))$ для всех таких q, то $q \Vdash \theta(t)$. Наконец, из 2.15 (ii) следует $p \Vdash \theta(t)$. □

2.17. Следствие. *Пусть в обозначениях* 2.8, 2.10, 2.14 *имеет место* $1_P \Vdash \exists x\,(x \subseteq a^* \wedge \theta(x))$. *Пусть также* $t \in M$, $t \subseteq a^*$ *и* $p \Vdash \theta(t)$. *Тогда найдется такой* P-*терм* $v \in M$, *что* $v \subseteq a^*$, $1_P \Vdash \theta(v)$ *и* $p \Vdash v = t$.

Доказательство. Заметим, что вообще $1_P \Vdash \varphi$, если и только если каждое условие $q \in P$ вынуждает φ. По теореме 2.14 найдется такой P-терм $u \in M$, что $1_P \Vdash \theta(u)$. Пусть максимальная антицепь $A \in M$ такова, что $p \in A$. Используя 2.16 (ii), подбираем такой P-терм $v \in M$, что $p \Vdash v = t$ и $q \Vdash v = u$ для всех остальных $q \in A$. Каждое $q \in A$ вынуждает $\theta(v)$, и поэтому из 2.15 (ii) следует $1_P \Vdash \theta(v)$. □

Часто вместо $1_P \Vdash \varphi$ пишут просто $P \Vdash \varphi$.

§ 3. Континуум-гипотеза

Что нужно понимать под ложностью континуум-гипотезы CH, т. е. истинностью $\neg$CH, внутри некоторой СТМ M? Пусть $\varkappa$ является кардиналом в M, т. е. $M \models$ ($\varkappa$ есть кардинал). Через $(2^{\varkappa})^M$, или через $\exp^M(\varkappa)$, будем обозначать $\mathrm{card}^M(\mathscr{P}^M(\varkappa))$, а через $(\varkappa^+)^M$ будем обозначать такое $\lambda \in M$, что $M \models$ (λ есть наименьший кардинал $> \varkappa$). Теперь положим $\omega_1^M = (\omega^+)^M$, $\omega_2^M = ((\omega_1^M)^+)^M$ и т. д. Отметим, что CH ложна, если и только если существует вложение ω_2 в $\mathscr{P}(\omega)$ или, что то же самое, если найдется такая функция g: $\omega_2 \times \omega \to \{0, 1\}$, что

(*) Если $\alpha \neq \beta$, и $\langle \alpha, 0\rangle$ и $\langle \beta, 0\rangle$ принадлежат $\mathrm{dom}\, g$, то существует такое $n \in \omega$, что $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$.

(Такое g порождает вложение $f(\alpha) = \{n \in \omega\colon g(\alpha, n) = 0\}$.)

Таким образом, $M \models \neg$CH, если и только если существует вложение $f \in M$: ω_2^M в $\mathscr{P}^M(\omega)$. (Напомним, что понятие вложения абсолютно.) Другими словами, $M \models \neg$CH, если и только если найдется функция $g \in M$ из $\omega_2^M \times \omega$ в $\{0, 1\}$, удовлетворяющая (*).

Начнем с произвольной СТМ M (а существование хотя бы одной СТМ предполагается). Мы либо имеем в M такую функцию g (и тогда $M \models \neg$CH), либо не имеем. Коэн [1] указал способ построения такого расширения N модели M, в которой эта функция g обязательно существует.

3.1. Определение. Пусть α есть ординал. Рассмотрим множество

$$P = \{p\colon (p \text{ является функцией}) \wedge (\mathrm{dom}\, p \text{ конечно}) \wedge \mathrm{dom}\, p \subseteq \alpha \times \omega \wedge \mathrm{ran}\, p \subseteq \{0, 1\}\}.$$

Упорядочим это множество P *обратно включению*: $p \leqslant q$, если и только если $q \subseteq p$, т. е. функция p *продолжает* q. Таким образом, P становится ЧУ множеством. Его максимальный элемент 1_P есть пустая функция, а минимальных элементов нет, так как каждая функция, принадлежащая P, имеет собственное продолжение в P. Это множество P называется *α-коэновским* ЧУ множеством. Заметим, что если M есть СТМ и $\alpha < \mathrm{OR}^M$, то α-коэновское ЧУ множество можно образовать внутри M согласно сказанному в 1.5 (iv). Элементы α-коэновского ЧУ множества можно очевидным образом рассматривать как «приближения» функций из $\alpha \times \omega$ в $\{0, 1\}$.

3.2. Лемма. *Пусть* M *есть СТМ,* P *есть* ω_2^M*-коэновское ЧУ множество;* $N = M[G]$, *где* $G \subseteq P$ *является* M*-генерическим, и* $g \in N$ *есть объединение* $\bigcup G$ *всех функций* $p \in G$. *Тогда*:

(i) g *является функцией.*

(ii) $\mathrm{dom}\, g = \omega_2^M \times \omega$.

(iii) g *удовлетворяет требованию* (*).

Доказательство. (i) Ясно, что $g \subseteq \omega_2^M \times \omega \times \{0, 1\}$. Если бы g не было функцией, то нашлись бы такие $p, q \in G$ и $\langle \alpha, n\rangle \in \mathrm{dom}\, p \cap \mathrm{dom}\, q$, что $p(\alpha, n) \neq q(\alpha, n)$. Следовательно, не нашлось бы ни одной функции r, продолжающей как p, так и q. Но поскольку любые два условия из G совместимы в G, то такая r обязана существовать. Полученное противоречие доказывает (i).

(ii) Пусть $\alpha < \omega_2^M$ и $n < \omega$ произвольны. Определим $D = \{p \in P\colon \langle \alpha, n\rangle \in \mathrm{dom}\, p\}$. Это множество D плотно, так как если $p \in P$, то либо уже $p \in D$, либо $p' = p \cup \{\langle \alpha, n, 0\rangle\}$ принадлежит множеству D и $p' \leqslant p$. Вследствие плотности найдется $p \in D \cap G$. Тогда $\langle \alpha, n\rangle \in \mathrm{dom}\, p \subseteq \mathrm{dom}\, g$, что и доказывает (ii).

(iii) Пусть $\alpha < \beta < \omega_2^M$ произвольны. Положим

$$D = \{p \in P\colon \exists n \in \omega\,(\langle \alpha, n\rangle, \langle \beta, n\rangle \in \mathrm{dom}\, p \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}.$$

Это множество D плотно, так как если $p \in P$, то в силу конечности $\mathrm{dom}\, p$ найдется такое $n \in \omega$, что пары $\langle \alpha, n\rangle$ и $\langle \beta, n\rangle$ не принадлежат $\mathrm{dom}\, p$. Определяя $p' = p \cup \{\langle \alpha, n, 0\rangle, \langle \beta, n, 1\rangle\}$, получаем $p' \leqslant p$ и $p' \in D$. Теперь вследствие плотности найдется $p \in D \cap G$. Но это означает $g(\alpha, n) = p(\alpha, n) \neq p(\beta, n) = g(\beta, n)$, откуда и следует (iii). (Не составляет труда проверить, что множества D, использованные в доказательствах (ii) и (iii), могут быть образованы внутри модели M.) □

Однако необходимо иметь в виду, что лемма 3.2 не гарантирует еще, что $N \models \neg$CH. Ведь для доказательства $N \models \neg$CH нам нужна функция $g \in N$, удовлетворяющая (*) и имеющая область определения $\mathrm{dom}\, g = \omega_2^N \times \omega$. Собственно мы установим $N \models \neg$CH как раз тем, что докажем $\omega_2^N = \omega_2^M$. Начнем со следующего простого замечания.

Если M, N являются СТМ, $M \subseteq N$ и $\varkappa < \mathrm{OR}^M$ есть кардинал в N, то $\varkappa$ должен быть кардиналом и в M. В самом деле, если существуют $\lambda < \varkappa$ и функция $f \in M$ из λ на $\varkappa$, то эта функция f принадлежит и модели N, и поэтому $\varkappa$ не может быть кардиналом в N. Будем говорить, что кардинал $\varkappa$ модели M *сохраняется* в N, если он все еще остается кардиналом в N. В противном случае говорим, что $\varkappa$ *свертывается*. Свертка имеет место в том случае, когда найдется функция $f \in N - M$ из некоторого ординала $\lambda < \varkappa$ на $\varkappa$.

Чтобы доказать равенство $\omega_2^N = \omega_2^M$ в ситуации леммы 3.2, нужно установить, что кардиналы ω_1^M и ω_2^M сохраняются в N. Как отмечено выше, мы можем не опасаться появления новых кардиналов в N. Предметом нашей заботы является возможность свертки ω_2^M в N (тогда ω_2^M вообще не будет кардиналом в N), а также свертки ω_1^M в N (тогда ω_2^M не будет вторым несчетным кардиналом в N). Покажем, что эти возможности в ситуации 3.2 не реализуются. Начнем с такого определения:

3.3. Определение. Пусть кардинал $\varkappa$ несчетен. Будем говорить, что ЧУ множество P удовлетворяет *$\varkappa$-условию антицепей*, сокращенно $\varkappa$-УА, если не существует антицепей $A \subseteq P$ мощности $\geqslant \varkappa$. Ясно, что P удовлетворяет $(\mathrm{card}\, P)^+$-УА. К сожалению, ω_1-условие антицепей принято называть *условием счетности цепей* (у. с. ц., см. гл. 3). Это название неудачно, но оно твердо укоренилось в литературе.

3.4. Теорема. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество и $\varkappa \in M$. Пусть также $M \models$ ($\varkappa$ является регулярным кардиналом $\wedge$ P удовлетворяет $\varkappa$-УА). Тогда $P \Vdash$ ($\check{\varkappa}$ является кардиналом).*

Доказательство. Напомним, что $P \Vdash$ ($\check{\varkappa}$ является кардиналом) означает, что $1_P \Vdash$ ($\check{\varkappa}$ является кардиналом), и это утверждение истинно, если и только если $\varkappa$ сохраняется в $M[G]$, каково бы ни было M-генерическое множество $G \subseteq P$. Предположим противное: $G \subseteq P$ есть M-генерическое множество и функция $f \in M[G]$ отображает некоторое $\lambda < \varkappa$ на $\varkappa$. По лемме 2.5 о минимальности мы имеем $f = I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$. А в силу леммы 2.9 об истинности некоторое $p \in G$ вынуждает (t есть функция из $\check{\lambda}$ на $\check{\varkappa}$).

Теперь рассуждаем в M. Для каждого $\alpha < \lambda$ пусть

$$A_\alpha = \{\beta < \varkappa\colon \exists q \leqslant p\, (q \Vdash t(\check{\alpha}) = \check{\beta})\}.$$

Множество A_α можно представить себе как совокупность всех «возможных значений $t(\check{\alpha})$». Для каждого $\beta \in A_\alpha$ выбираем такое $q(\beta) \leqslant p$, что $q(\beta) \Vdash t(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Для разных $\beta < \varkappa$ условия $q(\beta)$ будут несовместимыми, так как они вынуждают противоречащие суждения. Значит, выполняется $\mathrm{card}\, A_\alpha < \varkappa$, поскольку P удовлетворяет $\varkappa$-УА. Отсюда в силу регулярности $\varkappa$ получаем $\mathrm{card}\, A < \varkappa$, где $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. (Все эти рассуждения действительно можно провести в M благодаря лемме 2.11 об определимости.)

Таким образом, доказано $\mathrm{card}^M A < \varkappa$. Теперь мы получим противоречие, если докажем, что $\varkappa \subseteq A$, т. е. $\varkappa$ не является кардиналом в M. Рассмотрим произвольное $\beta < \varkappa$. Имеем $\beta = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \lambda$. По лемме об истинности найдется $q \in G$, вынуждающее $t(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Можно, не ограничивая общности, предполагать, что $q \leqslant p$. (Если это не так, то вместо q берем такое $r \in G$, что $r \leqslant q$ и $r \leqslant p$. В силу 2.8 (iii) условие r также будет вынуждать $t(\check{\alpha}) = \check{\beta}$.) Но существование такого q как раз и означает $\beta \in A_\alpha \subseteq A$. Итак, $\varkappa \subseteq A$, что и требовалось. □

Отметим, что если в ситуации 3.4 $\lambda \geqslant \varkappa$ является кардиналом в M, то тем более множество P будет удовлетворять λ-УА внутри M, и $P \Vdash$ ($\check{\lambda}$ является кардиналом). Значит, если $M \models$ (P удовлетворяет у. с. ц), то все кардиналы модели M сохраняются в любом генерическом расширении $M[G]$. Отметим также, что каждое $P \in M$ тривиальным образом удовлетворяет у. с. ц. в классе всех множеств, так как оно счетно. Но задача состоит в том, чтобы установить, выполняется ли *внутри* модели M у. с. ц. для P.

3.5. Лемма. *Каков бы ни был ординал α, α-коэновское ЧУ множество удовлетворяет у. с. ц.*

Доказательство основано на следующем результате:

3.6. Комбинаторная лемма. *Пусть кардинал $\varkappa$ удовлетворяет равенству $\varkappa^\lambda = \varkappa$ для всех кардиналов $\lambda < \varkappa$. Пусть также семейство F мощности $> \varkappa$ состоит из множеств, каждое из которых имеет мощность $< \varkappa$. Тогда найдется такое подсемейство $E \subseteq F$ мощности $> \varkappa$ и такое множество e мощности $< \varkappa$, что для любых различных d, $d' \in E$ будет $d \cap d' = e$.*

Посылка этой леммы выполняется при $\varkappa = \omega$. В предположении СН она также выполняется при $\varkappa = \omega_1$. Кроме того, посылка влечет регулярность кардинала $\varkappa$, поскольку для любого кардинала $\varkappa$ справедливо неравенство $\varkappa^{\mathrm{cf}\varkappa} > \varkappa$. Доказательство леммы 3.6 при $\varkappa = \omega$ см. в гл. 3 (теорема 5.7) или в статье Марчевского [1]. Доказательство 3.6 в общем случае является несложным обобщением.

Доказательство 3.5 (с помощью 3.6). Предположим противное: существует несчетная антицепь A в α-коэновском ЧУ множестве P. Для каждого конечного $a \subseteq \alpha \times \omega$ существует лишь конечное число функций из a в $\{0, 1\}$. Значит, семейство $F = \{\mathrm{dom}\, p\colon p \in A\}$ должно быть несчетным. Применяем 3.6 при $\varkappa = \omega$ и находим такое несчетное $E \subseteq F$ и такое конечное множество e, что для любых различных d, $d' \in E$ будет $d \cap d' = e$. Поскольку существует лишь конечное число функций из e

в $\{0, 1\}$, то можно подобрать такие $p, q \in A$, что множества $\mathrm{dom}\, p$ и $\mathrm{dom}\, q$ будут различными элементами семейства E и p, q согласованы на e. Но теперь $r = p \cup q$ является функцией, продолжающей как p, так и q, т. е. различные $p, q \in A$ оказались совместимыми — противоречие! □

Пусть M, P, G и N таковы, как в 3.2. Применяя лемму 3.5 *внутри* модели M, имеем $M \models$ (P удовлетворяет у. с. ц.). Следовательно, в силу 3.4 каждый кардинал модели M сохраняется в N, и тем самым $\omega_2^N = \omega_2^M$. Таким образом, сделан последний шаг в доказательстве следующей теоремы:

3.7. Теорема (Коэн). *Существует такая СТМ N, что $N \models \neg$CH.*

Обратимся теперь к вопросу об *истинности* CH внутри СТМ. Истинность CH внутри СТМ M означает, что существует функция $f \in M$ из ω_1^M на $\mathscr{P}^M(\omega)$. Если таких функций $f \in M$ нет (т. е. $M \models \neg$CH), то мы покажем, как можно построить генерическое расширение N модели M, в котором такая функция f существует.

3.8. Определение. *Антикозновским* ЧУ множеством называется множество

$$P = \{p\colon (p \text{ есть функция}) \wedge \mathrm{card}\,\mathrm{dom}\, p \leqslant \omega \wedge \mathrm{dom}\, p \subseteq \omega_1 \wedge \mathrm{ran}\, p \subseteq \mathscr{P}(\omega)\},$$

частично упорядоченное обратно включению.

3.9. Лемма. *Пусть M есть СТМ, и $P \in M$ таково, что $M \models$ (P есть антикоэновское ЧУ множество). Пусть также $G \subseteq P$ является M-генерическим множеством, $N = M[G]$ и $g = \bigcup G$. Тогда $g \in N$ и g есть функция из ω_1^M на $\mathscr{P}^M(\omega)$.*

Доказательство. Поскольку $G \in N$, то $g \in N$ очевидно. Заметим, что P совпадает со следующим множеством:

$$\{p \in M\colon (p \text{ — функция}) \wedge \mathrm{card}^M\,\mathrm{dom}\, p \leqslant \omega \wedge \mathrm{dom}\, p \subseteq \omega_1^M \wedge \mathrm{ran}\, p \subseteq \mathscr{P}^M(\omega)\}.$$

Теперь, чтобы показать, что g является функцией, рассуждаем аналогично 3.2 (i). Чтобы показать $\mathrm{ran}\, g = \mathscr{P}^M(\omega)$ и $\mathrm{dom}\, g = \omega_1^M$, рассуждаем аналогично 3.2 (ii) с учетом плотности множества $\{p \in P\colon a \in \mathrm{ran}\, p\}$ при любом $a \in \mathscr{P}^M(\omega)$ и плотности множества $\{p \in P\colon \alpha \in \mathrm{dom}\, p\}$ при любом $\alpha < \omega_1^M$. □

Лемма 3.9 сама по себе еще не дает $N \models$ CH. Однако если мы докажем, что $\mathscr{P}^N(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega)$ и что ω_1^M сохраняется в N (т. е. $\omega_1^N = \omega_1^M$), то из 3.9 как раз и получится $N \models$ CH. Начнем со следующего определения.

3.10. Определение. Пусть $\varkappa \geqslant \omega$ — кардинал. ЧУ множество P называется *$\varkappa$-замкнутым*, если для любого $\lambda \leqslant \varkappa$ и любой убывающей последовательности $\langle p_\xi\colon \xi < \lambda\rangle$ условий $p_\xi \in P$ (т. е. $p_\eta \leqslant p_\xi$ при $\xi \leqslant \eta$) найдется такое $p \in P$, что $p \leqslant p_\xi$ для каждого $\xi < \lambda$. ЧУ множество P называется *$\varkappa$-дистрибутивным*, если пересечение любого семейства, состоящего из $\varkappa$ открытых плотных подмножеств множества P, является плотным. (Ясно, что такое пересечение открыто).

Пример. Антикоэновское ЧУ множество P является ω-замкнутым. Если мы имеем счетную последовательность функций из P, каждый член которой продолжает все предшествующие члены, то объединение p всех членов этой последовательности остается функцией со счетной областью определения и, следовательно, является элементом множества P, продолжающим любой из членов данной последовательности.

3.11. Предложение. *Для любого кардинала $\varkappa \geqslant \omega$ и любого ЧУ множества P выполняется:*

(i) *Если P $\varkappa$-замкнуто, то P является $\varkappa$-дистрибутивным.*

(ii) *Если кардинал $\varkappa$ сингулярен и P λ-замкнуто (или λ-дистрибутивно) при любом $\lambda < \varkappa$, то P является $\varkappa$-замкнутым (соответственно $\varkappa$-дистрибутивным).*

Доказательство. (i) Пусть каждое D_ξ, $\xi < \varkappa$, является открытым плотным подмножеством данного $\varkappa$-замкнутого ЧУ множества P. Докажем плотность пересечения этих множеств. Рассмотрим произвольное $p \in P$. Построим убывающую последовательность $\langle p_\xi\colon \xi \leqslant \varkappa\rangle$ элементов множества P следующим образом. Положим $p_0 = p$. Если p_ξ определено, то выберем такое $p_{\xi+1} \leqslant p_\xi$, что $p_{\xi+1} \in D_\xi$ (это можно сделать в силу плотности D_ξ). Если ординал $\lambda \leqslant \varkappa$ предел и p_ξ уже построены для всех $\xi < \lambda$, то пусть $p_\lambda \in P$ таково, что $p_\lambda \leqslant p_\xi$ для любого $\xi < \lambda$ (такое существует в силу $\varkappa$-замкнутости). В конце концов получим такое $p_\varkappa \leqslant p$, что $p_\varkappa \in \bigcap\limits_{\xi<\varkappa} D_\xi$, так как множества D_ξ открыты и $p_\varkappa \leqslant p_{\xi+1} \in D_\xi$. Плотность пересечения множеств D_ξ доказана.

(ii) (Для замкнутости.) Заметим, что из любой убывающей последовательности $\langle p_\xi\colon \xi < \varkappa\rangle$ можно выделить такую подпоследовательность $\langle p_\eta\colon \eta < \mathrm{cf}\,\varkappa\rangle$, что для каждого p_ξ найдется $p_\eta \leqslant p_\xi$.

(Для дистрибутивности.) Заметим, что любое пересечение $\varkappa$ множеств может быть представлено как пересечение $\mathrm{cf}\,\varkappa$ множеств, каждое из которых является пересечением $< \varkappa$ множеств. □

3.12. Теорема. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, а $\varkappa$ является кардиналом в M. Предположим также, что $M \models$ (P является $\varkappa$-дистрибутивным). Пусть, наконец, $G \subseteq P$*

есть M-генерическое множество, $N = M[G]$ и $f \in N$ является функцией, причем $\operatorname{dom} f = \varkappa$ *и* $\operatorname{ran} f \subseteq M$. *Тогда* $f \in M$.

Доказательство. По лемме о минимальности найдется такой P-терм $t \in M$, что $f = I_G(t)$. Можно считать, что $t \subseteq P \times (\varkappa \times b)$. Предположим противное: $f \notin X = \{h \in M$: h — функция $\wedge\ h \subseteq \varkappa \times b\}$. По лемме об истинности некоторое $p \in G$ вынуждает (t является функцией из $\varkappa^*$ в b^* и $t \notin X^*$). Мы получим противоречие тем, что найдем такие $q \leqslant p$ и $h \in X$, что q вынуждает $\forall \alpha < \varkappa^* (t(\alpha) = h^*(\alpha))$, т. е. $t = h^*$.

Следующие рассуждения проходят в модели M. Для каждого $\alpha < \varkappa$ пусть $D_\alpha = \{q \leqslant p$: $\exists c \in b\ (q \Vdash t(\alpha^*) = c^*)\}$. Тогда каждое D_α открыто и плотно ниже p в множестве P. Действительно, то, что D_α открыто, следует из 2.8 (iii). Для доказательства плотности рассмотрим произвольное $q \leqslant p$. Поскольку $q \Vdash \exists c \in b^*(t(\alpha^*) = c)$, то в силу 2.10 (v) найдутся такие $c \in b$ и $r \leqslant q$, что $r \Vdash t(\alpha^*) = c^*$. Последнее означает, что $r \in D_\alpha$. Плотность D_α ниже p доказана.

Теперь в силу $\varkappa$-дистрибутивности пересечение $\bigcap\limits_{\alpha < \varkappa} D_\alpha$ будет плотным ниже p. (Строго говоря, дистрибутивность нужно применить к множествам $E_\alpha = \{q \in P$: p, q несовместимы $\vee\ q \in D_\alpha\}$, которые плотны в P; ср. с доказательством леммы 2.13). Если теперь q принадлежит всем множествам D_α, то, определяя

$$h = \{\langle \alpha, c\rangle \in \varkappa \times b\colon\ q \Vdash t(\alpha^*) = c^*\},$$

мы получим $h \in X$ и, очевидно, $q \Vdash \forall \alpha < \varkappa^* (t(\alpha) = h^*(\alpha))$, что и требовалось. (Все эти рассуждения «проходили внутри модели M». Любое использование вынуждения внутри M опирается на лемму 2.11 об определимости.) □

3.13. Следствие. *В обозначениях* 3.12 *имеет место*:

(i) $\mathscr{P}^N(\varkappa) = \mathscr{P}^M(\varkappa)$.

(ii) *Каждый кардинал* λ *модели* M *такой, что* $\lambda \leqslant (\varkappa^+)^M$, *сохраняется в* N.

Доказательство. (i) Если бы нашлось множество $a \in \mathscr{P}^N(\varkappa) - \mathscr{P}^M(\varkappa)$, то его характеристическая функция дала бы контрпример к лемме 3.12.

(ii) Пусть λ, $\mu \in M$ — кардиналы в M, и $\mu < \lambda \leqslant (\varkappa^+)^M$. Если бы нашлась функция $f \in N$ из μ на λ, то тривиальное продолжение g функции f на множество $\varkappa$, определяемое условием $g(\alpha) = 0$ при $\mu \leqslant \alpha < \varkappa$, давало бы контрпример к лемме 3.12. □

Пусть теперь M, P, G и N таковы, как в 3.9. Тогда $M \models$ (P является ω-замкнутым). Значит, из 3.13 следует равенство $\mathscr{P}^N(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega)$ и сохранение кардинала ω_1^M в N. Как раз это и требовалось нам для доказательства следующей теоремы:

3.14. Теорема (Гёдель). *Найдется такая СТМ* N, *что* $N \models$ CH.

Первоначальное доказательство этой теоремы, принадлежащее Гёделю, на четверть столетия предшествовало открытию метода вынуждения. Гёделем была построена модель, в которой выполняется не только CH, но также и GCH, и даже более сильный принцип, так называемая аксиома конструктивности ($V = L$). Об этом см. гл. 5.

Следующая техническая лемма часто используется ниже:

3.15. Теорема. *Пусть* M *есть СТМ,* $P \in M$ *есть ЧУ множество, а* $\varkappa$, λ, μ, ν *являются кардиналами в* M. *Пусть также* $M \models (\nu = \varkappa^{\lambda\mu} \wedge \operatorname{card} P = \varkappa \wedge P$ *удовлетворяет* λ^+-УА). *Тогда* $P \Vdash 2^{\check{\mu}} \leqslant \check{\nu}$.

Доказательство. Пусть $G \subseteq P$ есть M-генерическое множество и $N = M[G]$. Мы докажем, что внутри N каждое подмножество множества μ может быть получено с использованием интерпретации I_G из термов, принадлежащих определенному множеству $S \in M$, которое удовлетворяет неравенству $\operatorname{card}^M S \leqslant \nu$. Тем самым будет доказано $(2^\mu)^N \leqslant \nu$. Определим S равенством

$$S = \{f \in M\colon\ (f \text{ — функция}) \wedge \operatorname{dom} f \subseteq P \times \mu \wedge \operatorname{ran} f \subseteq \{0, 1\}$$
$$\wedge\ \forall \alpha < \mu\ (\text{множество } A(\alpha, f) = \{p \in P\colon \langle p, \alpha\rangle \in \operatorname{dom} f\} \text{ является максимальной антицепью})\}.$$

Множество S принадлежит модели M в силу леммы об определимости.

Рассуждаем внутри M. Любая антицепь в P имеет мощность $\leqslant \lambda$. Поскольку $\operatorname{card} P = \varkappa$, то всего имеется $\leqslant \varkappa^\lambda$ антицепей $A \subseteq P$. Но область определения $\operatorname{dom} f$ каждого $f \in S$ полностью определяется последовательностью из μ антицепей $A(\alpha, f)$, $\alpha < \mu$. Кроме того, $\operatorname{card}\{g \in S$: $\operatorname{dom} g = \operatorname{dom} f\} \leqslant 2^{\lambda\mu}$ для каждого $f \in S$. Таким образом, $\operatorname{card} S \leqslant (\varkappa^\lambda)^\mu \cdot 2^{\lambda\mu} = \varkappa^{\lambda\mu} = \nu$.

Поскольку все это истинно внутри M, то мы имеем $\operatorname{card}^M S \leqslant \nu$ и тем более $\operatorname{card}^N S \leqslant \nu$. Теперь рассуждаем внутри модели N. Для любых $\alpha < \mu$ и $f \in S$ множество $A(\alpha, f) \cap G$ имеет ровно один элемент в силу 2.15 (i); обозначим этот единственный элемент через $q(\alpha, f)$. Положим $J(f) = \{\alpha < \mu$: $I(q(\alpha, f), \alpha) = 0\}$. Тогда J отображает S в $\mathscr{P}(\mu)$.

Мы закончим доказательство, если покажем, что наша функция $J \in N$ отображает S *на* $\mathscr{P}^N(\mu)$. Чтобы проверить это, рассмотрим произвольное $a \in \mathscr{P}^N(\mu)$; $a = I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$.

Снова рассуждаем внутри модели M. По лемме Цорна найдется множество $f \subseteq P \times \mu \times \{0, 1\}$, максимальное по отноше-

нию к следующему свойству:

(если $\langle p, \alpha, 0\rangle \in f$, то $p \Vdash \alpha^* \in t$)
$\wedge$ (если $\langle p, \alpha, 1\rangle \in f$, то $p \Vdash \alpha^* \notin t$)
$\wedge$ (множество $A(\alpha, f) = \{p: \langle p, \alpha\rangle \in \operatorname{dom} f\}$
является антицепью для всех α).

Отметим, что из первых двух условий вытекает, что f — функция. Мы утверждаем, что множества $A(\alpha, f)$ будут на самом деле *максимальными* антицепями. Действительно, пусть, напротив, найдутся такие $\alpha < \mu$ и $q \in P$, что q несовместимо ни с каким $p \in A(\alpha, f)$. Тогда существует такое $r \leqslant q$, что либо $r \Vdash \alpha^* \in t$, либо $r \Vdash \alpha^* \notin t$ (это следует из 2.10 (iii) и того, что $q \Vdash \alpha^* \in t \vee \alpha^* \notin t$). В первом случае $f \cup \{\langle r, \alpha, 0\rangle\}$ дает контрпример к максимальности f, а во втором случае контрпример дает $f \cup \{\langle r, \alpha, 1\rangle\}$. Это показывает, что $A(\alpha, f)$ в самом деле является максимальной антицепью, и, следовательно, $f \in S$.

Осталось доказать $J(f) = a$. Рассмотрим произвольное $\alpha < \mu$. Пусть сначала $\alpha \in a$. По лемме об истинности некоторое $p \in G$ вынуждает $\alpha^* \in t$. Теперь мы не можем иметь равенство $f(q(\alpha, f), \alpha) = 1$, так как в этом случае по определению f вынуждающее условие $q(\alpha, f) \in G$ вынуждало бы $\alpha^* \notin t$, что противоречит $p \in G$ и $p \Vdash \alpha^* \in t$. Поэтому должно выполняться равенство $f(q(\alpha, f), \alpha) = 0$ и тем самым $\alpha \in J(f)$. Совершенно аналогично доказывается, что из $\alpha \in \mu - a$ следует $\alpha \notin J(f)$. Итак, $J(f) = a$, что и требовалось для доказательства теоремы. □

3.16. Следствия теоремы 3.15. Пусть СТМ M такова, что $M \models \mathrm{GCH}$. Как отмечено после теоремы 3.14, такая модель существует.

(i) Пусть $P \in M$ является ω_2^M-коэновским ЧУ множеством, $G \subseteq P$ есть M-генерическое множество и $N = M[G]$. Мы уже видели, что $N \models 2^\omega > \omega_1$. Теперь, применяя теорему 3.15 при $\varkappa = \nu = \omega_2^M$ и $\lambda = \mu = \omega$, получаем точное равенство $N \models 2^\omega = \omega_2$. Если же применить 3.15 при $\varkappa = \nu = \omega_2^M$, $\lambda = \omega$ и $\mu = \omega_1^M$, то получим $N \models 2^{\omega_1} = \omega_2$. (Отметим, что из GCH следует $\omega_2^{\omega_1} = \omega_2^\omega = \omega_2$.) Таким образом, установлена непротиворечивость равенства $2^\omega = 2^{\omega_1}$.

(ii) Точно так же с помощью ω_3^M-коэновского ЧУ множества можно получить модель, в которой $2^\omega = \omega_3$. Вообще, можно построить модель, в которой 2^ω имеет любую «разумную» величину. (Хорошо известно, что $2^\omega \neq \omega_\omega$. Применение ω_ω-коэновского ЧУ множества дает $2^\omega = \omega_{\omega+1}$.)

(iii) Пусть

$P = \{p \in M$: (p — функция) $\wedge$ $\mathrm{card}^M \operatorname{dom} p \leqslant \omega$
$\wedge$ $\operatorname{dom} p \subseteq \omega_3^M \times \omega_1^M \wedge \operatorname{ran} p \subseteq \{0, 1\}\}$.

Нетрудно проверить, что $M \models$ (P является ω-замкнутым). Используя лемму 3.6 и GCH внутри M, можно доказать, что $M \models$ (P удовлетворяет ω_2^M-УА). Таким образом, если $G \subseteq P$ есть M-генерическое множество, то в силу 3.4 и 3.13 каждый кардинал модели M сохраняется в $N = M[G]$. Теперь нетрудно проверить, что $N \models 2^{\omega_1} > \omega_2$, и даже точно установить с помощью 3.15, что $N \models 2^{\omega_1} = \omega_3$. С другой стороны, из ω-замкнутости и 3.13 следует $\mathscr{P}^N(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega)$, откуда, очевидно, $N \models 2^\omega = \omega_1$.

Для получения таких комбинаций, как $2^{\omega_1} = \omega_3 \wedge 2^\omega = \omega_2$, необходимо применить более тонкие методы, изложенные ниже в § 5.

§ 4. Полезные комбинаторные принципы

В этом параграфе мы рассмотрим комбинаторные принципы, которые часто используются во многих областях, от универсальной алгебры до общей топологии. (См., например, гл. 7.) Будет доказана (относительная) непротиворечивость каждого из этих принципов путем построения соответствующей модели. В большинстве случаев непротиворечивость может быть также установлена выводом рассматриваемого принципа из аксиомы конструктивности $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ (см. гл. 5), но такой вывод обычно значительно длиннее, чем предлагаемые здесь построения, основанные на вынуждении.

4.1. Определение. Пусть $\varkappa$ есть регулярный несчетный кардинал. *$\varkappa$-деревом Курепы* называется дерево высоты $\varkappa$, каждый уровень которого имеет мощность $< \varkappa$ и которое имеет $> \varkappa$ путей. *$\varkappa$-гипотеза Курепы*, $\mathrm{KH}(\varkappa)$, утверждает, что существует $\varkappa$-дерево Курепы. Мы докажем непротиворечивость гипотезы $\mathrm{KH}(\omega_1)$.

Пусть P есть совокупность всех таких пар $p = \langle T_p, l_p\rangle$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(1) T_p является деревом.

(2) Множество $|T_p|$ состоит из ординалов $< \varkappa$.

(3) Каждый уровень T_p имеет мощность $< \varkappa$.

(4) Высота T_p равна некоторому непредельному ординалу $\alpha_p + 1 < \varkappa$, т. е. дерево T_p имеет непустой α_p-й уровень, являющийся самым высоким.

(5) l_p есть биекция из некоторого подмножества множества ω на самый высокий уровень дерева T_p.

Упорядочиваем множество P, полагая $p \leqslant q$, если и только если:

(6) T_p есть продолжение дерева T_q, т. е. все уровни T_p вплоть до α_q-го совпадают с соответствующими уровнями T_q, но T_p возможно имеет еще некоторые уровни выше α_q-го уровня.

(7) $\operatorname{dom} l_p \supseteq \operatorname{dom} l_q$.

(8) Для каждого $\rho \in \operatorname{dom} l_q$ в T_p выполняется неравенство $l_q(\rho) \leqslant l_p(\rho)$.

Это множество P с указанным порядком называется *κ-куреповским* ЧУ множеством. Если $p \in P$, то T_p можно представлять себе как часть κ-дерева Курепы, которое мы хотели бы построить, а l_p — как часть (будущей) функции, которая для каждого $\rho < \kappa^+$ будет указывать, который из элементов самого высокого уровня T_p принадлежит ρ-му пути сквозь T (в некотором списке из κ^+ таких путей, который также будет построен).

4.2. Лемма. *Пусть кардинал κ регулярен и несчетен, а P есть κ-куреповское ЧУ множество. Тогда P является λ-замкнутым, каково бы ни было $\lambda < \kappa$.*

Доказательство. Пусть $\lambda < \kappa$ и $\langle p_\xi : \xi < \lambda \rangle$ является убывающей последовательностью в P. Чтобы избежать громоздких обозначений, через T_ξ обозначим первый член пары p_ξ. Обозначения l_ξ и α_ξ имеют аналогичный очевидный смысл. Отметим, что последовательность ординалов α_ξ является неубывающей. Поскольку при $\xi \leqslant \eta$ дерево T_η является продолжением T_ξ, то объединение T всех деревьев T_ξ, $\xi < \lambda$, будет деревом высоты $\alpha = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$. Пусть $d = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} \operatorname{dom} l_\xi$. Для каждого $\rho \in d$ положим

$$b(\rho) = \{a \in T : \exists \xi < \lambda\, (\rho \in \operatorname{dom} l_\xi \wedge a \leqslant l_\xi(\rho))\}.$$

Это множество $b(\rho)$ является путем сквозь T, так как при $\xi \leqslant \eta < \lambda$ и $\rho \in \operatorname{dom} l_\xi$ будет $l_\xi(\rho) \leqslant l_\eta(\rho)$. Более того, поскольку все отображения l_ξ взаимно однозначны, то $b(\rho) \neq b(\sigma)$ при $\rho \neq \sigma$. Образуем дерево T', добавляя к T новый, самый высокий уровень, содержащий для каждого $\rho \in d$ некоторый элемент a_ρ, удовлетворяющий $a_\rho \geqslant a$ при любом $a \in b(\rho)$. Пусть функция l с областью определения d такова, что $l(\rho) = a_\rho$ для всех $\rho \in d$. Нетрудно убедиться, что $p_\lambda = \langle T', l \rangle$ принадлежит множеству P и $p_\lambda \leqslant p_\xi$ для всех $\xi < \lambda$. □

4.3. Предложение. *Пусть κ — такой несчетный кардинал, что $\kappa^\lambda = \kappa$ для всех $\lambda < \kappa$, и пусть P есть κ-куреповское ЧУ множество. Тогда P удовлетворяет κ^+-УА.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq P$ есть множество мощности κ^+. Докажем, что A не является антицепью. По условию

существует только κ подмножеств множества κ, имеющих мощность $< \kappa$. Более того, имея некоторое множество мощности λ, мы можем частично упорядочить это множество и превратить его в дерево не более чем $2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda = \kappa$ способами. Следовательно, существует не более κ деревьев, удовлетворяющих требованиям (1)—(4), которые накладывает на T_p определение κ куреповского ЧУ множества. Поэтому найдется такое множество $A' \subseteq A$ мощности κ^+ и такое фиксированное дерево T, что $T_p = T$ для всех $p \in A'$.

Далее, для каждого множества $d \subseteq \kappa^+$ мощности $\lambda < \kappa$ существует не более чем κ биекций из d на самый высокий уровень дерева T и, следовательно, не более чем κ таких $p \in A'$, что $\operatorname{dom} l_p = d$. Таким образом, множество $D = \{\operatorname{dom} l_p : p \in A'\}$ имеет мощность κ^+, и с помощью леммы 3.6 мы можем подобрать такое множество $E \subseteq D$ мощности κ^+ и такое e, что $d \cap d' = e$ для любых различных d, $d' \in E$. Но так как существует не более чем κ функций из этого e в самый высокий уровень дерева T, то найдутся такие p, $q \in A'$, что $\operatorname{dom} l_p$ и $\operatorname{dom} l_q$ являются различными элементами множества E, и l_p, l_q согласованы на e. Доказательство предложения будет закончено, когда мы докажем, что эти p и q совместимы.

Добавим к дереву T новый, самый высокий уровень, содержащий по одной точке над каждым элементом вида $l_p(\rho)$, где $\rho \in e$, и по двум различным точкам над каждым элементом вида $l_p(\rho)$, где $\rho \in \operatorname{dom} l_p - e$. (Отметим, что каждый такой элемент также имеет вид $l_q(\rho)$ для некоторого $\rho \in \operatorname{dom} l_q - e$.) В результате получилось новое дерево T'. Пусть функция l' определена на множестве $\operatorname{dom} l_p \cup \operatorname{dom} l_q$ следующим образом:

$$l'(\rho) = \begin{cases} \text{единственная точка над } l_p(\rho), & \text{если } \rho \in e, \\ \text{1-я точка над } l_p(\rho), & \text{если } \rho \in \operatorname{dom} l_p - e, \\ \text{2-я точка над } l_p(\rho), & \text{если } \rho \in \operatorname{dom} l_q - e. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $p' = \langle T', l' \rangle$ принадлежит множеству P и удовлетворяет $p' \leqslant p$ и $p' \leqslant q$, что и требовалось. □

Мы оставляем читателю проверку следующего утверждения: если кардинал κ регулярен, P есть κ-куреповское ЧУ множество, то все множества $D_\alpha = \{p \in P : \alpha_p > \alpha\}$ при $\alpha < \kappa$ и все множества $E_\rho = \{p \in P : \rho \in \operatorname{dom} l_p\}$ при $\rho < \kappa^+$ являются плотными в P.

4.4. Теорема (Стьюарт). *Существует такая СТМ N, что $N \models \mathrm{KH}(\omega_1)$.*

Доказательство. Читатель может доказать самостоятельно или принять на веру то, что понятие дерева, а также понятия уровня, высоты и пути для деревьев абсолютны. (Указание. Нужно использовать 1.6 (iii) и (iv).) Таким образом,

нет необходимости делать различие между употреблением этих понятий внутри и вне СТМ.

Пусть СТМ M такова, что $M \models \mathrm{GCH}$. Положим $\varkappa = \omega_1^M$. Пусть $P \in M$ таково, что $M \models$ (P есть $\varkappa$-куреповское ЧУ множество). Возьмем M-генерическое множество $G \subseteq P$ и обозначим $N = M[G]$ и $T = \bigcup_{p \in G} T_p \in N$. Докажем, что $N \models$ (T есть $\varkappa$-дерево Курепы). Отметим, что из 4.2 и 4.3 и из лемм § 3 следует: все кардиналы модели M сохраняются в N и тем самым $\varkappa = \omega_1^N$ и $\omega_2^M = \omega_2^N$.

Если $p, q \in P$ совместимы, то либо T_p является продолжением T_q, либо наоборот. Поскольку все элементы множества G попарно совместимы, то T будет деревом, продолжающим каждое из деревьев T_p, $p \in G$. Кроме того, каждый уровень дерева T является уровнем одного из деревьев T_p, $p \in G$, и поэтому имеет мощность $< \varkappa$ внутри M. Для каждого $\alpha < \varkappa$ определенное выше (после доказательства 4.3) множество D_α плотно в P. Значит, $D_\alpha \cap G \neq \varnothing$. Отсюда следует, что высота дерева T больше чем α. Таким образом, высота T равна $\varkappa$.

Если $p, q \in G$ и $\rho \in \mathrm{dom}\, l_p \cap \mathrm{dom}\, l_q$, то в силу совместимости p и q точки $l_p(\rho)$ и $l_q(\rho)$ сравнимы в T. (Обе они $\leqslant l_r(\rho)$ для любого r такого, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$.) Если $\rho, \sigma \in \mathrm{dom}\, l_p$ различны, то $l_p(\rho)$ и $l_p(\sigma)$ несовместимы в T, поскольку они являются элементами одного и того же α_p-го уровня дерева T. Далее, если $\alpha < \varkappa$, $\rho < \omega_2^M$ и множество E_ρ таково, как указано выше (после доказательства 4.3), то вследствие плотности найдется $p \in D_\alpha \cap E_\rho \cap G$. При этом $l_p(\rho)$ определено и имеет уровень $> \alpha$ в T. Приведенные рассуждения показывают, что если для каждого $\rho < \omega_2^M$ определить

$$B(\rho) = \{a \in T\colon\ \exists p \in G\,(\rho \in \mathrm{dom}\, p \wedge a \leqslant l_p(\rho))\},$$

то $B(\rho)$ окажется путем сквозь T и $B(\rho) \neq B(\sigma)$ для различных ρ, σ. Значит, внутри N имеется множество $\{B(\rho)\colon \rho < \omega_2^M\}$ мощности $> \varkappa$, состоящее из путей сквозь дерево T. Это и доказывает $N \models \mathrm{KH}(\varkappa)$. □

Несложные изменения конструкции позволяют построить модели, в которых истинно $\mathrm{KH}(\omega_2)$, $\mathrm{KH}(\omega_3)$ и т. п. Также можно получить ω_1-дерево Курепы, в котором будет ω_3 или даже большее число путей; в такой модели автоматически выполняется $2^{\omega_1} > \omega_2$, так как дерево мощности $\varkappa$ может иметь не более $2^\varkappa$ путей. Более интересным вариантом теоремы 4.4 является следующая

4.5. Теорема (Сильвер). *Существует такая СТМ N', что $N' \models (2^{\omega_1} > \omega_2 \wedge$ найдется ω_1-дерево Курепы, имеющее ровно ω_2 путей).*

Доказательство. Пусть M, P, G, N и T таковы, как в доказательстве теоремы 4.4. Тогда T является ω_1-деревом Курепы внутри модели N. Мы имеем $N \models 2^\omega = \omega_1$, так как это равенство истинно в M, а $\mathscr{P}^N(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega)$ (следует из ω-замкнутости P). Кроме того, поскольку GCH истинна внутри M, то, применяя 3.15 при $\varkappa = \nu = \omega_2^M = \omega_2^N$ и $\lambda = \mu = \omega_1^M = \omega_1^N$, получаем $N \models 2^{\omega_1} = \omega_2$. Значит, $N \models$ (T имеет ровно ω_2 путей).

Пусть теперь $Q \in N$ есть множество $\{p \in N\colon p$ — функция $\wedge\ \mathrm{card}^N\, \mathrm{dom}\, p \leqslant \omega \wedge \mathrm{dom}\, p \subseteq \omega_3^N \times \omega_1^N \wedge \mathrm{ran}\, p \subseteq \{0, 1\}\}$, частично упорядоченное обратно включению. Мы уже отмечали в конце § 3 (см. 3.16 (iii)), что $N \models$ (множество Q удовлетворяет ω_2-УА и ω-замкнуто). Мы видели также, что если множество $H \subseteq Q$ является N-генерическим, то все кардиналы N сохраняются в $N[H]$ и $N[H] \models 2^{\omega_1} = \omega_3$. Поскольку все кардиналы сохраняются, то T остается ω_1-деревом Курепы внутри $N[H]$. Теперь, чтобы проверить, что $N[H] \models$ (T имеет ровно ω_2 путей), достаточно доказать, что каждый путь сквозь T, принадлежащий $N[H]$, принадлежит уже модели N. В несколько измененных обозначениях это утверждение составляет содержание следующей леммы.

4.6. Лемма. *Пусть M есть СТМ, $P \in M$ есть ЧУ множество, $\varkappa \in M$, $T \in M$. Предположим, что $M \models$ (кардинал $\varkappa$ непределен $\wedge P$ является λ-замкнутым при любом $\lambda < \varkappa \wedge T$ — дерево, высота которого равна $\varkappa \wedge$ каждый уровень T имеет мощность $< \varkappa$). Пусть также $G \subseteq P$ есть M-генерическое множество и $N = M[G]$. Тогда каждый путь сквозь дерево T, принадлежащий N, принадлежит уже модели M.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $\varkappa = \omega_1^M$. Пусть $X = \{B \in M\colon B$ есть путь сквозь $T\}$. Предположим противное: путь $B \in N$ сквозь дерево T таков, что $B \notin X$. Тогда $B = I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$.

Назовем $p \in P$ хорошим, если $p \Vdash$ (t есть путь сквозь $T^* \wedge t \notin X^*$). Отметим, что существует хорошее $p \in G$. Отметим также, что:

(i) Если p хорошее и $q \leqslant p$, то q также хорошее.

(ii) Если p хорошее, $p \Vdash a^* \in t$ и $b \leqslant a$ в T, то $p \Vdash b^* \in t$.

(iii) Если p хорошее, $p \Vdash a^* \in t$ и $p \Vdash b^* \in t$, то a и b сравнимы в T.

(iv) Если p хорошее и $\alpha < \varkappa$, то найдутся такие $q \leqslant p$ и $a \in T_\alpha$, что $q \Vdash a^* \in t$. (Так как $p \Vdash \exists x \in T_\alpha^*\,(x \in t)$.)

(v) Если p хорошее и $\alpha < \varkappa$, то найдутся: такое β, $\alpha < \beta < \varkappa$ и такие q, $r \leqslant p$ и различные $a, b \in T_\beta$, что $q \Vdash a^* \in t$ и $r \Vdash b^* \in T$.

Чтобы проверить (v), предположим, что таких β, q, r, a и b нет. Тогда из (i)—(iv) следует, что множество $C=\{a\in T: \exists q\leqslant p(q\Vdash a^*\in t)\}$ является путем сквозь T. Более того, $C\in M$. (Это следует из леммы об определимости.) С другой стороны, нетрудно видеть, что $p\Vdash t=C^*\in X^*$, что противоречит тому, что p хорошее.

Следующие рассуждения проходят внутри M. Для каждой конечной последовательности s, состоящей из нулей и единиц, построим хорошее $p(s)\in P$, ординал $\alpha(s)<\varkappa$, а также $a(s)\in T_{\alpha(s)}$ такие, что $p(s)\Vdash(\alpha(s))^*\in t$. Построение проходит следующим образом. Для пустой последовательности $\langle\ \rangle$ в качестве $p(\langle\ \rangle)$ берем любое хорошее $p\in P$, полагаем $\alpha(\langle\ \rangle)=0$, а в качестве $a(\langle\ \rangle)$ берем единственный элемент уровня T_0, т. е. наименьший элемент дерева T. Если $p(s)$, $a(s)$ и $\alpha(s)$ уже построены, мы в силу (v) можем подобрать ординал β, $\alpha(s)<\beta<\varkappa$, условия $p(s^\frown 0)$, $p(s^\frown 1)\leqslant p(s)$, и различные $a(s^\frown 0)$, $a(s^\frown 1)\in T_\beta$ так, что будет $p(s^\frown i)\Vdash(a(s^\frown i))^*\in t$ для $i=0,1$. Полагаем $\alpha(s^\frown 0)=\alpha(s^\frown 1)=\beta$. Из (iii) следует, что $a(s)\leqslant a(s^\frown 0)$, $a(s^\frown 1)$ в T. Теперь с помощью ω-замкнутости мы можем для каждой ω-последовательности S нулей и единиц подобрать такое $p(S)\in P$, что $p(S)\leqslant p(S\restriction n)$ для всех $n\in\omega$.

Пусть $\alpha=\sup\{\alpha(s)$: s есть конечная последовательность нулей и единиц$\}$. Согласно (iv) для каждого S существуют такие $q(S)\leqslant p(S)$ и $a(S)\in T_\alpha$, что $q(S)\Vdash a(S)^*\in t$. По построению $a(s^\frown 0)$ и $a(s^\frown 1)$ являются несовместимыми в T. Наконец, из (iii) следует $a(S\restriction n)\leqslant a(S)$ для всех $n<\omega$. Следовательно, при $S\neq S'$ будет $a(S)\neq a(S')$. Но тогда $\operatorname{card} T_\alpha\geqslant 2^\omega\geqslant\omega_1$.

Все эти рассуждения, которые мы провели в M, показывают, что $\operatorname{card}^M T_\alpha\geqslant\omega_1^M$, что противоречит посылке леммы. Это противоречие завершает доказательство 4.6 и 4.5. □

Изложенное доказательство принадлежит Сильверу [1]. Другое доказательство, также основанное на вынуждении, см. Йех [1]. Рассмотрим теперь несколько измененный вариант КН.

4.7. Определение. Если T есть дерево, ординал α меньше, чем высота T, и b является элементом T уровня $\geqslant\alpha$ (или путем сквозь T), то через $\pi_\alpha(b)$ обозначим единственное $a\in T_\alpha$, удовлетворяющее неравенству $a\leqslant b$ (соответственно $a\in b$).

Для каждого несчетного регулярного кардинала $\varkappa$ через $W(\varkappa)$ обозначается предположение о том, что существуют:

(1) $\varkappa$-дерево Курепы T,

(2) семейство F мощности $>\varkappa$, состоящее из путей сквозь T,

(3) функция W с областью определения $\varkappa$

такие, что каждое $W(\alpha)$, $\alpha<\varkappa$, есть семейство мощности $\varkappa$, состоящее из подмножеств уровня T_α, и, кроме того, для каждого множества $S\subseteq F$ мощности $<\varkappa$ найдется такое $\alpha<\varkappa$, что, каково бы ни было β, удовлетворяющее неравенствам $\alpha\leqslant\beta<\varkappa$,

$$\{\pi_\beta(B)\colon\ B\in S\}\in W(\beta).$$

Пусть P есть совокупность всех четверок $p=\langle T_p, l_p, W_p, S_p\rangle$, удовлетворяющих условиям (4)—(7):

(4) $\langle T_p, l_p\rangle$ принадлежит $\varkappa$-куреповскому ЧУ множеству,

(5) W_p есть функция, область определения которой совпадает с высотой α_p+1 дерева T_p,

(6) $W_p(\alpha)$ есть семейство мощности $<\varkappa$, состоящее из подмножеств α-го уровня дерева T_p (при любом $\alpha\in\operatorname{dom} W_p$),

(7) S_p есть семейство мощности $<\varkappa$, состоящее из подмножеств множества $\operatorname{dom} l_p$.

Вводим на P частичный порядок, полагая $p\leqslant q$, если и только если выполняются условия (8)—(11):

(8) $\langle T_p, l_p\rangle\leqslant\langle T_q, l_q\rangle$ в смысле $\varkappa$-куреповского ЧУ множества,

(9) W_p продолжает W_q,

(10) $S_p\supseteq S_q$,

(11) для любого ординала α такого, что $\alpha_q<\alpha\leqslant\alpha_p$, и любого $S\in S_q$ множество $\{\pi_\alpha(l_p(\rho))\colon\ \rho\in S\}$ принадлежит $W_p(\alpha)$.

Это множество P с указанным порядком называется $W(\varkappa)$ *ЧУ множеством*. Доказательство следующей леммы (почти аналогичное доказательствам 4.2 и 4.3) оставляется читателю.

4.8. Лемма. *Пусть P есть $W(\varkappa)$ ЧУ множество для некоторого регулярного несчетного кардинала $\varkappa$. Тогда*:

(i) *P является λ-замкнутым при любом $\lambda<\varkappa$.*

(ii) *Если $\varkappa^\lambda=\varkappa$ для всех $\lambda<\varkappa$, то P удовлетворяет $\varkappa^+$-УА.*

(iii) *Для каждого $\alpha<\varkappa$ множество $D_\alpha=\{p\in P\colon\ \alpha_p>\alpha\}$ плотно в P. Для каждого $S\subseteq\varkappa^+$ мощности $<\varkappa$ множество $E_s=\{p\in P\colon\ S\subseteq\operatorname{dom} l_p\wedge S\in S_p\}$ плотно в P.*

4.9. Теорема (Сильвер). *Существует такая СТМ N, что $N\models W(\omega_1)$.*

Доказательство. Пусть M есть СТМ, $\varkappa=\omega_1^M$ и $M\models$ GCH. Пусть $P\in M$ таково, что $M\models$ (P есть $W(\varkappa)$ ЧУ множество). Пусть, наконец, множество $G\subseteq P$ является M-генерическим и $N=M[G]$. Из предыдущей леммы следует, что все кардиналы модели M сохраняются в N.

Определим $T=\bigcup\limits_{p\in G}T_p\in N$. Для каждого $\rho<\omega_2^M=\omega_2^N$ через $B(\rho)$ обозначим ρ-й путь сквозь дерево T, определенный в доказательстве теоремы 4.4. Положим $F=\{B(\rho)\colon\ \rho<\omega_2^M\}$. Для каждого $\alpha<\omega_1^M=\omega_1^N$ определим $W(\alpha)=W_p(\alpha)$, где $p\in D_\alpha\cap G$

произвольно, а D_α определено в 4.8 (iii). Это определение $W(\alpha)$ не зависит от выбора p вследствие совместимости элементов множества G и того, что если $p, q \in P$ совместимы, то либо W_p продолжает W_q, либо наоборот. Мы утверждаем, что множества T, F и W как раз таковы, чтобы обеспечить выполнение $W(\omega_1)$ внутри модели N.

Чтобы проверить это, рассмотрим произвольное множество $S \in N$, $S \subseteq F$, имеющее внутри N мощность $< \varkappa$. Пусть $S' = \{\rho < \omega_2^M\colon B(\rho) \in S\}$. В силу ω-замкнутости множества P и леммы 3.12 каждая функция $f \in N$, отображающая ω на S', принадлежит M. Следовательно, $S' \in M$. Теперь, согласно плотности множеств E_s, определенных в 4.8 (iii), найдется такое $p \in G$, что $S' \in S_p$. Осталось доказать, что если $\alpha_p < \alpha < \varkappa$, то $\{\pi_\alpha(B)\colon B \in S\} \in W(\alpha)$. Для этого рассмотрим произвольное $q \in G \cap D_\alpha$, удовлетворяющее неравенству $q \leqslant p$. Требование (11) в определении порядка на P гарантирует нам, что $\{\pi_\alpha(B)\colon B \in S\} = \{\pi_\alpha(l_q(\rho))\colon \rho \in S'\} \in W_q(\alpha) = W(\alpha)$. □

4.10. Определение. Для каждого несчетного кардинала $\varkappa$ через $\square(\varkappa)$ обозначается предположение о том, что существует функция C с областью определения $\{\alpha < \varkappa^+\colon \operatorname{Lim}(\alpha)\}$, удовлетворяющая при любом $\alpha \in \operatorname{dom} C$ таким трем условиям:

(i) $C(\alpha) \subseteq \alpha$ и $C(\alpha)$ является з. н. о. в α.

(ii) Если $\operatorname{cf}\alpha < \varkappa$, то $\operatorname{card} C(\alpha) < \varkappa$.

(iii) Если β есть предельная точка множества $C(\alpha)$, т. е. если $\beta < \alpha$ и $C(\alpha) \cap \beta$ конфинально в β, то $C(\beta) = C(\alpha) \cap \beta$.

В случае, когда кардинал $\varkappa$ сингулярен, посылка в (ii) обычно опускается, и (ii) принимает вид

(ii′) $\operatorname{card} C(\alpha) < \varkappa$.

Докажем, что предположения $\square(\omega_1)$, $\square(\omega_\omega)$ и т. п. непротиворечивы.

Используем для этого совокупность P всех функций p с областью определения $\{\alpha < \alpha(p)\colon \operatorname{Lim}(\alpha)\}$ для некоторого предельного ординала $\alpha(p) < \varkappa^+$, удовлетворяющих условиям (i)—(iii) для каждого $\alpha \in \operatorname{dom} p$. Вводим частичный порядок на P обратно включению. Это множество P с указанным порядком называется $\square(\varkappa)$ *ЧУ множеством.*

4.11. Лемма. *Пусть кардинал $\varkappa$ несчетен, а P есть $\square(\varkappa)$ ЧУ множество. Тогда P является $\varkappa$-дистрибутивным.*

Доказательство. Будем доказывать именно дистрибутивность: P не является $\varkappa$-замкнутым. Сначала рассмотрим последовательность $\langle D_\xi\colon \xi < \lambda\rangle$ длины $\lambda < \varkappa$ открытых плотных множеств $D_\xi \subseteq P$. Докажем, что пересечение $\bigcap\limits_{\xi<\lambda} D_\xi$ плотно. Тем самым будет установлена λ-дистрибутивность для всех $\lambda < \varkappa$. В случае, когда кардинал $\varkappa$ регулярен, доказательство

проходит и при $\lambda = \varkappa$. Если же $\varkappa$ сингулярен, то мы получим дистрибутивность из 3.11 (ii).

Фиксируем произвольное $p \in P$. Будем строить убывающую последовательность $\langle p_\xi\colon \xi \leqslant \lambda\rangle$ элементов множества P следующим образом. Полагаем $p_0 = p$. Для непредельного ординала $\xi + 1$, если p_ξ уже построено, то берем такое $p_{\xi+1} \leqslant p_\xi$, что $p_{\xi+1} \in D_\xi$. Пусть ординал $\zeta \leqslant \lambda$ предельен и p_ξ уже построено для всех $\xi < \zeta$. Тогда $f = \bigcup\limits_{\xi<\zeta} p_\xi$ будет функцией, удовлетворяющей условиям 4.10 (i)—(iii) и определенной на множестве всех предельных ординалов $< \alpha$, где $\alpha = \sup\{\alpha(p_\xi)\colon \xi < \zeta\}$. Рассмотрим продолжение g функции f на множество $\{\beta \leqslant \alpha\colon \operatorname{Lim}(\beta)\}$, определенное равенством $g(\alpha) = \{\alpha(p_\xi)\colon \xi < \zeta\}$. Если эта функция g также удовлетворяет 4.10 (i)—(iii), то в качестве p_ζ берем g. В противном случае p_ζ не определяем и построение заканчиваем.

Если наше построение не заканчивается до шага λ, то в его результате мы получаем множество p_λ, принадлежащее каждому D_ξ. Поскольку исходное $p \in P$ было произвольным, то это доказывает искомую плотность пересечения $\bigcap\limits_{\xi<\lambda} D_\xi$. Поэтому достаточно доказать, что построение действительно продолжается до λ.

Предположим противное: построение заканчивается на некотором предельном ординале $\zeta < \lambda$. Это может быть только в случае, когда $g(\alpha) = \{\alpha(p_\xi)\colon \xi < \zeta\}$ не удовлетворяет условиям 4.10 (i)—(iii).

Ясно, что $g(\alpha)$ конфинально в α. Кроме того, если $\xi < \eta < \zeta$, то из $p_\xi < p_\eta$ следует $\alpha(p_\xi) < \alpha(p_\eta)$. Поэтому каждый ординал $\beta < \alpha$, являющийся предельной точкой множества $g(\alpha)$, имеет вид $\beta = \sup\{\alpha(p_\xi)\colon \xi < \eta\}$ для некоторого предельного $\eta < \zeta$. Тогда по построению выполняется $\alpha(p_\eta) = \beta$ и $\beta \in g(\alpha)$. Таким образом, множество $g(\alpha)$ замкнуто в α, и 4.10 (i) не может нарушаться.

Далее, в соответствии с построением на предельных шагах $\eta < \zeta$ имеем $g(\alpha(p_\eta)) = p_\eta(\alpha(p_\eta)) = \{\alpha(p_\xi)\colon \xi < \eta\} = g(\alpha) \cap \alpha(p_\eta)$. Значит, 4.10 (iii) также нарушается. Наконец, и 4.10 (ii) не нарушается, поскольку $\operatorname{card} g(\alpha) \leqslant \operatorname{card}\alpha \leqslant \lambda < \varkappa$. Итак, мы получили противоречие, которое показывает, что построение p_ξ действительно продолжается до λ. □

4.12. Лемма. *Пусть $\varkappa$ и P таковы, как в лемме* 4.11. *Тогда для каждого предельного ординала $\alpha < \varkappa^+$ множество $D_\alpha = \{p \in P\colon \alpha(p) \geqslant \alpha\}$ открыто и плотно в P.*

Доказательство. Открытость D_α очевидна. Докажем плотность индукцией по α. Если существует наибольший предельный ординал $\beta < \alpha$ и множество D_β плотно в P, то мы имеем $\alpha = \beta + \omega$. Кроме того, каждое $p \in D_\beta$ тривиальным

образом продолжается до $q \in D_\alpha$ определением $q(\alpha) = \{\beta + n: n < \omega\}$, и поэтому D_α плотно. Если же α предален в ряду предельных ординалов и все множества D_β открыты и плотны для предельных $\beta < \alpha$, то множество $D_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$ также будет плотным в силу $\varkappa$-дистрибутивности. □

Заметим, что в предположении GCH мощность $\square(\varkappa)$ ЧУ множества равна $\varkappa^+$, поэтому оно, очевидно, удовлетворяет $\varkappa^{++}$-УА.

4.13. Теорема (Йенсен). *Существует такая СТМ N, что $N \models \square(\omega_1)$, и аналогично для $\square(\omega_2)$, $\square(\omega_\omega)$ и т. п.*

Доказательство. Пусть M есть СТМ и $M \models$ GCH. Положим $\varkappa = \omega_1^M$ (или ω_2^M, или вообще любой кардинал модели M). Пусть $P \in M$ таково, что $M \models (P$ есть $\square(\varkappa)$ ЧУ множество). Возьмем M-генерическое множество $G \subseteq P$ и обозначим $N = M[G]$ и $C = \bigcup G \in N$. Вследствие дистрибутивности и $\varkappa^{++}$-условия антицепей все кардиналы модели M сохраняются в N. Нетрудно проверить, что C является функцией (ср. с леммой 3.2 (i)) с областью определения $\operatorname{dom} C = (\varkappa^+)^M$. В силу сохранения кардиналов будет $(\varkappa^+)^N = (\varkappa^+)^M$. Нетрудно проверить также, что C удовлетворяет условиям 4.10 (i)—(iii) внутри N, поскольку множества имеют одну и ту же мощность в M и в N, а понятие з. н. о. множества абсолютно. Подробности мы оставляем читателю. □

4.14. Определение. Для каждого несчетного кардинала $\varkappa$ через $E(\varkappa)$ обозначается предположение о том, что существует такое стационарное множество $E \subseteq \varkappa$, состоящее из предельных ординалов конфинальности ω, что $E \cap \alpha$ не является стационарным в α ни для какого предельного кардинала $\alpha < \varkappa$ конфинальности $> \omega$.

Пусть P есть совокупность всех таких пар $p = \langle E_p, \alpha_p\rangle$, что $\alpha_p < \varkappa$, множество $E_p \subseteq \alpha_p$ состоит из предельных ординалов конфинальности ω, а $E_p \cap \alpha$ не является стационарным в α ни для какого предельного ординала $\alpha \leqslant \alpha_p$ конфинальности $> \omega$. Введем частичный порядок на P, полагая $p \leqslant q$, если $\alpha_p \geqslant \alpha_q$ и $E_q = E_p \cap \alpha_q$. Это множество P с указанным порядком называется $E(\varkappa)$ ЧУ множеством.

4.15. Лемма. *Пусть кардинал $\varkappa$ регулярен и несчетен, а P есть $E(\varkappa)$ ЧУ множество. Тогда P является λ-дистрибутивным для всех $\lambda < \varkappa$.*

Доказательство. Пусть $\langle D_\xi: \xi < \lambda\rangle$ есть последовательность длины $\lambda < \varkappa$ открытых плотных множеств $D_\xi \subseteq P$. Зафиксируем произвольное $p \in P$ и попытаемся построить такое $p_\lambda \leqslant p$, что $p_\lambda \in \bigcap\limits_{\xi<\lambda} D_\xi$. Тем самым будет доказана плотность пересечения.

Это p_λ будет получено в результате построения убывающей последовательности пар $p_\xi = \langle E_\xi, \alpha_\xi\rangle$, $\xi \leqslant \lambda$, которое проходит следующим образом. Пусть $p_0 = p$. Если p_ξ уже построено, то, очевидно, $\langle E_\xi, \alpha_\xi + 1\rangle \leqslant p_\xi$. Выберем $p_{\xi+1} \leqslant \langle E_\xi, \alpha_\xi + 1\rangle$, принадлежащее множеству D_ξ. Такое определение обеспечивает, что $\alpha_\xi \notin E_{\xi+1}$. На предельном шаге $\zeta \leqslant \lambda$, когда все $p_\xi = \langle E_\xi, \alpha_\xi\rangle$ уже построены для $\xi < \zeta$, положим $\alpha = \sup\{\alpha_\xi: \xi < \zeta\}$, $E = \bigcup\limits_{\xi<\zeta} E_\xi$. Если при этом $\langle E, \alpha\rangle \in P$, то определим $E_\zeta = E$, $\alpha_\zeta = \alpha$, $p_\zeta = \langle E, \alpha\rangle$. Если же $\langle E, \alpha\rangle \notin P$, то p_ζ не определяется и наше индуктивное построение заканчивается.

Ясно, что если p_λ определено в результате этого построения, то оно, как нам и нужно, принадлежит каждому множеству D_ξ. Предположим, что, напротив, наше построение обрывается на каком-нибудь предельном шаге $\zeta < \varkappa$. Это может случиться только в случае, когда (в предыдущих обозначениях) $E \cap \beta$ оказывается стационарным в β для некоторого предельного ординала $\beta \leqslant \alpha$. Если $\beta < \alpha$, то $\beta < \alpha_\xi$ для некоторого $\xi < \zeta$, и $E \cap \beta = E_\xi \cap \beta$ не является стационарным в β. Поэтому само E должно быть стационарным в α.

Однако по построению множество E не пересекается с множеством $C = \{\alpha_\xi: \xi < \zeta\}$, так как $\alpha_\xi \notin E_{\xi+1}$. Ясно, что это C неограничено в α. Если $\xi < \eta < \zeta$, то $\alpha_\xi < \alpha_\eta$. Значит, если β является предельной точкой множества C, то β имеет вид $\beta = \sup\{\alpha_\xi: \xi < \eta\}$ для некоторого предельного $\eta < \zeta$. Но тогда по построению будет $\beta = \alpha_\eta \in C$. Таким образом, C замкнуто в α, и множество E оказалось непересекающимся с з. н. о. множеством C. Следовательно, E не является стационарным. Противоречие завершает доказательство. □

4.16. Теорема (Йенсен). *Существует такая модель N, что $N \models E(\omega_2)$, и то же самое верно для $E(\omega_3)$ и т. п.*

Доказательство. Поскольку понятия з. н. о. и стационарного множества вырождаются в случае счетных ординалов, то мы не рассматриваем $E(\omega_1)$. Пусть M есть СТМ и $M \models$ GCH. Возьмем $\varkappa = \omega_2^M$ (или ω_3^M, или любой кардинал $\geqslant \omega_2^M$ внутри M). Пусть $P \in M$ таково, что $M \models (P$ является $E(\varkappa)$ ЧУ множеством). Пусть $G \subseteq P$ есть M-генерическое множество, $N = M[G]$ и $E = \bigcup\limits_{p\in G} E_p$. Вследствие дистрибутивности и $\varkappa^+$-условия антицепей (последнее тривиально, так как $\operatorname{card}^M P = \varkappa$) все кардиналы модели M сохраняются в N. Покажем, что множество E как раз обеспечивает истинность $E(\varkappa)$ внутри N.

Если $p, q \in P$ совместимы, то либо $E_p = E_q \cap \alpha_p$, либо наоборот. Поскольку все элементы множества G совместимы, то $E_p = E \cap \alpha_p$ для всех $p \in G$. Далее, нетрудно проверить, что

множество $D_\alpha = \{p \in P\colon \alpha_p > \alpha\}$ плотно в P при любом $\alpha < \varkappa$. Рассмотрим теперь произвольный предельный ординал $\alpha < \varkappa$. Для него найдется $p \in D_\alpha \cap G$. Для этого p будет $E \cap \alpha = E_p \cap \alpha$. Но $E_p \cap \alpha$ не будет стационарным в α внутри M по определению P, т. е. найдется такое з. н. о. в α множество $C \in M$, $C \subseteq \alpha$, что $C \cap E_p = \varnothing$. Поскольку это множество C принадлежит и модели N, то внутри N множество $E \cap \alpha$ также не будет стационарным. Теперь остается доказать, что само E стационарно в $\varkappa$ внутри N, т. е. $E \cap C \neq \varnothing$, каково бы ни было принадлежащее модели N з. н. о. множество $C \subseteq \varkappa$.

Каждое $C \in \mathscr{P}^N(\varkappa)$ имеет вид $C = I_G(t)$ для некоторого P-терма $t \in M$. Если C является з. н. о., то некоторое $p_0 \in G$ вынуждает, что t является з. н. о. в $\varkappa^*$. Пусть $\bar{G} = \{\langle p, p\rangle\colon p \in P\}$. Имеет место равенство $G = I_G(\bar{G})$. Отметим, что если $p \in P$ и $\alpha < \alpha_p$, то $p \Vdash (\alpha^* \in \bigcup \operatorname{dom} \bar{G})$, если и только если $\alpha \in E_p$. (Так как для любого P-генерического множества $H \subseteq P$ такого, что $p \in H$, будет $\alpha \in \bigcup \operatorname{dom} I_H(\bar{G}) = \bigcup\limits_{q \in H} E_q$, если и только если $\alpha \in E_p$.) Теперь для доказательства $C \cap E \neq \varnothing$ достаточно найти такое $p \in G$, которое вынуждает:

$$(*) \qquad t \cap (\bigcup \operatorname{dom} \bar{G}) \neq \varnothing.$$

Мы докажем, что на самом деле уже $p_0 \Vdash (*)$. Для этого установим плотность в P ниже p_0 совокупности всех $q \leqslant p_0$, вынуждающих $(*)$. В свою очередь для этого достаточно для каждого $p \leqslant p_0$ указать такое $q \leqslant p$ и такое $\alpha \in E_q$, что $q \Vdash \alpha^* \in t$.

Итак, пусть $p \leqslant p_0$ произвольно. Следующие рассуждения проходят в M. Строим убывающую последовательность элементов $q_n = \langle E_n, \alpha_n\rangle$ множества P и возрастающую последовательность ординалов $\beta_n < \varkappa$, где $n < \omega$, следующим образом. Пусть $q_0 = p$, $\beta_0 = 0$. Если q_n и β_n уже построены, то $q_n \Vdash$ (t неограничено в $\varkappa^*$), так как $q_n \leqslant p_0$. Значит, $q_n \Vdash \exists \beta\, (\alpha_n^* + 1,\ \beta_n^* < \beta < \varkappa^* \wedge \beta \in t)$. Таким образом, можно выбрать такие $q_{n+1} \leqslant \langle E_n, \alpha_n + 1\rangle \leqslant q_n$ и β_{n+1}, что $\alpha_n + 1$, $\beta_n < \beta_{n+1} < \varkappa$ и $q_{n+1} \Vdash \beta_{n+1}^* \in t$.

Положим теперь $E' = \bigcup\limits_{n \in \omega} E_n$ и $\gamma = \sup\{\alpha_n\colon n < \omega\} = \sup\{\beta_n\colon n < \omega\}$. Тогда, если $q = \langle E' \cup \{\gamma\}, \gamma + 1\rangle$, то $\gamma \in E_q$ и $q \leqslant q_n$ для всех n. Кроме того, $q \Vdash$ (t замкнуто в $\varkappa^*$) и $q \Vdash \beta_n^* \in t$ для всех n, откуда $q \Vdash \gamma^* \in t$. Итак, мы подобрали такие $q \leqslant p$ и $\gamma \in E_q$, что $q \Vdash \gamma^* \in t$, что и требовалось. □

В заключение этого параграфа остановимся еще на двух принципах.

4.17. Упражнение. Если T есть ω_2-дерево Курепы, F является семейством путей сквозь T и множество $C \subseteq T$ имеет мощность ω_1, то множество $\{B \cap C\colon B \in F\}$ будет иметь мощность $\leqslant \omega_1$. (В самом деле, $C \subseteq T_\alpha$ для некоторого $\alpha < \omega_2$. Множество $B \cap C$ полностью определяется некоторым $a \in B \cap T_\alpha$, а $\operatorname{card} T_\alpha \leqslant \omega_1$.) Покажите, что можно построить СТМ, в которой есть ω_2-дерево Курепы T и семейство F, состоящее из ω_3 путей сквозь T, такие, что для любого *счетного* $C \subseteq T$ множество $\{B \cap C\colon B \in F\}$ также *счетно*. Это делается с помощью подпорядка ω_2-куреповского ЧУ множества, состоящего из таких p, что для каждого счетного $C \subseteq T_p$ семейство $\{\{a \in C\colon a \leqslant b\}\colon b$ принадлежит α_p-му уровню дерева $T\}$ также счетно. Покажите, что этот подпорядок также является ω_1-замкнутым и т. д., а затем действуйте, как в доказательстве теоремы 4.4.

4.18. Упражнение (более трудное). Для каждого регулярного кардинала $\varkappa$ через $\diamondsuit(\varkappa)$ обозначается предположение о том, что существует функция S с областью определения $\varkappa$, удовлетворяющая таким двум условиям:

(i) $S(\alpha) \subseteq \alpha$ для всех $\alpha < \varkappa$.

(ii) Для любого $A \subseteq \varkappa$ множество $\{\alpha < \varkappa\colon S(\alpha) = A \cap \alpha\}$ стационарно в $\varkappa$.

$\diamondsuit(\varkappa)$ ЧУ множеством назовем совокупность всех функций p, область определения которых есть ординал $< \varkappa$, таких, что $p(\alpha) \subseteq \alpha$ для всех $\alpha \in \operatorname{dom} p$. Это множество упорядочивается обратно включению.

Покажите, что если M есть СТМ, $M \models \mathrm{GCH}$, $\varkappa = \omega_1^M$, $M \models (P$ есть $\diamondsuit(\varkappa)$ ЧУ множество), $G \subseteq P$ является M-генерическим, $N = M[G]$ и $S = \bigcup G \in N$, то S будет обеспечивать истинность $\diamondsuit(\varkappa)$ внутри N. Для этого рассмотрите такие P-термы t, $u \in M$, что $I_G(t)$, $I_G(u) \subseteq \varkappa$ и $I_G(t)$ является з. н. о. в $\varkappa$. Постройте внутри модели M такие последовательности множеств $p_n \in P$, $B_n \in M$ и $\beta_n < \varkappa$, что $p_n \Vdash \beta_n^* \in t$, $\beta_{n+1} > \operatorname{dom} p_n$ и $p_{n+1} \Vdash u \cap \beta_n^* = B_n^*$. (Чтобы получить последнее утверждение, заметьте, что в силу замкнутости для каждого $\beta < \varkappa$ выполняется $\mathscr{P}^N(\beta) = \mathscr{P}^M(\beta)$. Значит, если $v \in \mathscr{P}^M(P \times \beta)$ и $X = \mathscr{P}^M(\beta)$, то $p \Vdash v \in X^*$.) Затем покажите, что каждое $q \leqslant$ всех p_n будет вынуждать $(\beta^* \in t \wedge \bigcup \bar{G}(\beta^*) = B^*)$, где β есть sup всех β_n, а B — объединение всех B_n. Все рассуждения аналогичны доказательству теоремы 4.16.

§ 5. Однократное расширение вместо двукратного

Иногда естественный путь для построения интересующего нас генерического расширения состоит в том, что мы, начиная с некоторой СТМ M и ЧУ множества $Q \in M$, берем M-генери-

ческое $H \subseteq Q$ и строим первое расширение $M' = M[H]$; затем уже рассматриваем другое ЧУ множество $R \in M'$, берем M'-генерическое $K \subseteq R'$ и строим искомое расширение $N = M'[K] = M[H][K]$. В частности, по такой схеме проходит доказательство теоремы 4.5. Этот путь является естественным также для доказательства непротиворечивости таких утверждений, как $2^\omega > \omega_1 \wedge 2^{\omega_1} > 2^\omega$. Мы покажем, как такое двукратное вынуждение может быть заменено однократным. Начнем со случая, когда ЧУ множество $R \in M'$ принадлежит уже́ модели M. В этом параграфе нам придется делать различие между ЧУ множеством P и его основным множеством $|P|$.

5.1. Определение. Пусть Q и R являются ЧУ множествами. *Прямым произведением* $Q \otimes R$ множеств Q и R называется ЧУ множество P, основное множество которого $|P| = |Q| \times |R|$ (декартово произведение), а частичный порядок определяется так: $\langle q, r\rangle \leqslant_P \langle q', r'\rangle$, если и только если $q \leqslant_Q q'$ и $r \leqslant_R r'$. Отметим, что наибольшим элементом 1_P множества P будет пара $\langle 1_Q, 1_R\rangle$.

5.2. Первая теорема о произведении. *Пусть M есть СТМ, Q, $R \in M$ являются ЧУ множествами и $P = Q \otimes R$. Тогда*:

(i) *Если G есть M-генерическое подмножество множества P, и мы определим*

$$H = \{q \in |Q| \colon \exists r \in |R|\, (\langle q, r\rangle \in G)\},$$
$$K = \{r \in |R| \colon \exists q \in |Q|\, (\langle q, r\rangle \in G)\},$$

то H будет M-генерическим подмножеством множества Q, K будет $M[H]$-генерическим подмножеством множества R и $G = H \times K$.

(ii) *Если H есть M-генерическое подмножество множества Q, а K есть $M[H]$-генерическое подмножество множества R, то $H \times K$ будет M-генерическим подмножеством множества P.*

(iii) *Если H и K таковы, как в* (ii), *то K также будет M-генерическим, а H будет $M[K]$-генерическим.*

Доказательство. (i) Отметим, что если $\langle q, r\rangle \in G$, то $\langle 1_Q, r\rangle$ и $\langle q, 1_R\rangle$ также принадлежат G, поскольку эти элементы больше чем $\langle q, r\rangle$. Значит, $H = \{q \in |Q| \colon \langle q, 1_R\rangle \in G\}$ и $K = \{r \in |R| \colon \langle 1_Q, r\rangle \in G\}$.

Для доказательства M-генеричности множества H рассмотрим произвольное плотное $D \in M$, $D \subseteq |Q|$. Тогда $D \times |R|$ будет плотным в P. Значит, найдется $\langle q, r\rangle \in (D \times |R|) \cap G$. Таким образом, $q \in D \cap H$, $D \cap H \neq \varnothing$.

Для доказательства $M[H]$-генеричности множества K рассмотрим произвольное плотное $D \in M[H]$, $D \subseteq |R|$. Найдется такой Q-терм $t \in M$, что $D = I_H(t)$. Некоторое $q_0 \in Q$ вынуждает, что t плотно. Положим $E = \{\langle q, r\rangle \colon q \leqslant_Q q_0 \wedge q \Vdash r^* \in t\}$. ($E \in M$ в силу леммы об определимости.) Мы утверждаем, что E плотно ниже $\langle q_0, 1_R\rangle$ в P.

Действительно, если $\langle q, r\rangle \leqslant \langle q_0, 1_R\rangle$, то $q \Vdash$ (t плотно в R^*), откуда $q \Vdash \exists r' \in |R|^*\, (r' \leqslant_R r^* \wedge r' \in t)$. Поэтому найдутся такие $q' \leqslant_Q q$ и $r' \leqslant_R r$, что $q' \Vdash (r')^* \in t$. Но $\langle q', r'\rangle \leqslant_P \langle q, r\rangle$ и $\langle q', r'\rangle$ принадлежит множеству E. Плотность E доказана.

Согласно лемме 2.13 найдется некоторое $\langle q, r\rangle \in E \cap G$. Имеем $r \in K$, а так как $q \in H$ вынуждает $r^* \in t$, то $r \in D$. Таким образом, $K \cap D \neq \varnothing$; генеричность K доказана.

Наконец, покажем $H \times K = G$. Если $q \in H$ и $r \in K$, то $p_0 = \langle q, 1_R\rangle$ и $p_1 = \langle 1_Q, r\rangle$ принадлежат множеству G, и потому найдется такое $p' = \langle q', r'\rangle \in G$, что $p' \leqslant_P p_0, p_1$. Ясно, что $\langle q, r\rangle \geqslant_P p'$. Значит, $\langle q, r\rangle \in G$, что и требовалось.

Доказательство (i) закончено (включение $G \subseteq H \times K$ очевидно).

Утверждение (ii) не будет использовано ниже, и мы оставляем его доказательство заинтересованному читателю (см. Шенфилд [1]). А утверждение (iii) следует из (i), (ii) и из того, что множества $Q \otimes R$ и $R \otimes Q$ изоморфны. □

Случай двукратного вынуждения при $R \in M' - M$ более сложен. Введем следующие упрощающие соглашения:

(i) Будем предполагать, что $|R|$ есть некоторый ординал ρ. Тогда $|R| \in M$, так как $\mathrm{OR}^M = \mathrm{OR}^{M'}$.

(ii) Будем предполагать, что наибольший элемент 1_R множества R есть ординал 1.

Любое ЧУ множество, очевидно, изоморфно некоторому множеству, удовлетворяющему указанным условиям.

Частичный порядок $\leqslant_R$ на множестве R имеет вид $I_H(t)$ для некоторого Q-терма $t \in M$. Кроме того, некоторое $q \in H$ вынуждает, что t делает ρ^* ЧУ множеством с максимальным элементом 1^*. Применяя следствие 2.17, мы можем найти такой Q-терм $\bar{R} \in M$, что

(*) $Q \Vdash$ ($\bar{R}$ делает ρ^* ЧУ множеством с максимальным элементом 1^*),

и, кроме того, $q \Vdash t = \bar{R}$, откуда следует $I_H(\bar{R}) = I_H(t)$, т. е. $I_H(\bar{R})$ есть отношение порядка ЧУ множества R.

Термы $\bar{R}$, удовлетворяющие (*), называем *хорошими*.

5.3. Определение. Пусть M есть СТМ, $Q \in M$ является ЧУ множеством, $\rho \in \mathrm{OR}^M$ и $\bar{R} \in M$ — хороший терм. Положим $|P| = |Q| \times \rho$. Упорядочим множество $|P|$, определяя $\langle q, \sigma\rangle \leqslant_P \langle q', \sigma'\rangle$, если и только если $q \leqslant_Q q'$ и $q \Vdash (\sigma^* \leqslant \sigma'^*$ в смысле $\bar{R}$, т. е. $\langle \sigma^*, \sigma'^*\rangle \in \bar{R})$. Тогда $P = \langle |P|, \leqslant_P\rangle$ будет ЧУ множеством с максимальным элементом $1_P = \langle 1_Q, 1\rangle$. Это множе-

ство P называется *произведением* Q *и* $\bar{R}$ (относительно модели M) и обозначается через $Q \otimes \bar{R}$.

5.4. Вторая теорема о произведении. *Пусть в обозначениях* 5.3 G *есть* M*-генерическое подмножество множества* P. *Определим*

$$H = \{q \in |Q|: \exists \sigma < \rho\, (\langle q, \sigma\rangle \in G)\},$$
$$K = \{\sigma < \rho: \exists q \in |Q|\, (\langle q, \sigma\rangle \in G)\}.$$

Тогда H *будет* M*-генерическим подмножеством множества* P, *а* K *будет* $M[H]$*-генерическим подмножеством ЧУ множества* $R = \langle \rho, I_H(\bar{R})\rangle$.

Доказательство. Проверку M-генеричности множества H оставляем читателю. Покажем, что K является $M[H]$-генерическим. Рассмотрим произвольное плотное в R множество $D \in M[H]$. Найдется такой P-терм $t \in M$, что $D = I_H(t)$. Также найдется такое $q_0 \in H$, которое вынуждает, что t плотно. Покажем, что множество $E = \{\langle q, \sigma\rangle: q \Vdash \sigma^* \in t\}$ плотно ниже $\langle q_0, 1\rangle$ в P. В самом деле, пусть $\langle q', \sigma'\rangle \leqslant_P \langle q_0, 1\rangle$. Поскольку $q' \Vdash (t$ плотно$)$, то $q' \Vdash \exists \sigma \in \rho^* (\sigma \leqslant \sigma'^*$ в смысле $\bar{R} \wedge \sigma \in t)$. Значит, найдутся такие $q \leqslant_Q q'$ и $\sigma < \rho$, что $q \Vdash (\sigma^* \in t \wedge \sigma^* \leqslant \sigma'^*$ в смысле $\bar{R})$. Тогда $\langle q, \sigma\rangle \in E$ и $\langle q, \sigma\rangle \leqslant \langle q', \sigma'\rangle$. Плотность множества E доказана. Следовательно, существует некоторое $\langle q, \sigma\rangle \in E \cap G$. Ясно, что $\sigma \in K$ и $q \in H$. Кроме того, $\sigma \in D$, так как $q \Vdash \sigma^* \in t$. Таким образом, $D \cap K \neq \varnothing$, что и требовалось. □

Теорема 5.2 (ii) сводит двукратное вынуждение к однократному. Теорема 5.2 (i) дает возможность в некоторых случаях представлять однократное вынуждение в виде двукратного. Полезность последнего результата будет видна на примере доказательства теоремы 5.7 ниже. В оставшейся части этого параграфа мы возвращаемся к нашему прежнему соглашению не различать ЧУ множество и его основное множество. Как и выше, это соглашение не приведет ни к каким недоразумениям.

5.5. Определение. Пусть кардинал $\varkappa$ несчетен. $\varkappa$*-свертывающим* ЧУ множеством называется множество

$$P = \{p: (p \text{ есть функция}) \wedge (\operatorname{dom} p \text{ счетно})$$
$$\wedge \operatorname{dom} p \subseteq \varkappa \times \omega_1 \wedge \forall \langle \alpha, \xi\rangle \in \operatorname{dom} p\, (p(\alpha, \xi) < \alpha)\},$$

частично упорядоченное обратно включению. Для каждого $\alpha < \varkappa$ введем подпорядок $P_\alpha = \{p \in P: \operatorname{dom} p \subseteq \alpha \times \omega_1\}$ и подпорядок $P^\alpha = \{p \in P: \operatorname{dom} p \subseteq (\varkappa - \alpha) \times \omega_1\}$ множества P. Тогда множества $P_\alpha \otimes P^\alpha$ и P изоморфны; каноническим изоморфизмом будет отображение, переводящее $\langle q, r\rangle$ в $q \cup r$.

5.6. Лемма. *Пусть кардинал* $\varkappa$ *недостижим и* P *является* $\varkappa$*-свертывающим ЧУ множеством. Тогда* P *удовлетворяет* $\varkappa$*-УА.*

Доказательство. Пусть множество $A \subseteq P$ имеет мощность $\varkappa$. Покажем, что A не является антицепью. Для каждого $\eta < \omega_1$ определим множество $A_\xi \subseteq A$ мощности $< \varkappa$ следующим образом. Положим $A_0 = \{a\}$, где $a \in A$ произвольно. Если $\eta < \omega_1$ и множества A_ξ уже определены для всех $\xi < \eta$, то определяем $D_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \bigcup_{p \in A_\xi} \operatorname{dom} p$. В силу регулярности $\operatorname{card} D_\eta < \varkappa$ и $D_\eta \subseteq \alpha \times \omega_1$ для некоторого $\alpha < \varkappa$. Значит, множество $B_\eta = \{p \restriction D_\eta: p \in A\}$ имеет мощность $\operatorname{card} B_\eta \leqslant (\operatorname{card} \alpha)^{\operatorname{card} \alpha} < \varkappa$. Поэтому мы можем выбрать такое множество $A_\eta \subseteq A$, что $\operatorname{card} A_\eta < \varkappa$, $\bigcup_{\xi<\eta} A_\xi \subseteq A_\eta$ и для каждого $q \in B_\eta$ найдется такое $p \in A_\eta$, что $p \restriction D_\eta = q$.

Пусть, наконец, A' есть объединение всех множеств A_ξ, $\xi < \omega_1$, а D есть объединение всех D_ξ. Поскольку $\operatorname{card} A' < \varkappa$, то найдется $p \in A - A'$. Множество $\operatorname{dom} p$ счетно, и поэтому $\operatorname{dom} p \cap D \subseteq D_\xi$ для некоторого $\xi < \omega_1$. Следовательно, существует $q \in A_{\xi+1} \subseteq A'$, удовлетворяющее равенству $p \restriction (\operatorname{dom} p \cap D) = q \restriction D_\xi$. Но так как $\operatorname{dom} q \subseteq D$, то p и q согласованы на множестве $\operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$. Таким образом, $p \cup q$ есть функция, продолжающая каждую из функций p и q, и A не является антицепью. □

Свертывающие ЧУ множества были введены Леви и использованы им и Соловеем для получения многих глубоких результатов. (См. Соловей [2].) Принадлежащее Сильверу [1] доказательство следующей теоремы 5.7 также основано на свертывающих множествах. Для доказательства 5.7 мы предположим, что найдется СТМ M такая, что $M \models$ (существует недостижимый кардинал). Имея такую модель M, мы можем с помощью метода Гёделя (упомянутого выше после теоремы 3.14) получить такую же модель, дополнительно удовлетворяющую условию $M \models \mathrm{GCH}$.

5.7. Теорема (Сильвер). *Найдется такая СТМ* N, *что* $N \models \neg \mathrm{KH}(\omega_1)$.

Доказательство. Мы предположили, что существует такая СТМ M и такое $\varkappa \in M$, что $M \models (\varkappa$ — недостижимый кардинал). Как отмечено выше, можно предполагать, что $M \models \mathrm{GCH}$. Пусть $P \in M$ таково, что $M \models (P$ есть $\varkappa$-свертывающее множество). Пусть множество $G \subseteq P$ является M-генерическим и $N = M[G]$. В силу (тривиальной) ω-замкнутости P внутри M и $\varkappa$-УА, кардинал ω_1^M и все кардиналы $\geqslant \varkappa$ модели M сохраняются в N. Однако нетрудно проверить, что для каждого $\alpha < \varkappa$ множество

$$\{\langle \xi, \beta\rangle: \exists p \in G\, (\langle \alpha, \xi\rangle \in \operatorname{dom} p \wedge p(\alpha, \xi) = \beta)\} \in N$$

будет функцией из ω_1^N на α. Поэтому в модели N нет кардиналов между ω_1^M и $\varkappa$, т. е. $\varkappa = \omega_2^M$.

Любое дерево высоты ω_1, все уровни которого счетны, изоморфно некоторому дереву с основным множеством $|T| = \omega_1$.

Пусть $T \in M$ есть дерево с основным множеством ω_1^M. Через F обозначим совокупность всех путей сквозь T, принадлежащих модели M. Тогда $\mathrm{card}^M F \leqslant \omega_2^M$ и, следовательно, $\mathrm{card}^N F \leqslant \mathrm{card}^N \omega_2^M = \omega_1^M$. Но каждый принадлежащий модели N путь сквозь T принадлежит и модели M в силу леммы 4.6. Поэтому T не может быть ω_1-деревом Курепы внутри N.

Рассмотрим теперь общий случай: $T \in N$ (а не M) есть дерево с основным множеством ω_1^M. Пусть P-терм $t \in M$ таков, что $I_G(t)$ есть отношение порядка $\leqslant_T$ дерева T.

Следующие рассуждения проходят в N. Если $\xi \leqslant_T \eta$, то найдется такое $p \in G$, что $\langle p, \langle \xi, \eta\rangle\rangle \in t$. Одно из таких p обозначим через $f(\xi, \eta)$. Если же $\xi, \eta < \omega_1^M$, но не выполняется $\xi \leqslant_T \eta$, то найдется такое $p \in G$, что для каждого $q \leqslant p$ мы имеем $\langle q, \langle \xi, \eta\rangle\rangle \notin t$. (Именно, подходит любое $p \in G$, вынуждающее $\langle \xi^*, \eta^*\rangle \notin t$.) Одно из таких p также обозначим через $f(\xi, \eta)$. Согласно регулярности кардинала $\varkappa (= \omega_2^N)$ существует такое $\alpha < \varkappa$, что $\mathrm{dom}\, f(\xi, \eta) \subseteq \alpha \times \omega_1^M$ для всех $\xi, \eta < \omega_1^M$.

Теперь, так как $P = P_\alpha \otimes P^\alpha$, то в силу теоремы 5.2 множество $G_\alpha = G \cap P_\alpha$ будет M-генерическим, а множество $G^\alpha = G \cap P^\alpha$ будет $M[G_\alpha]$-генерическим, причем $M[G_\alpha][G^\alpha] = M[G] = N$. Далее, все множества $f(\xi, \eta)$ принадлежат G_α, и поэтому порядок $\leqslant_T$ совпадает с $I_G(t \cap (P_\alpha \times \omega_1^M \times \omega_1^M))$. Значит, $T \in M[G_\alpha]$.

Пусть ν есть $(\mathrm{card}\,\alpha)^{++}$ в смысле M. Тогда $\nu < \varkappa$, так как $\varkappa$ недостижим внутри M. Нетрудно проверить, что $\mathrm{card}^M P_\alpha < \nu$, и поэтому $M \models (P_\alpha$ удовлетворяет ν-УА). Таким образом, все кардиналы $\geqslant \nu$ сохраняются в $M[G_\alpha]$. Простые вычисления с помощью теоремы 3.15 позволяют установить, что $M[G_\alpha] \models 2^\mu = \nu$, где $\mu = \omega_1^M$. Следовательно, если F есть совокупность всех путей сквозь T в $M[G_\alpha]$, то $\mathrm{card}^{M[G_\alpha]} F \leqslant \nu < \varkappa$ и $\mathrm{card}^N F \leqslant \omega_1^M$.

Далее, $M \models$ (ЧУ множества P_α и P^α ω-замкнуты). В силу ω-замкнутости P_α в модели $M[G_\alpha]$ нет счетных последовательностей элементов множества P^α, кроме тех, которые принадлежат модели M. Следовательно, $M[G_\alpha] \models (P^\alpha$ ω-замкнуто). Таким образом, мы можем использовать 4.6 и получить: каждый путь сквозь T, принадлежащий модели $N = M[G_\alpha][G^\alpha]$, принадлежит и $M[G_\alpha]$, т. е. принадлежит множеству F. Это означает, что T не является деревом Курепы внутри N. Поскольку T произвольно, то $N \models \neg\mathrm{KH}(\omega_1)$. □

Ниже мы увидим, что теорема 5.2, дающая нам возможность заменять двукратные генерические расширения однократными, на самом деле применима и к бесконечнократным расширениям. Начнем со следующей ключевой леммы.

5.8. Лемма. *Пусть ЧУ множества Q, R принадлежат СТМ M, $P = Q \times R$ и $\varkappa$ является кардиналом в M. Пусть также*

$$M \models (\varkappa \text{ регулярен} \wedge \forall \lambda < \varkappa\ (Q \text{ является } \lambda\text{-замкнутым}) \wedge R \text{ удовлетворяет } \varkappa\text{-УА}).$$

Тогда $P \Vdash (\check{\varkappa} - \text{кардинал})$.

Доказательство. Рассмотрим M-генерическое множество $G \subseteq P$. Пусть $H \subseteq Q$ и $K \subseteq R$ таковы, как в 5.2 (i). Мы должны доказать, что $\varkappa$ сохраняется в расширении $M[G] = M[H][K]$. Предположим противное, т. е. что существуют $\lambda < \varkappa$ и отображение $f \in M[G]$ ординала λ на $\varkappa$. Для некоторого P-терма $t \in M$ выполняется равенство $f = I_G(t)$, а некоторое $p_0 = \langle q_0, r_0\rangle$ вынуждает, что t есть отображение $\check{\lambda}$ на $\check{\varkappa}$.

Следующие рассуждения проходят в модели M. Пусть $\beta < \varkappa$ и $q \leqslant_Q q_0$. Будем говорить, что множество $A \subseteq \varkappa$ β-*поддерживает* q, если всякий раз, когда $\alpha < \varkappa$, $\langle q', r'\rangle \leqslant_P \langle q, r_0\rangle$ и $\langle q', r'\rangle \Vdash t(\check{\beta}) = \check{\alpha}$, мы получим $\alpha \in A$. Положим $D_\beta = \{q \in Q$: $\exists A \subseteq \varkappa$ ($\mathrm{card}\, A < \varkappa \wedge A$ β-поддерживает q)$\}$. Докажем, продолжая рассуждать в M, что каждое множество D_β плотно в Q ниже q_0.

Доказательство проходит следующим образом. Пусть $q \leqslant_Q q_0$ произвольно. Индукцией по ξ построим убывающую последовательность условий $q_\xi \in Q$ ($\xi \leqslant \zeta$), а также последовательности условий $r_\xi \in R$ и ординалов $\alpha_\xi < \varkappa$ ($0 < \xi < \zeta$) так, что $\langle q_\xi, r_\xi\rangle \Vdash t(\check{\beta}^*) = (\check{\alpha}_\xi)^*$ при $0 < \xi < \zeta$ и $\alpha_{\xi_1} \neq \alpha_{\xi_2}$ при $\xi_1 \neq \xi_2$. Ординал $\zeta < \varkappa$, на котором построение обрывается, будет определен в ходе построения. Положим $q_1 = q$, $r_1 = r_0$, $\alpha_1 = 0$. Пусть $1 < \eta < \varkappa$ и множества q_ξ, r_ξ, α_ξ уже построены для всех ξ, удовлетворяющих неравенству $0 < \xi < \eta$. В силу λ-замкнутости множества Q при любом $\lambda < \varkappa$ найдется такое $q_\eta \in Q$, что $q_\eta <_Q q_\xi$ для каждого q_ξ. Если множество $\{\alpha_\xi$: $0 < \xi < \eta\}$ β-поддерживает q_η, то это означает, что мы уже нашли $q' \in D_\beta$, $q' \leqslant_Q q$. Положим в этом случае $q_\eta = q'$ и $\zeta = \eta$ и закончим построение. В противном случае найдутся такие $\langle q_\eta, r_\eta\rangle \leqslant \langle q', r'\rangle$ и $\alpha_\eta < \varkappa$, что $\langle q_\eta, r_\eta\rangle \Vdash t(\check{\beta}^*) = \check{\alpha}_\eta^*$, но $\alpha_\eta \notin \{\alpha_\xi$: $0 < \xi < \eta\}$. (Так как $\langle q', r_0\rangle \Vdash \exists \alpha < \check{\varkappa}^*\, (t(\check{\beta}^*) = \check{\alpha}^*)$.) Отметим, что построенные таким образом пары $\langle q_\xi, r_\xi\rangle$ будут несовместимыми при различных ξ, поскольку они вынуждают противоречивые суждения о значении $t(\beta^*)$. Значит, все условия $r_\xi \in R$ должны быть несовместимыми, так как последовательность условий q_ξ убывающая. Но ЧУ множество R удовлетворяет $\varkappa$-УА. Следовательно, наше построение должно за-

кончиться на некотором шаге $\zeta < \varkappa$. Тогда q_ζ и будет искомым элементом множества D_β, удовлетворяющим $q_\zeta < q$. Плотность D_β доказана.

Продолжаем рассуждать в модели M. ЧУ множество Q является λ-дистрибутивным. Значит, пересечение $D = \bigcap\limits_{\beta<\lambda} D_\beta$ плотно ниже q_0. Для всех $q \in D$ и $\beta < \lambda$ через $A(q, \beta)$ обозначим некоторое множество мощности $< \varkappa$, β-поддерживающее q. Положим $A(q) = \bigcup\limits_{\beta<\lambda} A(q, \beta)$. Тогда $\operatorname{card} A(q) < \varkappa$ в силу регулярности.

Рассуждения в M закончены. Поскольку множество D плотно ниже $q_0 \in H$, то найдется $q \in D \cap H$. Но $\operatorname{card}^M A(q) < \varkappa$. Значит, найдется $\alpha \in \varkappa - A(q)$. Для некоторого $\beta < \lambda$ имеем $\alpha = f(\beta)$. Следовательно, можно подобрать пару $\langle q', r' \rangle \in G$, вынуждающую $\dot{t}(\beta^*) = \alpha^*$. При этом, как обычно, можно предположить, что $\langle q', r' \rangle \leqslant_P \langle q, r_0 \rangle$. Но тогда $\alpha \in A(q, \beta) \subseteq A(q)$, что противоречит выбору α. □

5.9. Теорема (Истон). *Существует такая СТМ N, что* $N \models \forall n \in \omega\,(2^{\aleph_n} = \aleph_{n+2})$.

Доказательство. Для каждого $n < \omega$ введем множество $P_n = \{p\colon p$ — функция $\wedge\ \operatorname{card}\operatorname{dom} p < \aleph_n \wedge \operatorname{dom} p \subseteq \aleph_{n+2} \times \times \aleph_n \wedge \operatorname{ran} p \subseteq \{0, 1\}\}$, частично упорядоченное обратно включению. Пусть Q_n есть совокупность всех $n+1$-ок $\langle p_0, p_1, \ldots, p_n \rangle$, где $p_i \in P_i$, упорядоченная покомпонентно: $\langle p_0, \ldots, p_n \rangle \leqslant \langle q_0, \ldots, q_n \rangle$, если и только если $p_i \leqslant q_i$ в ЧУ множестве P_i для всех $i \leqslant n$. Пусть Q^n есть аналогичным образом упорядоченная совокупность всех бесконечных последовательностей $\langle p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots \rangle$, где $p_i \in P_i$ для всех i. В предположении GCH нетрудно проверить с помощью леммы 3.6, что каждое множество Q_n удовлетворяет $\aleph_{n+1}$-УА, а каждое множество Q^n, очевидно, $\aleph_n$-замкнуто. Также очевидно, что множества $Q_n \otimes Q^n$ и $Q_m \otimes Q^m$ изоморфны для всех m, n. Множество $Q_0 \otimes Q^0$ назовем ЧУ *множеством Истона*.

Пусть теперь M есть такая СТМ, что $M \models \mathrm{GCH}$, а $P \in M$ таково, что $M \models (P$ является ЧУ множеством Истона). Возьмем M-генерическое множество $G \subseteq P$ и рассмотрим модель $N = M[G]$. Поскольку ЧУ множество Истона изоморфно каждому произведению вида $Q_n \otimes Q^n$, то в силу леммы 5.8 каждый кардинал модели M сохраняется в N. Нетрудно проверить (ср. с 3.16 (iii)), что внутри N существует семейство мощности $\aleph_{n+2}$ подмножеств множества $\aleph_n$. Это семейство порождается множеством $\{q \in P_n\colon q$ есть n-я компонента некоторого $p \in G\}$.

[Таким образом, $N \models (2^{\aleph_n} \geqslant \aleph_{n+2}$ для всех n. Покажем, что имеет место точное равенство. Рассмотрим произвольное $n \in \omega$.

Обозначим $\lambda = \aleph_n^M$, $\varkappa = \aleph_{n+2}^M$. Как отмечено выше, λ и $\varkappa$ — кардиналы в $M[G]$.

Представим модель N в виде $N = M[G] = M[G^n][G_n]$, где $G_n = \{p \restriction (n+1)\colon p \in G\}$ и $G^n = \{p \restriction (\omega - (n+1))\colon p \in G\}$. Поскольку ЧУ множество Q^n является λ-замкнутым внутри M, то по теореме 3.12 каждое принадлежащее модели $M' = M[G^n]$ множество $x \subseteq \varkappa$, имеющее мощность λ внутри M', принадлежит уже модели M и имеет в M мощность λ. Отсюда следуют два вывода.

Во-первых, если взять такое $Q' \in M'$, что $M' \models (Q'$ есть ЧУ множество Истона), и представить Q' внутри M' в виде $Q' = Q'_n \otimes Q'^n$, то мы получим $Q_n = Q'_n$. Следовательно, ЧУ множество Q_n удовлетворяет λ^+-УА внутри M' (отметим, что $\lambda^+ = \aleph_{n+1}^M = \aleph_{n+1}^{M'}$).

Во-вторых, $(\varkappa^\lambda)^{M'} = (\varkappa^\lambda)^M = \varkappa$.

В этой ситуации можно применить теорему 3.15 к модели M' и ЧУ множеству $Q_n \in M'$ при $\nu = \varkappa$ и $\mu = \lambda$. Получим $M'[G_n] \models 2^\lambda \leqslant \varkappa$, что и требовалось. □ — *Добавлено переводчиком.*]

Теорема 5.9 допускает многочисленные уточнения и обобщения, см., например, Истон [1].

§ 6. Аксиома Мартина

Аксиомой Мартина (МА) называется следующее предложение:

Если ЧУ множество P удовлетворяет у. с. ц. (*т. е.* ω_1-УА), *а F есть семейство мощности $< 2^\omega$, состоящее из плотных в P множеств, то найдется F-генерическое множество $G \subseteq P$.*

Отметим, что континуум-гипотеза CH влечет МА согласно 2.3. Многие важные следствия CH могут быть доказаны с помощью одной МА. МА представляет наибольший интерес в случае, когда $2^\omega > \omega_1$. Мы докажем здесь непротиворечивость предположения $\mathrm{MA} + 2^\omega = \omega_2$. О приложениях МА см. гл. 6.

Сначала укажем несколько более удобную формулировку МА.

6.1. Предложение. *Пусть для каждого ЧУ множества P мощности $< 2^\omega$, удовлетворяющего у. с. ц., и каждого семейства F мощности $< 2^\omega$, состоящего из плотных в P множеств, найдется F-генерическое множество $G \subseteq P$. Тогда* МА *выполняется. Таким образом, в формулировке* МА *можно ограничиться лишь ЧУ множествами мощности $< 2^\omega$.*

Доказательство. Пусть P есть произвольное ЧУ множество, удовлетворяющее у. с. ц., а семейство F состоит из плотных в P множеств в числе $< 2^\omega$. Пусть функция $f\colon P \times P \to$

$\to P$ такова, что для любых совместимых $p, q \in P$ выполняется $f(p, q) \leqslant p$ и $f(p, q) \leqslant q$. Для каждого $D \in F$ пусть функция f_D: $P \to D$ такова, что $f_D(p) \leqslant p$ при любом $p \in P$. Пусть Q есть наименьший подпорядок ЧУ множества P, содержащий элемент 1_P и замкнутый относительно функции f и всех f_D. Тогда $\operatorname{card} Q < 2^\omega$. В силу замкнутости относительно f любые два элемента множества Q, совместимые в P, остаются совместимыми в Q. Значит, Q удовлетворяет у. с. ц. Аналогично, в силу замкнутости относительно f_D множество $D \cap Q$ будет плотным в Q для каждого $D \in F$. Теперь посылка влечет существование $\{Q \cap D\colon D \in F\}$-генерического множества $G \subseteq Q$. Нетрудно проверить, что множество $\{p \in P\colon \exists q \in Q\ (q \leqslant_P p)\}$ будет тогда F-генерическим подмножеством множества P. Поскольку P и F произвольны, то это и доказывает MA. □

ЧУ множество P назовем *нормализованным*, если его основное множество есть либо ω, либо ω_1, а его максимальный элемент — это ординал 1. Ясно, что каждое ЧУ множество мощности $< \omega_2$ изоморфно некоторому нормализованному ЧУ множеству. Именно такие множества мы будем рассматривать. В связи с этим снова начнем проводить различие между ЧУ множеством P и его основным множеством $|P|$. Таким образом, фраза «D есть плотное подмножество множества P» означает, что $D \subseteq |P|$ и D плотно в смысле порядка $\leqslant_P$.

Изложим основную идею построения модели, в которой истинно $\mathrm{MA} + 2^\omega = \omega_2$, следуя Соловею и Тенненбауму [1]. Как показывает следствие 3.16 (i), существуют такие СТМ M, что $M \models 2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_2$. Пусть множества Q и F принадлежат такой модели M. Будем говорить, что $\langle Q, F\rangle$ *образует контрпример* для MA в M, если $M \models$ (Q есть нормализованное ЧУ множество, удовлетворяющее у. с. ц.), F является семейством, состоящим из плотных в Q множеств, $\operatorname{card}^M F \leqslant \omega_1^M$, но не существует F-генерических подмножеств множества Q, принадлежащих модели M. $M \models$ MA, если и только если таких контрпримеров в M нет. (Следует из 2.12 (iv) и предложения 6.1.)

Если $\langle Q, F\rangle \in M$ есть контрпример для MA в M, а G является M-генерическим подмножеством множества Q, то тем более G будет F-генерическим. Значит, $\langle Q, F\rangle$ не будет контрпримером для MA в $M[G]$. Заметим, что в силу у. с. ц. модели M и $M[G]$ имеют одну и ту же совокупность кардиналов. Таким образом, с помощью вынуждения можно «разрушить» один из контрпримеров для MA. Но не исключено, что в $M[G]$ остались другие контрпримеры для MA, не «разрушенные» присоединением множества G. Также не исключено, что в $M[G]$ появились и новые контрпримеры. Если $\langle Q', F'\rangle$ есть один из таких контрпримеров в $M[G]$, то снова возьмем $M[G]$-генерическое множество $G' \subseteq Q'$ и построим модель $M[G][G']$, в которой ни $\langle Q, F\rangle$, ни $\langle Q', F'\rangle$ не являются контрпримерами. Это двукратное вынуждение с помощью теорем о произведении может быть заменено однократным. Но если мы хотим получить в конце концов модель, где нет ни одного контрпримера, то мы должны быть готовы к тому, что придется присоединить бесконечное число генерических множеств. Для этого потребуется весьма тонкий аппарат итерационных генерических расширений, к изложению которого мы сейчас приступим. Смысл нижеследующих лемм 6.2 и 6.5 состоит в том, что некоторые сложные построения ЧУ множеств можно осуществить без потери у. с. ц. Эти леммы взяты из статьи Соловея и Тенненбаума [1].

6.2. Лемма. *Пусть M есть СТМ, $Q \in M$ является ЧУ множеством, $\rho < \mathrm{OR}^M$, и $\bar{R} \in M$ — такой Q-терм, что $Q \Vdash$ ($\bar{R}$ делает множество ρ^* ЧУ множеством с максимальным элементом 1^*). Пусть также $P = Q \otimes \bar{R}$. Тогда, если $M \models$ (Q удовлетворяет у. с. ц.) и $Q \Vdash$ ($\bar{R}$ делает ρ^* ЧУ множеством, удовлетворяющим у. с. ц.), то $M \models$ (P удовлетворяет у. с. ц.).*

Доказательство. Такие термы $\bar{R}$ мы назвали в § 5 хорошими. Ординал ω_1^M обозначим через $\varkappa$. Предположим противное, т. е. внутри M найдется последовательность попарно несовместимых элементов $\langle q_\xi, \sigma_\xi\rangle$ ($\xi < \varkappa$) множества P. Если $\xi < \eta < \varkappa$, то либо q_ξ и q_η несовместимы в Q, либо же каждое $q \leqslant_Q q_\xi$, q_η вынуждает, что σ_ξ^* и σ_η^* несовместимы в смысле порядка $\bar{R}$. (В самом деле, если $q \leqslant_Q q_\xi$, q_η вынуждает $\exists \sigma < \rho^*$ (σ меньше, чем σ_ξ^* и σ_η^*, в смысле порядка $\bar{R}$), то найдутся такие $q' \leqslant_Q q$ и $\sigma < \rho$, что $q \Vdash$ (σ^* меньше, чем σ_ξ^* и σ_η^*, в смысле $\bar{R}$), т. е. $\langle q', \sigma\rangle \leqslant_P \langle q_\xi, \sigma_\xi\rangle$ и $\langle q', \sigma\rangle \leqslant_P \langle q_\eta, \sigma_\eta\rangle$, что противоречит несовместимости различных $\langle q_\xi, \sigma_\xi\rangle$.)

Рассуждаем в M. Для каждого $\xi < \varkappa$ подберем, пользуясь леммой 2.16 (ii), такой Q-терм r_ξ, что $q_\xi \Vdash r_\xi = \sigma_\xi^*$ и $q \Vdash r_\xi = \rho^*$ для любого q, несовместимого с q_ξ. Мы утверждаем, что для каждых ξ и η, удовлетворяющих неравенствам $\xi < \eta < \varkappa$, Q вынуждает

(*) $r_\xi, r_\eta \in \rho^* \to r_\xi$ и r_η несовместимы в смысле $\bar{R}$.

Достаточно доказать плотность в Q множества всех $q \in |Q|$, вынуждающих (*). Пусть $q \in |Q|$ произвольно. Найдется такое $q' \leqslant_Q q$, которое либо несовместимо хотя бы с одним из двух условий q_ξ, q_η, либо же $q \leqslant_Q q_\xi, q_\eta$. В первом случае мы имеем $q' \Vdash r_\xi \notin \rho^*$ или $q' \Vdash r_\eta \notin \rho^*$. А во втором случае будет $q' \Vdash$ ($r_\xi = \sigma_\xi^* \wedge r_\eta = \sigma_\eta^*$), и тем самым $q' \Vdash$ (r_ξ и r_η несовместимы). В обоих случаях найдено условие $q' \leqslant_Q q$, вынуждающее (*). Таким образом, Q вынуждает (*).

Имея последовательность $\langle r_\xi : \xi < \varkappa\rangle$, принадлежащую модели M, можно для любого M-генерического $G \subseteq Q$ построить в $M[G]$ последовательность $\langle I_G(r_\xi) : \xi < \varkappa\rangle$. Это означает, что в $M[G]$ истинна следующая формула:

$$\exists y:\ \varkappa^* \to (\rho+1)^*\ \ \forall \xi < \varkappa^*\,(y(\xi) = \{\sigma < \rho^* :\ \exists q \in |Q|^*\,(q \in \overline{G} \wedge \langle \xi, \langle q, \sigma\rangle\rangle \in e^*)\}),$$

где $e = \langle r_\xi : \xi < \varkappa\rangle \subseteq \varkappa \times (Q \times \rho)$. Поэтому найдется такой Q-терм $t \in M$, что множество условий q, вынуждающих формулу

$$(**) \qquad t :\ \varkappa^* \to (\rho+1)^* \wedge \forall \xi < \varkappa^*\,(t(\xi) = I_{\overline{G}}(e^*(\xi))),$$

плотно в Q.

Вновь рассуждаем в M. Покажем, что найдется условие $q \in Q$, вынуждающее формулу $\forall \xi < \varkappa^* \exists \eta > \xi\,(t(\eta) \in \rho^*)$. Действительно, пусть, напротив, каждое q вынуждает, что $\exists \xi < \varkappa^* \forall \eta > \xi\,(t(\eta) \notin \rho^*)$. Тогда множество $D = \{q \in Q :\ \exists \xi < \varkappa\,(q \Vdash \forall \eta > \xi^*\,(t(\eta) \notin \rho^*)\}$ плотно в Q в силу 2.10 (v). По лемме Цорна найдется антицепь $A \subseteq Q$, максимальная относительно свойства $A \subseteq D$. Поскольку D плотно, то A будет максимальной антицепью в множестве Q. Пусть функция $f :\ A \to \varkappa$ такова, что $q \Vdash \forall \eta > (f(q))^*\ (t(\eta) \notin \rho^*)$ для всех $q \in A$. Антицепь A счетна, так как Q удовлетворяет у. с. ц. Значит, в силу регулярности $\varkappa$ ординал $\xi = \sup\{f(q) :\ q \in A\}$ меньше, чем $\varkappa$. Каждое $q \in A$ вынуждает $\forall \eta > \xi^*\,(t(\eta) \notin \rho^*)$; следовательно, Q вынуждает это суждение согласно 2.15 (ii). Но это противоречит тому, что каждое условие $q \leqslant q_{\xi+1}$, вынуждающее (**), будет вынуждать и формулу $(t((\xi+1)^*) = \sigma^*_{\xi+1} \in \rho^*)$. Противоречие показывает, что в самом деле найдется $q \in Q$, вынуждающее $\forall \xi < \varkappa^* \exists \eta > \xi\,(t(\eta) \in \rho^*)$. При этом можно считать, что $q \Vdash (**)$.

Но так как Q вынуждает суждение (*), а также (в силу у. с. ц. для Q) вынуждает, что $\varkappa^*$ является кардиналом, то наше q должно вынуждать, что множество $\{t(\eta) :\ \eta < \varkappa^* \wedge t(\eta) \in \rho^*\}$ является несчетной антицепью в смысле $\bar{R}$, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие завершает доказательство.

6.3. Определение. Пусть Q является подпорядком ЧУ множества P. Отображение $h :\ P \to Q$ назовем *ретракцией P на Q*, если:

(i) Для всех $p \in P$ выполняется $p \leqslant h(p)$.

(ii) Для всех $q \in Q$ выполняется $q = h(q)$.

(iii) Если $p' \leqslant p$, то $h(p') \leqslant h(p)$.

(iv) Если $h(p') \leqslant h(p)$, то найдется такое $p'' \leqslant p$, что $h(p'') = h(p')$.

(v) Если $h(p)$ и $q \in Q$ совместимы в Q, то p и q будут совместимыми в P.

Поскольку Q является подпорядком ЧУ множества P, то в этом определении нет надобности проводить различие между отношениями порядка $\leqslant_P$ и $\leqslant_Q$.

6.4. Следствия определения 6.3. (i) *Понятие ретракции абсолютно.*

(ii) *Если h есть ретракция P на Q, а k есть ретракция Q на R, то композиция kh будет ретракцией P на R.*

(iii) *Если существует ретракция P на подпорядок Q ЧУ множества P, то любые q, $q' \in |Q|$, совместимые в P, будут совместимыми и в Q.*

(iv) *Если M есть СТМ, а $P \in M$ является ЧУ множеством вида $Q \otimes \bar{R}$, то отображение $h(\langle q, \sigma\rangle) = \langle q, 1\rangle$ является ретракцией P на некоторый подпорядок Q' множества P, изоморфный множеству Q. Это отображение h называется естественной ретракцией.*

(v) *Если M есть СТМ, P, $Q \in M$ являются ЧУ множествами, а $h \in M$ — ретракция P на Q, то для любого M-генерического множества $G \subseteq P$ множество $G \cap |Q|$ также будет M-генерическим (в смысле Q). Кроме того, если формула $\varphi(x)$ абсолютна, а $t \in M$ есть Q-терм, то из $Q \Vdash \varphi(t)$ следует $P \Vdash \varphi(t)$.*

Доказательство. Утверждение (i) можно добавить к списку 2.12. Доказательства утверждений (i) и (ii) мы оставляем читателю.

(iii) Пусть $p \in P$ таково, что $p \leqslant q$, q'. Тогда $h(p) \leqslant q$, q' в силу 6.3 (ii), (iii).

(iv) Множество Q' содержит все элементы множества P, имеющие вид $\langle q, 1\rangle$, и изоморфно множеству Q. Изоморфизм обеспечивается отображением, переводящим каждое $\langle q, 1\rangle$ в q. Проверка условий 6.3 (i)—(iii) оставляется читателю.

Проверим 6.3 (iv). Пусть $p = \langle q, \sigma\rangle$, $p' = \langle q', \sigma'\rangle$ и $h(p') \leqslant_P h(p)$, т. е. $q' \leqslant_Q q$. Определим $p'' = \langle q', \sigma\rangle \in P$. Тогда $p'' \leqslant_P p$ и $h(p'') = h(p') = \langle q', 1\rangle$.

Проверим 6.3 (v). Пусть $p = \langle q, \sigma\rangle$, $p' = \langle q', 1\rangle$, так что $p' \in Q'$. Предположим, что p' и $h(p) = \langle q, 1\rangle$ совместимы в Q', т. е. некоторое $p'' = \langle q'', 1\rangle$ удовлетворяет неравенствам $p'' \leqslant h(p)$ и $p'' \leqslant p'$. Тогда $q'' \leqslant_Q q$, q', и поэтому условие $p''' = \langle q'', \sigma\rangle$ удовлетворяет неравенствам $p''' \leqslant p$, $p'''' \leqslant p'$.

(v) Пусть G есть M-генерическое подмножество множества P. Рассмотрим произвольное плотное в Q множество $D \in M$. Мы утверждаем, что множество $E = \{p \in |P| :\ h(p) \in D\}$ плотно в P. В самом деле, пусть $p \in |P|$ произвольно. Найдется такое $q \in D$, что $q \leqslant h(p)$. В силу 6.3 (iv) существует $p' \leqslant p$ такое, что $h(p') = h(q) = q$, и тем самым $p' \in D$. Плотность

множества E в P доказана. Теперь вследствие генеричности G найдется некоторое $p \in G \cap E$. Тогда $h(p) \in D$, а так как $p \leqslant h(p)$, то $h(p) \in G$. Таким образом, $D \cap G \neq \varnothing$. Генеричность $G \cap |Q|$ доказана.

Заметим, что каждый Q-терм тривиальным образом является и P-термом, причем, если t есть Q-терм, то для любого M-генерического множества $G \subseteq P$ будет $I_G(t) = I_{G \cap |Q|}(t)$. Значит, если формула $\varphi(x)$ абсолютна и $Q \Vdash \varphi(t)$, то для любого M-генерического множества $G \subseteq P$ будет $M[G \cap |Q|] \models \varphi(I_G(t))$, и далее $M[G] \models \varphi(I_G(t))$ (в силу абсолютности). Поскольку генерическое $G \subseteq P$ было произвольным, то отсюда и следует $P \Vdash \varphi(t)$. □

Теперь мы видим, что было бы целесообразным изменить определение $Q \otimes \bar{R}$ так, чтобы само множество Q (а не изоморфное ему множество Q', упомянутое в 6.4 (iv)) было подпорядком ЧУ множества $Q \otimes \bar{R}$ и чтобы естественная ретракция была ретракцией на Q. Это нетрудно осуществить, заменив в множестве $Q \otimes \bar{R}$ все элементы вида $\langle q, 1\rangle$ на q.

6.5. Лемма. *Пусть ординал λ предел, а $\langle P_\xi : \xi \leqslant \lambda\rangle$ есть возрастающая последовательность ЧУ множеств такая, что для всех предельных $\eta \leqslant \lambda$ множество P_η совпадает с объединением множеств P_ξ, $\xi < \eta$. Пусть для каждого $\xi < \lambda$ задана ретракция h_ξ: P_λ на P_ξ, причем $h_\xi = h_\xi h_\eta$ для любых $\xi < \eta < \lambda$. Пусть, наконец, каждое P_ξ, $\xi < \lambda$, удовлетворяет у. с. ц. Тогда и P_λ удовлетворяет у. с. ц.*

Доказательство. Понятие объединения возрастающей последовательности ЧУ множеств введено в определении 2.1. Мы предлагаем читателю проверить, что при $\xi < \eta < \lambda$ сужение ретракции h_ξ на множество $|P_\eta|$ будет ретракцией P_η на P_ξ.

Предположим противное, т. е. A есть несчетная антицепь в P_λ. Поскольку каждое P_ξ, $\xi < \lambda$, удовлетворяет у. с. ц., то пересечение $A \cap |P_\xi|$, будучи антицепью в P_ξ в силу 6.4 (iii), будет счетным. Следовательно, $\mathrm{cf}\ \lambda > \omega$. Определим возрастающую последовательность ординалов $\xi(n) < \lambda$ и последовательность множеств $B(n) \subseteq |P_{\xi(n)}|$ индукцией по $n \in \omega$ следующим образом. Положим $\xi(0) = 0$. Если $\xi(n)$ уже построено, то в качестве $B(n)$ возьмем антицепь в $P_{\xi(n)}$, максимальную по отношению к свойству «быть подмножеством множества $\{h_{\xi(n)}(p) : p \in A\}$». Множество $B(n)$ необходимо счетно. Поскольку P_λ является объединением всех P_ξ, $\xi < \lambda$, то для каждого $q \in B(n)$ найдется такое $\eta(q) < \lambda$, что $q = h_{\xi(n)} p$ для некоторого $p \in |P_{\eta(q)}| \cap A$. Значит, так как $\mathrm{cf}\ \lambda > \omega$, то найдется ординал $\xi(n+1)$, превосходящий $\xi(n)$ и все ординалы $\eta(q)$, $q \in B(n)$.

Положим теперь $\eta = \sup\{\xi(n) : n \in \omega\} < \lambda$. В силу счетности множества $A \cap |P_\eta|$ найдется некоторое $p \in A - |P_\eta|$. Положим $p' = h_\eta(p)$. Поскольку P_η является объединением всех множеств $P_{\xi(n)}$, то найдется такое n, что $p' \in |P_{\xi(n)}|$. Если ординал ξ таков, что $\xi(n) \leqslant \xi \leqslant \eta$, то $h_\xi(p) = h_\xi h_\eta(p) = h_\xi(p') = p'$. Значит, в силу максимальности антицепи $B(n)$ условие $p' = h_{\xi(n)}(p)$ совместимо с некоторым $q \in B(n)$. Но по построению само q имеет вид $h_{\xi(n)}(r)$ для некоторого $r \in A \cap |P_{\xi(n+1)}|$.

Итак, $p' \in |P_{\xi(n)}|$ и $q = h_{\xi(n)}(r)$ совместимы в $P_{\xi(n)}$. Значит, p' и r совместимы и в $P_{\xi(n+1)}$ согласно 6.3 (v). Аналогично из совместимости $r \in |P_{\xi(n+1)}|$ и $p' = h_{\xi(n+1)}(p)$ в $P_{\xi(n+1)}$ следует совместимость r и p в P_λ. Но r и p принадлежат антицепи A — противоречие. □

6.6. Теорема (Мартин). *Найдется такая СТМ N, что $N \models (\mathrm{MA} \wedge 2^\omega = \omega_2)$.*

Доказательство. Приведем подробное доказательство этой теоремы, идея которого была указана выше. Пусть СТМ M такова, что $M \models 2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_2$. Через λ и $\varkappa$ обозначим соответственно кардиналы ω_1^M и ω_2^M.

Следующие рассуждения проходят внутри M. Если P является ЧУ множеством мощности $\leqslant \varkappa$, удовлетворяющим у. с. ц., то из 3.4 и 3.15 следует $P \Vdash$ (λ^* и $\varkappa^*$ кардиналы и $2^{\lambda^*} = \varkappa^*$). Значит, $P \Vdash$ (существует только $\varkappa^*$ нормализованных ЧУ множеств). (Определение нормализованного ЧУ множества см. после предложения 6.1.) Следовательно, мы можем в силу 2.16 выбрать такие P-термы $U_0(P)$, $U_1(P)$, что $U_i(P) \subseteq P \times \varkappa \times \varkappa \times \gamma \times \gamma$, где $\gamma = \omega$ или $\gamma = \omega_1$ в зависимости от $i = 0$ или $i = 1$, и $P \Vdash$ ($U_i(P)$ является функцией с областью определения $\varkappa^*$, область значений которой совпадает с множеством всех отношений порядка нормализованных ЧУ множеств с основным множеством γ^*). Зафиксируем некоторые функции a, b, c, определенные на множестве $\varkappa$, такие, что $a(\xi) \leqslant \xi$, $b(\xi) < \varkappa$ и $c(\xi) \in \{0, 1\}$ для всех ξ, и удовлетворяющие следующему условию: каковы бы ни были α, $\beta < \varkappa$ и $i < 2$, найдется такое $\xi < \varkappa$, что $a(\xi) = \alpha$, $b(\xi) = \beta$ и $c(\xi) = i$.

Продолжаем рассуждать внутри M. Функции a, b, c, U_0 и U_1 используются для организации пересчета, лежащего в основе построения специальной возрастающей последовательности ЧУ множеств P_ξ, $\xi \leqslant \varkappa$, каждое из которых, кроме $P_\varkappa$, имеет мощность $\leqslant \lambda$, максимальный элемент 1 и удовлетворяет у. с. ц. Одновременно с построением этих множеств построим и совокупность ретракций h_ξ^η из P_η на P_ξ для всех $\xi < \eta < \varkappa$, удовлетворяющих равенству $h_\xi^\zeta = h_\xi^\eta h_\eta^\zeta$ при $\xi < \eta < \zeta$. В качестве P_0 возьмем нормализованное ЧУ множество с основным мно-

жеством ω и с порядком $1>0>2>3>4>\ldots$ (1 должно быть наибольшим элементом по определению нормализованного ЧУ множества).

Переход от η *к* $\eta+1$. Предположим, что построение проведено для ординалов $\leqslant\eta$. Пусть $\alpha=a(\eta)$, $\beta=b(\eta)$, $i=c(\eta)$ и $\gamma=\omega$ или λ в зависимости от $i=0$ или 1. Обозначим $u=U_i(P_\alpha)$ и рассмотрим такой P_α-терм v, что $P_\alpha\Vdash v=u(\beta^*)$. Тогда $P_\alpha\Vdash$ (v является отношением порядка некоторого нормализованного ЧУ множества с основным множеством γ^*). Заметим, что v также будет и P_η-термом, и P_η вынуждает то же самое суждение в силу 6.4 (v). Пусть P_η-терм $\bar R_\eta$ таков, что $P_\eta\Vdash$ ((v удовлетворяет у. с. ц. $\wedge\,\bar R_\eta=v)\vee(v$ не удовлетворяет у. с. ц. $\wedge\,\bar R_\eta$ есть следующее отношение порядка на ординале γ^*:

$$1>0>2>3>4>\ldots>\alpha>\alpha+1>\ldots(\alpha<\gamma^*))).$$

(Существование такого терма следует из теоремы 2.14.) Ясно, что $P_\eta\Vdash$ ($\bar R_\eta$ является порядком нормализованного ЧУ множества с основным множеством γ^*, удовлетворяющего у. с. ц.). Положим $P_{\eta+1}=P_\eta\otimes\bar R_\eta$. Множество $P_{\eta+1}$ удовлетворяет у. с. ц. в силу леммы 6.2. Заметим, что по построению $|P_{\eta+1}|=|P_\eta|\times\gamma$ (где $\gamma=\omega$ или $\gamma=\lambda$). Поэтому, если $\operatorname{card}P_\eta\leqslant\lambda$, то и $\operatorname{card}P_{\eta+1}\leqslant\lambda$.

Пусть h есть естественная ретракция $P_{\eta+1}$ на P_η. Для каждого $\xi\leqslant\eta$ определим $h_\xi^{\eta+1}=h$ при $\xi=\eta$ и $h_\xi^{\eta+1}=h_\xi^\eta h$ при $\xi<\eta$.

Предельный шаг $\zeta\leqslant\varkappa$. Если все множества P_ξ, $\xi<\zeta$, уже построены, то через P_ζ обозначим объединение этих множеств. Аналогично для $\xi<\zeta$ через h_ξ^ζ обозначим объединение всех отображений h_ξ^η, $\xi<\eta<\zeta$. Нетрудно проверить, что отображения h_ξ^ζ в самом деле образуют согласованную систему ретракций, и тем самым P_ζ удовлетворяет у. с. ц. в силу леммы 6.5. Ясно также, что $\operatorname{card}P_\zeta\leqslant\lambda$ при $\zeta<\varkappa$, а $\operatorname{card}P_\varkappa\leqslant\varkappa$.

В результате этих рассуждений, проходивших в M, мы построили ЧУ множество $P=P_\varkappa\in M$, удовлетворяющее у. с. ц. внутри модели M. Пусть теперь G есть M-генерическое подмножество множества P, и $N=M[G]$. В силу у. с. ц. кардинальные ряды моделей M и N совпадают, и $N\models 2^\omega=2^\lambda=\varkappa$. Чтобы проверить $N\models$ MA, достаточно показать, что для любой пары $\langle Q,F\rangle\in N$ такой, что $N\models$ (Q есть нормализованное ЧУ множество, удовлетворяющее у. с. ц. $\wedge F$ является семейством плотных в Q множеств в числе $\leqslant\lambda$), найдется F-генерическое множество $K\subseteq Q$, принадлежащее модели N. (Генеричность абсолютна, см. 2.12 (iv).) Для определенности рассмотрим случай, когда основное множество Q есть λ, а не ω.

Для каждого $\xi<\varkappa$ множество $G_\xi=G\cap|P_\xi|$ будет M-генерическим подмножеством P_ξ согласно 6.4 (v). Пусть $M_\xi=M[G_\xi]$. Тогда $M\subseteq M_\xi\subseteq N$ и модели M, M_ξ и N имеют одни и те же кардинальные ряды. Сначала докажем, что $\langle Q,F\rangle\in M_\alpha$ для некоторого $\alpha<\varkappa$. Рассуждаем аналогично доказательству теоремы 5.7. Рассмотрим такой P-терм $t\in M$, что $I_{\cdot\cdot}(t)$ есть отношение порядка ЧУ множества Q.

Теперь рассуждаем в N. Пусть σ, $\tau<\lambda$. Если $\sigma\leqslant_Q\tau$, то найдется такое $p\in G$, что $\langle p,\langle\sigma,\tau\rangle\rangle\in t$ (т. е. $p\Vdash\langle\sigma,\tau\rangle^*\in t$). Через $f(\sigma,\tau)$ обозначим одно из таких p. Если же $\sigma\leqslant_Q\tau$ не имеет места, то найдется такое $p\in G$, что для каждого $q\leqslant_P p$ будет $\langle q,\langle\sigma,\tau\rangle\rangle\notin t$ (это означает, что p вынуждает $\langle\sigma,\tau\rangle^*\notin t$). Поскольку кардинал $\varkappa>\lambda$ регулярен, то найдется такое $\alpha<\varkappa$, что все условия $f(\sigma,\tau)$ принадлежат множеству G_α.

Таким образом, отношение порядка ЧУ множества Q оказалось равным множеству $I_{G_\alpha}(t)\in M_\alpha$ для некоторого $\alpha<\varkappa$. Тем самым и Q принадлежит модели M_α. Чтобы доказать то же самое для семейства F, рассмотрим некоторую функцию $f\in N$ из λ на F и применим те же рассуждения к множеству $E=\{\langle\sigma,\tau\rangle\in\lambda\times\lambda\colon\ \sigma\in f(\tau)\}$. Получим $E\in M_\alpha$ и, следовательно, $F\in M_\alpha$ для некоторого $\alpha<\varkappa$. Наконец, найдется такое одно $\alpha<\varkappa$, что $\langle Q,F\rangle\in M_\alpha$. Фиксируем это α.

Итак, $Q\in M_\alpha$ является внутри M_α нормализованным ЧУ множеством с основным множеством λ. По выбору U_1 терм $u=U_1(P_\alpha)$ таков, что $I_{G_\alpha}(u)$ является отображением из $\varkappa$ на совокупность отношений порядка всех таких ЧУ множеств. Значит, отношение порядка ЧУ множества Q есть $(I_{G_\alpha}(u))(\beta)$ для некоторого $\beta<\varkappa$. Выберем такой P_α-терм $v\in M$, что $P_\alpha\Vdash v=u(\beta^*)$; тогда $I_{G_\alpha}(v)$ будет отношением порядка множества Q. Рассмотрим теперь такой ординал $\eta<\varkappa$, что $a(\eta)=\alpha$, $b(\eta)=\beta$ и $c(\eta)=1$. Поскольку множество Q не имеет несчетных антицепей в N, то тем более таких антицепей нет внутри модели M_α. Но, согласно нашему построению множества $P_{\eta+1}$, терм $\bar R_\eta$ был выбран таким образом, что для любого M-генерического множества $H\subseteq P_\eta$ выполняется равенство $I_H(\bar R_\eta)=I_H(v)$, если только последний порядок удовлетворяет у. с. ц. Таким образом, в нашем случае будет $I_{G_\eta}(\bar R_\eta)=I_{G_\eta}(v)=I_{G_\alpha}(v)$, и это множество и есть частичный порядок ЧУ множества Q.

Наконец, рассмотрим M-генерическое множество $G_{\eta+1}\subseteq P_{\eta+1}=P_\eta\otimes\bar R_\eta$. По теореме 5.4 множество

$$K=\{I_{G_\eta}(\sigma)\colon\ \exists q\in G_\eta(\langle q,\sigma\rangle\in G_{\eta+1})\}\in M_{\eta+1}\subseteq N$$

является M_η-генерическим подмножеством ЧУ множества с отношением порядка $I_{G_\eta}(\bar R)$, т. е. ЧУ множества Q. Поскольку

$F \subseteq M_\alpha \subseteq M_\eta$, то K тем более будет F-генерическим. Доказательство закончено. □

Сделав небольшие изменения в этом доказательстве, можно построить модели, внутри которых истинно $MA + 2^\omega = \omega_3$, и т. п.

Соловей [1] предложил использовать вынуждение для доказательства обычных математических теорем (а не доказательств непротиворечивости). К сожалению, недостаток места не позволяет здесь коснуться этой интересной темы.

ЛИТЕРАТУРА

Ван Хейеноорт (Van Heijenoort J., ed.)
1. From Frege to Gödel. — Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, 1967.

Гёдель (Gödel K.)
1. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. — Princeton, 1940. [Русский перевод; Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. — УМН, 1948, 3, № 1, с. 96—149.]

Истон (Easton W. B.)
1. Powers of regular cardinals. — Ann. Math. Logic, 1970, 1, p. 139—178.

Йех (Jech T.)
1. Trees. — J. Symbolic Logic, 1971, 36, p. 1—14.

Коэн (Cohen P. J.)
1. Set Theory and the Continuum Hypothesis. — N. Y.: Benjamin, 1966. [Русский перевод: Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969.]

Леви (Levy A.)
1. A hierarchy of formulas in set theory. — Mem. Amer. Math. Soc., 1965, 57.

Марчевский (Marczewski E.)
1. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques. — Fundam. math., 1947, 34, p. 127—143.

Сильвер (Silver J. H.)
1. The independnece of the Kupera's conjecture and the two-cardinal conjectures in model theory. — In: Axiomatic Set Theory, 1. Providence, 1971, p. 383—395.

Скотт (Scott D. S., ed.)
1. Axiomatic Set Theory, 1. — Providence, 1971.

Скулем (Scolem Th.)
1. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begrundung der Mengenlehre. — Proceedings of the Fifth Scandinavian Math. Congress, 1922, S. 217—232. [Английский перевод: в книге Ван Хейеноорт [1], p. 290—301.]

Соловей (Solovay R. N.)
1. The cardinality of Σ^1_2 sets. — In: Foundations of Math.: Symposium papers commemorating the sixteen birthday of Kurt Gödel. Berlin: Springer, 1966.
2. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. — Ann. Math., 1970, 92, p. 1—56.

Соловей, Тенненбаум (Solovay R. M., Tennenbaum S.)
1. Iterated Cohen extensions and Souslin's Problem. — Ann. Math., 1970, 94, p. 201—245.

Халмош (Halmos P. R.)
1. Naive Set Theory. — N. Y.: Van Nostrand, 1960.

Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. Unramified forcing. — In: Axiomatic Set Theory, 1. Providence, 1971, p. 357—381. [Русский перевод. Шенфилд Дж. Неразветвленное вынуждение. — В кн.: Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975, с. 482—519.]

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Девлин (Devlin K.)
1. $\aleph_1$-trees. — Ann. Math. Logic, 1978, 13, № 3, p. 267—330.

Мартин Ю. И.
1. Проблема континуума. — В кн.: Современные проблемы математики, т. 5. М.: Наука, 1973, с. 5—72.

[Статья Девлина является фундаментальной работой о деревьях Суслина и Курепы и их взаимоотношениях с континуум-гипотезой и аксиомой Мартина. В ней построены генерические модели для различных комбинаций гипотез Суслина, Курепы, континуум-гипотезы и аксиомы Мартина. Статья Мартина содержит элементарное и исчерпывающее доказательство основных свойств вынуждения. — *Прим. перев.*]

Глава 5

КОНСТРУКТИВНОСТЬ

Кейт Дж. Девлин

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение 158
§ 2. Конструктивный универсум 159
§ 3. Арифметизация языка $\mathscr{L}_V$ 162
§ 4. Структура конструктивной иерархии 165
§ 5. Аксиома конструктивности 168
§ 6. Аксиома выбора в L 169
§ 7. Лемма о конденсации GCH в L 171
§ 8. Σ_1-функции Скулема 173
§ 9. Допустимые ординалы 177
§ 10. Гипотеза Суслина 179
§ 11. Обобщенная гипотеза Суслина 181
§ 12. Тонкая структура конструктивной иерархии 185
§ 13. Комбинаторный принцип $\square_\kappa$ 188
§ 14. Слабо компактные кардиналы в L 194
§ 15. Другие результаты 199
Исторические замечания 200
Литература 200

§ 1. Введение

Понятие конструктивности было введено Гёделем [1] для доказательства невозможности опровергнуть аксиому выбора средствами теории Цермело — Френкеля без аксиомы выбора (теории ZF) и невозможности опровергнуть обобщенную континуум-гипотезу GCH средствами теории Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (теории ZFC). В основе определения конструктивных множеств лежит следующая идея. Рассуждаем в ZF. Универсум всех множеств V можно построить, отправляясь от пустого множества $\varnothing$, последовательно применяя операцию степени (множества всех подмножеств). Таким образом получается известная *кумулятивная иерархия*:

$$V_0 = \varnothing;$$
$$V_\alpha = \bigcup \{\mathscr{P}(V_\beta) : \beta < \alpha\}.$$

При этом мы имеем

$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha,$$

где On есть класс всех ординалов. (Принимаются обычные обозначения и соглашения теории множеств. В частности, любой ординал есть множество всех предшествующих ординалов, а кардинал — это ординал некоторого специального вида, см. главы 1, 3, 4.)

Причина, по которой некоторые вопросы о кумулятивной иерархии остаются без ответа, состоит, как принято считать, в том, что понятие множества всех подмножеств бесконечного множества слишком расплывчато. Мы знаем, что степень $\mathscr{P}(x)$ множества x состоит из всех подмножеств множества x. Но как понимать здесь слово «всех»? Аксиомы ZF и ZFC не дают определенного ответа.

Идея построения универсума конструктивных множеств состоит в том, чтобы делать множество $\mathscr{P}(x)$ как можно меньше, не приходя при этом к противоречию. Заметим сначала, что произвольное подмножество данного множества, которое определимо в языке $\mathscr{L}$ теории множеств из данных множеств, должно «существовать» (в любом универсуме), если «существуют» данные множества. Мы получим конструктивную иерархию (имеющую пределом универсум конструктивных множеств) процессом, аналогичным построению кумулятивной иерархии, но на шаге α возьмем не *все* подмножества ранее полученных множеств, а только те подмножества, которые определимы с помощью ранее построенных множеств. «Минимальный» характер этого построения приводит к тому, что для каждого кардинала κ кардинал 2^κ имеет минимально возможное значение (поэтому GCH выполняется в конструктивном универсуме). А так как каждое конструктивное множество может быть определенным образом названо с помощью ранее построенных множеств, то аксиома выбора также оказывается истинной в конструктивном универсуме.

§ 2. Конструктивный универсум

Для каждого множества X через $\mathrm{Def}(X)$ обозначим совокупность всех множеств $a \subseteq X$, определимых в X с параметрами из X, т. е. определимых в системе (также говорят «над системой») $\langle X, \in, (\overset{\circ}{x})_{x \in X}\rangle$.

Точнее, для каждого множества X введем расширение $\mathscr{L}_X$ языка $\mathscr{L}$ с помощью совокупности констант x для всех $x \in X$, обозначающих множества x в системе $\langle X, \in\rangle$ (обычно $\overset{\circ}{x}$ отождествляется с самим x). Через $X \models$ обозначим предикат истин-

ности в системе $\langle X, \in\rangle$ для предложений языка $\mathscr{L}_X$ (со стандартной интерпретацией констант). Тогда $\mathrm{Def}(X)$ есть совокупность всех таких множеств $a \subseteq X$, что для некоторой формулы $\varphi(v_0)$ языка $\mathscr{L}_X$ с единственной свободной переменной v_0 выполняется равенство

$$a = \{x \in X\colon X \models \varphi(\mathring{x})\}.$$

Построим уровни L_α *конструктивной иерархии* индукцией по $\alpha \in \mathrm{On}$ следующим образом:

$$\mathrm{L}_0 = 0;$$
$$\mathrm{L}_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(\mathrm{L}_\alpha);$$
$$\mathrm{L}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{L}_\alpha, \quad \text{если ординал } \lambda \text{ предельный.}$$

Сходство с построением кумулятивной иерархии становится очевидным, если заметить, что $\mathrm{V}_{\alpha+1} = \mathscr{P}(\mathrm{V}_\alpha)$ для всех ординалов α и $\mathrm{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{V}_\alpha$ для предельных λ.

Конструктивным универсумом называется класс $\mathrm{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha$.

Множество x называется *конструктивным*, если $x \in \mathrm{L}$ (т. е. если найдется такой ординал α, что $x \in \mathrm{L}_\alpha$).

Следующая лемма без труда выводится из определений.

2.1. Лемма. (i) *Если* $\alpha < \beta$, *то* $\mathrm{L}_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\} \subseteq \mathrm{L}_\beta$.

(ii) *Каждое множество* L_α *транзитивно. Класс* L *транзитивен.*

(iii) *Для всех* α *имеет место* $\mathrm{L} \cap \alpha = \mathrm{L}_\alpha \cap \alpha = \alpha$ *и* $\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$. *Кроме того,* $\mathrm{On} \subseteq \mathrm{L}$.

Покажем теперь, что, как мы и предполагали, класс L образует «подходящий» универсум для теории множеств, т. е. является *внутренней моделью* ZF. (Это означает, что релятивизация φ^{L} любой аксиомы φ теории ZF к классу L доказуема во «внешней» теории, в качестве которой рассматривается ZF.)

2.2. Теорема (Гёдель). *Если* φ *есть аксиома теории* ZF, *то* $\mathrm{ZF} \vdash \varphi^{\mathrm{L}}$.

Доказательство (в ZF). *Экстенсиональность.* Мы должны проверить, что предложение $\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$ истинно в L, т. е. для любых множеств $x, y \in \mathrm{L}$ справедлива эквивалентность $x = y \leftrightarrow \forall z \in \mathrm{L}\, (z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Но L — транзитивный класс, и поэтому указанная эквивалентность следует из аксиомы экстенсиональности в классе V всех множеств.

Аксиома пары. Для любых $x, y \in \mathrm{L}$ нужно доказать существование такого множества $z \in \mathrm{L}$, единственными элементами которого являются x и y. Пусть ординал α таков, что $x, y \in \mathrm{L}_\alpha$.

Тогда $\{x, y\} = \{u \in \mathrm{L}_\alpha\colon \mathrm{L}_\alpha \models \mathring{u} = \mathring{x} \vee \mathring{u} = \mathring{y}\} \in \mathrm{Def}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{L}$, что и требовалось.

Аксиома объединения. Пусть $x \in \mathrm{L}$. Покажем, что $\bigcup x \in \mathrm{L}$. Пусть снова α таково, что $x \in \mathrm{L}_\alpha$. Поскольку множество L_α транзитивно, то $y = \bigcup x \subseteq \mathrm{L}_\alpha$. Но формула $\varphi(v_0) \equiv \exists v_1 (v_0 \in v_1 \wedge v_1 \in \mathring{x})$ определяет $y \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ в L_α. Значит, $y \in \mathrm{Def}(\mathrm{L}_\alpha) = \mathrm{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{L}$, что и требовалось.

Аксиома бесконечности. Из 2.1 (iii) следует $\omega \in \mathrm{L}_{\omega+1} \subseteq \mathrm{L}$.

Аксиома степени. Пусть $x \in \mathrm{L}$. Рассмотрим множество $y = \mathscr{P}(x) \cap \mathrm{L}$ (y — действительно множество в силу аксиом степени и выделения в V). Для каждого $z \in y$ через $f(z)$ обозначим наименьший ординал α такой, что $z \in \mathrm{L}_\alpha$. Используя аксиому подстановки в V, найдем ординал β, превосходящий все ординалы $f(z)$, $z \in y$. Тогда $y \subseteq \mathrm{L}_\beta$. Теперь формула $\varphi(v_0) \equiv \forall v_1 (v_1 \in v_0 \to v_1 \in \mathring{x})$ определяет множество $y \subseteq \mathrm{L}_\beta$ в L_β, т. е. $y \in \mathrm{L}_{\beta+1} \subseteq \mathrm{L}$. Очевидно, $(y = \mathscr{P}(x))^{\mathrm{L}}$.

Аксиома регулярности. Поскольку отношение принадлежности в классе L есть сужение на L настоящего отношения принадлежности, то справедливость аксиомы регулярности в L немедленно вытекает из аксиомы регулярности в V.

Аксиома выделения. Пусть $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ есть $\mathscr{L}$-формула, и $a_1, \ldots, a_n, x \in \mathrm{L}$. Мы должны найти такое множество $y \in \mathrm{L}$, что $(y = \{z \in x\colon \varphi(z, \boldsymbol{a})\})^{\mathrm{L}}$, где $\boldsymbol{a}$ есть строка $a_1, \ldots, a_n$. Выберем такое α, что $x, \boldsymbol{a} \in \mathrm{L}_\alpha$. Если теперь повторить для конструктивной иерархии хорошо известное доказательство принципа отражения *), то можно найти такой ординал $\beta > \alpha$, что $\forall z \in \mathrm{L}_\beta (\varphi^{\mathrm{L}_\beta}(z, \boldsymbol{a}) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{L}}(z, \boldsymbol{a}))$. Положим $y = \{z \in x\colon \varphi^{\mathrm{L}}(z, \boldsymbol{a})\}$. Тогда формула $\psi(v_0) \equiv v_0 \in x \wedge \varphi(v_0, \mathring{\boldsymbol{a}})$ будет определять y в L_β, так как $x, \boldsymbol{a} \in \mathrm{L}_\beta$ и $y \subseteq x \subseteq \mathrm{L}_\beta$. Поэтому $y \in \mathrm{L}_{\beta+1}$, что и требовалось.

Аксиома подстановки. Пусть $\mathscr{L}$-формула φ и n-ка $\boldsymbol{a} \in \mathrm{L}$ таковы, что $(\forall x \exists! y \varphi(x, y, \boldsymbol{a}))^{\mathrm{L}}$. Поскольку аксиома выделения в L уже доказана, то достаточно для каждого $u \in \mathrm{L}$ найти такое $v \in \mathrm{L}$, что $(\forall x \in u \exists y \in v \varphi(x, y, \boldsymbol{a}))^{\mathrm{L}}$. Выберем такое α, что $u, \boldsymbol{a} \in \mathrm{L}_\alpha$. Для каждого $x \in u$ через $f(x)$ обозначим наименьший ординал $\beta \geqslant \alpha$ такой, что $\varphi^{\mathrm{L}}(x, y, \boldsymbol{a})$ для некоторого $y \in \mathrm{L}_\beta$. Пусть ординал γ превосходит все ординалы $f(x)$, $x \in u$. Тогда множество $v = \mathrm{L}_\gamma$ будет искомым. □

Для доказательства истинности AC и GCH в L необходимо провести более детальное исследование конструктивной иерар-

*) См., например, книгу: Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973, с. 32. — *Прим. перев.*

хии, а также дать теоретико-множественное определение языка $\mathscr{L}$ и его основных семантических понятий. Такое исследование необходимо в частности для того, чтобы показать, что играющая фундаментальную роль операция Def является теоретико-множественной операцией. Иными словами, нужно построить такую формулу $\varphi(x, y)$ языка $\mathscr{L}_V$, которая выражает равенство $y = \mathrm{Def}(x)$. Без этого, строго говоря, утверждения настоящего параграфа не имеют смысла. Такую формулу мы построим в конце следующего параграфа.

§ 3. Арифметизация языка $\mathscr{L}_V$

Следующие определения приведут к формальному определению языка $\mathscr{L}_V$ в теории множеств.

Для любых конечных последовательностей s и t через $s^\frown t$ обозначим конечную последовательность, полученную приписыванием справа к последовательности s членов последовательности t с сохранением их порядка.

Переменные:

$$v_n = \langle 2, n\rangle, \qquad n \in \omega.$$

Таким образом, переменная v_n — это упорядоченная пара $\langle 2, n\rangle$. Предикат «...есть переменная» обозначим Vbl.

Константы:

$$\overset{\circ}{x} = \langle 3, x\rangle, \qquad x \in V.$$

Предикат «...есть константа» обозначим Const.

Элементарные формулы:

$$(x \in y) = \langle 0, 4, x, y, 1\rangle, \quad \text{где} \quad x, y \in \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}.$$
$$(x = y) = \langle 0, 5, x, y, 1\rangle, \quad \text{где} \quad x, y \in \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}.$$

Предикат «...есть элементарная формула» обозначим EFml.

Формулы:

$$(\varphi \wedge \psi) = \langle 0\rangle^\frown \langle 6\rangle^\frown \varphi^\frown\psi^\frown \langle 1\rangle,$$
$$(\neg \varphi) = \langle 0\rangle^\frown \langle 7\rangle^\frown \varphi^\frown \langle 1\rangle,$$
$$(\exists u \varphi) = \langle 0\rangle^\frown \langle 8\rangle^\frown \langle u\rangle^\frown \varphi^\frown \langle 1\rangle, \quad \text{где} \quad \mathrm{Vbl}(u).$$

(Таким образом, мы имеем схему для построения формул из элементарных формул, состоящую из трех последних строк.)

Предикат «...есть формула» обозначим Fml. Для каждого множества u через $\mathrm{Const}_u(x)$ обозначим предикат $\mathrm{Const}(x) \wedge (x)_1 \in u$ (т. е. $\overset{\circ}{x} = \langle 3, (x)_1\rangle$ есть константа, стандартная интерпретация которой принадлежит множеству u). Аналогично получаются и релятивизованные предикаты $\mathrm{EFml}_u(x)$ и $\mathrm{Fml}_u(x)$.

(Таким образом, $\mathrm{Fml}_u(x)$ означает, что x есть формула языка $\mathscr{L}_u$.) Мы рассматриваем эти предикаты как двухместные (с переменными x и u).

Для каждого из введенных выше предикатов можно указать соответствующее формальное теоретико-множественное определение. Именно:

$\mathrm{Vbl}(x) \leftrightarrow (x$ — упорядоченная пара$) \wedge ((x)_0 = 2)$
$\wedge ((x)_1$ является натуральным числом); через $(x)_0$ и $(x)_1$ обозначены соответственно первый и второй члены пары x;

$$\mathrm{Const}(x) \leftrightarrow (x \text{ — упорядоченная пара}) \wedge ((x)_0 = 3);$$

$\mathrm{EFml}(x) \leftrightarrow (x$ — конечная последовательность$)$
$\wedge (\mathrm{dom}\, x = 5) \wedge (x(0) = 0) \wedge (x(1) = 4 \vee x(1) = 5)$
$\wedge (\mathrm{Vbl}(x(2)) \vee \mathrm{Const}(x(2))) \wedge (\mathrm{Vbl}(x(3)) \vee \mathrm{Const}(x(3))) \wedge (x(4) = 1);$

$$\mathrm{Fml}(x) \leftrightarrow \exists f\, (\mathrm{Build}(x, f)),$$

где Build — следующий предикат:

$\mathrm{Build}(\varphi, \psi) \leftrightarrow (\psi$ — конечная последовательность$)$
$\wedge \psi_{\mathrm{dom}\,\psi - 1} = \varphi \wedge \forall i \in \mathrm{dom}(\psi)\, (\mathrm{EFml}(\psi_i)$
$\vee \exists j, k \in i \quad (\psi_i = (\psi_j \wedge \psi_k)) \vee \exists j \in i \quad (\psi_i = (\neg \psi_j))$
$\vee \exists j \in i \exists u \in \mathrm{ran}(\varphi)\, (\mathrm{Vbl}(u) \wedge \psi_i = (\exists u \psi_j))).$

Аналогично определяются и предикаты $\mathrm{Const}_u(x)$, $\mathrm{EFml}_u(x)$ и $\mathrm{Fml}_u(x)$.

Теперь мы можем дать формальные теоретико-множественные определения основных синтаксических и семантических понятий языка $\mathscr{L}_V$.

Пусть $\mathrm{Fr}(\varphi)$ есть совокупность всех свободных переменных, встречающихся в φ, если φ — формула; в противном случае положим $\mathrm{Fr}(\varphi) = 0$. Функция Fr имеет следующее теоретико-множественное определение:

$y = \mathrm{Fr}(\varphi) \leftrightarrow (\neg \mathrm{Fml}(\varphi) \wedge y = 0)$
$\vee \exists f \exists \psi\, (\mathrm{Build}(\varphi, \psi) \wedge (f$ — конечная последовательность$)$
$\wedge \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\psi) \wedge f(\mathrm{dom}(f) - 1) = y$
$\wedge \forall i \in \mathrm{dom}(f)\, ((\mathrm{EFml}(\psi_i) \wedge f(i) = F(\psi_i))$
$\vee \exists j, k \in i\, (\psi_i = (\psi_j \wedge \psi_k)$ и $f(i) = f(j) \cup f(k))$
$\vee \exists j \in i\, (\psi_i = (\neg \psi_j)$ и $f(i) = f(j))$
$\vee \exists j \in i \exists u \in \mathrm{ran}(\varphi)\, (\mathrm{Vbl}(u)$ и $\psi_i = (\exists u \psi_j)$ и $f(i) = f(j) - \{u\}))),$

где $F = \mathrm{Fr} \restriction \mathrm{EFml}$. (Функция F имеет очень простое определение, которое мы для краткости опустим.)

Для каждой формулы φ, переменной v и константы t через $\varphi(v/t)$ обозначим формулу, полученную из φ подстановкой t вместо каждого свободного вхождения v в φ. Введем следующую функцию Sub:

$$\mathrm{Sub}(\varphi, v, t) = \begin{cases} \varphi(v/t), & \text{если } \mathrm{Fml}(\varphi) \wedge \mathrm{Vbl}(v) \wedge \mathrm{Const}(t), \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для этой функции укажем такое теоретико-множественное определение:

$$\begin{aligned} \varphi' = \mathrm{Sub}(\varphi, v, t) \leftrightarrow\ & (\neg(\mathrm{Fml}(\varphi) \wedge \mathrm{Vbl}(v) \wedge \mathrm{Const}(t)) \wedge \varphi' = \varnothing) \\ & \vee (\mathrm{Fml}(\varphi) \wedge \mathrm{Vbl}(v) \wedge \mathrm{Const}(t) \\ & \wedge \exists\theta\exists\psi(\mathrm{Build}(\varphi, \psi) \wedge \theta - \text{конечная последовательность} \\ & \wedge \mathrm{dom}(\theta) = \mathrm{dom}(\psi) \wedge \theta_{\mathrm{dom}\,\theta - 1} = \varphi' \wedge \forall i \in \mathrm{dom}(\psi) \\ & ((\mathrm{EFml}(\psi_i) \wedge \theta_i = S(\psi_i, v, t)) \vee \exists j,\ k \in i\ (\psi_i = (\psi_j \wedge \psi_k) \\ & \text{и } \theta_i = (\theta_j \wedge \theta_k)) \vee \exists j \in i\ (\psi_i = (\neg\psi_j \text{ и } \theta_i = (\neg\theta_j)) \\ & \vee \exists j \in i\ \exists u \in \mathrm{ran}(\varphi)(\mathrm{Vbl}(u) \text{ и } u \neq v \text{ и } \psi_i = (\exists u \psi_j) \\ & \text{и } \theta_i = (\exists u \theta_j)) \vee \exists j \in i\ (\psi_i = (\exists v \psi_j) \text{ и } \theta_i = \psi_i)))), \end{aligned}$$

где $S = \mathrm{Sub} \restriction (\mathrm{EFml} \times \mathrm{V} \times \mathrm{V})$.

Введем еще один предикат $\mathrm{Sat}(u, \varphi)$, который говорит: «φ есть предложение языка $\mathscr{L}_u$ такое, что $u \models \varphi$». Укажем для него следующее теоретико-множественное определение:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sat}(u, \varphi) \leftrightarrow\ & u \neq \varnothing \wedge \mathrm{Fml}_u(\varphi) \wedge \exists f \exists\sigma\ ((f - \text{конечная} \\ & \text{последовательность}) \wedge (\varphi \in f(\mathrm{dom}(f) - 1)) \\ & \wedge \sigma \subseteq \tau = \{v_i = v_j\colon i, j \in \omega\} \cup \{v_i \in v_j\colon i, j \in \omega\} \\ & \cup \{v_i = \mathring{x}\colon i \in \omega \wedge x \in u\} \cup \{\mathring{x} = v_i\colon i \in \omega \wedge x \in u\} \\ & \cup \{v_i \in \mathring{x}\colon i \in \omega \wedge x \in u\} \cup \{\mathring{x} \in v_i\colon i \in \omega \wedge x \in u\} \\ & \cup \{\mathring{x} \in \mathring{y}\colon x, y \in u\} \cup \{\mathring{x} = \mathring{y}\colon x, y \in u\} \\ & \wedge \forall g\ (((g - \text{конечная последовательность}) \\ & \wedge (\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f)) \wedge (\sigma \subseteq g(0) \subseteq \tau) \\ & \wedge \forall i \in (\mathrm{dom}(g) - 1)(g(i+1) = g(i) \cup \{\psi \wedge \psi'\colon \psi, \psi' \\ & \in g(i)\} \cup \{\neg\psi\colon \psi \in g(i)\} \cup \{\exists v_m \psi\colon m \in \omega \wedge \psi \in g(i)\})) \\ & \to (f(0) \subseteq \{\mathring{x} \in \mathring{y}\colon x, y \in u \wedge x \in y\} \cup \{\mathring{x} = \mathring{x}\colon x \in u\} \\ & \wedge \forall i \in (\mathrm{dom}(f) - 1)(f(i+1) \subseteq f(i) \cup \{\psi \wedge \psi'\colon \psi, \psi' \in f(i)\} \\ & \cup \{\neg\varphi\colon \varphi \in g(i) - f(i)\} \cup \{\exists v_m \psi\colon m \in \omega \wedge \psi \in g(i) \\ & \wedge \exists x \in u\,(\mathrm{Sub}(\psi, v_m, \mathring{x}) \in f(i))\}))))). \end{aligned}$$

Наконец, даем следующее определение функции Def:

$$\begin{aligned} u = \mathrm{Def}(u) \leftrightarrow\ & \forall x \in v \exists\varphi\,(\mathrm{Fml}_u(\varphi) \wedge \mathrm{Fr}(\varphi) = \{v_0\} \\ & \wedge x = \{z \in u\colon \mathrm{Sat}(u, \mathrm{Sub}(\varphi, v_0, \mathring{z}))\}) \\ & \wedge \forall\varphi\,(\mathrm{Fml}_u(\varphi) \wedge \mathrm{Fr}(\varphi) = \{v_0\} \\ & \to \exists x \in v\,(x = \{z \in u\colon \mathrm{Sat}(u, \mathrm{Sub}(\varphi, v_0, \mathring{z}))\}))). \end{aligned}$$

§ 4. Структура конструктивной иерархии

Большинство основных свойств конструктивной иерархии являются следствиями леммы, которую мы докажем в этом параграфе. Сначала напомним читателю терминологию, связанную с некоторыми совокупностями формул языка $\mathscr{L}_\mathrm{V}$.

Формула φ языка $\mathscr{L}_\mathrm{V}$ называется Σ_0-*формулой*, если она не имеет неограниченных кванторов. (См. определение 1.2 из гл. 4, где такие формулы назывались Δ_0-формулами.) Σ_n-*формулами* (соответственно Π_n-*формулами*) (при $n \geqslant 1$) называются формулы вида $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots - x_n \psi$ (соответственно $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots - x_n \psi$), где ψ является Σ_0-формулой (x_i и x — кортежи переменных).

Σ_n^{ZF}-*классом* назовем каждый класс $U = \{x\colon \psi(x)\}$, который можно определить в ZF некоторой Σ_n-формулой (т. е. можно указать Σ_n-формулу $\varphi(x)$ такую, что $\mathrm{ZF} \vdash \forall x\,(\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x))$). Аналогично вводится понятие Π_n^{ZF}-*класса*. Классы, одновременно являющиеся Σ_n^{ZF}-классами и Π_n^{ZF}-классами, называются Δ_n^{ZF}-*классами*.

Пусть M — какой-то класс и $N \subseteq M$. Конечноместный предикат P на M называется $\Sigma_n^M(N)$-*предикатом*, если он определим в M некоторой Σ_n-формулой языка $\mathscr{L}_N$ (т. е. с параметрами из N). Совокупность всех таких предикатов обозначим через $\Sigma_n^M(N)$. Аналогично вводятся понятия $\Pi_n^M(N)$-предиката и $\Delta_n^M(N)$-предиката. Пишем Σ_n^M вместо $\Sigma_n^M(\varnothing)$, $\Sigma_n(M)$ вместо $\Sigma_n^M(M)$ и аналогично для Π, Δ. (Таким образом, в каком-то смысле Σ_n^{V} тождественно с Σ_n^{ZF}.)

Пусть $N \subseteq M$ — произвольные множества. Каждая формула языка $\mathscr{L}_N$ логически эквивалентна некоторой Σ_n-формуле этого же языка для подходящего n. Поэтому любое множество $P \subseteq N$ будет определимым в M с параметрами из N (т. е. определимым формулой языка $\mathscr{L}_N$), если и только если $P \in \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n^M(N)$. В частности, $P \in \mathrm{Def}(M) \leftrightarrow P \in \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n(M)$.

Будем говорить, что множество $P \subseteq M$ *определимо в* M, если $P \in \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n^M$, т. е. если P определимо в M *без* параметров.

Эти понятия тесно связаны с понятием абсолютности, играющим важную роль в теории конструктивности.

Предикат P называется *абсолютным* для класса M, если для всех $x \in M$ выполняется эквивалентность $P(x) \leftrightarrow P^M(x)$ (т. е. P имеет один и тот же смысл в M и в V).

Если класс M транзитивен, то каждая Σ_0-формула языка $\mathscr{L}_M$, очевидно, абсолютна для M (см. предложение 1.3 гл. 4). Отсюда немедленно следует, что если P есть Δ_1^{ZF}-предикат, а M является моделью теории ZF (или по крайней мере той части ZF, которая используется в доказательстве эквивалентности Σ_1- и Π_1-определений предиката P), то P абсолютен для M.

Многие основные понятия теории множеств являются Σ_0^{ZF}-понятиями и даже Σ_0^M-понятиями для любого транзитивного класса M. В частности, таким свойством обладают

$x = y$, $x \in y$, $x \subseteq y$, $y = \{x, z\}$, $y = \langle x, z\rangle$,
$y = (x)_0$, $y = (x)_1$, $y = \bigcup x$, $y = \bigcap x$,
x — упорядоченная пара,
$y = x \times z$, $y = x - z$, x — функция, $y = \mathrm{dom}(x)$,
$y = \mathrm{ran}(x)$, $y = x(z)$,
x — (предельный/непредельный) ординал,
x — натуральное число,
x — последовательность,
x — конечная последовательность,
$x = \omega$, $\omega \in x$ и т. п.

(см. 1.4 и 2.12 из гл. 4). Более того, каждый из этих предикатов является *равномерно* Σ_0^M-предикатом для транзитивных M, т. е. для него можно указать такую Σ_0-формулу, которая будет годиться для каждого транзитивного класса M.

Заметим также, что если предикат $P(x)$ является Σ_0^{ZF}- или Σ_0^M-предикатом, где класс M транзитивен, то такими же будут предикаты $P((x)_0)$ и $P((x)_1)$, а также предикаты $\forall x \in \mathrm{dom}(u)(P(x))$ и $\forall x \in \mathrm{ran}(u)(P(x))$.

Наконец, последнее замечание. Если транзитивный класс M замкнут относительно операции образования упорядоченных пар, то каждый Σ_n^M-предикат P на M можно выразить формулой вида $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots - x_n R(x_1, \ldots, x_n)$, где R является Σ_0-предикатом. (Правило свертывания кванторов.)

Σ_1-*функцией* называем функцию, график которой является Σ_1-классом.

Теперь мы уже достаточно подготовлены, чтобы доказать следующую лемму:

4.1. Лемма. *Функция* $\langle L_\nu\colon \nu \in \mathrm{On}\rangle$ *является* Σ_1^{ZF}-*функцией, а функция* $\langle L_\nu\colon \nu \in \lambda\rangle$ *является равномерно* $\Sigma_1^{L_\lambda}$-*функцией для всех предельных ординалов* $\lambda > \omega$.

Доказательство. Ясно, что

$$y = L_\alpha \leftrightarrow \exists f\ (f - \text{функция} \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha + 1 \wedge f(0) = \varnothing \wedge \forall \gamma \in \mathrm{dom}(f)((\mathrm{Lim}(\gamma) \wedge \gamma > 0 \to f(\gamma) = \bigcup_{\delta < \gamma} f(\delta)) \wedge (\neg \mathrm{Lim}(\gamma) \to f(\gamma) = \mathrm{Def}(f(\gamma - 1)))) \wedge y = f(\alpha)).$$

Мы должны показать, что предикат в правой части является Σ_1-предикатом, причем наше Σ_1-определение должно работать как для ZF, так и для произвольного множества L_λ, где $\lambda > \omega$ предельно. Непосредственный анализ определений § 3 показывает, что предикаты $\mathrm{Vbl}(x)$, $\mathrm{Const}_u(x)$, $\mathrm{EFml}_u(x)$ являются Σ_0-предикатами, а каждый неограниченный квантор остальных предикатов § 3 может быть ограничен одним из следующих множеств:

ω, $\mathscr{P}_{<\omega}(\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f}))$,
$\mathrm{Seq}(\mathscr{P}_{<\omega}(\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f})))$,
$\mathrm{Seq}(\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f}))$,
$\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f})$,
$\mathrm{Seq}(\mathscr{P}_{<\omega}(\mathrm{Vbl}))$,

где $\mathrm{Seq}(x)$ есть множество всех конечных последовательностей элементов множества x, $\mathscr{P}_{<\omega}(x) = \{y \subseteq x\colon y \text{ конечно}\}$. Значит, если определить функцию w, объединяющую все указанные множества:

$$w(f) = \omega \cup \mathscr{P}_{<\omega}(\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f})) \cup \mathrm{Seq}(\mathscr{P}_{<\omega}(\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f}))) \cup \mathrm{Seq}(\mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f})) \cup \mathrm{Seq}(9 \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}_{U\,\mathrm{ran}\,f}) \cup \mathrm{Seq}(\mathscr{P}_{<\omega}(\mathrm{Vbl})),$$

то мы сможем получить определение в виде

$$y = L_\alpha \leftrightarrow \exists f \exists w\,(w = w(f) \wedge U(w, f, y, \alpha)),$$

где $U(w, f, y, \alpha)$ есть Σ_0-предикат, который получается из правой части эквивалентности в начале доказательства вычерки-

ванием квантора $\exists f$ и ограничением всех оставшихся неограниченных кванторов множеством w. Чтобы доказать, что полученное определение принадлежит классу Σ_1, мы должны установить, что функция $w(f)$ принадлежит классу Σ_1. Это, очевидно, сводится к тому, чтобы показать, что $\mathrm{Seq}(x)$ и $\mathscr{P}_{<\omega}(x)$ являются Σ_1-функциями. Но так как $\mathscr{P}_{<\omega}(x) = y \leftrightarrow \exists z\,(z = \mathrm{Seq}(x) \wedge y = \{\mathrm{ran}(u)\colon u \in z\})$, то этот вопрос в свою очередь сводится к доказательству принадлежности функции $\mathrm{Seq}(x)$ к Σ_1. Укажем соответствующее Σ_1-определение:

$$
\begin{aligned}
&y = \mathrm{Seq}(x)\\
&\leftrightarrow \exists g\ (g \text{ — последовательность } \wedge\ \mathrm{dom}(g) = \omega\\
&\wedge y = \bigcup \mathrm{ran}(g) \wedge g(0) = \varnothing\\
&\wedge \forall n \in \omega \forall s \in g(n+1)\, \exists t \in g(n)\, \exists a \in x\,(s = t \cup \{\langle n, a\rangle\})\\
&\qquad \wedge \forall n \in \omega \forall s \in g(n)\, \forall a \in x \exists t \in g(n+1)(t = s \cup \{\langle n, a\rangle\}).
\end{aligned}
$$

Ясно, что в правой части стоит Σ_1-формула, причем это определение подходит и для любого множества L_λ (т. е. абсолютно для L_λ), если ординал $\lambda > \omega$ пределен. В самом деле, если $x \in \mathrm{L}_\alpha$, то $\mathrm{Seq}(x) \subseteq \mathrm{L}_{\alpha+2}$, и поэтому, определив $\mathrm{Seq}(x)$ в $\mathrm{L}_{\alpha+2}$, получим $\mathrm{Seq}(x) \in \mathrm{L}_{\alpha+3}$. А единственное g, существование которого утверждается в последней формуле, тогда принадлежит множеству $\mathrm{L}_{\alpha+4}$.

Осталось проверить, что наше окончательное определение функции конструктивной иерархии, т. е. предиката $y = \mathrm{L}_\alpha$, годится для любого L_λ, если ординал $\lambda > \omega$ пределен. В самом деле, имеется лишь одна функция, которую можно взять в качестве f, — именно, $f = \langle \mathrm{L}_\nu\colon \nu \leqslant \alpha\rangle$. Но индукцией по α нетрудно проверить, что из $\alpha < \lambda$ следует $\langle \mathrm{L}_\nu\colon \nu \leqslant \alpha\rangle \in \mathrm{L}_\lambda$. Лемма доказана. □

4.2. Следствие. *Функция* $\langle \mathrm{L}_\nu\colon \nu \in \mathrm{On}\rangle$ *является* Δ_1^{ZF}*-функцией, а функция* $\langle \mathrm{L}_\nu\colon \nu < \lambda\rangle$ *является равномерно* $\Delta_1^{\mathrm{L}_\lambda}$*-функцией для всех предельных ординалов* $\lambda > \omega$.

Доказательство. Вообще любая Σ_1-функция с Π_1-областью определения принадлежит Δ_1. В самом деле, имеет место следующая эквивалентность: $y = f(x) \leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(f) \wedge \wedge \forall z\,(z = f(x) \to z = y)$. □

§ 5. Аксиома конструктивности

Так называется утверждение о том, что все множества конструктивны. Эту аксиому обычно записывают в виде равенства $\mathrm{V} = \mathrm{L}$. Из 4.2 немедленно вытекает

5.1. Лемма. (i) *Класс* L *является* Σ_1^{ZF}*-классом.*
(ii) *Формула* $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ *есть* Π_2*-формула языка* $\mathscr{L}$.

Доказательство. $x \in \mathrm{L} \leftrightarrow \exists \alpha (x \in \mathrm{L}_\alpha)$, и поэтому L является Σ_1-классом. Далее, $\mathrm{V} = \mathrm{L} \leftrightarrow \forall x \exists \alpha (x \in \mathrm{L}_\alpha)$. □

Из 4.2 в силу абсолютности Δ_1-формул также следует

5.2. Лемма. (i) *Пусть* M *есть транзитивная модель теории* ZF. *Тогда для каждого ординала* $\alpha \in M$ *будет* $\mathrm{L}_\alpha \in M$ *и* $\mathrm{L}_\alpha = (\mathrm{L}_\alpha)^M$. *Следовательно, если* $\lambda = \mathrm{On} \cap M$, *то* $(\mathrm{L})^M = \mathrm{L}_\lambda$, *а если* $\mathrm{On} \subseteq M$, *то* $(\mathrm{L})^M = \mathrm{L}$.

(ii) *Для всех ординалов* α *выполняется* $(\mathrm{L}_\alpha)^{\mathrm{L}} = \mathrm{L}_\alpha$. *Следовательно,* $(\mathrm{L})^{\mathrm{L}} = \mathrm{L}$.

(iii) *Если ординал* $\lambda > \omega$ *пределен, то* $(\mathrm{L})^{\mathrm{L}_\lambda} = \mathrm{L}_\lambda$.

Из утверждения (ii) этой леммы сразу получаем такую теорему:

5.3. Теорема (Гёдель). $\mathrm{ZF} \vdash (\mathrm{V} = \mathrm{L})^{\mathrm{L}}$.

Необходимо отметить, что слово «аксиома» применительно к $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ вовсе не означает, что эту аксиому считают «разумным» или «интуитивно истинным» добавлением к теории ZF, когда последняя рассматривается как основание теории множеств. Аксиома $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ фигурирует в теоретико-множественных работах скорее как интересное дополнительное предположение, заслуживающее внимание хотя бы потому, что позволяет решить многие проблемы, неразрешимые в рамках теории ZFC. (См. наше введение.) Кроме того, любое утверждение, доказанное в теории $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$, автоматически оказывается непротиворечивым относительно ZF, так как конструктивный универсум L построен средствами ZF и образует модель теории ZF.

§ 6. Аксиома выбора в L

Мы покажем, что аксиома выбора выполняется в L в очень сильной форме. Именно, будет указана формула, которая определяет в L полное упорядочение класса L. В основе определения этой формулы лежит идея установить «порядок построения» элементов класса L. Для того чтобы это сделать, сначала несколько упростим построение конструктивной иерархии с тем, чтобы ограничиться всего одним параметром в переходе от L_α к $\mathrm{L}_{\alpha+1}$.

6.1. Лемма. *Для каждого ординала* α *найдется определимая в* L_α *функция* $\langle -, -\rangle^\alpha$ *из* $\mathrm{L}_\alpha \times \mathrm{L}_\alpha$ *в* L_α *такая, что для всех* $x, y, x', y' \in \mathrm{L}_\alpha$ *выполняется*

$$\langle x, y\rangle^\alpha = \langle x', y'\rangle^\alpha \to x = x' \wedge y = y'.$$

Доказательство. Если λ пределен, то подойдет обычная функция пары $\langle -, -\rangle$. Для непредельных же α определим $\langle -, -\rangle^\alpha$ индукцией по α. Пусть $\langle -, -\rangle^\alpha$ уже определена. Тогда $\langle x, y\rangle^\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$, если $x, y \in \mathrm{L}_\alpha$. Значит, для любых $x, y \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$

можно в $L_{\alpha+1}$ определить множество $x \times^{\alpha} y = \{\langle u, v\rangle^{\alpha}: u \in x \wedge v \in y\}$. Теперь $\langle x, y\rangle^{\alpha+1} = (x \times^{\alpha} \{0\}) \cup (y \times^{\alpha} \{1\})$ будет искомой функцией для $\alpha + 1$. □

Функцию $\langle -, - \rangle^{\alpha}$ назовем *функцией α-пары*. Она используется в доказательстве следующей леммы.

6.2. Лемма. *Если $x \in L_{\alpha+1}$, то для некоторой $\mathscr{L}$-формулы $\varphi(v_0, v_1)$ и некоторого $p \in L_\alpha$ будет*

$$x = \{z \in L_\alpha: L_\alpha \models \varphi(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{p})\}.$$

Доказательство — с помощью функции α-пары (и обратных к ней L_α-определимых функций) методом свертывания кванторов. □

6.3. Лемма. *Существует последовательность $\langle <_\alpha: \alpha \in \mathrm{On}\rangle$, удовлетворяющая следующим пяти условиям:*

(i) *последовательность $\langle <_\alpha: \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ является Δ_1^{ZF}-последовательностью, а $\langle <_\alpha: \alpha < \lambda\rangle$ является равномерно $\Delta_1^{L_\lambda}$-последовательностью для всех предельных ординалов $\lambda > \omega$;*

(ii) *если $\lambda > \omega$ предельно, то $<_\lambda$ является (равномерно для всех таких ординалов λ) полным $\Delta_1^{L_\lambda}$-упорядочением множества L_λ;*

(iii) *если $\alpha < \beta$, то $<_\beta$ является концевым продолжением порядка $<_\alpha$, т. е. $<_\alpha$ и $<_\beta$ совпадают на множестве $L_\alpha \subseteq L_\beta$, и L_α — начальный сегмент множества L_β в смысле $<_\beta$;*

(iv) *если $x \in y \in L_\alpha$, то $x <_\alpha y$;*

(v) *если ординал $\lambda > \omega$ предел, то функция $\mathrm{pr}(x) = \{y: y <_\alpha x\}$ является (равномерно) $\Delta_1^{L_\lambda}$-функцией.*

Доказательство. Построим $<_\alpha$ индукцией по α. Положим $<_0 = \varnothing$. Если $\lambda > 0$ предел, то $<_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} <_\alpha$. Предположим теперь, что $<_\alpha$ определено. Пусть $\langle \varphi_n: n \in \omega\rangle$ — некоторая рекурсивная нумерация всех формул языка $\mathscr{L}$, имеющих только две свободные переменные v_0 и v_1. Эта нумерация фиксирована в дальнейшем. Для каждого $x \in L_{\alpha+1}$ определим

$n(x)$ — наименьшее такое n, что $x = \{z \in L_\alpha: L_\alpha \models \varphi_n(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{p})\}$, для некоторого $p \in L_\alpha$,

$p(x)$ — наименьшее в смысле $<_\alpha$ из таких p.

Теперь для $x, y \in L_{\alpha+1}$ положим

$$x <_{\alpha+1} y \leftrightarrow (x, y \in L_\alpha \wedge x <_\alpha y) \vee (x \in L_\alpha \wedge y \notin L_\alpha)$$
$$\vee (x, y \notin L_\alpha \wedge n(x) < n(y))$$
$$\vee (x, y \notin L_\alpha \wedge n(x) = n(y) \wedge p(x) <_\alpha p(y)).$$

Ясно, что каждое $<_\alpha$ является полным упорядочением множества L_α. Поскольку $<_{\alpha+1}$ для всех α является концевым продолжением порядка $<_\alpha$, то условие (iii) очевидно. Условие (iv) также проверяется без особого труда. Доказательство (i) аналогично доказательству леммы 4.1 и следствия 4.2, и мы оставим его читателю. Для доказательства (ii) укажем Σ_1-определение $x <_\lambda y \leftrightarrow \exists \alpha < \lambda (x <_\alpha y)$ и Π_1-определение $x <_\lambda y \leftrightarrow x \neq y \wedge \neg \exists \alpha < \lambda (y <_\alpha x)$ для $<_\alpha$. Наконец, для (v) подойдет следующее Σ_1-определение:

$$z = \mathrm{pr}(x) \leftrightarrow \exists \nu < \lambda (x \in L_\nu \wedge z = \{y: y <_\nu x\}).$$

Поэтому, как и в 4.2, рассматриваемая функция принадлежит классу Δ_1. □

Положим $<_L = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{On}} <_\alpha$. Тогда $<_L$ будет полным Σ_1^{ZF}-упорядочением класса L, причем $<_L \cap (L_\lambda \times L_\lambda) = <_\lambda$ для всех предельных $\lambda > \omega$. Через $\varphi(v_0, v_1)$ обозначим естественную Σ_1-формулу языка $\mathscr{L}$, которая определяет порядок $<_L$, а через ψ обозначим следующую Π_1-формулу: $v_0 \neq v_1 \wedge \neg \varphi(v_1, v_0)$. Теперь из леммы 6.3 немедленно вытекает

6.4. Теорема (Гёдель; Йенсен — Карп). *Найдутся такие Σ_1-формула φ и Π_1 формула ψ языка $\mathscr{L}$, что:*

(i) *φ и ψ абсолютны для L;*

(ii) *$\mathrm{ZF} \vdash \{\langle x, y\rangle: \varphi(x, y))\}$ есть полное упорядочение класса L;*

(iii) *$\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L} \vdash (\varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, y))$.*

Следовательно, $\mathrm{ZF} \vdash (\mathrm{AC})^L$. ⊢

§ 7. Лемма о конденсации. GCH в L

Если множество $X \subseteq L_\alpha$ таково, что для любого Σ_n-предложения φ языка $\mathscr{L}_X$ выполняется эквивалентность: $X \models \varphi$, если и только если $L_\alpha \models \varphi$, то будем писать $X \prec_{\Sigma_n} L_\alpha$.

Ясно, что $X \prec_{\Sigma_0} L_\alpha$ для каждого транзитивного $X \subseteq L_\alpha$. Если $n > 0$ и ординал α предел, то выполняется эквивалентность: $X \prec_{\Sigma_n} L_\alpha$, если и только если для каждого $\Sigma_n^{L_\alpha}(X)$-множества $P \subseteq L_\alpha$ из $P \neq \varnothing$ следует $P \cap X \neq \varnothing$.

7.1. Лемма (лемма о конденсации). *Пусть $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$ и ординал α предел. Тогда существуют и единственны такие β и π, что:*

(i) *π есть изоморфизм систем $\langle X, \in\rangle$ и $\langle L_\beta, \in\rangle$;*

(ii) *если $Y \subseteq X$ транзитивно и $x \in Y$, то $\pi(x) = x$;*

(iii) *если $x \in X$, то $\pi(x) \leqslant_L x$.*

Доказательство. Если $\alpha = \omega$, то, очевидно, $X = L_\omega$, и доказывать нечего. Поэтому будем рассматривать только случай $\alpha > \omega$. Так как $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$, а множество L_α транзитивно, то

X будет экстенсиональным (т. е. если x, $y \in X$ различны, то $x \cap X \neq y \cap X$). Следовательно, по известной теореме Мостовского об изоморфизме существует единственное транзитивное множество M и единственный $\in$-изоморфизм π: X на M. (Об этом см. результат 3.7 гл. 7 «Теории моделей».) Остается доказать, что $M = \mathrm{L}_\beta$ для некоторого (единственного) ординала β.

В силу 4.2 найдется Σ_0-формула $\varphi(v_0, v_1, v_2)$ такая, что:

(a) $v = \mathrm{L}_\gamma \leftrightarrow \exists z \varphi(z, v, \gamma)$;
(b) $\mathrm{L}_\alpha \models \forall \gamma \exists v \exists z \varphi(z, v, \gamma)$;
(c) $\mathrm{L}_\alpha \models \forall x \exists \gamma \exists v \exists z \ (\varphi(z, v, \gamma) \wedge x \in v)$.

Поскольку для прообраза $\pi^{-1}{}''M = X$ множества M имеет место соотношение $X \prec_{\Sigma_1} \mathrm{L}_\alpha$, то из (b) и (c) следуют:

(d) $\forall \gamma \in M \ (M \models \exists v \exists z \varphi(z, v, \gamma))$;
(e) $\forall x \in M \ (M \models \exists \gamma \exists v \exists z (\varphi(z, v, \gamma) \wedge x \in v))$.

Но Σ_0-предложения абсолютны для транзитивных множеств. Поэтому из (d) и (e) получаем:

(f) $\forall \gamma \in M \exists v \in M \exists z \in M \varphi(z, v, \gamma)$;
(g) $\forall x \in M \exists \gamma \in M \exists v \in M \exists z \in M (\varphi(z, v, \gamma) \wedge x \in v)$.

Далее, из (a), (f) и (g) вытекают:

(h) $\forall \gamma \in M \ (\mathrm{L}_\gamma \in M)$;
(i) $\forall x \in M \exists \gamma \in M \ (x \in \mathrm{L}_\gamma)$.

Но множество M транзитивно. Значит, (h) дает $\bigcup_{\gamma \in M} \mathrm{L}_\gamma \subseteq M$. С другой стороны, из (i) следует $M \subseteq \bigcup_{\gamma \in M} \mathrm{L}_\gamma$. Таким образом, $M = \bigcup_{\gamma \in M} \mathrm{L}_\gamma$. Кроме того, $M \cap \mathrm{On}$ есть некоторый ординал β. Этот ординал предел, так как ординал α предел и $M \prec_{\Sigma_1} \mathrm{L}_\alpha$. Следовательно, $M = \mathrm{L}_\beta$.

Итак, утверждение (i) леммы доказано. Утверждение (ii) без труда доказывается $\in$-индукцией. Для доказательства (iii) предположим, что, напротив, найдется такое $x \in X$, что $\pi(x) >_{\mathrm{L}} {}_{\mathrm{L}}x$. Пусть x_0 есть $<_{\mathrm{L}}$-наименьшее из таких x. Заметим, что $x_0 \in \mathrm{L}_\beta$, так как $x_0 <_{\mathrm{L}} \pi(x_0) \in \pi'' X = M = \mathrm{L}_\beta$, а L_β есть начальный сегмент в смысле $<_{\mathrm{L}}$. Значит, найдется такое $x_1 \in X$, что $x_0 = \pi(x_1)$. Итак, $\pi(x_1) <_{\mathrm{L}} \pi(x_0)$. Отсюда следует $x_1 <_{\mathrm{L}} {}_{\mathrm{L}}x_0$, поскольку $<_{\mathrm{L}}$ является $\Sigma_1^{\mathrm{L}_\beta}$-отношением. Таким образом, мы получим $x_0 = \pi(x_1) \leqslant x_1$, что противоречит неравенству $x_1 <_{\mathrm{L}} {}_{\mathrm{L}}x_0$. $\square$

С помощью доказанной леммы и следующей леммы 7.2 мы сможем доказать GCH в классе L.

7.2. Лемма. *Пусть $\varkappa$ является кардиналом в* L. *Если $x \in \mathrm{L}$ есть ограниченное подмножество кардинала $\varkappa$ или $x \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ для некоторого $\alpha < \varkappa$, то $x \in \mathrm{L}_\varkappa$.*

Доказательство. Пусть $\alpha < \varkappa$ таково, что $x \subseteq \mathrm{L}_\alpha$. Выберем такой предельный ординал λ, что $x \in \mathrm{L}_\lambda$. Через M обозначим совокупность всех элементов множества L_λ, определимых в L_λ с параметрами из $\mathrm{L}_\alpha \cup \{x\}$. Поскольку полный порядок $<_\lambda$ определим в L_λ, то нетрудно проверить, что $M \prec \mathrm{L}_\lambda$ (т. е. $M \prec_{\Sigma_n} \mathrm{L}_\lambda$ для всех n). Значит, согласно 7.1 существует $\in$-изоморфизм π: M на L_γ. При этом $\pi \restriction \mathrm{L}_\alpha$ — тождественная функция, и поэтому $\pi(x) = x$. (Так как $\pi(x) = \{\pi(z)\colon z \in x \cap M\}$.) Значит, $x \in \mathrm{L}_\gamma$. Но в силу счетности нашего языка мы имеем $|M|^{\mathrm{L}} = |\mathrm{L}_\alpha|^{\mathrm{L}} + \omega$. С другой стороны, индукцией по ν нетрудно доказать равенство $|\mathrm{L}_\nu|^{\mathrm{L}} = |\nu|^{\mathrm{L}}$ для всех бесконечных ν. Следовательно, $|\gamma|^{\mathrm{L}} \leqslant |\alpha|^{\mathrm{L}} + \omega < \varkappa$. Это означает, что $\gamma < \varkappa$ и $x \in \mathrm{L}_\varkappa$. $\square$

7.3. Теорема (Гёдель). $\mathrm{ZF} \vdash (\mathrm{GCH})^{\mathrm{L}}$.

Доказательство. Для каждого бесконечного кардинала $\varkappa$ будет $2^\varkappa \leqslant |\mathrm{L}_{\varkappa^+}|$ в силу леммы 7.2. Но $|\mathrm{L}_{\varkappa^+}| = \varkappa^+$. Это и дает $2^\varkappa = \varkappa^+$. $\square$

§ 8. Σ_1-функции Скулема

Эти функции играют важную роль в теории конструктивности.

Σ_1-функцией Скулема для L_α называется каждая $\Sigma_1^{\mathrm{L}_\alpha}$-функция h такая, что $\mathrm{dom}(h) \subseteq \omega \times \mathrm{L}_\alpha$, $\mathrm{ran}(h) \subseteq \mathrm{L}_\alpha$, и для любого $x \in \mathrm{L}_\alpha$ и любого $\Sigma_1^{\mathrm{L}_\alpha}(\{x\})$-множества $P \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ из $P \neq \varnothing$ следует $\exists i \in \omega (h(i, x) \in P)$.

Перед доказательством существования укажем несколько элементарных свойств функций Скулема.

8.1. Лемма. *Пусть ординал α предален, а h является Σ_1-функцией Скулема для L_α, и $x \in \mathrm{L}_\alpha$. Тогда $x \in h'' (\omega \times \{x\}) \prec_{\Sigma_1} \mathrm{L}_\alpha$.*

Доказательство. Положим $N = h'' (\omega \times \{x\})$. Ясно, что $x \in N$. Рассмотрим произвольное $\Sigma_1^{\mathrm{L}_\alpha}(N)$-множество $P \subseteq \mathrm{L}_\alpha$. Докажем, что $P \neq \varnothing \to P \cap N \neq \varnothing$. Пусть $y_1, \ldots, y_m \in N$ таковы, что $P \in \Sigma_1^{\mathrm{L}_\alpha}(\{y_1, \ldots, y_m\})$. По определению множества N найдутся числа $j_1, \ldots, j_m \in \omega$, удовлетворяющие равенствам $y_1 = h(j_1, x), \ldots, y_m = h(j_m, x)$. Заметим, что $P \in \Sigma_1^{\mathrm{L}_\alpha}(\{x\})$, так как h является $\Sigma_1^{\mathrm{L}_\alpha}$-функцией. Значит,

$$P \neq \varnothing \to \exists i \in \omega (h(i, x) \in P) \to P \cap N \neq \varnothing. \ \square$$

Доказанная лемма допускает обобщения. Например:

8.2. Лемма. *Пусть ординал α предел, а h является Σ_1-функцией Скулема для L_α. Пусть также $p \in L_\alpha$ и множество $X \subseteq L_\alpha$ замкнуто относительно образования упорядоченных пар. Тогда*

$$X \cup \{p\} \subseteq h''(\omega \times (X \times \{p\})) \prec_{\Sigma_1} L_\alpha.$$

Доказательство. Положим $N = h''(\omega \times (X \times \{p\}))$. Ясно, что $X \cup \{p\} \subseteq N$. Рассмотрим произвольное $\Sigma_1^{L_\alpha}(N)$-множество $P \subseteq L_\alpha$. Пусть $y_1, \ldots, y_m \in N$ таковы, что $P \in \Sigma_1^{L_\alpha}(\{y_1, \ldots, y_m\})$. По определению N найдутся $j_1, \ldots, j_m \in \omega$ и $x_1, \ldots, x_m \in X$, удовлетворяющие равенствам $y = h(j_1, \langle x_1, p\rangle), \ldots, y_m = h(j_m, \langle x_m, p\rangle)$. Положим $x = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle$. По условию леммы $x \in X$. Заметим, что $P \in \Sigma_1^{L_\alpha}(\{\langle x, p\rangle\})$, так как h является $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией. Значит, $P \neq \varnothing \to \exists i \in \omega (h(i, \langle x, p\rangle) \in P) \to P \cap N \neq \varnothing$. □

Аналогично, имеет место

8.3. Лемма. *Пусть ординал α предел, а h является Σ_1-функцией Скулема для L_α. Пусть также $X \subseteq L_\alpha$, а множество $h''(\omega \times X)$ замкнуто относительно образования упорядоченных пар. Тогда $X \subseteq h''(\omega \times X) \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$.*

Доказательство. Ясно, что если $Y = h''(\omega \times X)$, то $h''(\omega \times Y) = h''(\omega \times X)$. Теперь следует применить лемму 8.2. □

Две последние леммы показывают, каким образом обычно применяются Σ_1-функции Скулема. Теперь рассмотрим вопрос существования таких функций. Будет доказано, что если ординал $\alpha > \omega$ предел, то существует Σ_1-функция Скулема для множества L_α. Начнем со следующей вспомогательной леммы.

8.4. Лемма. *Пусть ординал $\alpha > \omega$ предел. Тогда сужение $L_\alpha \models^{\Sigma_0}$ предиката истинности $L_\alpha \models$ на совокупность всех Σ_0-предложений языка $\mathscr{L}_{L_\alpha}$ является (равномерно) $\Sigma_1^{L_\alpha}$-предикатом.*

Доказательство. Для любого Σ_0-предложения φ языка $\mathscr{L}_{L_\alpha}$ мы имеем $L_\alpha \models \varphi$, если и только если $TC(\mathrm{ran}(\varphi)) \models \varphi$ (в силу абсолютности), где $TC(x)$ есть транзитивное замыкание множества x, т. е. наименьшее транзитивное множество z такое, что $x \subseteq z$. Значит, для каждого Σ_0-предложения φ выполняется: $L_\alpha \models \varphi$, если и только если $\mathrm{Sat}(TC(\mathrm{ran}(\varphi)), \varphi)$, где Sat — предикат, введенный в § 3. Но анализ определения $\mathrm{Sat}(u, \varphi)$ показывает, что в нем каждый неограниченный квантор можно ограничить множеством вида $w = w(u)$, где w является подходящей Σ_1-функцией типа той, которая была использована в доказательстве леммы 4.1. Значит, $\mathrm{Sat}(u, \varphi)$

имеет следующее Σ_1-определение над L_α:

$$\mathrm{Sat}(u, \varphi) \leftrightarrow \exists w (w = w(u) \wedge S(w, u, \varphi)),$$

где $S(w, u, \varphi)$ есть Σ_0-формула, полученная из определения $\mathrm{Sat}(u, \varphi)$ в § 3 ограничением всех неограниченных кванторов множеством w.

Далее, TC также является $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией в силу следующего определения:

$$w = TC(x) \leftrightarrow \exists f\ (f \text{ — функция} \wedge \mathrm{dom}(f) = \omega \wedge f(0) = x \wedge \forall n \in \omega (f(n+1) = \bigcup f(n)) \wedge w = \bigcup \mathrm{ran}(f)).$$

Теперь лемма очевидна. □

8.5. Следствие. *Пусть ординал $\alpha > \omega$ предел. Тогда сужение $L_\alpha \models^{\Sigma_1}$ предиката истинности $L_\alpha \models$ на совокупность всех предложений языка $\mathscr{L}_{L_\alpha}$, имеющих вид $\exists v_0 \varphi(v_0)$, где φ есть Σ_0-формула, является (равномерно) $\Sigma_1^{L_\alpha}$-предикатом.*

Доказательство. Рассуждая аналогично доказательству леммы 8.4, нетрудно проверить, что введенная в § 3 функция $\mathrm{Sub}(\varphi, v, t)$ является $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией. Далее, для любого предложения φ вида $\exists v_0 \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ есть Σ_0-формула, справедлива следующая эквивалентность:

$L_\alpha \models \varphi$, если и только если

$$\exists \psi \in L_\alpha \exists x \in L_\alpha (\varphi = \exists v_0 \psi \text{ и } L_\alpha \models^{\Sigma_0} \mathrm{Sub}(\psi, v_0, \overset{\circ}{x})).$$

Теперь искомое следует из леммы 8.4. □

8.6. Лемма. *Пусть ординал $\alpha > \omega$ предел. Тогда найдется Σ_1-функция Скулема для L_α, являющаяся равномерно $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией.*

Доказательство. Пусть $\langle \varphi_i : i \in \omega\rangle$ — некоторая фиксированная рекурсивная нумерация всех формул языка $\mathscr{L}$ вида $\varphi_i = \exists v_0 \bar{\varphi}_i(v_0, v_1, v_2)$, где $\bar{\varphi}_i$ есть Σ_0-формула. Введем частичную функцию r_α следующим образом:

$$w = r_\alpha(i, x) \leftrightarrow L_\alpha \models \bar{\varphi}_i((\overset{\circ}{w})_0, (\overset{\circ}{w})_1, \overset{\circ}{x}) \wedge \forall z <_L \overset{\circ}{w} \neg \bar{\varphi}_i((z)_0, (z)_1, \overset{\circ}{x}),$$

т. е.

$$w = r_\alpha(i, x) \leftrightarrow L_\alpha \models \bar{\varphi}_i((\overset{\circ}{w})_0, (\overset{\circ}{w})_1, \overset{\circ}{x}) \wedge \exists u (u = \{z : z <_L \overset{\circ}{w}\} \wedge \forall z \in u \neg \bar{\varphi}_i((z)_0, (z)_1, \overset{\circ}{x})).$$

Согласно 8.5 и 6.3 r_α является $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией. Следовательно, функция h_α, определенная условным равенством $h_\alpha(i, x) \simeq$

$\simeq (r_\alpha(i, x))_1$, также будет $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией. Нетрудно проверить, что h_α — искомая функция. □

Функция h_α, определенная в доказательстве леммы 8.4, называется *канонической Σ_1-функцией Скулема для* L_α. В сущности, для каждого $i \in \omega$ из нашего доказательства можно извлечь такую Σ_0-формулу H_i языка $\mathscr{L}$, что для каждого предельного $\alpha > \omega$ и любых множеств $x, y \in L_\alpha$ выполняется эквивалентность $y = h_\alpha(i, x) \leftrightarrow \exists z \in L_\alpha (L_\alpha \models H_i(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x}))$. Через $H_\alpha(z, y, i, x)$ обозначим отношение $L_\alpha \models H_i(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x})$. Поскольку нумерация $\langle H_i : i \in \omega\rangle$ предполагается рекурсивной, то из 8.5 имеем: H_α является $\Sigma_1^{L_\alpha}$-отношением (равномерно для всех предельных $\alpha > \omega$). В дальнейшем изложении мы будем часто употреблять эти обозначения.

В качестве иллюстрации того, как используются функции Скулема в доказательствах, докажем следующую лемму.

8.7. Лемма. *Если ординал $\alpha > \omega$ предел, то найдется $\Sigma_1(L_\alpha)$-функция из α на L_α.*

Доказательство. С помощью не очень сложного технического приема можно показать, что существует $\Sigma_1(L_\alpha)$-функция из α на $\alpha \times \alpha$. Итак, пусть $p \in L_\alpha$ таково, что существует $\Sigma_1^{L_\alpha}(\{p\})$-функция f из α на $\alpha \times \alpha$, причем p является $<_L$-наименьшим из таких параметров. Определим функции-компоненты f^0 и f^1 равенством $f(\nu) = \langle f^0(\nu), f^1(\nu)\rangle$ для всех $\nu < \alpha$. Индукцией по n введем функции f_n из α на α^n следующим образом: $f_1(\nu) = \nu$ и $f_{n+1}(\nu) = \langle f^0(\nu), f_n(f^1(\nu))\rangle$. Каждая f_n является $\Sigma_1^{L_\alpha}(\{p\})$-функцией. Пусть $h = h_\alpha$ и $X = h''(\omega \times (\alpha \times \{p\}))$.

Утверждение 1. Множество X замкнуто относительно образования упорядоченных пар.

В самом деле, пусть $x_1, x_2 \in X$. Выберем такие $j_1, j_2 \in \omega$ и $\nu_1, \nu_2 \in \alpha$, что $x_1 = h(j_1, \langle \nu_1, p\rangle)$ и $x_2 = h(j_2, \langle \nu_2, p\rangle)$. Пусть $\langle \nu_1, \nu_2\rangle = f_2(\tau)$. Тогда $\{\langle x_1, x_2\rangle\}$ будет $\Sigma_1^{L_\alpha}(\{\langle \tau, p\rangle\})$-множеством. Значит, $\langle x_1, x_2\rangle \in X$ по определению h, что и требовалось.

Из доказанного и 8.3 следует $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$. Используя лемму о конденсации, найдем $\in$-изоморфизм π: X на L_β. Поскольку $\alpha \subseteq X$, то в нашем случае будет $\beta = \alpha$.

Утверждение 2. Для всех $i \in \omega$ и $x \in X$ выполняется условное равенство $\pi(h(i, x)) \simeq h(i, \pi(x))$.

Действительно, пусть $i \in \omega$, $x \in X$ и $y = h(i, x)$. Поскольку h является $\Sigma_1^{L_\alpha}$-функцией, а $x \in X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$, то $y \in X$. Далее, так как $y = h(i, x)$, то $L_\alpha \models \exists z H_i(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x})$ и далее $X \models \exists z H_i(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x})$,

т. е. для некоторого $z \in X$ будет $X \models H_i(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x})$. Действуя изоморфизмом π, получим $L_\alpha \models H_i(\pi(z)^\circ, \pi(y)^\circ, \pi(x)^\circ)$, т. е. $L_\alpha \models \exists z H_i(z, \pi(y)^\circ, \pi(x)^\circ)$. Таким образом, $\pi(y) = h(i, \pi(x))$. Обратно, если $h(i, \pi(x))$ определено, то мы имеем $h(i, \pi(x)) = \pi(y)$ для некоторого $y \in X$. Теперь, повторив рассуждения в обратном направлении, получим $y = h(i, x)$. Утверждение 2 доказано.

Продолжаем доказательство леммы. Поскольку $f \subseteq \alpha \times (\alpha \times \alpha)$, а изоморфизм π тождествен на α, то $\pi(f) = f$. Кроме того, в силу изоморфизма образ $\pi''f$ является $\Sigma_1^{L_\alpha}(\{\pi(p)\})$-множеством. Значит, в силу выбора p выполняется неравенство $p \leqslant_L \pi(p)$. Но изоморфизм π из леммы о конденсации удовлетворяет неравенству $\pi(p) \leqslant_L p$. Значит, $\pi(p) = p$. Поэтому, согласно утверждению 2, для всех $i \in \omega$ и $\nu < \alpha$ будет $\pi(h(i, \langle \nu, p\rangle)) \simeq h(i, \langle \nu, p\rangle)$. Следовательно, функция π тождественна на X, откуда $X = \pi''X = L_\alpha$.

Рассмотрим такой $\Sigma_0^{L_\alpha}$-предикат S, что

$$y = h(i, x) \leftrightarrow \exists z \in L_\alpha S(z, y, i, x).$$

Определим отображение g из $\alpha \times \alpha \times \alpha$ в L_α таким образом:

$$g(i, \nu, \tau) = \begin{cases} y, & \text{если } y \in L_\tau \text{ и } \exists z \in L_\tau S(z, y, i, \langle \tau, p\rangle), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для g можно дать следующее $\Sigma_1(L_\alpha)$-определение:

$$u = g(i, \nu, \tau) \leftrightarrow (y \in L_\tau \text{ и } \exists z \in L_\tau S(z, y, i, \langle \nu, p\rangle) \vee (\forall y' \in L_\tau \forall z \in L_\tau \neg S(z, y', i, \langle \nu, p\rangle) \wedge y = 0).$$

Очевидно $g''(\alpha \times \alpha \times \alpha) = h(\omega \times (\alpha \times \{p\})) = X = L_\alpha$. Таким образом, композиция $g \circ f_3$ является искомой функцией. □

§ 9. Допустимые ординалы

Допустимым множеством называется каждое транзитивное множество M, удовлетворяющее следующим пяти условиям:

(I) $M \neq \varnothing$,

(II) $\forall x \in M (\bigcup x \in M)$,

(III) $\forall x, y \in M (\{x, y\} \in M)$,

(IV) если $P \subseteq M$ является $\Sigma_0(M)$-множеством, то $\forall u \in M (u \cap P \in M)$ (Σ_0-*выделение*),

(V) если $P \subseteq M \times M$ является $\Sigma_0(M)$-множеством, то $\forall u \in M \exists y \in M (\langle x, y\rangle \in P) \rightarrow \forall u \in M \exists v \in M \forall x \in u \exists y \in v (\langle x, y\rangle \in P)$ (Σ_0 *подстановка* или, точнее, Σ_0-*собирание*).

Можно доказать, что для каждого допустимого множества M условия (IV) и (V) справедливы также и для $\Delta_1(M)$- и

$\Sigma_1(M)$-множеств P соответственно (принципы Δ_1-выделения и Σ_1-подстановки). Об этом см. § 2 главы 7 «Теории моделей», посвященной допустимым множествам.

Ординал α называется *допустимым*, если множество L_α допустимо. (Нетрудно проверить, что α является допустимым ординалом, если и только если найдется такое допустимое множество M, что $\alpha = M \cap \mathrm{On}$. Поэтому понятие допустимого ординала фактически не зависит от конструктивной иерархии.)

Читатель без труда сможет показать, что если ординал α предельен, то множество L_α удовлетворяет условиям (I)—(IV) определения допустимого множества (нужно действовать, как в доказательстве теоремы 2.2, и использовать абсолютность Σ_0-формул). Значит, справедлива следующая

9.1. Лемма. *Пусть ординал α предельен. Тогда α допустим, если и только если для каждого $\Sigma_0(L_\alpha)$-предиката $P(x, y)$ имеет место*

$$\forall x \in L_\alpha \exists y \in L_\alpha P(x, y) \to \forall u \in L_\alpha \exists v \in L_\alpha \forall x \in u \exists y \in v P(x, y).$$

9.2. Лемма. *Пусть ординал α предельен. Тогда α допустим, если и только если не существует конфинальных $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображений ординалов $\delta < \alpha$ в α.*

Доказательство. Пусть α — допустимый ординал, $\delta < \alpha$, и $f\colon \delta \to \alpha$ является $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображением. Тогда $\forall \xi < \delta \exists \eta\ (\eta = f(\xi))$. Поэтому в силу Σ_1-подстановки найдется такое $\gamma \in \alpha$, что $\forall \xi \in \delta \exists \eta \in \gamma\ (\eta = f(\xi))$. Это означает $f''\delta \subseteq \gamma$, т. е. f не конфинально.

Обратно, предположим, что не существует конфинальных $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображений ординалов $\delta < \alpha$ в α. С помощью 9.1 покажем, что α — допустимый ординал. Рассмотрим произвольный $\Sigma_0(L_\alpha)$-предикат $P(x, y)$ на L_α такой, что $\forall x \in L_\alpha \exists y \in L_\alpha P(x, y)$. Для данного $u \in L_\alpha$ подберем такое $v \in L_\alpha$, что $\forall x \in u \exists y \in v P(x, y)$. Определим $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображение $f\colon u \to \alpha$ равенством $f(x) = (\text{наименьшее } \gamma \text{ такое, что } \exists y \in L_\gamma P(x, y))$. Выберем такой предельный ординал $\delta < \alpha$, что $u \subseteq L_\delta$. (Если таких δ нет, то в силу $u \in L_\alpha$ ординал α имеет вид $\alpha = \mu + \nu$, где $\mu < \alpha$ и $\nu \leqslant \omega$. Отсюда легко получить противоречие с нашим предположением об α.) Продолжим f тривиальным образом на множество L_δ. Согласно нашему предположению и лемме 8.7 f не может быть конфинальным в α. Значит, найдется такое $\beta < \alpha$, что $f''L_\delta \subseteq \beta$. Таким образом, множество $v = L_\beta$ является искомым. □

Следующая лемма является усилением предыдущей.

9.3. Лемма. *Пусть ординал α предельен, но не является допустимым. Тогда найдется $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображение из некоторого ординала $\delta < \alpha$ на α.*

Доказательство. В силу леммы 9.2 существует конфинальное $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображение некоторого ординала $\delta < \alpha$ в α. Пусть $f \in \Sigma_1^{L_\alpha}(\{p\})$ — такое отображение, $p \in L_\alpha$. Заметим, что для ординалов α вида $\alpha = \mu + \nu$, где $\mu < \alpha$ и $\nu \leqslant \omega$, лемма тривиальна. Поэтому предположим, что α не имеет указанного вида, и выберем такой предельный ординал $\gamma < \alpha$, что $\delta, p \in L_\gamma$. Положим $X = h''(\omega \times L_\gamma)$, где $h = h_\alpha$. Тогда $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$, так как множество X замкнуто относительно образования упорядоченных пар. Пусть теперь π есть $\in$-изоморфизм X на L_β. Поскольку функция π тождественна на множестве L_γ, то аналогично утверждению 2 из доказательства 8.7 можно показать, что π тождественна на X. Значит, $X = L_\beta$. Далее, множество X замкнуто относительно f, так как f является $\Sigma_1^{L_\alpha}(\{p\})$-отображением, и $p \in X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$. Но $\delta \subseteq X$, а f конфинально в α. Отсюда следует $\alpha \subseteq X$. Таким образом, $\beta = \alpha$ и $X = L_\alpha$.

Аналогично доказательству леммы 8.7 рассмотрим $\Sigma_9^{L_\alpha}$-предикат S такой, что

$$y = h(i, x) \leftrightarrow \exists z \in L_\alpha S(z, y, i, x).$$

Введем функцию $g\colon \omega \times \delta \times L_\gamma \to L_\alpha$ условием

$$g(i, \nu, x) = \begin{cases} y, & \text{если } y \in L_{f(\nu)} \text{ и } \exists z \in L_{f(\nu)} S(z, y, i, x), \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично доказательству 8.7 g будет $\Sigma_1^{L_\alpha}(\{p\})$-функцией, причем $g''(\omega \times \delta \times L_\gamma) = h''(\omega \times L_\gamma) = X = L_\alpha$. Но в силу 8.7 существует $\Sigma_1(L_\gamma)$-отображение $j\colon \gamma$ на $\omega \times \delta \times L_\gamma$. Теперь композиция $g \circ j$ будет $\Sigma_1(L_\alpha)$-отображением γ на L_α, что и требовалось. □

Теория рекурсии на допустимых ординалах, а также связь с конструктивностью обсуждаются в главе 5 «Теории рекурсии».

§ 10. Гипотеза Суслина

Гипотеза Суслина и ее обобщения позволяют дать одну из лучших иллюстраций методов теории конструктивности.

Гипотезой Суслина SH называется утверждение о том, что любое плотное полное по Дедекинду линейно упорядоченное множество, не имеющее наименьшего и наибольшего элементов и не имеющее несчетных семейств попарно непересекающихся открытых интервалов, изоморфно континууму действительных чисел. (Действительная прямая, очевидно, обладает всеми перечисленными свойствами.)

Старый результат Миллера позволяет переформулировать SH в терминах деревьев. (См. теорему 4.11 гл. 3.) *Деревом* называется каждое ЧУ множество $\mathbf{T} = \langle T, \leqslant \rangle$ такое, что множество $\hat{x} = \{y \in T: y < x\}$ вполне упорядочено отношением $\leqslant$ при любом $x \in T$. Порядковый тип множества $\hat{x}$ в смысле $\leqslant$ называется *высотой* x в $\mathbf{T}$ и обозначается через $\mathrm{ht}(\lambda)$. α-м *уровнем дерева* $\mathbf{T}$ называется множество $T_\alpha = \{x \in T: \mathrm{ht}(x) = \alpha\}$. Определим $T \restriction \alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} T_\beta$.

Пусть ординал θ пределен, а λ является кардиналом. Дерево $\mathbf{T}$ называется (θ, λ)-*деревом*, если имеют место:

(i) $\forall \alpha < \theta (0 < |T_\alpha| < \lambda) \wedge |T_0| = 1 \wedge |T_\theta| = 0$,

(ii) $\forall \alpha < \theta \forall x \in T_\alpha (|\{y \in T_{\alpha+1}: x < y\}| \geqslant 2)$,

(iii) $\forall \alpha < \beta < \theta \forall x \in T_\alpha \exists y \in T_\beta (x <_T y)$,

(iv) $\forall \alpha < \theta \forall x, y \in T_\alpha$ (ординал α пределен $\rightarrow (x = y \leftrightarrow \hat{x} = \hat{y})$)

$\varkappa$-*деревом* называется $(\varkappa, \varkappa)$-дерево.

Пусть $\mathbf{T}$ — дерево. *Ветвью* в $\mathbf{T}$ называется максимальное линейно упорядоченное подмножество множества T. α-*ветвью* называется ветвь, имеющая порядковый тип α. *Антицепью* в $\mathbf{T}$ называется подмножество множества T, состоящее из попарно несравнимых элементов. *Деревом Ароншайна* называется ω_1-дерево, не имеющее ω_1-ветвей. Ароншайн доказал (в ZFC), что такие деревья существуют (теорема 4.8 гл. 3). *Деревом Суслина* называется ω_1-дерево, не имеющее несчетных антицепей. Нетрудно показать, что каждое дерево Суслина будет и деревом Ароншайна. Но обратное неверно: утверждение о существовании деревьев Суслина неразрешимо в ZFC. (Об этом см. Девлин и Юнсбротен [1].) Теорема Миллера утверждает эквивалентность гипотезы Суслина и предположения о том, что нет деревьев Суслина. Ее несложное доказательство содержится в книге Девлина и Юнсбротена [1]. Следовательно, SH неразрешима в ZFC. Однако эта гипотеза становится разрешимой, если мы предположим $V = L$.

10.1. Теорема (Йенсен). *Предположим* $V = L$. *Тогда* $\neg$SH.

Доказательство. Построим дерево Суслина $\mathbf{T}$ индукцией по уровням. Элементами множества T будут служить счетные последовательности нулей и единиц, а отношением порядка будет обычное включение. При этом окажется $s \subseteq t \in T \rightarrow s \in T$, откуда $s \in T_\alpha \rightarrow s \in {}^\alpha 2$ (где ${}^\alpha 2$ есть совокупность всех последовательностей нулей и единиц длины α).

Положим $T_0 = \{\varnothing\}$. Если T_α определено, то положим

$$T_{\alpha+1} = \{s^\frown\langle 0\rangle: s \in T_\alpha\} \cup \{s^\frown\langle 1\rangle: s \in T_\alpha\}.$$

Пусть ординал $\alpha < \omega_1$ пределен, и $T \restriction \alpha$ уже построено. Для построения уровня T_α нам потребуется функция $f: \omega_1 \rightarrow \omega_1$, определенная равенством $f(\xi) =$ (наименьший ординал γ такой, что $L_\gamma \models$ «ξ счетно»). (Для проверки корректности этого определения нужно воспользоваться леммой 7.2.) Для каждого $x \in T \restriction \alpha$ положим $s_x = \bigcup b_x$, где b_x есть $<_L$-наименьшая ветвь дерева $T \restriction \alpha$, содержащая x и пересекающаяся с каждой максимальной антицепью в $T \restriction \alpha$, принадлежащей множеству $L_{f(\alpha)}$. Поскольку $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ и $|L_{f(\alpha)}| = \omega$, то b_x и, следовательно, s_x определено для каждого $x \in T_\alpha$. Конечно, $s_x \in {}^\alpha 2$. Полагаем $T_\alpha = \{s_x: x \in T \restriction \alpha\}$. Построение дерева $\mathbf{T} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ закончено.

Покажем, что наше $\mathbf{T}$ будет деревом Суслина. Ясно, что $\mathbf{T}$ является ω_1-деревом. Предположим, что $\mathbf{T}$ не есть дерево Суслина. Тогда существуют несчетные максимальные антицепи в T. Пусть A является $<_L$-наименьшей несчетной максимальной антицепью в T. В силу 7.2 имеем $\mathbf{T} \in L_{\omega_2}$. Кроме того, $\mathbf{T}$ является определимым в L_{ω_2}. Значит, $A \in L_{\omega_2}$ также определимо в L_{ω_2}. Следовательно, дерево $\mathbf{T}$ и антицепь A принадлежат совокупности $M \prec L_{\omega_2}$ всех определимых в L_{ω_2} элементов множества L_{ω_2}.

Утверждение. $M \cap \omega_1 \in \omega_1$.

Так как M, очевидно, счетно, то достаточно доказать, что пересечение $M \cap \omega_1$ транзитивно. Пусть $\gamma \in M \cap \omega_1$. Так как $\gamma \subseteq \omega_1$, то $L_{\omega_2} \models$ «γ счетно». Пусть f есть $<_L$-наименьшее отображение ω на γ. Тогда $f \in M$, поскольку $\gamma \in M \prec L_{\omega_2}$ и f является определимым в L_{ω_2} с параметром γ. Но $\omega \subseteq M$. Значит, $\gamma = f''\omega \subseteq M$, что и требовалось.

Согласно доказанному утверждению $\alpha = M \cap \omega_1$ будет ординалом. Пусть π есть $\in$-изоморфизм M на L_λ. Тогда π тождественно на L_α, $\pi(\omega_1) = \alpha$, $\pi(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \restriction \alpha$, $\pi(A) = A \restriction \alpha = A \cap (\mathbf{T} \restriction \alpha)$. Кроме того, $L_\lambda \models$ «$A \restriction \alpha$ является максимальной антицепью в $\mathbf{T} \restriction \alpha$», так как $L_{\omega_2} \models$ «A является максимальной антицепью в $\mathbf{T}$». Значит, $A \restriction \alpha$ на самом деле есть максимальная антицепь в $\mathbf{T} \restriction \alpha$, причем, конечно, $A \restriction \alpha \in L_\lambda$. Но $\alpha = \omega_1^{L_\lambda}$, а с другой стороны, α счетно в $L_{f(\alpha)}$. Отсюда следует $\lambda < f(\alpha)$ и $A \restriction \alpha \in L_{f(\alpha)}$. Значит, по определению T_α каждый элемент уровня T_α лежит над некоторым элементом антицепи $A \restriction \alpha$. Следовательно, $A \restriction \alpha$ является максимальной антицепью в $\mathbf{T}$, т. е. $A \restriction \alpha = A$. Но это невозможно, поскольку антицепь A несчетна. Таким образом, $\mathbf{T}$ — действительно дерево Суслина, что и требовалось. □

Непосредственное построение континуума Суслина (контрпример к SH) содержится в доказательстве теоремы 3.8 гл. 3.

§ 11. Обобщенная гипотеза Суслина

Понятие дерева Суслина очевидным образом обобщается на любой регулярный кардинал $\varkappa > \omega_1$. Именно, $\varkappa$-*деревом Суслина* называют $\varkappa$-дерево, не имеющее антицепей мощности $\varkappa$.

(Любое такое дерево будет и κ-деревом Аронштайна аналогично случаю $\kappa = \omega_1$.) Через $\mathrm{SH}(\kappa)$ обозначается утверждение о том, что нет κ-деревьев Суслина. Несколько изменив доказательство теоремы 10.1, мы докажем, что из $\mathrm{V}=\mathrm{L}$ следует $\neg\mathrm{SH}(\kappa)$ для всех непредельных кардиналов. Позже в § 14 мы рассмотрим ситуацию для недостижимых кардиналов.

Если попытаться обобщить доказательство теоремы 10.1 на произвольный непредельный кардинал, то немедленно встретится следующее затруднение: нужно доказывать существование ветвей несчетной конфинальности на предельных шагах. Этот момент нетривиален. Например, если при построении ω_2-дерева Суслина $\mathbf{T}$ мы на шаге ω_1 получим ω_1-дерево Аронштайна $\mathbf{T}\restriction\omega_1$, то мы уже не сможем продолжить построение дальше. Чтобы избежать эту трудность, вводят (в L) специальную комбинаторную технику, а затем эту технику используют для построения дерева Суслина. К сожалению, недостаток места не позволяет нам рассмотреть более веские причины для развития этого комбинаторного аппарата как такового. Мы ограничимся его использованием в построении деревьев Суслина.

Пусть κ — произвольный (возможно сингулярный) кардинал, и $E \subseteq \kappa^+$. Через $\square_\kappa(E)$ обозначим предложение о том, что существует последовательность $\langle C_\lambda\colon \lambda < \kappa^+ \text{ и } \lambda \text{ предел}\rangle$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

(i) C_λ есть замкнутое неограниченное подмножество множества λ;

(ii) если $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$, то $|C_\lambda| < \kappa$;

(iii) если γ является предельной точкой множества C_λ, то $\gamma \notin E$ и $C_\gamma = C_\lambda \cap \gamma$.

(Заметим, что из условий (ii) и (iii) следует $\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa \to \mathrm{otp}(C_\lambda) = \kappa$, где otp означает порядковый тип.)

Через $\square_\kappa$ обозначим $\square_\kappa(\varnothing)$. Ниже в § 13 мы докажем следующую теорему:

11.1. Теорема (Йенсен). *Пусть κ — произвольный кардинал и выполняется* $\mathrm{V}=\mathrm{L}$. *Тогда найдется такое стационарное множество $E \subseteq \kappa^+$, что $\alpha \in E \to \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, и имеет место $\square_\kappa(E)$.*

Для построения κ-дерева Суслина нам потребуется еще один комбинаторный принцип, который также был введен Йенсеном.

Пусть кардинал κ регулярен, и $E \subseteq \kappa$. Через $\diamondsuit_\kappa(E)$ обозначим предположение о том, что существует последовательность $\langle S_\alpha\colon \alpha \in E\rangle$ множеств $S_\alpha \subseteq \alpha$ такая, что для любого $X \subseteq \kappa$ множество $\{\alpha \in E\colon X \cap \alpha = S_\alpha\}$ стационарно в κ.

Конечно, если имеет место $\diamondsuit_\kappa(E)$, то само множество необходимо является стационарным в κ. Следующая теорем показывает, что при $\mathrm{V}=\mathrm{L}$ это условие является и достаточны

11.2. Теорема (Йенсен). *Пусть κ — несчетный регулярный кардинал, множество $E \subseteq \kappa$ стационарно в κ и выполняется* $\mathrm{V}=\mathrm{L}$. *Тогда имеет место $\diamondsuit_\kappa(E)$.*

Доказательство. Индукцией по $\alpha \in E$ определим $\langle S_\alpha, C_\alpha\rangle$ как $<_\mathrm{L}$-наименьшую пару такую, что $S_\alpha, C_\alpha \subseteq \alpha$, C_α замкнуто и неограничено в α, и $\gamma \in C_\alpha \cap E \to S_\alpha \cap \gamma \neq S_\gamma$. (Если ординал α непределен или же предел, но таких пар нет, то положим $C_\alpha = S_\alpha = \varnothing$.) Мы утверждаем, что последовательность $\langle S_\alpha\colon \alpha \in E\rangle$ будет искомой. Предположим противное. Пусть $\langle S, C\rangle$ есть $<_\mathrm{L}$-наименьшая пара такая, что $S, C \subseteq \kappa$, C замкнуто и неограничено в κ, и $\alpha \in C \cap E \to S \cap \alpha \neq S_\alpha$. Поскольку последовательность $\langle S_\alpha\colon \alpha \in E\rangle$, очевидно, определима в L_{κ^+} с параметром E, то пара $\langle S, C\rangle$ также определима в L_{κ^+} с параметром E. Построим последовательность $\langle N_\nu\colon \nu < \kappa\rangle$ элементарных подмоделей множества L_{κ^+} следующим образом:

N_0 есть наименьшее (в смысле включения) множество $N \prec \mathrm{L}_{\kappa^+}$ такое, что $E \in N$ и $N \cap \kappa \in \mathrm{On}$.

$N_{\nu+1}$ есть наименьшее множество $N \prec \mathrm{L}_{\kappa^+}$ такое, что $N_\nu \cup \{N_\nu\} \subseteq N$ и $N \cap \kappa \in \mathrm{On}$.

$N_\lambda = \bigcup\limits_{\nu<\lambda} N_\nu$, если ординал $\lambda < \kappa$ предел.

Положим $\alpha_\nu = N_\nu \cap \kappa$ для каждого ν. Последовательность $\langle\alpha_\nu\colon \nu < \kappa\rangle$, очевидно, строго возрастает и непрерывна. Значит, множество $\{\alpha_\nu\colon \nu < \kappa\}$ замкнуто и неограничено в κ, и мы можем выбрать такое $\nu < \kappa$, что $\alpha_\nu = \nu \in E \cap C$.

Пусть π есть $\in$-изоморфизм N_ν на L_β. Тогда π тождествен на ν, $\pi(\kappa) = \nu$, $\pi(\langle S, C\rangle) = \langle S \cap \nu, C \cap \nu\rangle$, и, наконец, $\pi(\langle S_\alpha\colon \alpha \in E\rangle) = \langle S_\alpha\colon \alpha \in E \cap \nu\rangle$. А так как $\pi^{-1}\mathrm{L}_\beta \prec \mathrm{L}_\kappa$, то $\langle S \cap \nu, C \cap \nu\rangle$ является $<_\mathrm{L}$-наименьшей парой такой, что $S \cap \nu, C \cap \nu \subseteq \nu$, $C \cap \nu$ замкнуто и неограничено в ν, и $\gamma \in C \cap \nu \cap E \to S \cap \nu \cap \gamma \neq S_\gamma$. Значит, $\langle S \cap \nu, C \cap \nu\rangle = \langle S_\nu, C_\nu\rangle$. В частности, $S \cap \nu = S_\nu$. Но $\nu \in C \cap E$, и поэтому мы получили противоречие с выбором пары $\langle S, C\rangle$. Теорема доказана. □

Теперь мы уже готовы построить в L κ-дерево Суслина для любого непредельного кардинала $\kappa \geqslant \omega_1$.

11.3. Теорема (Йенсен). *Пусть $\kappa \geqslant \omega$ — произвольный кардинал. Предположим, что существует такое стационарное множество $E \subseteq \kappa^+$, что выполняется $\square_\kappa(E)$ и $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$. Тогда $\neg\mathrm{SH}(\kappa^+)$, т. е. существует κ^+-дерево Суслина.*

Таким образом, в силу 11.1 *и* 11.2 *из* $\mathrm{V}=\mathrm{L}$ *следует* $\forall\kappa(\neg\,\mathrm{SH}(\kappa^+))$.

Доказательство. Пусть $E \subseteq \kappa$ стационарно, последовательность $\langle C_\lambda\colon \lambda < \kappa^+ \text{ и } \lambda \text{ предельно}\rangle$ удовлетворяет $\square_\kappa(E)$, а

последовательность $\langle S_\alpha\colon \alpha \in E\rangle$ удовлетворяет $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E)$. Будем строить $\varkappa^+$-дерево Суслина $\mathbf{T}$ индукцией по уровням. При этом $\mathbf{T}\restriction\alpha$ будет $(\alpha, |\alpha|^+)$-деревом для каждого предельного ординала $\alpha < \varkappa^+$. Порядок $<_T$ дерева $\mathbf{T}$ мы построим на ординалах $<\varkappa$, причем окажется $\alpha <_T \beta \to \alpha < \beta$. Положим $T_0 = \{0\}$. Если уровень T_α уже построен, то определим уровень $T_{\alpha+1}$ так, чтобы он содержал по два новых ординала над каждым элементом уровня T_α. Пусть теперь ординал α предел и $T\restriction\alpha$ уже построено. Для каждого $x \in T\restriction\alpha$ определим α-ветвь b^α_x в дереве $\mathbf{T}\restriction\alpha$, содержащую x, следующим образом.

Рассмотрим произвольное $x \in T\restriction\alpha$. Пусть $\langle\gamma_\nu\colon \nu < \lambda\rangle$ есть монотонный пересчет множества C_α. Через $\bar\nu(x)$ обозначим наименьший ординал ν такой, что $x \in T\restriction\gamma_\nu$. Построим последовательность $\langle p^x_\nu\colon \bar\nu(x) \leqslant \nu < \lambda\rangle$ элементов множества $T\restriction\alpha$ следующим образом:

$p^x_{\bar\nu(x)}$ есть наименьший (в смысле порядка на ординалах) ординал $y \in T_{\gamma_{\bar\nu(x)}}$ такой, что $x \leqslant_T y$;

$p^x_{\nu+1}$ есть наименьший ординал $y \in T_{\gamma_{\nu+1}}$ такой, что $p^x_\nu \leqslant_T y$.

А если ординал η предел, то

p^x_η есть единственный ординал $y \in T_{\gamma_\eta}$ такой, что для всех $\nu < \eta$ выполняется неравенство $p^x_\nu <_T y$ (если такой y существует).

Если это определение не дает результата, т. е. если p^η_x не определено для некоторого предельного η, то все построение не годится. Предположим, однако, что такой неприятности у нас не произойдет, и покажем, как в этой ситуации нужно строить b^α_x. Положим $b^\alpha_x = \{y \in T\restriction\alpha\colon \exists\nu < \lambda\,(y \leqslant_T p^x_\nu)\}$. Ясно, что b^α_x является α-ветвью в $\mathbf{T}\restriction\alpha$, содержащей x.

Определим теперь T_α следующим образом. Если $\alpha \notin E$, то T_α содержит по одной точке над каждой ветвью b^α_x, $x \in T\restriction\alpha$. Если $\alpha \in E$ и S_α не является максимальной антицепью в $\mathbf{T}\restriction\alpha$, то поступаем аналогично. В противном случае уровень T_α содержит по одной точке над каждой ветвью b^α_x такой, что x лежит над некоторым элементом антицепи S_α.

Построение дерева $\mathbf{T} = \bigcup\limits_{\alpha<\varkappa^+} T_\alpha$ закончено. Осталось лишь проверить, что определение p^x_η возможно для всех x и η. Предположим противное, т. е. определение невозможно для некоторых x и η. Рассмотрим наименьший предельный ординал $\alpha < \varkappa^+$ такой, что для некоторого $x \in T\restriction\alpha$ последовательность $\langle p^x_\nu\colon \bar\nu(x) \leqslant \nu < \lambda\rangle$ не определена. Рассмотрим наименьший (предельный

ординал $\eta < \lambda$ такой, что p^x_η не определено. Поскольку ординал η предел, то γ_η является предельной точкой множества C_α, откуда $\gamma_\eta \notin E$ и $C_{\gamma_\eta} = \gamma_\eta \cap C_\alpha = \{\gamma_\nu\colon \nu < \eta\}$. Значит, если мы определим последовательность $\langle q^x_\nu\colon \bar\nu(x) \leqslant \nu < \eta\rangle$, отправляясь от γ_η, аналогично тому, как была определена последовательность $\langle p^x_\nu\colon \bar\nu(x) \leqslant \nu < \lambda\rangle$, отправляясь от α, то для всех $\nu < \eta$ будет $q^x_\nu = p^x_\nu$. Далее, последовательность $\langle q^x_\nu\colon \bar\nu(x) \leqslant \nu < \eta\rangle$ определяет γ_η-ветвь $b^{\gamma_\eta}_x$, а так как $\gamma_\eta \notin E$, то эта ветвь имеет продолжение на уровне T_{γ_η}. Значит, и последовательность $\langle p^x_\nu\colon \bar\nu(x) \leqslant \nu < \eta\rangle$ имеет продолжение на уровне T_{γ_η}. Таким образом, p^x_η определено, что противоречит выбору η.

Итак, построение $\mathbf{T} = \bigcup\limits_{\alpha<\varkappa^+} T_\alpha$ корректно, и $\mathbf{T}$ является $\varkappa^+$-деревом.

Мы утверждаем, что $\mathbf{T}$ — дерево Суслина. Предположим противное. Пусть $A \subseteq T$ является максимальной антицепью мощности $\varkappa^+$. Множество $C = \{\alpha < \varkappa^+\colon T\restriction\alpha \subseteq \alpha \wedge A \cap \alpha$ является максимальной антицепью в $T\restriction\alpha\}$ будет з. н. о. в $\varkappa^+$. Выберем $\alpha \in C \cap E$ такое, что $A \cap \alpha = S_\alpha$. По построению каждый элемент уровня T_α лежит над некоторым элементом множества $A \cap \alpha$. Значит, $A \cap \alpha$ будет максимальной антицепью в $\mathbf{T}$. Таким образом, $A \cap \alpha = A$ — противоречие. Итак, $\mathbf{T}$ в самом деле оказалось деревом Суслина. □

Замечание. С помощью комбинаторных рассуждений можно доказать в предположении GCH, что из $\square_\varkappa$ следует существование такого стационарного множества $E \subseteq \varkappa^+$, для которого справедливо $\square_\varkappa(E)$ и $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E)$. Таким образом, предположение GCH + $\square_\varkappa$ оказалось достаточно сильным для построения $\varkappa^+$-дерева Суслина. Подробности этого доказательства, основанного на идеях Грегори, появятся в готовящемся переработанном издании книги Девлина [1].

§ 12. Тонкая структура конструктивной иерархии

Для получения более глубоких результатов о конструктивной иерархии (в частности, для доказательства комбинаторного принципа $\square_\varkappa$) требуется более детальное исследование уровней конструктивной иерархии. Это исследование, проведенное Йенсеном, отличается крайней громоздкостью. Однако для того, чтобы применять результаты его теории, вообще говоря, не является обязательным подробное знакомство с деталями. Поэтому мы ограничимся здесь кратким изложением теории Йен-

сена. Подробности читатель найдет в книге Девлина [1]. (Необходимо отметить, что изложение Девлина [1] использует по техническим причинам несколько иное определение конструктивной иерархии, немного отличающееся от принятого здесь. Однако все доказательства можно изменить так, что они подойдут и для иерархии, которую мы рассматриваем здесь. Поэтому мы изложим теорию Йенсена именно для этой иерархии.)

В основе теории тонкой структуры лежит следующая идея. Мы уже видели, что конструктивная иерархия является Σ_1^{ZF} и равномерно $\Sigma_1^{L_\alpha}$ для предельных ординалов $\alpha > \omega$ (лемма 4.1), что Σ_1-подмодели предельных уровней L_α сами изоморфны предельным уровням этой иерархии (лемма 7.1) и что каждый предельный уровень $L_\alpha (\alpha > \omega)$ имеет Σ_1-функцию Скулема, которая является равномерно $\Sigma_1^{L_\alpha}$ (лемма 8.6). Используя эти факты, мы можем с помощью леммы о конденсации получать различные результаты о Σ_1-предикатах над конструктивной иерархией. Однако аналогичные рассуждения для Σ_n-предикатов, вообще говоря, не проходят. В частности, хотя мы и можем построить «Σ_n-функции Скулема» для предельных уровней $L_\alpha (\alpha > \omega)$, но эти функции оказываются весьма сложными объектами, причем их определение не является равномерным (одинаковым для всех предельных α). С другой стороны, многие красивые результаты, относящиеся к Σ_1-предикатам на предельных уровнях L_α, можно практически без всяких изменений перенести на структуры вида $\langle L_\alpha, A\rangle$, где ординал $\alpha > \omega$ пределен, $A \subseteq L_\alpha$ и $A \cap L_\gamma \in L_\alpha$ для каждого $\gamma < \alpha$. Такие структуры $\langle L_\alpha, A\rangle$ называются *доступными*. С помощью теории тонкой структуры установлено, например, что каждый Σ_n-предикат на L_α ($\alpha > \omega$ предельно) эквивалентен (в некотором равномерном смысле) некоторому Σ_1-предикату на подходящей доступной структуре $\langle L_\alpha, A\rangle$. Таким образом, все сводится к изучению доступных структур.

Несколько слов о доступных структурах. Если φ есть Σ_0-предложение языка $\mathscr{L}_{L_\alpha}(\mathring{A})$ (т. е. языка $\mathscr{L}_{L_\alpha}$ с дополнительным унарным предикатом $\mathring{A}$, обозначающим множество A), то $\langle L_\alpha, A\rangle \models \varphi$, если и только если $\langle TC(\mathrm{ran}(\varphi)), A \cap TC(\mathrm{ran}(\varphi))\rangle \models \varphi$. Но для доступных структур $\langle L_\alpha, A\rangle$ и для каждой формулы φ можно показать, что $A \cap TC(\mathrm{ran}(\varphi)) \in L_\alpha$. Поэтому с помощью небольшого изменения доказательств 8.4 и 8.5 можно получить доказательство следующей леммы:

12.1. Лемма. *Предикат истинности* $\langle L_\alpha, A\rangle \models^{\Sigma_1}$ *является равномерно* $\Sigma_1^{\langle L_\alpha, A\rangle}$*-предикатом для доступных структур* $\langle L_\alpha, A\rangle$.

Если понятие Σ_1-функции Скулема для доступных структур $\langle L_\alpha, A\rangle$ ввести аналогично определению Σ_1-функции Скулема для L_α в § 8, то будут справедливыми аналоги лемм 8.1—8.3. Кроме того, используя метод доказательства 8.6, имеем:

12.2. Лемма. *Пусть структура* $\langle L_\alpha, A\rangle$ *доступна. Тогда существует* Σ_1*-функция Скулема для* $\langle L_\alpha, A\rangle$*, являющаяся равномерно* $\Sigma_1^{\langle L_\alpha, A\rangle}$*-функцией.*

Через $h_{\alpha,A}$ мы обозначим каноническую Σ_1-функцию Скулема для $\langle L_\alpha, A\rangle$. Пусть H_i есть каноническая Σ_0-формула языка $\mathscr{L}(\mathring{A})$ такая, что $y = h_{\alpha,A}(i, x)$, если и только если $\exists z \in L_\alpha$ $(\langle L_\alpha, A\rangle \models H_i(\mathring{z}, \mathring{y}, \mathring{x}))$ для любой доступной структуры $\langle L_\alpha, A\rangle$. Правда, мы уже использовали символы H_i, когда речь шла о функциях Скулема h_α. Но это не внесет путаницу в наши обозначения. В самом деле, h_α совпадает с $h_{\alpha,\phi}$, и поэтому новый смысл формул H_i можно рассматривать как обобщение старого. Аналогично § 8 последовательность $\langle H_i : i < \omega\rangle$ рекурсивна, а отношение $H_{\alpha,A}$, определенное эквивалентностью $H_{\alpha,A}(z, y, i, x) \leftrightarrow \langle L_\alpha, A\rangle \models H_i(\mathring{z}, \mathring{y}, \mathring{x})$, является равномерно $\Sigma_1^{\langle L_\alpha, A\rangle}$-отношением для доступных $\langle L_\alpha, A\rangle$. Предикаты H_α из § 8 являются частным случаем $H_{\alpha,\phi}$ предикатов $H_{\alpha,A}$.

Пусть $\alpha > \omega$, $n > 0$. Через ρ_α^n обозначим Σ_n-*проектум* ординала α, т. е. наименьший ординал $\rho \leqslant \alpha$ такой, что существует $\Sigma_n(L_\alpha)$-отображение f, удовлетворяющее равенству $L_\alpha = f'' L_\rho$.

Можно показать, что ρ_α^n совпадает с наибольшим $\rho \leqslant \alpha$ таким, что структура $\langle L_\rho, A\rangle$ доступна для всех $\Sigma_n(L_\alpha)$-множеств $A \subseteq L_\rho$, а также совпадает с наименьшим ρ таким, что $\mathscr{P}(\rho) \cap \Pi\Sigma_n(L_\alpha) \nsubseteq L_\alpha$.

Нетрудно проверить, что $m < n \to \rho_\alpha^n \leqslant \rho_\alpha^m$. По этой причине определяют $\rho_\alpha^0 = \alpha$ для всех α.

Каждому ординалу $\alpha > \omega$ и каждому $n \geqslant 0$ можно сопоставить *стандартный код* A_α^n и *стандартный параметр* p_α^n, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $A_\alpha^n \in \Sigma_n(L_\alpha)$ и $A_\alpha^n \subseteq L_{\rho_\alpha^n}$.

(ii) $A_\alpha^0 = p_\alpha^0 = \varnothing$.

(iii) Для всех $m > 0$ выполняется равенство

$$\Sigma_m\left(\left\langle L_{\rho_\alpha^n}, A_\alpha^n\right\rangle\right) = \mathscr{P}\left(L_{\rho_\alpha^n}\right) \cap \Sigma_{n+m}(L_\alpha).$$

(iv) Пусть $\alpha > \omega$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, структура $\langle L_{\bar\rho}, \bar A\rangle$ доступна, и

$$\pi\colon \langle L_{\bar\rho}, \bar A\rangle \prec_{\Sigma_m} \langle L_{\rho^n_\alpha}, A^n_\alpha\rangle,$$

т. е. π есть $\in$-изоморфизм $L_{\bar\rho}$ в $L_{\rho^n_\alpha}$, сохраняющий истинностное значение всех Σ_m-формул языка $\mathscr{L}_{L_{\bar\rho}}(\mathring{\bar A})$. Тогда существует единственное $\bar\alpha > \bar\rho$ такое, что $\bar\rho = \rho^n_{\bar\alpha}$, $\bar A = A^n_{\bar\alpha}$. Кроме того, существует единственный изоморфизм $\bar\pi \supseteq \pi$ такой, что $\bar\pi\colon L_{\bar\alpha} \prec_{\Sigma_{m+n}} L_\alpha$ и для всех $i \leqslant n$ имеет место:

(a) $\bar\pi(p^i_{\bar\alpha}) = p^i_\alpha$;

(b) $(\bar\pi \restriction L_{\rho^i_{\bar\alpha}})\colon \langle L_{\rho^i_{\bar\alpha}}, A^i_{\bar\alpha}\rangle \prec_{\Sigma_{m+n-i}} \langle L_{\rho^i_\alpha}, A^i_\alpha\rangle$. □

Заметим, что при $n > 0$ по определению проектума ρ^n_α любой $\Sigma_n(L_\alpha)$-предикат на L_α сводится к $\Sigma_n(L_\alpha)$-предикату на $L_{\rho^n_\alpha}$. Следовательно, в силу условия (iii) каждый $\Sigma_n(L_\alpha)$-предикат на L_α кодируется в виде $\Sigma_1(\langle L_{\rho^n_\alpha}, A^n_\alpha\rangle)$-предиката на $L_{\rho^n_\alpha}$. A (iv) дает возможность использовать метод конденсации для доступных структур с помощью введенных выше равномерных Σ_1-функций Скулема $h_{\alpha, A}$.

§ 13. Комбинаторный принцип $\square_\varkappa$

В этом параграфе мы докажем теорему 11.1. Сначала избавимся от необходимости иметь дело со стационарным множеством E в этой теореме.

На протяжении всего доказательства $\varkappa$ обозначает фиксированный бесконечный кардинал. Поскольку $\square_\varkappa$ тривиальным образом истинно (в ZFC) при $\varkappa = \omega$, то мы будем предполагать, что кардинал $\varkappa$ несчетен. (Так или иначе для приложений нам требуется именно результат для несчетных $\varkappa$.)

13.1. Лемма. *Предположим* $\square_\varkappa$. *Тогда найдется такое стационарное множество* $E \subseteq \varkappa^+$, *что* $\alpha \in E \to \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ *и выполняется* $\square_\varkappa(E)$.

Доказательство. Пусть последовательность $\langle A_\lambda\colon \lambda < \varkappa^+$ и λ предельно$\rangle$ обеспечивает $\square_\varkappa$. Пусть B_λ есть совокупность всех предельных точек множества A_λ для каждого $\lambda < \varkappa^+$. Множества B_λ имеют следующие свойства:

(i) B_λ является замкнутым в λ множеством;

(ii) $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega \to B_\lambda$ неограничено в λ;

(iii) $\gamma \in B_\lambda \to B_\gamma = \gamma \cap B_\lambda$;

(iv) $\mathrm{cf}(\lambda) < \varkappa \to |B_\lambda| < \varkappa$.

Поскольку $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega \to \mathrm{otp}(B_\lambda) < \varkappa$, то можно определить разбиение $W = \bigcup_{\nu<\varkappa} W_\nu$ множества $W = \{\alpha < \varkappa^+\colon \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$, положив $W_\nu = \{\lambda \in W\colon \mathrm{otp}(B_\lambda) = \nu\}$. Одно из множеств W_ν, $\nu < \varkappa$, скажем W_{ν_0}, должно быть стационарным, так как само W стационарно (здесь используется лемма 2.2(a) гл. 3). Итак, пусть $E = W_{\nu_0}$ стационарно в $\varkappa^+$. Покажем, что справедливо $\square_\varkappa(E)$.

Определим последовательность $\langle D_\lambda\colon \lambda < \varkappa^+$ и λ предельно$\rangle$ следующим образом:

$$D_\lambda = \begin{cases} B_\lambda, & \text{если } \mathrm{otp}(B_\lambda) \leqslant \nu_0, \\ B_\lambda - \{\alpha \in B_\lambda\colon \mathrm{otp}(B_\alpha) \leqslant \nu_0\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что последовательность множеств D_λ также имеет свойства (i)—(iv); причем $D_\lambda \cap E = \varnothing$ для всех λ.

Теперь определим индукцией по λ последовательность $\langle C_\lambda\colon \lambda < \varkappa^+$ и λ предельно$\rangle$ так, чтобы

$$C_\lambda = \begin{cases} \bigcup \{C_\gamma\colon \gamma \in D_\lambda\}, & \text{если } \sup(D_\lambda) = \lambda, \\ \bigcup \{C_\gamma\colon \gamma \in D_\lambda\} \cup \{\alpha_n\colon n \in \omega\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\langle \alpha_n\colon n \in \omega\rangle$ — какая-нибудь ω-последовательность, конфинальная в λ и такая, что $\alpha_0 = \sup(D_\lambda)$.

Нетрудно проверить, что последовательность множеств C_λ будет $\square_\varkappa$-последовательностью и что каждое D_λ является совокупностью всех предельных точек множества C_λ. Таким образом, последовательность множеств C_λ обеспечивает выполнение $\square_\varkappa(E)$.

Отметим, что в ходе доказательства леммы 13.1 фактически была доказана следующая

13.2. Лемма. *Принцип* $\square_\varkappa$ *эквивалентен существованию последовательности* $\langle B_\lambda\colon \lambda < \varkappa$ *и* λ *предельно*$\rangle$, *обладающей свойствами* (i)—(iv) *из доказательства леммы* 13.1.

Эта лемма дает другую формулировку $\square_\varkappa$, которая, возможно, чаще встречается в литературе.

Определим множество

$$S = \{\alpha\colon \varkappa < \alpha < \varkappa^+ \wedge \alpha \text{ предельно } \wedge L_\alpha \models \text{«}\varkappa \text{ является наибольшим кардиналом»}\}$$

Мы докажем ниже, что существует последовательность $\langle C_\alpha\colon \alpha \in S\rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $C_\alpha \subseteq \alpha$ замкнуто и не ограничено в α;

(ii) $\mathrm{otp}(C_\alpha) \leqslant \varkappa$;

(iii) если γ есть предельная точка множества C_α, то $\gamma \in S$ и $C_\gamma = \gamma \cap C_\alpha$.

Чтобы получить $\square_\varkappa$ из такой последовательности, рассуждаем следующим образом. Пусть C^0_α есть совокупность всех предельных точек множества C_α. Отождествляя замкнутое неограниченное множество S с самим $\varkappa^+$, имеем:

(i) C^0_α является замкнутым подмножеством ординала α;

(ii) если $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, то C^0_α неограничено в α;

(iii) $\mathrm{otp}(C^0_\alpha) \leqslant \varkappa$;

(iv) если $\gamma \in C^0_\alpha$, то $C^0_\gamma = \gamma \cap C^0_\alpha$.

Если кардинал $\varkappa$ регулярен, то из (iii) следует импликация $\mathrm{cf}(\alpha) < \varkappa \to |C^0_\alpha| < \varkappa$, т. е. в силу 13.2 принцип $\square_\varkappa$ доказан. В противном случае положим $\bar{\varkappa} = \mathrm{cf}(\varkappa) < \varkappa$, зафиксируем некоторую непрерывную возрастающую конфинальную в $\varkappa$ последовательность $\langle \theta_\nu \colon \nu \leqslant \bar{\varkappa} \rangle$ предельных ординалов θ_ν и проведем следующие дополнительные рассуждения.

Положим для удобства $\theta_{\bar{\varkappa}} = \varkappa$. Предположим также, что $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = \omega$. Если α таково, что $\theta_\nu < \mathrm{otp}(C^0_\alpha) < \theta_{\nu+1}$, то определим $C^1_\alpha = \{\gamma \in C^0_\alpha \colon \mathrm{otp}(\gamma \cap C^0_\alpha) \geqslant \theta_\nu\}$. Если же таких ν для данного α нет, то $\mathrm{otp}(C^0_\alpha) = \theta_\nu$ для некоторого предельного ординала $\nu \leqslant \bar{\varkappa}$, и мы можем определить $C^1_\alpha = \{\gamma \in C^0_\alpha \colon \exists \tau < \nu (\mathrm{otp}(\gamma \cap C^0_\alpha) = \theta_\tau)\}$. Теперь последовательность $\langle C^1_\alpha \colon \alpha < \varkappa^+ \text{ и } \alpha \text{ предельно} \rangle$ удовлетворяет условию леммы 13.2, и поэтому мы снова имеем $\square_\varkappa$.

Итак, для доказательства $\square_\varkappa$ достаточно построить последовательность $\langle C_\alpha \colon \alpha \in S \rangle$, удовлетворяющую условиям (i)—(iii). Построим такую последовательность с помощью изложенной выше теории тонкой структуры. С этого момента предполагается $V = L$.

Вообще, доказательства, использующие тонкую структуру конструктивной иерархии, часто выглядят длинными и скучными, и следующее доказательство не является исключением. В связи с этим мы опустим ряд деталей с целью ярче продемонстрировать главную идею доказательства. Все же изложение остается весьма тяжелым. Мы сочли возможным поместить этот набросок доказательства среди остального не очень сложного материала нашей статьи, так как доказательства, использующие тонкую структуру, занимают центральное место в современной теории конструктивности, и в связи с этим нужно познакомить читателя хотя бы с идеей одного из таких доказательств. Если у читателя нет намерения тратить слишком много усилий на теорию тонкой структуры, то он может пропустить оставшийся материал этого параграфа без ущерба для понимания последующего изложения.

Пусть $\alpha \leqslant \beta$ — ординалы. Будем говорить, что α *регулярен* в β, если нет определимых в L_β с параметрами из L_β отображений ограниченных подмножеств ординала α на неограниченные подмножества α. Будем говорить, что α является Σ_n-*регулярным* в β (где n — положительное натуральное число), если нет $\Sigma_n(L_\beta)$-отображений ограниченных подмножеств ординала α на неограниченные подмножества α.

Для каждого $\alpha \in S$ пусть:

$\beta(\alpha)$ есть наименьшее β такое, что α не регулярен в β;

$n(\alpha)$ есть наименьшее n такое, что α не является Σ_n-регулярным в $\beta(\alpha)$;

$$\rho(\alpha) = \rho^{n(\alpha)-1}_{\beta(\alpha)}; \quad A(\alpha) = A^{n(\alpha)-1}_{\beta(\alpha)}.$$

Заметим, что α является $\Sigma_{n(\alpha)-1}$-регулярным в $\beta(\alpha)$, но не является $\Sigma_{n(\alpha)}$-регулярным в $\beta(\alpha)$. Поэтому $\rho^{n(\alpha)}_{\beta(\alpha)} \leqslant \alpha \leqslant \rho(\alpha)$ для всех $\alpha \in S$. Нетрудно показать, что на самом деле имеет место $\rho^{n(\alpha)}_{\beta(\alpha)} = \varkappa$ для всех $\alpha \in S$. Это утверждение будет использовано в доказательстве.

Разобьем теперь множество S на два множества: $P = \{\alpha \in S \colon n(\alpha) = 1$ и ординал $\beta(\alpha)$ непределен$\}$ и $R = S - P$. Определение множества C_α зависит от того, будет ли $\alpha \in P$ или $\alpha \in R$.

Определение C_α при $\alpha \in P$ очень простое. Именно, если $\alpha \in P$, то $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, и в качестве C_α мы можем взять любую ω-последовательность, конфинальную в α. (В этом случае C_α вообще не имеет предельных точек, и поэтому больше не о чем беспокоиться.) Равенство $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ для каждого $\alpha \in P$ доказывается следующим образом. Найдется $\Sigma_1(L_{\beta(\alpha)})$-функция, определенная на некотором ограниченном подмножестве ординала α, область всех значений которой неограничена в α. Рассмотрим какое-нибудь $\Sigma_1(L_{\beta(\alpha)})$-определение этой функции в $L_{\beta(\alpha)}$. Переменная, связанная внешним неограниченным квантором этого определения, пробегает совокупность $L_{\beta(\alpha)}$ всех определимых в L_γ с параметрами из L_γ множеств $X \subseteq L_\gamma$, где $\beta(\alpha) = \gamma + 1$. Каждой формуле $\varphi(v_0, v)$ языка $\mathscr{L}$ можно сопоставить «часть» нашего отображения, получающуюся ограничением внешнего неограниченного квантора множеством

$$X_\varphi = \{\{x \in L_\gamma \colon L_\gamma \models_* \varphi(\mathring{x}, \mathring{y})\} \colon y \in L_\gamma\}.$$

Каждая такая «часть», очевидно, определима в L_γ с параметрами из L_γ и поэтому не может быть конфинальной в α, так как $\gamma < \beta$. Но наше отображение, конфинальное в α, является объединением счетного числа «частей» указанного вида. Отсюда мы и заключаем, что $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

Пусть теперь $\alpha \in R$. Положим $\beta = \beta(\alpha)$, $n = n(\alpha)$, $\rho = \rho(\alpha)$, $A = A(\alpha)$. Поскольку либо $n > 1$, либо ординал β предельен, то ρ является предельным. Положим $h = h_{\rho, A}$. Так как $\rho_n \leqslant \varkappa$, то мы можем определить $p = p(\alpha)$ как $<_L$-наимень-

шее $p \in L_\rho$ такое, что $L_\rho = h''(\omega \times (\varkappa \times \{p\}))$, и такое, что $\alpha < \rho \to \alpha = (p)_0$.

Для каждого $\tau \leqslant \rho$ введем функцию h_τ:

$$y = h_\tau(i, x) \leftrightarrow x,\ y \in L_\tau \wedge \exists z \in L_\tau (\langle L_\rho, A\rangle \models H_i(\overset{\circ}{z}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{x})).$$

Ясно, что $h_\tau = h_{\tau, A \cap L_\tau}$ для всех доступных структур $\langle L_\tau, A \cap L_\tau\rangle$.

Определим функцию g из некоторого подмножества ординала $\varkappa$ на α равенством $g(\omega\nu + i) = h(i, \langle \nu, p\rangle)$, если правая часть определена и принадлежит α; в противном случае g не определяется. Ясно, что g имеет равномерное Σ_1-определение следующего вида:

$$\tau = g(\nu) \leftrightarrow \exists z \in L_\rho G(z, \tau, \nu),$$

где G является (равномерно) $\Sigma_0^{\langle L_\rho, A\rangle}(\{p\})$-отношением.

Для каждого $X \subseteq L_\rho$ положим $\alpha_X = \sup(\alpha \cap X)$. Построим функции k: $\theta \to \varkappa$, l: $\theta \to \alpha$, m: $\theta \to \rho$ одновременной индукцией (ординал $\theta \leqslant \varkappa$ будет определен в ходе построения) следующим образом:

$k(\nu)$ есть наименьшее $\tau \in \mathrm{dom}(g)$ такое, что $g(\tau) > l(\nu)$ и $|l(\nu)|^{L_{g(\tau)}} \leqslant \varkappa$;

$$l(\nu) = \alpha_{X_\nu},\ \text{где}\ X_\nu = h''_{m(\nu)}(\omega \times (\varkappa \times \{p\}));$$

$m(0) = \max(\varkappa, \eta + 1)$, где η есть наименьший ординал такой, что $p \in L_{\eta+1}$;

$m(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} m(\nu)$, если правая часть $< \rho$ (в противном случае не определяется), для предельных ординалов λ;

$m(\nu + 1)$ есть наименьшее $\gamma > m(\nu)$ такое, что $g(k(\nu)) < \gamma$, $A \cap L_{m(\nu)} \in L_\gamma$, и

$$l(\nu),\ m(\nu) \in h''_\gamma(\omega \times (\varkappa \times \{p\})),\quad \exists z \in L_\gamma G(z, g(k(\nu)), k(\nu)).$$

Ясно, что это построение заканчивается на первом предельном ординале $\theta \leqslant \varkappa$, для которого $\sup_{\nu<\theta} m(\nu) = \rho$. Таким образом, последовательность $\langle l(\nu)\colon \nu < \theta\rangle$ является непрерывной, возрастающей и конфинальной в α.

Положим $C_\alpha = \{l(\nu)\colon \nu < \theta\}$. Заметим, что $\mathrm{otp}(C_\alpha) = \theta \leqslant \varkappa$. Нужно доказать, что если $\bar\alpha$ является предельной точкой множества C_α, то $\bar\alpha \in R$ и $C_{\bar\alpha} = \bar\alpha \cap C_\alpha$. (Таким образом, удастся избежать рассмотрения случая $\bar\alpha \in P$, когда множество $C_{\bar\alpha}$ определялось совсем другим способом.)

Рассмотрим произвольную предельную точку $\bar\alpha$ множества C_α. Выберем $\lambda < \theta$ такое, что $\bar\alpha = l(\lambda)$. Тогда $l(\lambda) = \sup_{\nu<\lambda} l(\nu)$. В силу определения k нетрудно проверить, что $\bar\alpha \in S$.

(Именно, $l(\nu) < g(k(\nu)) < l(\nu + 1)$ для всех ν.) Оставшаяся часть доказательства основана на принципе конденсации.

Сначала отметим, что $\bar\alpha \subseteq X_\lambda$, так как $\varkappa \subseteq X_\lambda$ и $\nu < \lambda \to |\alpha_{X_\nu}|^{L_{m(\lambda)}} \leqslant \varkappa$. Поэтому, рассматривая $\in$-изоморфизм π: $\langle L_{\bar\rho}, \bar A\rangle \cong \langle X_\lambda, A \cap X_\lambda\rangle$, мы имеем: $\pi\colon \langle L_{\bar\rho}, \bar A\rangle \prec_{\Sigma_1} \langle L_{m(\lambda)}, A \cap L_{m(\lambda)}\rangle$, и π тождественно на $\bar\alpha$.

Поскольку $\pi\colon \langle L_{\bar\rho}, \bar A\rangle \prec_{\Sigma_0} \langle L_\rho, A\rangle$, то существуют и единственны такие $\bar\beta$ и $\bar\pi$, что $\bar\rho = \rho_{\bar\beta}^{n-1}$, $\bar A = A_{\bar\beta}^{n-1}$, $\bar\pi \supseteq \pi$ и $\bar\pi\colon L_{\bar\beta} \prec_{\Sigma_1} L_\beta$ (по меньшей мере). Положим $\bar p = \pi^{-1}(p)$. Поскольку $\bar\pi$ тождественно на $\bar\alpha$, то $\bar\pi(\bar\alpha) = \alpha$. Следовательно, $\bar\alpha < \bar\rho \to \bar\alpha = (\bar p)_0$. Положим $\bar h = h_{\bar\rho, \bar A}$. Ясно, что $\bar h = \pi^{-1} \circ h_{m(\lambda)} \circ \pi$.

Теперь с помощью чисто технических (но не простых) рассуждений (использующих то, что $\bar\pi\colon L_{\bar\beta} \prec_{\Sigma_1} L_\beta$, и т. д.), можно показать, что $\rho_{\bar\beta}^n = \varkappa$, $\bar\beta = \beta(\bar\alpha)$, $\bar n = n(\bar\alpha)$, $\bar p = p(\bar\alpha)$. В частности, $\alpha \in R$. Оказывается, что если определить $\bar g$, $\bar k$, $\bar l$, $\bar m$, отправляясь от $\bar\alpha$, так же, как мы определили g, k, l, m, отправляясь от α, то для всех $\nu < \lambda$ будет $\bar\pi(\bar g(\nu)) = g(\nu)$, $\bar\pi(\bar k(\nu)) = k(\nu)$, $\bar\pi(\bar l(\nu)) = l(\nu)$, и $\bar\pi(\bar m(\nu)) = m(\nu)$. Тем самым, поскольку $\bar\pi$ тождественно на $\bar\alpha$, то $C_{\bar\alpha} = \bar\alpha \cap C_\alpha$, что и требовалось.

Столь сложное определение функций k, l, m необходимо для того, чтобы было возможно доказать все упомянутые утверждения. Ключевым моментом их доказательства является определение отображения g' над структурой $\langle L_{m(\lambda)}, A \cap L_{m(\lambda)}\rangle$ с помощью предиката G. Поскольку $\pi^{-1}{}''g' = g'$ и $k''\lambda \subseteq \mathrm{dom}(g')$, то g' является $\Sigma_1^{\langle L_{\bar\rho}, \bar A\rangle}(\{\bar p\})$-отображением некоторого подмножества ординала α, конфинальным в α. Теперь все нужные равенства обеспечиваются каноническим характером определения различных параметров. (Функция g' оказывается совпадающей с $\bar g$.) Мы опускаем все дальнейшие детали, так как уже должно быть понятно, что это действительно вариант принципа конденсации. (Как в этом, так и в других аспектах наше доказательство является типичным «тонкоструктурным» доказательством.)

Сильвер нашел доказательство $\square_\varkappa$, не использующее теорию тонкой структуры. Это доказательство основано на функциональной иерархии, которая до некоторой степени похожа на иерархию функций Скулема $h_{\alpha, A}$, фигурирующую в нашем доказательстве $\square_\varkappa$. Преимущество этой иерархии, обеспечивающей $\square_\varkappa$, состоит в том, что для ее построения необходимы лишь «элементарные рассмотрения». Сильвер назвал свою иерархию «машиной». С помощью этого метода были доказаны

и другие хорошо известные следствия теории тонкой структуры, помимо $\square_\varkappa$. Оставаясь довольно длинным, доказательство Сильвера все же значительно короче, чем доказательство с помощью тонкой структуры. Кроме того, как мы уже говорили, для его проведения можно ограничиться только стандартными фактами о L, вроде тех, о которых шла речь в начале этой главы. По изложенным причинам метод Сильвера, несомненно, более привлекателен, чем известные доказательства, использующие тонкую структуру. Все, что необходимо для краткого и строгого доказательства, скажем $\square_\varkappa$, этим методом, содержится среди хорошо известных стандартных утверждений о L. Основным недостатком «L-машины» Сильвера является отсутствие для нее такой простой интуитивной мотивировки, какая имеется для теории тонкой структуры. (Помимо этого, метод Сильвера не очень подходит для доказательства более сложных результатов теории тонкой структуры таких, как доказательство гипотезы о n-разрыве, обобщающей теорему Чена о двух кардиналах). По этой причине мы решили изложить доказательство, основанное именно на тонкой структуре. Аналогичное изложение метода Сильвера было бы далеко не столь прозрачным. Тем не менее мы рекомендуем читателю метод Сильвера, если он желает получить сравнительно краткое и строгое доказательство $\square_\varkappa$. К моменту подготовки этой главы к печати метод Сильвера еще не был опубликован. Он будет изложен в готовящемся переработанном издании книги Девлина [1].

§ 14. Слабо компактные кардиналы в L

Определение и элементарные свойства слабо компактных кардиналов см. в § 7 и теореме 6.10 гл. 3. С помощью теории тонкой структуры получим полезную характеризацию слабо компактных кардиналов в L. Сначала отметим, что с помощью небольшого изменения нашего доказательства $\square_\varkappa$ можно получить следующую теорему:

14.1. Теорема (Йенсен). *Предположим, что* $V = L$. *Пусть* $\varkappa$ *— несчетный регулярный кардинал, не являющийся слабо компактным. Тогда найдутся стационарное множество* $E \subseteq \varkappa$ *и последовательность* $\langle C_\lambda : \lambda < \varkappa$ *и* λ *предельно*$\rangle$ *такие, что*:

(i) C_λ *замкнуто и неограничено в* λ;

(ii) *если* $\gamma < \lambda$ *является предельной точкой множества* C_λ, *то* $\gamma \notin E$ *и* $C_\gamma = \gamma \cap C_\lambda$.

Предположение о том, что кардинал $\varkappa$ не является слабо компактным, необходимо в этой теореме, поскольку простое рассуждение (в ZFC) показывает, что если $\varkappa$ слабо компактен, а $E \subseteq \varkappa$ стационарно в $\varkappa$, то найдется такой регулярный кардинал $\lambda < \varkappa$, что $E \cap \lambda$ стационарно в λ. (См. теорему 7.3 гл. 3.) Таким образом, в этом случае последовательностей со свойствами (i) и (ii) не существует. Это замечание дает первую характеризацию слабо компактных кардиналов.

14.2. Теорема (Йенсен). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда несчетный кардинал* $\varkappa$ *является слабо компактным, если и только если для каждого стационарного в* $\varkappa$ *множества* $E \subseteq \varkappa$ *найдется такой предельный ординал* $\lambda < \varkappa$, *что* $E \cap \lambda$ *стационарно в* λ.

С помощью метода вынуждения Кюнен показал, что предположение $V = L$ в этой теореме необходимо. (В том смысле, что нельзя обойтись предположением GCH.)

Простое повторение доказательства 11.3 позволяет получить из 14.1 еще одну теорему:

14.3. Теорема (Йенсен). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда, если несчетный кардинал* $\varkappa$ *регулярен и не является слабо компактным, то существует* $\varkappa$*-дерево Суслина. Следовательно* (*так как слабая компактность влечет отсутствие* $\varkappa$*-деревьев Аронайна*), *несчетный регулярный кардинал* $\varkappa$ *слабо компактен, если и только если нет* $\varkappa$*-деревьев Суслина.*

С помощью теоремы 14.3 можно получить еще несколько эквивалентов слабой компактности в L. Укажем три из них, имеющие отношение к инфинитарной комбинаторике.

Как обычно, через $[X]^n$ обозначим совокупность всех n-элементных подмножеств множества X. Пишем $\varkappa \to (\lambda)^n_\mu$, если для каждой функции (*разбиения*) $f\colon [\varkappa]^n \to \mu$ найдется такое множество $X \subseteq \varkappa$ мощности λ, что образ $f''[X]^n$ является одноэлементным множеством. (Такое X называется *однородным* для разбиения f.) Хорошо известна следующая теорема системы ZFC (теорема 6.10 гл. 3):

14.4. Теорема. *Несчетный кардинал* $\varkappa$ *слабо компактен, если и только если* $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$ *или если и только если* $\forall n \in \omega \forall \mu < \varkappa (\varkappa \to (\varkappa)^n_\mu)$.

Будем писать $\varkappa \to (\lambda)^n_{\mu,\theta}$, если для каждого разбиения $f\colon [\varkappa]^n \to \mu$ найдется такое множество $X \subseteq \varkappa$ мощности λ, что образ $f''[X]^n$ имеет мощность $\leqslant \theta$. Ясно, что если кардинал $\varkappa$ слабо компактен, то $\varkappa \to (\varkappa)^n_{\mu,\theta}$ для всех μ, $\theta < \varkappa$ и $n \in \omega$.

14.5. Теорема (Мартин, Шор). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда регулярный несчетный кардинал* $\varkappa$ *слабо компактен, если и только если* $\varkappa \to (\varkappa)^n_{\mu,\theta}$ *выполняется для некоторых/всех* $n \geqslant 2$ *и* $0 < \theta < \mu < \varkappa$.

Доказательство. Пусть T является $\varkappa$-деревом Суслина. Достаточно для данных кардиналов μ, θ таких, что $0 < \theta <$

$< \mu < \varkappa$, доказать, что $\varkappa \to (\varkappa)^2_{\mu,\theta}$ не выполняется. Мы можем, не ограничивая общности, предполагать, что каждый элемент дерева T имеет не менее чем μ непосредственно следующих за ним элементов. Для каждого $x \in T$ через $S(x)$ обозначим совокупность всех непосредственно следующих за x элементов дерева T и выберем некоторое разбиение f^x: $[S(x)]^2 \to \mu - \{0\}$ такое, что каждый его класс является непустым. Определим разбиение f: $[T]^2 \to \mu$ следующим образом. Если y, $y_1 \in T$ сравнимы в T, то положим $f(\{y_0, y_1\}) = 0$. В противном случае рассмотрим наибольший общий предшественник x элементов y_0, y_1 в T. Выберем такие $x_i \in S(x)$, что $x_i \leqslant_T y_i$, и положим $f(\{y_0, y_1\}) = f^x(\{x_0, x_1\})$. Предположим, что образ $A = f''[X]^2$ некоторого множества $X \subseteq T$ мощности $\varkappa$ имеет мощность не более θ. Поскольку T не имеет антицепей мощности $\varkappa$, то, очевидно, $0 \in A$. Пусть Y есть совокупность всех элементов дерева T, которые либо принадлежат X, либо лежат ниже некоторого элемента множества X. Ясно, что $f''[Y]^2 = A$. Значит, для каждого $y \in Y$ найдется непосредственно следующий за y элемент дерева T, не содержащийся в Y. Множество всех таких элементов, очевидно, образует антицепь в T. Но это невозможно, так как $|Y| = \varkappa$. Таким образом, разбиение f является контрпримером к $\varkappa \to (\varkappa)^2_{\mu,\theta}$. □

Разбиение f: $[\varkappa]^n \to \varkappa$ назовем *разбиением Рассела*, если $f(\sigma) \notin \sigma$ для всех $\sigma \in [\varkappa]^n$. Множество $X \subseteq \varkappa$ называется *свободным* для такого разбиения f, если $f''[X]^n \cap X = \varnothing$. Пишем $(\varkappa, n) \to \lambda$, если каждое разбиение Рассела f: $[\varkappa]^n \to \varkappa$ имеет свободное множество мощности λ. Известно (Эрдёш — Хайнал), что если кардинал $\varkappa$ слабо компактен, то $(\varkappa, n) \to \varkappa$ для всех натуральных n. Это утверждение доказывается очень просто. Пусть f: $[\varkappa]^n \to \varkappa$ — разбиение Рассела. Определим разбиение g: $[\varkappa]^{n+1} \to n+2$, полагая для $x_1 < \ldots < x_{n+1} < x$

$$g(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) = \begin{cases} i, \text{ где } i \text{ есть наименьший из таких индексов,} \\ \text{что } f(\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}\}) = x_i, \\ \text{если такие } i \text{ существуют,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $X \subseteq \varkappa$ является однородным для g множеством мощности $\varkappa$. Ясно, что $g''[X]^{n+1} = \{0\}$ (так как f является функцией). Значит, X свободно для f.

14.6. Теорема (Девлин). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда регулярный несчетный кардинал* $\varkappa$ *является слабо компактным, если и только если* $(\varkappa, 2) \to \varkappa$, *или если и только если* $\forall n \in \omega\, ((\varkappa, n) \to \varkappa)$.

Доказательство. Пусть T есть $\varkappa$-дерево Суслина. Определим разбиение f: $[T]^2 \to T$ следующим образом. Если x, $y \in T$ несравнимы в T, то через $f(\{x, y\})$ обозначаем наибольший общий предшественник x и y в T. В противном случае в качестве $f(\{x, y\})$ возьмем произвольный элемент множества $T - \{x, y\}$. Рассмотрим произвольное свободное для разбиения Рассела f множество $X \subseteq T$. Тогда для каждого $x \in X$, очевидно, найдется непосредственно следующий за ним элемент $x' \in T$ такой, что $\forall y \in T\ (x' \leqslant_T y \to y \notin X)$. Множество $\{x'\colon x \in X\}$ будет антицепью в T. Значит, $|X| < \varkappa$. Таким образом, разбиение f дает контрпример к $(\varkappa, 2) \to \varkappa$. Теперь теорема очевидна. □

Две предыдущие теоремы относятся, собственно, к деревьям Суслина, а не к аксиоме $V = L$. Но следующая теорема имеет непосредственное отношение к конструктивности.

Графом называется структура вида $G = \langle I, C\rangle$, где множество I непусто, а C есть некоторая совокупность неупорядоченных пар элементов множества I, которые (пары) называются *ребрами* графа G. (Если $\{x, y\} \in C$, то говорят, что x и y *соединены* в G.) *Подграфом* графа G называется любая подструктура G в обычном смысле (см. § 6 гл. 3). Если $J \subseteq I$, то $G \restriction J$ обозначает подграф графа G с областью J. Подграф $G \restriction J$ графа G называется *маленьким*, если $|J| < |I|$.

Пусть $G = \langle I, C\rangle$ является графом, а μ — кардинал. Разбиение h: $I \to \mu$ называется *μ-раскраской*, если $h(x) = h(y) \to \{x, y\} \notin C$. Наименьший кардинал μ такой, что G имеет μ-раскраску, называется *хроматическим числом* графа G, $\mathrm{ch}(G)$. Иными словами, $\mathrm{ch}(G)$ есть наименьшее число красок, необходимое для такой раскраски элементов множества I, что любые две соединяющиеся в G точки будут раскрашены в разный цвет.

Через $P(\varkappa)$ обозначим предположение о том, что любой граф G, все маленькие подграфы которого имеют хроматическое число $\varkappa$, сам имеет хроматическое число $\varkappa$. Нетрудно проверить, что $P(\varkappa)$ выполняется для каждого слабо компактного $\varkappa$. При $V = L$ справедливо и обратное:

14.7. Теорема (Шелах). *Предположим, что* $V = L$. *Пусть кардинал* $\varkappa > \omega_1$ *регулярен. Тогда* $P(\varkappa)$ *выполняется, если и только если кардинал* $\varkappa$ *слабо компактен.*

Доказательство. Пусть кардинал $\varkappa > \omega_1$ регулярен, но не является слабо компактным. Согласно 14.1 найдется такое стационарное множество $S \subseteq \varkappa$, что $\alpha \in S \to \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, и $S \cap \lambda$ не является стационарным в λ ни для какого предельного ординала $\lambda < \varkappa$. (Доказательство, которое мы имели в виду в 14.1, дает стационарное множество предельных ординалов счетной конфинальности, хотя мы и не указали этого явно

в 14.1.) Можно, не ограничивая общности, предполагать, что $\beta < \alpha \to \beta + \omega < \alpha$ для всех $\alpha \in S$. А в силу $\diamondsuit_\kappa$ для каждого $\alpha < \kappa$ можно подобрать такое разбиение $\langle B_n^\alpha : n \in \omega\rangle$ ординала α, что для каждого разбиения $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ ординала κ множество

$$\{\alpha < \kappa : \operatorname{cf}(\alpha) = \omega \wedge \forall n \in \omega\,(B_n \cap \alpha = B_n^\alpha)\}$$

стационарно в κ.

Для каждого $\alpha \in S$ выберем такую конфинальную в α ω-последовательность A_α, что $\forall n\,(B_n^\alpha$ неограничено в $\alpha \to A_\alpha \cap B_n^\alpha \neq \varnothing)$. Положим $G = \langle I, C\rangle$, где $I = \kappa$ и $\{\nu, \alpha\} \in C \leftrightarrow \alpha \in S \wedge \nu \in A_\alpha$ для всех $\nu < \alpha < \kappa$.

Сначала докажем, что $\operatorname{ch}(G) \geqslant \omega_1$. Рассмотрим произвольное разбиение $f : \kappa \to \omega$. Пусть $B_n = f^{-1}{}''\{n\}$ для каждого $n \in \omega$. Выберем ординал $\alpha_0 < \kappa$ такой, что $\sup(B_n) < \alpha_0$ для каждого n, удовлетворяющего неравенству $\sup(B_n) < \kappa$. Определим

$$E = \{\alpha \in \kappa : \alpha > \alpha_0 \wedge \forall n\ (B_n \text{ неограничено в } \kappa \to B_n \cap \alpha \text{ неограничено в } \alpha)\}.$$

Множество E, очевидно, замкнуто и неограничено в κ. Поэтому можно выбрать такое $\alpha \in E$, $\operatorname{cf}(\alpha) = \omega$, что $\forall n \in \omega\,(B_n^\alpha = B_n \cap \alpha)$. Поскольку $\alpha \in E$, то $\alpha > \alpha_0$, и тем самым найдется такое n, что $\sup(B_n) = \kappa$ и $f(\alpha) \in B_n$. Тогда B_n^α неограничено в α и, следовательно, $A_\alpha \cap B_n^\alpha \neq \varnothing$. Выберем произвольное $\nu \in A_\alpha \cap B_n^\alpha$. Тогда $f(\nu) = n$ и $\{\nu, \alpha\} \in C$. Таким образом, f не является раскраской графа G.

Теперь докажем, что $\operatorname{ch}(G \restriction \lambda) \leqslant \omega$ для любого $\lambda < \kappa$. Достаточно построить такой пересчет $\langle x_\nu : \nu < \theta\rangle$ ординала λ, что множество $\{\eta < \nu : \{x_\eta, x_\nu\} \in C\}$ конечно для всех $\nu < \theta$. (Имея такой пересчет, мы можем раскрасить $G \restriction \lambda$ с помощью элементарной индукции, используя лишь счетное число красок.) Построение указанного пересчета проходит индукцией по λ. Для $\lambda = 0$ строить нечего. Для непредельных λ индуктивный шаг тривиален. Рассмотрим предельный ординал $\lambda < \kappa$. Пусть $\gamma = \operatorname{cf}(\lambda)$, а $E \subseteq \lambda$ является замкнутым и неограниченным множеством таким, что $\operatorname{otp}(E) = \gamma$ и $E \cap S = \varnothing$. Пусть $\langle \alpha_\nu : \nu < \gamma\rangle$ есть канонический пересчет множества E. Для каждого $\nu < \gamma$ зафиксируем полное упорядочение $<_\nu$ множества $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$, дающее пересчет графа $G \restriction (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu)$ с указанным выше свойством. Определим полное упорядочение (т. е. пересчет) $<_\lambda$ следующим образом: $x <_\lambda y \leftrightarrow \exists \nu < \lambda\,(x <_\nu y$ или $x < \alpha_\nu \leqslant y)$. Это упорядочение и будет искомым для λ. Действительно, пусть $y < \lambda$. Выберем такое ν, что $\alpha_\nu \leqslant y < \alpha_{\nu+1}$. Предположим, что $x <_\lambda y$ и $\{x, y\} \in C$. Если $x < \alpha_\nu$, то $y \in S$ и $x \in A_y$, откуда $y > \alpha_\nu$ и x принадлежит конечному множеству $A_y \cap \alpha_\nu$. Если же $x \geqslant \alpha_\nu$, то $x <_\nu y$, т. е. x принадлежит конечному множеству $\{x <_\nu y : \{x, y\} \in C\}$. Теорема доказана. □

§ 15. Другие результаты

Упомянем еще о нескольких следствиях аксиомы конструктивности. Сначала о некоторых теоретико-модельных следствиях V = L. Поскольку GCH широко используются в теории моделей, то можно было бы ожидать, что V = L дает еще более сильный эффект. Так оно и есть. Из многих известных к сегодняшнему времени результатов наиболее интересные относятся к так называемым теоремам о разрывах. Рассмотрим некоторый фиксированный счетный язык S первого порядка, содержащий выделенный унарный предикат U. Через $\langle \varkappa, \lambda\rangle \to \langle \varkappa', \lambda'\rangle$ обозначается следующее предположение типа теоремы Лёвенгейма — Скулема: каждая S-система $\mathfrak{A}$ такая, что $|\mathfrak{A}| = \varkappa$ и $|U^{\mathfrak{A}}| = \lambda$, элементарно эквивалентна некоторой S-системе $\mathfrak{B}$ такой, что $|\mathfrak{B}| = \varkappa'$ и $|U^{\mathfrak{B}}| = \lambda'$ Известно, что если $\beta \geqslant \omega$ и выполняется GCH, то $\langle \omega_{\alpha+\beta}, \omega_\alpha\rangle \to \langle \omega_\gamma, \omega_\delta\rangle$ для всех γ, δ (старый результат Воота). С другой стороны, на простых примерах можно показать, что если $\beta < \delta$ и $\beta < \omega$, то $\langle \omega_{\alpha+\beta}, \omega_\alpha\rangle \not\to \langle \omega_{\gamma+\delta}, \omega_\gamma\rangle$. Так как $\langle \omega_{\alpha+\beta}, \omega_\alpha\rangle \to \langle \omega_{\alpha+\delta}, \omega_\alpha\rangle$ является частным случаем обычной теоремы Лёвенгейма — Скулема при $\delta \leqslant \beta$, то интересным открытым случаем остается лишь $\langle \omega_{\alpha+n}, \omega_\alpha\rangle \to \langle \omega_{\beta+n}, \omega_\beta\rangle$. Единственный известный положительный результат в предположении GCH дает следующая теорема Чена: если кардинал ω_β регулярен, то $\langle \omega_{\alpha+1}, \omega_\alpha\rangle \to \langle \omega_{\beta+1}, \omega_\beta\rangle$. Однако в предположении V = L удается получить полное решение проблемы:

15.1. Теорема (Йенсен). *Предположим, что* V = L. *Тогда для всех* β, α *и* n *выполняется* $\langle \omega_{\alpha+n}, \omega_\alpha\rangle \to \langle \omega_{\beta+n}, \omega_\beta\rangle$.

Для доказательства «теоремы Чена» в случае сингулярных кардиналов используется только комбинаторный принцип □. Однако все остальные случаи этой теоремы основаны на чрезвычайно громоздком аппарате тонкой структуры. Идея этого аппарата изложена в книге Девлина [1], где рассмотрен простейший случай.

Скажем о нескольких результатах, относящихся к деревьям и L. *κ-деревом Курепы* называется κ-дерево, имеющее не менее κ^+ ветвей. Сильвер установил, что существование таких деревьев нельзя доказать в ZFC, даже предполагая GCH (см. теорему 5.7 гл. 4). Однако в конструктивном универсуме такие деревья являются обычной вещью:

15.2. Теорема (Йенсен). *Предположим, что* $V = L$. *Пусть* $\varkappa$ *— несчетный регулярный кардинал. Тогда существует* $\varkappa$*-дерево Курепы, если и только если* $\varkappa$ *не является невыразимым кардиналом.*

(Кардинал $\varkappa$ называется *невыразимым*, если для каждого разбиения f: $[\varkappa]^2 \to 2$ найдется стационарное однородное множество. Таким образом, невыразимость является усилением слабой компактности. Известно, что она строго сильнее, чем слабая компактность, см. добавление к гл. 3.)

Аксиома конструктивности дает также интересные следствия в области дескриптивной теории множеств. В их основе лежит, как правило, следующая:

15.3. Теорема (Гёдель). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда найдется полное* Δ^1_2*-упорядочение множества* $\mathscr{P}(\omega)$ *по типу* ω_1.

Более подробно обо всех упомянутых результатах см. Девлин [1].

Некоторые современные исследования по теории конструктивности относятся, собственно, не к конструктивному универсуму L, а к взаимоотношениям между V и L. Недостаток места не позволяет нам вдаваться в подробности, но, по-видимому, умеренный подход к аксиоме $V = L$ неприемлем. V либо «очень похоже на L», либо же «очень сильно отличается от L». Некоторые результаты из этой области, принадлежащие Йенсену, мы собираемся изложить в готовящемся переработанном издании книги Девлина [1].

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Весь материал первых двух параграфов этой главы принадлежит Гёделю. Результаты §§ 3—7, несомненно, также были известны Гёделю в той или иной форме. Теоремы о том, что конструктивная иерархия и каноническое полное упорядочение конструктивных множеств являются Σ_1^{ZF}, впервые была сформулирована и доказана в работе Йенсена и Карпа с помощью примитивно рекурсивных теоретико-множественных функций. Представленные здесь варианты доказательств этих результатов принадлежат автору, хотя он далек от мысли настаивать на их оригинальности.

Все результаты §§ 8—15, за несколькими исключениями, принадлежат Йенсену.

ЛИТЕРАТУРА

Девлин (Devlin K.)
1. Aspects of Constructibility. — Berlin: Springer, 1973.

Девлин, Юнсбротен (Devlin K., Johnsbråten H.)
1. The Souslin Problem. — Berlin: Springer, 1974.

Гёдель (Gödel K.)
1. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. — Princeton, 1940. [Русский перевод: Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. — УМН, 1948, 3, № 1, с. 96—149.]

Глава 6

АКСИОМА МАРТИНА

Мэри Эллен Рудин

Аксиома Мартина, обозначаемая MA, имеет несколько формулировок. Например, широко известна топологическая формулировка MA. Довольно часто используется и формулировка в терминах булевых алгебр. Мы дадим формулировку в терминах частично упорядоченных множеств. Эта формулировка в сущности не очень сложна, но необходима для эффективного использования аксиомы Мартина и вводит в технику вынуждения.

Пусть $\langle P, \leqslant \rangle$ есть частично упорядоченное множество. Множество $D \subseteq P$ называется *плотным*, если для каждого $p \in P$ найдется такое $d \in D$, что $d \leqslant p$. Множество $Q \subseteq P$ называется *совместимым*, если для каждого конечного $F \subseteq Q$ найдется такое $q \in P$, что $q \leqslant p$ для всех $p \in F$. Элементы $p, q \in P$ называются *совместимыми*, если найдется такое $r \in P$, что $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$ (т. е. если множество $\{p, q\}$ совместимо). Множество $Q \subseteq P$ называется *попарно несовместимым*, если любые два различных $p, q \in Q$ несовместимы. *Условие счетности цепей* (у. с. ц.) утверждает, что любое попарно несовместимое множество $Q \subseteq P$ не более чем счетно.

Аксиома Мартина MA: Пусть $\langle P, \leqslant \rangle$ есть частично упорядоченное множество, удовлетворяющее у. с. ц., а $\mathscr{D}$ является совокупностью мощности $< 2^\omega$ плотных подмножеств множества P. Тогда найдется такое совместимое множество $Q \subseteq P$, которое непусто пересекается с каждым $D \in \mathscr{D}$.

В § 6 гл. 4 доказана следующая

1. Теорема. *Если теория* ZFC *непротиворечива, то теория* $\mathrm{ZFC} + \mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ *также непротиворечива.*

Известно также, что MA недоказуема в $\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}$.

Мы начнем с того, что получим топологическую формулировку MA из формулировки в терминах частично упорядоченных множеств. (На самом деле обе формулировки эквивалентны.)

Топологическое пространство *удовлетворяет у. с. ц.*, если каждое семейство попарно непересекающихся открытых множеств счетно.

2. Теорема (MA)[1]. *Если компактное хаусдорфово про-*

[1]) Мы пишем «Теорема (MA)», если в доказательстве этой теоремы используется аксиома Мартина.

странство X удовлетворяет у. с. ц., то X не является объединением менее чем 2^{ω} своих нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть $\omega \leqslant \lambda < 2^{\omega}$ и $\{X_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ есть некоторая совокупность нигде не плотных подмножеств компактного хаусдорфова пространства X, удовлетворяющего у. с. ц.

Рассмотрим множество P всех непустых открытых в X множеств, упорядоченное отношением включения: $p \leqslant q$, если $p \subseteq q$. Множество P удовлетворяет у. с. ц., так как X удовлетворяет у. с. ц. Для каждого $\alpha < \lambda$ определим $D_\alpha = \{p \in P\colon \bar{p} \cap X_\alpha = \varnothing\}$. Все D_α плотны в P. Значит, найдется совместимое множество $Q \subseteq P$, пересекающееся с каждым D_α. Поскольку X компактно, то найдется $x \in \bigcap \{\bar{q}\colon q \in Q\}$ ($\bar{q}$ есть топологическое замыкание q). Для каждого $\alpha < \lambda$ существует такое $q \in Q$, что $\bar{q} \cap X_\alpha = \varnothing$. Поэтому $x \notin X_\alpha$. Следовательно, $X \neq \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$. □

В предположении CH теорема 2 превращается в теорему Бэра о категориях.

3. Теорема. *Из* CH *следует* MA.

Доказательство. Пусть $\{D_n\colon n \in \omega\}$ есть некоторая совокупность плотных подмножеств частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant\rangle$. Индукцией по $n \in \omega$ выберем $d_n \in D_n$ так, чтобы $d_n \geqslant d_{n+1}$ для всех n. Тогда $\{d_n\colon n \in \omega\}$ будет совместимым в P множеством, пересекающемся с каждым D_n. □

Еще одно следствие MA, относящееся к частичным порядкам:

4. Теорема (MA + ¬CH). *Если частично упорядоченное множество $\langle P, \leqslant\rangle$ удовлетворяет у. с. ц., а $R \subseteq P$ несчетно, то найдется несчетное совместимое $Q \subseteq R$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $|R| = \omega_1$. ($|X|$ есть мощность множества X.) Положим $G = \{p \in P\colon |\{q \in R\colon p \text{ и } q \text{ совместимы}\}| = \omega\}$. Пусть G^* является максимальным попарно несовместимым подмножеством множества G. Положим $P^* = \{p \in P\colon p \text{ несовместимо ни с одним } q \in G\}$ и $R^* = R \cap P^*$.

Множества G^* и $R - R^*$ счетны, поскольку $\langle P, \leqslant\rangle$ удовлетворяет у. с. ц. Значит, R^* несчетно. Пусть $R^* = \{q_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ есть пересчет множества R^* без повторений.

Рассмотрим совокупность P' всех конечных совместимых в $\langle P, \leqslant\rangle$ множеств $F \subseteq P^*$. Заметим, что если $F \in P'$ и $p \geqslant q$ для всех $p \in F$, то $q \in P^*$. Поэтому множество P', частично упорядоченное обратно включению, удовлетворяет у. с. ц.

Для каждого $\alpha \in \omega_1$ определим $D_\alpha = \{F \in P'\colon F \cap \{q_\beta\colon \beta \geqslant \alpha\} \neq \varnothing\}$.

Если $F \in P'$, то найдется такое $q \in P^*$, что $q \leqslant p$ для всех $p \in F$. Так как q совместимо с несчетным числом элементов q_β, то каждое D_α плотно в P'. Поэтому найдется совместимое в P' множество $Q' \subseteq P'$, которое пересекается с каждым D_α. Таким образом, $Q = \bigcup Q'$ будет искомым несчетным совместимым в P подмножеством множества R. □

Напомним (см. гл. 3), что *деревом Суслина* называется несчетное дерево, не имеющее несчетных цепей и антицепей. В дереве каждое совместимое в смысле обращенного порядка множество является цепью (т. е. его элементы попарно сравнимы порядком дерева). Таким образом, теорема 4 влечет следующую теорему:

5. Теорема (MA + ¬CH). *Не существует деревьев Суслина.*

С помощью дерева Суслина можно построить *континуум Суслина* — связное, линейно упорядоченное пространство, удовлетворяющее у. с. ц., но не сепарабельное (теорема 4.11 гл. 3). Известно, что произведение двух континуумов Суслина не удовлетворяет у. с. ц. MA меняет ситуацию.

6. Теорема (MA + ¬CH). *Произведение любого семейства пространств, удовлетворяющих у. с. ц., само удовлетворяет у. с. ц.*

Доказательство. Несложное рассуждение с помощью Λ-систем (не использующее MA, см. теорему 5.8 гл. 3) позволяет установить, что если произведение не удовлетворяет у. с. ц., то уже произведение некоторой конечной совокупности рассматриваемых пространств не удовлетворяет у. с. ц. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить, что произведение двух удовлетворяющих у. с. ц. пространств само удовлетворяет у. с. ц.

Предположим, что X и Y удовлетворяют у. с. ц., но $\{U_\alpha \times V_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ есть семейство непересекающихся непустых базисных открытых в $X \times Y$ множеств. Рассмотрим совокупность P' всех непустых открытых в X множеств, упорядоченную отношением включения. По теореме 4 найдется несчетное совместимое множество $Q \subseteq \{U_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$. Если U_α и U_β принадлежат множеству Q, то $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ и, следовательно, $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$. Значит, $\{V_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ содержит несчетное семейство непересекающихся открытых множеств, что противоречит у. с. ц. для Y. □

Аксиома Мартина впервые была рассмотрена в работе Мартина и Соловея [1]. Оказалось, что MA имеет место во многих ранее построенных моделях, где нет деревьев Суслина. Я рекомендую читателю превосходное оригинальное изложение MA и ее следствий в названной статье Мартина и Соловея. В этой статье показана приемлемость MA как альтер-

нативы к CH. Многие известные проблемы, разрешимые с помощью CH, оказались разрешимыми с помощью только MA. Нередко именно MA является фактически используемой в том или ином доказательстве частью CH. Почти так же часто утверждение, истинное в предположении CH, оказывается ложным при MA + ¬CH. Поскольку предположение MA + ¬CH не противоречит теории ZFC, то каждое такое утверждение недоказуемо в ZFC.

Конечно, нетривиальное действие MA ограничено только такими кардиналами λ, что $\omega < \lambda < 2^\omega$. Однако именно эти кардиналы часто представляют неприятности для математиков. Специалисты по общей топологии нашли применение MA к многим своим проблемам. Эта область применения аксиомы Мартина подробно рассматривается в гл. 7, и поэтому мы не будем больше останавливаться на многочисленных примерах использования MA в топологии.

Один специалист по анализу, работающий с банаховыми пространствами, задал мне два вопроса: Должно ли компактное хаусдорфово пространство мощности $\leqslant 2^\omega$ быть секвенциально компактным? Должно ли быть метризуемым каждое удовлетворяющее у. с. ц. компактное хаусдорфово пространство с точечно счетным отделяющим семейством открытых F_σ-множеств? Ни один из этих двух вопросов не может быть разрешен в ZFC. Этот специалист уже знает, что в предположении MA + ¬CH ответ на оба вопроса положителен. Специалисты по анализу начинают использовать и признавать MA.

Недавно получено важное следствие MA в алгебре. Именно Шелах доказал, что проблема Уайтхеда неразрешима в ZFC: если выполняется аксиома конструктивности V = L, то каждая W-группа свободна; однако в предположении MA + ¬CH существует W-группа, не являющаяся свободной. Имеется прекрасное изложение проблемы Уайтхеда и ее решения, написанное Эклофом [1] для Amer. Math. Monthly. Поэтому мы опускаем подробности и настоятельно рекомендуем обратиться к этой работе Эклофа.

Мы также рекомендуем прочитать работу Шенфилда [1] из того же журнала, в которой, помимо доказательства многих из доказанных здесь теорем, содержится элегантное, элементарное обсуждение различных аспектов MA.

Данное Шелахом решение проблемы Уайтхеда проливает свет на взаимоотношения между MA + ¬CH и V = L, которые также проявляются в топологии. Грубо говоря, MA + ¬CH делает область между ω и 2^ω «вполне регулярной», в то время как V = L полностью тривиализирует эту область. Так или иначе, эти аксиомы очень различны по своему характеру и часто дают противоположные результаты.

Теперь обратимся к некоторым комбинаторным следствиям MA.

7. Теорема (MA). *Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются семействами мощности $<2^\omega$, состоящими из подмножеств натурального ряда ω. Предположим, что для каждого $B \in \mathscr{B}$ и каждого конечного подсемейства $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ разность $B - \bigcup \mathscr{A}'$ бесконечна. Тогда найдется такое множество $M \subseteq \omega$, что $B - M$ бесконечно для любого $B \in \mathscr{B}$, но $A - M$ конечно для любого $A \in \mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \{A_\alpha: \alpha < \lambda\}$ и $\mathscr{B} = \{B_\alpha: \alpha < \lambda\}$ для некоторого $\lambda < 2^\omega$. Рассмотрим множество $P = \{\langle H, K\rangle: H \subseteq \lambda, H$ конечно и $K \subseteq \lambda, K$ конечно$\}$, упорядоченное следующим образом: $\langle H', K'\rangle \leqslant \langle H, K\rangle$ в P, если и только если $H \subseteq H'$, $K \subseteq K'$ и $(K' - K) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in H} A_\alpha\right)$ пусто.

Любое несчетное подмножество множества P имеет два элемента с одной и той же второй компонентой, скажем, $\langle H, K\rangle$ и $\langle H', K\rangle$. Но $\langle H, K\rangle \geqslant \langle (H \cup H'), K\rangle$ и $\langle H', K\rangle \geqslant \langle (H \cup H'), K\rangle$. Значит, P удовлетворяет у. с. ц.

Для каждого $\alpha < \lambda$ определим $D_\alpha = \{\langle H, K\rangle \in P: \alpha \in H\}$. Для всех $\alpha < \lambda$ и $n \in \omega$ положим $E_{\alpha n} = \{\langle H, K\rangle \in P: |K \cap B_\alpha| > n\}$. Нетрудно проверить, что каждое из множеств D_α и $E_{\alpha n}$ плотно в P. Поэтому найдется совместимое $Q \subseteq P$, непусто пересекающееся с каждым из D_α и $E_{\alpha n}$.

Положим $M = \omega - \bigcup \{K: \langle H, K\rangle \in Q\}$. Рассмотрим произвольное $\alpha < \lambda$. Найдется $\langle H, K\rangle \in Q \cap D_\alpha$. Так как Q совместимо, то для всякого другого $\langle H', K'\rangle \in Q$ найдется такое $\langle H'', K''\rangle \in Q$, что $\langle H'', K''\rangle \leqslant \langle H, K\rangle$ и $\langle H'', K''\rangle \leqslant \langle H', K'\rangle$. Из этих неравенств по определению $\leqslant$ и в силу того, что $\alpha \in H$ (так как $\langle H, K\rangle \in D_\alpha$), получим $K' \cap A_\alpha \subseteq K'' \cap A_\alpha \subseteq K$. Таким образом, $A_\alpha - M \subseteq K$, и поэтому множество $A_\alpha - M$ конечно.

Наконец, для каждого $n \in \omega$ найдется такое $\langle H, K\rangle \in Q$, что $|K \cap B_\alpha| > n$. Значит, разность $B_\alpha - M$ бесконечна для каждого $\alpha < \lambda$. □

Доказательство теоремы 7 является характерным примером доказательства с помощью MA. При $\lambda = \omega$ эта теорема становится хорошо известным фактом, не требующим MA для своего доказательства. Но MA позволяет перенести этот факт на все кардиналы $\lambda < 2^\omega$. Средствами теории ZFC без дополнительных предположений такое обобщение невозможно.

Укажем два следствия теоремы 7, которые, возможно, более известны, чем сама теорема.

8. Следствие (MA). *Пусть $\mathscr{B}$ есть семейство мощности ω_1, состоящее из подмножеств множества ω и такое, что каждое конечное подсемейство $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ имеет бесконечное пересе-*

чение. Тогда найдется такое бесконечное множество $L \subseteq \omega$, *что* $L - B$ *конечно для каждого* $B \in \mathscr{B}$.

Доказательство. Применим теорему 7 к семействам $\mathscr{A}^* = \{(\omega - B)\colon B \in \mathscr{B}\}$ и $\mathscr{B}^* = \{\omega\}$. Получим такое множество $M \subseteq \omega$, что $A - M$ конечно для каждого $A \in \mathscr{A}^*$, но $\omega - M$ бесконечно. Возьмем $L = \omega - M$. □

9. Следствие (МА). *Пусть* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}$ *являются семействами мощности* $< 2^\omega$, *состоящими из подмножеств множества* ω, *причем* $B - \bigcup \mathscr{A}'$ *бесконечно для любого* $B \in \mathscr{B}$ *и любого конечного* $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$. *Тогда найдется такое бесконечное множество* $L \subseteq \omega$, *что* $A \cap L$ *конечно для каждого* $A \in \mathscr{A}$, *но* $B \cap L$ *бесконечно для каждого* $B \in \mathscr{B}$.

Доказательство. В силу теоремы 7 найдется такое $M \subseteq \omega$, что $A - M$ конечно для всех $A \in \mathscr{A}$, а $B - M$ бесконечно для всех $B \in \mathscr{B}$. Определим $L = \omega - M$. Тогда для каждого $B \in \mathscr{B}$ будет $B - M = B - (\omega - L) = L - (\omega - B) = L \cap B$ бесконечно. Аналогично $L \cap A$ конечно для каждого $A \in \mathscr{A}$. □

В свою очередь из следствия 8 вытекает

10. Следствие (МА). *Если* $\lambda < 2^\omega$, *то пространство* 2^λ *секвенциально компактно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное бесконечное подмножество $\{f_n\colon n \in \omega\}$ пространства 2^λ и произвольную предельную точку f этого множества. Докажем, что найдется такое $L \subseteq \omega$, что подпоследовательность $\{f_n\colon n \in L\}$ сходится к f.

Пусть G есть совокупность всех функций $g \subset f$, область определения которых $\operatorname{dom} g$ конечна (ясно, что $\operatorname{dom} g \subseteq \lambda$). Для каждого $g \in G$ положим $B_g = \{n \in \omega\colon g \subseteq f_n\}$. Поскольку $|G| = \lambda$, то посылка следствия 8 соблюдается, и поэтому существует такое бесконечное множество $L \subseteq \omega$, что $L - B_g$ конечно для каждого $g \in G$. Это множество L и будет искомым. □

На самом деле, в следствии 10 пространство 2^λ можно заменить любым компактным хаусдорфовым пространством мощности меньше чем 2^{2^ω} (см. следствие 1 к теореме 1.7 гл. 7).

Следствие 9 также имеет интересное приложение. Пусть F есть совокупность всех функций $f\colon \omega \to \omega$. Для $f, g \in F$ определим $f < g$, если найдется такое $n \in \omega$, что $f(k) < g(k)$ для любого $k > n$. Множество $G \subseteq F$ называется *доминирующим*, если для каждого $f \in F$ найдется такое $g \in G$, что $g > f$. Последовательность $\{f_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ функций $f_\alpha \in F$ называется *лестницей*, если она является доминирующей и $f_\alpha < f_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \lambda$.

11. Следствие (МА). *Каждое доминирующее множество* $G \subseteq F$ *имеет мощность* 2^ω. *Кроме того, существует лестница.*

Доказательство. Пусть $\lambda < 2^\omega$ и $\{f_\alpha\colon \alpha < \lambda\} \subseteq F$. Для каждого $\alpha \in \lambda$ определим $A_\alpha = \{\langle i, j\rangle \in \omega^2\colon j < f_\alpha(i)\}$, а для каждого $i \in \omega$ положим $B_i = \{i\} \times \omega$. Применяя следствие 9, найдем такое множество $L \subseteq \omega^2$, что все пересечения $A_\alpha \cap L$ конечны, а все пересечения $B_i \cap L$ бесконечны. Выберем $f \in F$ так, чтобы $\langle i, f(i)\rangle \in L$ для всех $i \in \omega$. Тогда $f_\alpha < f$ для всех $\alpha < \lambda$. □

Из следствия 11 тривиально вытекает регулярность кардинала 2^ω. Еще одним приложением следствия 9 является следующая

12. Теорема (МА). *Пусть* X *есть множество действительных чисел, имеющее мощность* $< 2^\omega$. *Тогда каждое подмножество множества* X *является* G_δ*-множеством в пространстве* X.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $Y \subseteq X$. Пусть $\{U_n\colon n \in \omega\}$ образует счетную открытую базу для числовой прямой такую, что всякое пересечение бесконечного числа множеств U_n содержит не более одного действительного числа.

Снабдим индексами (возможно, с повторениями) множества $Y = \{y_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ и $X - Y = \{x_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, где $\lambda < 2^\omega$. (Не ограничивая общности, можно предполагать, что множества Y и $X - Y$ непусты.) Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $B_\alpha = \{n \in \omega\colon y_\alpha \in U_n\}$ и $A_\alpha = \{n \in \omega\colon x_\alpha \in U_n\}$. Применим следствие 9 к семействам $\mathscr{A} = \{A_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ и $\mathscr{B} = \{B_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$. Получим такое множество $L \subseteq \omega$, что $L \cap B_\alpha$ бесконечно, а $L \cap A_\alpha$ конечно для всех $\alpha < \lambda$. Для каждого $m \in \omega$ определим $L_m = \bigcup \{U_n\colon n \in L$ и $n \geqslant m\}$. Тогда каждое y_α принадлежит пересечению $\bigcap_{m \in \omega} L_m$, так как $B_\alpha \cap L$ бесконечно, а каждое x_α не принадлежит этому пересечению, поскольку $A_\alpha \cap L$ конечно. Поэтому Y является G_δ-множеством в X. □

Если множество X бесконечно, то мощность совокупности всех G_δ-множеств в X равна 2^ω, а мощность всех вообще подмножеств множества X равна 2^λ, где $\lambda < 2^\omega$ есть мощность X. Таким образом, имеем

13. Следствие (МА). *Если* $\omega \leqslant \lambda < 2^\omega$, *то* $2^\lambda = 2^\omega$.

Следующая теорема относится к тому же типу, что и теорема Бэра о категории:

14. Теорема (МА). *Пусть* $0 < \lambda < 2^\omega$, X *есть пространство со счетной базой, а* $\{X_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ *— семейство нигде не плотных подмножеств пространства* X. *Тогда множество* $\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ *представимо в виде объединения счетного числа нигде не плотных подмножеств пространства* X.

Доказательство. Пусть $\{U_n\colon n \in \omega\}$ является базой пространства X, причем каждый элемент базы имеет бесконеч-

ное число индексов n. Положим $B_n = \{m \in \omega: U_m \subseteq U_n\}$. Для каждого $\alpha < \lambda$ определим $A_\alpha = \{n \in \omega: U_n \cap X_\alpha \neq \varnothing\}$. Применим следствие 9 к семействам $\mathscr{A} = \{A_\alpha: \alpha < \lambda\}$ и $\mathscr{B} = \{B_n: n \in \omega\}$. Получим такое множество $L \subseteq \omega$, что $L \cap B_n$ бесконечно для всех $n \in \omega$, а $L \cap A_\alpha$ конечно для всех $\alpha < \lambda$. Тогда каждое множество $Y_n = X - \bigcup \{U_m: m \in L \text{ и } m > n\}$ будет нигде не плотным, а для каждого $\alpha < \lambda$ найдется такое n, что $X_\alpha \subseteq Y_n$.

Таким образом, множество $X' = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ является объединением счетного числа нигде не плотных множеств $Y_n \cap X'$. □

Замечание. По сути дела, все следствия 8—14 аксиомы Мартина являются следствиями теоремы 7. Ван Дауэн доказал, что из следствия 8 выводится теорема 7 и тем самым результаты 9—14. Для вывода теоремы 7 из следствия 8 определим множество

$$\mathscr{D} = \{[\omega - n]^{<\omega}: n \in \omega\} \cup \{\{s \in [\omega]^{<\omega}: s \cap B \neq \varnothing\}: B \in \mathscr{B}\} \cup \{[\omega - A]^{<\omega}: A \in \mathscr{A}\}$$

где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — семейства из условия теоремы 7, а $[I]^{<\omega}$ есть совокупность всех конечных подмножеств множества I. Применяя следствие 8 к семейству $\mathscr{D}$, получим такое бесконечное множество $L \subseteq [\omega]^{<\omega}$, что $L - X$ конечно для каждого $X \in \mathscr{D}$. Множество $M = \omega - \bigcup L$ будет искомым для семейств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ в смысле теоремы 7.

Известно, что результаты 4—6 и 15—17 не вытекают из следствия 8.

Аксиома Мартина дает интересное следствие в теории меры Лебега. Через $m(X)$ обозначим меру Лебега множества $X \subseteq R$, где R — континуум действительных чисел.

15. Теорема (МА). *Пусть* $0 \leqslant \lambda < 2^\omega$ *и для каждого* $\alpha < \lambda$ *дано множество* $X_\alpha \subseteq R$ *такое, что* $m(X_\alpha) = 0$. *Тогда* $m\left(\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha\right) = 0$.

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует такое множество $Y \subseteq R$, что $m(Y) \leqslant \varepsilon$ и $X_\alpha \subseteq Y$ для всех $\alpha < \lambda$. Тем самым будет доказана теорема.

Определим $P = \{U \subseteq R: U$ открыто и $m(U) < \varepsilon\}$ и упорядочим множество P обратно включению.

Выберем какое-нибудь счетное семейство $\mathscr{B}$ открытых в R множеств, образующее базу топологии R. Пусть $\mathscr{B}^*$ есть совокупность всех конечных объединений элементов множества $\mathscr{B}$.

Если $S \subseteq P$ несчетно, то найдется такое несчетное $S' \subseteq S$ и такое натуральное $n > 0$, что для каждого $U \in S'$ будет $m(U) + 1/n < \varepsilon$. Для каждого $U \in S'$ выберем такое $U^* \subseteq U$, что $U^* \in \mathscr{B}^*$ и $m(U - U^*) \leq 1/2n$. Поскольку S' несчетно, а $\mathscr{B}^*$ счетно, то найдутся такие различные $U, V \in S'$, что $U^* = V^*$. Эти U и V должны быть совместимыми в P, так как $m(U \cup V) < \varepsilon$. Таким образом, наше множество $\langle P, \supseteq\rangle$ удовлетворяет у. с. ц.

Теперь для каждого $\alpha < \lambda$ определим $D_\alpha = \{U \in P: X_\alpha \subseteq U\}$. Это множество, очевидно, плотно в P. Поэтому найдется совместимое множество $Q \subseteq P$, непусто пересекающееся со всяким D_α. Положим $Y = \bigcup Q$. Тогда $X_\alpha \subseteq Y$ для всех $\alpha < \lambda$. Множество Y открыто и поэтому измеримо. Докажем, что $m(Y) \leqslant \varepsilon$. Предположим противное: $m(Y) > \varepsilon$.

Так как пространство R наследственно линделефово, то найдется такое не более чем счетное $Q' \subseteq Q$, что $\bigcup Q' = \bigcup Q = Y$. Далее, согласно предположению $m(Y) > \varepsilon$, найдется конечное $Q'' \subseteq Q'$, удовлетворяющее неравенству $m(\bigcup Q'') > \varepsilon$. Но $Q'' \subseteq Q' \subseteq Q$, а множество Q совместимо. Значит, существует такое $Y' \in P$, что $\bigcup Q' \subseteq Y'$. По определению множества P будет $m(Y') < \varepsilon$ — противоречие. Итак, $m(Y) < \varepsilon$, т. е. множество Y является искомым. □

Из доказанной теоремы нетрудно получить λ-аддитивность меры Лебега. Аналогичный теореме 15 результат справедлив и для идеала множеств первой категории.

Деревом Ароншайна называется всякое дерево мощности ω_1, не имеющее несчетных уровней и несчетных цепей. Таким образом, дерево Суслина — это в точности дерево Ароншайна, не имеющее несчетных антицепей. (См. гл. 3.) Как мы уже отмечали, МА + ¬CH влечет отсутствие деревьев Суслина. Имеет место следующий более сильный результат:

16. Теорема (Баумгартнер; МА + ¬CH). *Каждое дерево Ароншайна является объединением счетного числа своих антицепей.*

(Такие деревья Ароншайна называют особыми.)

Доказательство. Рассмотрим произвольное дерево Ароншайна $\langle T, \leqslant\rangle$. Нашей целью является определить функцию q из множества T в совокупность всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ так, чтобы для любых $s, t \in T$ выполнялась импликация $s < t \to q(s) < q(t)$. Из существования такой функции немедленно следует теорема, так как прообраз $q^{-1}(r) = \{s \in T: q(s) = r\}$ будет антицепью для каждого $r \in \mathbb{Q}$.

Пусть P есть совокупность всех таких функций $f: S \to Q$, область определения которых $S \subseteq T$ конечна и $s < t \to f(s) < f(t)$ для любых $s, t \in S$. Определим $f \geqslant g$, если функция g продолжает f. Для каждого $t \in T$ положим $D_t = \{f \in P: t \in \operatorname{dom} f\}$. Все множества D_t плотны в P, а $|T| = \omega_1$. Значит, если мы докажем, что P удовлетворяет у. с. ц., то получим совместное множество $Q \subseteq P$, непусто пересекающееся с каж-

дым D_t. Тогда найдется функция q: $T \to Q$, продолжающая любую функцию $f \in Q$. Эта функция q и будет искомой.

Осталось проверить, что P в самом деле удовлетворяет у. с. ц. Пусть $\{f_\alpha\colon \alpha < \omega_1\} \subseteq P$ и $S_\alpha = \operatorname{dom} f_\alpha$ для всех $\alpha < \omega_1$. Мы докажем у. с. ц. для P, если найдем такие ординалы $\alpha < \beta < \omega_1$ и такую функцию $f \in P$, что f продолжает как f_α, так и f_β.

В силу теоремы 5.7 гл. 3 найдутся натуральные числа k и n, $k < n$, и несчетное множество $M \subseteq \omega_1$ такие, что:

(a) Если $\alpha \in M$, то множество S_α имеет n элементов: $S_\alpha = \{s_{0\alpha}, s_{1\alpha}, \ldots, s_{n-1\alpha}\}$.

(b) Если $\alpha, \beta \in M$ и $i < k$, то $s_{i\alpha} = s_{i\beta}$.

(c) Если $k \leqslant i < n$, $k \leqslant j < n$; $\alpha, \beta \in M$ и либо $\alpha \neq \beta$, либо $i \neq j$, то $s_{i\alpha} \neq s_{j\beta}$.

Поскольку множество Q счетно, то мы можем сузить множество M (оставив его несчетным!) так, чтобы выполнялось

(d) Если $\alpha, \beta \in M$ и $i < n$, то $f_\alpha(s_{i\alpha}) = f_\beta(s_{i\beta})$.

Далее, поскольку каждый уровень дерева T счетен и у нас уже есть (c), то мы можем еще раз сузить (оставив несчетным) множество M так, что будет выполняться

(e) Если $\alpha, \beta \in M$, $\alpha < \beta$, и $k \leqslant i < n$, $k \leqslant j < n$, то уровень элемента $s_{i\alpha}$ в дереве T предшествует уровню $s_{j\beta}$.

Заметим наконец, что каждое несчетное $T' \subseteq T$ включает несчетную антицепь (так как иначе T' с индуцированным порядком было бы деревом Суслина, а этого не может быть по теореме 5). Поэтому можно еще раз сузить (оставив несчетным) множество M так, чтобы выполнялось

(f) Если $k \leqslant i < n$, то множество $\{s_{i\alpha}\colon \alpha \in M\}$ является антицепью.

Зафиксируем произвольное (строго) счетное $M' \subseteq M$ и используем теорему Рамсея $\omega \to (\omega)^2_2$ (теорема 6.1 гл. 3) для сужения теперь уже множества M'. Пусть $k \leqslant i < n$, $k \leqslant j < n$. Разобьем множество $[M']^2$ на два подмножества: $A = \{\{\alpha, \beta\}\colon \alpha, \beta \in M', \alpha < \beta$ и $s_{\alpha i} < s_{\beta j}\}$ и $B = \{\{\alpha, \beta\}\colon \alpha, \beta \in M', \alpha < \beta$, и $\neg s_{\alpha i} < s_{\beta j}\}$. Заметим, что если $\alpha < \beta < \gamma$ и ординалы α, β, γ принадлежат множеству M, то не может быть $[\{\alpha, \beta, \gamma\}]^2 \subseteq A$. Действительно, если $s_{\alpha i} < s_{\gamma l}$ и $s_{\beta i} < s_{\gamma j}$, то, согласно (e), будет $s_{\alpha i} < s_{\beta j}$, что противоречит (f). Значит, по теореме Рамсея найдется такое бесконечное множество $M'' \subseteq M'$, что $[M'']^2 \subseteq B$.

Проделаем последовательно указанные сужения нашего множества M' для всех пар натуральных чисел i, j таких, что $k \leqslant i < n$ и $k \leqslant j < n$. В результате получим бесконечное множество $M^* \subseteq M$ такое, что для всех принадлежащих M^* ординалов $\alpha < \beta$ и всех натуральных i, j, удовлетворяющих неравенствам $k \leqslant i < n$ и $k \leqslant j < n$, будет выполняться $\neg s_{\alpha i} < s_{\beta j}$.

Возьмем произвольные ординалы $\alpha < \beta$ из M^*. По выбору M^* и в силу (b)—(d) функция f, определенная на множестве $S_\alpha \cup S_\beta$ условиями $f(s) = f_\alpha(s)$ при $s \in S_\alpha$ и $f(s) = f_\beta(s)$ при $s \in S_\beta$, определена корректно, принадлежит множеству P и продолжает как f_α, так и f_β. □

Похожим образом (но с другим доказательством у. с. ц.) можно в предположении MA + $\neg$CH доказать, что каждое дерево Ароншайна $\langle T, \leqslant\rangle$ нормально в смысле топологии, индуцированной всеми множествами вида $\{x \in T\colon s < x \leqslant t\}$, где $s < t$ в T.

Закончим эту главу одним комбинаторным результатом. Семейство $\mathscr{A}$ множеств называется *почти дизъюнктным*, если пересечение двух различных множеств из этого семейства конечно.

17. Теорема (Уэдж; MA). *Пусть кардинал $\varkappa$ регулярен и $\omega < \varkappa \leqslant \lambda < 2^\omega$. Тогда для каждого почти дизъюнктного семейства $\mathscr{A}$ мощности λ, состоящего из счетных множеств $A \subseteq \varkappa$, найдется такое множество $B \subseteq \varkappa$ мощности $\varkappa$, что семейство $\mathscr{A} \cup \{B\}$ также будет почти дизъюнктным.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \{A_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$. Рассмотрим множество $P = \{\langle H, K\rangle\colon H \subseteq \mathscr{A}$, H конечно и $K \subseteq \varkappa$, K конечно$\}$, упорядоченное следующим образом: $\langle H, K\rangle \geqslant \langle H', K'\rangle$ в P, если $H \subseteq H'$, $K \subseteq K'$, и $(K' - K) \cap (\bigcup H) = \varnothing$.

Покажем, что это P удовлетворяет у. с. ц. Пусть множество $\{\langle H_\alpha, K_\alpha\rangle\colon \alpha < \omega_1\} \subseteq P$ несчетно. Используя теорему 5.7 гл. 3 о Δ-системах, можно подобрать: несчетное $M \subseteq \omega_1$, натуральное n и множества $H \subseteq \mathscr{A}$ и $K \subseteq \varkappa$ так, что для любых различных $\alpha, \beta \in M$ будет $H_\alpha \cap H_\beta = H$ и $K_\alpha \cap K_\beta = K$, и для любого $\alpha \in M$ множество $K_\alpha - K$ содержит ровно n элементов.

Заметим, что множества $K_\alpha - K$ ($\alpha \in M$) попарно не пересекаются, а семейство $\{\bigcup (H_\alpha - H)\colon \alpha \in M\}$ почти дизъюнктно. Пусть множество $C \subseteq M$ бесконечно, но счетно. Поскольку каждое $\bigcup H_\alpha$ счетно, а множества $K_\alpha - K$ ($\alpha \in M$) попарно не пересекаются, то найдется множество $L \subseteq M$ такое, что $|L| > n$ и $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in C} (\bigcup H_\alpha)\right) \cap \left(\bigcup\limits_{\beta \in L} K_\beta - K\right) = \varnothing$. Далее, существуют такие $\alpha \in C$ и $\beta \in L$, что $(K_\alpha - K) \cap (\bigcup (H_\beta - H)) = \varnothing$, так как $|L| > n$, $|K_\alpha - K| = n$ для всех $\alpha \in M$, а семейство $\{\bigcup (H_\beta - H)\colon \beta \in L\}$ почти дизъюнктно. Таким образом, мы получим $\langle H_\alpha, K_\alpha\rangle \geqslant \langle (H_\alpha \cup H_\beta), (K_\alpha \cup K_\beta)\rangle$ и $\langle H_\beta, K_\beta\rangle \geqslant \langle (H_\alpha \cup H_\beta), (K_\alpha \cup K_\beta)\rangle$. Следовательно, P удовлетворяет у. с. ц.

Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $X_\alpha = \{\langle H, K\rangle \in P : A_\alpha \in H\}$, а для каждого $\beta < \varkappa$ положим $Y_\beta = \{\langle H, K\rangle \in P : (\varkappa \dot{-} \beta) \cap K \neq \varnothing\}$. Множества X_α и Y_β плотны в P для всех $\alpha < \lambda$ и $\beta < \varkappa$. Значит, найдется совместимое множество $Q \subseteq P$, непусто пересекающееся с каждым X_α и с каждым Y_β. Положим $B = \bigcup \{K \subseteq \varkappa : \langle H, K\rangle \in Q\}$. Тогда $|B| = \varkappa$, так как $Q \cap Y_\beta \neq \varnothing$ для всех $\beta < \varkappa$. Если $\alpha < \lambda$, то существует $\langle H, K\rangle \in Q \cap X_\alpha$. Для любого другого $\langle H', K'\rangle \in Q$ найдется такое $\langle H'', K''\rangle \in P$, что $\langle H, K\rangle \geqslant \langle H'', K''\rangle$ и $\langle H', K'\rangle \geqslant \langle H'', K''\rangle$. Тогда $K' \cap A_\alpha \subseteq K$, поскольку $(K'' - K) \cap \cap A_\alpha = \varnothing$ и $K' \subseteq K''$. Таким образом, $B \cap A_\alpha \subseteq K$, т. е. множество $B \cap A_\alpha$ конечно. □

Какой же вывод можно сделать из всех этих довольно разнородных теорем относительно того, когда использование аксиомы Мартина приносит пользу? В топологии MA + ¬CH применяется для построения различных специальных нормальных пространств. MA можно использовать для устранения определенных патологий в пространствах, удовлетворяющих у. с. ц. MA также позволяет решить многие проблемы, относящиеся к компактным хаусдорфовым пространствам. Например, многие известные теоремы о стоун — чеховской компактификации βN натурального ряда N, доказанные в предположении CH, можно в более общем виде доказать с использованием только MA. Теоремы теории меры, классически справедливые для счетных семейств множеств, с помощью MA могут быть доказаны для произвольных семейств мощности $< 2^\omega$. То же касается и свойства Бэра. Вообще, если мы умеем доказывать некоторую теорему для счетных семейств, а хотим доказать ее для произвольной мощности $\lambda < 2^\omega$, то использование MA может дать желаемый результат. Основная трудность при этом заключается, как правило, в том, чтобы доказать у. с. ц. для соответствующего естественно возникающего частично упорядоченного множества. Если такое доказательство не удается, то MA применять нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

Мартин, Соловей (Martin D. A., Solovay R. M.)
1. Internal Cohen extensions. — Ann. Math. Logic, 1970, **2**, p. 143—178.
Шенфилд (Shoenfield J.)
1. Martin's axiom. — Amer. Math. Monthly, 1975, **82**, № 6, p. 610—617.
Эклоф (Eklof P. S.)
1. Whitehead's problem is undecidable. — Amer. Math. Monthly, 1976, **83**, № 10, p. 775—788.

Глава 7

РЕЗУЛЬТАТЫ О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ В ТОПОЛОГИИ

И. Юхас

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 213
§ 1. Приложения аксиомы Мартина 214
§ 2. Комбинаторные принципы, истинные в L 219
Литература 233

Введение

Не стоит удивляться тому, что развитие теории множеств отразилось и на топологии. Это развитие затронуло как теорию наиболее известных топологических пространств вроде континуума действительных чисел, так и общую теорию топологических пространств. Наиболее интересные результаты в первой области касаются дескриптивной теории множеств — о них пойдет речь в главе 8. Целью же этой главы является изложение результатов второго типа.

Мы будем иметь дело главным образом с некоторыми теоретико-множественными предположениями вроде аксиомы Мартина, принципа $\diamondsuit$ и т. п., непротиворечивость которых была установлена в работах по теории множеств и которые, собственно, пришли в топологию из теории множеств. Мы покажем, как эти предположения используются для доказательства топологических теорем или для построения контрпримеров. В то же время мы не будем доказывать непротиворечивость этих предположений. Такой подход не содержит ничего странного или нового. Достаточно вспомнить, что многие следствия континуум-гипотезы были получены еще тогда, когда ее непротиворечивость вообще не была установлена.

Можно указать несколько причин, по которым такой подход привлекает топологов. Прежде всего, получаются красивые результаты, приносящие эстетическое удовлетворение знатокам теоретико-множественных методов в топологии. Кроме того, вся совокупность полученных на этом пути результатов, вероятно, приведет к лучшему пониманию «природы» самой теории множеств.

Мы придерживаемся обозначений главы 3 и книги Юхаса [1] с единственным исключением: *тесноту* будем обозначать $t(X)$ вместо $\partial(X)$. Введем следующее определение. *π-характером* $\pi\chi(p, X)$ точки p в пространстве X назовем наименьшую мощность такого семейства $\mathscr{P}$ непустых открытых в X множеств, что каждая окрестность точки p содержит некоторое множество из $\mathscr{P}$. (Отметим, что глобальным аналогом такого семейства $\mathscr{P}$ является *π-база*, т. е. такое семейство непустых открытых в X множеств, что каждое непустое открытое в X множество содержит подмножество из этого семейства. Соответственно глобальным аналогом π-характера является π-вес $\pi(X)$ пространства X, определяемый как наименьший кардинал, являющийся мощностью какой-нибудь базы для X.)

Будем говорить, что пространство является $\varkappa$-бэровским, если его нельзя представить в виде объединения менее чем $\varkappa$ своих нигде не плотных подмножеств. 2^ω-бэровские пространства называются также сильно бэровскими.

§ 1. Приложения аксиомы Мартина

1.1. π-полнота. Как известно (см., например, Мартин и Соловей [1]), аксиома Мартина MA эквивалентна предположению о том, что каждое компактное T_2-пространство со свойством Суслина является сильно бэровским, т. е. не представимо в виде объединения менее чем 2^ω своих нигде не плотных подмножеств. Оказывается, в этом утверждении компактность можно заменить некоторым более общим свойством «полноты». Впрочем, в этом нет ничего удивительного, так как вообще свойство Бэра относится скорее к полноте, чем к компактности.

Свойством полноты, которое мы собираемся определить, обладают, например, все полные по Чеху пространства, а также все почти субкомпактные пространства (см. Аартс и Лютцер [1]). Напомним, что если $\mathscr{F}$ есть база фильтра в пространстве X и для любых F_1, $F_2 \in \mathscr{F}$ найдется такое $F \in \mathscr{F}$, что $\overline{F} \subseteq \operatorname{int}(F_1 \cap F_2)$, то база фильтра $\mathscr{F}$ называется *регулярной*.

Определение. Регулярное пространство X называется *π-полным*, если найдется такое $\lambda < 2^\omega$ и такое семейство $\{\mathscr{P}_\alpha: \alpha < \lambda\}$ π-баз, что для каждой регулярной базы фильтра $\mathscr{F} \subseteq \bigcup\{\mathscr{P}_\alpha: \alpha < \lambda\}$, имеющей мощность $< 2^\omega$ и непусто пересекающейся с каждым $\mathscr{P}_\alpha$, будет $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$.

Замечание. Ограничение регулярными пространствами несущественно. Все изложенные ниже результаты остаются в силе и для нерегулярных пространств, если вместо π-баз рассматривать такие семейства непустых открытых множеств,

что каждое непустое открытое множество содержит замыкание некоторого множества из данного семейства.

1.2. Теорема (MA). *Каждое π-полное пространство X со свойством Суслина (т. е. $c(X) = \omega$) является сильно бэровским.*

Доказательство. Пусть $\lambda < 2^\omega$ и семейство π-баз $\{\mathscr{P}_\alpha: \alpha < \lambda\}$ таково, как указано в определении π-полноты. Рассмотрим множество $\mathscr{P} = \bigcup\{\mathscr{P}_\alpha: \alpha < \lambda\}$, упорядоченное следующим образом: $P < Q$, если $\overline{P} \subseteq Q$ и $P \neq Q$. Ясно, что частично упорядоченное множество $\langle P, < \rangle$ удовлетворяет у. с. ц.

Пусть теперь $\varkappa < 2^\omega$ и $\{A_\xi: \xi < \varkappa\}$ есть семейство нигде не плотных в X множеств. Нужно доказать, что $X \neq \bigcup\{A_\xi: \xi < \varkappa\}$. Для всех $\alpha < \lambda$ и $\xi > \varkappa$ положим

$$D_{\alpha\xi} = \{p \in \mathscr{P}_\alpha: P \cap A_\xi = \varnothing\}.$$

Нетрудно проверить, что каждое $D_{\alpha\xi}$ плотно в частично упорядоченном множестве $\langle \mathscr{P}, < \rangle$. Поэтому в силу MA найдется генерическое (см. главу 4) множество $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}$, непусто пересекающееся с каждым $D_{\alpha\xi}$. Генеричность в $\langle \mathscr{P}, < \rangle$, очевидно, означает, что $\mathscr{G}$ является регулярной базой фильтра в X. Кроме того, $\mathscr{G}$ пересекается с каждым $\mathscr{P}_\alpha$ и содержит для каждого $\xi < \varkappa$ элемент, не пересекающийся с множеством A_ξ. Теперь применение теоремы Скулема — Лёвенгейма (см. главу 2 «Теория моделей») к структуре $\langle \mathscr{P}, (D_{\alpha\xi})_{\alpha<\lambda,\, \xi<\varkappa} \rangle$ даст регулярную базу фильтра $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, имеющую все перечисленные свойства семейства $\mathscr{G}$ и имеющую мощность $|\mathscr{F}| < 2^\omega$. По определению π-полноты получим $\varnothing \neq \bigcap \mathscr{F} \subseteq X - \bigcup\{A_\xi: \xi < \varkappa\}$, откуда и следует теорема. □

Отметим, что если $2^\omega = \omega_1$ (т. е. выполняется континуум-гипотеза CH), то теорема верна даже без предположения $c(X) = \omega$.

Следствие (MA). *Если пространство X является π-полным и $c(X) = \omega$, то X^ω является сильно бэровским пространством.*

Доказательство. Пусть $\{\mathscr{P}_\alpha: \alpha < \lambda\}$ есть соответствующее семейство π-баз для X. Если $\alpha < \lambda$ и $n \in \omega$, то пусть $\mathscr{P}_{\alpha n}$ есть совокупность всех элементарных открытых подмножеств произведения X^ω, имеющих вид

$$\bigcap\{\pi_i^{-1}(P_i): i \in I\},$$

где $n \subseteq I$, $I \in [\omega]^{<\omega}$ и $P_i \in \mathscr{P}_\alpha$ для каждого $i \in I$. Каждое семейство $\mathscr{P}_{\alpha n}$ является π-базой для X^ω, причем из определений нетрудно получить, что если $\mathscr{F} \subseteq \bigcup\{\mathscr{P}_{\alpha n}: \alpha < \lambda \text{ и } n \in \omega\}$ является регулярной базой фильтра, имеет мощность $< 2^\omega$ и $\mathscr{F} \cap \mathscr{P}_{\alpha n} \neq \varnothing$ для всех α и n, то семейство $\mathscr{F}_n = \{\pi_n(P): P \in \mathscr{F}\}$ будет регулярной базой фильтра, включенной в $\bigcup\{\mathscr{P}_\alpha: \alpha < \lambda\}$, непусто пересекающейся с каждым $\mathscr{P}_\alpha$ и имеющей мощность $< 2^\omega$. Сле-

довательно, $\bigcap \mathcal{F}_n = \bigcap \{\pi_n(P): P \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$ для каждого $n \in \omega$, откуда $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$. Это рассуждение показало, что пространство X^ω является π-полным. Согласно теореме 6 гл. 6 мы имеем $c(X^\omega) = \omega$, так как $c(X) = \omega$. Теперь осталось применить теорему 1.2.

Следующая теорема не использует MA и поэтому имеет самостоятельный интерес.

1.3. Теорема. *Пусть X — произвольное пространство, а $\varkappa$ является бесконечным кардиналом. Если X^ω является $\varkappa$-бэровским пространством и $\pi(X) < \varkappa$, то $d(X) = \omega$, т. е. пространство X сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ есть π-база мощности $< \varkappa$ пространства X. Для каждого $P \in \mathcal{P}$ введем семейство $\mathcal{G}_P$ всех элементарных подмножеств пространства X^ω, одна из проекций которых совпадает с P:

$$\mathcal{G}_P = \Big\{ \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(G_i): I \in [\omega]^{<\omega} \cap \forall i \in I\,(G_i \text{ открыто в } X) \wedge \exists i \in I\,(G_i = P) \Big\}.$$

Ясно, что каждое семейство $\mathcal{G}_P$ будет π-базой для X^ω. Значит, множество $D_P = \bigcup \mathcal{G}_P$ открыто и плотно в X^ω. Но X^ω является $\varkappa$-бэровским. Отсюда $D = \bigcap \{D_P: P \in \mathcal{P}\} \neq \varnothing$. Возьмем произвольное $x \in D$. Докажем, что множество $S = \{\pi_n(x): n \in \omega\}$ плотно в X. В самом деле, рассмотрим какое-нибудь непустое открытое $G \subseteq X$. Найдется такое $P \in \mathcal{P}$, что $P \subseteq G$. А поскольку $x \in D_P$, то найдется такое $n \in \omega$, что $\pi_n(x) \in P \subseteq G$. Плотность множества S в X доказана. Следовательно, $d(X) = \omega$. □

Следствие (MA). *Если пространство X является π-полным, $c(X) \neq \omega$ и $\pi(X) < 2^\omega$, то $d(X) = \omega$.*

Доказательство. Немедленно следует из следствия 1.2 и теоремы 1.3. □

1.4. Замечание. Последний результат служит основанием для многих теорем следующего вида: из MA + ¬CH следует, что если пространство X полно, имеет свойство Суслина и имеет «небольшие» локальные характеры, то X сепарабельно (см. Хайнал и Юхас [1], Шапировский [1], Толл [1]). К этому же классу теорем относится следующая теорема. Вывод этой теоремы из следствия к теореме 1.3 включает рассуждения чисто технического плана, и поэтому мы опускаем доказательство.

Теорема (MA). *Пусть пространство X таково, что:*
(i) *каждое его замкнутое подпространство π-полно;*
(ii) $c(X) = \omega$;
(iii) $t(X)^+ < 2^\omega$ *и* $\pi\chi(p, X) < 2^\omega$ *для всех* $p \in X$.
Тогда X сепарабельно.

Полные по Чеху пространства являются примерами пространств, удовлетворяющих условию (i). Шапировский доказал [1]), что для компактных пространств X выполняется $\pi\chi(X) \leqslant t(X)$. Поэтому из сформулированной теоремы следует, что если в предположении MA + ¬CH пространство X компактно, имеет свойство Суслина и удовлетворяет равенству $t(X) = \omega$, то X сепарабельно. Неизвестно, можно ли заменить в этом утверждении $t(X) = \omega$ на $\pi\chi(X) = \omega$.

По-видимому, для получения всех предыдущих результатов требуется «полная сила» аксиомы Мартина. Напротив, несколько следующих утверждений используют одно комбинаторное следствие MA, которое, как известно, слабее, чем MA (см. Кюнен и Толл [1]).

Напомним (следствие 8 гл. 6), что следующий комбинаторный принцип является следствием MA:

(*) Если семейство $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ имеет мощность $< 2^\omega$ и для каждого конечного $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ выполняется $|\bigcap \mathcal{A}'| = \omega$, то найдется такое бесконечное множество $S \subseteq \omega$, что $S - A$ конечно при любом $A \in \mathcal{A}$ (иными словами, S почти включено в каждое из множеств $A \in \mathcal{A}$).

Из этого принципа немедленно следует

1.5. Теорема (MA; см. Хехлер [1]). *Пусть $\mathcal{U}$ является открытым покрытием некоторого сепарабельного и счетно компактного пространства X, причем $|\mathcal{U}| < 2^\omega$. Тогда найдется такое конечное подмножество $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, что множество $\bigcup \mathcal{V}$ плотно в X.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{U}$ не имеет конечного подсемейства с плотным объединением. Возьмем произвольное счетное плотное в X множество $S \subseteq X$. Тогда семейство

$$\mathcal{A} = \{S - U: U \in \mathcal{U}\}$$

подмножеств множества S, очевидно, таково, что пересечение любого конечного числа элементов семейства $\mathcal{A}$ бесконечно. Значит, вследствие (*) существует такое бесконечное множество $C \subseteq S$, что $C - (S - U) = C \cap U$ конечно для каждого $U \in \mathcal{U}$. Это означает, что C не имеет предельных точек в пространстве X, так как $\mathcal{U}$ является покрытием. Получилось противоречие со счетной компактностью. □

Из доказанной теоремы вытекает следующая теорема В. Вейсса, особенно интересная в сопоставлении с одим из последующих результатов.

1.6. Теорема (MA + ¬CH). *Каждое счетно компактное, совершенное и регулярное пространство X компактно.*

---

[1]) ДАН СССР, 1975, 223, № 4, с. 799—802. — *Прим. перев.*

Доказательство. Конечно, достаточно доказать, что наше пространство X является линделефовым. Предположим противное: X не линделефово. Известно (см., например, Стефенсон [1]), что совершенное счетно компактное пространство имеет счетный спрэд, и, таким образом, $s(X) = \omega$. Так как X не является линделефовым, то найдется справа разделенное множество $R = \{p_\xi: \xi < \omega_1\}$ типа ω_1. (Разделенность справа означает, что пересечение $\{p_\xi: \xi \geqslant \eta\}$ с замыканием $\{p_\xi: \xi < \eta\}$ пусто для любого $\eta < \omega_1$.) Это множество R наследственно сепарабельно, поскольку $s(X) = s(R) = \omega$, см. Юхас [1]. Для каждого $\xi < \omega_1$ можно подобрать окрестность U_ξ точки p_ξ в X так, чтобы $p_\eta \notin \overline{U}_\xi$ для всех $\eta > \xi$ (при этом принимается во внимание также регулярность пространства X). Открытое множество $G = \bigcup \{U_\xi: \xi < \omega_1\}$ является F_σ-множеством, так как X совершенно. Пусть $G = \bigcup \{F_n: n \in \omega\}$, где каждое F_n замкнуто. Найдется такое $n_0 \in \omega$, что пересечение $R \cap F_{n_0}$ несчетно.

Рассмотрим множество $Z = \overline{R} \cap F_{n_0}$. Z будет счетно компактным, так как замкнуто в X, и Z будет сепарабельным, так как сепарабельно его плотное подмножество $R \cap F_{n_0}$. Наконец, семейство $\mathcal{U} = \{U_\xi: \xi < \omega_1\}$ образует открытое покрытие множества Z, причем $|\mathcal{U}| < 2^\omega$. Поэтому можно применить теорему 1.5 и подобрать конечное подсемейство

$$\mathcal{V} = \{U_{\xi_1}, \ldots, U_{\xi_n}\} \subseteq \mathcal{U} \text{ такое, что } Z \subseteq \bigcup_{1 \leqslant k < n} \overline{U}_{\xi_k}.$$

Но если ξ_j есть наибольший из всех ординалов ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$, то указанное объединение не содержит точек p_η с $\eta > \xi_j$. С другой стороны, в силу выбора n_0 это объединение включает несчетное множество $R \cap F_{n_0}$ — противоречие. □

Комбинаторный принцип (*) влечет некоторые следствия совершенно иной природы. Например, имеет место следующая теорема Малыхина и Шапировского [1].

1.7. Теорема (MA). *Пусть X — произвольное пространство, а $p \in X$ и $S \subseteq X$ таковы, что $|S| = \omega$ и $p \in \overline{S} - S$. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:*

(i) $\chi(p, \overline{S}) < 2^\omega$;

(ii) *пространство X регулярно, счетно компактно и $\psi(p, \overline{S}) < 2^\omega$.*

Тогда найдется последовательность точек множества S, сходящаяся к p.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $X = \overline{S}$. Пусть $\mathcal{U}$ есть система окрестностей точки p в X, имеющая мощность $< 2^\omega$ и такая, что:

если выполняется (i), то $\mathcal{U}$ образует базу окрестностей точки p;

если выполняется (ii), то $\bigcap \{\overline{U}: U \in \mathcal{U}\} = \{p\}$.

Определим семейство $\mathcal{A}$ подмножеств S следующим образом: $\mathcal{A} = \{U \cap S: U \in \mathcal{U}\}$ в случае (i) и $\mathcal{A} = \{\overline{U} \cap S: U \in \mathcal{U}\}$ в случае (ii). Ясно, что в обоих случаях любое конечное пересечение множеств из $\mathcal{A}$ бесконечно (иначе p было бы изолировано от S, что противоречит равенству $X = \overline{S}$). Применим принцип (*) и получим бесконечное множество $M \subseteq S$, $M = \{q_n: n \in \omega\}$, такое, что $M - U$ конечно для каждого $U \in \mathcal{U}$ в случае (i) и $M - \overline{U}$ конечно для каждого $U \in \mathcal{U}$ в случае (ii). Таким образом, в случае (i) сразу получим: последовательность q_n сходится к p. В случае же (ii) мы можем утверждать только, что эта последовательность не имеет предельных точек в множестве $X - \{p\}$. Но поскольку в этом случае пространство X счетно компактно, то единственная предельная точка p последовательности q_n и будет ее пределом, т. е. эта последовательность сходится к p. □

Следствие 1 (MA). *Каждое компактное пространство мощности, меньшей, 2^{2^ω}, является секвенциально компактным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное счетное множество $S \subseteq X$. Если $\overline{S} = S$, то мы, очевидно, можем выбрать сходящуюся последовательность из S. Поэтому предположим $\overline{S} \neq S$. По теореме Чеха — Поспишила (теорема 4.3 гл. 3) найдется такая точка $p \in \overline{S} - S$, что $\chi(p, \overline{S}) < 2^\omega$ (в противном случае было бы $|\overline{S}| \geqslant 2^{2^\omega} > |X|$ — противоречие!). Таким образом, мы находимся в ситуации (i) теоремы 1.7 и снова сможем выбрать сходящуюся последовательность из точек множества S. □

Следствие 2 (MA). *Пусть пространство X регулярно, экстремально несвязно и сепарабельно. Тогда каждая его неизолированная точка имеет характер $\geqslant 2^\omega$. Если X к тому же счетно компактно, то для каждой неизолированной точки $p \in X$ выполняется неравенство $\psi(p, X) \geqslant 2^\omega$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в регулярном экстремально несвязном пространстве не существует неприцинальных сходящихся последовательностей. Теперь результат следует из теоремы 1.7. □

В качестве приложения этого следствия можно получить равенство $\chi(p, \beta N) = 2^\omega$ для любого $p \in \beta N - N$ (в предположении MA).

§ 2. Комбинаторные принципы, истинные в L

В то время как аксиома Мартина довольно успешно используется математиками (особенно она популярна среди топологов), комбинаторные принципы, о которых здесь пойдет речь,

значительно менее известны. Конечно, они применяются не так давно и выглядят более сложными, чем MA, но мы надеемся, что следствия этих принципов покажутся читателю в достаточной степени интересными для того, чтобы убедиться в их полезности. В главе 6 уже было отмечено, что эти принципы часто дают противоположные результаты по сравнению с MA + ¬CH. Принципы, о которых идет речь, имеют одну особенность, которую аксиома Мартина не имеет: они легко обобщаются на бо́льшие, чем континуум, кардиналы. Эти принципы (вместе с доказательствами их непротиворечивости) возникли из глубокого исследования «тонкой структуры» конструктивного универсума L, проведенного главным образом Р. Йенсеном (см. главу 5). Однако их непротиворечивость может быть доказана значительно проще с помощью метода вынуждения (см. главу 4).

2.1. Принцип $\diamondsuit$. Обозначение $\diamondsuit$ служит сокращением для следующего предложения: каждому ординалу $\alpha < \omega_1$ можно сопоставить множество $S_\alpha \subseteq \alpha$ так, что для любого $A \subseteq \omega_1$ множество $\{\alpha < \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\}$ стационарно в ω_1.

О стационарных множествах см. §§ 1 и 2 главы 3. Там же доказано, что $\diamondsuit \to \mathrm{CH}$ и $\diamondsuit \to \neg \mathrm{SH}$.

Используем принцип $\diamondsuit$ для построения пространства Даукера небольшой мощности, имеющего различные интересные дополнительные свойства. Основная идея нашего построения состоит в том, чтобы соединить конструкцию Осташевского [1] наследственно сепарабельного, локально компактного, счетно компактного и совершенно нормального, но не компактного пространства с основной идеей Рудин [1]. В работе Рудин [1] построено пространство Даукера в предположении существования дерева Суслина (т. е. в предположении ¬SH). Поэтому в свете импликации $\diamondsuit \to \neg \mathrm{SH}$ наш результат не кажется неожиданным, даже если иметь в виду интересные дополнительные свойства нашего пространства Даукера. Собственно говоря, мы поместили здесь построение пространства Даукера не столько ради конечного результата, сколько ради самого метода построения.

Отметим, что последовательность $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ из определения принципа $\diamondsuit$ удовлетворяет следующему условию:

(+) Если множество $A \subseteq \omega_1$ несчетно, то найдется такой предельный ординал $\lambda < \omega_1$, что $S_\lambda \subseteq A$ и $\bigcup S_\lambda = \lambda$ (т. е. S_λ неограничено в λ).

В самом деле, поскольку A неограничено, то совокупность A' всех предельных точек множества A также неограничена и, кроме того, замкнута в ω_1. Поэтому пересечение $A' \cap \{\alpha : A \cap \alpha = S_\alpha\}$ непусто. Но любой ординал λ из этого пересечения удовлетворяет условию (+).

Пусть L_1 есть совокупность всех предельных ординалов $< \omega_1$. Для каждого $\lambda \in L_1$ положим

$$T_\lambda = \begin{cases} S_\lambda, & \text{если } \bigcup S_\lambda = \lambda; \\ \lambda, & \text{если } \bigcup S_\lambda \neq \lambda. \end{cases}$$

Тогда каждое множество T_λ будет неограниченным в λ, и последовательность $\langle T_\lambda : \lambda \in L_1 \rangle$ также, очевидно, будет удовлетворять условию (+).

2.2. Теорема ($\diamondsuit$). *Существует топология τ на множестве $\omega_1 \times \omega$, имеющая следующие пять свойств:*

(i) *τ локально компактна и хаусдорфова;*
(ii) *τ локально счетна;*
(iii) *τ наследственно сепарабельна;*
(iv) *τ нормальна;*
(v) *τ не является счетно паракомпактной.*

Доказательство. Начнем с некоторых определений. Для каждого $\lambda \in L_1$ определим $X_\lambda = \lambda \times \omega$ и положим $X = \bigcup \{X_\lambda : \lambda \in L_1\} = \omega_1 \times \omega$. Как отмечено выше, $\diamondsuit \to \mathrm{CH}$. Поэтому все счетные подмножества множества X можно расположить в последовательность $\{A_\lambda : \lambda \in L_1\}$ так, чтобы каждое A_λ было ограниченным в X_λ множеством (это означает, что $A_\lambda \subseteq \alpha \times \omega$ для некоторого $\alpha < \lambda$). Далее, для каждой пары $\langle \alpha, n \rangle \in X$ определим

$$B(\alpha, n) = (\alpha \times (n+1)) \cup \{\langle \alpha, n \rangle\},$$
$$C(\alpha, n) = (\omega_1 - \alpha) \times (\omega - n).$$

Перед определением топологии τ мы индукцией по λ определим для каждого $\lambda \in L_1$ множество $Z_\lambda \subseteq X_\lambda$ и топологию τ_λ на X_λ следующим образом.

Предположим, что $\lambda \in L_1$ и мы уже определили множество $Z_\sigma \subseteq X_\sigma$ и топологию τ_σ на X_σ для каждого $\sigma \in \lambda \cap L_1$ так, что выполняются следующие условия:

(1) τ_σ локально компактна и хаусдорфова;

(2) если $\rho, \sigma \in \lambda \cap L_1$ и $\rho < \sigma$, то $\langle X_\rho, \tau_\rho \rangle$ является открытым подпространством пространства $\langle X_\sigma, \tau_\sigma \rangle$;

(3) для каждого $\langle \alpha, n \rangle \in X_\sigma$ множество $B(\alpha, n)$ является τ_σ-открытым;

(4) для любых ординалов $\rho, \sigma \in \lambda \cap L_1$ таких, что $\rho \leqslant \sigma$, множество Z_ρ является ограниченным τ_σ-открыто-замкнутым подмножеством множества X_ρ.

Если ординал λ является пределом в ряду предельных ординалов ($\lambda \in L_1'$), то в соответствии с (2) мы возьмем $\bigcup \{\tau_\sigma : \sigma \in \lambda \cap L_1\}$ в качестве базы для топологии τ_λ на X_λ. При этом условия (1)—(3) очевидным образом переносятся на τ_λ. Кроме

того, поскольку каждое Z_ρ является τ_σ-открыто-замкнутым в X_ρ при ρ, $\sigma \in \lambda \cap L_1$, $\rho \leqslant \sigma$, в силу (4), то Z_ρ остается τ_λ-открыто-замкнутым. (Это немедленно следует из равенства $X_\lambda - Z_\rho = \bigcup \{X_\sigma - Z_\rho : \sigma \in \lambda \in \lambda \cap L_1\}$.)

Рассмотрим теперь случай $\lambda \notin L_1'$, т. е. $\lambda = \sigma + \omega$ для некоторого $\sigma \in L_1$. Необходимо определить базисные окрестности новых точек, принадлежащих разности $X_\lambda - X_\sigma$. Для этого сначала расположим элементы счетного семейства $\{Z_\rho : \rho \in \lambda \cap L_1\}$ в ω-последовательность $\langle Z^{(n)} : n \in \omega \rangle$. По определению множество T_σ неограничено в σ. Зафиксируем произвольную строго возрастающую ω-последовательность $G^{(\sigma)} = \{\gamma_t : t \in \omega\}$ ординалов $\gamma_t \in T_\sigma$. Тогда для каждой пары $\langle \alpha, n \rangle \in X_\sigma$ выполняется неравенство

$$| B(\alpha, n) \cap (G^{(\sigma)} \times \omega) | < \omega.$$

Следовательно, в силу (3) множество $G^{(\sigma)} \times \omega$ не имеет предельных точек в $\langle X_\sigma, \tau_\sigma \rangle$. Но $\langle X_\sigma, \tau_\sigma \rangle$ является счетным локально компактным T_2-пространством (и тем самым нульмерным метризуемым). Поэтому мы можем выбрать компактную открытую окрестность K_{ts} для каждой точки $\langle \gamma_t, s \rangle \in G^{(\sigma)} \times \omega$ так, чтобы эти окрестности попарно не пересекались и для всех $t, s \in \omega$ удовлетворяли следующим двум условиям:

$$K_{ts} \subseteq B(\gamma_t, s),$$

$$\text{если } \langle \gamma_t, s \rangle \notin Z^{(l)}, \text{ то } K_{ts} \cap Z^{(l)} = \varnothing \text{ для всех } l < t.$$

Последнее условие можно обеспечить в силу τ_σ-открыто-замкнутости множеств $Z^{(l)}$.

Разобьем теперь натуральный ряд на бесконечные непересекающиеся множества, снабженные двойными индексами:

$$\omega = \bigcup \{a_{nm} : n, m \in \omega\}.$$

Таким образом, $a_{nm} \cap a_{n'm'} = \varnothing$ при $\langle n, m \rangle \neq \langle n', m' \rangle$ и $| a_{nm} | = \omega$ для любых $n, m \in \omega$. Каждая точка разности $X_\lambda - X$ имеет вид $\langle \sigma + n, m \rangle$. Определим k-ю окрестность этой точки равенством

$$V_k(\sigma + n, m) = \bigcup \{K_{ts} : t \in a_{nm} - k \text{ и } s \leqslant m\} \cup \{\langle \sigma + n, m \rangle\}.$$

Из данного определения немедленно получим, что эти счетные окрестности вместе с τ_σ порождают хаусдорфову топологию τ_λ на множестве X_λ, в которой $\langle X_\sigma, \tau_\sigma \rangle$ будет открытым подпространством. Также нетрудно проверить, что каждая окрестность $V_k(\sigma + n, m)$ компактна в $\langle X_\lambda, \tau_\lambda \rangle$, так как любое ее бесконечное подмножество либо покрывается конечным числом (компактных) множеств K_{ts}, составляющих $V_k(\sigma + n, m)$, либо же пересекается с бесконечным числом таких множеств, в обоих случаях имея предельную точку. Далее, по построению выполняется $V_0(\sigma + n, m) \subseteq B(\sigma + n, m)$. Наконец, для любого ординала $\rho \leqslant \sigma$, $\rho \in L_1$, мы имеем $Z_\rho = Z^{(l)}$ для некоторого $l \in \omega$. Но множество $Z^{(l)}$ ограничено в X_σ, а последовательность $G^{(\sigma)}$ сходится к σ. Поэтому, выбрав достаточно большое $t \in \omega$, мы получим $\langle \gamma_t, s \rangle \notin Z^{(l)}$ для всех $s \in \omega$. С другой стороны, также по построению для любых фиксированных m, $n \in \omega$ можно выбрать такое достаточно большое k, что $Z^{(l)} \cap V_k(\sigma + n, m) = \varnothing$. Следовательно, никакая точка разности $X_\lambda - X_\sigma$ не может быть предельной точкой множества $Z_\rho = Z^{(l)}$, которое, таким образом, является τ_λ-открыто-замкнутым.

Теперь определим множество Z_λ (определение одинаково для обоих видов ординала $\lambda \in L_1$). Используем множество A_λ. Если оно не является τ_λ-замкнутым, положим просто $Z_\lambda = \varnothing$. Если же оно τ_λ-замкнуто, то сначала выберем $\alpha < \lambda$ такое, что $A_\lambda \subseteq \alpha \times \omega$. В силу (3) множество $\alpha \times \omega$, очевидно, τ_λ-открыто. Также очевидно, что $\langle X_\lambda, \tau_\lambda \rangle$ является счетным метризуемым пространством. Значит, можно выбрать такое τ_λ-открыто-замкнутое множество Z_λ, что $A_\lambda \subseteq Z_\lambda \subseteq \alpha \times \omega$. Индуктивное определение τ_λ и Z_λ закончено.

Пусть теперь топология τ на X порождена семейством $\bigcup \{\tau_\lambda : \lambda \in L_1\}$. Мы утверждаем, что эта топология будет искомой в смысле свойств (i)—(v). Из условий (1) и (2) немедленно следует, что τ имеет свойства (i) и (ii). Для проверки остальных свойств мы докажем, что τ имеет следующее свойство (vi), которое интересно и само по себе.

(vi) *Для всех* $\sigma \in L_1$ *и* $n \in \omega$ *выполняется включение* $C(\sigma, n) \subseteq \mathrm{cl}_\tau(T_\sigma \times \{n\})$.

Для доказательства (vi) отметим сначала, что имеет место

$$\mathrm{cl}_\tau(T_\sigma \times \{n\}) \supseteq ((\sigma + \omega) - \sigma) \times (\omega - n).$$

Это очевидно из построения, так как каждая точка $\langle \sigma + m, n' \rangle$ принадлежит τ-замыканию множества $G^{(\sigma)} \times \{n\} \subseteq T_\sigma \times \{n\}$ при $n' \geqslant n$. Далее, индукцией по ординалу $\lambda \in L_1 - \sigma$ мы докажем, что $\langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{cl}_\tau(T_\sigma \times \{n\})$ при $n' \geqslant n$. Для $\lambda = \sigma$ это утверждение уже доказано. Докажем его для некоторого $\lambda \in L_1 - \sigma$ в предположении, что оно уже доказано для всех ординалов $\lambda' \in L_1$ таких, что $\sigma \leqslant \lambda' < \lambda$. Рассуждая аналогично случаю $\lambda = \sigma$, получим

$$\langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{cl}_\tau(G^{(\lambda)} \times \{n\})$$

всякий раз, когда $n' \geqslant n$. Кроме того, множество $G^{(\lambda)} \cap \sigma$ конечно по определению. Следовательно, по индуктивному предположению для точек множества $(G^{(\lambda)} - \sigma) \times \{n\}$ будет выполняться

$$\langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{cl}_\tau((G^{(\lambda)} - \sigma) \times \{n\}) \subseteq \mathrm{cl}_\tau(T_\sigma \times \{n\}),$$

что и требовалось.

Теперь докажем, что справедливо (iii). В самом деле, пусть множество $Y \subseteq X$ несчетно. Рассмотрим минимальное натуральное n такое, что пересечение $Y \cap (\omega_1 \times \{n\})$ несчетно. Согласно (+) найдется такой ординал $\sigma \in L_1$, что $T_\sigma \times \{n\} \subseteq Y$. Но в силу выбора n множество $Y \cap (\omega_1 \times n)$ счетно. Следовательно, ввиду (vi) множество

$$(Y \cap (\omega_1 \times n)) \cup (T_\sigma \times \{n\}) \cup (Y \cap X_\sigma)$$

будет счетным τ-плотным подмножеством множества Y.

Для доказательства (iv) отметим сначала, что фактически мы доказали, что любое несчетное τ-замкнутое множество $Y \subseteq X$ содержит подмножество вида $C(\sigma, n)$. Но пересечение двух любых множеств вида $C(\sigma, n)$, очевидно, непусто. Поэтому если множества $H, K \subseteq X$ не пересекаются и τ-замкнуты, то по крайней мере одно из них, скажем H, счетно. Тогда $H = A_\lambda$ для некоторого $\lambda \in L_1$. При этом Z_λ является τ-открыто-замкнутым множеством, и $H = A_\lambda \subseteq Z_\lambda \subseteq \alpha \times \omega$ для некоторого $\alpha < \lambda$. Множества H и $K \cap X_\lambda$ не пересекаются и являются τ-замкнутыми (так как они τ_λ-замкнуты). Значит, найдутся непересекающиеся τ_λ- и, следовательно, τ-замкнутые множества $U, V \subseteq X_\lambda$ такие, что $H \subseteq U$ и $K \cap X_\lambda \subseteq V$. Таким образом, множества $U \cap Z_\lambda$ и $V \cup (X - Z_\lambda)$ будут служить непересекающимися τ-открытыми окрестностями множеств H и K соответственно. Это означает, что пространство $\langle X, \tau \rangle$ нормально.

Для доказательства (v) рассмотрим множества $F_n = C(0, n) = \omega_1 \times (\omega - n)$ для каждого $n \in \omega$. Ясно, что $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots$, $\bigcap \{F_n : n \in \omega\} = \varnothing$ и каждое F_n является τ-замкнутым. Поэтому достаточно доказать, что для любой последовательности τ-открытых множеств $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ такой, что $G_n \supseteq F_n$ для каждого $n \in \omega$, будет $\bigcap \{G_n : n \in \omega\} \neq \varnothing$. Мы покажем, что на самом деле для любого $n \in \omega$ и любого τ-открытого множества $G_n \supseteq F_n$ разность $(\omega_1 \times \{0\}) - G_n$ будет счетной. Предположим, что, напротив, эта разность несчетна. Но из доказательства (vi) мы знаем, что поскольку множество $X - G$ τ-замкнуто, то $C(\sigma, 0) \subseteq X - G_n$ для некоторого $\sigma < \omega_1$. А это противоречит соотношению $F_n = C(0, n) \subseteq G_n$. □

Замечание. Читатель, знакомый с конструкцией Остра шевского (см. также Рудин [2]), без особых усилий может добиться, чтобы каждое подпространство вида $\omega_1 \times n$ пространства $\langle X, \tau \rangle$ было счетно компактным, т. е. чтобы само $\langle X, \tau$ было σ-счетно компактным. Другое изменение изложенного доказательства позволяет построить изящное пространство Дакера с использованием только CH вместо $\diamondsuit$, см. Юхас, Кюнен, Рудин [1], однако при этом локальную компактность σ-счетную компактность придется опустить.

Идея этого построения содержится также в доказательстве теоремы 2.9.

2.3. Принцип W. Этот принцип, к обсуждению которого мы переходим, уходит своими корнями в понятие «болота» Йенсена (см. Девлин [1]). Впервые этот принцип был использован Сильвером для того, чтобы заменить «болото» в построении больших S-пространств в конструктивном универсуме. Мы советуем читателю, которому принцип W покажется слишком сложным, взглянуть на определение «болота».

Мы несколько обобщим сильверовский принцип W, вводя в него кардинальный параметр. (W совпадает с $W(\omega_2)$.) Итак, пусть $\varkappa$ — бесконечный кардинал. Через $W(\varkappa)$ обозначим следующее предположение:

Найдется дерево T высоты $\omega_1 + 1$, обладающее следующими свойствами (i)—(iii) (T_α обозначает α-й уровень дерева T, а p_α обозначает функцию, которая сопоставляет каждому $t \in T_\beta$, где $\beta \geqslant \alpha$, (единственный) предшественник элемента t на уровне T_α):

(i) $|T_{\omega_1}| = \varkappa$ и $|T_\alpha| \leqslant \omega$ для всех $\alpha < \omega_1$;

(ii) если $s, t \in T_{\omega_1}$ и $s \neq t$, то найдется такое $\alpha < \omega_1$, что $p_\alpha(s) \neq p_\alpha(t)$;

(iii) существует последовательность $\langle w_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ такая, что каждое w_α есть счетное семейство счетных бесконечных множеств $S \subseteq T_\alpha$ такое, что

(*) для каждого счетного множества $A \subseteq T_{\omega_1}$ найдется такое $\alpha_A < \omega_1$, что $p_\alpha{}''A \in w_\alpha$ при любом α, удовлетворяющем неравенствам $\alpha_A \leqslant \alpha < \omega_1$.

($p_\alpha{}''A = \{p_\alpha(t) : t \in A\}$ — образ множества A при отображении p_α.)

Нетрудно показать, что как $W(\omega)$, так и $W(\omega_1)$ эквивалентны CH. Кроме того, $W(\varkappa)$ влечет $\varkappa \leqslant 2^{\omega_1}$, так как $|\bigcup \{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}| = \omega_1$, а различные элементы уровня T_{ω_1} имеют различные множества предшественников. С другой стороны, с помощью метода вынуждения установлено, что предположение (кардинал 2^{ω_1} сколь угодно велик $+ W(2^{\omega_1})$) непротиворечиво относительно ZFC (теорема 4.9 гл. 4 для несколько иного определения $W(\varkappa)$). Значительно более тонким является результат Сильвера, доказавшего, что принцип $W(\omega_2) = W(2^{\omega_1})$ выполняется в конструктивном универсуме.

2.4. Определение. Пусть $D(2)$ есть дискретное пространство на множестве $2 = \{0, 1\}$. Бесконечное множество $X \subseteq (D(2))^{\omega_1}$ назовем *НФП-множеством* (сокращение для «наследственно финально плотное»), если выполняется следующее условие:

(**) Для каждого счетного $A \subseteq X$ найдется ординал $\nu_A < \omega_1$ такой, что любую конечную частичную функцию ε из $\omega_1 - \nu_A$ в 2 можно продолжить до некоторой функции $f \in A$.

Иными словами, (**) означает, что «хвосты» функций $f \in A$ образуют плотное множество в произведении $(D(2))^{\omega_1 - \nu_A}$.

2.5. Теорема. *Если выполняется $W(\varkappa)$, то найдется НФП множество $X \subseteq (D(2))^{\omega_1}$, имеющее мощность $\varkappa$.*

Доказательство. Пусть дерево T и последовательность $\langle w_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ удовлетворяют формулировке $W(\varkappa)$. Введем следующее техническое определение. Для каждого $S \in w_\alpha$ положим

$$\beta(S) = \min \{\beta : \forall \gamma ((\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha) \to p_\gamma{}''S \in w_\gamma, \text{ и сужение } p_\gamma \restriction S \text{ взаимно однозначно})\}.$$

Ясно, что $\beta(S) \leqslant \alpha$. Для каждого $t \in T_\alpha$ индукцией по $\alpha < \omega_1$ определим функцию f^t: $\alpha + 1 \to 2$ так, чтобы эти функции служили аппроксимациями для элементов искомого множества X. Предположим, что $\alpha < \omega_1$ и для любых $\beta < \alpha$ и $t \in T_\beta$ функции f^t уже определены и удовлетворяют следующим условиям:

(1) если $\gamma < \beta < \alpha$ и $t \in T_\beta$, то $f^t \supseteq f^{p_\gamma(t)}$;

(2) если $S \in w_\beta$ и ε является функцией из некоторого конечного подмножества разности $(\beta + 1) - \beta(S)$ в 2, то множество $S_\varepsilon = \{t \in S : \varepsilon \subseteq f^t\}$ бесконечно.

Определим f^t для каждого $t \in T_\alpha$. Задача состоит, естественно, в определении значения $f^t(\alpha)$, так как для всех $\beta < \alpha$ мы должны положить (в соответствии с условием (1))

$$f^t(\beta) = f^{p_\beta(t)}(\beta).$$

Рассмотрим семейство $Z(\alpha)$ всех бесконечных множеств вида S_ε, где $S \in w_\alpha$, а ε является частичной конечной функцией из $\alpha - \beta(S)$ в 2. Это определение имеет смысл, поскольку значение $f^t(\beta)$ уже определено для всех $\beta < \alpha$. Заметим, что для пустой функции $\varnothing$ справедливо равенство $S_\varnothing = S$, откуда следует $w_\alpha \subseteq Z(\alpha)$.

Далее, семейство $Z(\alpha)$ является счетным семейством, состоящим из счетных бесконечных подмножеств уровня T_α. Значит, по известной теореме Бернштейна мы можем разбить уровень T_α на два непересекающихся множества $H_0^{(\alpha)}$ и $H_1^{(\alpha)}$ так, чтобы

$$|S_\varepsilon \cap H_i^{(\alpha)}| = \omega$$

выполнялось для всех $S_\varepsilon \in Z(\alpha)$ и $i < 2$.

Теперь определим значение $f^t(\alpha)$ следующим образом:

$$f^t(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in H_0^{(\alpha)}, \\ 1, & \text{если } t \in H_1^{(\alpha)}. \end{cases}$$

Из определения очевидно, что условие (2) выполняется для α. Индуктивное определение функций f^t закончено.

Рассмотрим множество $X = \{f_s : s \in T_{\omega_1}\} \subseteq D(2)^{\omega_1}$, где каждая функция f_s из ω_1 в 2 определена равенством

$$f_s = \bigcup \{f^{p_\alpha(s)} : \alpha < \omega_1\}.$$

Достаточно проверить, что это множество X в самом деле является НФП. Пусть счетное множество $A \subseteq T_{\omega_1}$ произвольно. Согласно (*) можно выбрать ординал $\alpha < \omega_1$ такой, что сужение $p_\alpha \restriction A$ взаимно однозначно и $p_\gamma{}''A \in w_\gamma$ для всех $\gamma \geqslant \alpha$. Теперь из (1) и (2) следует, что ординал $\beta(p_\alpha{}''A)$ можно взять в качестве ординала ν_A, требуемого в формулировке (**). □

2.6. Замечания. Хайнал и Юхас [2] показали, что любое НФП множество $X \subseteq D(2)^{\omega_1}$ является наследственно сепарабельным и наследственно нормальным. С другой стороны, нетрудно проверить, что если каждой функции $f \in X$ поставлена в соответствие функция $f' \in D(2)^{\omega_1}$, отличающаяся от f лишь на счетном числе ординалов $\alpha < \omega_1$, то множество $X' = \{f' : f \in X\}$ также будет НФП. Это позволяет построить, например, S-пространство мощности $\varkappa$ (в предположении $W(\varkappa)$). Таким образом, непротиворечиво существование S-пространств мощности $2^{\omega_1} = 2^{2^\omega}$.

Несколько изменив доказательство теоремы 2.5, можно построить НФП подгруппу пространства $D(2)^{\omega_1}$, имеющую мощность $\varkappa$, и таким образом получить счетно компактную, наследственно нормальную и наследственно сепарабельную нелинделефову топологическую группу (см. Хайнал и Юхас [3] для случая $W(\omega_1) = \mathrm{CH}$).

Аналогичным образом можно в предположении $W(\varkappa)$ построить L-пространство веса $\varkappa$. *L-пространством* называется регулярное, наследственно линделефово, но не сепарабельное пространство. (Понятие L-пространства дуально к S-пространству, см. Хайнал и Юхас [2].)

Отметим наконец, что в предположении $(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH})$ можно доказать, что НФП множеств вообще нет. Для этого нужно воспользоваться тем, что, согласно следствию 1 к теореме 1.7, пространство $D(2)^{\omega_1}$ секвенциально компактно, в то время как сходящаяся последовательность, конечно, не может быть плотной в «хвостовой части».

Таким образом, аналогично принципу $\diamondsuit$, принцип W дает следствия, противоположные следствиям из $(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH})$.

2.7. Принцип $E(\kappa)$. Теперь мы хотели бы изложить некоторые топологические следствия комбинаторного принципа $\square_\kappa$. Но мы будем использовать собственно не сам принцип $\square_\kappa$ (о котором интересующийся читатель может узнать в гл. 5), а следствие этого принципа, обозначаемое $E(\kappa)$:

Найдется множество $E \subseteq \kappa$, удовлетворяющее таким трем условиям:

(i) $\alpha \in E \to \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$;

(ii) множество E стационарно в κ;

(iii) если ординал $\alpha < \kappa$ предел, то множество $E \cap \alpha$ не является стационарным в α.

Утверждение $E(\omega_1)$ тривиально истинно, но $E(\omega_2)$ нарушается в некоторых моделях теории множеств. В то же время Йенсен доказал, что в конструктивном универсуме $E(\kappa)$ справедливо для «большинства» регулярных кардиналов κ (см. Девлин [1], а также теорему 14.2 гл. 5).

В качестве приложения принципа $E(\kappa)$ можно указать следующий результат Хайнала и Юхаса [4]: если множество E из формулировки $E(\kappa)$ рассматривать как топологическое пространство, то каждое подпространство пространства E, имеющее мощность меньше κ, будет метризуемым, в то время как само E не будет таковым. Вместо доказательства этого утверждения мы поместили здесь построение более сложного пространства, имеющего несколько красивых дополнительных свойств. В этом построении, кроме $E(\kappa)$, фигурирует следующий обобщенный вариант принципа $\diamondsuit$.

2.8. Определение. Пусть κ является регулярным несчетным кардиналом и множество $E \subseteq \kappa$ стационарно в κ. Через $\diamondsuit_\kappa(E)$ обозначим предположение о том, что существует последовательность $\langle S_\alpha : \alpha \in E\rangle$ множеств $S_\alpha \subseteq \alpha$ такая, что для каждого $X \subseteq \kappa$ множество

$$\{\alpha \in E : X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

стационарно в κ.

Таким образом, принцип $\diamondsuit$ из 2.1 в точности совпадает с $\diamondsuit_{\omega_1}(\omega_1)$. Тот же Йенсен доказал, что в конструктивном универсуме $\diamondsuit_\kappa(E)$ выполняется для каждого регулярного кардинала $\kappa > \omega$ и каждого стационарного множества $E \subseteq \kappa$ (см. Девлин [1], а также теорему 11.2 гл. 5).

Фактически мы будем использовать следующее утверждение, которое без труда выводится из $\diamondsuit_\kappa(E)$ с помощью подходящей кодировки:

(*) Существует такая последовательность $\langle\langle S_\alpha, T_\alpha\rangle : \alpha \in E\rangle$ пар множеств $S_\alpha, T_\alpha \subseteq \alpha$, что для любых $X, Y \subseteq \kappa$ множество $\{\alpha \in E : X \cap \alpha = S_\alpha \text{ и } Y \cap \alpha = T_\alpha\}$ стационарно в κ.

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему:

2.9. Теорема. *Пусть кардинал $\kappa > \omega$ регулярен и множество $E \subseteq \kappa$ таково, что выполняются $E(\kappa)$ и $\diamondsuit_\kappa(E)$. Тогда существует топология τ на множестве E, являющаяся:*

(i) *локально счетной;*

(ii) *локально компактной и хаусдорфовой;*

(iii) *нормальной,*

и в смысле которой

(iv) *каждое подпространство пространства E, имеющее мощность $< \kappa$, метризуемо, но само E не метризуемо.*

Доказательство. Для построения искомой топологии мы индукцией по $\alpha \in E$ определим топологию τ_α на множестве $E \cap \alpha$. (Имейте в виду, что каждый ординал $\alpha \in E$ является предельным!) Предположим, что $\alpha \in E$ и для каждого $\beta \in E \cap \alpha$ и каждого $\gamma \in E \cap \beta$ уже определена топология τ_β на множестве $E \cap \beta$, а также определена убывающая последовательность $\{V_n(\gamma) : n \in \omega\}$ (не зависящая от β) так, что выполняются следующие условия:

(1) топология τ_β является метризуемой;

(2) семейство $\{V_n(\gamma) : n \in \omega\}$ образует базу окрестностей для γ в пространстве $\langle E \cap \beta, \tau_\beta\rangle$;

(3) каждое множество $V_n(\gamma)$ счетно, компактно и открыто в пространстве $\langle E \cap \beta, \tau_\beta\rangle$;

(4) последовательность ординалов $\gamma_n = \min V_n(\gamma)$ сходится к ординалу γ в смысле обычной топологии на ординалах.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала ординал α не имеет непосредственного предшественника в множестве E. Тогда никаких новых множеств $V_n(\gamma)$ определять не нужно, а в качестве τ_α возьмем топологию на $E \cap \alpha$, порожденную семейством $\bigcup\{\tau_\beta : \beta \in E \cap \alpha\}$. Отметим, что в силу (2) при $\gamma < \beta < \alpha$ пространство $\langle E \cap \gamma, \tau_\gamma\rangle$ будет открытым подпространством в $\langle E \cap \beta, \tau_\beta\rangle$ и, следовательно, будет открытым в $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha\rangle$. Поэтому условия (2), (3), (4) автоматически переносятся на α. Осталось проверить метризуемость топологии τ_α. Положим $\alpha^* = \bigcup(E \cap \alpha)$ и выберем некоторое замкнутое неограниченное в α^* множество $C \subseteq \alpha^*$ такое, что $C \cap E = \varnothing$ (такой выбор возможен, так как пересечение $E \cap \alpha = E \cap \alpha^*$ не является стационарным в α^* в силу выбора E). Разность $\alpha^* - C$ можно представить в виде объединения попарно непересекающихся максимальных открытых интервалов:

$$\alpha^* - C = \bigcup\{(\alpha_i, \beta_i) : i \in I\},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in C$. Мы утверждаем, что для каждого $i \in I$ множество $(\alpha_i, \beta_i) \cap E$ открыто в пространстве $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha\rangle$. В самом деле, если $\gamma \in E \cap (\alpha_i, \beta_i)$, то, согласно (4), найдется такое $n < \omega$, что $V_n(\gamma) \subseteq (\alpha_i, \gamma] \subseteq (\alpha_i, \beta_i)$. Но тогда $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha\rangle$ ока-

зывается топологической суммой своих подпространств $E \cap (\alpha_i, \beta_i)$, каждое из которых метризуемо в силу (1). Следовательно, пространство $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha \rangle$ метризуемо.

Рассмотрим теперь случай, когда β является непосредственным предшественником ординала α в множестве E. Сначала мы должны определить множества $V_n(\beta)$, которые образуют базу окрестностей точки β в пространстве $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha \rangle$. (Заметим, что $E \cap \alpha = (E \cap \beta) \cup \{\beta\}$.) Придется рассмотреть два подслучая.

Подслучай а: $\bigcup (E \cap \beta) = \beta$ и S_β, T_β являются непересекающимися неограниченными подмножествами множества $E \cap \beta$. Зафиксируем два множества $A = \{\sigma_n : n \in \omega\} \subseteq S_\beta$ и $B = \{\rho_n : n \in \omega\} \subseteq T_\beta$, каждое из которых неограничено в β, и $\sigma_n < \sigma_{n+1}$, $\rho_n < \rho_{n+1}$. Тогда A и B, очевидно, образуют замкнутые дискретные подмножества (метризуемого) пространства $\langle E \cap \beta, \tau_\beta \rangle$. Значит, можно построить систему попарно непересекающихся окрестностей $V_{k_n}(\sigma_n)$ и $V_{l_n}(\rho_n)$ точек σ_n и ρ_n множества $A \cup B$. При этом с помощью (4) можно добиться выполнения для каждого $n \geqslant 1$ следующих неравенств:

$$\sigma_{n-1} < \min V_{k_n}(\sigma_n) \quad \text{и} \quad \rho_{n-1} < \min V_{l_n}(\rho_n).$$

Теперь определим искомые окрестности $V_m(\beta)$ следующим образом:

$$V_m(\beta) = \bigcup \{V_{k_n}(\sigma_n) \cup V_{l_n}(\rho_n) : n \geqslant m\} \cup \{\beta\}.$$

Ясно, что каждое множество $V_m(\beta)$ счетно, а пересечени $V_m(\beta) \cap (E \cap \beta)$ открыто в τ_β. Следовательно, мы в самом дел получим топологию τ_α на множестве $E \cap \alpha = (E \cap \beta) \cup \{\beta\}$, если возьмем семейство множеств $V_m(\beta)$ в качестве базы окрестностей точки β. Компактность каждой окрестности $V_m(\beta)$ в τ_α вы водится из индуктивного предположения аналогично доказа тельству теоремы 2.2. Кроме того,

$$\beta_m = \min V_m(\beta) \geqslant \min \{\sigma_{m-1}, \rho_{m-1}\}$$

для каждого $m > 0$. Значит, $\beta_m \to \beta$, откуда следуют услови (2)—(4) для α. Наконец, метризуемость топологии τ_α следу из того, что эта топология удовлетворяет первой аксиоме счет ности и регулярна (будучи локально компактной и хаусдорф вой), а выбросив из $E \cap \alpha$ одну точку, именно β, мы получи метризуемое подпространство, именно $\langle E \cap \beta, \tau_\beta \rangle$ (более по робно см. Хайнал и Юхас [4]).

Подслучай б: когда подслучай а не имеет места. Здесь м просто добавим β в качестве изолированной точки и положи $V_n(\beta) = \{\beta\}$ для всех $n \in \omega$. Проверка условий (1)—(4) тр виальна.

Итак, топология τ_α на множестве $E \cap \alpha$ определена для каждого $\alpha < \varkappa$. Возьмем семейство $\bigcup \{\tau_\alpha : \alpha \in E\}$ в качестве базы для топологии τ на множестве E. Ясно, что топология τ будет удовлетворять требованиям (i) и (ii). Кроме того, каждое подпространство мощности $< \varkappa$ пространства $\langle E, \tau \rangle$ является подпространством некоторого $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha \rangle$ и, следовательно, метризуемо.

Проверим нормальность. Пусть непересекающиеся множества H, $K \subseteq E$ замкнуты в смысле τ. Если оба этих множества ограничены в E, то они содержатся в одном и том же открытом метризуемом подпространстве вида $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha \rangle$ и поэтому тривиальным образом отделимы. С другой стороны, оба этих множества не могут быть неограниченными одновременно, так как в противном случае множество

$$H' \cap K' \cap \{\beta \in E : H \cap \beta = S_\beta \text{ и } K \cap \beta = T_\beta\}$$

было бы непустым в силу (*) (здесь, как обычно, H' и K' являются совокупностями всех предельных в обычном смысле точек множеств H и K соответственно), а по построению каждый такой ординал β принадлежит τ-замыканию любого из множеств H и K.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда одно из множеств, скажем H, ограничено, а другое, соответственно K, неограничено в E. Выберем ω_1-предельный ординал $\nu < \varkappa$ такой, что $H \subseteq \nu$. Пусть α есть наименьший элемент разности $E - \nu$. Тогда $\nu < \alpha$ и $E \cap \nu = E \cap \alpha \supseteq H$. Значит, H и $K \cap \alpha$ являются непересекающимися замкнутыми множествами в $\langle E \cap \alpha, \tau_\alpha \rangle$. Поэтому их можно отделить τ_α-открытыми и тем самым τ-открытыми множествами U и V. С другой стороны, для любого $\beta \in K - \alpha$ мы имеем $\nu < \beta$. Значит, можно выбрать $k_\beta \in \omega$ так, чтобы $V_{k_\beta}(\beta) \subseteq E - \nu$. Теперь открытые множества U и

$$V \cup \left(\bigcup \{V_{k_\beta}(\beta) : \beta \in K - \alpha\}\right),$$

очевидно, отделяют H и K, и таким образом доказано (iii).

Наконец, мы утверждаем, что множество $J = \{\alpha \in E : \alpha$ не изолировано в $\langle E, \tau \rangle\}$ является стационарным в τ. Действительно, по построению для любых непересекающихся неограниченных множеств S, $T \subseteq E$ выполняется

$$J \supseteq S' \cap T' \cap \{\alpha \in E : S \cap \alpha = S_\alpha \wedge T \cap \alpha = T_\alpha\}.$$

Значит, J включает подмножество, которое стационарно в силу (*).

Доказав стационарность множества J, мы докажем, что $\langle J, \tau \rangle$ не является даже метакомпактным и тем более не является метризуемым. В самом деле, семейство $\{E \cap (\alpha + 1) :$

$\alpha \in E\}$ образует открытое покрытие в $\langle E, \tau\rangle$, и, каково бы ни было открытое измельчение $\mathscr{G}$ этого покрытия, для каждого $\alpha \in J$ найдутся такие $n \in \omega$ и $G_\alpha \in \mathscr{G}$, что $V_n(\alpha) \subseteq G_\alpha$. Тогда $f(\alpha) = \min V_n(\alpha) < \alpha$ для каждого α, т. е. f есть регрессивная функция, определенная на стационарном множестве J. Поэтому по теореме 2.3 гл. 3 найдутся ординал $\beta \in E$ и стационарное, следовательно, имеющее мощность $\varkappa$ множество $S \subseteq J$ такие, что $f(\alpha) = \beta$ для всех $\alpha \in S$. Но каждое G_α, очевидно, ограничено в $\varkappa$, откуда следует

$$|\{G_\alpha\colon \alpha \in S\}| = \varkappa,$$

а также

$$\beta \in \bigcap\{G_\alpha\colon \alpha \in S\} \neq \varnothing,$$

и поэтому $\mathscr{G}$ не будет точечно конечным. Таким образом, требование (iv) также удовлетворяется. Теорема доказана. □

В заключение укажем некоторые приложения деревьев Курепы. Напомним (см. главу 4), что *деревом Курепы* называется ω_1-дерево, все уровни которого счетны и которое имеет более ω_1 ветвей, имеющих порядковый тип ω_1. Например, если $\varkappa > \omega_1$, то дерево $T - T_{\omega_1}$ из формулировки принципа $W(\varkappa)$ будет деревом Курепы. В главе 4 (теоремы 4.4 и 5.7) показано, что существование деревьев Курепы нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами обычных аксиом теории множеств.

К. Кюнен указал следующее приложение деревьев Курепы. Предположим, что выполняется континуум-гипотеза CH, т. е. $2^\omega = \omega_1$, но $2^{\omega_1} > \omega_2$. Хорошо известно, что каждое компактное пространство счетного веса либо счетно, либо имеет мощность 2^ω, независимо от CH. Верно ли, что в нашей ситуации каждое компактное пространство веса $\leqslant \omega_1$ имеет либо мощность $\leqslant \omega_1$ либо мощность в точности 2^ω? Оказывается, что в рамках обычной теории множеств нельзя дать ни положительный, ни отрицательный ответ на этот вопрос. В одну сторону это справедливо в силу следующей теоремы:

2.10. Теорема. *Предположим, что $2^\omega = \omega_1$, $2^{\omega_1} > \omega_2$ и дерево Курепы T имеет в точности ω_2 ветвей порядкового типа ω. Тогда существует компактное пространство мощности ω_2 веса ω_1.*

Доказательство. Мы утверждаем, что подпространство X пространства $(D(2))^T$, состоящее из характеристических функций всех связных цепей дерева T, является искомым. (Связной цепью мы называем такое линейно упорядоченное подмножество $C \subseteq T$, что для всех $t \in C$ и $s \in T$ из $s < t$ следует $s \in C$.) Поскольку свойство «не быть связной цепью» всегда можно определить по двум элементам дерева T, то дополнение множества X в пространстве $(D(2)$

открыто. Следовательно, само X компактно. Мощность X равна ω_2, так как в силу CH существует лишь ω_1 ограниченных связных цепей в T, а по условию теоремы существует ровно ω_2 неограниченных связных цепей (т. е. ω_1-ветвей) в T. Наконец, $w(X) = \omega_1$ тривиально, поскольку $w((D(2))^T) = |T| = \omega_1$. □

Наш последний результат дает ответ на вопрос, поставленный Р. Сикорским в 1950 г.: существует ли линделефово метризуемое пространство мощности $> \omega_1$ (см. Сикорский [1], с. 132)? В. Вейсс и автор недавно показали, что полный ответ на этот (на самом деле очень естественный) вопрос дается с помощью довольно странного дерева.

2.11. Теорема. *Существует линделефово ω_1-метризуемое пространство мощности $> \omega_1$, если и только если существует дерево Курепы, не содержащее поддеревьев, являющихся деревьями Ароншайна.*

Доказательство этой теоремы см. в работе Юхаса и Вейсса [1]. Отметим, что аксиома конструктивности $V = L$ влечет существование таких деревьев (результат Р. Йенсена, см. Девлин [2]). С другой стороны, является непротиворечивым предположение о том, что вообще нет деревьев Курепы (теорема 5.7 гл. 4).

ЛИТЕРАТУРА

Лартс, Лютцер (Aarts J. M., Lutzer D. J.)
1. Complemeness properties designed for recognizing Baire spaces. — Dissertationes Math., 1974, **116**.

Девлин (Devlin K. J.)
1. Aspects of Constructibility. — Berlin: Springer, 1973.
2. Order types, trees, and a problem of Erdös and Hajnal. — Period. Math. Hungar., 1974, **5**, p. 153—160.

Кюнен, Толл (Kunen K., Tall F. D.)
1. Between Martin's axiom and Souslin's hypothesis. — Fundam. math., 1979, **102**, № 3, p. 173—181.

Малыхин В. И., Шапировский Б. Е.
1. Аксиома Мартина и свойства топологических пространств. — ДАН СССР, 1973, **213**, с. 532—535.

Мартин, Соловей (Martin D. A., Solovay R. M.)
1. Internal Cohen extensions. — Ann. Math. Logic, 1970, **2**, p. 143—178.

Осташевский (Ostashewski A. J.)
1. On countably compact, perfectly normal spaces. — J. London Math. Soc., 1976, **14**, № 3, p. 505—516.

Рудин (Rudin M. E.)
1. Countable paracompactness and Souslin problem. — Canad. J. Math., 1955, **7**, p. 543—547.
2. Lectures on Set Theoretic Topology. — Providence, R. I., 1975.

Сикорский (Sikorski R.)
1. Remarks on some topological spaces of high power. — Fundam. math., 1950, **37**, p. 125—136.

Стефенсон (Stephenson R. M.)
1. Discrete subsets of perfectly normal spaces. — Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **34**, p. 605—608.

Толл (Tall F. D.)
1. The countable chain condition vs. separability. — General Topology and Appl., 1974, 4, p. 315—339.
Хайнал, Юхас (Hajnal A., Juhasz I.)
1. A consequence of Martin's axiom. — Indag. Math., 1971, 33, p. 457—463.
2. On hereditarily α-Lindelöf and α-separable spaces. — Fundam. math., 1974, 81, p. 147—158.
3. A separable normal topological group need not be Lindelöf. — General Topology and Appl., 1976, 6, p. 199—205.
4. On spaces in which every small subspace is metrizable. — Bull. Acad. Polon. Sci., 1976, 24, № 9, p. 727—731.
Хехлер (Hechler S.)
1. On some weakly compact spaces and their products. — General Topology and Appl., 1975, 5, № 2, p. 83—93.
Шапировский Б. Е.
1. Cardinal Functions in Topology. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, ДАН, 1972, 207, № 4, с. 800—803.
Юхас (Juhász I.)
1. Cardinal Functions in Topology. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1971.
Юхас, Вейсс (Juhasz I., Weiss W.)
1. On a problem of Sikorski. — Fundam. math., 1978, 100, № 3, p. 223—227.
Юхас, Кюнен, Рудин (Juhasz I., Kunen K., Rudin M.)
1. Two more hereditarily separable non-Lindelöf spaces. — Canad. J. Math., 1976, 28, № 5, p. 998—1005.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Толл (Tall F. D.)
1. Set-theoretic consistency results and topological theorems concerning the normal Moore space conjecture and related problems. — Rozprawy Math., 1977, 148, p. 3—53.
Федорчук В. В.
1. Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств. — Матем. сб., 1976, 99, № 1, с. 3—33.
Юхас, Вейсс (Juhasz I., Weiss W.)
1. Martin's axiom and normality. — General Topology and Appl., 1978, 9, № 3, p. 263—274.

Дополнительная литература к этой главе любезно предоставлена В. В. Федорчуком.

Глава 8

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ: ПРОЕКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Дональд А. Мартин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 235
§ 1. Основные понятия классической дескриптивной теории множеств . . 237
§ 2. Борелевские и проективные множества 239
§ 3. Структурные свойства и свойства регулярности точечных классов 248
§ 4. Эффективная дескриптивная теория множеств 253
§ 5. Аксиома конструктивности и аксиомы больших кардиналов 259
§ 6. Аксиома проективной детерминированности 262
Литература 270

Введение

Эта глава посвящена как классической, так и эффективной дескриптивной теории множеств, а главным образом теории проективных множеств. Мы также остановимся на результатах бурного развития этой области за последние десять — пятнадцать лет. В основе этого развития лежат некоторые сильные теоретико-множественные предположения, например, аксиома проективной детерминированности. Наш обзор был написан под сильным влиянием работ, лекций и личных контактов с Я. Н. Московакисом и А. С. Кекрисом.

Как известно, изучение произвольных множеств действительный чисел не привело к большим успехам. Например, не удалось ни доказать, ни опровергнуть *континуум-гипотезу* Кантора, утверждающую, что каждое множество действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность $2^{\aleph_0}$, т. е. мощность множества всех действительных чисел. Знаменитые теоремы Гёделя [2] и Коэна [1], [2] показывают, что средствами аксиоматической теории множеств Цермело — Френкеля ZFC (с аксиомой выбора) невозможно ни доказать, ни опровергнуть континуум-гипотезу. Более того, мы не знаем сколько-нибудь приемлемых дополнительных аксиом, которые привели бы к определенному решению континуум-гипотезы.

Ответы на другие вопросы о произвольных множествах, которые все же удается получить в теории множеств, часто ока-

зываются неудовлетворительными. Например, теорема Витали утверждает существование неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел, но ее доказательство существенно использует аксиому выбора и не приводит к конкретному примеру неизмеримого множества. Оказывается, что все практически используемые в математике множества действительных чисел измеримы по Лебегу.

Дескриптивная теория множеств ограничивается рассмотрением *простых* множеств действительных чисел: множеств простой топологической структуры или множеств, определенных некоторым простым способом. Можно указать три основных преимущества такого подхода:

(1) Многие вопросы, неразрешимые для произвольных множеств (например, континуум-гипотеза), оказываются разрешимыми для достаточно простых множеств.

(2) Многие вопросы, имеющие неудовлетворительное решение для произвольных множеств, получают удовлетворительное решение для достаточно простых множеств (измеримость).

(3) Развивается интересная структурная теория простых множеств — теория определимости.

Поясним (1) и (2) на следующем хорошо известном примере. Наверное, первым результатом дескриптивной теории множеств было утверждение о том, что *каждое замкнутое множество действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность* $2^{\aleph_0}$. Таким образом, замкнутые множества не могут служить контрпримерами к континуум-гипотезе. Этот пример относится не только к (1), но и к (2). Полный вариант теоремы Кантора — Бендиксона утверждает, что *каждое замкнутое множество действительных чисел либо счетно, либо содержит совершенное подмножество* — непустое замкнутое подмножество без изолированных точек. Не все множества действительных чисел обладают этим приятным свойством.

Дескриптивная теория множеств в ее современном виде возникла из двух независимых источников. Первый из них — это классический геометрический подход, начатый работами Бореля, Бэра и Лебега и превращенный в стройную теорию Сусслиным, Лузиным, Александровым, Новиковым, Серпинским и другими. Другой подход, основанный на теории рекурсивных функций, появился позже; хотя и совершенно независимо, в работах Клини и других логиков. Слияние этих двух источников произошло, по-видимому, только в работах Аддисона [1] и [2].

В §§ 1—3 этой главы изложены основные понятия классической теории. В § 4 рассмотрена эффективная теория Клини. В §§ 5 и 6 речь идет о неразрешимых средствами аксиом теории ZFC вопросах дескриптивной теории множеств. Мы показываем, как некоторые дополнительные аксиомы теории множеств позволяют дать ответ на такие вопросы.

§ 1. Основные понятия классической дескриптивной теории множеств

Хотя в конечном счете нас интересуют именно действительные числа, действительная прямая не будет основным пространством нашей теории.

Одной из причин этого является то, что вся теория применима к многим пространствам, помимо действительной прямой. В сущности, она применима к любому полному сепарабельному метрическому пространству без изолированных точек, т. е. *совершенному польскому пространству*. Поэтому можно было бы развивать нашу теорию для произвольных совершенных польских пространств, как это делает, например, Московакис [4].

Мы, однако, предпочитаем иметь дело с одним конкретным польским пространством. Использование в этой роли действительной прямой несколько неудобно по техническим причинам. Вместо нее мы рассмотрим *пространство Бэра* ω^ω, которое будем обозначать через I.

1.1. Определение. ω есть множество всех натуральных чисел. I есть совокупность всех функций $\alpha\colon \omega \to \omega$. Мы наделяем ω дискретной топологией, а I — топологией произведения, рассматривая I как произведение бесконечного числа экземпляров ω.

Базой для этой топологии на I служит совокупность всех множеств следующего вида:

$$\{\alpha\colon \alpha \restriction n = \sigma\},$$

где n — натуральное число, σ является конечной последовательностью натуральных чисел длины n, а $\alpha \restriction n$ обозначает последовательность $\langle \alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$.

Пространство I гомеоморфно пространству всех иррациональных чисел с топологией, которая индуцирована обычной топологией действительной прямой.

Несмотря на то, что наша теория будет развиваться для I, почти все определения и теоремы в равной степени относятся к любому совершенному польскому пространству. (Мы будем отмечать все места, где это не так; однако, как правило, мы не будем указывать те *доказательства*, которые учитывают специфику пространства I и не проходят для произвольного пространства.) Большинство теорем, доказанных для I, можно перенести на произвольное совершенное польское пространство в

силу того, что любые два совершенных польских пространства «борелевски изоморфны». К совершенным польским пространствам, помимо I, относятся в частности:

(а) действительная прямая,

(б) канторов дисконтинуум, который в сущности является множеством 2^ω всех функций α: $\omega \to 2$ с топологией, индуцированной включением $2^\omega \subseteq I$.

Пространство I гомеоморфно своему квадрату. Для каждого $\alpha \in I$ определим $\alpha_0(n) = \alpha(2n)$ и $\alpha_1(n) = \alpha(2n+1)$. Отображение $f(\alpha) = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ будет гомеоморфизмом I на I^2. Все важные свойства множеств, изучаемые в классической и эффективной дескриптивной теории множеств, сохраняются при этом отображении. Таким образом, понятие *размерности* не играет никакой роли в дескриптивной теории множеств. Как правило, мы будем формулировать и доказывать теоремы только для пространства I, но с помощью указанного гомеоморфизма их можно перенести на любое пространство вида I^n, $n \geqslant 1$. То же касается и определений. Конечно, любая биекция между действительной прямой и плоскостью не может иметь такого простого определения (и уж никак не может быть гомеоморфизмом). Это обстоятельство является одной из главных причин, почему мы не берем действительную прямую в качестве основного пространства нашей теории.

1.2. Определение. Следуя Московакису, всякое подмножество любого из пространств I, I^2, I^3, ... назовем *точечным множеством*.

Дескриптивная теория множеств организует точечные множества в специальные классы. Дадим следующее определение, несколько отклоняющееся от терминологии Московакиса.

1.3. Определение. Пусть f: I на I^2 есть определенный выше гомеоморфизм. Если $1 \leqslant j \leqslant n$, то введем гомеоморфизм f_j^n: I^n на I^{n+1} следующим равенством:

$$f_j^n(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, (\alpha_j)_0, (\alpha_j)_1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \rangle,$$

где $f(\alpha_j) = \langle (\alpha_j)_0, (\alpha_j)_1 \rangle$.

Совокупность Γ точечных множеств назовем *точечным классом*, если для всех j, n, A, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant j \leqslant n$ и $A \subseteq I^n$, выполняется эквивалентность

$$A \in \Gamma \leftrightarrow f_j^n{}''A \in \Gamma.$$

Таким образом, каждый точечный класс Γ вполне определен своим «одномерным» подклассом $\{A\colon A \in \Gamma \text{ и } A \subseteq I\}$. Если бы мы использовали действительные числа вместо пространства I, то было бы невозможно последовательно проводить такую независимость от размерности. Все же большинство наших последующих определений конкретных точечных классов имеет смысл и для действительных чисел, а практически все теоремы остаются справедливыми для соответствующих «точечных классов» подмножеств конечных степеней действительной прямой.

1.4. Определение. Для каждого точечного множества $A \subseteq I^n$ положим $\bar{A} = I^n - A$. Для каждого точечного класса Γ определим дуальный, или двойственный, класс $\breve{\Gamma}$ следующей эквивалентностью:

$$A \in \breve{\Gamma} \leftrightarrow \bar{A} \in \Gamma.$$

Если $\breve{\Gamma}$ совпадает с классом Γ, то Γ назовем *самодвойственным*.

Например, если Γ есть класс всех открытых множеств, то $\breve{\Gamma}$ будет классом всех замкнутых множеств, и наоборот. В этом случае класс Γ не является самодвойственным. Если же Γ есть класс всех открыто-замкнутых множеств, то $\Gamma = \breve{\Gamma}$. (Отметим, что определенные выше базисные открытые подмножества пространства I будут открыто-замкнутыми.)

§ 2. Борелевские и проективные множества

Мы собираемся изучать свойства простых (или определимых) точечных множеств. Однако мы не будем при этом рассматривать общее понятие определимого (например, ординально определимого относительно некоторого действительного числа) множества, которое кажется слишком сложным, чтобы быть плодотворным применительно к точечным множествам. Конечно, одной из задач дескриптивной теории множеств является получение одних свойств определимых точечных множеств из других свойств таких множеств. Однако в основном мы будем интересоваться лишь множествами, определимыми в некотором специальном смысле. *Классическая* дескриптивная теория множеств имеет дело с множествами, которые получаются из открытых множеств с помощью некоторых специальных простых операций. Обычно рассматривают следующие две группы этих операций:

(а) операции булевой алгебры множеств одной размерности,

(б) проекция.

Сначала мы ограничимся только операциями группы (а).

2.1. Определение. Точечное множество $A \subseteq I^n$ называется *борелевским*, если оно принадлежит σ-алгебре, порожденной открытыми подмножествами пространства I^n.

Иными словами, борелевские подмножества пространства I^n образуют наименьший класс Γ, содержащий все открытые в I^n

множества, и такой, что

$$A \in \Gamma \to \bar{A} \in \Gamma,$$
$$\forall i \in \omega\,(A_i \in \Gamma) \to \bigcup_{i \in \omega} A_i \in \Gamma.$$

Ясно, что класс всех борелевских подмножеств всех пространств вида I^n является точечным классом, причем самодвойственным.

Борелевские множества можно организовать в иерархию следующим образом.

2.2. Определение. Для каждого счетного ординала $\rho > 0$ индукцией по ρ определим классы $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$, $\mathbf{\Pi}^0_\rho$ точечных подмножеств фиксированного пространства I^n:

$$A \in \mathbf{\Sigma}^0_1 \leftrightarrow A \text{ открыто}, \quad A \in \mathbf{\Pi}^0_\rho \leftrightarrow \bar{A} \in \mathbf{\Sigma}^0_\rho,$$

$A \in \mathbf{\Sigma}^0_\rho \leftrightarrow$ найдутся множества A_0, A_1, ... такие, что каждое $A_i \in \mathbf{\Pi}^0_{\rho_i}$ для некоторого ординала $\rho_i < \rho$ и $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$

(предполагается $\rho > 1$).

Положим также

$$A \in \mathbf{\Delta}^0_\rho \leftrightarrow A \in \mathbf{\Sigma}^0_\rho \cap \mathbf{\Pi}^0_\rho.$$

Каждый из классов $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$, $\mathbf{\Pi}^0_\rho$, $\mathbf{\Delta}^0_\rho$ является точечным классом. Нетрудно проверить, что объединение $\bigcup_{0<\rho<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\rho$ есть в точности класс всех борелевских множеств.

Эта система обозначений принадлежит школе Клини. В классической терминологии $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$ образует *аддитивный* класс ρ, $\mathbf{\Pi}^0_\rho$ образует *мультипликативный* класс ρ, $\mathbf{\Delta}^0_\rho$ — *двусторонний* класс ρ. Также полезно иметь в виду, что $\mathbf{\Sigma}^0_2 = F_\sigma$, $\mathbf{\Pi}^0_2 = G_\delta$, $\mathbf{\Sigma}^0_3 = G_{\delta\sigma}$ и т. п.

2.3. Теорема. *Классы $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$, $\mathbf{\Pi}^0_\rho$ и $\mathbf{\Delta}^0_\rho$ замкнуты относительно конечных объединений, конечных пересечений и непрерывных прообразов.*

Класс Γ называется *замкнутым относительно непрерывных прообразов*, если для любого непрерывного отображения $f\colon I^n \to I^m$ и любого множества $A \in \Gamma$, $A \subseteq I^m$, будет $f^{-1}(A) \in \Gamma$. Доказательство теоремы тривиально. □

2.4. Определение. Множество $U \subseteq I^2$ называется *универсальным* для точечного класса Γ, если $U \in \Gamma$ и совокупность всех множеств вида

$$\{\beta\colon \langle \alpha, \beta\rangle \in U\}$$

в точности совпадает с совокупностью всех подмножеств пространства I, принадлежащих классу Γ.

Многие важные несамодвойственные точечные классы содержат универсальное множество.

2.5. Теорема (Лебег [1]). *Пусть $1 \leqslant \rho < \omega_1$. Тогда найдется множество U, универсальное для класса $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\rho = 1$. Пусть B_0, B_1, ... есть база для открытых в I множеств. Положим

$$\langle \alpha, \beta\rangle \in U \leftrightarrow \exists n\,(\beta \in B_{\alpha(n)}).$$

Нетрудно проверить, что U является искомым универсальным множеством.

Пусть теперь $\rho > 1$ и для каждого $\nu < \rho$ уже построено универсальное для класса $\mathbf{\Sigma}^0_\nu$ множество U_ν. Возьмем такую функцию $g\colon \omega \to \{\nu\colon 1 \leqslant \nu < \rho\}$, что каждый прообраз $g^{-1}(\nu)$ бесконечен. Положим

$$\langle \alpha, \beta\rangle \in U \leftrightarrow \exists i\,(\langle \alpha_i, \beta\rangle \notin U_{g(i)}),$$

где $\alpha_i(n) = \alpha\left(p_i^{n+1}\right)$, а p_i есть $i+1$-е простое число. Функции h_i, заданные равенством $h_i(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle \alpha_i, \beta\rangle$, непрерывны. Поскольку классы $\mathbf{\Pi}^0_\nu$ замкнуты относительно непрерывных прообразов, то каждое множество $\{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \langle \alpha_i, \beta\rangle \notin U_{g(i)}\}$ принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^0_{g(i)}$. Следовательно, $U \in \mathbf{\Sigma}^0_\rho$. Для доказательства универсальности множества U достаточно заметить, что I^2 принадлежит каждому из классов $\mathbf{\Sigma}^0_\nu$. □

2.6. Следствие. *Пусть $1 \leqslant \rho < \omega_1$. Тогда найдется множество U, универсальное для класса $\mathbf{\Pi}^0_\rho$.*

2.7. Замечание. Свойство «иметь универсальное множество», как и многие другие свойства, выполняется для точечного класса Γ, если и только если оно выполняется для дуального класса $\breve{\Gamma}$.

Теперь мы уже можем доказать теорему об иерархии для классов $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$.

2.8. Теорема. *Пусть $1 \leqslant \nu < \rho < \omega_1$. Тогда $\mathbf{\Delta}^0_\nu \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\nu \subseteq \mathbf{\Delta}^0_\rho$.*

Доказательство. $\mathbf{\Delta}^0_\nu \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\nu$ выполняется по определению. Проверка $\mathbf{\Sigma}^0_\nu \not\subseteq \mathbf{\Delta}^0_\nu$ составляет основную часть доказательства. Введем множество $A \subseteq I$ эквивалентностью

$$\alpha \in A \leftrightarrow \langle \alpha, \alpha\rangle \in U,$$

где множество U универсально для рассматриваемого класса $\mathbf{\Sigma}^0_\nu$. Тогда $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\nu$, так как класс $\mathbf{\Sigma}^0_\nu$ замкнут относительно непрерывных прообразов. Предположим, что $A \in \mathbf{\Delta}^0_\nu$. Тогда $A \in \mathbf{\Pi}^0_\nu$. В силу выбора множества U найдется такое $\alpha \in I$, что

$$\beta \in A \leftrightarrow \langle \alpha, \beta\rangle \notin U.$$

Но тогда

$$\langle \alpha, \alpha\rangle \in U \leftrightarrow \alpha \in A \leftrightarrow \langle \alpha, \alpha\rangle \notin U \text{ — противоречие.}$$

Далее, $\Sigma^0_1 \subseteq \Sigma^0_2$, поскольку каждое открытое множество я ляется счетным объединением замкнутых множеств (именн базисных открытых множеств). Если $1 < \nu \leqslant \rho$, то по опред лению $\Sigma^0_\nu \subseteq \Sigma^0_\rho$. Если $1 \leqslant \nu < \rho$ и $A \in \Pi^0_\nu$, то $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$, г каждое A_i совпадает с A. Значит, $\Pi^0_\nu \subseteq \Sigma^0_\rho$, и поэтому $\Sigma^0_\nu \subseteq$ Таким образом, мы доказали $\Sigma^0_\nu \subseteq \Delta^0_\rho$ при $1 \leqslant \nu < \rho$. Наконе если $1 \leqslant \nu < \rho$, то $\Sigma^0_\nu \neq \Delta^0_\rho$, так как $\Sigma^0_\nu \not\supseteq \Pi^0_\nu \subseteq \Delta^0_\rho$. □

Рассмотрим теперь вторую основную операцию дескрипти ной теории множеств — операцию проекции.

2.9. Определение. *Проекцией* множества $A \subseteq I^{n+1}$ наз вем множество

$$\{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle\colon \exists \beta\, (\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\rangle \in A)\}.$$

Таким образом, проекция множества A является подмнож ством пространства I^n. Если бы мы хотели избежать рассмот ния пространств I^n с различными n, то операцию проекц можно было бы заменить операцией *непрерывного образа*. Сл дующее определение было введено Лузиным [2] и (по-ви мому, независимо) Серпинским [1].

2.10. Определение. Класс *проективных множеств* ес замыкание класса открытых множеств относительно операц проекции и дополнения.

Проективные множества образуют точечный класс, замкн тый относительно конечных объединений и пересечений мн жеств одинаковой размерности, но не относительно счетн объединений и пересечений. Подобно классу борелевских м жеств, этот класс можно организовать в иерархию следующ образом.

2.11. Определение. Индукцией для каждого $n \in \omega$ оп делим:

$\Sigma^1_0 = \Sigma^0_1$ — класс всех открытых множеств,

$$\Pi^1_n = \check{\Sigma}^1_n,$$

$A \in \Sigma^1_{n+1} \leftrightarrow \exists B \in \Pi^1_n$ (A есть проекция множества B),

$$\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n.$$

2.12. Замечание. Если мы хотим рассматривать дейст тельную прямую или дисконтинуум 2^ω, то в определениях кла проективных множеств и класса Σ^1_0 нужно Σ^0_1 заменить на класс В классической дескриптивной теории множеств множе класса Σ^1_1 назывались A-*множествами*, множества кла Π^1_1 — CA-*множествами*; множества классов Σ^1_2 и Π^1_2 наз

ют соответственно A_2-множествами (или PCA-множествами) и A_2-*множествами* (или CPCA-*множествами*) и т. д.

Каждый из классов Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n является точечным классом. Нетрудно показать, что класс всех проективных множеств есть объединение $\bigcup_{n \in \omega} \Sigma^1_n$.

2.13. Теорема. *Классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n замкнуты относительно конечных объединений, конечных пересечений и непрерывных прообразов.*

Аналогично случаю борелевских множеств, справедлива теорема об универсальном множестве и теорема об иерархии.

2.14. Теорема (Лузин). *Если $n \in \omega$, то найдется множество U_n, универсальное для класса Σ^1_n.*

Доказательство. Пусть множество $U^* \subseteq I^{n+2}$ является универсальным для класса Σ^0_1 (в том смысле, что множества вида

$$\{\langle \beta, \beta_1, \ldots, \beta_m\rangle\colon \langle \alpha, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_m\rangle \in U^*\}$$

образуют класс всех открытых подмножеств пространства I^{n+1}). Предположим для определенности, что n четно. Тогда множество

$$U_n = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \exists \beta_1 \forall \beta_2 \ldots \exists \beta_{n-1} \forall \beta_n\, (\langle \alpha, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \in U^*)\}$$

будет искомым. □

2.15. Теорема. $\Delta^1_n \subsetneq \Sigma^1_n \subsetneq \Delta^1_{n+1}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.8. □

Булевы алгебраические операции, порождающие класс борелевских множеств, существенно отличаются по своему характеру от операции проекции. Однако борелевская и проективная иерархии оказываются тесно связанными между собой. Для доказательства теоремы об этой связи проведем более детальный анализ Π^1_1-множеств. Этот анализ будет полезным и для других целей.

Пусть для определенности натуральное n четно. Тогда множество $A \subseteq I$ является Π^1_n-множеством (т. е. принадлежит классу Π^1_n), если и только если найдется открытое множество $B \subseteq I^{n+1}$ такое, что

$$\alpha \in A \leftrightarrow \forall \beta_1 \exists \beta_2 \ldots \forall \beta_n\, (\langle \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \in B).$$

Следующая теорема вытекает из определения топологии пространства I.

2.16. Теорема. *Множество $A \subseteq I$ является Π^1_n-множеством при четном n (Σ^1_n-множеством при четном n), если и только*

если найдется такое $n+1$-арное отношение R, что:

$$\alpha \in A \leftrightarrow \forall\beta_1\exists\beta_2 \ldots \forall\beta_n\exists m R(\alpha \restriction m, \beta_1 \restriction m, \ldots, \beta_n \restriction m)$$

$$(\alpha \in A \leftrightarrow \exists\beta_1\forall\beta_2 \ldots \forall\beta_n\exists m R(\alpha \restriction m, \beta_1 \restriction m, \ldots, \beta_n \restriction m)$$

соответственно), *где* $\beta \restriction m$ *обозначает последовательнос* $\langle\beta(0), \ldots, \beta(m-1)\rangle$.

Таким образом, для каждого $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества A найдется б нарное отношение R такое, что

$$\alpha \in A \leftrightarrow \forall\beta\exists m R(\alpha \restriction m, \beta \restriction m).$$

В этом случае для любого $\alpha \in I$ определим

$$X_{\alpha R} = \{\beta \restriction m\colon \beta \in I \wedge \forall n < m \neg R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n)\}.$$

Пусть Seq есть совокупность всех конечных последовательн стей натуральных чисел, включающая последовательность длины 0.

2.17. Определение. Введем частичный порядок $\prec$ множестве Seq следующим образом: $\sigma \prec \tau$, если σ есть с ственное продолжение последовательности τ.

2.18. Теорема. *Пусть множество A и отношение R таков как указано выше. Тогда справедлива следующая эквивален ность*:

$$\alpha \in A \leftrightarrow \textit{отношение} \prec \textit{является фундированным на мно стве } X$$

т. е. не существует убывающих в смысле отношения $\prec$ бес нечных последовательностей элементов множества $X_{\alpha R}$.

Доказательство. Бесконечная убывающая последо тельность элементов множества $X_{\alpha R}$ автоматически порожда такую функцию $\beta \in I$, что $\forall m \neg R(\alpha \restriction m, \beta \restriction m)$.

2.19. Определение. Пусть отношение $<$ фундировано некотором множестве X. Индукцией по $x \in X$ определим д каждого $x \in X$ ординал $|x|^<$ следующим образом:

$$|x|^< = \sup_{y<x}(|y|^< + 1).$$

Длиной отношения $<$ назовем ординал

$$\sup_{x \in X}(|x|^< + 1).$$

Теперь мы уже достаточно подготовлены для того, чт доказать следующую теорему, которая является одной из ц ральных теорем дескриптивной теории множеств.

2.20. Теорема Суслина. *Класс $\mathbf{\Delta}^1_1$ совпадает с клас всех борелевских множеств.*

Доказательство. По теореме 2.15 $\mathbf{\Sigma}^0_1 = \Sigma^1_0 \subseteq \mathbf{\Delta}^1_1$. Следо тельно, каждое открытое множество является $\mathbf{\Delta}^1_1$-множе ством. Докажем, что класс $\mathbf{\Delta}^1_1$ замкнут относительно счетных бъединений и дополнений. Случай дополнений тривиален.

Пусть $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$, где каждое A_i есть $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество. Поскольку каждое A_i автоматически будет $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством, то найдется замкнутое множество $B_i \subseteq I^2$ такое, что

$$\alpha \in A_i \leftrightarrow \exists\beta(\langle\alpha, \beta\rangle \in B_i).$$

Таким образом,

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists i\exists\beta(\langle\alpha, \beta\rangle \in B_i) \leftrightarrow \exists\beta(\langle\alpha, \beta'\rangle \in B_{\beta(0)}),$$

где $\beta' \in I$ определено равенством $\beta(n+1) = \beta'(n)$. Отметим, что каждое множество $\{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \langle\alpha, \beta'\rangle \in B_{\beta(0)}\}$ замкнуто. Поэтому A является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством.

С другой стороны, каждое A_i принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^1_1$. Значит, найдется открытое множество $B_i \subseteq I$ такое, что

$$\alpha \in A_i \leftrightarrow \forall\beta(\langle\alpha, \beta\rangle \in B_i).$$

Но тогда

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists i\forall\beta(\langle\alpha, \beta\rangle \in B_i) \leftrightarrow \forall\beta\exists i(\langle\alpha, (\beta)_i\rangle \in B_i),$$

где $(\beta)_i(n) = \beta(p_i^{n+1})$, а p_i есть $i+1$-е простое число. (Третье утверждение, очевидно, следует из второго, а если $\forall i\exists\beta_i(\langle\alpha, \beta_i\rangle \notin \notin B_i)$, то возьмем $\beta \in I$ такое, что $(\beta)_i = \beta_i$, и получим $\forall i(\langle\alpha, (\beta)_i\rangle \notin B_i)$.) Но множество

$$\{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \exists i(\langle\alpha, (\beta)_i\rangle \in B_i)\}$$

открыто. Следовательно, A есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество и $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество. Таким образом, мы доказали, что каждое борелевское множество принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Рассмотрим произвольное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $A \subseteq I$. По теореме 2.16 найдется такое отношение R, что

$$\alpha \in A \leftrightarrow \forall\beta\exists m R(\alpha \restriction m, \beta \restriction m).$$

В силу теоремы 2.18 имеет место эквивалентность

$\alpha \in A \leftrightarrow$ отношение $\prec$ фундировано на множестве $X_{\alpha R}$.

2.21. Лемма. *Предположим, что $\exists\rho < \omega_1\ \forall\alpha \in A$ (отноше $\prec \restriction X_{\alpha R}$ имеет длину $\leqslant \rho$). Тогда множество A борелевское.*

Доказательство. Для каждого $\sigma \in X_{\alpha R}$ положим $|\sigma|_\alpha = |\sigma|^{<\restriction X_{\alpha R}}$. Индукцией по $\rho < \omega_1$ докажем, что при любом $\sigma \in$ Seq множество

$$\{\alpha\colon \sigma \notin X_{\alpha R} \text{ или } |\sigma|_\alpha \leqslant \rho\}$$

является борелевским. Если $\rho = 0$, то

$$\{\alpha\colon \sigma \notin X_{\alpha R} \text{ или } |\sigma|_\alpha = 0\} = \bigcap_{\tau<\sigma} \{\alpha\colon \tau \notin X_{\alpha R}\},$$

а последнее множество замкнуто, так как всякое $\{\alpha\colon \tau \in X$ открыто-замкнуто.

Если же $\rho > 0$, то

$$\{\alpha\colon \sigma \notin X_{\alpha R} \text{ или } |\sigma|_\alpha \leqslant \rho\} = \bigcap_{\tau<\sigma} \bigcup_{\nu<\rho} \{\alpha\colon \tau \notin X_{\alpha R} \text{ или } |\tau|_\alpha \leqslant$$

Теперь лемма очевидна, так как по условию

$A = \{\alpha\colon \prec \restriction X_{\alpha R}$ есть фундированное отношение длины $\leqslant$

$$= \bigcap_{\sigma\in \mathrm{Seq}} \bigcup_{\nu<\rho} \{\alpha\colon \sigma \notin X_{\alpha R} \text{ или } |\sigma|_\alpha \leqslant$$

Продолжаем доказательство теоремы Суслина. Пусть мн жество $A \subseteq I$ принадлежит классу Δ^1_1; докажем, что A бореле ское. Рассмотрим отношения R и S такие, что

$$\alpha \in A \leftrightarrow \forall\beta \exists n R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n),$$

$$\alpha \in \overline{A} \leftrightarrow \forall\gamma \exists n S(\alpha \restriction n, \gamma \restriction n).$$

Пусть Y есть совокупность всех троек $\langle \alpha \restriction n, \beta \restriction n, \gamma \restriction n\rangle$ таки что

$$\beta \restriction n \in X_{\alpha R} \wedge \gamma \restriction n \in X_{\alpha S}.$$

(Заметим, что это условие зависит лишь от конечной час $\alpha \restriction n$ функции $\alpha \in I$.) Упорядочим множество Y следующ образом:

$$\langle \alpha_1 \restriction n, \beta_1 \restriction n, \gamma_1 \restriction n\rangle \prec \langle \alpha_2 \restriction n, \beta_2 \restriction n, \gamma_2 \restriction n\rangle$$

$$\leftrightarrow \alpha_1 \restriction n < \alpha_2 \restriction n \wedge \beta_1 \restriction n < \beta_2 \restriction n \wedge \gamma_1 \restriction n < \gamma_2 \restriction$$

Отношение $\prec$ фундировано на Y, поскольку бесконечная уб вающая последовательность троек из Y привела бы к сущест ванию такой тройки $\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle \in I^3$, что

$$\forall n \neg R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n) \wedge \forall n \neg S(\alpha \restriction n, \beta \restriction n),$$

т. е. $\alpha \notin A \cup \overline{A}$.

Длину отношения $\prec$ на Y обозначим через ρ. Пусть $\alpha \in$ Возьмем $\gamma \in I$ такое, что $\forall n \neg S(\alpha \restriction n, \gamma \restriction n)$, и определим

$$f(\beta \restriction n) = \langle \alpha \restriction n, \beta \restriction n, \gamma \restriction n\rangle.$$

Тогда f отображает множество $X_{\alpha R}$ на Y взаимно однозна и с сохранением порядка $\prec$. Следовательно, длина отношен $\prec \restriction X_{\alpha R}$ не превосходит ρ, и множество A является борел ским согласно лемме 2.21. □

Доказательство следующей теоремы является тривиальн обобщением первой части доказательства теоремы Суслина.

2.22. Теорема. *Классы Σ^1_n и Π^1_n замкнуты относительно счетных объединений и пересечений при $n \geqslant 1$.*

В некоторых результатах, связывающих проективные мно ества с действием булевых алгебраических операций на от рытые множества, фигурируют несчетные объединения.

2.23. Теорема (Серпинский [1]). *Каждое Σ^1_2-множество является объединением $\aleph_1$ борелевских множеств.*

Доказательство (эскиз). Доказательство теоремы Сус ина показывает, что каждое Π^1_1-множество $A \subseteq I$ является объединением $\aleph_1$ борелевских множеств:

$$A = \bigcup_{\rho<\omega_1} \{\alpha\colon \prec \restriction X_{\alpha R} \text{ является фундированным отношением длины } \leqslant \rho\}.$$

2.24. Лемма. *Каждое Σ^1_1-множество A является объединением $\aleph_1$ борелевских множеств.*

Доказательство. Пусть $A = \{\alpha\colon \exists\beta \forall n R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n)\}$. Упорядочим пространство I лексикографически: $\beta_1 < \beta_2$, если наименьшее n такое, что $\beta_1(n) \neq \beta_2(n)$, удовлетворяет неравен ству $\beta_1(n) < \beta_2(n)$. Нетрудно проверить, что для каждого $\alpha \in A$ найдется наименьшее $\beta = \beta_\alpha$ такое, что $\forall n R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n)$. Теперь для всякого $\alpha \in A$ положим

$$Z_\alpha = \{\gamma \restriction n\colon \gamma < \beta_\alpha \wedge \gamma \restriction n \neq \beta_\alpha \restriction n \wedge \forall m \leqslant n R(\alpha \restriction m, \gamma \restriction m)\}.$$

Ясно, что отношение $\prec$ фундировано на Z_α. Для каждого $\rho < \omega_1$ определим множество

$$A_\rho = \{\alpha\colon \alpha \in A \text{ и } \prec \restriction Z_\alpha \text{ имеет длину } \leqslant \rho\}.$$

Очевидно, $A = \bigcup_{\rho<\omega_1} A_\rho$. Кроме того, каждое множество A_ρ яв ляется борелевским (доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 2.21). Лемма доказана. □

Продолжаем доказательство теоремы. Рассмотрим произ вольное Σ^1_2-множество $A \subseteq I$. В силу теоремы 2.16 найдется отношение R, удовлетворяющее следующей эквивалентности:

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists\beta \forall\gamma \exists n R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n, \gamma \restriction n).$$

Таким образом,

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists\beta \quad (\text{отношение } \prec \restriction X_{\alpha\beta R} \text{ фундировано}),$$

где $X_{\alpha\beta R}$ определяется совершенно аналогично множеству $X_{\alpha R}$. Тогда

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists\rho < \omega_1 \exists\beta \ (\prec \restriction X_{\alpha\beta R} \text{ фундировано и имеет длину } \leqslant \rho)$$

$$\leftrightarrow \exists\rho < \omega_1 \exists\beta \exists f\ (f\colon X_{\alpha\beta R} \to \rho \wedge f \text{ сохраняет порядок}).$$

С помощью свертывания β и f в одну функцию γ: $\omega \to \omega$ нетрудно проверить, что множество

$$\{\alpha\colon \exists\beta\exists f\,(f\colon X_{\alpha\beta R} \to \rho \wedge f \text{ сохраняет порядок})\}$$

является Σ^1_1-множеством, каково бы ни было $\rho < \omega_1$. Следовательно, наше множество A является объединением $\aleph_1$ Σ^1_1-множеств. Теперь теорема следует из леммы 2.24. □

Известно, что средствами теории ZFC нельзя ни доказать, ни опровергнуть обращение теоремы 2.23, т. е. утверждение о том, что каждое объединение $\aleph_1$ борелевских множеств является Σ^1_2-множеством.

§ 3. Структурные свойства и свойства регулярности точечных классов

Все изложенные до сих пор свойства классов Σ^1_n и Σ^0_ρ являются одновременно и свойствами дуальных классов Π^1_n и Π^0_ρ. (Исключение составляет лишь теорема 2.23.) Но для других, более глубоких структурных свойств такая дуальность не имеет места. Есть также несколько свойств, для которых дуальность не имеет места по тривиальным соображениям. Например, класс Σ^0_n замкнут относительно счетных объединений, а Π^0_n не обладает этим свойством. Можно сформулировать следующий фундаментальный эмпирический принцип дескриптивной теории множеств:

Имеется список $\mathscr{P}$ интересных структурных свойств точечных классов такой, что если Γ есть интересный не самодвойственный точечный класс, то каждое свойство из списка $\mathscr{P}$ присуще либо Γ, либо $\breve{\Gamma}$, но не обоим этим классам одновременно.

Доказательство невозможности наличия у обоих классов Γ и $\breve{\Gamma}$ конкретного свойства из списка $\mathscr{P}$ обычно довольно несложно и использует некоторый общий принцип, а вот проверка рассматриваемого свойства у одного из классов Γ и $\breve{\Gamma}$ представляет, как правило, определенные трудности. В ряде случаев эти трудности не удается преодолеть, оставаясь на базе аксиом ZFC.

3.1. Определение. Пусть Γ есть точечный класс. *Принцип редукции* для класса Γ, кратко Γ-*редукция*, формулируется следующим образом:

Для любого $n \geqslant 1$ и любых множеств A, $B \in \Gamma$ таких, что A, $B \subseteq I^n$, найдутся непересекающиеся множества A', $B' \in \Gamma$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$A' \subseteq A, \quad B' \subseteq B, \quad A' \cup B' = A \cup B$$

(рис. 9). Покажем, что при определенных условиях классы Γ и $\breve{\Gamma}$ не могут одновременно иметь свойство редукции.

3.2. Теорема. *Пусть точечный класс Γ имеет универсальное множество и замкнут относительно непрерывных прообразов. Тогда по крайней мере один из классов Γ и $\breve{\Gamma}$ не обладает свойством редукции.*

Доказательство. Рассмотрим универсальное для класса Γ множество U. Пусть $\alpha \longmapsto \langle \alpha_0, \alpha_1\rangle$ есть канонический гомеоморфизм I на I^2. Определим множества

$$A = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \langle \alpha_0, \beta\rangle \in U\} \quad \text{и}$$

$$B = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \langle \alpha_1, \beta\rangle \in U\}.$$

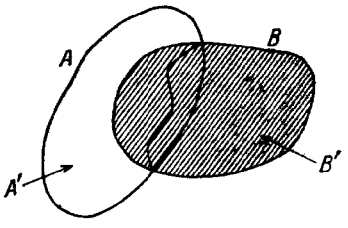

Рис. 9.

Если имеет место Γ-*редукция*, то пусть непересекающиеся принадлежащие классу Γ множества $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$ таковы, что $A' \cup B' = A \cup B$. Если имеет место $\breve{\Gamma}$-*редукция*, то пусть непересекающиеся принадлежащие классу $\breve{\Gamma}$ множества $A^* \subseteq \overline{A'}$ и $B^* \subseteq \overline{B'}$ таковы, что $A^* \cup B^* = \overline{A'} \cup \overline{B'}$. Ясно, что $A^* = \overline{B^*}$, откуда $A^* \in \Gamma \cap \breve{\Gamma}$. Для каждого $\alpha \in I$ нетрудно проверить, что если множество $\{\beta\colon \langle \alpha_0, \beta\rangle \in U\}$ является дополнением множества $\{\beta\colon \langle \alpha_1, \beta\rangle \in U\}$, то $\langle \alpha, \beta\rangle \in \overline{A^*} \leftrightarrow \langle \alpha, \beta\rangle \notin A$ и $\langle \alpha, \beta\rangle \notin \overline{B^*} \leftrightarrow \langle \alpha, \beta\rangle \in B$. Следовательно, каждое множество $C \in \Gamma \cap \breve{\Gamma}$, $C \subseteq I$, имеет вид $\{\beta\colon \langle \alpha, \beta\rangle \in A^*\}$.

Пусть $C = \{\alpha\colon \langle \alpha, \alpha\rangle \in A^*\}$. Имеем $C \in \Gamma \cap \Gamma^*$, так как класс Γ замкнут относительно непрерывных прообразов. Значит, для некоторого α выполняется равенство $C = \{\beta\colon \langle \alpha, \beta\rangle \notin \notin A^*\}$. Таким образом,

$$\langle \alpha, \alpha\rangle \in A^* \leftrightarrow \alpha \in C \leftrightarrow \langle \alpha, \alpha\rangle \notin A^*$$

— противоречие. □

Следующий принцип представляет собой усиление принципа редукции.

3.3. Определение. Пусть Γ есть точечный класс. *Принцип* (полного) *предупорядочения* для класса Γ, кратко Γ-*предупорядочение*, формулируется следующим образом:

Для каждого множества $A \in \Gamma$ найдутся: функция $F\colon A \to \mathrm{On}$ (On — класс всех ординалов) и множества R, $S \in \breve{\Gamma}$ такие, что при любом $\beta \in A$ выполняются следующие эквивалентности:

$$\alpha \in A \wedge F(\alpha) < F(\beta) \leftrightarrow \langle \alpha, \beta\rangle \in R,$$

$$\alpha \in A \wedge F(\alpha) \leqslant F(\beta) \leftrightarrow \langle \alpha, \beta\rangle \in S.$$

3.4. Теорема. *Пусть точечный класс* Γ *замкнут относительно конечных объединений, конечных пересечений и непрерывных прообразов. Тогда из* Γ*-предупорядочения следует* Γ*-редукция.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \Gamma$. Положим

$$C_1 = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \alpha(0) = 0 \wedge \beta \in A\},$$

$$C_2 = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \alpha(0) = 1 \wedge \beta \in B\}.$$

Рассмотрим множество $C = C_1 \cup C_2$. По условию теоремы, $C \in \Gamma$. Возьмем функцию $F\colon C \to \mathrm{On}$ и множества R, S, существование которых обеспечивается принципом предупорядочения для Γ. Пусть

$$A' = \{\beta \in A\colon F(\mathbf{0}, \beta) < F(\mathbf{1}, \beta)\} = \{\beta \in A\colon \langle\langle \mathbf{1}, \beta\rangle, \langle \mathbf{0}, \beta\rangle\rangle \notin S\};$$

$$B' = \{\beta \in A\colon F(\mathbf{1}, \beta) \leqslant F(\mathbf{0}, \beta)\} = \{\beta \in A\colon \langle\langle \mathbf{0}, \beta\rangle, \langle \mathbf{1}, \beta\rangle\rangle \notin R\},$$

где $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in I$ — функции, тождественно принимающие значения 0 и 1 соответственно. Переходя к дополнениям множеств R и S и используя свойства замкнутости класса Γ, нетрудно показать, что множества A' и B' принадлежат классу Γ. Кроме того, легко видеть, что A' и B' обеспечивают редукцию для множеств A и B. □

Принцип предупорядочения влечет ряд других интересных структурных свойств, кроме свойства редукции.

3.5. Теорема. *Если* $1 \leqslant \rho < \omega_1$, *то имеет место* $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$*-предупорядочение.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$-множество $A \subseteq I$. Имеем $A = \bigcup\limits_{i \in \omega} A_i$, где каждое A_i есть $\mathbf{\Delta}^0_\rho$-множество. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $A_i \subseteq A_j$ для всех $i < j$. Если $\alpha \in A$, то через $F(\alpha)$ обозначим наименьшее натуральное i такое, что $\alpha \in A_i$. Для каждого $\beta \in A$ справедливы следующие эквивалентности:

$$\alpha \in A \wedge F(\alpha) < F(\beta) \leftrightarrow (\beta \notin A_0 \wedge \forall i\,(\beta \in A_{i+1} \to \alpha \in A_i));$$

$$\alpha \in A \wedge F(\alpha) \leqslant F(\beta) \leftrightarrow \forall i\,(\beta \in A_i \to \alpha \in A_i).$$

Правые части этих эквивалентностей представляют собой $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-отношения. □

3.6. Замечание. Если в качестве основного пространства рассматривать действительную прямую, то доказанная теорема не будет выполняться для класса $\mathbf{\Sigma}^0_1$.

3.7. Теорема. *Имеет место* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-предупорядочение.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $A \subseteq I$. Пусть отношение R таково, что

$$\alpha \in A \leftrightarrow {<} \restriction X_{\alpha R} \text{ фундировано.}$$

Через $F(\alpha)$ обозначим длину отношения ${<} \restriction X_{\alpha R}$. Тогда для каждого $\beta \in A$ справедливы следующие эквивалентности:

$$\alpha \in A \wedge F(\alpha) < F(\beta) \leftrightarrow \exists f\,(f\colon X_{\alpha R} \to X_{\beta R} \wedge (\sigma < \tau \to f(\sigma) < f(\tau))$$

$\wedge$ пустая последовательность 0 не принадлежит области всех значений функции f);

$$\alpha \in A \wedge F(\alpha) \leqslant F(\beta) \leftrightarrow \exists f\,(f\colon X_{\alpha R} \to X_{\beta R} \wedge (\sigma < \tau \to f(\sigma) < f(\tau))).$$

Для доказательства, к примеру, второй эквивалентности достаточно при $F(\alpha) \leqslant F(\beta)$ определить $f(\sigma)$ индукцией по длине σ так, чтобы $|f(\sigma)|_\beta = |\sigma|_\alpha$.

Наконец, с помощью какого-нибудь канонического взаимно однозначного соответствия между натуральными числами и конечными последовательностями натуральных чисел можно показать, что правые части записанных эквивалентностей выражают $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношения. (Функция f при таком соответствии может быть представлена в виде функции из ω в ω.) □

3.8. Теорема (Московакис). *Из* $\mathbf{\Pi}^1_n$*-предупорядочения следует* $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$*-предупорядочение.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq I$ является $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-множеством. Тогда $\alpha \in A \leftrightarrow \exists \beta\,(\langle \alpha, \beta\rangle \in B)$ для некоторого $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества B. Пусть функция $F\colon B \to \mathrm{On}$ такова, как указано в определении $\mathbf{\Pi}^1_n$-предупорядочения. Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$G(\alpha) = \inf\{F(\langle \alpha, \gamma\rangle)\colon \langle \alpha, \gamma\rangle \in B\}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что эта функция G обеспечит $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-предупорядочение для множества A. □

3.9. Следствие. *Имеет место* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-предупорядочение.*

3.10. Замечание. Принцип предупорядочения впервые был явно сформулирован, по-видимому, Московакисом, хотя доказательство этого принципа для $\mathbf{\Pi}^1_1$ является в определенном смысле классическим результатом [1]). Принцип редукции для $\mathbf{\Sigma}^1_2$ (следствие из 3.4 и 3.7) доказал Куратовский.

---

[1]) Имеется в виду замечательный принцип сравнения индексов, доказанный Новиковым (Новиков П. С. Избранные труды: Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра. — М.: Наука, 1979, с. 13—25 и 43—48). В принятых здесь терминах этот принцип может быть сформулирован следующим образом: Если $R, Q \subseteq \mathrm{Seq}^2$, то найдется такое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $Y \subseteq I$, что эквивалентность «$\alpha \in Y \leftrightarrow$ длина ${<} \restriction X_{\alpha R}$ меньше длины ${<} \restriction X_{\alpha Q}$» справедлива для любой точки $\alpha \in I$ такой, что отношение $<$ фундировано или на $X_{\alpha R}$, так и на $X_{\alpha Q}$. — *Прим. перев.*

Не все структурные свойства классов Π^1_1 и Σ^1_2 следуют из принципа предупорядочения. Самым известным примером такого свойства является принцип униформизации. Мы отложим обсуждение униформации до § 4, где сущность этого свойства может быть сделана более ясной в терминах эффективной дескриптивной теории множеств.

Теперь перейдем к свойствам несколько иного рода — свойствам регулярности точечных классов.

3.11. Определение. (i) Множество A имеет *свойство Бэра*, если A отличается от некоторого открытого множества на множество первой категории. Множеством *первой категории* называется всякое объединение счетного числа нигде не плотных множеств.

(ii) Множество A имеет *свойство совершенного ядра*, если A либо счетно, либо содержит *совершенное* (т. е. непустое, замкнутое и без изолированных точек) подмножество (совершенное ядро).

В отличие от определений (i) и (ii), имеющих один и тот же смысл для различных пространств, следующее определение приходится давать отдельно для разных пространств.

(iii) Множество действительных чисел A назовем *измеримым*, если A измеримо в смысле меры Лебега. Введем на натуральном ряде ω дискретную меру, определив меру каждого одноэлементного множества $\{n\}$ равной, скажем, $1/2^{n+1}$ (конкретные значения не важны; лишь бы все они были >0 и в сумме давали 1). Множество $A \subseteq I$ назовем *измеримым*, если оно измеримо в смысле произведения ω экземпляров натурального ряда с введенной мерой. Эквивалентное определение получится, если индуцировать меру Лебега на пространство I с помощью стандартного вложения в иррациональные числа.

Аналогично введем меру на множестве $\{0, 1\}$, приписав каждому из множеств $\{0\}$ и $\{1\}$ меру $1/2$. Множество $A \subseteq 2^\omega$ назовем *измеримым*, если оно измеримо в смысле соответствующей меры степени.

Существуют множества, не обладающие ни одним из этих трех свойств. Но эти множества не могут быть слишком простыми:

3.12. Теорема. *Каждое Σ^1_1-множество $A \subseteq I$ измеримо* (Лузин [1]), *имеет свойство Бэра* (Лузин и Серпинский [1]) *и имеет свойство совершенного ядра* (Суслин)[1].

[1]) Теорема о свойстве Бэра объявлена еще в заметке Лузина [1] (теорема VI). Теорема о совершенном ядре (Souslin M. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1917, **164**, № 2, p. 89—91) была по существу доказана Александровым

3.13. Следствие. *Каждое Π^1_1-множество измеримо и обладает свойством Бэра.*

Доказательство. Ясно, что эти свойства переходят с каждого класса Γ на дуальный класс $\check{\Gamma}$. □

3.14. Следствие. *Каждое Σ^1_1-множество либо счетно, либо имеет мощность континуума $2^{\aleph_0}$.*

3.15. Следствие. *Каждое Σ^1_2-множество либо счетно, либо имеет мощность $\aleph_1$, либо имеет мощность $2^{\aleph_0}$.*

Доказательство — из теоремы 2.23. □

§ 4. Эффективная дескриптивная теория множеств

Появление эффективной дескриптивной теории множеств привело к двойному успеху в развитии дескриптивной теории:

(1) Эффективная теория обобщила и углубила классическую теорию, дав подлинную теорию определимости как для действительных чисел, так и для множеств действительных чисел.

(2) Основатели эффективной теории (в особенности Клини) ввели современную систему обозначений (используемую, в частности, в этой главе), а также разнообразную технику, включающую технику кодирования, которая в значительной степени упростила доказательства теорем классической теории.

Напомним, что множество $A \subseteq I$ принадлежит классу Σ^1_k при нечетном k, если и только если найдется отношение R такое, что

$$(*)\ \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \in A \leftrightarrow \exists \beta_1 \forall \beta_2 \ldots \exists \beta_k \forall m R(\alpha_1 \restriction m, \ldots, \alpha_n \restriction m, \beta_1 \restriction m, \ldots, \beta_k \restriction m).$$

Σ^1_k-множества при четном k представимы аналогичным образом, но $\exists \beta_k \forall m$ меняется на $\forall \beta_k \exists m$.

4.1. Определение. Множество $A \subseteq I^n$ принадлежит классу Σ^1_k (k нечетно), если найдется *рекурсивное* отношение[1]) R, для которого выполняется $(*)$.

Понятие *рекурсивного отношения* на конечных последовательностях натуральных чисел получается естественным обра-

(Alexandroff P. Sur la puissanse des ensembles mesurables B.—C. r. Acad. Sci. Paris, 1916, **162**, p. 323—325) еще до введения понятия A-множества.— *Прим. перев.*

[1]) Определение рекурсивного и рекурсивного в α отношения см. в гл. I «Теории рекурсии» или в гл. 6 книги: Шенфилд Дж. Математическая логика. — М.: Наука, 1975. В обозначениях гл. 5 рекурсивное и рекурсивное в α отношение $R \subseteq \mathrm{Seq}$ принадлежит классу $\Delta^{L_\omega}_1$ и $\Delta^{\langle L_{\omega^\cdot}, \alpha\rangle}_1$ соответственно.— *Прим. перев.*

зом (с помощью канонического взаимно однозначного соответствия между Seq и ω) из понятия рекурсивного отношения на натуральных числах.

Определение класса Σ^1_k для четных k дается аналогично.

4.2. Определение. Пусть $\alpha \in I$. Множество $A \subseteq I^n$ принадлежит классу $\Sigma^{1,\alpha}_k$ (k нечетно), если найдется *рекурсивное* [1]) α отношение R такое, что (*) выполняется. Аналогично для четных k.

4.3. Определение. $\Pi^1_n = \breve{\Sigma}^1_n$, $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$. Аналогично вводятся и классы $\Pi^{1,\alpha}_n$, $\Delta^{1,\alpha}_n$.

Эффективные и классические понятия связаны между собой равенствами вида $\Sigma^1_n = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \Sigma^{1,\alpha}_n$.

Определение классов эффективной проективной иерархии можно естественным образом распространить и на множества натуральных чисел, а также на подмножества «смешанных» пространств.

4.4. Определение. Множество $A \subseteq \omega^{n_1} \times I^{n_2}$ принадлежит классу Σ^1_k (k нечетно), если найдется рекурсивное отношение R такое, что выполняется следующая эквивалентность:

$$\langle a_1, \ldots, a_{n_1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_2}\rangle \in A \leftrightarrow \exists\beta_1 \forall\beta_2 \ldots \exists\beta_k \forall m$$
$$R(a_1, \ldots, a_{n_1}, \alpha_1 \restriction m, \ldots, \alpha_{n_2} \restriction m, \beta_1 \restriction m, \ldots, \beta_k \restriction m).$$

Остальные понятия вводим, как выше.

Точечным множеством назовем всякое подмножество любого из пространств вида $\omega^{n_1} \times I^{n_2}$. *Точечным классом* назовем каждую совокупность точечных множеств, замкнутую относительно наших канонических гомеоморфизмов, а также относительно канонических рекурсивных биекций ω^n на ω^m.

Эффективную теорию можно распространить также и на конечные уровни борелевской иерархии. Нетрудно проверить, что множество $A \subseteq I^n$ принадлежит классу Σ^0_k (k нечетно), если и только если найдется отношение R такое, что

$$(**) \qquad \alpha \in A \leftrightarrow \exists a_1 \forall a_2 \ldots \exists a_k R(\alpha \restriction a_k, a_1, \ldots, a_{k-1}),$$

где все переменные a_i пробегают натуральный ряд.

4.5. Определение. Введем классы Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n, $\Sigma^{0,\alpha}_n$, $\Pi^{0,\alpha}_n$, $\Delta^{0,\alpha}_n$ с помощью соотношения (**), отправляясь от рекурсивных R, аналогично тому, как ранее были введены эффективные проективные точечные классы с помощью (*). Множества,

[1]) См. предыдущую сноску.

принадлежащие классу Δ^0_1, называются *рекурсивными*; множества, принадлежащие классу Σ^0_1, называются *рекурсивно перечислимыми*.

С небольшими изменениями эффективные классы можно определить и для других польских пространств, как-то 2^ω и действительная прямая. При этом, как и в классической теории, класс Σ^0_1 ведет себя несколько иначе, чем в случае пространства I, и некоторые результаты об этом классе справедливы только для пространства I.

Понятие борелевского множества также имеет эффективный аналог — *гиперарифметические* множества. В их определении первый несчетный ординал ω_1 нужно заменить на *ординал* ω_1 *Чёрча — Клини* — наименьший ординал, не являющийся порядковым типом рекурсивного полного упорядочения некоторого множества натуральных чисел. Мы опускаем детали.

4.6. Определение. Функция α: $\omega \to \omega$ принадлежит классу Γ, если ее *график* $\{\langle m, n\rangle$: $\alpha(m) = n\}$ принадлежит этому классу.

Все теоремы классической дескриптивной теории множеств имеют эффективные аналоги. Мы формулируем следующие результаты только для классов Σ^0_k и Σ^1_k, но обобщения на классы $\Sigma^{0,\alpha}_k$ и $\Sigma^{1,\alpha}_k$ также справедливы, и из них следуют соответствующие классические результаты. Доказательства классических теорем оказались в достаточной степени эффективными для того, чтобы преобразовать их в доказательства эффективных теорем. Многие из следующих теорем принадлежат Клини. (См. Клини [1], [2].)

Сначала рассмотрим эффективный аналог понятия непрерывной функции. Напомним, что база топологии пространства I была введена в § 1. Снабдим натуральный ряд ω дискретной топологией с синглетами (одноэлементными множествами) в качестве базовых множеств. Базисные открытые подмножества пространства $\omega^{n_1} \times I^{n_2}$ являются произведениями базисных множеств сомножителей. Пусть $B_0, B_1, \ldots$ есть эффективный пересчет всех базисных открытых подмножеств пространства $\omega^{n_1} \times I^{n_2}$ (т. е. эффективный пересчет всех конечных последовательностей натуральных чисел, естественным образом определяющих базисные открытые множества).

4.7. Определение. Функция F: $\omega^{n_1} \times I^{n_2} \to \omega^{m_1} \times I^{m_2}$ называется *рекурсивной*, если множество

$$\{k, a_1, \ldots, a_{n_1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_2}\rangle$$: $F(\langle a_1, \ldots, a_{n_1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_2}\rangle) \in B_k\}$$

принадлежит классу Δ^0_1 (т. е. является рекурсивным).

4.8. Теорема. *Каждый из классов* Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n, Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n *замкнут относительно конечных объединений, конечных пересечений и рекурсивных прообразов.*

4.9. Теорема. *Пусть* Γ *есть один из классов* Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n, Π^1_n, *а* Γ — *соответствующий класс* $\mathbf{\Sigma}^0_n$, $\mathbf{\Pi}^0_n$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$.

Тогда найдется множество $U \in \Gamma$, *универсальное для класса* $\mathbf{\Gamma}$. *Кроме того, найдется множество* $U \in \Gamma$, $U \subseteq \omega \times I$ *такое, что совокупность всех множеств вида*

$$\{\beta\colon \langle b, \beta\rangle \in U\}$$

является в точности совокупностью всех принадлежащих классу $\mathbf{\Gamma}$ *множеств* $A \subseteq I$.

4.10. Теорема. $\Delta^0_n \subset \Sigma^0_n \subset \Delta^0_{n+1}$; $\Delta^1_n \subset \Sigma^1_n \subset \Delta^1_{n+1}$.

Первое утверждение теоремы 4.10 можно обобщить и на несчетные уровни, которые мы здесь не рассматриваем.

Принадлежащий Клини эффективный аналог теоремы Суслина 2.20 состоит в том, что

класс всех гиперарифметических множеств совпадает с классом Δ^1_1.

4.11. Теорема. *Принцип предупорядочения имеет место для классов* Σ^0_n, Π^1_1. *При любом* n *предупорядочение для класса* Π^1_n *влечет предупорядочение для класса* Σ^1_{n+1}.

4.12. Следствие. *Имеет место* Σ^1_2*-предупорядочение.*

Эффективные понятия были определены нами в терминах теории рекурсивных функций, однако их можно эквивалентным образом определить и по-другому. *Языком арифметики* является язык логики первого порядка, снабженный функциональными символами для сложения, умножения и для операции прибавления единицы, а также символом для 0.

4.13. Определение. Множество A натуральных чисел назовем *арифметическим*, если найдется формула языка арифметики $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x такая, что

$$n \in A \leftrightarrow N \models \varphi(n),$$

где N есть стандартная модель арифметики.

4.14. Теорема. *Множество* $A \subseteq \omega$ *является арифметическим, если и только если* $A \in \bigcup\limits_{n\in\omega} \Sigma^0_n$.

Язык анализа получается из языка арифметики, если к последнему добавить переменные, пробегающие совокупность всех функций из ω в ω, и разрешить связывать кванторами эти переменные.

4.15. Определение. Множество $A \subseteq \omega^m \times I^n$ назовем *аналитическим*, если найдется формула языка анализа φ такая, что

$$\langle a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle \in A \leftrightarrow M \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где M есть стандартная модель анализа, т. е. $M = \langle \omega, I\rangle$.

4.16. Теорема. *Множество* A *является аналитическим, если и только если* $A \in \bigcup\limits_{n\in\omega} \Sigma^1_n$.

Таким образом, класс $\bigcup\limits_{n\in\omega} \Sigma^1_n$ состоит из всех множеств, определимых формулами анализа.

Эффективная теория позволяет поставить вопрос нового типа: *должно ли каждое непустое определимое множество* $A \subseteq I$ *содержать определимый элемент?*

Уточним этот вопрос следующим образом:

4.17. Определение. Класс Γ_1 является *базисом* для класса Γ_2, если каждое непустое множество $A \in \Gamma_2$, $A \subseteq I$, содержит элемент $\alpha \in A$, принадлежащий классу Γ_1.

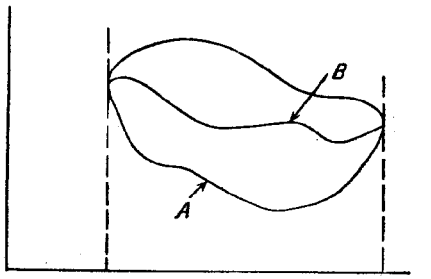

Рис. 10.

Известны как положительные, так и отрицательные результаты о базисе.

4.18. Теорема (Клини). *Класс* Δ^0_1 *является базисом для класса* Σ^0_1, *но класс* Δ^1_1 *не является базисом для класса* Π^0_1.

Доказательство. Первое утверждение теоремы тривиально, так как каждое Σ^0_1-множество (и даже каждое $\mathbf{\Sigma}^0_1$-множество) $A \subseteq I$ содержит функцию $\alpha \in A$, равную 0 для всех, за исключением конечного числа, натуральных n. Для доказательства второго утверждения рассмотрим множество $A = \Delta^1_1 \cap I$. Можно доказать, что A является Π^1_1-множеством. Пусть Π^1_0 (т. е. Π^0_1)-множество B таково, что $\alpha \notin A \leftrightarrow \exists\beta\,(\langle\alpha, \beta\rangle \in B)$. Если теперь $\langle\alpha, \beta\rangle \in B \cap \Delta^1_1$, то $\alpha \in \Delta^1_1$ — противоречие. □

Некоторые теоремы о базисе можно усилить, придав им вид теорем об униформизации.

4.19. Определение. Пусть $B \subseteq A \subseteq I^2$ — произвольные множества. Будем говорить, что B *униформизует* A, если:

(1) $\langle\alpha, \beta_1\rangle \in B \wedge \langle\alpha, \beta_2\rangle \in B \to \beta_1 = \beta_2$,

(2) $\forall\alpha\,(\exists\beta\,(\langle\alpha, \beta\rangle \in A) \leftrightarrow \exists\beta\,(\langle\alpha, \beta\rangle \in B))$.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — точечные классы. Будем говорить, что Γ_1 *обеспечивает униформизацию множеств из* Γ_2 (кратко: (Γ_1, Γ_2)-

униформизация), если для каждого множества $A \in \Gamma_2$, $A \subseteq I^2$, найдется множество $B \in \Gamma_1$, $B \subseteq A$ (рис. 10), униформизующее данное множество A.

Принцип униформизации для точечного класса Γ, кратко — Γ-униформизация, есть утверждение о том, что Γ обеспечивает униформизацию множеств из Γ. Таким образом,

Γ-*униформизация* $\leftrightarrow$ (Γ, Γ)-*униформизация*.

В терминах эффективной теории принцип униформизации для Γ влечет теорему о базисе для класса Γ, причем в «равномерном» виде. Но принцип униформизации имеет смысл для произвольных точечных классов и, в отличие от принципа базиса, является классическим понятием.

4.20. Теорема Новикова — Кондо — Аддисона *Имеет место* Π^1_1-*униформизация. Если* $\alpha \in I$, *то имеет место* $\Pi^{1,\alpha}_1$-*униформизация*.

4.21. Следствие. *Имеет место* Σ^1_2-*униформизация*.

4.22. Следствие. *Имеют место* $\mathbf{\Pi}^1_1$-*униформизация и* $\mathbf{\Sigma}^1_2$-*униформизация*.

4.23. Следствие. *Класс* Δ^1_2 *является базисом для класса* Σ^1_2.

Результат 4.22 принадлежит Кондо [1] и представляет уточнение результата Новикова (см. Лузин, Новиков [1]). Эффективный вариант (теорема 4.20) принадлежит Аддисону, который «эффективизировал» классические доказательства Новикова и Кондо.

Доказательство теоремы 4.20. Пусть

$$A = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \forall \gamma \exists n R(\alpha \restriction n, \beta \restriction n, \gamma \restriction n)$$

— произвольное Π^1_1-множество. Определим множества $X_{\alpha\beta R} \subseteq \subseteq \mathrm{Seq}$ так, как мы это делали выше. Положим

$$|\sigma|_{\alpha\beta} = |\sigma|^{<\restriction X_{\alpha\beta R}}.$$

Зафиксируем произвольную рекурсивную функцию φ: ω на Seq. Индукцией по n определим:

$A_0 = A$;

$A_{2n+1} = A_{2n} \cap \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \forall \beta' (\langle \alpha, \beta'\rangle \in A_{2n} \rightarrow |\varphi(n)|_{\alpha\beta} \leqslant |\varphi(n)|_{\alpha\beta'} \vee \varphi(n) \notin X_{\alpha\beta R})\}$;

$A_{2n+2} = A_{2n+1} \cap \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \forall \beta' (\langle \alpha, \beta'\rangle \in A_{2n+1} \rightarrow \beta(n) \leqslant \beta'(n))\}$;

$B = \bigcap\limits_{n \in \omega} A_n$.

Используя идею доказательства теоремы 3.7, можно показать, что B является Π^1_1-множеством. Далее, определение A_{2n+2} гарантирует, что для каждого α существует не более одного β такого, что $\langle \alpha, \beta\rangle \in B$. Если $\exists \beta (\langle \alpha, \beta\rangle \in A)$, то определим

функцию β: $\omega \rightarrow \omega$ равенством

$$\beta(n) = \inf\{\beta'(n)\colon\ \beta' \in A_{2n+1}\}.$$

Ясно, что для каждого n найдется β_n такое, что $\langle \alpha, \beta_n\rangle \in A_{2n+2}$. Если $\varphi(n) \in X_{\alpha\beta R}$, то положим $\psi(\varphi(n)) = |\varphi(n)|_{\alpha\beta_n}$. Функция ψ будет сохранять порядок (как функция из множества $X_{\alpha\beta R}$ в Оп). Это означает, что $\langle \alpha, \beta\rangle \in A$. Теперь $\langle \alpha, \beta\rangle \in B$ без труда получается из определения A_n и B.

Второе утверждение теоремы выводится из первого с помощью Π^1_1-множества, универсального для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. Следствие 4.22 следует из второго утверждения теоремы и релятивизованного варианта следствия 4.21. □

Для доказательства следствия 4.21 рассмотрим такое Π^1_1-множество C, что

$$\langle \alpha, \beta\rangle \in A \leftrightarrow \exists \gamma (\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle \in C).$$

Применим теорему 4.20 к множеству C посредством «свертки» $\langle \beta, \gamma\rangle$ в одну точку пространства I. Пусть $D \subseteq C$ — полученное Π^1_1-множество. Теперь положим

$$B = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \exists \gamma (\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle \in D)\}.$$

Для доказательства следствия 4.23 рассмотрим произвольное Σ^1_2-множество $A \subseteq I$. Положим $B = \{\langle \mathbf{0}, \alpha\rangle\colon\ \alpha \in A\}$, где функция $\mathbf{0} \in I$ определена условием $\mathbf{0}(n) = 0$ для всех $n \in \omega$. Пусть Σ^1_2-множество $C \subseteq B$ униформизует множество B.

Тогда единственное α такое, что $\langle \mathbf{0}, \alpha\rangle \in C$, удовлетворяет следующим эквивалентностям:

$$\alpha(n) = m \leftrightarrow \exists \beta (\langle \mathbf{0}, \beta\rangle \in C \wedge \beta(n) = m)$$
$$\leftrightarrow \forall \beta (\langle \mathbf{0}, \beta\rangle \in C \rightarrow \beta(n) = m).$$

Из первой эквивалентности следует $\alpha \in \Sigma^1_2$, а из второй $\alpha \in \Pi^1_2$. □

§ 5. Аксиома конструктивности и аксиомы больших кардиналов

Многие фундаментальные проблемы теории проективных множеств не могут быть решены средствами аксиом теории ZFC. Например, предположение о том, что каждое проективное множество измеримо, имеет свойство Бэра и свойство совершенного ядра, не приводит к противоречию, если непротиворечива теория ZFC + существует недостижимый кардинал (см. Соловей [2]). С другой стороны, Гёдель [1] указал, что если выполняется аксиома конструктивности, то существует неизмеримое и не имеющее свойства Бэра Δ^1_2-множество,

а также существует Π^1_1-множество, не имеющее свойства совершенного ядра[1]). По-видимому, вопрос о наличии таких основных структурных свойств, как принципы предупорядочения, униформизации, редукции, у проективных классов Σ^1_n, Π^1_n при $n \geqslant 3$ также неразрешим средствами ZFC[2]). Некоторые из известных доказательств непротиворечивости основаны на очень сильных теоретико-множественных предположениях и иногда годятся только для четных или только для нечетных n (например, следствие 6.6 ниже). Проблемы о взаимоотношениях между высшими проективными классами и несчетными булевыми алгебраическими операциями также оказываются неразрешимыми.

Аддисон [2] показал, что многие важные вопросы о проективных множествах становятся разрешимыми, если мы предположим *аксиому конструктивности* $V = L$ (об этой аксиоме см. главу 5).

Если выполняется аксиома конструктивности, то существует Δ^1_2-отношение, вполне упорядочивающее точки пространства I по типу ω_1. Это полное упорядочение $<_L$ обладает важным дополнительным свойством. Именно, существует (при $V = L$) такая Δ^1_2-функция Pr: $I \to I$, что для каждого $\alpha \in I$ множество $\{(\mathrm{Pr}(\alpha))_n\colon n \in \omega\} - \{(\mathrm{Pr}(\alpha))_0\}$ есть в точности совокупность всех предшественников точки α в смысле $<_L$ (определение $(\beta)_n$ для $\beta \in I$ см. в доказательстве теоремы 2.20). С помощью этого полного упорядочения доказывается следующая

5.1. Теорема (Аддисон). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда для каждого* $n \geqslant 2$ *имеет место* $\mathbf{\Sigma}^1_n$*-предупорядочение и* Σ^1_n*-предупорядочение.*

Доказательство (эскиз). Пусть $A = \{\alpha\colon \exists\beta(\langle\alpha, \beta\rangle \in B)\}$, где B есть Π^1_n-множество, $n \geqslant 1$. Для каждого $\beta \in I$ через $|\beta|$ обозначим порядок точки β в смысле $<_L$. Если $\alpha \in I$, то положим

$$F(\alpha) = \inf\{|\beta|\colon \langle\alpha, \beta\rangle \in B\}.$$

С помощью упомянутого дополнительного свойства порядка $<_L$ можно определить требуемые множества R и S. □

5.2. Теорема (Аддисон). *Предположим, что* $V = L$. *Тогда для каждого* $n \geqslant 2$ *классы* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *и* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *имеют свойство униформизации.*

Униформизующее множество образуется выбором $<_L$-наименьшего элемента из каждого непустого сечения.

[1]) Доказательство этого утверждения было впервые опубликовано П. С. Новиковым в статье «О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств». — Тр. МИАН СССР, 38. М.: Изд. АН СССР, 1951, с. 279—316. — *Прим. перев.*

[2]) Более подробно об этом см. добавление, п. 7. — *Прим. перев.*

Таким образом, $V = L$ делает теорию проективных множеств достаточно полной. Но эта аксиома не вполне приемлема по двум причинам. Как мы уже указывали, она обеспечивает отрицательный ответ на вопросы о свойствах регулярности. Кроме того, получается некрасивая последовательность классов:

$$\mathbf{\Sigma}^1_0,\ \mathbf{\Pi}^1_1,\ \mathbf{\Sigma}^1_2,\ \mathbf{\Sigma}^1_3,\ \mathbf{\Sigma}^1_4,\ \ldots,$$

обладающих одинаковыми свойствами (редукция, предупорядочение, униформизация кроме $\mathbf{\Sigma}^1_0$) в предположении $V = L$.

Соловей показал, что если использовать аксиомы больших кардиналов вместо $V = L$, то свойства регулярности можно перенести на второй уровень проективной иерархии.

5.3. Определение. Кардинал $\varkappa$ называется *измеримым*, если найдется функция μ (*мера*), определенная на совокупности всех подмножеств множества $\varkappa$ и такая, что:

$\mu(A) \in \{0, 1\}$ для всех множеств $A \subseteq \varkappa$;
$\mu(\{\alpha\}) = 0$ для каждого $\alpha < \varkappa$;
$\mu(\varkappa) = 1$;
$\mu(\varkappa - A) = 1 - \mu(A)$;
$\mu\left(\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha\right) = 0$, если $\lambda < \varkappa$ и $\mu(A_\alpha) = 0$ для всех $\alpha < \lambda$.

5.4. Определение. МС есть утверждение о том, что существует несчетный измеримый кардинал.

Известно, что несчетные измеримые кардиналы (если они существуют) должны быть очень большими. Например, каждый несчетный измеримый кардинал $\varkappa$ является $\varkappa$-м недостижимым кардиналом. Следовательно, аксиому МС нельзя доказать средствами теории ZFC. Все же существуют аргументы (не слишком убедительные) в пользу принятия аксиомы МС и других аксиом больших кардиналов, см. гл. 1 и гл. 3.

5.5. Теорема (Соловей [1]). *Предположим* МС. *Тогда каждое* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-множество измеримо, обладает свойством Бэра и свойством совершенного ядра.*

Удивительно, что аксиома МС, имеющая, казалось бы, отношение только к очень большим кардиналам, позволяет доказывать теоремы о пространстве I или о действительных числах.

С помощью измеримых кардиналов удается доказать также некоторые структурные свойства проективных классов.

5.6. Теорема (доказана Менсфилдом [1], усилившим более ранний результат Мартина и Соловея [1]). *Предположим* МС. *Тогда имеет место* $(\mathbf{\Pi}^1_3, \mathbf{\Pi}^1_2)$*-униформизация.*

5.7. Следствие (Мартин и Соловей [1]). *Предположим* МС. *Тогда класс* Δ^1_4 *является базисом для класса* $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

Используя идею доказательства 5.7, можно доказать следующую теорему:

5.8. Теорема (Мартин [4]). *Предположим* МС. *Тогда каждое* Σ^1_3*-множество является объединением* $\aleph_2$ *борелевских множеств.*

5.9. Следствие. *Каждое* Σ^1_3*-множество имеет либо мощность* $\leqslant \aleph_2$, *либо мощность континуума* $2^{\aleph_0}$.

К сожалению, аксиома МС не дает информацию о следующих уровнях проективной иерархии. Например, Сильвер показал, что аксиоме МС не противоречит утверждение о том, что существует неизмеримое и не обладающее свойством Бэра Δ^1_3-множество, а также существует Π^1_2-множество, не имеющее свойства совершенного ядра. По-видимому, МС не может разрешить, скажем, вопрос о том, выполняются ли принципы униформизации или предупорядочения для классов Σ^1_3 и Π^1_3. Эти вопросы были исследованы Сильвером [1] с помощью класса $L[\mu]$ всех множеств, конструктивных относительно меры μ, обеспечивающей измеримость κ. Сильвер установил, что в классе $L[\mu]$ существует полное Δ^1_3-упорядочение точек пространства I, имеющее свойство, аналогичное указанному выше дополнительному свойству упорядочения $<_L$. Это полное упорядочение было использовано Сильвером точно так же, как Гёдель и Аддисон использовали $<_L$.

§ 6. Аксиома проективной детерминированности

Те свойства регулярности, которые мы рассматривали выше, не имеют прямой связи со структурными свойствами проективных классов. Гейл и Стьюарт [1] ввели новое свойство регулярности — детерминированность. Результаты Мычельского и Сверчковского [1], Девиса [1], а также более ранний результат Банаха показали, что свойство детерминированности сильнее, чем обычные свойства регулярности, и влечет все эти свойства. Позже были получены еще более удивительные результаты: оказалось, что детерминированность позволяет доказать даже структурные свойства проективных классов. В последние годы аксиома детерминированности проективных множеств все чаще используется для доказательства теорем о проективной иерархии.

6.1. Определение. Пусть $A \subseteq I$. Следуя Гейлу и Стьюарту [1], мы ассоциируем с множеством A следующую бесконечную игру G_A двух лиц. Игрок I начинает игру выбором числа $n_0 \in \omega$. Затем игрок II выбирает число $n_1 \in \omega$, после чего снова игрок I выбирает $n_2 \in \omega$ и т. д. В результате игры получается функция α: $\omega \to \omega$, определенная условием $\alpha(i) = n_i$ для всех $i \in \omega$. Если $\alpha \in A$, то выигрывает игрок I; в противном случае выигрывает игрок II. Понятие стратегии или выигрывающей стратегии для игроков I и II в этой игре вводится очевидным образом. Множество A называется *детерминированным*, если один из игроков имеет выигрывающую стратегию в этой игре. *Принцип детерминированности* для точечного класса Г, кратко — Г-*детерминированность*, есть утверждение о том, что каждое множество $A \in \Gamma$, $A \subseteq I$ является детерминированным. Аксиома проективной детерминированности PD утверждает, что каждое проективное множество детерминировано.

6.2. Теорема (Мартин, Кекрис; усиление более ранних результатов Банаха, Мычельского и Сверчковского, Девиса). *Предположим* Σ^1_n*-детерминированность. Тогда каждое* Σ^1_{n+1}*-множество измеримо, имеет свойство Бэра и свойство совершенного ядра.*

Аналогично другим свойствам регулярности детерминированность можно доказать для достаточно простых классов, а в предположении МС — и для более широких классов.

6.3. Теорема (Мартин [2], [3]). *Имеет место* Δ^1_1*-детерминированность. В предположении* МС *имеет место* Σ^1_1*-детерминированность (эквивалентная* Π^1_1*-детерминированности).*

Доказательство принципа детерминированности для класса Δ^1_1 значительно отличается от доказательства прочих свойств регулярности борелевских множеств. Доказательства последних можно провести средствами обычной формальной теории натурального ряда ω и совокупности $\mathcal{P}(\omega)$ всех подмножеств натурального ряда. (Эта теория называется арифметикой второго порядка. О ней см. гл. 4 «Теории доказательств».) Фридман [1] показал, что Δ^1_1*-детерминированность* не может быть доказана средствами этой теории; более того, она не может быть доказана средствами теории Цермело (т. е. теории ZFC без аксиомы подстановки). Таким образом, хотя Δ^1_1*-детерминированность* есть утверждение, относящееся только к множествам ω и I, в ее доказательстве нельзя ограничиться рассмотрением лишь «небольших» множеств (получающихся из ω с помощью конечного числа применений операции степени).

Детерминированность для класса Σ^1_1 не может быть доказана в ZFC, и даже аксиома МС слишком слаба для доказательства детерминированности для Δ^1_2.

Блекуэлл [1] показал, как с помощью теоремы Гейла и Стьюарта [1] *о* Σ^1_0*-детерминированности* можно дать аль-

тернативное доказательство некоторых известных структурных свойств класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. Аддисон и автор этой главы независимо пришли к мысли о том, что в предположении PD метод Блекуэлла можно использовать для получения структурных свойств более высоких уровней иерархии. Московакис (см. Аддисон и Московакис [1]) и Мартин [1] независимо доказали следующую теорему:

6.4. Теорема. *Предположим* PD. *Тогда при любом n из принципа предупорядочения для $\mathbf{\Sigma}^1_n$ следует принцип предупорядочения для $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$.*

6.5. Следствие. *Предположим* PD. *Тогда для нечетных n имеет место $\mathbf{\Pi}^1_n$-предупорядочение, а для четных — $\mathbf{\Sigma}^1_n$-предупорядочение.*

6.6. Следствие. *Предположим* PD. *Тогда для нечетных n имеет место $\mathbf{\Pi}^1_n$-предупорядочение, а для четных — $\mathbf{\Sigma}^1_n$-предупорядочение.*

Следствие 6.5 получается из теорем 3.8 и 6.4. Для доказательства 6.6 с помощью 6.5 достаточно, скажем при четном n, применить принцип предупорядочения к $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множеству, универсальному для класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (такое существует в силу теоремы 4.9).

Доказательство теоремы 6.4. Изложим вариант доказательства, принадлежащий Аддисону и Московакису [1]. Пусть $A = \{\alpha\colon \forall\gamma\ (\langle\alpha, \gamma\rangle \in B)\}$, где B есть Σ^1_n-множество. Рассмотрим функцию $F\colon B \to \mathrm{On}$, даваемую принципом Σ^1_n-*предупорядочения* для множества B. Каждому $\alpha \in I$ и каждому $\beta \in A$ сопоставим следующую игру $G_{\alpha\beta}$: игроки I и II по очереди выбирают натуральные числа $n_0, n_1, n_2, \ldots$ Побеждает игрок I, если

$$\alpha \notin A \quad \text{или} \quad F(\langle\alpha, \gamma\rangle) > F(\langle\beta, \delta\rangle),$$

где $\gamma, \delta \in I$ определены условиями $\gamma(i) = n_{2i}$ и $\delta(i) = n_{2i+1}$. Введем отношение $\alpha \leqslant \beta$ следующей эквивалентностью:

$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow$ игрок II имеет выигрывающую стратегию в игре $G_{\alpha\beta}$.

Таким образом, если $\alpha \leqslant \beta$, то автоматически $\alpha, \beta \in A$.

Покажем, что это отношение на множестве A имеет все обычные свойства нестрогого линейного порядка.

Во-первых, $\alpha \leqslant \alpha$ (при $\alpha \in A$), так как игрок II может просто повторять ходы противника, обеспечивая этим $\gamma = \delta$.

Пусть $\alpha, \beta \in A$ таковы, что $\neg\alpha \leqslant \beta$, т. е. игрок II не имеет выигрывающей стратегии в игре $G_{\alpha\beta}$. Ясно, что игра $G_{\alpha\beta}$ имеет вид G_C для некоторого проективного множества $C = C_{\alpha\beta} \subseteq$

и тем самым является детерминированной. Следовательно, игрок I имеет выигрывающую стратегию в игре $G_{\alpha\beta}$. Если теперь определить $s'(\langle n_2, \ldots, n_k\rangle) = s(\langle n_1, \ldots, n_{k-1}\rangle)$, то s' будет выигрывающей стратегией для игрока II в игре $G_{\beta\alpha}$. Это означает $\beta \leqslant \alpha$. Итак,

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{или} \quad \beta \leqslant \alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in A.$$

Далее, пусть $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \gamma$. Тогда из выигрывающих стратегий s_1 и s_2 для игрока II в играх $G_{\alpha\beta}$ и $G_{\beta\gamma}$ нетрудно составить выигрывающую стратегию для него в игре $G_{\alpha\gamma}$. Следовательно, отношение $\leqslant$ на A транзитивно.

Теперь определим строгий порядок: $\alpha > \beta \leftrightarrow \neg\alpha \leqslant \beta$ для $\alpha, \beta \in A$. Докажем, что $<$ является фундированным порядком. Пусть напротив, $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ Пусть $s_0, s_1, \ldots$ — выигрывающие стратегии для игрока I в играх $G_{\alpha_0\alpha_1}, G_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots$ соответственно. Предположим, что I и II играют друг против друга одновременно на всех «досках» $G_{\alpha_0\alpha_1}, G_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots$, причем игрок I придерживается в игре $G_{\alpha_i\alpha_{i+1}}$ стратегии s_i, а игрок II повторяет в игре $G_{\alpha_i\alpha_{i+1}}$ ходы противника из игры $G_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}$. В результате мы получим последовательность $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ такую, что $\langle\alpha_i, \gamma_i\rangle \in B$ для всех i и

$$F(\langle\alpha_0, \gamma_0\rangle) > F(\langle\alpha_1, \gamma_1\rangle) > \ldots$$

Но этого не может быть, так как значения функции F — ординалы.

Доказанные свойства отношений $\leqslant$ и $<$, очевидно, позволяют построить такую функцию $G\colon A \to \mathrm{On}$, что $\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow G(\alpha) \leqslant G(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in A$.

Заметим теперь, что по определению для любых $\alpha \in I$ и $\beta \in A$ имеют место эквивалентности:

$$\alpha \in A \wedge \alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \exists s \forall\gamma\ (s \text{ — стратегия для II} \wedge \langle\alpha, \gamma\rangle \in B \wedge F(\langle\alpha, \gamma\rangle) \leqslant F(\langle\beta, s(\gamma)\rangle)),$$

$$\alpha \in A \wedge \alpha < \beta \leftrightarrow \exists s \forall\gamma\ (s \text{ — стратегия для I} \wedge \langle\alpha, \gamma\rangle \in B \wedge F(\langle\alpha, \gamma\rangle) < F(\langle\beta, s(\gamma)\rangle)).$$

(Доказательство второй эквивалентности использует детерминированность.) Но отношения

$$\langle\alpha, \gamma\rangle \in B \wedge F(\langle\alpha, \gamma\rangle) < (\text{или } \leqslant) F(\langle\beta, \delta\rangle)$$

являются $\mathbf{\Pi}^1_n$-отношениями в силу выбора функции F. Поэтому правые части обеих эквивалентностей являются $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-отношениями. Таким образом, функция G является искомой с точки зрения определения принципа предупорядочения для класса $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. □

Некоторое время не удавалось доказать принцип униформизации для Π^1_n при нечетных n в предположении PD. Этот вопрос был решен Московакисом, доказавшим даже более сильное утверждение.

6.7. Определение. Пусть Γ есть точечный класс. *Принцип лестницы* для класса Γ, кратко — Γ-*лестница*, формулируется следующим образом:

Для каждого множества $A \in \Gamma$, $A \subseteq I$, существует последовательность F_i, R_i, S_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

(i) Множества $\{\langle i, \alpha, \beta\rangle\colon \langle \alpha, \beta\rangle \in R_i\}$ и $\{\langle i, \alpha, \beta\rangle\colon \langle \alpha, \beta\rangle \in S_i\}$ принадлежат дуальному классу $\breve{\Gamma}$.

(ii) Каждая четверка A, F_i, R_i, S_i удовлетворяет требованиям, которые накладываются на четверку A, F, R, S в определении принципа предупорядочения для Γ.

(iii) Предположим, что $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in A$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, и для каждого i последовательность $F_i(\alpha_0)$, $F_i(\alpha_1)$, ... становится постоянной, начиная с некоторого номера. Тогда:

(a) $\alpha \in A$,

(b) $F_i(\alpha) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} F_i(\alpha_n)$ при любом $i \in \omega$.

6.8. Теорема (Московакис [2]). *Из* Π^1_n-*лестницы следует* Σ^1_{n+1}-*лестница. В предположении* PD *из* Σ^1_n-*лестницы следует* Π^1_{n+1}-*лестница.*

Для доказательства более сложного второго утверждения этой теоремы нужно определенным образом обобщить метод доказательства теоремы 6.4.

6.9. Следствие. *Предположим* PD. *Тогда для нечетных* n *имеет место* Π^1_n-*лестница и* $\mathbf{\Pi}^1_n$-*лестница, а для четных* n — Σ^1_n-*лестница и* $\mathbf{\Sigma}^1_n$-*лестница.*

Нетрудно проверить, что имеет место Σ^1_0-*лестница*. Поэтому 6.9 вытекает из теоремы 6.8. Заметим также, что доказательство теоремы Новикова — Кондо — Аддисона фактически дает $\mathbf{\Pi}^1_1$-*лестницу* (без использования PD), из которой уже получается принцип униформизации для класса Π^1_1. Буквально повторив доказательство теоремы 4.20 с использованием $F_i(\alpha, \beta)$ вместо $|\varphi(n)|_{\alpha\beta}$, можно показать, что для всех достаточно «хороших» классов Γ из Γ-*лестницы* следует Γ-*униформизация.*

6.10. Следствие. *Предположим* PD. *Тогда для нечетных* n *имеет место* Π^1_n-*униформизация и* $\mathbf{\Pi}^1_n$-*униформизация, а для четных* $n > 0$ — Σ^1_n-*униформизация и* $\mathbf{\Sigma}^1_n$-*униформизация.*

6.11. Следствие. *Предположим* PD. *Тогда класс* Δ^1_n *является базисом для класса* Σ^1_n *для всех четных* $n > 0$.

Теоремы 6.4 и 6.8 вместе с еще одним результатом Московакиса [3] (который доказывается примерно теми же методами) дают достаточно полную структурную теорию проективных множеств. Проективная детерминированность оказывается примерно эквивалентной по силе с аксиомой конструктивности относительно вопросов о проективной иерархии. Однако аксиома проективной детерминированности выглядит предпочтительнее, чем $V = L$, так как, во-первых, она положительно разрешает вопросы о свойствах регулярности и, во-вторых, последовательность классов

$$\mathbf{\Sigma}^1_0, \quad \mathbf{\Pi}^1_1, \quad \mathbf{\Sigma}^1_2, \quad \mathbf{\Pi}^1_3, \ldots$$

выглядит более естественной, чем последовательность, получаемая из $V = L$.

Аксиома PD также проливает свет на связь между проекцией и булевыми алгебраическими операциями.

6.12. Определение. δ^1_n есть наименьший ординал, не являющийся длиной фундированного отношения на I, принадлежащего классу Δ^1_n.

6.13. Определение. Пусть $\varkappa$ — кардинал. Множество $A \subseteq I$ называется $\varkappa$-*суслинским*, если найдется отношение R такое, что

$$\alpha \in A \leftrightarrow \exists f\,(f\colon \omega \to \varkappa \wedge \forall n R(\alpha \restriction n, f \restriction n)).$$

6.14. Теорема. *$A \subseteq I$ является $\aleph_0$-суслинским $\leftrightarrow A \in \Sigma^1_1$. Если $A \in \Sigma^1_2$, то A является $\aleph_1$-суслинским* (Шенфилд [1]). *В предположении* MC, *если $A \in \Sigma^1_3$, то A является $\aleph_2$-суслинским* (Мартин, основываясь на материале статьи Мартина и Соловея [1]). *В предположении* PD, *если $A \in \Sigma^1_{2n+2}$, то A является $\varkappa$-суслинским, где $\varkappa$ есть мощность ординала δ^1_{2n+1}* (Московакис). *Также в предположении* PD, *если $A \in \Sigma^1_{2n+1}$, то A является $\varkappa$-суслинским для некоторого $\varkappa < \delta^1_{2n+1}$* (Московакис).

Утверждение для класса Σ^1_1 этой теоремы составляет содержание теоремы 2.16. Доказательство теоремы 2.23 показывает, что каждое Σ^1_2-множество является $\aleph_1$-суслинским. Последние два утверждения теоремы 6.14 можно получить из теоремы 6.8.

6.15. Теорема (Кюнен; Мартин [4]). *Если кардинал $\varkappa$ бесконечен, то каждое $\varkappa$-суслинское фундированное отношение имеет длину $< \varkappa^+$.*

6.16. Следствие. $\delta^1_2 \leqslant \omega_2$ (Мартин [4]). $MC \to \delta^1_3 \leqslant \omega_3$. $PD \to \delta^1_4 \leqslant \omega_4$.

6.17. Следствие. *В предположении* PD *каждое* Σ^1_4*-множество является объединением* $\aleph_3$ *борелевских множеств.*

Остаются, однако, очень интересные открытые вопросы, касающиеся ординалов δ^1_n в предположении аксиомы проективной детерминированности. Какова верхняя граница ординалов δ^1_n при $n \geqslant 5$? Кюнен получил некоторый частный результат для $n = 5$. Являются ли ординалы δ^1_n кардиналами? Последний вопрос представляет большой принципиальный интерес в связи с тем, что континуум-гипотеза влечет неравенства $\omega_1 < \delta^1_n < \omega_2$ при $n \geqslant 2$.

Укажем еще одно приложение проективной детерминированности, связанное с *упорядочением Уэджа.*

6.18. Определение. Пусть $A, B \subseteq I$. Пишем $A \leqslant_w B$, если найдется непрерывная функция $f\colon I \to I$ такая, что $f''A \subseteq B$ и $f''\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

6.19. Теорема (Уэдж). *Предположим* PD. *Если множества* $A, B \subseteq I$ *проективны, то либо* $A \leqslant_w B$, *либо* $B \leqslant_w \bar{A}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую игру G. Игроки I и II по очереди называют натуральные числа $n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots$ Числа $n_0, n_2, n_4, \ldots$ образуют функцию $\alpha\colon \omega \to \omega$, а числа $n_1, n_3, n_5, \ldots$ — функцию $\beta\colon \omega \to \omega$. Игрок II выигрывает в случае, когда

$$\alpha \in A \leftrightarrow \beta \in B.$$

Выигрывающая стратегия для игрока II приводит к неравенству $A \leqslant_w B$, а выигрывающая стратегия для игрока I — к неравенству $B \leqslant_w \bar{A}$. □

6.20. Определение. Пусть $A, B \subseteq I$. Пишем $A \sim_w B$, если $(A \leqslant_w B$ и $B \leqslant_w A) \vee (A \leqslant_w \bar{B}$ и $\bar{B} \leqslant_w A)$. *Степень Уэджа* множества A есть класс эквивалентности $[A] = \{B\colon A \sim_w B\}$. Пишем $[A] < [B]$, если $A \leqslant_w B$ и $\neg\, A \sim_w B$.

6.21. Теорема (Мартин). *В предположении* PD *степени Уэджа проективных множеств вполне упорядочены отношением* $<$.

Замечание. Из теоремы 6.19 сразу следует, что степени Уэджа проективных множеств линейно упорядочены.

Таким образом, степени Уэджа образуют весьма тонкую иерархию проективных множеств в предположении PD. Если предположить детерминированность более широкого класса множеств, то эта иерархия соответственно продолжится. Если же ограничиться борелевскими множествами, то в силу теоремы 6.3 вообще можно обойтись без предположений детерминированности.

Степень Уэджа $[A]$ назовем самодвойственной, если $A \leqslant_w \bar{A}$. Стил показал в предположении PD, что если множество $A \subseteq I$ проективно, а соответствующая степень Уэджа $[A]$ не является самодвойственной и замкнута относительно счетных объединений и пересечений, то принцип редукции имеет место для одного из классов $[A]$, $[\bar{A}]$. Этот результат подчеркивает фундаментальное значение принципа редукции в теории множеств.

В заключение рассмотрим «полную» аксиому детерминированности, являющуюся доказуемо ложной.

6.22. Определение. *Аксиома детерминированности* AD есть утверждение о том, что каждое множество $A \subseteq I$ детерминировано.

Эта аксиома, предложенная Мычельским и Штейнгаузом, см. Мычельский [1], противоречит аксиоме выбора. Поэтому ее нельзя рассматривать в качестве настоящего кандидата на роль дополнительной аксиомы теории множеств. Все же следует упомянуть некоторые следствия AD, так как AD может выполняться, скажем, в универсуме всех множеств, определимых с параметрами из совокупности $\mathrm{On} \cup I$.

В предположении AD все множества $A \subseteq I$ имеют основные свойства регулярности. В частности, AD влечет измеримость каждого множества (Мычельский и Сверчковский [1]), а также свойства Бэра и свойство совершенного ядра у каждого множества (Девис [1]).

В предположении AD совокупность степеней Уэджа всех множеств $A \subseteq I$ является вполне упорядоченной, и, таким образом, множество всех подмножеств континуума организовано в иерархию степеней Уэджа возрастающей сложности.

Аксиома AD влечет ряд очень интересных следствий, относящихся к проективной иерархии. Многие из этих следствий противоречат аксиоме выбора. В предположении AD все ординалы δ^1_n являются кардиналами (Московакис [1]), причем измеримыми кардиналами (Кюнен, Мартин, Соловей).

6.23. Определение. Для каждого кардинала $\varkappa$ через $\boldsymbol{B}_\varkappa$ обозначим замыкание совокупности всех открытых множеств относительно объединения и пересечения семейств мощности $< \varkappa$. Таким образом, совокупность всех борелевских множеств есть в точности $\boldsymbol{B}_{\omega_1}$.

6.24. Теорема (Мартин [4], Московакис [2]). *В предположении* AD *имеет место равенство* $\boldsymbol{B}_{\delta^1_n} = \Delta^1_n$ *для всех счетных* n.

Случай $n = 1$ этой теоремы составляет содержание теоремы Суслина 2.20. Для доказательства включения $\Delta^1_n \subseteq B_{\delta^1_n}$ для нечетных n можно обойтись аксиомой PD, и поэтому указанное включение, по-видимому, не противоречит аксиоме выбора. Но уже включение $B_{\delta^1_3} \subseteq \Delta^1_3$ противоречит конъюнкции MC и аксиомы выбора. Таким образом, с помощью AD можно построить более красивую дескриптивную теорию множеств, чем это вообще возможно с аксиомой выбора. Влияние AD проявляется еще больше при рассмотрении классов Σ^2_n, которые строятся с помощью проекций на совокупность $\mathcal{P}(I)$ всех множеств $A \subseteq I$. AD порождает очень красивую теорию этих классов. С другой стороны, до сих пор нет сколько-нибудь интересных структурных теорий этих классов, совместимых с аксиомой выбора.

Истинна ли аксиома PD? Безусловно, она не является самоочевидной. Аксиомы больших кардиналов рассматриваются некоторыми специалистами как самоочевидные или по меньшей мере вытекающие из общих априорных принципов понятия множества. Ослабленные формы PD (например, Σ^1_1-детерминированность) следуют из аксиом больших кардиналов. Возможно, что полная аксиома PD также следует из подходящей аксиомы большого кардинала, однако этот вопрос остается открытым.

По мнению автора, роль PD в теории множеств можно сравнить с ролью теоретических гипотез в физике. Известны три основных аргумента в пользу принятия PD:

(1) Безрезультатность всех попыток доказать противоречивость PD косвенно свидетельствует в пользу ее истинности.

(2) Частные случаи PD, именно, Δ^1_1-детерминированность, доказаны в теории множеств.

(3) Следствия PD в дескриптивной теории множеств согласованы между собой и образуют законченную очень элегантную теорию. Это также является косвенным свидетельством в пользу правдоподобности гипотезы, лежащей в основе этой теории.

ЛИТЕРАТУРА

Аддисон (Addison J. W.)
1. Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. — Fundam. math., 1959, **46**, p. 123—135.
2. Some consequences of the axiom of constructibility. — Fundam. math., 1959, **46**, p. 337—357.

Аддисон, Московакис (Addison J. W., Moschovakis Y. N.)
1. Some consequences of the axiom of definable determinateness. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, **59**, p. 708—712.

Блекуэлл (Blackwell D.)
1. Infinite games and analytic sets. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1967, **58**, p. 1836—1837.

Гёдель (Gödel K.)
1. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1938, **24**, p. 556—557.
2. The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory — Ann. Math. Studies **3**, Princeton, 1940. [Русский перевод: Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. — УМН, 1948, **3**, № 1, с. 96—149.]

Гейл, Стьюарт (Gale D., Stewart F. M.)
1. Infinite games with perfect information. — In: Ann. Math, Studies **28**. Princeton 1953, p. 245—266.

Девис (Davis M.)
1. Infinite games of perfect information. — In: Ann. Math. Studies **52**. Princeton 1964, p. 85—101.

Клини (Kleene S. C.)
1. Introduction to Metamathematics. — Amsterdam: North-Holland, 1952. [Русский перевод: Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.]
2. Arithmetical predicates and function quantifiers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, p. 312—340.

Кондо (Kondo M.)
1. Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe. — Japan J. Math., 1938, **15**, p. 197—230.

Коэн (Cohen P. J.)
1. The independence of the continuum hypothesis I. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, **50**, p. 1143—1148.
2. The independence of the contiinuum hypothesis II. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, **51**, p. 105—110. [Русский перевод обеих статей: Коэн П. Независимость континуум-гипотезы. — Математика, 1965, **9**, № 4, с. 142—155.]

Лебег (Lebesgue H.)
1. Sur les fonctions représentable analytiquement. — J. de Math., 1905, 6 serie, **1**, p. 139—216.

Лузин Н. Н.
1. Sur la classification de M. Baire. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1917, **164**, p. 91—94. [Русский перевод: Лузин Н. Н. О классификации Бэра.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 270—272.]
2. Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1925, **180**, p. 1572—1574. [Русский перевод Лузин Н. Н. О проективных множествах Лебега. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 304—306.]

Лузин Н. Н., Новиков П. С.
1. Choix effectif d'un point dans un complementaire analytique arbitraire, donné par un crible. — Fundam. math., 1935, **25**, p. 559—560. [Русский перевод: Лузин Н. Н., Новиков П. С. Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном посредством решета. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч. т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 617—618.]

Лузин Н. Н., Серпинский (Sierpiński W.)
1. Sur un ensemble non measurable B. — J. de Math., 1923, **7** serie, **2**, p. 53—72. [Русский перевод: Лузин Н. Н., Серпинский В. Об одном множестве, неизмеримом *B*. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. — М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 285—300.]

Мартин (Martin D. A.)
1. The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, p. 687—689.
2. Measurable cardinals and analytic games. — Fundam. math., 1970, **66**, p. 287—291.
3. Borel determinacy. — Ann. Math. 1975, **102**, p. 363—371.
4. Projective sets and cardinal numbers. — J. Symbolic Logic.

Мартин, Соловей (Martin D. A., Solovay R. M.)
1. A basis theorem for Σ^1_3 sets of reals. — Ann Math., 1969, **89**, p. 138—160.

Менсфилд (Mansfield R.)
1. A Souslin operation for Π^1_2. — Israel J. Math., 1971, **9**, № 3, p. 367—369.

Московакис (Moschovakis Y. N.)
1. Determinacy and prewellorderings of the continuum. — In: Math. Logic and Foundations of Set Theory/Ed. Y. Bar-Hillel. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 24—62.
2. Uniformization in a playful universe. — Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, p. 731—736.
3. Analytical definability in a playful universe. — In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, IV/Ed. P. Suppes et al. Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 77—85.
4. Descriptive Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1980.

Мычельский (Mycielski J.)
1. On the axiom of determinateness. — Fundam. math., 1964, **53**, p. 204—224.

Мычельский, Сверчковский (Mycielski J., Swierczkowski S.)
1. On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. — Fundam. math., 1964, **54**, p. 67—71.

Серпинский (Sierpiński W.)
1. Sur une classe d'ensembles. — Fundam. math., 1925, **7**, p. 237—243.

Сильвер (Silver J. H.)
1. Measurable cardinals and Δ^1_3 wellorderings. — Ann. Math., 1971, **94**, p. 414—446.

Соловей (Solovay R. M.)
1. On the cardinality of Σ^1_2 sets of reals. — In: Foundations of Mathematics. Berlin: Springer, 1969, p. 58—71.
2. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. — Ann. Math., 1970, **92**, p. 1—56.

Фридман (Friedman H.)
1. Higher set theory and mathematical practice. — Ann. Math. Logic, 1971, **2**, p. 326—357.

Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. The problem of predicativity. — In: Essays on the Foundations of Mathematics/Ed. Y. Bar-Hillel et al. Jerusalem: Magnes Press, 1961, p. 132—139.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

Кекрис (Kechris A.)
1. AD and projective ordinals. — Lect. Notes Math., **689**. Berlin: Springer, 1978, p. 91—132.
Работа содержит доказательство почти всех теорем § 6 этой главы и многих других интересных следствий детерминированности. — *Прим. перев.*

Добавление

ПРОЕКТИВНАЯ ИЕРАРХИЯ Н. Н. ЛУЗИНА: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ

В. Г. Кановей

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 273
Введение 274
§ 1. Классическая теория 278
§ 2. Приложения конструктивности 299
§ 3. Неразрешимые свойства регулярности множеств первого и второго уровней проективной иерархии 318
§ 4. Модели Леви — Соловея 333
§ 5. Генерические расширения с помощью «почти дизъюнктных множеств» 350
Литература 360

Предисловие

Издательство «Наука» предложило переводчику написать добавление к настоящей книге с целью осветить разделы теории множеств, недостаточно отраженные в тексте книги.

Первоначально переводчик думал написать небольшие добавления к некоторым главам, освещающие последние работы в соответствующих разделах, но отказался от этого плана по следующим причинам.

К первым двум главам нет смысла писать добавление: фундаментальная информация по основаниям теории множеств и аксиоме выбора содержится в переведенных на русский язык книгах Коэна [1], Йеха [1], Шенфилда [1], Куратовского и Мостовского [1].

Седьмая глава относится, по существу, к топологии, и переводчик не счел себя в достаточной степени квалифицированным для того, чтобы писать к ней какое-либо добавление.

Главы 3—6 дают вполне достаточное введение в соответствующие разделы теории множеств. Они содержат доказательства как относительно простых, так и весьма сложных теорем (к последним относится, например, теорема Сильвера о сингулярных кардиналах из § 5 гл. 3 и теоремы о «тонкой структуре» из гл. 5). Отдельные результаты, оставленные без доказательств, снабжены ссылками на доступную оригинальную и обзорную библиографию. В связи с этим переводчик решил от-

носительно этих глав ограничиться указанием дополнительной литературы к главам 3 и 4 с краткими комментариями к ней.

Последняя глава 8, посвященная дескриптивной теории множеств, носит совершенно иной характер. Подавляющее большинство теорем оставлено в ней без доказательства, а некоторые из немногочисленных имеющихся доказательств редуцированы до состояния, требующего от читателя серьезной самостоятельной работы для их понимания. По существу, автор гл. 8 ограничился изложением основных классических результатов и следствий аксиомы детерминированности и аксиомы проективной детерминированности, связанных с принципами предупорядочения, редукции и униформизации, а также с обобщенными суслинским и борелевским представлениями проективных множеств. Таким образом, практически вне рамок этой главы остались результаты и методы таких основных разделов дескриптивной теории множеств, как:

теория однозначных и счетнозначных множеств первого и второго уровней проективной иерархии, созданная работами Н. Н. Лузина, его учеников и последователей;

дескриптивная теория множеств в предположении аксиомы конструктивности, создание которой начато работой П. С. Новикова [6];

теория неразрешимых свойств регулярности множеств классов $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$;

дескриптивная теория множеств в моделях Леви — Соловея;

приложения метода вынуждения для доказательства непротиворечивости некоторых предложений дескриптивной теории множеств и др.

Таким образом, глава 8 давала бы весьма поверхностное представление о развитии и современном состоянии дескриптивной теории множеств Поэтому переводчик счел возможным и необходимым написать добавление, восполняющее в той или иной степени отсутствие информации по названным разделам. Добавление не касается таких разделов дескриптивной теории множеств, как теория операций над множествами, теория борелевских классов, дескриптивные следствия больших кардиналов и аксиомы детерминированности, по причинам, изложенным ниже во введении.

Введение

Лебег [1] предложил начать изучение множеств и функций, «которые можно назвать». Этим была в целом определена проблематика дескриптивной теории множеств: исследование таких множеств, которые можно «назвать», «эффективно построить», «определить» и т. п. Круг таких множеств вначале

ограничивался борелевскими множествами. Работы Бореля, Лебега, Бэра, Валле-Пуссена и др. по теории борелевских множеств не дали, однако, ответа на центральный в свете проблемы континуума вопрос о мощности этих множеств: может ли борелевское множество служить контрпримером к континуум-гипотезе?

Этот вопрос был решен П. С. Александровым в 1916 г. с помощью A-операции. С этого момента начинается этап развития дескриптивной теории множеств, неразрывно связанный с именем Н. Н. Лузина. Лузин, а также Суслин, Серпинский и др. исследовали класс A-множеств, получающихся из борелевских множеств с помощью A-операции. Было установлено, что каждое A-множество измеримо по Лебегу, обладает свойством Бэра и свойством совершенного ядра. Были получены также основные структурные принципы класса A-множеств и класса CA-множеств (дополнений к A-множествам). Наконец, был установлен фундаментальный характер операции проекции: A-множества оказались в точности проекциями борелевских множеств, т. е. $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множествами, а CA-множества — $\mathbf{\Pi}^1_1$-множествами. Теория классов $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и Δ^1_1 приняла законченный вид в монографии Лузина [2].

Однако изучение вопроса о мощности и совершенном ядре у $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств, а также вопроса об измеримости и свойстве Бэра у множеств второго уровня проективной иерархии натолкнулось на непреодолимые трудности. Анализируя причины этих трудностей, Лузин указал на чрезвычайно неэффективный характер связки «проекция — дополнение», с помощью которой проективные множества получаются из борелевских. Нельзя не удивиться, что задолго до появления современных методов Лузин [3] (1925 г.) был убежден, что «неизвестно и никогда не будет известно», измеримо ли каждое проективное множество, имеет ли оно свойство Бэра или свойство совершенного ядра. В своих работах тридцатых годов Лузин дал глубокий анализ трудностей теории проективных множеств и поставил ряд проблем, одни из которых определяли развитие дескриптивной теории на протяжении десятков лет, а другие ждут еще своего решения.

В то же время в работах П. С. Новикова, М. Кондо, К. Куратовского и др. была разработана структурная теория второго уровня проективной иерархии. Этим классическая дескриптивная теория множеств приняла в целом законченный вид: были доказаны основные свойства проективных множеств и были выделены проблемы, решение которых в классическом смысле казалось (и оказалось) невозможным. Основные достижения классической теории изложены в § 1 нашего обзора.

Подводя итоги классического этапа развития дескриптивной теории множеств, Лузин в заключении к своей монографии [1] пишет:

«Только два случая возможны:

Или дальнейшие исследования приведут когда-нибудь к точным соотношениям между проективными множествами, а также к полному решению вопросов относительно меры, категории и мощности этих множеств...

Или указанные проблемы... останутся навсегда нерешенными, и к ним добавится множество новых проблем, столь же естественных и столь же недоступных. В этом случае ясно, что пришло время провести реформу в наших идеях об арифметическом континууме».

Как мы знаем теперь, реализуется именно вторая альтернатива. Не касаясь разнообразных конструктивистских изысканий, можно выделить три основных направления той «реформы», о которой писал Лузин:

использование дополнительных аксиом,

изучение связей между неразрешимыми предложениями, не имеющими ранга аксиом,

перенос акцента на доказательства непротиворечивости.

Из интересных дополнительных аксиом можно отметить аксиому конструктивности $V = L$ и ее варианты, аксиому детерминированности AD и ее варианты и аксиомы, связанные с большими кардиналами. Подробное изучение дескриптивных следствий аксиомы конструктивности начато Новиковым [6], давшим в предположении $V = L$ примеры неизмеримого Δ^1_2-множества и несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра, а также указавшим некоторые приложения к структурной теории (принципы отделимости). В § 2 нашего обзора изложена теория свойств регулярности и структурных принципов в предположении аксиомы конструктивности.

С появлением в шестидесятые годы метода вынуждения и принципа абсолютности стал возможным более детальный анализ контрпримеров Новикова, на основе которого был получен ряд результатов, связывающих неразрешимые свойства регулярности (§ 3 нашего обзора). Одним из результатов в этой области является теорема о том, что из существования неизмеримого Σ^1_2-множества следует существование несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра. Посылка и заключение этой теоремы неразрешимы средствами аксиом ZFC. Интересно, что известные доказательства этой и некоторых других теорем такого же вида, в которых речь идет только о проективных множествах, основаны на идеях, выходящих за рамки проективной иерархии: конструктивность, принцип абсолютности, метод вынуждения. Здесь можно видеть аналогию с упомянутой выше теоремой Александрова о мощности борелевских множеств, для доказательства которой пришлось выйти за рамки борелевской иерархии.

Наконец, о доказательствах непротиворечивости (независимости, невыводимости). Можно указать два основных способа доказательства непротиворечивости того или иного предложения. Первый состоит в выводе этого предложения из другого предложения (или аксиомы), непротиворечивость которого установлена заранее (как, например, $V = L$, гл. 5) или считается по тем или иным причинам априорной (как в случае аксиом типа AD, гл. 8). В частности, вывод какого-нибудь предложения из $V = L$ автоматически влечет его непротиворечивость.

Второй способ состоит в построении генерических моделей. Мы представим в § 4 самую, пожалуй, интересную с точки зрения приложений к проективной иерархии генерическую модель — модель Леви — Соловея, в которой все проективные множества измеримы, обладают свойством Бэра и свойством совершенного ядра.

В семидесятые годы были разработаны методы построения генерических моделей, содержащих проективные множества с «необычными» свойствами: полное Π^1_2-упорядочение длины $\geqslant \omega_2$ некоторого Π^1_2-множества (в то время как всякое полное Σ^1_2-упорядочение имеет длину $< \omega_2$), неконструктивное Δ^1_3-множество натуральных чисел (в то время как всякое Σ^1_2-множество $\subseteq \omega$ конструктивно) и др. Один из таких методов, введенный Пенсеном и Соловеем, излагается в § 5.

Таково содержание нашего обзора. Кратко о разделах дескриптивной теории, не представленных в нем. Параллельно с развитием теории проективных классов в двадцатые и тридцатые годы проводились исследования по структуре борелевских классов (М. А. Лаврентьев, Л. В. Келдыш, позже А. Д. Тайманов и др.) и исследования по теории операций над множествами, в результате которых возникла теория R-множеств (А. Н. Колмогоров, Л. В. Канторович, Е. М. Ливенсон, П. С. Новиков, А. А. Ляпунов и др.). Более подробная информация и обширная библиография по этим разделам приведены в предисловии В. Я. Арсенина, З. И. Козловой, А. Д. Тайманова к книге: Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций. — М.: Наука, 1979.

Среди более современных разделов дескриптивной теории множеств в нашем обзоре не представлены дескриптивные следствия аксиом больших кардиналов и аксиом детерминированно-

сти и проективной детерминированности. Читатель может получить достаточную информацию по этим разделам из §§ 5 и 6 гл. 8 (включая указанные там работы), а также из статьи Кекриса, добавленной при переводе к библиографии гл. 8.

Развитие классической дескриптивной теории множеств сопровождалось дискуссиями философско-математического порядка: об эффективности, о «законности» тех или иных математических построений, о бесконечности, об аксиоме выбора и т. п. В этих дискуссиях приняли участие крупнейшие математики — Адамар, Картан, Борель, Лебег, Лузин и др. Мы опустили эти дискуссии, но настоятельно рекомендуем читателю, желающему глубже понять существо теории множеств, ознакомиться с ходом этих дискуссий в работах Лузина [1], [4], [10].

§ 1. Классическая теория

В этом параграфе представлены «классические» теоремы дескриптивной теории множеств. Все эти теоремы относятся к первому и второму уровням проективной иерархии.

Свойства регулярности $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств (Александров, Хаусдорф, Суслин, Лузин), теория конституант, теоремы отделимости, принцип сравнения индексов (Лузин и Серпинский, Лузин, Новиков), теория однозначных и счетнозначных $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеств и $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств (Лузин, Новиков) составили замечательную теорию классов первого уровня проективной иерархии, принявшую законченный вид в монографии Лузина [1] (1930 г.).

Исследование второго уровня иерархии начато работами Новикова, Куратовского, Лузина, Ляпунова, Лузина и Новикова, Кондо. Эти работы касались в основном принципов униформизации, редукции и отделимости. В то же время некоторые вопросы, относящиеся к счетнозначным и однозначным множествам классов $\mathbf{\Delta}^1_2$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$, оставались открытыми (см. Новиков, Келдыш [1]). В предлагаемом обзоре этот пробел заполняется.

Общий обзор структурной теории в свете проблем, поставленных Лузиным [1], дается в п. 7. Все эти проблемы (за одним исключением, где ситуация неясна) оказываются разрешимыми в классическом смысле для первого и второго уровней проективной иерархии, но, по-видимому, неразрешимыми (т. е. недоказуемыми и неопровержимыми) для уровней, начиная с третьего.

1. Класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$: свойства регулярности. Этот класс достаточно хорош, так как не содержит таких «патологических» объектов, как несчетные множества без совершенных подмножеств, неизмеримые множества, несчетные полные упорядочения. Изложение этих результатов мы начнем замечательной теоремой о совершенном ядре (Александров [2], Хаусдорф [1], Суслин [1]).

1.1. Теорема. *Каждое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество содержит совершенное подмножество, называемое также совершенным ядром.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме:

1.2. Лемма. *Пусть множество $P \subseteq I^m$ непусто и замкнуто, а функция F: $P \to I$ непрерывна, причем образ $F''Q = \{F(\alpha): \alpha \in Q\}$ всякого непустого открытого в P множества $Q \subseteq P$ содержит не менее двух точек. Тогда множество $F''P$ содержит совершенное ядро.*

Вывод теоремы из леммы. Пусть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A \subseteq I$ несчетно. По определению A является проекцией, т. е. непрерывным образом, замкнутого множества $P \subseteq I^2$: $A = F''P$. Согласно теореме Бэра — Хаусдорфа, см. Александров [1], с. 161, найдется максимальное открытое в P множество $Q \subseteq P$ такое, что $F''Q$ счетно. Тогда множество $P' = P - Q$ замкнуто, удовлетворяет условию леммы, а разность $F''P - F''P'$ не более чем счетна. □

Доказательство леммы. Все пространства I^m гомеоморфны; поэтому ограничимся случаем $m = 1$. Из условия леммы и хаусдорфовости пространства I следует, что если $\sigma \in \mathrm{Seq}$ [1]) таково, что множество $P_\sigma = \{\alpha \in P: \sigma \subseteq \alpha\}$ непусто, то найдутся σ_1, $\sigma_2 \in \mathrm{Seq}$, удовлетворяющие следующим соотношениям: $\sigma \subseteq \sigma_1$, $\sigma \subseteq \sigma_2$, $P_{\sigma_1} \neq \varnothing$, $P_{\sigma_2} \neq \varnothing$, $(F''P_{\sigma_1}) \cap (F''P_{\sigma_2}) = \varnothing$. Поэтому можно построить семейство $\{\sigma_e: e \in {}^{<\omega}2\} \subseteq \mathrm{Seq}$ (где ${}^{<\omega}2 \subseteq \mathrm{Seq}$ — совокупность всех конечных последовательностей 0 и 1) со следующими четырьмя свойствами:

1) $\sigma_0 = 0$, где 0 — пустая последовательность (т. е. последовательность длины 0);

2) каждое из множеств P_{σ_e}, $e \in {}^{<\omega}2$, непусто;

3) $\sigma_e \subseteq \sigma_{e^\wedge 0}$ и $\sigma_e \subseteq \sigma_{e^\wedge 1}$ для всех $e \in {}^{<\omega}2$;

4) $F''P_{\sigma_{e^\wedge 0}} \cap F''P_{\sigma_{e^\wedge 1}} = \varnothing$ для всех $e \in {}^{<\omega}2$.

(Замечание. $e^\wedge i$ есть продолжение e числом i, т. е. $e^\wedge i = e \cup \{\langle k, i\rangle\}$, где $k = \mathrm{dom}\, e$ — длина последовательности e.) Образ множества $P' = \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{e \in {}^m 2} P_{\sigma_e}$ есть искомое совершенное ядро множества $F''P$. □

[1]) Определение Seq и некоторые другие определения мы берем из гл. 8.

Второе фундаментальное свойство $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств дается следующей теоремой Лузина [2] об измеримости:

1.3. Теорема. *Каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A = F''P$, где $P \subseteq I$ замкнуто, а функция F: $P \to I$ непрерывна. Пусть верхняя мера $\mu_e(A)$ множества A равна $\mu > 0$. Достаточно для каждого $\varepsilon > 0$ найти такое замкнутое множество $X \subseteq A$, что $\mu(X) \geqslant \mu - \varepsilon$, где $\mu(X)$ — мера Лебега множества $X \subseteq I$, см. § 3 гл. 8.

Для каждого $k \in \omega$ введем множество

$$E_k = \{\alpha \in P\colon\ \alpha(0) \leqslant k\}.$$

Ясно, что $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots$ и $\bigcup\limits_{k \in \omega} E_k = P$. Следовательно, найдется такое k_0, что множество $E_{(0)} = E_{k_0}$ удовлетворяет неравенству $\mu_e(F''E_{(0)}) \geqslant (\mu - \varepsilon) + \varepsilon/2$. Совершенно аналогично мы можем подобрать такое k_1, что множество

$$E_{(1)} = \{\alpha \in E_0\colon\ \alpha(1) \leqslant k_1\}$$

удовлетворяет неравенству $\mu_e(F''E_{(1)}) \geqslant (\mu - \varepsilon) + \varepsilon/4$ и т. д. В конечном счете получим последовательность k_0, k_1, k_2, ... такую, что для любого m множество

$$E_{(m)} = \{\alpha \in P\colon\ \alpha(0) \leqslant k_0,\ \alpha(1) \leqslant k_1,\ \ldots,\ \alpha(m) \leqslant k_m\}$$

удовлетворяет неравенству

$$\mu_e(F''E_{(m)}) \geqslant (\mu - \varepsilon) + \varepsilon/2^{m+1}.$$

Для каждого m введем открытое покрытие

$$X_m = \{\beta \in I\colon\ \exists \alpha \in E_m\,(F(\alpha) \restriction m = \beta \restriction m)\}$$

множества $F''E_{(m)}$. Из последнего неравенства следует

$$\mu_e(X_m) = \mu(X_m) \geqslant (\mu - \varepsilon) + \varepsilon/2^{m+1}.$$

Отметим, также, что $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots$. Значит, $\mathbf{\Pi}^0_2$-множество $X = \bigcap\limits_{m \in \omega} X_m$ измеримо и имеет меру $\mu(X) \geqslant \mu - \varepsilon$.

Осталось доказать $X \subseteq F''P$. Пусть $\beta \in X$. Для каждого m найдется такое $\alpha_m \in E_{(m)}$, что $F(\alpha_m) \restriction m = \beta \restriction m$. При $l \leqslant m \in \omega$ будет $\alpha_m(l) \leqslant k_l$. Поэтому в силу леммы Кёнига (лемма 4.7 гл. 3), применяемой к дереву $\{\alpha_m \restriction l\colon\ l \leqslant m \in \omega\}$, последовательность точек α_0, α_1, α_2, ... имеет предельную точку α. Имеем $\alpha \in$

так как P замкнуто, и $F(\alpha) = \beta$, поскольку функция F непрерывна. □

Теперь о полных упорядочениях. Витали дал с помощью аксиомы выбора пример неизмеримого подмножества M единичного отрезка [0, 1], см. § 3 гл. 2. При наличии полного Δ^1_n-упорядочения $<$ отрезка [0, 1] мы можем построить неизмеримое множество $M \subseteq [0, 1]$ этого же класса $\mathbf{\Delta}^1_n$, выбрав по $<$-наименьшему элементу из каждого класса $\sim$-эквивалентности. С помощью стандартного вложения I в иррациональные числа этот результат можно перенести и на пространство I:

1.4. Теорема (Витали — Серпинский). *Если существует полное $\mathbf{\Delta}^1_n$-упорядочение пространства I, то существует неизмеримое множество $X \subseteq I$ класса $\mathbf{\Delta}^1_n$.*

1.5. Следствие. *Нет полных $\mathbf{\Sigma}^1_1$-упорядочений и полных $\mathbf{\Pi}^1_1$-упорядочений пространства I.*

Доказательство. Полное упорядочение пространства I класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ или $\mathbf{\Pi}^1_1$ необходимо принадлежит и классу $\mathbf{\Delta}^1_1$, так как

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \neg(\beta < \alpha \vee \beta = \alpha). \quad \square$$

Для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ известен следующий более сильный результат:

1.6. Теорема. *Каждое фундированное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношение на I имеет длину $< \omega_1$. Следовательно, каждое полное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-упорядочение некоторого множества $\subseteq I$ имеет счетную длину, т. е. счетную область.*

Доказательство. Пусть, напротив, фундированное Σ^1_1-отношение $<$ имеет длину $\geqslant \omega_1$. Рассмотрим произвольное неборелевское $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $A = \{\alpha\colon$ *отношение* $< \restriction X_{\alpha R}$ *фундировано*$\}$ (см. теорему 2.17 гл. 8). Имеем

$A = \{\alpha \in I\colon$ *существует функция* $f\colon X_{\alpha R} \to I$ *такая, что* $\sigma < \tau \to f(\sigma) < f(\tau)$ *для всех* $\sigma, \tau \in X_{\alpha R}\}$.

Отсюда нетрудно получить $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1$ — противоречие. □

2. Класс $\mathbf{\Pi}^1_1$: теория конституант. Глубокий анализ проблемы совершенного ядра у несчетных $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств привел Лузина к созданию замечательной теории конституант $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств, некоторые проблемы которой до сих пор не решены, см. § 3. Напомним, что каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $A \subseteq I$ имеет вид

$$A = \{\alpha \in I\colon\ \text{отношение} < \restriction X_{\alpha R}\ \text{фундировано}\}$$

для некоторого множества $R \subseteq \mathrm{Seq}^2$ (теорема 2.18 гл. 8).

2.1. Определение. Множество A, определенное этим равенством, обозначим через $[R]$. Если $\mu < \omega_1$, то положим

$$[R]_\mu = \{\alpha\colon \textit{отношение } \prec \restriction (X_{\alpha R} - \{0\}) \textit{ фундировано и имеет длину } \mu\}.$$

Множество $[R]_\mu$ называется μ-й *конституантой* множества $[R]$.

Историческая справка. Конституанты, даваемые этим определением, называются *явными* конституантами, см. Лузин [6]. Значительно чаще в работах 20-х и 30-х годов встречается другое определение конституант, в котором за основу берется не длина отношения $\prec \restriction (X_{\alpha R} - \{0\})$, а порядковый тип множества $X_{\alpha R} - \{0\}$ в смысле специального линейного упорядочения $<_{\text{ЛС}}$ Лузина — Серпинского, которое определяется на Seq следующим образом:

$$\sigma <_{\text{ЛС}} \tau \leftrightarrow \sigma \prec \tau$$
$$\vee\, \exists m < \operatorname{dom}\sigma,\ \operatorname{dom}\tau\,(\sigma \restriction m = \tau \restriction m \wedge \sigma(m) < \tau(m)).$$

Для любого $X \subseteq \text{Seq}$ справедлива эквивалентность

X фундировано $\leftrightarrow$ *X вполне упорядочено в смысле порядка* $<_{\text{ЛС}}$.

Нетрудно проверить, что множество $\text{Seq} - \{0\}$ с порядком $<_{\text{ЛС}}$ порядково изоморфно множеству $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел с их естественным порядком. Зафиксируем порядковый изоморфизм $f\colon \text{Seq} - \{0\}$ на $\mathbb{Q}$ и определим

$$R_r = \{\alpha\colon f^{-1}(r) \in X_{\alpha R}\} (\subseteq I)$$

для каждого $r \in \mathbb{Q}$. Семейство $\langle R_r\colon r \in \mathbb{Q}\rangle$ называется *решетом*. Имеет место равенство

$$[R] = \{\alpha\colon \textit{множество } R_{(\alpha)} = \{r\colon \alpha \in R_r\} \textit{ вполне упорядочено в смысле естественного порядка на } \mathbb{Q}\}.$$

Следующее множество:

$\{\alpha\colon R_{(\alpha)}$ *вполне упорядочено и имеет порядковый тип* $\mu\}$ называется μ-й *действительной конституантой* $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $[R]$, см. Лузин [6]. Исторически определение явных конституант (Суслин [1], Лузин и Серпинский [1]) предшествовало определению действительных конституант. Предпочтение было отдано действительным конституантам в связи с тем, что они допускают естественную геометрическую интерпретацию: точки пространства I изобразим иррациональными точками действительной прямой, решето изобразим плоским множеством $R' = \{\langle \alpha, r\rangle\colon \alpha \in R_r\}$; тогда каждое множество $R_{(\alpha)}$

изображается сечением множества R' вертикальной прямой $x = \alpha$.

Отметим, что в исследовании некоторых вопросов, связанных с положением конституант в борелевской иерархии, исчерпывающие результаты удается получить лишь для явных конституант, см. Лузин [6]. В целом же свойства конституант обоих видов совпадают; в частности, все результаты п. 2 остаются справедливыми и для действительных конституант.

2.2. Лемма. *Конституанты $[R]_\mu$ суть попарно непересекающиеся борелевские множества*; $[R] = \bigcup\limits_{\mu<\omega_1} [R]_\mu$.

Доказательство. Борелевость конституант доказывается аналогично лемме 2.21 гл. 8. □

Следующая теорема Лузина [1] занимает центральное место в теории конституант:

2.3. Теорема. *$\mathbf{\Pi}^1_1$-множество имеет совершенное ядро, если и только если одна из его конституант несчетна.*

Доказательство справа налево тривиально: если конституанта $[R]_\mu$ несчетна, то $[R]_\mu$ содержит совершенное ядро в силу 2.2 и теоремы 1.1. А обратная импликация вытекает из такой леммы:

2.4. Лемма (принцип ограничения Лузина—Серпинского [1]). *Если $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество B включено в $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R]$, то найдется такое $\mu < \omega_1$, что $B \subseteq \bigcup\limits_{\nu<\mu} [R]_\nu$.*

Доказательство. В противном случае отношение $\prec$ на множестве B, определенное условием

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \textit{длина} \prec \restriction X_{\alpha R} \textit{ меньше длины} \prec \restriction X_{\beta R},$$

было бы фундированным $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением длины ω_1 (см. гл. 8, доказательство теоремы 3.7), что противоречит 1.6. □

2.5. Следствие. *$\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R]$ является борелевским, если и только если найдется такой ординал $\mu < \omega_1$, что $[R]_\nu = \varnothing$ для всех $\nu \geqslant \mu$.*

Для построения в § 2 некоторых контрпримеров к свойствам регулярности нам понадобятся следующие две технические леммы:

2.6. Лемма. *Пусть $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $A \subseteq [R]$ выбирает по одному элементу из каждой непустой конституанты $[R]$ данного неборелевского $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $[R]$. Тогда A несчетно и не содержит совершенного ядра. Кроме того, существует полное $\mathbf{\Pi}^1_1$ упорядочение некоторого несчетного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества.*

Доказательство. Множество A несчетно в силу 2.5 и не имеет совершенного ядра в силу 2.4. Далее, как отмечено в

доказательстве теоремы 3.7 гл. 8, найдется бинарное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношение $\leqslant$ такое, что

$$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \textit{длина} < \restriction X_{\alpha R} \textit{ не больше длины} < \restriction X_{\beta R},$$

каковы бы ни были $\alpha, \beta \in [R]$. Определим

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha, \beta \in [R] \wedge \neg \beta \leqslant \alpha.$$

Тогда $<$ будет $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношением, вполне упорядочивающим A по типу ω_1. Согласно следствию 4.22 гл. 8 можно подобрать $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $P \subseteq I^2$ так, чтобы

$$A = \{\alpha\colon \exists \beta P(\alpha, \beta)\} \text{ и } P(\alpha, \beta) \wedge P(\alpha, \gamma) \to \beta = \gamma.$$

Упорядочим множество P так:

$$\langle \alpha, \gamma\rangle <^* \langle \beta, \delta\rangle \leftrightarrow \alpha < \beta \wedge P(\alpha, \gamma) \wedge P(\beta, \delta).$$

Нетрудно проверить, что $<^*$ есть полное $\mathbf{\Pi}^1_1$-упорядочение $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества P. □

2.7. Лемма. *Если существует несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество без совершенного ядра, то существует и несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество без совершенного ядра.*

Доказательство. Пусть несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $A \subseteq I$ не содержит совершенного ядра. Как и в доказательстве 2.6, найдется $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $P \subseteq I^2$ такое, что $A = \{\alpha\colon \exists \beta P(\alpha, \beta)\}$ и $P(\alpha, \beta) \wedge P(\alpha, \gamma) \to \beta = \gamma$. Это множество несчетно и не содержит совершенного ядра, так как в противном случае и множество A содержало бы совершенное ядро по теореме 1.1. □

Таким образом, для построения таких «патологических» множеств, как несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество без совершенного ядра или полное $\mathbf{\Pi}^1_1$-упорядочение несчетной длины, было бы достаточно построить $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество, выбирающее ровно по одной точке из каждой непустой конституанты какого-нибудь неборелевского $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества. В частности, хватило бы несчетного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества, каждая конституанта которого содержит не более одной точки. Однако исследование вопроса существования таких множеств, предпринятое в дескриптивной теории в 20-е годы, не дало результатов: ни доказательство, ни опровержение существования несчетных $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств со счетными (или одноэлементными) конституантами не было получено. Мы вернемся к конституантам $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств в §§ 2, 3, где покажем, что предложение о существовании $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств указанных видов неразрешимо средствами теории ZFC.

3. Принципы отделимости. Формулировка первого и второго принципов отделимости для произвольного точечного класса Γ дается следующим определением (Лузин [1], [4], Аддисон [1], Куратовский и Мостовский [1]).

3.1. Определение. *Принцип Γ-отделимости*: для любой пары непересекающихся Γ-множеств $A, B \subseteq I^m$ найдется такое множество $U \in \Gamma \cap \breve{\Gamma}$, $U \subseteq I^m$, что $A \subseteq U$ и $B \cap U = \varnothing$.

Принцип Γ-отделимости-2: для любой пары Γ-множеств $A, B \subseteq I^m$ найдется пара непересекающихся $\breve{\Gamma}$-множеств $A', B' \subseteq I^m$ таких, что $A - B \subseteq A'$ и $B - A \subseteq B'$.

Напомним, что $\breve{\Gamma}$ есть класс дополнений множеств из Γ.

3.2. Теорема (Лузин [1], [4] для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$, Новиков [1] для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, Новиков [4] для классов $\mathbf{\Sigma}^1_2$ и $\mathbf{\Pi}^1_2$). *Принципы отделимости справедливы для классов $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Pi}^1_2$ и соответствующих эффективных классов, но не имеют места для дуальных классов $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$.*

Доказательство положительной части этой теоремы получается из результатов 3.4, 3.7, 4.12 гл. 8 переходом к дополнениям. Отрицательная часть вытекает из следующей леммы, фактически установленной в ходе доказательства теоремы 3.2 гл. 8:

3.3. Лемма. *Если класс Γ таков, как указано в теореме* 3.2 гл. 8, *то из Γ-редукции следуют отрицания обоих принципов отделимости для класса Γ.*

Принцип редукции был введен и исследован Куратовским [1] уже после доказательства теоремы 3.2. В основе всех известных доказательств положительных утверждений теоремы 3.2 (кроме принципа $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отделимости) лежит тот или иной вариант принципа предупорядочения для классов $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Отметим, что принципы предупорядочения для этих классов в несколько иной форме были известны в классической теории как принципы сравнения индексов Новикова [1], [4].

3.4. Следствие. *Пусть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество A включено в $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $B \subseteq I$. Тогда найдется такое $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество U, что $A \subseteq U \subseteq B$.*

Доказательство. Применим $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отделимость к множествам A и $\overline{B}$. □

3.5. Упражнение (Лузин [1]). Докажите теорему 2.20 гл. 8 с помощью принципа $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отделимости. Докажите сам этот принцип с помощью леммы 2.4.

3.6. Вопрос (Лузин [7]). Множества $A, B \subseteq I$ назовем неотделимыми, если нет такого $\mathbf{\Delta}^1_1$-множества U, что $A \subseteq U$ и $B \cap U = \varnothing$. В силу теоремы 3.5 существует пара непере-

секающихся Δ^1_1-неотделимых Π^1_1-множеств. Верно ли, что для всякого неборелевского Π^1_1-множества A найдется такое Π^1_1-множество B, не пересекающееся с A, что A и B являются Δ^1_1-неотделимыми?

Обобщением принципов отделимости на случай более чем двух множеств являются принципы кратной отделимости. Например, справедливо следующее обобщение принципа Σ^1_1-отделимости: если Σ^1_1-множества $X_0, X_1, X_2, \ldots$ имеют пустое пересечение, то существует семейство $U_0, U_1, U_2, \ldots$ множеств класса Δ^1_1 вновь с пустым пересечением такое, что $X_i \subseteq U_i$ для всех i. Более подробно см. Лузин [8], Новиков [2], [3], Ляпунов [2].

4. Классы Δ^1_1 и Σ^1_1: теория однозначных и счетнозначных множеств.

4.1. Определение. Если $P \subseteq I^2$, то через $\operatorname{пр} P$ обозначим *проекцию* множества P в смысле гл. 8 (на первую ось), т. е.

$$\operatorname{пр} P = \{\alpha\colon \exists\beta P(\alpha, \beta)\}.$$

4.2. Определение. Множество $P \subseteq I^2$ называется *однозначным*, если каждое его сечение $P_\alpha = \{\beta\colon P(\alpha, \beta)\}$ содержит не более одной точки. Множество $P \subseteq I^2$ называется *счетнозначным*, если каждое сечение P_α не более чем счетно. Однозначное множество $P \subseteq I^2$ называется *кривой*, если $\operatorname{пр} P = I$.

Однозначные множества — это частичные функции из I в I, а кривые — всюду определенные функции (или, если угодно, их графики). Ляпунов [1] называет однозначные и счетнозначные множества соответственно униформными и счетноформными.

Структурная теория однозначных и счетнозначных множеств классов Δ^1_1 и Σ^1_1, восходящая к Лебегу [1], приняла законченный вид в главах 3 и 4 монографии Н. Н. Лузина [1]. Основные положительные результаты этой теории содержатся в следующих теоремах:

4.3. Теорема (Лузин [1]). *Каждое Δ^1_1-множество $X \subseteq I$ является проекцией некоторого однозначного множества $P \subseteq I^2$ класса Π^1_0.*

4.4. Теорема (Лузин [1], Новиков [1]). *Проекция любого счетнозначного Δ^1_1-множества $P \subseteq I^2$ принадлежит классу Δ^1_1.*

4.5. Теорема (Лузин [1], Гливенко [1]). *Каждое однозначное Σ^1_1-множество $P \subseteq I^2$ можно вложить в кривую класса Δ^1_1.*

4.6. Теорема (Лузин [1]). *Каждое счетнозначное Σ^1_1-множество $P \subseteq I^2$ можно вложить в счетнозначное Δ^1_1-множество.*

4.7. Теорема (Лузин [1]). *Каждое счетнозначное Δ^1_1-множество $P \subseteq I^2$ является объединением счетного числа попарно непересекающихся однозначных Δ^1_1-множеств. То же для класса Σ^1_1 вместо Δ^1_1.*

Об отрицательных результатах см. ниже.

Теоремы 4.3 и 4.4 дают замечательную характеризацию Λ^1_1-множеств: множество $X \subseteq I$ является борелевским, если и только если оно есть проекция однозначного Π^1_0-(т. е. замкнутого) множества (Лузин). Перейдем к доказательствам.

Доказательство теоремы 4.3 несложно. Через K обозначим класс всех проекций однозначных Π^1_0-множеств. Нетрудно проверить, что класс всех борелевских множеств $\subseteq I$ является замыканием класса всех Π^1_0-множеств $\subseteq I$ относительно таких двух операций: счетное пересечение и счетное объединение попарно непересекающихся множеств. Поэтому, так как каждое Π^1_0-множество $X \subseteq I$, очевидно, принадлежит K, то для доказательства теоремы 4.3 достаточно доказать следующие две леммы:

4.8.1. Лемма. *Если $X_1, X_2, \ldots \in K$, то $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \in K$.*

4.8.2. Лемма. *Если множества $X_0, X_1, \ldots \in K$ попарно не пересекаются, то $X_0 \cup X_1 \cup \ldots \in K$.*

Доказательство леммы 4.8.1. Пусть каждое X_i есть проекция $\operatorname{пр} P_i$ однозначного Π^1_0-множества $P_i \subseteq I^2$. Образуем в бесконечномерном пространстве I^ω множество

$$P' = \{\langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle\colon P_1(x_0, x_1) \wedge P_2(x_0, x_2) \wedge \ldots\}.$$

Положим также

$$P = \{\langle x_0, G(\langle x_1, x_2, \ldots\rangle)\rangle\colon \langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle \in P'\},$$

где G — какой-нибудь гомеоморфизм $I^{\omega-\{0\}}$ на I. Построенное множество P принадлежит Π^1_0 и однозначно, а его проекция совпадает с пересечением всех множеств X_i. □

Доказательство леммы 4.8.2. Пусть снова $X_i = \operatorname{пр} P_i$, где каждое $P_i \subseteq I^2$ однозначно и принадлежит классу Π^1_0. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $P_i(\alpha, \beta) \to \beta(0) = i$. В качестве искомого однозначного Π^1_0-множества P, проекция которого совпадает с объединением всех X_i, возьмем объединение всех P_i. □

Доказательство теоремы 4.3 закончено. □

Доказательство теоремы 4.4, которое мы представим здесь, опирается на некоторые результаты «эффективной»

теории. Лузин [1] и Ляпунов [1] дают другое доказательство.

4.9. Лемма (Роджерс [1]). *Пусть* $\pi \in I$ *и множество* $P \subseteq I^2$ *принадлежит классу* $\Pi^{1,\pi}_1$. *Тогда множество* $\{\alpha\colon \exists\beta \in \in \Delta^{1,\alpha,\pi}_1 P(\alpha, \beta)\}$ *принадлежит классу* $\Pi^{1,\pi}_1$.

Доказательство. Для простоты параметр π опускаем. Используя вариант теоремы 4.9 гл. 8, можно подобрать Π^1_1-множество $U \subseteq I \times \omega^3$, удовлетворяющее следующему условию:

если $\alpha \in I$ *и множество* $x \subseteq \omega^2$ *принадлежит классу* $\Pi^{1,\alpha}_1$, *то найдется такое* $n \subseteq \omega$, *что*

$$x = U_{\alpha n} = \{\langle k, l\rangle\colon U(\alpha, n, k, l)\}.$$

Рассмотрим U как подмножество пространства $(I \times \omega^2) \times \omega$. Теорема униформизации 4.20 гл. 8 применима и в этой ситуации. Она дает Π^1_1-множество $V \subseteq U$, удовлетворяющее при любых $\alpha \in I$ и $n, k \in \omega$ следующей импликации:

$$\exists l U_{\alpha n}(k, l) \to \exists! l V_{\alpha n}(k, l).$$

Таким образом, каждое множество $V_{\alpha n} = \{\langle k, l\rangle\colon V(\alpha, n, k, l)\}$ является «частичной» функцией, униформизующей множество $U_{\alpha n}$.

Для каждого $\alpha \in I$ имеем

$$\exists\beta \in \Delta^{1,\alpha}_1 P(\alpha, \beta) \leftrightarrow \exists n\,(\operatorname{dom} V_{\alpha n} = \omega \wedge P(\alpha, V_{\alpha n}))$$

(В самом деле, по выбору U и V каждое $\beta \in I \cap \Delta^{1,\alpha}_1$ имеет вид $V_{\alpha n}$ для некоторого n, и, наоборот, если $\operatorname{dom} V_{\alpha n} = \omega$, то $V_{\alpha n} \in \Delta^{1,\alpha}_1$, так как $V_{\alpha n}(k, l) \leftrightarrow \forall l'\,(l' \neq l \to \neg V_{\alpha n}(k, l'))$.)

$$\leftrightarrow \exists n\,(\operatorname{dom} V_{\alpha n} = \omega \wedge \forall\beta\,(\beta = V_{\alpha n} \to P(\alpha, \beta))).$$

Теперь равенство $\beta = V_{\alpha n}$ заменим выражением

$$\forall k, l\,(l \neq \beta(k) \to \neg V_{\alpha n}(k, l)). \quad \square$$

4.10. Следствие. *Множество* $\{\langle\alpha, \gamma\rangle\colon \gamma \in \Delta^{1,\alpha}_1\}$ *принадлежи классу* Π^1_1. *Если* $\alpha \in I$, *то множество* $\Delta^{1,\alpha}_1 \cap I$ *принадлежи классу* $\Pi^{1,\alpha}_1$.

Доказательство. $\gamma \in \Delta^{1,\alpha}_1 \leftrightarrow \exists\beta \in \Delta^{1,\alpha}_1\,(\beta = \gamma)$. $\square$

Таким образом, разность $I - \Delta^{1,\alpha}_1$ является, очевидно, н пустым $\Sigma^{1,\alpha}_1$-множеством, не содержащим ни одной $\Delta^{1,\alpha}_1$-точки Следующая лемма показывает, что счетных $\Sigma^{1,\alpha}_1$-множеств та кого рода нет.

4.11. Лемма. *Если* $\alpha \in I$ *и* $\Sigma^{1,\alpha}_1$-*множество* $A \subseteq I$ *не включено в* $\Delta^{1,\alpha}_1$, *то* A *содержит совершенное ядро.*

Доказательство. В силу 4.10, не ограничивая общности, предположим, что пересечение $A \cap \Delta^{1,\alpha}_1$ пусто. Пусть A есть проекция $\Pi^{1,\alpha}_0$-множества $P \subseteq I^2$. Заметим, что проекция каждого непустого открытого в P множества $Q \subseteq P$ содержит не менее двух точек (в противном случае единственная точка $\Sigma^{1,\alpha}_1$-множества $\operatorname{пр} Q$ принадлежала бы классу $\Delta^{1,\alpha}_1$, см. доказательство 4.23 гл. 8). Теперь лемма следует из леммы 1.2. $\square$

4.12. Следствие. *Если* $\alpha \in I$, *то каждое счетное* $\Sigma^{1,\alpha}_1$-*множество* $A \subseteq I$ *включено в* $\Delta^{1,\alpha}_1$.

Доказательство теоремы 4.4. Пусть счетнозначное множество $P \subseteq I^2$ принадлежит классу Δ^1_1, т. е. классу $\Delta^{1,\pi}_1$ для некоторого $\pi \in I$. Из 4.12 следует включение

$$P \subseteq \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \beta \in \Delta^{1,\pi,\alpha}_1\}.$$

Значит, проекция нашего множества

$$\operatorname{пр} P = \{\alpha\colon \exists\gamma P(\alpha, \gamma)\} = \{\alpha\colon \exists\beta \in \Delta^{1,\pi,\alpha}_1 P(\alpha, \beta)\}$$

является $\Pi^{1,\pi}_1$-множеством согласно 4.9. Но, очевидно, $\operatorname{пр} P \in \in \Sigma^{1,\pi}_1$. $\square$

Доказательство теоремы 4.5. Рассмотрим однозначное Σ^1_1-множество $P \subseteq I^2$. Через $<$ обозначим лексикографический линейный порядок на I. Нетрудно проверить, что множества

$$P_1 = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \exists\gamma < \beta P(\alpha, \gamma)\}, \quad P_2 = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \exists\gamma > \beta P(\alpha, \gamma)\}$$

принадлежат классу Σ^1_1, причем $(P \cup P_1) \cap P_2 = \varnothing$. Следовательно, мы можем использовать принцип Σ^1_1-отделимости (теорема 3.2) и найти такое Δ^1_1-множество $U_1 \subseteq I^2$, что $P \cup P_1 \subseteq U_1$, но $P_2 \cap U_1 = \varnothing$. Совершенно аналогично найдется такое Δ^1_1-множество $U_2 \subseteq I^2$, что $P \cup P_2 \subseteq U_2$ и $P_1 \cap U_2 = \varnothing$. Пересечение $U = U_1 \cap U_2$ принадлежит классу Δ^1_1, причем $P \subseteq U$ и для каждого $\alpha \in \operatorname{пр} P$ существует и единственно такое β, что $U(\alpha, \beta)$ (именно, то β, для которого выполняется $P(\alpha, \beta)$).

Рассмотрим Σ^1_1-множество

$$S = \{\alpha\colon \exists\beta\exists\gamma\,(\beta \neq \gamma \wedge U(\alpha, \beta) \wedge U(\alpha, \gamma))\}.$$

Ясно, что $S \cap \operatorname{пр} P = \varnothing$, и поэтому в силу Σ^1_1-отделимости найдется Δ^1_1-множество $D \subseteq I$ такое, что $\operatorname{пр} P \subseteq D$ и $S \cap D = \varnothing$.

Положим

$$Q' = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \alpha \in D \wedge U(\alpha, \beta)\},\quad Q = Q' \cup \{\langle \alpha, \alpha_0\rangle\colon\ \alpha \notin \operatorname{пр} Q'\},$$

где $\alpha_0 = \omega \times \{0\}$. Множество Q искомое: принадлежность Q к классу Δ^1_1 нетрудно вывести из теоремы 4.4. □

Доказательство теоремы 4.6. Пусть счетнозначное множество $P \subseteq I^2$ принадлежит классу Σ^1_1, т. е. классу $\Sigma^{1,\pi}_1$ для некоторого $\pi \in I$. Положим $S = \{\langle \alpha, \gamma\rangle\colon\ \gamma \in \Delta^{1,\pi,\alpha}_1\}$. Из 4.10 следует $S \in \Pi^{1,\alpha}_1$, т. е. $S \in \mathbf{\Pi}^1_1$, а из 4.12 имеем $P \subseteq S$. Теперь нужно использовать 3.4. □

Доказательство теоремы 4.7 достаточно провести для множеств класса Δ^1_1;результат переносится на класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ теоремой 4.6. Рассмотрим счетнозначное Δ^1_1-множество $P \subseteq I^2$. Пусть, для определенности, $P \in \Delta^1_1$ (случай $P \in \Delta^{1,\pi}_1$ для произвольного $\pi \in I$ рассматривается аналогично). Идея в сущности очень проста: каждое сечение $P_\alpha = \{\beta\colon\ P(\alpha, \beta)\}$ включено в $\Delta^{1,\alpha}_1$ согласно 4.12, и поэтому Π^1_1-множество V из доказательства леммы 4.9 обеспечивает пересчет в виде $V_{\alpha n}$ всех точек сечения P_α. Перейдем к деталям.

Рассмотрим множество

$$S = \{\langle \alpha, \beta, n\rangle\colon\ P(\alpha, \beta) \wedge \beta = V_{\alpha n}\} \subseteq P \times \omega.$$

Имеем $S \in \Delta^1_1$, так как $V \in \Pi^1_1$ и

$$\beta = V_{\alpha n} \leftrightarrow \forall k V_{\alpha n}(k, \beta(k)) \leftrightarrow \operatorname{dom} V_{\alpha n} = \omega \wedge \forall k, l\,(V_{\alpha n}(k, l) \to l = \beta(k)).$$

Поэтому каждое $P_n = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ S(\alpha, \beta, n)\} \subseteq P$ также является Δ^1_1-множеством, причем, очевидно, однозначным.

Покажем, что $P \subseteq \bigcup\limits_{n \in \omega} P_n$. Пусть $\langle \alpha, \beta\rangle \in P$. Тогда $\beta \in \Delta^{1,\alpha}_1$ по 4.12, и поэтому найдется n такое, что $\beta = V_{\alpha n}$ (см. доказательство леммы 4.9), т. е. $\langle \alpha, \beta\rangle \in P_n$, что и требовалось. □

Доказательства теорем об однозначных и счетнозначных множествах с помощью методов эффективной теории во многих случаях выглядят более изящными, чем классические доказательства (например, из книг Лузина [1], Куратовского [2], Ляпунова [1]). Особенно хорошо это видно на доказательстве теоремы 4.7. Классическое доказательство этой теоремы проходит примерно так. Прежде всего, достаточно установить, что каждое счетнозначное множество $P \subseteq I^2$ класса $\mathbf{\Pi}^1_0$ является объединением счетного числа однозначных Δ^1_1-множеств (последние делаются попарно непересекающимися тривиальным образом: вместо P_n берем $P_n - \bigcup\limits_{i<n} P_i$). Доказав этот результат, мы получаем теорему для всех $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеств с помощью теорем 4.3 и 4.4.

Итак, пусть $P \subseteq I^2$ счетнозначно и замкнуто. Индукцией по $\nu < \omega_1$ определим $P^0 = P$, и далее

$$P^{\nu+1} = \{\langle \alpha, \beta\rangle \in P^\nu\colon\ \beta \text{ является предельной точкой сечения } P^\nu_\alpha \text{ множества } P^\nu\},$$

$$P^\lambda = \bigcap_{\nu<\lambda} P^\nu, \quad \text{если} \quad \lambda < \omega_1 \quad \text{предельно.}$$

Центральным моментом доказательства является лемма Лузина, утверждающая, что некоторое P^μ пусто. Раз так, то наше P оказывается объединением счетного числа $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеств P^ν, $\nu < \mu$, каждое из которых есть множество с дискретными сечениями (т. е. сечения P^ν_α не содержат своих предельных точек). С другой стороны, любое $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $Q \subseteq I^2$ с дискретными сечениями являются объединением счетного числа однозначных $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеств Q_σ, $\sigma \in \operatorname{Seq}$, где

$$Q_\sigma = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \forall \gamma\,(\gamma = \beta \leftrightarrow (Q(\alpha, \gamma) \wedge \sigma \subseteq \gamma))\}.$$

Доказательство борелевости множеств Q_σ методами классической теории само по себе представляет определенные трудности, но легко проводится с помощью леммы 4.9 (пишем $\forall \gamma \in \Delta^{1,\alpha,\beta,\pi}_1$ вместо $\forall \gamma$, где $\pi \in I$ таково, что $Q \in \Delta^{1,\pi}_1$).

4.13. Следствие (из теоремы 4.7; Новиков [1]). *Каждое счетнозначное $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $P \subseteq I^2$ можно униформизовать $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством (т. е. подобрать такое однозначное $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $Q \subseteq P$, что $\operatorname{пр} Q = \operatorname{пр} P$).*

В заключение этого пункта — несколько упражнений, содержащих отрицательные результаты, а также несколько открытых вопросов.

4.14. Упражнение (Новиков [1]). Следствие 4.13 нельзя распространить на произвольные $\mathbf{\Delta}^1_1$-множества $P \subseteq I^2$ и даже на те из них, для которых $\operatorname{пр} P = I$. Иными словами, *найдется такое $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $P \subseteq I^2$, что $\operatorname{пр} P = I$, но P не включает ни одной $\mathbf{\Delta}^1_1$-кривой.*

Указание. По теореме 3.2 принцип $\mathbf{\Pi}^1_1$-отделимости не имеет места. Пусть $X_0, X_1 \subseteq I$ суть два непересекающихся и $\mathbf{\Lambda}^1_1$-неотделимых $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества, а Y_0, Y_1 — их дополнения, принадлежащие классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

Пусть $Y_0 = \operatorname{пр} P_0$, $Y_1 = \operatorname{пр} P_1$, где $\mathbf{\Pi}^1_0$-множества $P_i \subseteq I^2$ таковы, что $P_i(\alpha, \beta) \to \beta(0) = i$ для $i = 0, 1$. Объединение $P = P_0 \cup P_1$ искомое; в доказательстве этого используется теорема 4.4. □

4.15. Упражнение (Лузин [7]). *Существует неборелевская* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-кривая.*

Указание. Возьмем неборелевское $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $X \subseteq I$. Согласно следствию 4.22 гл. 8 $X = \operatorname{пр} P$ для некоторого однозначного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $P \subseteq I^2$. Кроме того, очевидно, $I - X = \operatorname{пр} Q$ для некоторого однозначного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $Q \subseteq I^2$. Не ограничивая общности, предположим, что $P(\alpha, \beta) \to \beta(0) = 0$ и $Q(\alpha, \beta) \to \beta(0) = 1$. Объединение $P \cup Q$ — искомая кривая. □

4.16. Вопрос. Верно ли, что каждое счетнозначное замкнутое $P \subseteq I^2$ является объединением счетного числа однозначных замкнутых множеств?

4.17. Вопрос. На счетное число однозначных множеств какого класса можно расщепить множество $\{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \beta \in \Delta^{1,\alpha}_1\}$ (очевидно, счетнозначное и принадлежащее $\mathbf{\Pi}^1_1$ по 4.10)?

5. Теория однозначных и счетнозначных множеств второго уровня проективной иерархии. Структурная теория второго уровня проективной иерархии началась с результатов Новикова [4] о том, что принципы отделимости справедливы для класса $\mathbf{\Pi}^1_2$, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_2$, т. е. наоборот по сравнению с первым уровнем (теорема 3.2). Как показывают следующие теоремы, основные результаты п. 4 также «обращаются» при переходе ко второму уровню иерархии.

5.1. Теорема (Кондо [1]; следствие 4.22 гл. 8). *Каждое* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $P \subseteq I^2$ *содержит однозначное подмножество* $Q \subseteq P$ *класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$ *такое, что* $\operatorname{пр} Q = \operatorname{пр} P$ (ср. с. 4.16).

5.2. Следствие. *Класс всех* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-множеств* $\subseteq I$ *совпадает с классом проекций всех однозначных* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множеств, а также с классом проекций всех счетнозначных* $\mathbf{\Delta}^1_2$*-множеств* (ср. с 4.3 и 4.4).

5.3. Теорема. *Существует однозначное* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-множество* $P \subseteq I^2$, *не содержащееся ни в каком счетнозначном множестве класса* $\mathbf{\Pi}^1_2$ (ср. с 4.5, 4.6).

5.4. Теорема. *Существует счетнозначное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $P \subseteq I^2$, *не являющееся объединением счетного числа однозначных множеств класса* $\mathbf{\Sigma}^1_2$ (ср. с 4.7).

Доказательство теоремы 5.3 несложно. Рассмотрим $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $U \subseteq I^3$, универсальное в том смысле, что совокупность всех множеств вида $U_\alpha = \{\langle\beta, \gamma\rangle\colon U(\alpha, \beta, \gamma)\}$ является в точности совокупностью всех $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств $P \subseteq I^2$. Положим $Z = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon U(\alpha, \alpha, \beta)\}$. В силу следствия 4.22 гл. 8 найдется однозначное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $P \subseteq Z$ такое, что $\operatorname{пр} P = \operatorname{пр} Z$. Это множество P искомое.

Отметим, что Новиков и Келдыш [1] построили однозначное множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, не содержащееся ни в каком однозначном $\mathbf{\Delta}^1_2$-множестве, с помощью пары $\mathbf{\Delta}^1_2$-неотделимых непересекающихся множеств класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Таким же образом Гливенко [1] дал пример однозначного множества класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, которое нельзя вложить в однозначное множество класса $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Для доказательства теоремы 5.4 укажем счетнозначное множество, которое не является объединением счетного числа однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств. Таким множеством служит

$U^{(2)} = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \beta$ *есть характеристическая функция некоторого* $\mathbf{\Sigma}^{1,\alpha}_2$*-множества* $u \subseteq \omega\}$.

5.5. Лемма. $U^{(2)}$ *не является объединением счетного числа однозначных* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-множеств.*

Доказательство. Пусть, напротив, $U^{(2)} = \bigcup\limits_{m \in \omega} P_m$, где каждое $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $P_m \subseteq I^2$ однозначно. Рассмотрим такое α, что все множества P_m принадлежат $\Sigma^{1,\alpha}_2$. Множество $\{\beta\colon U^{(2)}(\alpha, \beta)\}$ содержит точку $\beta \notin \Delta^{1,\alpha}_2$, так как $\Sigma^{1,\alpha}_2 \not\subseteq \Delta^{1,\alpha}_2$. Найдется такое m, что β есть единственный элемент множества $\{\beta\colon P_m(\alpha, \beta)\}$. Согласно выбору α мы получим $\beta \in \Delta^{1,\alpha}_2$ (см. доказательство следствия 4.23 гл. 8) — противоречие! □

Ниже в п. 13 будет дано доказательство следующей теоремы:

5.6. Теорема. *Множество* $U^{(2)}$ *принадлежит классу* $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Доказательство теоремы 5.4. Согласно 5.5 и 5.6 у нас есть счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $U^{(2)}$, не являющееся объединением счетного числа однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств. Согласно «эффективному» варианту 5.2 найдется такое множество $Q \subseteq I^3$ класса Π^1_1, что $U(\alpha, \beta) \leftrightarrow \exists\gamma Q(\alpha, \beta, \gamma) \leftrightarrow \exists!\gamma Q(\alpha, \beta, \gamma)$. Если теперь $G\colon I^2$ на I — канонический гомеоморфизм, то множество $P = \{(\alpha, G(\beta, \gamma))\colon Q(\alpha, \beta, \gamma)\}$ будет искомым в смысле теоремы 5.4.

Известное автору доказательство теоремы 5.6, играющей ключевую роль в доказательстве теоремы 5.4, существенно использует аппарат конструктивности. Было бы интересно получить доказательство этой теоремы в рамках круга идей пп. 1—5. Возможно, теорему 5.4 удастся доказать с помощью множества из следующего упражнения:

5.7. Упражнение. *Множество* $\{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \beta \in \Delta^{1,\alpha}_2\}$ *принадлежит классу* $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Указание. Воспользуйтесь идеей доказательств 4.9 и 4.10 (вместо принципа $\mathbf{\Pi}^1_1$-униформизации нужно применить принцип $\mathbf{\Sigma}^1_2$-униформизации).

5.8. Вопрос. Является ли (счетнозначное) $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество 5.7 объединением счетного числа однозначных множеств класса $\mathbf{\Sigma}^1_2(\mathbf{\Delta}^1_2)$?

5.9. Упражнение. *Принцип $\mathbf{\Pi}^1_2$-униформизации ложен.*
Указание. Для любого проективного класса Г из Г-униформизации следует Г-редукция.

5.10. Вопрос. Можно ли каждое однозначное $\mathbf{\Delta}^1_2$-множество продолжить до кривой класса $\mathbf{\Delta}^1_2$?

5.11. Вопрос. Можно ли каждое счетнозначное $\mathbf{\Pi}^1_2$-множество вложить в счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество (ср. с 4.6 и 5.3)?

6. Дескриптивные формы аксиомы выбора и континуум-гипотезы. Внимательный анализ материала пп. 1—5 (а также результатов гл. 8) показывает, что, по сути дела, ни в одном доказательстве не использована аксиома выбора, за исключением быть может, ее «счетных форм». Таким образом, применение аксиомы выбора в дескриптивной теории множеств носит весьма ограниченный характер (в отличие, скажем, от теории кардиналов). Вообще, использование аксиомы выбора в дескриптивной теории множеств вызывало определенную критику со стороны ряда математиков, см. Лузин [1], [4]. С появлением метода вынуждения в последние 10—15 лет появился ряд работ, направленных на исследование различных «дескриптивных» форм аксиомы выбора. Наибольший интерес представляют следующие четыре формы:

Аксиома счетного независимого выбора Г-AC_ω *для* (точечного класса) Г. Если Г-множество $P \subseteq \omega \times I$ таково, что $\mathrm{dom}\, P = \omega$, то найдется функция $f\colon \omega \to I$ такая, что $P(k, f(k))$ для всех $k \in \omega$.

Аксиома счетного зависимого выбора Г-DC_ω *для* Г. Если Г-множество $P \subseteq I \times I$ таково, что $\mathrm{dom}\, P = I$, и если $u \in I$, то найдется функция $f\colon \omega \to I$ такая, что $f(0) = u$ и $P(f(k), f(k+1))$ для всех $k \in \omega$.

Принцип (Γ_1, Γ_2)*-униформизации* (см. гл. 8).

Принцип (Γ_1, Γ_2)*-селектора.* Если бинарное Γ_2-отношение $\sim$ на I является отношением эквивалентности, то найдется Γ_1-множество $X \subseteq I$, выбирающее ровно по одному элементу из каждого класса $\sim$-эквивалентности. (Множество X называется селектором для $\sim$.)

Используя принцип $\mathbf{\Sigma}^1_2$-униформизации, нетрудно получить $\mathbf{\Sigma}^1_2$-AC_ω и $\mathbf{\Sigma}^1_2$-DC_ω в теории ZF без аксиомы выбора. (Этот результат восходит к методу П. С. Новикова «эффективного выбора точки в непустом $\mathbf{\Pi}^1_1$-множестве», см. Лузин, Новиков [1].) Таким образом, некоторые формы аксиомы выбора доказуемы. Более подробный обзор результатов, относящихся к AC_ω и DC_ω, дает Кановей [1]. О принципе селектора см. Берджес [1]. Заметим, что, в отличие от принципов униформизации и счетного выбора, невозможно доказать существование проективного селектора для такого весьма простого отношения, как борелевское отношение эквивалентности Витали: если существует проективный селектор для этого отношения, то существует и неизмеримое проективное множество (см. п. 1), а предложение о существовании неизмеримого проективного множества недоказуемо в теории ZFC, см. § 4.

Естественной дескриптивной формой континуум-гипотезы можно считать следующее предложение:

Принцип совершенного ядра Г-PS для множеств класса Г. Всякое несчетное Г-множество $X \subseteq I$ содержит совершенное ядро.

По теореме 1.1 выполняется $\mathbf{\Sigma}^1_1$-PS. Но уже предложение $\mathbf{\Pi}^1_1$-PS (и эквивалентное ему $\mathbf{\Sigma}^1_2$-PS) неразрешимы в ZFC, см. п. 15. Аксиома проективной детерминированности PD влечет Г-PS, где Г — класс всех проективных множеств (теорема 6.2 гл. 8). Таким образом, при $n \geqslant 2$ предложения $\mathbf{\Sigma}^1_n$-PS, $\mathbf{\Pi}^1_n$-PS и $\mathbf{\Delta}^1_n$-PS неразрешимы средствами ZFC (по крайней мере если аксиома PD не противоречит ZFC).

Контрпримером к CH можно считать не только несчетное множество без совершенного ядра, но и отношение эквивалентности E на I, имеющее несчетное число классов E-эквивалентности, но не имеющее совершенного множества попарно E-неэквивалентных точек. Такие отношения E условимся называть *особыми.* Сильвер [1] доказал, что $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношения (и тем самым борелевские отношения) не являются особыми. В то же время нетрудно проверить, что если множество $[R]$ неборелевское, то отношение

$$\alpha E \beta \leftrightarrow \alpha,\ \beta \notin [R] \vee \exists \nu\, (\alpha,\ \beta \in [R]_\nu)$$

будет особым $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением. Таким образом, особые отношения имеются в классе $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и в более высоких проективных классах, но не в классах $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Больший интерес представляет

Принцип особых ограниченных по рангу отношений Г-SR для класса Г. Не существует принадлежащих Г особых отношений E таких, что все классы E-эквивалентности суть борелевские множества ограниченного в совокупности ранга (т. е. все

они принадлежат некоторому одному борелевскому классу $\mathbf{\Pi}^0_\rho$, $\rho < \omega_1$).

Результат Сильвера [1] влечет $\mathbf{\Pi}^1_1$-SR и $\mathbf{\Delta}^1_1$-SR.

6.1. Вопрос. Выполняется ли $\mathbf{\Sigma}^1_1$-SR?

По-видимому, следует ожидать положительного ответа на этот вопрос. Автору удалось доказать $\mathbf{\Sigma}^1_1$-SR для отношений E, удовлетворяющих одному из таких условий:

1) Если $\alpha \in I$, то $\{\beta\colon \alpha E \beta\} \in \mathbf{\Delta}^{1,\alpha}_1$.

2) Найдется $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $F \subseteq I^2 - E$ такое, что $\forall\alpha\exists\beta F(\alpha,\beta)$ и $F(\alpha,\beta) \to \forall m \neg E((\alpha)_m, \beta)$.

Принцип $\mathbf{\Delta}^1_2$-SR неразрешим в ZFC (Штерн [2]). Принцип $\mathbf{\Delta}^1_3$-SR недоказуем в ZFC + $\mathbf{\Delta}^1_2$-SR; этот результат можно получить из анализа полного $\mathbf{\Delta}^1_3$-упорядочения Сильвера, упомянутого в § 5 гл. 8. С другой стороны, аксиома PD влечет Γ-SR для класса Γ всех проективных множеств (Штерн [3]). Работы Сильвера [1] и Штерна [3] содержат более подробную информацию. Доказательство принципа $\mathbf{\Sigma}^1_1$-SR для некоторых типов $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношений эквивалентности, связанных с конституантами, см. п. 19.

7. Структурная теория более высоких уровней проективной иерархии. Лузин [2], гл. 5, поставил ряд проблем структурной теории проективных классов, которые «естественно возникают» после построения проективной иерархии. Общий смысл этих проблем состоит в следующем: каков класс проекций однозначных множеств классов $\mathbf{\Delta}^1_n$ и $\mathbf{\Pi}^1_n$? Можно ли вложить однозначное или счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество в такое же $\mathbf{\Delta}^1_n$-множество? Можно ли «расщепить» счетнозначное множество на счетное число однозначных множеств того же класса, что и исходное? Эти проблемы суть проблемы об истинности при различных $n \geqslant 1$ следующих десяти утверждений:

7.1$_n$. *Проекция всякого однозначного $\mathbf{\Delta}^1_n$-множества принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^1_n$.*

7.2$_n$. *Проекция всякого однозначного $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-множества принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^1_n$.*

7.3$_n$. *Всякое однозначное $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество можно вложить в $\mathbf{\Delta}^1_n$-кривую.*

7.4$_n$. *Всякое счетнозначное $\mathbf{\Delta}^1_n$-множество является объединением счетного числа однозначных множеств класса $\mathbf{\Delta}^1_n$.*

7.5$_n$. *Всякое счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество можно вложить в счетнозначное $\mathbf{\Delta}^1_n$-множество.*

7.6$_n$. *Всякое счетнозначное $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-множество является объединением счетного числа однозначных множеств класса $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$.*

7.7$_n$. *Всякое $\mathbf{\Delta}^1_n$-множество $\subseteq I$ является проекцией однозначного $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-множества.*

7.8$_n$. *Всякое $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество $\subseteq I$ является проекцией однозначного $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества.*

7.9$_n$. *Принципы отделимости выполняются для класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$.*

7.10$_n$. *Принципы отделимости выполняются для класса $\mathbf{\Pi}^1_n$.*

Наш обзор пп. 3—5 составлен так, чтобы дать решение в классическом смысле каждой из этих проблем при $n = 1, 2$ (кроме проблемы 7.6, решение которой при $n = 1$ автору неизвестно).

***n* = 1.** Предложение 7.10$_n$ ложно, а все остальные (кроме 7.6$_n$?) истинны при $n = 1$, см. пп. 3, 4.

***n* = 2.** Предложения 7.7$_n$, 7.8$_n$ и 7.10$_n$ истинны, а все остальные ложны при $n = 2$, см. пп. 3, 5.

Таким образом, при $n = 1, 2$ предложения 7.1$_n$—7.10$_n$ разрешимы в классическом смысле (возможно, за одним исключением). Ситуация меняется при $n \geqslant 3$. «Исследование проективных множеств более высоких классов связано... с трудностями, по-видимому, не преодолимыми методами теории множеств. Большинство проблем здесь нельзя решить в классическом смысле, т. е. дать положительный или отрицательный ответ на поставленный вопрос. Но тогда можно ставить вопрос о непротиворечивости того или иного утверждения...» (Новиков, Келдыш [1]). В настоящее время известно три основных метода доказательства непротиворечивости утверждений дескриптивной теории множеств: генерические расширения (гл. 4), использование аксиомы конструктивности (гл. 5 или § 2 ниже) и в известной степени использование аксиомы детерминированности AD и аксиомы проективной детерминированности PD (гл. 8).

***n* ⩾ 3 и V = L.** Аксиома конструктивности позволяет решить каждую из проблем 7.1$_n$—7.10$_n$, доказывая тем самым непротиворечивость того или иного ее решения. Мы покажем в § 2, что предложения 7.7$_n$, 7.8$_n$, 7.10$_n$ истинны, а все остальные ложны в предположении V = L, каково бы ни было $n \geqslant 3$, — совершенно аналогично случаю $n = 2$.

***n* ⩾ 3; генерические расширения.** С помощью подходящих генерических расширений можно доказать непротиворечивость отрицания любого из предложений 7.1$_n$—7.10$_n$, причем в некоторых случаях в более сильном виде, чем это достигается в предположении V = L. Например, в хорошо известной генерической модели Леви — Соловея, которую мы рассмотрим в § 4, су-

ществует счетнозначное Π^1_1-множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных проективных множеств (в то время как при $n \geqslant 2$ в предположении $V = L$ каждое счетнозначное Σ^1_n-множество является объединением счетного числа однозначных Δ^1_{n+1} множеств). Автором построены модели, в которых для данного $n \geqslant 3$ ложны предложения 7.7_n, 7.8_n, 7.10_n, Кановей [4].

Если говорить о непротиворечивости, то остается, таким образом, открытый вопрос о непротиворечивости предложений 7.1_n—7.4_n, 7.6_n, 7.9_n. Нет оснований сомневаться, что положительное решение указанных предложений может быть достигнуто в подходящем генерическом расширении, хотя построение таких расширений, вероятно, потребует разработки совершенно новых методов, приводящих к универсумам, устроенным «лучше», чем конструктивный универсум L.

Чрезвычайно интересной выглядит проблема полной классификации доказуемых и недоказуемых связей между предложениями 7.1_n—7.10_n, в том числе и для разных $n \geqslant 3$. Автор доказал следующую теорему:

7.11. Теорема (Кановей [4]). *Если $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ — формулы арифметики первого порядка, то конъюнкция следующих двух предложений не противоречит теории* ZFC:

$$\forall n \geqslant 3\,(\varphi(n) \wedge \psi(n) \leftrightarrow \textit{выполняется } \Sigma^1_n\textit{-редукция}),$$

$$\forall n \geqslant 3\,(\varphi(n) \leftrightarrow \textit{выполняется } \Pi^1_n\textit{-отделимость}).$$

Замечание. Π^1_n-отделимость вытекает из Σ^1_n-редукции.

$n \geqslant 3$; аксиома детерминированности. Известные результаты свидетельствуют, что структурная теория нечетных уровней $n \geqslant 3$ идентична структурной теории первого уровня, а структурная теория четных уровней идентична теории второго уровня.

$n \geqslant 3$ *нечетно.* Из результатов 3.4 и 6.6 гл. 8 следует, что принцип редукции имеет место для класса Π^1_n, но не для Σ^1_n, а принципы отделимости соответственно наоборот — для Σ^1_n, но не для Π^1_n. Таким образом, 7.9_n истинно, а 7.10_n ложно. Московакис [1] показал, что в рассматриваемом случае класс Δ^1_n-множеств $\subseteq I$ совпадает с классом проекций однозначных Π^1_{n-1}-множеств, а также с классом проекций счетнозначных Δ^1_n-множеств. Следовательно, истинны 7.1_n, 7.2_n, 7.7_n. Повторив доказательство 4.5, отсюда имеем истинность 7.3_n. Московакис [1] доказал, что 7.4_n и 7.5_n также истинны. Наконец, из принципа Π^1_n-униформизации (следствие 6.10 гл. 8) вытекает 7.8_n.

$n \geqslant 4$ *четно.* В этом случае принцип редукции справедлив для Σ^1_n, но не для Π^1_n (3.4 и 6.6 гл. 8), т. е. 7.9_n ложно, а 7.10_n истинно. Далее, принцип Π^1_{n-1}-униформизации (6.10 гл. 8) тривиально влечет истинность 7.7_n и 7.8_n и ложность 7.1_n и 7.2_n. Наконец, повторив доказательство 5.3, можно показать ложность 7.3_n и 7.5_n. Утверждения 7.4_n и 7.6_n также ложны.

Вопрос об истинности 7.5_n и 7.6_n для нечетных $n \geqslant 3$ остается, по-видимому, открытым.

§ 2. Приложения конструктивности

Аксиома конструктивности $V = L$ (см. гл. 5), введенная Гёделем для решения вопросов, связанных с континуум-гипотезой и аксиомой выбора, оказалась чрезвычайно плодотворной и в дескриптивной теории множеств. Подробное изучение проективной иерархии в конструктивном универсуме было начато работой Новикова [6], где даны примеры неизмеримого по Лебегу Δ^1_2-множества и несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра. Там же сформулировано утверждение о том, что при $V = L$ принципы отделимости на высших уровнях проективной иерархии, начиная с некоторого, ведут себя так же, как и на втором уровне. Более подробно принципы отделимости, редукции и униформизации исследовал Аддисон [1], [2]. В частности, он показал, что «некоторый» уровень Новикова — это в точности третий.

В шестидесятые годы, с доказательством принципа абсолютности (Шенфилд [1]) и открытием метода вынуждения, Соловей, Любецкий, Менсфилд и др. предприняли исследование тех средств, которые по существу используются для построения контрпримеров Новикова к свойствам регулярности в конструктивном универсуме. Оказалось, что, скажем, несчетное Π^1_1-множество без совершенного ядра можно построить в значительно более слабом, чем $V = L$, предположении

$$\exists \pi \in I\,(\omega_1^{L[\pi]} = \omega_1).$$

8. Иерархия относительной конструктивности. В многих построениях приходится использовать не только наименьший транзитивный класс, содержащий все ординалы и являющийся моделью ZF (т. е. конструктивный универсум L), но также и наименьший транзитивный класс, содержащий все ординалы, являющийся моделью ZF и, кроме того, содержащий данное (возможно, неконструктивное) множество x. Этот класс $L[x]$ всех множеств, *конструктивных относительно* x, дается следующим определением:

8.1. Определение. Для каждого x индукцией по $\mu \in \mathrm{On}$ определим множество $\mathrm{L}_\mu[x]$ следующим образом:

$$\mathrm{L}_0[x] = \mathrm{TC}(x) \cup \{x\},$$

где $\mathrm{TC}(x)$ — *транзитивное замыкание* множества x, т. е. наименьшее транзитивное множество y такое, что $x \subseteq y$;

$$\mathrm{L}_{\mu+1}[x] = \mathrm{Def}(\mathrm{L}_\mu[x]);$$

$\mathrm{L}_\lambda[x] = \bigcup\limits_{\mu<\lambda} \mathrm{L}_\mu[x]$ для предельных ординалов λ. Положим также $\mathrm{L}[x] = \bigcup\limits_{\mu \in \mathrm{On}} \mathrm{L}_\mu[x]$.

Класс $\mathrm{L}[x]$ транзитивен, содержит все ординалы и множество x и образует модель аксиом ZF (не обязательно с аксиомой выбора). Если $x \in I$, то в $\mathrm{L}[x]$ истинны аксиома выбора и обобщенная континуум-гипотеза. Отметим, что $\mathrm{L}[\omega \times \{0\}] = \mathrm{L}[0] = \mathrm{L}$.

Сформулируем несколько утверждений об иерархии относительной конструктивности, аналогичных некоторым результатам §§ 4—7 гл. 5.

8.2. Определение. $\mathrm{HC} = \{x\colon \mathrm{TC}(x)$ *не более чем счетно*$\}$ — совокупность всех *наследственно не более чем счетных* множеств.

8.3. Лемма. $\mathrm{L}[x] \cap \mathrm{HC} = \mathrm{L}_{\omega_1}[x]$ *для любого* $x \in \mathrm{HC}$.

8.4. Лемма. *Множество* $\{\langle x, y\rangle\colon x, y \in \mathrm{HC}$ *и* $x \in \mathrm{L}[y]\}$ *принадлежит классу* Σ^{HC}_1.

(Обозначения для классов определимости см. § 4 гл. 5.)

8.5. Лемма. *Для каждого* $\alpha \in I$ *существует полное упорядочение* $<_\alpha$ *множества* $\mathrm{L}_{\omega_1}[\alpha]$ *по типу* ω_1. *При этом множество*

$$\{\langle x, y, \alpha\rangle\colon x, y \in \mathrm{HC} \wedge \alpha \in I \wedge x <_\alpha y\}$$

принадлежит классу Σ^{HC}_1.

Перед формулировкой следующей леммы введем определение:

$$\mathrm{pr}_\alpha(x) = \{y\colon y <_\alpha x\}.$$

8.6. Лемма. *Множество* $\{\langle \alpha, \mathrm{pr}_\alpha(x)\rangle\colon \alpha \in I$ *и* $x \in \mathrm{HC}\}$ *принадлежит классу* Σ^{HC}_1.

Читатель без труда докажет леммы 8.3—8.6, повторив соответствующие рассуждения гл. 5 с небольшими необходимыми изменениями.

8.7. Теорема об ограниченных кванторах. *Пусть* $n \geqslant 1$, $\pi \in I$ *и* $P(x, y, \alpha, \ldots)$ *есть отношение класса* $\Delta^{\mathrm{HC}}_n(\{\pi\})$.

Тогда отношения

$$Q_1(y, \alpha, \ldots) \leftrightarrow \forall x <_\alpha y P(x, y, \alpha, \ldots),$$
$$Q_2(y, \alpha, \ldots) \leftrightarrow \exists x <_\alpha y P(x, y, \alpha, \ldots)$$

также принадлежат классу $\Delta^{\mathrm{HC}}_n(\{\pi\})$.

Доказательство проведем только для Q_1. Из 8.5, очевидно, $Q_1 \in \Pi^{\mathrm{HC}}_n(\{\pi\})$. С другой стороны, справедлива такая эквивалентность:

$$Q_1(y, \alpha, \ldots) \leftrightarrow \exists S (S = \mathrm{pr}_\alpha(y) \wedge \forall x \in S \neg P(x, y, \alpha, \ldots)),$$

откуда в силу 8.6 следует $Q_1 \in \Sigma^{\mathrm{HC}}_n(\{\pi\})$. (Квантор $\forall x \in S$ ограничен и не влияет на сложность определения.) □

9. Теорема о переводе. Теорема 8.7 лежит в основе большинства дескриптивных приложений конструктивности. Но для получения этих приложений мы должны «перевести» эту теорему вместе с остальными результатами п. 8 в проективную иерархию. В первых работах Новикова [6] и Аддисона [2] в этой области искомый эффект достигался переводом самого определения конструктивности в проективную иерархию, что приводило к довольно громоздким построениям. Мы используем другой метод, основанный на общей *теореме о переводе*, которая часто фигурирует в работах последних лет, хотя ее доказательство, по-видимому, нигде не опубликовано.

9.1. Теорема (Йенсен и Юнсбротен [1] без доказательства). *Пусть* $n \geqslant 1$, $\pi \subseteq I$ *и* $X \subseteq I$. *Тогда* $X \in \Sigma^{1, \pi}_{n+1}$, *если и только если* $X \in \Sigma^{\mathrm{HC}}_n(\{\pi\})$.

Доказательство. Для простоты предположим, что $\pi = \omega \times \{0\}$, т. е. нужно доказать эквивалентность $X \in \Sigma^1_{n+1} \leftrightarrow X \in \Sigma^{\mathrm{HC}}_n$. Общий случай рассматривается аналогично (и сводится к указанному).

Слева направо. Заметим, что множество $\{S \subseteq \mathrm{Seq}$: *отношение* $\prec \restriction S$ *фундировано*$\}$ принадлежит классу Δ^{HC}_1 (Π_1-определение очевидно, а Σ_1-определение выражает существование сохраняющей порядок функции из S в ординалы). Поэтому в силу теоремы 2.18 гл. 8 всякое Π^1_1-множество принадлежит классу Δ^{HC}_1. Теперь индукция по n дает искомый результат.

Справа налево. Смоделируем множества из HC с помощью специальных бинарных отношений на ω. Через C обозначим совокупность всех множеств $\varepsilon \subseteq \omega^2$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

1) Если $m, l \in |\varepsilon| = \mathrm{dom}\,\varepsilon \cup \mathrm{ran}\,\varepsilon$ и $k \varepsilon m \leftrightarrow k \varepsilon l$ для всех $k \in \omega$, то $m = l$ (условие экстенсиональности отношения ε; $k \varepsilon m$ есть сокращение для $\langle k, m\rangle \in \varepsilon$).

2) Если множество $u \subseteq |\varepsilon|$ непусто, то найдется такое $m \in u$, что $\forall k \in u\,(\neg\, k\varepsilon m)$ (условие фундированности).

3) Существует и единственно такое $t \in |\varepsilon|$, что $\forall k\,(\neg\, t\varepsilon k)$. Это t обозначается через t_ε.

Пусть $\varepsilon \in C$. Для каждого $k \in |\varepsilon|$ определим $x_{\varepsilon k} \in \mathrm{HC}$ так, что $x_{\varepsilon k} = \{x_{\varepsilon m}\colon m \varepsilon k\}$ (условие фундированности обеспечивает корректность такого определения). Положим $x_\varepsilon = x_{\varepsilon, t_\varepsilon}$. Тогда $\mathrm{HC} = \{x_\varepsilon\colon \varepsilon \in C\}$. При этом всякому $\alpha \in I$ можно каноническим образом сопоставить $\varepsilon(\alpha) \in C$ так, чтобы $x_{\varepsilon(\alpha)} = \alpha$.

Смоделируем отношения $\in$ и $=$. Пусть ε, $\delta \in C$. Определим:

$$\varepsilon \langle = \rangle \delta \leftrightarrow \exists f\ (f \text{ — биекция } |\varepsilon| \text{ на } |\delta|, \text{ переводящая } \varepsilon \text{ в } \delta);$$

$$\varepsilon \langle \in \rangle \delta \leftrightarrow \exists k\,(k \delta t_\delta \wedge \varepsilon \langle = \rangle \delta \restriction k),$$

где $\delta \restriction k = \{\langle i, j\rangle\colon i\delta j \delta k_1 \delta k_2 \delta \ldots \tau k_l \delta k$ *для некоторого* $l \geqslant 0$ *и некоторых* $k_1, \ldots, k_l\}$.

Нетрудно проверить, что

(а) $\varepsilon \langle = \rangle \delta \leftrightarrow x_\varepsilon = x_\delta$, $\varepsilon \langle \in \rangle \delta \leftrightarrow x_\varepsilon \in x_\delta$,

(б) множества C, $\langle = \rangle$ и $\langle \in \rangle$ принадлежат классу Δ^1_2.

(Мы пишем, к примеру, $C \in \Delta^1_2$, подразумевая при этом, что множество $\{\chi_\varepsilon\colon \varepsilon \in C\}$ принадлежит Δ^1_2, где $\chi_\varepsilon \in I$ — характеристическая функция множества $\{2^i \cdot 3^j\colon i \varepsilon j\}$ для любого $\varepsilon \subseteq \omega^2$.)

Доказательство (б) получается с помощью правила 10.2 (п. 10).

Пусть теперь Σ_n-формула $\varphi(\alpha)$ определяет наше Σ^{HC}_n-множество $X \subseteq I$ в HC. Изменим формулу φ следующим образом:

α заменим на $\varepsilon(\alpha)$;

$\in$ и $=$ заменим на $\langle \in \rangle$ и $\langle = \rangle$ соответственно;

все неограниченные кванторы ограничим множеством C;

$\exists x \in y\,(\ldots x \ldots)$ заменим на $\exists k\,(kyt_y \wedge (\ldots y \restriction k \ldots))$;

$\forall x \in y\,(\ldots x \ldots)$ заменим на $\forall k\,(kyt_y \to (\ldots y \restriction k \ldots))$.

Пусть $\psi(\alpha)$ — полученная формула. Используя (а), нетрудно проверить эквивалентность $\varphi(\alpha) \leftrightarrow \psi(\alpha)$ для всех $\alpha \in I$. Эта эквивалентность объясняется тем, что отображение $\varepsilon \longmapsto x_\varepsilon$ осуществляет изоморфизм систем $\langle C/\langle = \rangle, \langle = \rangle, \langle \in \rangle\rangle$ и $\langle \mathrm{HC}, =, \in\rangle$. А используя (б) и правило 10.2, можно показать, что формула $\psi(\alpha)$ определяет Σ^1_{n+1}-множество. □

9.2. Следствие. *Пусть* $n \geqslant 1$, $\pi \in I$, $X \subseteq \omega^{m_1} \times I^{m_2}$. *Тогда*

$$X \in \Sigma^{1,\pi}_{n+1} \leftrightarrow X \in \Sigma^{\mathrm{HC}}_n(\{\pi\}) \quad (\textit{и то же для } \Pi, \Delta),$$

$$X \in \Sigma^1_{n+1} \leftrightarrow X \in \Sigma_n(\mathrm{HC}) \quad (\textit{и то же для } \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Delta}).$$

Доказанные теорема и следствие дают перевод результатов **п. 8** в проективную иерархию. С этого момента буквы α, β, γ, δ, π условимся употреблять только для обозначения элементов множества I.

9.3. Следствие. *Множество* $\{\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle\colon \beta <_\alpha \gamma\}$ *принадлежит классу* Σ^1_2. *Если* $\alpha \in I$, *то* $<_\alpha$ *вполне упорядочивает множество* $\mathrm{L}[\alpha] \cap I$. *Если* $I \subseteq \mathrm{L}[\alpha]$, *то* $<_\alpha$ *вполне упорядочивает* I.

9.4. Следствие. *Множество* $\{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \beta \in \mathrm{L}[\alpha]\}$ *принадлежит* Σ^1_2.

9.5. Следствие. *Пусть* $n \geqslant 2$, $\pi \in I$ *и* $P(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ *есть* $\Delta^{1,\pi}_n$*-отношение. Тогда следующие отношения также принадлежат* $\Delta^{1,\pi}_n$:

$$Q_1(\alpha, \gamma, \ldots) \leftrightarrow \forall \beta <_\alpha \gamma P(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

$$Q_2(\alpha, \gamma, \ldots) \leftrightarrow \exists \beta <_\alpha \gamma P(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Докажем следующую лемму о порядках $<_\alpha$:

9.6. Лемма. *Если* $\beta <_\alpha \gamma$, *то* $\beta \in \Delta^{1,\alpha,\gamma}_2$.

Доказательство. Напомним, что $(\delta)_m \in I$ определяется условием $(\delta)_m(k) = \delta(2^m(2k+1) - 1)$. Согласно 9.5 множество

$$P = \{\delta\colon \forall \beta' <_\alpha \gamma \exists m\,((\delta)_m = \beta')\}$$

принадлежит классу $\Delta^{1,\alpha,\gamma}_2$ и, очевидно, непусто. Значит, оно содержит элемент $\delta \in P$ класса $\Delta^{1,\alpha,\gamma}_2$ (следствие 4.23 гл. 8). Но, очевидно, $\beta = (\delta)_m$ для некоторого m. □

Изложенных результатов вполне достаточно для получения таких известных следствий аксиомы конструктивности, как существование неизмеримого $\mathbf{\Delta}^1_2$-множества или принцип униформизации для классов $\mathbf{\Delta}^1_n$ и $\mathbf{\Sigma}^1_n$ при $n \geqslant 3$ в конструктивном универсуме. Но некоторые более тонкие свойства проективных множеств, связанные с конструктивностью, требуют применения замечательной теоремы Шенфилда об абсолютности.

10. Принцип абсолютности. В § 1 мы изучали проективные множества в универсуме всех множеств. Однако в дальнейшем нам часто придется рассматривать, скажем, «одно и то же» $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R]$ как в универсуме всех множеств, так и в каком-нибудь классе M. Введем подходящий формализм для таких рассмотрений.

10.1. Определение. Пусть $k \geqslant 1$ нечетно и формула $\varphi(l_1, \ldots, l_p, \beta_1, \ldots, \beta_q)$ имеет свободные переменные $l_1, \ldots, l_p$ (по ω) и $\beta_1, \ldots, \beta_q$ (по I), а также имеет (не указанные явно) параметры — множества любой природы. Формулу φ назовем Σ^1_k*-формулой*, если найдется другая формула $\psi(l_1, \ldots, l_p, \beta_1, \ldots, \beta_q)$ вида

$$\exists \alpha_1 \forall \alpha_2 \ldots \exists \alpha_k \forall m R(\alpha_1 \restriction m, \alpha_2 \restriction m, \ldots, \alpha_k \restriction m, l_1, \ldots, l_p, \beta_1 \restriction m, \ldots, \beta_q \restriction m)$$

такая, что в любом транзитивном классе M, являющемся моделью аксиом ZF и содержащем все параметры φ, содержится и отношение $R \subseteq \mathrm{Seq}^k \times \omega^p \times \mathrm{Seq}^q$ и (в M) истинна эквивалентность

$$\varphi(l_1, \ldots, l_p, \beta_1, \ldots, \beta_q) \leftrightarrow \psi(l_1, \ldots, l_p, \beta_1, \ldots, \beta_q),$$

каковы бы ни были $l_1, \ldots, l_p \in \omega$ и $\beta_1, \ldots, \beta_q \in M \cap I$. Отношение R, фигурирующее в ψ, назовем кодом данной формулы φ (φ может иметь много кодов). Если формулу ψ указанного вида можно подобрать так, чтобы отношение R принадлежало данному классу X, то φ назовем Σ^1_k-формулой *с кодом из* X.

Такое же определение, но с заменой $\exists\alpha_k\forall m$ на $\forall\alpha_k\exists m$, дается для четных k.

Аналогично дается и определение Π^1_k-*формулы* φ (с кодом из X), только кванторная приставка соответствующей формулы ψ должна иметь вид $\forall\alpha_1\exists\alpha_2 \ldots \forall\alpha_k\exists m$ при нечетном k и $\forall\alpha_1\exists\alpha_2 \ldots \exists\alpha_k\forall m$ при четном k.

Определению 10.1 можно придать вполне точный смысл в духе § 7 гл. 1.

Следующее правило дает способы обращения с формулами, введенными определением 10.1.

10.2. Правило. (i) *Формула* $\alpha(m) = l$ (α *есть свободная переменная по* l, *а* m *и* l *— по* ω) *является* Σ^1_0-*формулой с рекурсивным кодом, а также* Π^1_0-*формулой с рекурсивным кодом. То же самое справедливо для всех элементарных формул языка арифметики* (*см. перед определением* 4.13 *гл.* 8).

(ii) *Если* $k \geqslant 1$ *и* $\varphi(m)$ *есть* Σ^1_k-*формула* (*соответственно* Π^1_k-*формула*), *то* $\exists m \in \omega\varphi(m)$ *и* $\forall m \in \omega\varphi(m)$ *являются* Σ^1_k-*формулами* (*соответственно* Π^1_k-*формулами*).

(iii) *Классы* Σ^1_k-*формул и* Π^1_k-*формул замкнуты относительно* $\wedge$, $\vee$. *Отрицание* Σ^1_k-*формулы является* Π^1_k-*формулой, и наоборот.*

(iv) *Любая формула, составленная из формул* (i) *с помощью пропозициональных знаков и кванторов* $\exists(\forall)m \in \omega$, *является как* Σ^1_1-*формулой, так и* Π^1_1-*формулой.*

(v) *Если* $\varphi(\alpha)$ *есть* Σ^1_k-*формула, то* $\exists\alpha \in I\varphi(\alpha)$ *будет* Σ^1_k-*формулой, а* $\forall\alpha \in I\varphi(\alpha)$ *будет* Π^1_{k+1}-*формулой.*

(vi) *Если* $\varphi(\alpha)$ *есть* Σ^1_k-*формула* (α *— свободная переменная*) *и* $\alpha_0 \in I$, *то* $\varphi(\alpha_0)$ *будет* Σ^1_k-*формулой.*

При этом во всех случаях некоторый код полученной формулы строится эффективно (*рекурсивно*) *из кодов данных формул* (*и функции* α_0 *в* (vi)).

Правило (i) доказывается непосредственной проверкой. Для доказательства (iii) и первого утверждения (v) нужно применить свертку кванторов. Доказательство (ii) основано на идее «пронесения» кванторов по ω направо через кванторы по I (см. доказательство первой части теоремы 2.20 гл. 8). Из (i)—(iii) нетрудно получить (iv). Более подробно см. Шенфилд [2], гл. 7. □

Теперь сформулируем и докажем принцип абсолютности Шенфилда.

10.3. Теорема (Шенфилд [1]). *Пусть транзитивный класс* M *содержит все счетные ординалы и является моделью аксиом* ZF. *Тогда всякая* Σ^1_2-*формула* φ *с кодом из* M *абсолютна для* M. *Иными словами,* φ *истинна в универсуме, если и только если* φ *истинна в* M.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую Σ^1_2-*формулу*

$$\varphi \leftrightarrow \exists\beta\forall\gamma\exists m R(\beta \restriction m, \gamma \restriction m)$$

с кодом $R \in M$. Обозначим $\varkappa = \omega_1$. Имеем эквивалентность

$\varphi \leftrightarrow \exists\beta\exists f$: $\mathrm{Seq} \to \varkappa$ (f *сохраняет порядок на множестве*

$X_{\beta R} = \{\gamma \restriction k$: $\forall n \leqslant k \neg R(\beta \restriction n, \gamma \restriction n)\}$,

т. е. $\forall\sigma, \tau \in X_{\beta R}(\sigma < \tau \to f(\sigma) < f(\tau))$).

(См. доказательство теоремы 2.23 гл. 8.)

Зафиксируем биекцию b: ω на Seq, $b \in M$, и положим

$$X^m_{\beta R} = \{b(j) \in X_{\beta R}: j < m \text{ и длина } b(j) \text{ меньше } m\}.$$

Тогда

$$\varphi \leftrightarrow \exists\beta\exists g: \omega \to \varkappa\forall m \text{ (композиция } g \circ b^{-1} \text{ сохраняет порядок на множестве } X^m_{\beta R}).$$

Выражение в скобках зависит лишь от $\beta \restriction m$ и $g \restriction m$. Таким образом, найдено отношение Q такое, что

$$\varphi \leftrightarrow \exists\beta\exists g: \omega \to \varkappa\,\forall m Q(\beta \restriction m, g \restriction m).$$

Тривиальная свертка β и g в одну функцию h: $\omega \to \varkappa$ дает новое отношение P, обеспечивающее следующую эквивалентность:

$$\varphi \leftrightarrow \exists h: \omega \to \varkappa\ \forall m P(h \restriction m).$$

Нетрудно видеть, что построение P абсолютно для M, т. е. $P \in M$, и последняя эквивалентность имеет место и в M. Рассмотрим, наконец, множество

$$Z = \{h \restriction m: m \in \omega \wedge h: \omega \to \varkappa \wedge \forall n \leqslant m \neg P(h \restriction n)\} \in M,$$

упорядоченное отношением $\prec$, аналогичным 2.17 гл. 8. Совершенно аналогично теореме 2.18 гл. 8 наша последняя эквива-

лентность преобразуется (как в универсуме, так и в M) в следующую:

$$\neg\varphi \leftrightarrow \textit{отношение } \prec \restriction Z \textit{ фундировано}.$$

Но правая часть этой эквивалентности абсолютна (лемма 1.6 (iii) гл. 4 дает родственный результат). □

11. Свойства регулярности.

11.1. Теорема (Новиков [6]). *Предположим, что найдется* $\pi \in I$ *такое, что* $I \subseteq \mathrm{L}[\pi]$ (*т. е. все* $\alpha \in I$ *конструктивны относительно* π). *Тогда*:

(а) *Существует неизмеримое* $\mathbf{\Delta}^1_2$*-множество* $\subseteq I$.

(б) *Существует несчетное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $\subseteq I$ *без совершенного ядра.*

(в) *Существует полное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-упорядочение некоторого несчетного* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множества* $\subseteq I$.

(Утверждения (а) и (б) этой теоремы доказаны Новиковым [6] в предположении $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, т. е. $\pi = \omega \times \{0\}$. Доказательство для произвольного π ничем, однако, не отличается от доказательства в указанном частном случае. Добавим, что (в) непосредственно получается из доказательства Новикова с помощью леммы 2.6. Поэтому теорема 11.1 принадлежит Новикову, хотя формально в работе Новикова [6] такой теоремы нет.)

Доказательство. Согласно 9.3 мы имеем полное $\mathbf{\Delta}^1_2$-упорядочение $<_\pi$ пространства I. Значит, (а) следует из 1.4. Для доказательства (б) и (в) мы покажем, что выполняется посылка леммы 2.6. Этого будет достаточно в силу 2.6 и 2.7.

Мы уже видели, что конституанты $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств являются борелевскими множествами. Следующие определения направлены на то, чтобы получить «равномерное по μ» $\mathbf{\Delta}^1_1$-определение конституанты $[R]_\mu$.

Для каждого $w \in I$ положим

$$r_w = \{\langle i, j\rangle\colon\ w(2^i(2j+1)-1) = 1\}\ (\subseteq \omega^2),$$

$$u_w = \operatorname{dom} r_w \cup \operatorname{ran} r_w.$$

Определим

$$\mathrm{Ord} = \{w \in I\colon\ r_w \textit{ есть линейный порядок на } u_w\},$$

$$\mathrm{Word} = \{w \in I\colon\ r_w \textit{ есть полный порядок на } u_w\}.$$

Для каждого $w \in \mathrm{Word}$ через $|w|\ (<\omega_1)$ обозначим длину порядка r_w.

Прервем доказательство 11.1 для доказательства следующей леммы:

11.2. Лемма. *Ко всякому* $R \subseteq \mathrm{Seq}^2$ *можно подобрать* Σ^1_1*- формулу* $\varphi^1_R(-,-)$ *и* Π^1_1*-формулу* $\varphi^2_R(-,-)$ *с кодами, рекурсивными относительно* R, *так, что для всех* $w \in \mathrm{Word}$ *и* $\alpha \in I$ *справедлива эквивалентность*

$$\alpha \in [R]_{|w|} \leftrightarrow \varphi^1_R(w, \alpha) \leftrightarrow \varphi^2_R(w, \alpha).$$

Доказательство леммы. Пусть $X \subseteq \mathrm{Seq}$, $w \in \mathrm{Ord}$, $u \subseteq u_w$. Функцию $f\colon X \to \{0\}$ на u назовем (X, w, u)-функцией, если

$$f(\sigma) = \sup_{\tau < \sigma,\ \tau \in X} f(\tau) \text{ для всех } \sigma \in X - \{0\},$$

где sup берется в смысле порядка r_w.

В качестве φ^1_R и φ^2_R можно взять следующие формулы:

$\varphi^1_R(w, \alpha) \leftrightarrow w \in \mathrm{Ord}$ и существует $(X_{\alpha R}, w, u_w)$-функция;

$\varphi^2_R(w, \alpha) \leftrightarrow w \in \mathrm{Ord} \wedge \forall m \in u_w$ (не существует $(X_{\alpha R}, w, u)$-функций, где $u = \{k \in u_w\colon\ kr_w m\}) \wedge \forall \sigma \in X_{\alpha R}$ (не существует (X, w, u_w)-функций, где $X = \{\tau \in X_{\alpha R}\colon\ \tau < \sigma\}$).

С помощью правила 10.2 нетрудно проверить, что эти формулы — нужных классов, а эффективный характер правила 10.2 влечет рекурсивность относительно R кодов построенных формул. □

Возвращаемся к доказательству теоремы 11.1. Для проверки посылки леммы 2.6 фиксируем неборелевское $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R]$ и построим $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $A \subseteq [R]$, выбирающее ровно по одной точке из каждой непустой конституанты $[R]_\mu$. Этим множеством служит

$$A = \{\beta\colon\ \exists w \in \mathrm{Word}\,(\beta \in [R]_{|w|} \wedge \forall \gamma <_\pi \beta\,(\gamma \notin [R]_{|w|}))\}.$$

Согласно 9.3 A действительно выбирает по одной точке из каждой непустой конституанты $[R]_\mu$. Далее, нетрудно проверить $\mathrm{Word} \in \mathbf{\Pi}^1_1$. Если теперь в определении A заменить $\beta \in [R]_{|w|}$ и $\gamma \notin [R]_{|w|}$ соответственно формулами $\varphi^1_R(w, \beta)$ и $\neg\varphi^1_R(w, \gamma)$, даваемыми леммой 11.2, и воспользоваться 10.2 и 9.5, то получится искомое $A \in \mathbf{\Sigma}^1_2$. □

Следующие теоремы 11.3, 11.5, 11.6 показывают, что контрпримеры к свойствам регулярности можно построить в значительно более слабых предположениях, чем $\exists \pi\,(I \subseteq \mathrm{L}[\pi])$.

11.3. Теорема (Любецкий [1], Соловей [1], Менсфилд [1]). *Если найдется* $\pi \in I$ *такое, что* $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} = \omega_1$, *то существует несчетное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество без совершенного ядра и существует полное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-упорядочение некоторого несчетного* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множества.*

11.4. Определение. Нумерация $\langle \sigma_k\colon k \in \omega\rangle$ множества Seq считается фиксированной. Для каждого $\beta \in I$ положим:

$$Z_\beta = \{\alpha \in I\colon \forall k\,(\beta(k) = 0 \to \sigma_k \not\subseteq \alpha)\},$$

$U_\beta = \bigcup_{l \in \omega} Z_{(\beta)_l}$ (определение $(\beta)_l$ см. в доказательстве леммы 9.6).

($\{Z_\beta\colon \beta \in I\}$ — совокупность всех замкнутых $Z \subseteq I$, а

$\{U_\beta\colon \beta \in I\}$ — совокупность всех $\mathbf{\Sigma}^0_2$-множеств $U \subseteq I$.)

Пусть M — произвольный класс. Точка $\alpha \in I$ называется *случайной над* M (Соловей [2]), если α принадлежит всякому множеству U_β меры 1 (по Лебегу) такому, что $\beta \in M \cap I$. Совокупность всех случайных над M точек $\alpha \in I$ обозначим через $\mathcal{R}_M$.

11.5. Теорема (Любецкий [3]). *Если найдется* $\pi \in I$ *такое, что* $\mathcal{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ *не является множеством меры* 1, *то существует неизмеримое множество* $\subseteq I$ *класса* $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

11.6. Теорема (Любецкий [3]). *Если найдется* $\pi \in I$ *такое, что* $\mathcal{R}_{\mathrm{L}[\pi]} = \varnothing$, *то существует неизмеримое* $\mathbf{\Delta}^1_2$*-множество* $\subseteq I$.

Для доказательства теоремы 11.3 необходимо проверить абсолютность некоторых свойств $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств и их конституант.

11.7. Лемма. *Пусть транзитивный класс* M *содержит все счетные ординалы и является моделью аксиом* ZF. *Пусть также* $\rho\mu \in \omega_1^M$ *и* $R \in M$. *Тогда следующие формулы абсолютны для* M:

(а) $[R]_\mu \neq \varnothing$;

(б) *множество* $[R]$ *содержит совершенное ядро*;

(в) $[R]_\mu \in \mathbf{\Pi}^0_\rho$.

Доказательство. (а) Поскольку $\mu < \omega_1$, то найдется такое $w \in \mathrm{Word} \cap M$, что $\mu = |w|$. С помощью этого w формула (а) может быть записана в следующем виде, эквивалентном (а) как в M, так и в универсуме всех множеств: $\exists \alpha \varphi^1_R(w, \alpha)$. Последняя формула является Σ^1_1-формулой с кодом из M (это нетрудно проверить с помощью правила 10.2 и с учетом выбора формулы φ^1_R). Теперь абсолютность (а) следует из 10.3.

(б) Лемма 4.11 влечет следующую эквивалентность для любого β:

$$Z_\beta \text{ несчетно} \leftrightarrow Z_\beta \not\subseteq \Delta^{1,\beta}_1.$$

Поэтому формула (б) эквивалентна следующей:

$$\exists \beta\,(\forall \alpha\,(\alpha \in Z_\beta \to \alpha \in [R]) \wedge \exists \alpha\,(\alpha \in Z_\beta \wedge \alpha \notin \Delta^{1,\beta}_1)).$$

Записанная формула является Σ^1_2-формулой с кодом из M, что нетрудно проверить с помощью правила 10.2 и следствия 4.10.

(в) Анализируя конструкцию универсального $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-множества (теорема 2.5 гл. 8) и используя метод первой части доказательства теоремы Суслина 2.20 гл. 8, мы можем индукцией по ρ построить для каждого ординала $\rho < \omega_1^M$ такую Σ^1_1-формулу $\psi^1_\rho(\alpha, \beta)$ с кодом из M и такую Π^1_1-формулу $\psi^2_\rho(\alpha, \beta)$, также с кодом из M, что как в универсуме, так и в M будут истинны следующие два предложения:

1) $\forall \alpha \forall \beta\,(\psi^1_\rho(\alpha, \beta) \leftrightarrow \psi^2_\rho(\alpha, \beta))$,

2) множество $\{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \psi^1_\rho(\alpha, \beta)\}$ является универсальным $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-множеством.

Теперь формула (в) получает следующую эквивалентную запись, являющуюся Σ^1_2-формулой с кодом из M:

$$\exists \alpha \forall \beta\,((\varphi^1_R(w, \beta) \to \psi^2_\rho(\alpha, \beta)) \wedge (\psi^1_\rho(\alpha, \beta) \to \varphi^2_R(w, \beta))),$$

где $w \in \mathrm{Word} \cap M$ таково, что $\mu = |w|$. □

Доказательство теоремы 11.3. Согласно 11.1(б) найдется $R \in \mathrm{L}[\pi]$ такое, что в $\mathrm{L}[\pi]$ истинно следующее предложение:

(*) $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $[R]$ *несчетно и не содержит совершенного ядра.*

Докажем, что (*) истинно и в универсуме. В самом деле, в силу 2.3 из истинности (*) в $\mathrm{L}[\pi]$ следует несчетность в $\mathrm{L}[\pi]$ числа всех непустых конституант $[R]_\mu$. Следовательно, согласно 11.7 (а) и равенству $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} = \omega_1$ множество $[R]$ имеет несчетное число непустых конституант и в универсуме. Стало быть, $[R]$ несчетно в универсуме, а отсутствие совершенного ядра у множества $[R]$ в универсуме непосредственно следует из 11.7 (б). Таким образом, построено (в предположении существования такого π, что $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} = \omega_1$) несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R]$, не содержащее совершенного ядра.

Совершенно аналогично, отправляясь от 11.1 (в), можно доказать и вторую часть теоремы 11.3. □

Доказательство теоремы 11.5. Предположим, что каждое $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество измеримо, фиксируем $\pi \in I$ и покажем, что множество $I - \mathcal{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ имеет меру 0. Если $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} < \omega_1$, то $\mathcal{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ является пересечением счетного числа множеств меры 1, и искомое очевидно. Поэтому, не ограничивая общности, предполагаем $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} = \omega_1$. Тогда согласно 8.5, отношение $<_\pi$ вполне упорядочивает множество $\mathrm{I}_{\omega_1}[\pi]$ по типу ω_1. Для каждого $\mu < \omega_1$ через x_μ обозначим μ-й в смысле этого порядка элемент и определим

следующие множества:

$$W_\beta = I - U_\beta \quad \text{(для всех } \beta \in I\text{)};$$
$$S = \{\beta \in I\colon W_\beta \textit{ имеет меру } 0\};$$
$$N = \{\nu < \omega_1\colon x_\nu \in S\};$$
$$C_\nu = W_{x_\nu} - \bigcup_{\mu \in N \cap \nu} W_{x_\mu} \quad \text{(для всех } \nu \in N\text{)}.$$

Далее, для каждого $\nu < \omega_1$ через g_ν обозначим $<_\pi$-наименьшую функцию g: ω на $\nu \cup \{\nu\}$ (такие g имеются, так как $\omega_1^{L[\pi]} = \omega_1$). Для всех $\mu < \omega_1$ и $k \in \omega$ положим

$$T_{\mu k} = \{\nu \in N\colon g_\nu(k) = \mu\}, \quad X_{\mu k} = \bigcup_{\nu \in T_{\mu k}} C_\nu,$$
$$X_\mu = \bigcup_{k \in \omega} X_{\mu k}.$$

Заметим, что последовательность $\langle x_\nu\colon \nu < \omega_1\rangle$ принадлежит $\Delta_1(\mathrm{HC})$. Действительно, справедлива эквивалентность

$$x = x_\nu \leftrightarrow \exists y \exists f\,(y \in \mathrm{L}_{\omega_1}[\pi] \wedge f\colon \nu \cup \{\nu\} \textit{ на } \mathrm{pr}_\pi(y)$$
$$\wedge \forall \mu,\ \lambda < \nu\,(\mu < \lambda \leftrightarrow f(\mu) <_\pi f(\lambda)) \wedge f(\nu) = x))$$
$$\leftrightarrow \forall y \forall f\,(y \in \mathrm{L}_{\omega_1}[\pi] \wedge f\colon \nu \cup \{\nu\} \textit{ на } \mathrm{pr}_\pi(y)$$
$$\wedge \forall \mu,\ \lambda < \nu\,(\mu < \lambda \leftrightarrow f(\mu) <_\pi f(\lambda)) \to f(\nu) = x)),$$

и искомое следует из 8.4, 8.5, 8.6. Далее, последовательность $\langle g_\nu\colon \nu < \omega_1\rangle$ также принадлежит $\Delta_1(\mathrm{HC})$ в силу 8.7. Наконец, множество S принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и тем самым классу $\Delta_1(\mathrm{HC})$ (по 9.2). Используя эти результаты, нетрудно проверить, что множества $X_{\mu k}$ и X_μ принадлежат классу $\Sigma_1(\mathrm{HC})$, т. е. классу $\mathbf{\Sigma}^1_2$ (по 9.2). Значит, эти множества измеримы в соответствии с предположением в начале доказательства.

Далее, поскольку $\{g_\nu(k)\colon k \in \omega\} = \{\mu\colon \mu \leqslant \nu\}$, то выполняется

(1) $$X_\mu = \bigcup \{C_\nu\colon \nu \in N \wedge \exists k\,(g_\nu(k) = \mu)\} = \bigcup_{\nu \in N,\ \nu \geqslant \mu} C_\nu.$$

В частности, множество $X_0 = \bigcup_{\nu < \omega_1} C_\nu = \bigcup_{\beta \in S \cap \mathrm{L}[\pi]} W_\beta$ совпадает с разностью $I - \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$.

Теперь предположим противное: множество $I - \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]} = X$ не является множеством меры 0. Но все X_μ измеримы. Значит X_0 имеет меру > 0. Такую же меру имеет и любое другое X_μ так как из (1) следует $X_\mu \subseteq X$ и $X_0 - X_\mu = \bigcup_{\nu \in N \cap \mu} C_\nu$, а все C_ν (при $\nu \in N$) являются $\mathbf{\Delta}^0_3$-множествами меры 0. Следовательно поскольку все $X_{\mu k}$ также измеримы, то для каждого $\mu < \omega$ найдется $k(\mu)$ такое, что $X_{\mu k(\mu)}$ имеет меру > 0.

Возьмем $k \in \omega$ так, чтобы множество $M_k = \{\mu\colon k(\mu) = k\}$ было несчетным. Получим несчетное семейство $\{X_{\mu k}\colon \mu \in M_k\}$ множеств $X_{\mu k}$ положительной меры. Мы будем иметь искомое противоречие, если покажем, что множества $X_{\mu_1 k}$ и $X_{\mu_2 k}$ не пересекаются при $\mu_1 \neq \mu_2$.

Пусть $\alpha \in X_{\mu_1 k} \cap X_{\mu_2 k}$. Найдутся ординалы $\nu_1, \nu_2 \in N$ такие, что $g_{\nu_i}(k) = \mu_i$ и $\alpha \in C_{\nu_i}$ для $i = 1, 2$. Но множества C_ν при $\nu \in N$ попарно не пересекаются по построению. Значит, $\nu_1 = \nu_2$. Теперь, очевидно, $\mu_1 = \mu_2$, что и требовалось. □

Доказательство теоремы 11.6 (эскиз). Достаточно доказать, что если $\mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]} = \varnothing$, т. е. $I - \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]} = I$, то в обозначениях доказательства 11.5 все множества X_μ и $X_{\mu k}$ принадлежат $\mathbf{\Delta}^1_2$. Каждое X_μ отличается от $X_0 = I - \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]} = I$ на $\mathbf{\Sigma}^0_3$-множество $\bigcup_{\nu \in N \cap \mu} C_\nu$, т. е. является даже борелевским. Поэтому для доказательства $X_{\mu k} \in \mathbf{\Delta}^1_2$ было бы достаточно доказать, что $X_{\mu k_1} \cap X_{\mu k_2} = \varnothing$ при $k_1 \neq k_2$. Чтобы доказать это утверждение, нужно изменить определение g_ν так, чтобы g_ν было *биекцией* ω на $\nu \cup \{\nu\}$ при $\nu \geqslant \omega$. Тогда мы получим $X_{\mu k_1} \cap X_{\mu k_2} = \varnothing$ при $\mu \geqslant \omega$ и $k_1 \neq k_2$, а множества $X_{\mu k}$ с $\mu < \omega$ можно вообще не принимать во внимание. □

12. Теорема униформизации и теоремы о базисе в конструктивном универсуме. Следующая теорема занимает центральное место в структурной теории проективных классов в конструктивном универсуме.

12.1. Теорема униформизации (Аддисон [2] или § 5 гл. 8). *Пусть $n \geqslant 2$ и $\pi \in I$ таково, что $I \subseteq \mathrm{L}[\pi]$. Тогда принцип униформизации справедлив для классов $\Delta^{1,\pi}_n$, $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$, но не для классов $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_n$ и $\mathbf{\Pi}^1_n$.*

Доказательство. Рассмотрим $\Delta^{1,\pi}_n$-множество $P \subseteq I^2$. Множество $Q = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon P(\alpha, \beta) \wedge \forall \gamma <_\pi \beta\, \neg P(\alpha, \gamma)\}$, очевидно, униформизует P и принадлежит классу $\Delta^{1,\pi}_n$ в силу 9.5. Совершенно аналогично проверяется принцип униформизации и для $\mathbf{\Delta}^1_n$. А результаты для $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_n$ и $\mathbf{\Sigma}^1_n$ получаются из уже доказанных подобно выводу 4.22 из 4.20 в гл. 8.

Для доказательства отрицательной части теоремы достаточно заметить, что $\mathbf{\Sigma}^1_n$-униформизация влечет $\mathbf{\Sigma}^1_n$-редукцию (редукция двух $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множеств $A, B \subseteq I$ обеспечивается униформизацией $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множества $(A \times \{\alpha_0\}) \cup (B \times \{\alpha_1\})$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in I$ — фиксированные различные точки I). Аналогично $\mathbf{\Pi}^1_n$-униформи-

зация влечет $\mathbf{\Pi}^1_n$-редукцию. Но принцип редукции не может одновременно выполняться для классов $\mathbf{\Pi}^1_n$ и $\mathbf{\Sigma}^1_n$, см. теорему 3.2 гл. 8. □

12.2. Следствие. *В условиях теоремы каждое непустое $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_n$-множество $\subseteq I$ содержит элемент класса $\Delta^{1,\pi}_n$.*

Используя теорему униформизации Новикова — Кондо — Аддисона (4.20 гл. 8), нетрудно показать, что всякое непустое $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_1$-множество $\subseteq I$ содержит точку α такую, что $\{\alpha\} \in \mathbf{\Pi}^{1,\pi}_1$. Согласно 12.1 упомянутая теорема не обобщается на $n \geqslant 2$ предположении $I \subseteq \mathrm{L}[\pi]$. Однако ее следствие допускает такое обобщение:

12.3. Теорема (Фридман; см. Харрингтон [1]). *В условиях теоремы* 12.1 *каждое непустое $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_n$-множество $P \subseteq I$ содержит точку β такую, что $\{\beta\} \in \mathbf{\Pi}^{1,\pi}_n$.*

Доказательство. Найдется такое $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_{n-1}$-множество $C \subseteq I^2$, что $P = \{\beta\colon \forall\gamma C(\beta, \gamma)\}$. Положим

$$W = \{w\colon \forall\beta <_\pi w \exists\gamma <_\pi w \neg C(\beta, \gamma)\}.$$

(Буква w, как и α, β, γ, δ, используется только для обозначени точек I.) Заметим, что W непусто (содержит $<_\pi$-наименьшу точку I), замкнуто в I в смысле порядка $<_\pi$ и удовлетворяе соотношению $w \leqslant_\pi \beta$ для всех $w \in W$ и $\beta \in P$. Стало быть, су ществует $<_\pi$-наибольший элемент множества W, который м обозначим через w^*. Тогда выполняется

(1) *Если $\beta \in P$, то $w^* \leqslant_\pi \beta$.*

Рассмотрим множество

$$\Phi = \{\langle\beta, w\rangle\colon w \in W \text{ и } \forall w' <_\pi \beta (w <_\pi w' \to w' \notin W)\}.$$

Из (1) и определения w^* следует

(2) *Если $\beta \in P$ и $w \in I$, то $w = w^* \leftrightarrow \Phi(\beta, w)$.*

Следующее утверждение реализует основную идею:

(3) *Найдется такое $\beta \in \Delta^{1,\pi,w^*}$, что $\beta \in P$.*

Доказательство (3). Через δ обозначим $<_\pi$-наимен ший элемент, очевидно, непустой разности $I - \Delta^{1,\pi,w^*}_n$. Из 9. вытекает

(4) *$\gamma <_\pi \delta \leftrightarrow \gamma \in \Delta^{1,\pi,w^*}_n$, каково бы ни было $\gamma \in I$.*

В частности, $w^* <_\pi \delta$, т. е. $\delta \notin W$. Это означает, что сущест вует $\beta <_\pi \delta$, удовлетворяющее следующему условию:

(5) $\forall\gamma <_\pi \delta C(\beta, \gamma)$.

Докажем, что $\beta \in P$. Предположим противное. Тогда $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_{n-1}$ множество $Z = \{\gamma\colon \neg C(\beta, \gamma)\}$ непусто и, следовательно, соде жит, элемент $\gamma \in Z$ класса $\Delta^{1,\pi,\beta}_n$ согласно 12.2. Но $\beta <_\pi \delta$. Зн

чит, в силу (4) мы имеем $\beta \in \Delta^{1,\pi,w^*}_n$ и $\gamma \in \Delta^{1,\pi,w^*}_n$, что проти воречит (4), (5) и выбору γ. Итак, $\beta \in P$. (3) доказано.

Согласно (3) найдется $\Delta^{1,\pi}_n$-множество $Y \subseteq I^2$ такое, что $\exists!\beta Y(w^*, \beta)$, и единственное β, удовлетворяющее условию $Y(w^*, \beta)$, принадлежит множеству P. Покажем, что $\{\beta\} \in \mathbf{\Pi}^{1,\pi}_n$, т. е. найденное β искомое. Из (2) следует равенство

$$\{\beta\} = \{\beta' \in P\colon \forall w (\Phi(\beta', w) \to Y(w, \beta'))\}.$$

Но используя 9.5 и выбор C, нетрудно проверить, что $W \in \Delta^{1,\pi}_n$ и $\Phi \in \Delta^{1,\pi}_n$. Отсюда следует $\{\beta\} \in \mathbf{\Pi}^{1,\pi}_n$. □

Выбор множества Y в этом доказательстве нарушает «однородность доказательства относительно кода P» и не дает преобразовать доказательство 12.3 в доказательство $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_n$-униформизации.

13. Структурная теория в конструктивном универсуме.

13.1. Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и выполняется $\mathrm{V} = \mathrm{L}$. Тогда предложения 7.7_n, 7.8_n и 7.10_n истинны, а 7.1_n—7.6_n и 7.9_n ложны. Точнее*:

(а) *Принципы отделимости выполняются для класса $\mathbf{\Pi}^1_n$ и не выполняются для класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$.*

(б) *Существует однозначное $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество, не содержащееся ни в каком счетнозначном $\mathbf{\Pi}^1_n$-множестве.*

(в) *Каждое $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество $\subseteq I$ является проекцией однозначного $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-множества* (несмотря на отсутствие $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-униформизации!).

(г) *Найдется счетнозначное $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множеств.*

Утверждение (а), объявленное Новиковым [6] «для всех n, начиная с некоторого», доказано Аддисоном [1]. Оно получается из теоремы 12.1, так как $\mathbf{\Sigma}^1_n$-униформизация влечет $\mathbf{\Sigma}^1_n$-редукцию, а последняя влечет $\mathbf{\Pi}^1_n$-отделимость, см. доказательство 12.1 и рассуждения п. 3. Утверждение (б) доказывается с помощью 12.1 совершенно аналогично доказательству теоремы 5.3.

Доказательство утверждения (в). Через Γ_n обозначим замыкание класса $\mathbf{\Sigma}^1_{n-1} \cup \mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ относительно счетных объединений попарно непересекающихся множеств и счетных пересечений. Используя 12.1 и метод доказательства теоремы 4.3. нетрудно проверить, что каждое Γ_n-множество $\subseteq I$ есть проекция однозначного $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$-множества. Поэтому (в) следует из такой леммы:

13.2. Лемма. *В условиях теоремы* 13.1 *каждое* Σ^1_n*-множество* $X \subseteq I$ *является проекцией однозначного* Γ_n*-множества.*

Доказательство леммы. Для простоты пусть $X \in \Sigma^1_n$. Тогда

$$X = \operatorname{пр} P = \{\alpha\colon \exists\beta P(\alpha, \beta)\}, \quad P = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \forall\gamma C(\alpha, \beta, \gamma)\},$$

где $P \in \Pi^1_{n-1}$, а $C \in \Sigma^1_{n-2}$. Положим

$$W = \{\langle\alpha, w\rangle\colon \forall\beta <_0 w \exists\gamma <_0 w \neg C(\alpha, \beta, \gamma)\},$$

$$\Phi = \{\langle\alpha, \beta, w\rangle\colon W(\alpha, w) \wedge \forall w' <_0 \beta\,(w <_0 w' \to \neg W(\alpha, w'))\}.$$

(Через $<_0$ обозначено отношение $<_{\omega\times\{0\}}$, вполне упорядочивающее I, так как $I \subseteq \mathrm{L}$.) Аналогично доказательству 12.3 каждое «сечение» $W_\alpha = \{w\colon W(\alpha, w)\}$ содержит $<_0$-наибольший элемент $w(\alpha)$, который к тому же удовлетворяет следующим соотношениям:

(1) *Если* $P(\alpha, \beta)$, *то* $w(\alpha) \leqslant_0 \beta$.

(2) *Если* $P(\alpha, \beta)$ *и* $w \in I$, *то* $w = w(\alpha) \leftrightarrow \Phi(\alpha, \beta, w)$.

Кроме того, имеют место:

(3) *Если* $\alpha \in X$, *то найдется* $\beta \in \Delta^{1,\,\alpha,\,w(\alpha)}_{n-1}$ *такое, что* $P(\alpha, \beta)$.

(4) $\Phi \in \Delta^1_{n-1}$.

Не ограничивая общности, предположим $P \subseteq I \times {}^\omega 2$. Зафиксируем Σ^1_{n-1}-множество $D \subseteq I^2 \times \omega^2$, универсальное в смысле следующего утверждения:

(5) *Если* α, $w \in I$ *и* $u \subseteq \omega$, $u \in \Sigma^{1,\,\alpha,\,w}_{n-1}$, *то найдется* k *такое, что* $u = D_{\alpha w k} = \{l\colon D(\alpha, w, k, l)\}$.

Множество $Q = \{\langle\alpha, \delta\rangle\colon \alpha \in X = \operatorname{пр} P,\ \delta \in {}^\omega 2$ и $\forall k,\ l((\delta)_k(l) = 1 \leftrightarrow D_{\alpha w(\alpha) k}(l))\}$, очевидно, однозначно и удовлетворяет в силу (3), (5) и предположения $P \subseteq I \times {}^\omega 2$ равенству $\operatorname{пр} Q = X$. Осталось доказать $Q \in \Gamma_n$. Используя (2), нетрудно проверить следующее равенство:

$$Q = \{\langle\alpha, \delta\rangle\colon \delta \in {}^\omega 2 \ \text{ и } \ \exists m\,(P(\alpha, (\delta)_m) \wedge \forall k,\ l([\exists w(\Phi(\alpha, (\delta)_m, w) \wedge D_{\alpha w k}(l))] \to (\delta)_k(l) = 1) \wedge \forall k,\ l((\delta)_k(l) = 1 \to [\exists w(\Phi(\alpha, (\delta)_m, w) \wedge D_{\alpha w k}(l))])\}.$$

(Формула в квадратных скобках эквивалентна $D_{\alpha w(\alpha) k}(l)$ при условии $P(\alpha, (\delta)_m)$.) Таким образом, в силу (4) и выбора D множество Q имеет вид $Q = \bigcup\limits_{m\in\omega}(S_m \cap T_m)$, где $S_m \in \Sigma^1_{n-1}$, а $T_m \in \Pi^1_{n-1}$. Теперь искомое соотношение $Q \in \Gamma_n$ вытекает из такого равенства:

$$Q = \bigcup_{m\in\omega}\Big(S_m \cap T_m \cap \Big(\bigcup_{i<m}(\overline{S}_i \cup (S_i \cap \overline{T}_i))\Big)\Big). \quad \square$$

Доказательство утверждения (г). Совершенно аналогично 5.5 множество

$$U^{(n)} = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \beta \text{ } \textit{есть характеристическая функция некоторого } \Sigma^{1,\,\alpha}_n\textit{-множества } u \subseteq \omega\}$$

не является объединением счетного числа однозначных Σ^1_n-множеств. Поэтому достаточно проверить, что $U^{(n)} \in \Sigma^1_n$ в условиях теоремы 13.1, и воспользоваться уже доказанным утверждением (в) так, как в доказательстве теоремы 5.4 использовано 5.2. Следующая лемма дает искомый результат и доказывает также теорему 5.6.

13.3. Лемма. *Пусть* $n \geqslant 2$, *причем либо* $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, *либо* $n = 2$. *Тогда множество* $U^{(n)}$ *принадлежит классу* Σ^1_n.

Доказательство леммы. Фиксируем Σ^1_n-формулу $\theta(k, \alpha, l)$, универсальную в смысле следующего утверждения:

Ко всякой Σ^1_n-формуле $\varphi(\alpha, l)$ можно подобрать такое $k \in \omega$, что для всех α и l справедливо $\varphi(\alpha, l) \leftrightarrow \theta(k, \alpha, l)$.

Через $f_{nk\alpha}\,(\in {}^\omega 2)$ обозначим характеристическую функцию (х. ф.) множества $\{l\colon \theta(k, \alpha, l)\}$, а через $f^\gamma_{nk\alpha}$ — х. ф. множества $\{l\colon \theta^{\alpha\gamma}(k, \alpha, l)\}$. (Через $\theta^{\alpha\gamma}$ обозначается результат замены всех кванторов $\exists\delta$, $\forall\delta$ по I в формуле θ на $\exists\delta <_\alpha \gamma$, $\forall\delta <_\alpha \gamma$. То же относится и к $\psi^{\alpha\gamma}$ в определении множества E_α ниже.) Будучи Σ^1_n-формулой, θ имеет вид $\exists\beta\psi(\beta, k, \alpha, l)$, где ψ есть Π^1_{n-1}-формула. Положим

$$E_\alpha = \{\gamma \in \mathrm{L}[\alpha]\colon \forall k,\ l\forall\beta <_\alpha \gamma\,(\psi^{\alpha\gamma}(\beta, k, \alpha, l) \leftrightarrow \psi(\beta, k, \alpha, l))\}.$$

Справедливы следующие два утверждения:

(1) *Если* $\alpha \in I$, $\gamma \in E_\alpha$, *и множество* $D_{n\alpha} = I \cap \Delta^{1,\,\alpha}_n$ *включено в* $\mathrm{pr}_\alpha(\gamma)$, *то для всех* $k \in \omega$ *выполняется* $f_{nk\alpha} = f^\gamma_{nk\alpha}$.

(2) *Если* $U^{(n)}(\alpha, f)$, *то* $f \in \mathrm{L}[\alpha]$ *и найдется такое* $\gamma \in E_\alpha$, *что* $\{f\} \cup D_{n\alpha} \subseteq \mathrm{pr}_\alpha(\gamma)$.

Для доказательства (1) нужно воспользоваться 12.2 в случае $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ и релятивизованным вариантом следствия 4.23 гл. 8: если $\pi \in I$, то каждое непустое $\Sigma^{1,\,\pi}_2$-множество $\subseteq I$ содержит точку класса $\Delta^{1,\,\pi}_2$ — в случае $n = 2$. Доказательство утверждения (2) в случае $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ достигается с помощью принципа отражения (Йех [1], теорема 16): множество $\{f\} \cup D_{n\alpha} \subseteq I$ счетно, и поэтому можно подобрать $\gamma \in I$ так, чтобы $\{f\} \cup D_{n\alpha} \subseteq \mathrm{pr}_\alpha(\gamma)$ и множество $\mathrm{pr}_\alpha(\gamma)$ было элементарно эквивалентным всему I. В случае же $n = 2$ нужно воспользоваться следствием 14.1 (см. ниже) из принципа абсолютности, которое гарантирует возможность, не ограничивая общности, предполагать $\mathrm{V} = \mathrm{L}[\alpha]$ (при $n = 2$) в доказательстве утверждения (2).

Решающим моментом является следующая эквивалентность:

(3) $U^{(n)}(\alpha, f) \leftrightarrow \exists k \exists \gamma \left(\gamma \in E_\alpha \wedge f <_\alpha \gamma \wedge f = f^\gamma_{nk\alpha}\right)$

для всех α, $f \in I$. Доказательство импликации слева направо тривиально: если $U^{(n)}(\alpha, f)$, то $f = f_{nk\alpha}$ для некоторого k; используя (1) и (2), находим такое $\gamma \in E_\alpha$, что $f = f^\gamma_{nk\alpha} <_\alpha \gamma$.

Докажем обратную импликацию. Пусть $\gamma \in E_\alpha$ и $f = f^\gamma_{nk\alpha} <_\alpha \gamma$. Если $D_{n\alpha} \subseteq \mathrm{pr}_\alpha(\gamma)$, то из (1) следует $f = f_{nk\alpha}$, т. е. $U^{(n)}(\alpha, f)$. Если же $D_{n\alpha} \not\subseteq \mathrm{pr}_\alpha(\gamma)$, то возьмем $\beta \in D_{n\alpha}$ так, что $\neg \beta <_\alpha \gamma$. Заметим, что $\gamma \in \mathrm{L}[\alpha]$, так как $\gamma \in E_\alpha$. Кроме того, $\beta \in \mathrm{L}[\alpha]$ (в случае $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ это очевидно, а в случае $n = 2$ следует из 14.1). Значит, $\gamma \leqslant_\alpha \beta$, откуда $f <_\alpha \beta$, и $f \in \Delta^{1, \alpha, \beta}_2$ по 9.6. Но $\beta \in \Delta^{1, \alpha}_n$. Поэтому $f \in \Delta^{1, \alpha}_n$ и, наконец, $U^{(n)}(\alpha, f)$.

Эквивалентность (3) доказана. Используя 9.3—9.5, легко проверить, что правая часть (3) выражает Σ^1_n-отношение. □

Доказательство теоремы 13.1 закончено. В заключение нашего обзора структурной теории конструктивного универсум несколько упражнений.

13.4. Упражнение. *Если $n \geqslant 2$ и выполняется $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, то каждое одноэлементное Π^1_n-множество $X \subseteq I$ можно вложить в счетное Σ^1_n-множество.*

Указание. Пусть $X = \{\alpha\colon \forall \beta \varphi(\beta, \alpha)\}$, где φ есть Σ^1_{n-1}-формула. Положим

$$E = \{\gamma\colon \forall \beta,\ \alpha <_0 \gamma\, (\varphi^\gamma(\beta, \alpha) \leftrightarrow \varphi(\beta, \alpha))\},$$

где $<_0$ есть $<_{\omega \times \{0\}}$, а φ^γ получается из φ заменой всех кванторов $\forall \delta$, $\exists \delta$ на $\forall \delta <_0 \gamma$, $\exists \delta <_0 \gamma$. Множество

$$\{\alpha\colon \exists \gamma\ (\alpha \textit{ есть единственная точка } I, \textit{ удовлетворяющая условия } \alpha <_0 \gamma \textit{ и } \exists \beta <_0 \gamma \varphi(\beta, \alpha))$$

искомое. □

13.5. Упражнение (следствие из 13.4 и 12.3). *Если $n \geqslant$ и выполняется $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, то не существует максимальных счетных Σ^1_2-множеств $\subseteq I$.*

(Можно доказать, что неравенство $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} < \omega_1$ является необходимым и достаточным условием существования максимального счетного $\Sigma^{1, \pi}_2$-множества $\subseteq I$, которым служит множество $I \cap \mathrm{L}[\pi]$.)

13.6. Упражнение («теорема счетноформизации»). *Если $n \geqslant 2$ и выполняется $\mathrm{V} = \mathrm{L}$, то каждое Π^1_n-множество $P \subseteq I$ содержит счетнозначное подмножество $Q \subseteq P$ класса Γ_{n+1} такое, что $\mathrm{пр}\, Q = \mathrm{пр}\, P$.*

Указание. Используйте метод доказательства леммы 13.2.

Мы видим, таким образом, что аксиома конструктивности «решает» все основные структурные принципы на любом уровне проективной иерархии, причем решения, даваемые этой аксиомой для уровней $n \geqslant 3$, совпадают с решениями, имеющими место в классическом смысле для уровня $n = 2$. Представляют интерес следующий «философско-математический» вопрос: существует ли «нормальное» утверждение о проективных множествах, которое неразрешимо в теории $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$?

14. О связи конструктивности и определимости. Из теоремы 10.3 немедленно вытекает

14.1. Следствие. *Если $u \in \Sigma^{1, \alpha}_2$, $u \subseteq \omega$, то $u \in \mathrm{L}[\alpha]$, и в $\mathrm{L}[\alpha]$ истинно $u \in \Sigma^{1, \alpha}_2$.*

В частности, каждое множество $u \subseteq \omega$ класса Σ^1_2 или Π^1_2 конструктивно. Этот результат максимален, так как предложение о существовании неконструктивного Δ^1_3-множества $u \subseteq \omega$ не противоречит теории ZFC (Йенсен, Соловей [1], Йенсен [1], см. п. 29 нашего обзора). Получено следующее обобщение:

14.2. Теорема (Кановей [2]). *Если $n \geqslant 2$, то предложение о существовании неконструктивного Δ^1_{n+1}-множества $u \subseteq \omega$ не противоречит теории $\mathrm{ZFC} + \forall a, b \subseteq \omega\, (a$ конструктивно $\wedge$ $\wedge\, b \in \Sigma^{1, a}_n \to b$ конструктивно$)$.*

14.3. Вопрос (Йенсен, Соловей [1]). Можно ли доказать непротиворечивость предложения $\forall \alpha, \beta \in I\ (\alpha \in \mathrm{L}[\beta] \to \alpha \in \Delta^{1, \beta}_3)$, используя непротиворечивость гипотезы существования недостижимого кардинала?

(Предложение, о котором идет речь, следует из гипотезы существования *измеримого* кардинала, Соловей [3].)

Множество $d_n = I \cap \Delta^1_n$ счетно. Используя подходящее универсальное множество, нетрудно проверить, что $d_n \in \Delta^1_{n+1}$ для всех n. Однако $d_1 \in \Pi^1_1 - \Sigma^1_1$ (следует из 4.10). Из леммы 13.3 следует $d_2 \in \Sigma^1_2$, но $d_2 \notin \Pi^1_2$ в силу следствия 4.23 гл. 8. Таким образом, $d_2 \in \Sigma^1_2 - \Pi^1_2$. Совершенно аналогично $d_n \in \Sigma^1_n - \Pi^1_n$ для любого $n \geqslant 3$ в предположении $\mathrm{V} = \mathrm{L}$. Можно указать ряд интересных вопросов, относящихся к положению множеств d_n и $d_\infty = \bigcup\limits_{n \in \omega} d_n$ в эффективной иерархии. Ограничимся следующими двумя.

14.4. Вопрос (Матиас [1]). Пусть $n \geqslant 3$. Непротиворечиво ли предложение $d_n = I \cap \mathrm{L}$?

14.5. Вопрос. Будет ли непротиворечивым предложение $\forall n \geqslant 3\,(d_n \in \Delta^1_n)$?

Кановей [3] доказал, что предложение $d_\omega = I \cap L$ непротиворечиво (относительно теории ZFC).

§ 3. Неразрешимые свойства регулярности множеств первого и второго уровней проективной иерархии

Проблема совершенного ядра и мощности $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств уже в 20-е годы рассматривалась как одна из центральных проблем дескриптивной теории множеств. Исследуя эту проблему, Лузин получил эквивалентность следующих двух предложений (см. теорему 2.3):

(1) Всякое несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество содержит совершенное ядро.

(2) Всякое несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество имеет несчетную конституанту.

Но истинны или ложны эти предложения? Лузин [3] еще в 1925 г. предсказал невозможность решения этого вопроса в классическом смысле, и это подтвердилось дальнейшим развитием дескриптивной теории. Новиков [6] доказал непротиворечивость отрицаний (1) и (2) (теорема 11.1). Непротиворечивость же самих предложений установлена Соловеем [1]. Предложения (1) и (2) оказались эквивалентными предложению

(3) $\forall \pi \in I\,(\omega_1^{L[\pi]} < \omega_1)$.

Мы покажем, что многие другие предложения, выражающие т или иные свойства регулярности, также эквивалентны предл жению (3), играющему роль своего рода эталона, имеющег значительно более прозрачный теоретико-множественный смысл чем, скажем, (1) и (2). Мы докажем также, что достаточны условия измеримости множеств классов $\mathbf{\Sigma}^1_2$ и $\mathbf{\Delta}^1_2$, даваемые тео ремами 11.5 и 11.6, в то же время и необходимы.

В работах последних лет выделена еще одна группа инт ресных попарно эквивалентных предложений, содержащая качестве эталона предложение о том, что каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств является детерминированным. В частности, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-детерминир ванность эквивалентна тому, что любые два неборелевски $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества борелевски изоморфны. Более подробно с Харрингтон [3].

15. Неразрешимые предложения. Мы рассмотрим следу щие предложения, выражающие различные свойства регулярн сти множеств классов $\mathbf{\Pi}^1_1$, Δ^1_2, $\mathbf{\Sigma}^1_2$:

15.1. *Всякое несчетное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество содержит совершенное ядро.*

15.2. *Каков бы ни был ординал* $\rho < \omega_1$, *каждое* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество имеет не более чем счетное число непустых конституант* (*или их номеров — все равно ввиду попарно дизъюнктности конституант*), *принадлежащих классу* $\mathbf{\Pi}^0_\rho$.

15.3. *Всякое полное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-упорядочение* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множества имеет счетную длину.* (*Иными словами, каждое* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество, которое можно вполне упорядочить некоторым* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-отношением, счетно.*)

15.4. *Для каждого* $\pi \in I$ *справедливо неравенство* $\omega_1^{L[\pi]} < \omega_1$.

15.5. *Всякое* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-множество* $\subseteq I$ *измеримо по Лебегу.*

15.6. *Совокупность* $\mathcal{R}_{L[\pi]}$ *всех случайных над* $L[\pi]$ *точек имеет меру* 1, *каково бы ни было* $\pi \in I$.

15.7. *Всякое* Δ^1_2*-множество* $\subseteq I$ *измеримо.*

15.8. *Совокупность* $\mathcal{R}_{L[\pi]}$ *непуста, каково бы ни было* $\pi \in I$.

15.9. *Не существует полных* $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-упорядочений множества* I.

15.10. *Нет таких* $\pi \in I$, *что* $I \subseteq L[\pi]$.

Содержанием этого параграфа является доказательство следующей теоремы, классифицирующей рассматриваемые предложения:

15.11. Теорема.

$$\begin{array}{l} 15.1 \leftrightarrow 15.2 \leftrightarrow 15.3 \leftrightarrow 15.4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15.5 \leftrightarrow 15.6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15.7 \leftrightarrow 15.8 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15.9 \leftrightarrow 15.10 \end{array}$$

Некоторые утверждения этой теоремы очевидны: $15.4 \to 15.6 \to 15.8 \to 15.10$. Другие уже доказаны выше: $15.2 \to 15.4$ и $15.3 \to 15.4$ (теорема 11.3), $15.5 \to 15.6$ (теорема 11.5), $15.7 \to 15.8$ (теорема 11.6), а также $15.9 \to 15.10$ (следствие 9.3). Таким образом, остается проверить следующие импликации:

$15.4 \to 15.2$ (мы это делаем в п. 16),

$15.4 \to 15.3$ и $15.10 \to 15.9$ (п. 17),

и, наконец,

$15.6 \to 15.5$ и $15.8 \to 15.7$ (п. 18).

Несколько замечаний. В работе Леви [1] доказана непротиворечивость предложения 15.4. (Точнее, если предложение IC о существовании сильно недостижимого кардинала не противоречит теории ZFC, то 15.4 также не противоречит ZFC. Верно и обратное: из непротиворечивости 15.4 следует непроти-

воречивость IC, так как в предположении 15.4 «настоящий» кардинал ω_1 сильно недостижим в конструктивном универсуме, см., например, Леви [1].) С другой стороны, отрицание предложения 15.10 также непротиворечиво: оно вытекает из аксиомы конструктивности. Поэтому теорема 15.11 влечет неразрешимость средствами аксиом ZFC каждого из предложений 15.1—15.10.

Укажем еще несколько предложений, эквивалентных 15.1—15.4. Как уже было отмечено, предложение 15.1 эквивалентно следующему:

15.2(а). *Каждое несчетное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество имеет несчетную конституанту.*

Новиков [5] установил, что предложение 15.2(а) в свою очередь эквивалентно такому предложению:

15.2(б). *Каждое несчетное* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество имеет конституанту, содержащую по крайней мере две разные точки.*

Таким образом, теорема 15.11 дает эквивалентность предложений 15.2(а), (б) предложениям 15.1—15.4 и их неразрешимость. Прямое доказательство эквивалентности 15.1 и 15.4 (не через посредство 15.2) содержится в работах Любецкого [1], Соловея [1], Менсфилда [1].

Некоторые интересные предложения, лежащие «между» 15.2(а) и 15.2, также, естественно, эквивалентны 15.1—15.4 и неразрешимы. Среди них предложение о том, что каждое несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество не может иметь несчетное число счетных конституант, а также следующее замечательное предложение, проблема установления истинности или ложности которого поставлена Лузиным [1], [6], [9], [10], [11]:

15.2(в). *Каково бы ни было* $\rho < \omega_1$, *каждое неборелевское* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество имеет конституанту, не принадлежащую классу* $\mathbf{\Pi}^0_\rho$.

Предложения группы 15.2 говорят, что $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества не могут иметь слишком много «маленьких» (в смысле мощности или борелевской сложности) конституант. Все эти предложения эквивалентны предложению 15.4 и неразрешимы, но становятся разрешимыми после введения требования непустоты конституант, см. п. 19.

Необходимо отметить, что инициатором исследования борелевской структуры конституант был Лузин. В указанных выше его работах выделен важный класс $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств, сложность конституант которых монотонно стремится к ω_1. Под сложностью борелевского множества X понимается наименьший ординал ρ такой, что $X \in \mathbf{\Pi}^0_\rho$. Автору известен пример $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества, сложность конституант которого стремится к ω_1, но не монотонно, с какого бы номера мы ни начинали.

Некоторые предложения, связанные с отделимостью конституант, также эквивалентны предложениям 15.1—15.4, см. 16.9 ниже.

Вот еще несколько предложений иного рода, эквивалентных 15.1—15.4 и неразрешимых:

Для каждого $\pi \in I$ *нет максимальных счетных* $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_2$*-множеств* (упражнение 16.8 ниже).

Каждое полное $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-упорядочение имеет счетную длину* (п. 17).

Каждое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_2$*-множество содержит совершенное ядро* (эквивалентно 15.1 в силу 2.7).

Харрингтон [1] доказал, что предложение 15.10 эквивалентно тому, что для каждого $\pi \in I$ найдется непустое $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_2$-множество $\subseteq I$, не содержащее одноэлементных подмножеств класса $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_2$. В одну сторону этот результат составляет содержание теоремы 12.3.

В заключение отметим, что ни одна из импликаций $15.4 \to 15.6 \to 15.8 \to 15.10$ не является обратимой в ZFC. Модель N, в которой истинно 15.6, но ложно 15.4, получается из исходной модели M, в которой истинна аксиома конструктивности, так, как указано в § 6 гл. 4. В этой модели N истинна аксиома Мартина, но ложна континуум-гипотеза. Следовательно, в силу теоремы 15 гл. 6 в N истинно 15.5. С другой стороны, N сохраняет кардиналы, ввиду чего в N истинно $\omega^L_1 = \omega_1$, т. е. ложно 15.4.

Другая конструкция модели для $15.6 + \neg 15.4$, а также конструкция модели для $15.8 + \neg 15.6$ даны в работе Любецкого [3].

Наконец, модель для $15.10 + \neg 15.8$ получается генерическим расширением M с помощью ω_1^M-коэновского ЧУ множества.

Изучение этих интересных моделей выходит за рамки нашего обзора.

16. О положении конституант в борелевской иерархии.

16.1. Теорема. $15.4 \to 15.2$.

Доказательство этой теоремы основано на идее заметки Штерна [2]. Зафиксируем $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R] \subseteq I$ и ординал $\rho < \omega_1$ и покажем в предположении 15.4, что наше множество $[R]$ имеет не более чем счетное число непустых конституант из класса $\mathbf{\Pi}^0_\rho$.

Для уменьшения громоздкости будем, не ограничивая общности, предполагать, что $R \in \mathrm{L}$ и $\rho < \omega^L_1$. (Если это не так, то

вместо L, ω_λ^L и т. п. ниже нужно рассматривать $L[\pi]$, $\omega_\lambda^{L[\pi]}$ и т. п., где $\pi \in I$ таково, что $R \in L[\pi]$ и $\rho < \omega_1^{L[\pi]}$.) Введем несколько определений.

Для каждого ординала γ через Seq_γ обозначим совокупность всех конечных последовательностей ординалов $< \gamma$, включая и последовательность 0 длины 0. Таким образом, Seq_ω есть множество Seq из § 2 гл. 8. Множество $T \subseteq \mathrm{Seq}_\gamma$ назовем *фундированным деревом*, если выполняются следующие условия:

1) $\sigma \in T \wedge \tau \in \mathrm{Seq}_\gamma \wedge \tau \subseteq \sigma \to \tau \in T$;

2) $T \neq \varnothing$ (откуда и из (1) следует $0 \in T$);

3) нет бесконечных путей $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \ldots$, где каждое σ_k принадлежит T.

Пусть $T \subseteq \mathrm{Seq}_\gamma$ — фундированное дерево. Аналогично 2.19 гл. 8 каждому $\sigma \in T$ сопоставляется ординал $|\sigma|_T$ так, чтобы

$$|\sigma|_T = \sup_{\tau \in T,\ \sigma \in \tau} (|\tau|_T + 1).$$

Ясно, что $|\sigma|_T = 0 \leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Max}(T)$, где

$$\mathrm{Max}(T) = \{\sigma \in T\colon \forall \tau \in T\ (\sigma \not\subset \tau)\}$$

— совокупность всех $\subset$-максимальных в T элементов. Наконец положим $|T| = |0|_T$.

Используем фундированные деревья для кодирования борелевских множеств. Изложенный ниже способ кодировки близок к способу, указанному в заметке Шгерна [2]. *Борелевским кодом* назовем всякую пару $\langle T, d\rangle$ такую, что $T \subseteq \mathrm{Seq}_\gamma$ для некоторого $\gamma < \omega_1$ — фундированное дерево, а $d \subseteq \mathrm{Max}(T) \times \mathrm{Seq}$. Если при этом $\sigma \in T$, то определим множество $[T, d, \sigma] \subseteq I$ индукцией по $|\sigma|_T$ следующим образом:

$$|\sigma|_T = 0 \to [T, d, \sigma] = I - \bigcup_{\langle \sigma, \tau\rangle \in d} I_\tau, \text{ где } I_\tau = \{\alpha \in I\colon \tau \subset \alpha\};$$

$$|\sigma|_T \geqslant 1 \to [T, d, \sigma] = I - \bigcup_{\sigma^\frown\mu \in T} [T, d, \sigma^\frown\mu].$$

Положим $[T, d] = [T, d, 0]$. Множества $[T, d, \sigma]$ борелевские точнее, $[T, d, \sigma] \in \mathbf{\Pi}^0_{1+|\sigma|_T}$. Поэтому $[T, d] \in \mathbf{\Pi}^0_{1+|T|}$.

Анализируя доказательство теоремы об универсальном множестве (теорема 2.5 гл. 8), каждому ординалу $\rho < \omega_1^L$ (в частности, фиксированному выше ρ) можно сопоставить фундированное дерево $T_\rho \subseteq \mathrm{Seq}$, удовлетворяющее такому требованию:

16.2. *Если класс M транзитивен и является моделью ZF, причем $\rho < \omega_1^{L^M}$ (где $L^M = \{x \in M$: x конструктивно в $M\}$), $T_\rho \in M$ и в M истинно следующее предложение:*

для каждого $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-множества $X \subseteq I$ найдется такое $d \subseteq \mathrm{Max}(T_\rho) \times \mathrm{Seq}$, что $X = [T_\rho, d]$.

Еще одно определение. Для каждого $\lambda < \omega_1$ введем совокупность C_λ всех борелевских кодов $\langle T, d\rangle$, удовлетворяющих таким трем условиям: $\langle T, d\rangle \in L$, $|T| \leqslant \lambda$, и $\mu < \omega^L_{|\sigma|_T}$ всякий раз, когда $\sigma^\frown\mu \in T$. Каждое из множеств C_λ конструктивно и имеет мощность $\omega^L_{\lambda+1}$ в L.

Следующая лемма элементарно влечет теорему 16.1:

16.3. Лемма. *Если $\nu < \omega_1$ и $[R]_\nu \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$, то найдется такой код $\langle T, d\rangle \in C_\rho$, что $[R]_\nu = [T, d]$.*

Вывод 16.1 из 16.3. Ординал $\rho + 1$ счетен, а из 15.4 следует недостижимость «настоящего» ω_1 в L. Поэтому $\omega^L_{\rho+1} < \omega_1$, т. е. множество C_ρ счетно в универсуме. Поэтому лемма 16.3 влечет счетность числа всех конституант $[R]_\nu$ из класса $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$.

Доказательство леммы 16.3. Мы докажем, что эта лемма верна в произвольной счетной транзитивной модели (СТМ) M теории ZFC, после чего укажем, как получить ее доказательство в универсуме всех множеств (т. е. в ZFC). Итак, пусть $\nu < \omega_1^M$, $\rho < \omega_1^{L^M}$, $R \in L^M$ и $[R]_\nu \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$ в M.

Через P_ν обозначим совокупность всех функций p таких, что $\mathrm{dom}\, p \subseteq \omega$ и $\mathrm{ran}\, p \subseteq \nu$. Упорядочим P_ν обратно включению: $p \leqslant q \leftrightarrow q \subseteq p$. Таким образом, P_ν есть ЧУ множество для построения генерического отображения ω на ν, см. 3.8 и 3.9 гл. 4. Ясно, что $P_\nu \in L^M$.

Рассмотрим генерическое расширение $M[G]$, полученное присоединением M-генерического множества $G \subseteq P_\nu$ к модели M. Согласно 11.7(в) в $M[G]$ истинно $[R]_\nu \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$. Далее, $g = \bigcup G\ (\in L^M[G])$ отображает ω на ν. Значит, ординал ν счетен в $L^M[G]$, а ρ счетно даже в L^M. Поэтому вновь из 11.7 (в) вытекает $[R]_\nu \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$ в $L^M[G]$. Согласно 16.2 найдется множество $d \in L^M[G]$, $d \subseteq \mathrm{Max}(T_\rho) \times \mathrm{Seq}$, такое, что в $L^M[G]$ истинно

$$[R]_\nu = [T_\rho, d]. \tag{1}$$

Наше множество G будет, очевидно, и L^M-генерическим. Поэтому в соответствии с леммой 2.5 гл. 4 найдется P_ν-терм $t \in L^M$, $t \subseteq P_\nu \times (\mathrm{Max}(T_\rho) \times \mathrm{Seq})$, такой, что $d = l_G(t)$.

Покажем, что предложение (1) истинно и в $M[G]$. Действительно, учитывая принадлежность T_ρ и d к модели $L^M[G]$, мы можем подобрать Σ^1_1-формулу $\psi(\alpha)$ с кодом из модели $L^M[G]$ такую, что равенство $[T_\rho, d] = \{\alpha\colon \psi(\alpha)\}$ истинно как в $L^M[G]$, так и в $M[G]$. (Эта формула выражает существование функции $\varphi\colon T_\rho \to \{0, 1\}$ такой, что:

1) если $|\sigma|_{T_\rho}=0$, то $g(\sigma)=1 \leftrightarrow \forall\tau(\alpha\in I_\tau\rightarrow\langle\sigma,\tau\rangle\notin d)$,

2) если $|\sigma|_{T_\rho}\geqslant 1$, то $g(\sigma)=1\leftrightarrow\forall n(\sigma^\frown n\in T_\rho\rightarrow g(\sigma^\frown n)=0)$,

3) $g(0)=1$.

Смысл функции g: $g(\sigma)=1\leftrightarrow\alpha\in[T_\rho, d, \sigma]$.)

Теперь с помощью формулы $\psi(\alpha)$ и формулы φ^1_R, даваемой леммой 11.2, мы выражаем равенство (1) следующим образом

(2) $$\forall\alpha(\varphi^1_R(w,\alpha)\leftrightarrow\psi(\alpha)),$$

где $w\in \mathrm{Word}\cap \mathrm{L}^M[G]$ таково, что $|w|=\nu$. Используя правило 10.2, нетрудно убедиться, что формула (2) есть Π^1_2-формула с кодом из $\mathrm{L}^M[G]$. Значит, она истинна в $M[G]$ согласно теореме об абсолютности 10.3, будучи истинной в $\mathrm{L}^M[G]$. Таким образом, равенство (1) истинно в $M[G]$, т. е. по выбору t в $M[G]$ истинно $[R]_\nu=[T_\rho, I_G(t)]$. Но множество $G\subseteq P_\nu$ является M-генерическим. Поэтому найдется $p_0\in G$, удовлетворяющее такому требованию:

(3) $$p_0\Vdash [R^*]_{\nu^*}=[T^*_\rho, t],$$

где $\Vdash$ есть вынуждение $\Vdash^{P_\nu}_M$.

Для $p\in P_\nu$ и $\sigma\in T_\rho$ определим множество

$$Z_{\sigma p}=\{\alpha\in I\cap M:\ p\Vdash\alpha^*\in[T^*_\rho, t, \sigma^*]\}\quad(\in M).$$

Начиная с этого момента, ординал $|\sigma|_{T_\rho}$ (где $\sigma\in T_\rho$) условимся для уменьшения громоздкости обозначать через $|\sigma|$: $|\sigma|=|\sigma|_T$. В M истинны следующие три утверждения:

(4) $|\sigma|=0\rightarrow Z_{\sigma p}=I-\bigcup\limits_{\tau\in S} I_\tau$, где

$$S=\{\tau\in\mathrm{Seq}:\ \exists q,\ r\in P_\nu(r\leqslant p,\ q\wedge\langle q,\langle\sigma,\tau\rangle\rangle\in t)\}$$

(5) $|\sigma|\geqslant 1\rightarrow Z_{\sigma p}=I-\bigcup\limits_{q\leqslant p,\ \sigma^\frown n\in T_\rho} Z_{\sigma^\frown n,\ q}$;

(6) $Z_{0p_0}=[R]_\nu$ (в M).

Утверждения (4) и (5) без труда выводятся индукцией по $|\sigma|$ из определения множеств $Z_{\sigma p}$, выбора t и предложения 2.1 гл. 4. Проверка (6) также несложна. Если $\alpha\in I\cap M$ и $\alpha\in[R]_\nu$ в M, то $\alpha\in[R]_\nu$ и в $M[G]$, откуда и из (3) следует $\alpha\in Z_{0p_0}$. Обратно, если $\alpha\notin[R]_\nu$ в M, то $\alpha\notin Z_{0p_0}$.

Итак, мы имеем в M конструктивное множество $t\subseteq P_\nu\times(\mathrm{Max}(T_\rho)\times\mathrm{Seq})$ такое, что система множеств $Z_{\sigma p}$, определяемая для всех $\sigma\in T_\rho$ и $p\in P_\nu$ условиями (4) и (5) индукции по $|\sigma|$, дает множество Z_{0p_0}, удовлетворяющее (6). Имея такое множество t, мы с этого момента отказываемся от предположения о том, что лемма 16.3 доказывается в СТМ M, и продолжаем ее доказательство в универсуме всех множеств (или, если угодно, рассуждаем в M). Докажем следующую лемму:

16.4. Лемма. *Ко всяким $\sigma\in T_\rho$ и $p\in P_\nu$ можно подобрать код $\langle T_{\sigma p}, d_{\sigma p}\rangle\in C_{|\sigma|}$ так, чтобы $[T_{\sigma p}, d_{\sigma p}]=Z_{\sigma p}$.*

Доказательство проходит индукцией по $|\sigma|$.

1*. Пусть $p\in P_\nu$ и $\sigma\in T_\rho$, $|\sigma|=0$. Определим множество S так, как указано в (4), и положим

$$T_{\sigma p}=\{0\}\quad\text{и}\quad d_{\sigma p}=\{\langle 0,\tau\rangle:\ \tau\in S\}.$$

Из конструктивности t следует конструктивность S, ввиду чего $\langle T_{\sigma p}, d_{\sigma p}\rangle\in C_0=C_{|\sigma|}$, а равенство $[T_{\sigma p}, d_{\sigma p}]=Z_{\sigma p}$ выполняется согласно (4) и определению $[T, d]$.

2*. Пусть $p\in P_\nu$ и $|\sigma|\geqslant 1$, причем для всех $\eta\in T_\rho$, $\eta\supset\sigma$, лемма 16.4 уже доказана, т. е. для каждого $q\in P_\nu$ и каждого $\eta\in T_\rho$, $\eta\supset\sigma$, уже имеется код

$$\langle T_{\eta q}, d_{\eta q}\rangle\in C_{<|\sigma|}\Big(=\bigcup_{\lambda<|\sigma|} C_\lambda\Big)$$

такой, что $[T_{\eta q}, d_{\eta q}]=Z_{\eta q}$. Предположим, что

(*) *функция $\eta,\ q\longmapsto\langle T_{\eta q}, d_{\eta q}\rangle$ конструктивна.*

В этом предположении (об обоснованности которого см. ниже) конструируем искомый код $\langle T_{\sigma p}, d_{\sigma p}\rangle\in C_{|\sigma|}$.

По определению множество $C_{<|\sigma|}$ имеет мощность $\omega^{\mathrm{L}}_{|\sigma|}$ в L. Не бо́льшую мощность в L имеет и конструктивное в силу (*) множество

$$U=\{\langle T_{\sigma^\frown n,\ q}, d_{\sigma^\frown n,\ q}\rangle:\ q\in P_\nu\wedge q\leqslant p\wedge\sigma^\frown n\in T_\rho\}$$

(хотя оно и заиндексировано множеством пар $\langle n, q\rangle$, имеющим при достаточно большом ν мощность, превосходящую $\omega^{\mathrm{L}}_{|\sigma|}$ в L). Поэтому существует конструктивная нумерация

$$U=\{\langle T_{\sigma^\frown n_\theta,\ q_\theta}, d_{\sigma^\frown n_\theta,\ q_\theta}\rangle:\ \theta<\omega^{\mathrm{L}}_{|\sigma|}\}$$

множества U в L. Положим

$$T_{\sigma p}=\{0\}\cup\{\theta^\frown\eta:\ \theta<\omega^{\mathrm{L}}_{|\sigma|}\wedge\eta\in T_{\sigma^\frown n_\theta,\ q_\theta}\},$$

$$d_{\sigma p}=\{\langle\theta^\frown\eta,\tau\rangle:\ \theta<\omega^{\mathrm{L}}_{|\sigma|}\wedge\langle\eta,\tau\rangle\in d_{\sigma^\frown n_\theta,\ q_\theta}\},$$

где для ординала θ и конечной последовательности ординалов η через $\theta^\frown\eta$ обозначается последовательность, определенная равенствами; $\mathrm{dom}(\theta^\frown\eta)=\mathrm{dom}\,\eta+1$, $(\theta^\frown\eta)(0)=\theta$, и $(\theta^\frown\eta)(k+1)=\eta(k)$ для всех $k<\mathrm{dom}\,\eta$. Нетрудно проверить, что $\langle T_{\sigma p}, d_{\sigma p}\rangle\in C_{|\sigma|}$ — искомый код.

Построения 1* и 2* могут в силу конструктивности t быть полностью проведенными в конструктивном универсуме. Это и дает обоснование допущения (*). Лемма 16.4 доказана. □

Из 16.4 и утверждения (7) следует лемма 16.3. Доказательство теоремы 16.1 закончено. □

Замечание. По ходу доказательства теоремы 16.1 нам пришлось, доказывая лемму 16.3, предположить на некоторое время, что универсум, в котором доказывается лемма 16.3, является СТМ в более широком универсуме. По существу, это предположение сделано для того, чтобы иметь возможность рассмотреть P_ν-генерическое расширение универсума леммы 16.3. Метод булевозначных моделей позволяет обойтись без этого предположения. Этот метод состоит в том, что вводится специальный класс термов $V^{(P_\nu)}$, играющий роль P_ν-генерического расширения универсума V. Всякий стандартный факт о вынуждении, верный для расширения $M \to M[G]$ модели M до модели $M[G]$, оказывается верным и для «расширения» $V \to V^{(P_\nu)}$. В частности, существует конструктивное множество t, приводящее указанным в доказательстве 16.3 образом к семейству множеств $Z_{\sigma\rho}$, обладающих теми же свойствами, и т. д. Более подробно о такой реализации метода вынуждения см. Соловей, Тенненбаум [1].

Теорема, аналогичная 16.1, может быть доказана и для некоторых других ω_1-последовательностей борелевских множеств. В частности, она справедлива для последовательностей, даваемых доказательством теоремы 2.23 гл. 8.

Результат следующего упражнения дает нижнюю границу борелевской сложности непустых конституант.

16.5. Упражнение. *Если* $1 \leqslant \rho < \omega_1^{L(R)}$, $[R]_\nu \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\rho}$ *и* $[R]_\nu \neq \varnothing$, *то* $\nu < \omega_\rho^{L[R]}$.

Указание. Пусть для простоты $R \in L$. Аналогично 16.3 найдется код $\langle T', d'\rangle \in C_\rho$ такой, что $[R]_\nu = I - [T', d']$. Подходящая часть этого кода образует новый код $\langle T, d\rangle \in C_\lambda$ для некоторого $\lambda < \rho$, удовлетворяющий соотношению $\varnothing \neq [T, d] \subseteq [R]_\nu$. Используя вынуждение «над L» с ЧУ множеством P_γ, где $\gamma = \omega_\lambda^L$, в качестве множества вынуждающих условий, можно найти множество $G \subseteq P_\gamma$ такое, что $\omega_{\lambda+1}^L = \omega_1^{L[G]}$. Если теперь $\nu \geqslant \omega_\rho^L$, то равенство (*) $[T, d] \cap [R]_\mu = \varnothing$ истинно для всех $\mu < \omega_1^{L[G]} (\leqslant \nu)$, так как конституанты попарно не пересекаются.

По определению C_λ будет $T \subseteq \mathrm{Seq}_\gamma$, т. е. T не более чем счетно в $L[G]$. Поэтому равенство (*) абсолютно для $L[G]$ каково бы ни было $\mu < \omega_1^{L[G]}$. Значит, $[T, d] \cap [R] = \varnothing$ в $L[G]$. Последнее равенство также абсолютно и истинно в универсуме, что противоречит выбору $\langle T, d\rangle$. □

Особо выделим результат 16.5 для $\rho = 1$:

16.6. Следствие. *Если* $[R]_\nu \in \mathbf{\Sigma}^0_2$ (*в частности, если конституанта* $[R]_\nu$ *не более чем счетна*) *и* $[R]_\nu \neq \varnothing$, *то* $\nu < \omega_1^{L[R]}$.

16.7. Упражнение (Соловей [1], Менсфилд [1]). *Если* $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_2$*-множество* $Y \subseteq I$ *содержит неконструктивную относительно* π *точку, то найдется совершенное множество* $Z_\beta \subseteq Y$ *с «кодом»* $\beta \in L[\pi]$.

Указание. Теорема $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_1$-униформизации 4.20 гл. 4 сводит все к случаю, когда Y есть $\mathbf{\Pi}^{1,\pi}_1$-множество $[R]$, где $R \in L[\pi]$. Конституанта $[R]_\nu$, содержащая точку не из $L[\pi]$, не может быть счетной в силу 16.6 и 4.11. Значит, $[R]$ содержит совершенное ядро. Далее используем 11.7 (б). □

16.8. Упражнение. *Предложение* 15.4 *эквивалентно тому, что для каждого* $\pi \in I$ *нет максимальных счетных* $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_2$*-множеств.*

Указание. Справа налево. Общий случай сводится к случаю $I \subseteq L[\pi]$ с помощью 10.3. Дальше используется релятивизованный вариант 13.5. Слева направо. Если $\omega_1^{L[\pi]} < \omega_1$, то множество $I \cap L[\pi]$ будет максимальным счетным $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_2$-множеством в силу 16.7. □

16.9. Упражнение. Покажите, что из 15.4 следует предложение о том, что, каков бы ни был ординал $\rho < \omega_1$, каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $[R]$ имеет не более чем счетное число *непустых* конституант $[R]_\nu$ таких, что для некоторого $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-множества Y выполняются соотношения $[R]_\nu \subseteq Y$ и $Y \cap \left(\bigcup_{\mu<\nu} [R]_\mu\right) = \varnothing$. Это предложение усиливает 15.2 и является, таким образом, еще одним эквивалентом 15.1—15.4. Сформулируйте и докажите аналогичное усиление 16.5.

17. О полных $\mathbf{\Sigma}^1_2$-упорядочениях. Импликации 15.4 → 15.3 и 15.10 → 15.9, доказываемые в этом пункте, являются очевидными следствиями такой теоремы:

17.1. Теорема (Менсфилд [1]). *Пусть* $\pi \in I$ *и* $<$ *есть полное* $\mathbf{\Sigma}^{1,\pi}_2$*-упорядочение, область которого* $D = \{\alpha\colon \exists\beta\,(\alpha \leqslant \beta \vee \beta \leqslant \alpha)\}$ *включена в* I. *Тогда* $D \subseteq L[\pi]$.

Доказательство. Пусть, напротив, $D \not\subseteq L[\pi]$. В силу 16.7 найдется совершенное множество $Z_{\beta_0} \subseteq D$ с $\beta_0 \in L[\pi]$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $Z_{\beta_0} = {}^\omega 2$, где ${}^\omega 2 = \{\alpha\colon \alpha$ *есть функция из* ω *в* $2 = \{0, 1\}\} \subseteq I$. (Общий случай сводится к этому с помощью «конструктивного относительно β_0» гомеоморфизма ${}^\omega 2$ на Z_{β_0}.)

Для $f \in I$ положим

$$F_f = \{\langle\alpha, \beta\rangle\colon \forall m, k\,(f(2^m(2k+1)-1) = 0 \to \sigma_m \not\subseteq \alpha \wedge \sigma_k \not\subseteq \beta)\}$$

(ср. с 11.4). Семейство $\{F_f\colon f\in {}^{\omega}2\}$ дает нумерацию всех замкнутых множеств $F\subseteq I^2$. Далее, множество

$$S=\{\langle\beta, f\rangle\colon \beta, f\in I\cap \mathrm{L}[\pi]\wedge Z_\beta\subseteq {}^{\omega}2 \text{ совершенно}$$

$$\wedge\ F_f \text{ есть непрерывная биекция } {}^{\omega}2 \text{ на некоторое } Y\subseteq {}^{\omega}2\}$$

принадлежит классу $\Sigma^{1,\pi}_2$ вследствие 9.4. Упорядочим S так:

$$\langle\beta, f\rangle <^* \langle\gamma, g\rangle \leftrightarrow Z_\beta\subseteq Z_\gamma\wedge\forall\alpha\in Z_\beta(F_f(\alpha)<F_g(\alpha)).$$

Множество S с порядком $<^*$ фундировано. Действительно, если

$$\langle\beta_0, f_0\rangle >^* \langle\beta_1, f_1\rangle >^* \langle\beta_2, f_2\rangle >^* \ldots,$$

то, взяв точку α в очевидно непустом пересечении $\bigcap\limits_{i\in\omega} Z_{\beta_i}$, мы получим $F_{f_0}(\alpha)>F_{f_1}(\alpha)>\ \ldots$, чего не может быть.

Кроме того, S непусто: возьмем такие β, $f\in I\cap \mathrm{L}[\pi]$, что $Z_\beta={}^{\omega}2$ и $F_f=\{\langle\alpha, \alpha\rangle\colon \alpha\in {}^{\omega}2\}$. Следовательно, S имеет $<^*$-минимальный элемент $\langle\beta, f\rangle\in S$. Как и выше, не ограничивая общности, предполагаем, что $Z_\beta={}^{\omega}2$.

Для всякого $\alpha\in {}^{\omega}2$ определим $\tilde\alpha\in {}^{\omega}2$ условиями

$$\tilde\alpha(0)=1-\alpha(0) \quad\text{и}\quad \tilde\alpha(k)=\alpha(k) \quad\text{при}\quad k>0.$$

Нетрудно указать такое $g\in I\cap \mathrm{L}[\pi]$, что F_g — непрерывная функция из ${}^{\omega}2$ в ${}^{\omega}2$, причем $F_g(\tilde\alpha)=F_f(\alpha)$ для всех $\alpha\in {}^{\omega}2$.

Согласно взаимной однозначности F_f имеем $F_f(\alpha)\neq F_g(\alpha)$ для всех $\alpha\in {}^{\omega}2$. Поэтому ${}^{\omega}2=A\cup B$, где множества

$$A=\{\alpha\in {}^{\omega}2\colon F_g(\alpha)<F_f(\alpha)\},$$

$$B=\{\alpha\in {}^{\omega}2\colon F_f(\alpha)<F_g(\alpha)\}$$

принадлежат классу $\Sigma^{1,\pi,f,g}_2$. Но ${}^{\omega}2\notin \mathrm{L}[\pi]$, так как иначе $I\subseteq \mathrm{L}[\pi]$. Следовательно, по 16.7 найдется совершенное множество Z_γ с $\gamma\in \mathrm{L}[\pi]$ такое, что либо $Z_\gamma\subseteq A$, либо $Z_\gamma\subseteq B$.

Во втором случае нетрудно выбрать $\delta\in I\cap \mathrm{L}[\pi]$ так, чтобы $Z_\delta=\{\tilde\alpha\colon \alpha\in Z_\gamma\}$, и получить $Z_\delta\subseteq A$. Поэтому, не ограничивая общности, предполагаем $Z_\gamma\subseteq A$. По определению $<^*$ это означает, что $\langle\gamma, g\rangle <^* \langle\beta, f\rangle$, — противоречие! □

17.2. Следствие. *Всякое полное Σ^1_2-упорядочение $<$ имеет длину $\leqslant\omega_1$.*

(Множество $I\cap \mathrm{L}[\pi]$ имеет мощность $\leqslant\omega_1$, каково бы ни было $\pi\in I$.)

Интересно, что уже для полных Δ^1_3-упорядочений невозможно получить результаты, аналогичные 17.1, 17.2. В частности, Харрингтон [2] показал, что предложение о существовании полного Δ^1_3-упорядочения пространства I не противоречит теории ZFC + отрицание континуум-гипотезы, см. п. 28 нашего обзора.

18. Об измеримости множеств классов Σ^1_2 и Δ^1_2. Докажем теорему, из которой следует импликация 15.6 → 15.5.

18.1. Теорема (Соловей [1], [2]). *Пусть $\pi\in I$ таково, что совокупность $\mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ всех случайных над $\mathrm{L}[\pi]$ точек $\alpha\in I$ имеет меру 1. Тогда всякое $\Sigma^{1,\pi}_2$-множество $\subseteq I$ измеримо.*

Доказательство начнем со следующих определений. Через P обозначим совокупность всех $\beta\in I\cap \mathrm{L}[\pi]$ таких, что множество Z_β (см. п. 11) имеет меру >0 (все равно: в $\mathrm{L}[\pi]$ или в универсуме). Упорядочим P так:

$$\beta\leqslant\gamma\leftrightarrow Z_\beta\subseteq Z_\gamma.$$

ЧУ множество $\langle P, \leqslant\rangle$ принадлежит классу $\mathrm{L}[\pi]$. Множество $G\subseteq P$ называется $\mathrm{L}[\pi]$-*генерическим*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) Если $\beta, \gamma\in G$, то найдется такое $\delta\in G$, что $\delta\leqslant\beta, \gamma$.

(2) Если множество $D\in \mathrm{L}[\pi]$, $D\subseteq P$ плотно в P, то $D\cap G\neq\varnothing$.

Данное определение совпадает с определением гл. 4 с той лишь разницей, что здесь $\mathrm{L}[\pi]$ — собственный класс, а не счетное множество M, как в гл. 4. $\mathrm{L}[\pi]$-генерические множества $G\subseteq P$ могут быть получены из случайных над $\mathrm{L}[\pi]$ точек:

18.2. Лемма. *Если точка $\alpha\in I$ случайна над $\mathrm{L}[\pi]$, то множество $G_\alpha=\{\beta\in P\colon \alpha\in Z_\beta\}$ является $\mathrm{L}[\pi]$-генерическим и $\mathrm{L}[\pi, \alpha]=\mathrm{L}[\pi, G_\alpha]$.*

Доказательство леммы. Проверим (1). Пусть $\beta, \gamma\in G_\alpha$, т. е. $\alpha\in Z_\beta\cap Z_\gamma$. Найдется такое $\delta\in I\cap \mathrm{L}[\pi]$, что $Z_\delta=Z_\beta\cap Z_\gamma$. В силу случайности α мера Z_δ положительна. Значит, $\delta\in P$, $\delta\leqslant\beta$, $\delta\leqslant\gamma$ и $\delta\in G_\alpha$.

Проверим (2). Пусть множество $D\in \mathrm{L}[\pi]$, $D\subseteq P$, плотно в P. Существует счетная в $\mathrm{L}[\pi]$ максимальная антицепь $A\in \mathrm{L}[\pi]$, $A\subseteq D$. Она имеет в $\mathrm{L}[\pi]$ вид $A=\{Z_{(\gamma)_l}\colon l\in\omega\}$ для подходящего $\gamma\in I\cap \mathrm{L}[\pi]$. При этом в силу максимальности A мера объединения $\bigcup\limits_{l\in\omega} Z_{(\gamma)_l}=U_\gamma$ равна 1. Следовательно, $\alpha\in U_\gamma$. Теперь непустота $G_\alpha\cap D$ очевидна.

Наконец, $G_\alpha\in \mathrm{L}[\pi, \alpha]$ выполняется по определению G_α, а $\alpha\in \mathrm{L}[\pi, G_\alpha]$ следует из равенства $\{\alpha\}=\bigcap\{Z_\beta\colon \beta\in G_\alpha\}$. □

Генерические расширения класса $\mathrm{L}[\pi]$, т. е. классы вида $\mathrm{L}[\pi, G]$, где множество $G\subseteq P$ является $\mathrm{L}[\pi]$-генерическим, имеют те же свойства, что и генерические расширения счетных моделей. В частности, если замкнутая формула φ содержит P-термы из $\mathrm{L}[\pi]$ в качестве параметров, а множество $G\subseteq P$ является $\mathrm{L}[\pi]$-генерическим, то справедлива эквивалентность

$$(\mathrm{L}[\pi, G]\models\varphi^G)\leftrightarrow\exists\beta\in G\,(\beta\Vdash\varphi),$$

где φ^G — результат замены каждого P-терма t, входящего в φ, множеством $I_G(t) \in \mathrm{L}[\pi, G]$, а $\Vdash$ — отношение вынуждения, соответствующее P-генерическим расширениям «модели» $\mathrm{L}[\pi]$. (Предложение 2.3 гл. 4, выражающее существование достаточного числа $\mathrm{L}[\pi]$-генерических множеств $G \subseteq P$, выполняется в нашем случае, так как, если $\beta \in P$, то в силу предположения о том, что мера множества $\mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ равна 1, существует случайная над $\mathrm{L}[\pi]$ точка $\alpha \in Z_\beta$ и, следовательно, существует $\mathrm{L}[\pi]$-генерическое множество G_α, содержащее β.)

18.3. Следствие (из 18.2). *Пусть формула φ такова, как указано выше, и точка $\alpha \in I$ случайна над $\mathrm{L}[\pi]$. Тогда*

$$(\mathrm{L}[\pi, \alpha] \models \varphi^{G_\alpha}) \leftrightarrow \exists \beta \in P (\alpha \in Z_\beta \wedge \beta \Vdash \varphi).$$

Следующая лемма играет главную роль в доказательстве 18.1.

18.4. Лемма. *Какова бы ни была формула $\varphi(\alpha)$ с параметрами из $\mathrm{L}[\pi]$ и единственной свободной переменной α, множество*

$$\{\alpha \in I\colon \text{ в } \mathrm{L}[\pi, \alpha] \text{ истинно } \varphi(\alpha)\}$$

измеримо по Лебегу (в предположении, что мера $\mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ равна 1).

Доказательство леммы (эскиз). Достаточно доказать измеримость следующего множества:

$$\{\alpha \in \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}\colon \text{ в } \mathrm{L}[\pi, \alpha] \text{ истинно } \varphi(\alpha)\}.$$

Для этого подберем $\gamma \in I \cap \mathrm{L}[\pi]$ такое, что для каждого $\alpha \in \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ будет выполняться эквивалентность

$$(*) \quad \alpha \in U_\gamma \leftrightarrow \text{в } \mathrm{L}[\pi, \alpha] \text{ истинно } \varphi(\alpha).$$

Введем P-терм

$$a = \{\langle \beta, \langle m, k\rangle\rangle\colon \beta \in P \wedge \forall \alpha \in Z_\beta (\alpha(m) = k)\} \quad (\in \mathrm{L}[\pi]).$$

(Тогда $I_{G_\alpha}(a) = \alpha$, какова бы ни была случайная над $\mathrm{L}[\pi]$ точка α.) Через $\psi(\alpha)$ обозначим результат замены в $\varphi(\alpha)$ каждого параметра $x \in \mathrm{L}[\pi]$ термом $x^* = P \times x$ ($I_G(x^*) = x$, каково бы ни было $G \subseteq P$). Множество

$$Q = \{\beta \in P\colon \beta \Vdash \psi(a)\}$$

принадлежит $\mathrm{L}[\pi]$. Выберем максимальную счетную в $\mathrm{L}[\pi]$ антицепь $A \subseteq Q$, $A \in \mathrm{L}[\pi]$. Найдется $\gamma \in I \cap \mathrm{L}[\pi]$ такое, что $U_\gamma = \bigcup_{\beta \in A} Z_\beta$. При этом, согласно максимальности A, мера $Z_\beta - U_\gamma$ равна 0 для любого $\beta \in Q$. Используя это, а также 18.3, нетрудно проверить, что найденное γ обеспечивает эквивалентность (*) для всех $\alpha \in \mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$. □

Закончим доказательство теоремы 18.1. Рассмотрим $\Sigma^{1,\pi}_2$-множество $X \subseteq I$. Имеем $X = \{\alpha\colon \varphi(\alpha)\}$ для подходящей Σ^1_2-формулы φ с кодом из $\mathrm{L}[\pi]$ (см. п. 10). По теореме 10.3 об абсолютности имеет место равенство

$$X = \{\alpha \in I\colon \text{ в } \mathrm{L}[\pi, \alpha] \text{ истинно } \varphi(\alpha)\},$$

и измеримость X следует из леммы 18.4. □

Теперь докажем импликацию 15.8 → 15.7.

18.5. Теорема (Любецкий [3]). *Пусть $\pi \in I$ и множество $\mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ непусто. Тогда каждое $\Delta^{1,\pi}_2$-множество $\subseteq I$ измеримо.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует множество $X \subseteq I$ класса $\Delta^{1,\pi}_2$ с верхней мерой 1 и нижней мерой 0. Если $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} < \omega_1$, то множество $\mathscr{R}_{\mathrm{L}[\pi]}$ имеет меру 1, и можно воспользоваться теоремой 18.1. Поэтому предположим, что $\omega_1^{\mathrm{L}[\pi]} = \omega_1$. Тогда X является объединением ω_1 борелевских множеств «с кодом из $\mathrm{L}[\pi]$» (см. доказательство теоремы 2.23 гл. 8), каждое из которых имеет меру 0. Такой же вид имеет и множество $I - X$. Но случайная над $\mathrm{L}[\pi]$ точка не может принадлежать борелевскому множеству меры 0 «с кодом из $\mathrm{L}[\pi]$», так как каждое такое множество имеет пустое пересечение с некоторым множеством U_γ меры 1 таким, что $\gamma \in \mathrm{L}[\pi]$. □

19. Некоторые разрешимые свойства конституант.

19.1. Теорема. *Если $\rho < \omega_1$ и все конституанты $[R]_\nu$ непусты, то найдется конституанта $[R]_\nu \notin \mathbf{\Pi}^0_\rho$.*

Доказательство. Для простоты предположим, что найдется СТМ M теории ZFC такая, что $R \in M$ и $\rho < \omega_1^{\mathrm{L}^M[R]}$. (На самом деле можно ограничиться рассмотрением моделей достаточно широкого конечного фрагмента ZFC.) Аналогично доказательству 16.3 найдется генерическое расширение N модели M такое, что $\nu < \omega_1^N$, где $\nu = \omega_\rho^M$.

По условию $[R]_\nu \neq \varnothing$ в универсуме. Докажем, что $[R]_\nu \neq \varnothing$ и в N. Действительно, как показано в доказательстве леммы 11.7, предложение $[R]_\nu \neq \varnothing$ можно выразить подходящей Σ^1_1-формулой с кодом из N. Теперь искомое вытекает из следующего принципа абсолютности:

19.2. Теорема (Мостовский). *Если множество или класс N является моделью ZF, то всякая замкнутая Π^1_1-формула с кодом из N абсолютна для N* (ср. с 10.3).

Несложное доказательство основано на результате 2.18 гл. 8 и оставляется читателю.

Итак, $[R]_\nu \neq \varnothing$ в N. Применяя в N 16.5, мы имеем $[R]_\nu \notin \mathbf{\Pi}^0_\rho$ в N. Выведем отсюда $[R]_\nu \notin \mathbf{\Pi}^0_\rho$ в универсуме всех мно-

жеств. Достаточно выразить предложение $[R]_\nu \notin \mathbf{\Pi}^0_\rho$ с помощью $\mathbf{\Sigma}^1_2$-формулы с кодом из N и воспользоваться 19.2.

Имеет место следующая эквивалентность:

$$[R]_\nu \notin \mathbf{\Pi}^0_\rho \leftrightarrow U_\rho \leqslant_W [R]_\nu,$$

где U_ρ есть универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$-множество. (Нужно провести рассуждения из доказательства теоремы 6.19 гл. 8 с учетом борелевости $[R]_\nu$ и U_ρ и теоремы 6.3 гл. 8.) Но правую часть этой эквивалентности нетрудно записать $\mathbf{\Sigma}^1_2$-формулой с кодом из N с помощью формул 11.2 и формул, введенных в доказательстве леммы 11.7(в). □

Еще одно разрешимое свойство конституант, на котором мы остановимся, связано с внутренними конституантами. Пусть $R \subseteq \mathrm{Seq}^2$. Множество $I - [R]$ (класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$), подобно множеству $[R]$, можно разбить на борелевские множества следующим образом. Для каждого $X \subseteq \mathrm{Seq}$ положим

$$X' = \{\sigma \in X\colon \textit{ отношение} < \restriction \{\tau \in X\colon \tau < \sigma\} \textit{ фундировано}\},$$

и определим ν-ю *внутреннюю* конституанту

$$[R]_{*\nu} = \{\alpha \in I - [R]\colon \textit{ отношение} < \restriction (X_{\alpha R} - \{0\})' \textit{ фундировано и имеет длину } \nu\}.$$

Множества $[R]_{*\nu}$ борелевские, попарно не пересекаются и дают $I - [R]$ в объединении.

Свойства внутренних конституант в значительной степени отличаются от свойств конституант 2.1 (называемых *внешними*). Для них не имеют места аналоги результатов 2.3—2.5. Различие проявляется и в следующей теореме:

19.3. Теорема. *Пусть* $\rho < \omega_1$ *и число непустых конституант* $[R]_{*\nu}$ *несчетно. Тогда найдется конституанта* $[R]_{*\nu} \notin \mathbf{\Pi}^0_\rho$.

Доказательство (эскиз). Весь аппарат 16.1—16.5 без особых изменений переносится на конституанты $[R]_{*\nu}$. Поэтому, повторяя доказательство 19.1, достаточно подобрать ординал ν, $\omega^M_\rho \leqslant \nu < \omega^N_1$, такой, что $[R]_{*\nu} \neq \varnothing$ в N. Для этого заметим, что формула

$$\exists \alpha \left(\alpha \in I - [R] \wedge \alpha \notin \bigcup_{\mu < \lambda} [R]_{*\mu}\right),$$

где $\lambda = \omega^M_\rho$, является Σ^1_1-формулой с кодом из N (так как $I - [R] \in \mathbf{\Sigma}^1_1$), ввиду чего искомое достигается применением принципа 19.2. □

Напомним, что аналог теоремы 19.3 для конституант $[R]_\nu$ (т. е. предложение 15.2(в)) *неразрешим* средствами ZFC.

19.4. Упражнение. Пусть $R \subseteq \mathrm{Seq}^2$. Определим

$$\alpha E_R \beta \leftrightarrow \exists \nu\, (\alpha, \beta \in [R]_\nu \vee \alpha, \beta \in [R]_{*\nu}).$$

Покажите, что E_R является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением эквивалентности на I, причем не может существовать совершенное множество попарно E_R-неэквивалентных точек (используйте 1.6). Классами E_R-эквивалентности будут в точности конституанты $[R]_\nu$ и $[R]_{*\nu}$. Покажите, используя 19.3 и 2.5, что если число классов E_R-эквивалентности несчетно и $\rho < \omega_1$, то найдется класс E_R-эквивалентности, не принадлежащий $\mathbf{\Pi}^0_\rho$. (Таким образом, отношения E_R не могут служить контрпримерами к $\mathbf{\Sigma}^1_1$-SR, см. п. 6.)

§ 4. Модель Леви — Соловея

Мы видели в § 2, что классические теоремы об измеримости и свойстве совершенного ядра $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств «максимальны» в теории ZFC, так как из аксиомы конструктивности следует существование неизмеримого $\mathbf{\Delta}^1_2$-множества и существование несчетного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества без совершенного ядра. В § 3 указаны необходимые и достаточные условия измеримости множеств классов $\mathbf{\Delta}^1_2$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$ и свойства совершенного ядра у множеств классов $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Но как быть с проективными множествами более высоких уровней? Является ли непротиворечивым, скажем, предложение об измеримости всех проективных множеств? Решение этой задачи получено Соловеем [2] с помощью модели, построенной Леви [1] для исследования вопроса об определимых полных упорядочениях множеств $\subseteq I$. Мы изложим в этом параграфе основные свойства упомянутой модели, которая называется моделью Леви — Соловея.

Собственно, известны две модели Леви — Соловея. В первой из них истинна полная аксиома выбора, и основные свойства регулярности переносятся на весьма широкий класс $^\omega$On-определимых множеств, включающий, в частности, все проективные множества. Во второй модели, которая получается из первой, истинна только аксиома зависимого выбора, зато свойства регулярности переносятся на все множества вообще (так, во второй модели каждое множество $\subseteq I$ измеримо и т. п.).

Мы дадим также доказательства двух теорем структурной теории, относящихся к счетнозначным множествам.

20. Множество вынуждающих условий. Зафиксируем некоторый бесконечный ординал Ω (более точно величина Ω определяется в п. 21). Следующее определение вводит ЧУ множество $\mathscr{P}$ вынуждающих условий Леви — Соловея.

20.1. Определение. Пусть $\mu < \Omega$ и $p \subseteq \Omega \times \omega \times \Omega$. Положим

$$p_\mu = \{\langle k, \nu\rangle\colon \langle \mu, k, \nu\rangle \in p\}.$$

Пусть $\lambda \leqslant \Omega$. $\mathscr{P}_\lambda$ есть совокупность всех взаимно однозначных функций из некоторого $m \in \omega$ в $\omega + \lambda$. $\mathscr{P}$ есть совокупность всех конечных множеств $p \subseteq \Omega \times \omega \times \Omega$ таких, что $\mu < \Omega \to p_\mu \in \mathscr{P}_\mu$. Если $p \in \mathscr{P}$, то $\operatorname{dom} p = \{\mu\colon p_\mu \neq 0\}$ ($\subseteq \Omega$ конечно). Положим

$$\mathscr{P}_{<\lambda} = \{p \in \mathscr{P}\colon \operatorname{dom} p \subseteq \lambda\}, \quad \mathscr{P}_{\leqslant\lambda} = \mathscr{P}_{<(\lambda+1)},$$
$$\mathscr{P}_{\geqslant\lambda} = \{p \in \mathscr{P}\colon \lambda \cap \operatorname{dom} p = \varnothing\}, \quad \mathscr{P}_{>\lambda} = \mathscr{P}_{\geqslant(\lambda+1)}.$$

Все введенные множества упорядочиваются обратно включению:

$$p \leqslant q \leftrightarrow q \subseteq p.$$

В отличие от определения 5.5 гл. 4, приводящего к «свертке» ω_1 и всех ординалов $< \Omega$ с помощью счетных вынуждающих условий, множество $\mathscr{P}$ приведет к «свертке» ω и всех ординалов $< \Omega$ с помощью конечных вынуждающих условий.

20.2. Лемма. *Если Ω является недостижимым кардиналом, то множество $\mathscr{P}$ удовлетворяет Ω-условию антицепей.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству 5.6 гл. 4.

20.3. Определение. ЧУ множества P и Q назовем *почти изоморфными*, если некоторое плотное $P' \subseteq P$ изоморфно некоторому плотному $Q' \subseteq Q$.

Докажем несколько утверждений о почти изоморфности, связанных с множествами, введенными определением 20.1.

20.4. Лемма. *Если $\lambda < \Omega$, то $\mathscr{P}_\lambda$ и $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ почти изоморфны.*

Доказательство. Пусть $p \in \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$, $u = \operatorname{dom} p$, $m = \operatorname{dom} p_\lambda$ ($\in \omega$). Если выполняются следующие два условия:

(1) $u - \{\lambda\} = \{p_\lambda(j)\colon j < m\}$,

(2) $\operatorname{dom} p_\mu = m$ для всех $\mu \in u$,

то пишем $p \in \mathscr{P}'$. Нетрудно видеть, что $\mathscr{P}'$ с обращенным порядком (т. е. совпадающим с $\leqslant$) есть дерево высоты ω (см. гл. 3) с $\varkappa$-ветвлениями, где $\varkappa = \operatorname{card}(\omega + \lambda)$, т. е. за каждым $p \in \mathscr{P}'$ имеется ровно $\varkappa$ непосредственно следующих. Таково же и $\mathscr{P}_\lambda$. Значит, $\mathscr{P}'$ и $\mathscr{P}_\lambda$ изоморфны. Но $\mathscr{P}'$ плотно в $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$. □

20.5. Лемма. *Пусть $\lambda < \Omega$ и непустое множество $\Sigma \subseteq \mathscr{P}_\lambda$ не содержит $\leqslant$-минимальных элементов и таково, что*

$$p \in \Sigma \wedge q \in \mathscr{P}_\lambda \wedge p \leqslant q \to q \in \Sigma.$$

Тогда множества $\mathscr{P}$ и $\Sigma \otimes \mathscr{P}_{\geqslant\lambda}$ почти изоморфны.

Доказательство. *$\mathscr{P}_\lambda$ есть дерево высоты* ω с $\varkappa$-ветвлениями, где $\varkappa = \operatorname{card}(\omega + \lambda)$, а наше Σ, очевидно, образует

ω-дерево с $\leqslant\varkappa$-ветвлениями (в смысле обращенного порядка). Поэтому множество

$$\mathscr{P}' = \{\langle p, q\rangle\colon p \in \Sigma \wedge q \in \mathscr{P}_\lambda \wedge \operatorname{dom} p = \operatorname{dom} q\}$$

является деревом высоты ω с $\varkappa$-ветвлениями, т. е. $\mathscr{P}'$ изоморфно $\mathscr{P}_\lambda$. Но $\mathscr{P}'$ плотно в $\Sigma \otimes \mathscr{P}_\lambda$. Значит, в силу 20.4 множества $\Sigma \otimes \mathscr{P}_\lambda$ и $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ почти изоморфны. Поэтому $\Sigma \otimes \mathscr{P}_\lambda \otimes \mathscr{P}_{>\lambda}$ и $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda} \otimes \mathscr{P}_{>\lambda}$ также почти изоморфны. Но $\mathscr{P}_\lambda \otimes \mathscr{P}_{>\lambda}$ изоморфно $\mathscr{P}_{\geqslant\lambda}$, а $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda} \otimes \mathscr{P}_{>\lambda}$ изоморфно $\mathscr{P}$. □

20.6. Следствие. *В условиях леммы* 20.5 *$\mathscr{P}$ почти изоморфно множеству $\Sigma \otimes \mathscr{P}_{>\lambda}$.*

Доказательство тривиально: применим 20.5 для $\lambda + 1$ вместо λ; $\Sigma \subseteq \mathscr{P}_\lambda \subseteq \mathscr{P}_{\lambda+1}$ очевидно. □

20.7. Лемма. *Множества $\mathscr{P} \otimes \mathscr{P}$ и $\mathscr{P}$ почти изоморфны.*

Доказательство. Каждому $p \in \mathscr{P}$ сопоставим пару $\langle p^1, p^2\rangle$, где

$$p^1 = \{\langle \mu, m, \nu\rangle\colon \langle \mu, 2m, \nu\rangle \in p\},$$
$$p^2 = \{\langle \mu, m, \nu\rangle\colon \langle \mu, 2m+1, \nu\rangle \in p\}.$$

Это отображение дает изоморфизм $\mathscr{P}$ на некоторое плотное в $\mathscr{P} \otimes \mathscr{P}$ множество. □

21. Определение и основные свойства первой модели Леви — Соловея. Зафиксируем до конца п. 21 некоторый счетный ординал Ω.

21.1. Определение. *Ω-моделью* назовем всякую счетную транзитивную модель (СТМ) M теории ZFC такую, что $\Omega \in M$ и Ω является недостижимым кардиналом в M.

Будет предполагаться существование Ω-моделей. Таким образом, мы отправляемся от предположения о том, что *существуют СТМ с недостижимым кардиналом.*

Определение 20.1, очевидно, абсолютно для каждой Ω-модели; поэтому всякая такая модель содержит множество $\mathscr{P}$. *Первой моделью Леви — Соловея* называется генерическое расширение $M[G]$ произвольной Ω-модели M, полученное присоединением к M некоторого $\mathscr{P}$-генерического над M множества $G \subseteq \mathscr{P}$.

(Мы несколько изменяем в этом параграфе терминологию гл. 4: вместо «*M-генерическое подмножество множества $\mathscr{P}$*» пишем «*$\mathscr{P}$-генерическое над M множество*». Это изменение вызвано необходимостью иметь дело с различными исходными моделями и различными множествами вынуждающих условий одновременно.)

Чтобы не повторяться, до п. 25 фиксируем некоторую Ω-модель M. Докажем несколько элементарных свойств модели Леви — Соловея $M[G]$. Первым делом отметим, что при любом $\lambda < \Omega$ отображение $p \in \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$, $q \in \mathscr{P}_{>\lambda} \mapsto p \cup q \in \mathscr{P}$ осущест-

вляет канонический изоморфизм $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}\otimes\mathscr{P}_{>\lambda}$ на $\mathscr{P}$. Поэтому теорема 5.2 гл. 4 влечет

21.2. Следствие. *Пусть множество $G\subseteq\mathscr{P}$ является $\mathscr{P}$-генерическим над M. Тогда множество $G_{\leqslant\lambda}=G\cap\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ будет $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$-генерическим над M, а множество $G_{>\lambda}=G\cap\mathscr{P}_{>\lambda}$ будет $\mathscr{P}_{>\lambda}$-генерическим над $M[G_{\leqslant\lambda}]$. При этом $M[G]=M[G_{\leqslant\lambda}][G_{>\lambda}]$.*

К этой же серии относятся следующие три леммы:

21.3. Лемма. *Пусть $\lambda<\Omega$. Тогда для каждого $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$-генерического над M множества $G_{\leqslant\lambda}$ найдется такое $\mathscr{P}_\lambda$-генерическое над M множество F, что $M[G_{\leqslant\lambda}]=M[F]$.*

Доказательство использует лемму 20.4 и следующее утверждение:

(*) *Если ЧУ множества P, $Q\in M$ почти изоморфны в M, то для каждого P-генерического над M множества G найдется такое Q-генерическое над M множество F, что $M[F]=M[G]$.*

Доказательство (*). Пусть $h\in M$ — изоморфизм плотного $P'\subseteq P$ на плотное $Q'\subseteq Q$ (P', $Q'\in M$). Положим

$$F=\{q\in Q:\ \exists p\in G\cap P'\,(h(p)\leqslant q)\}.$$

Более подробно см. Соловей [2]. □

Совершенно аналогично, используя (*), 20.6, 20.7 и теорему 5.2 гл. 4, можно доказать следующие две леммы:

21.4. Лемма. *Пусть $\lambda<\Omega$ и множество $\Sigma\subseteq\mathscr{P}_\lambda$ удовлетворяет условию леммы* 20.5. *Пусть множество $F\subseteq\Sigma$ является Σ-генерическим над M, а G_1 является $\mathscr{P}_{>\lambda}$-генерическим над $M[F]$. Тогда найдется такое $\mathscr{P}$-генерическое над M множество G', что $M[G']=M[F]\ [G_1]$.*

21.5. Лемма. *Пусть множество G является $\mathscr{P}$-генерическим над M, а множество G' является $\mathscr{P}$-генерическим над $M[G]$. Тогда найдется такое $\mathscr{P}$-генерическое над M множество G'', что $M[G'']=M[G]\ [G']$.*

Следующая лемма дает несколько более конкретных свойств модели Леви — Соловея:

21.6. Лемма. *Пусть множество G является $\mathscr{P}$-генерическим над M и $f\in M[G]$, $f\in{}^{\omega}M$ (т. е. f есть функция из ω в M). Тогда истинны следующие утверждения:*

(а) $\omega_1^{M[G]}=\Omega$.

(б) *Найдется такое $\lambda<\Omega$, что $f\in M[G_{\leqslant\lambda}]$.*

(в) $\omega_1^{M[f]}<\Omega$, *$I\cap M[f]$ счетно в $M[G]$, и $M[f]$ является Ω-моделью.*

(г) *Найдется $\alpha\in I\cap M[G]$ такое, что $f\in M[\alpha]$.*

Доказательство. (а) Нетрудно проверить, что каждое $F_\mu=\bigcup\limits_{p\in G}p_\mu\ (\in M[G])$ является отображением ω на $\omega+\mu$. Поэтому $\Omega\leqslant\omega_1^{M[G]}$. Обратное неравенство следует из 20.2 и теоремы 3.4 гл. 4.

(б) В силу леммы 2.5 гл. 4 найдется $\mathscr{P}$-терм $t\in M$ такой, что $f=I_G(t)$. Рассуждаем в M. Для каждого $k\in\omega$ пусть

$$Q_k=\{p\in\mathscr{P}:\ \exists v\,(\langle p,\langle k,v\rangle\rangle\in t)\}.$$

Выберем антицепь $A_k\subseteq Q_k$, максимальную в совокупности всех антицепей $\subseteq Q_k$. Согласно 20.2 каждое A_k имеет мощность $<\Omega$ (в M). Поэтому найдется такое $\lambda<\Omega$, что $A_k\subseteq\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ для всех $k\in\omega$.

Снова находясь в универсуме всех множеств, нетрудно проверить, что $f=I_{G_{\leqslant\lambda}}(t)\in M[G_{\leqslant\lambda}]$.

(в) Под $M[f]$ понимается наименьшее множество, удовлетворяющее включениям $M\cup\{f\}\subseteq M[f]\subseteq M[G]$ и являющееся моделью ZFC. (В рассматриваемой ситуации такое множество существует, см. Соловей [2]). По доказанному (б) найдется такое $\lambda<\Omega$, что $f\in M[G_{\leqslant\lambda}]$. Поэтому (в) достаточно доказать для $M[G_{\leqslant\lambda}]$ вместо $M[f]$. При этом множество $G_{\leqslant\lambda}$ является $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$-генерическим над M согласно 21.2.

В силу недостижимости Ω в M найдется кардинал $\varkappa<\Omega$ модели M такой, что $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ имеет мощность $\varkappa$ в M. Вследствие теоремы 3.4 гл. 4 все кардиналы $>\varkappa$ сохраняются в $M[G_{\leqslant\lambda}]$. Более того, доказательство теоремы 3.4 гл. 4 показывает, что конфинальности кардиналов $>\varkappa$, имеющих конфинальность $>\varkappa$ в M, также сохраняются в $M[G_{\leqslant\lambda}]$. Поэтому Ω остается слабо недостижимым в $M[G_{\leqslant\lambda}]$. Далее, мы имеем $2^\theta<\Omega$ в M для каждого кардинала $\theta<\Omega$ модели M, так как Ω недостижим в M. Отсюда с помощью теоремы 3.15 гл. 8 нетрудно вывести $2^\theta<\Omega$ в $M[G_{\leqslant\lambda}]$ для каждого $\theta<\Omega$. Следовательно, Ω остается сильно недостижимым в $M[G_{\leqslant\lambda}]$, и множество $I\cap M[G_{\leqslant\lambda}]$ имеет мощность $<\Omega$ в $M[G_{\leqslant\lambda}]$. Дальше очевидно.

(г) Согласно (б) и леммам 21.2 и 21.3 можно подобрать такое $\lambda<\Omega$ и такое $\mathscr{P}_\lambda$-генерическое над M множество $F\subseteq\mathscr{P}_\lambda$, $F\in M[G]$, что $f\in M[F]$. Нетрудно проверить, что множество $h=\bigcup F\in M[F]$ будет биекцией ω на $\omega+\lambda$, причем

$$F=\{p\in\mathscr{P}_\lambda:\ p\subseteq h\}\in M[h],$$

и, следовательно, $f\in M[h]$. Теперь в качестве α возьмем характеристическую функцию множества $\{2^m\cdot3^k:\ h(m)<h(k)\}$. □

Следующая лемма выражает однородность ЧУ множества $\mathscr{P}$.

21.7. Лемма. *Пусть множество G является $\mathscr{P}$-генерическим над M, а замкнутая $\in$-формула φ содержит параметры только из M. Через φ^* обозначим результат замены в φ каждого параметра $x\in M$ соответствующим $\mathscr{P}$-термом x^*. Через $\Vdash$ обозначим вынуждение $\Vdash^{\mathscr{P}}_M$. Тогда $\varnothing\Vdash\varphi^*$, если и только если в $M[G]$ истинно φ.*

(Замечание. $\varnothing = 1_{\mathscr{P}}$ — наибольший элемент ЧУ множества $\mathscr{P}$.)

Доказательство. Импликация слева направо очевидна. Для доказательства справа налево предположим противное: в $M[G]$ истинно φ, но $\varnothing$ не вынуждает φ^*. Тогда, с одной стороны, по лемме 2.9 гл. 4 найдется такое $p \in G$, что $p \Vdash \varphi^*$. С другой стороны, в силу 2.10(i) гл. 4 найдется такое $q \in \mathscr{P}$, что $q \Vdash \neg\varphi^*$.

Построим порядковый автоморфизм H множества $\mathscr{P}$ такой, что $H(q)$ и p совместимы в $\mathscr{P}$. Для каждого $\mu < \Omega$ положим

$$m_\mu = \min\{\operatorname{dom} p_\mu,\ \operatorname{dom} q_\mu\} \quad (\in \omega).$$

Всякому $r \in \mathscr{P}$ сопоставим $H(r) \in \mathscr{P}$, заменив в r каждую тройку $\langle \mu, k, \nu\rangle$ тройкой $\langle \mu, k, \rho\rangle$, где

$$\rho = \begin{cases} q_\mu(k), & \text{если } k < m_\mu \text{ и } \nu = (r_\mu(k) =) p_\mu(k), \\ p_\mu(k), & \text{если } k < m_\mu \text{ и } \nu = q_\mu(k), \\ \nu & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $H \in M$ — искомый автоморфизм. При этом вынуждающее условие $H(q) \in \mathscr{P}$, будучи совместимым с p, не может вынуждать $\neg\varphi^*$.

Теперь докажем противоположное: $H(q) \Vdash \neg\varphi^*$. Рассмотрим произвольное $\mathscr{P}$-генерическое над M множество G_1, содержащее $H(q)$. Нетрудно проверить, что множество

$$G_2 = \{r \in \mathscr{P}:\ H(r) \in G_1\}$$

также будет $\mathscr{P}$-генерическим над M, причем $q \in G_2$ и $M[G_2] = M[G_1]$. Следовательно, по выбору q мы получим: в $M[G_1]$ истинно $\neg\varphi$, что и требовалось.

Итак, $H(q) \Vdash \neg\varphi^*$ — противоречие. □

21.8. Следствие («принцип абсолютности»). *Пусть замкнутая формула φ содержит параметры только из M. Тогда φ одновременно истинна или ложна во всех моделях вида $M[G]$, где G есть $\mathscr{P}$-генерическое над M множество.*

(Ниже этот результат будет существенно усилен.)

21.9. Следствие. *Пусть множество G является $\mathscr{P}$-генерическим над M, а $\varphi(x)$ есть формула с параметрами из M. Тогда множество*

$$X = \{\alpha \in I \cap M:\ \text{в } M[G] \text{ истинно } \varphi(\alpha)\}$$

принадлежит модели M.

Доказательство. $X = \{\alpha \in I \cap M:\ \varnothing \Vdash^{\mathscr{P}}_M \varphi^*(\alpha^*)\}$. □

22. Основная техническая теорема. Напомним, что Ω-модель M фиксирована. Фиксируем также $\mathscr{P}$-генерическое над M множество G. При исследовании модели Леви — Соловея $M[G]$ нам часто придется рассматривать $M[G]$ как генерическое расширение своих подмоделей вида $M[f]$, где $f \in M[G] \cap {}^\omega M$ (вообще говоря, $f \notin M$). Мы уже знаем, см. 21.6(в), что в этой ситуации $M[f]$ является Ω-моделью. Следующая «основная техническая теорема» показывает, что $M[G]$ будет $\mathscr{P}$-генерическим расширением модели $M[f]$, а не только модели M. (При этом, однако, само множество G вовсе не обязательно должно быть $\mathscr{P}$-генерическим над $M[f]$.)

22.1. Теорема. *Пусть $f \in M[G] \cap {}^\omega M$. Тогда найдется такое $\mathscr{P}$-генерическое над $M[f]$ множество $G_1 \subseteq \mathscr{P}$, что $M[G] = M[f][G_1]$.*

Доказательство. Согласно 21.6(б) найдется такое $\lambda < \Omega$, что $f \in M[G_{\leqslant\lambda}]$, а в силу 21.2 и 21.3 существует $\mathscr{P}_\lambda$-генерическое над M множество F такое, что $M[F] = M[G_{\leqslant\lambda}]$ и тем самым $f \in M[F]$. Зафиксируем $\mathscr{P}_\lambda$-терм $t \in M$ такой, что $f = I_F(t)$. Индукцией по $\mu \in \operatorname{On} \cap M$ введем множество $A_\mu \subseteq \mathscr{P}_\lambda$:

$$A_0 = \{p \in \mathscr{P}_\lambda:\ \textit{нет таких } k \in \omega \textit{ и } \gamma_1, \gamma_2 < \theta,\ \gamma_1 \neq \gamma_2, \textit{ что } f(k) = \gamma_1 \textit{ и } p \Vdash t(k^*) = \gamma_2^*\},$$

где через $\Vdash$ обозначено вынуждение $\Vdash^{\mathscr{P}_\lambda}_M$, выразимое в M, а

$$\theta = \sup\{f(k):\ k \in \omega\} \in \operatorname{On} \cap M.$$

$A_{\mu+1} = \{p \in A_\mu:$ *для каждого плотного в $\mathscr{P}_\lambda$ множества $D \in M$, $D \subseteq \mathscr{P}_\lambda$, найдется такое $q \in D \cap A_\mu$, что $q \leqslant p$*$\}$.

$A_\nu = \bigcap\limits_{\mu<\nu} A_\mu$ для предельных ординалов ν.

Построенная последовательность множеств A_μ, $\mu \in \operatorname{On} \cap M$, определима в $M[f]$ формулой, содержащей в качестве параметров только f и множества

$$c_1 = \{D \in M:\ D \subseteq \mathscr{P}_\lambda \textit{ плотно в } \mathscr{P}_\lambda\} \in M,$$

$$c_2 = \{\langle p, k, \gamma\rangle:\ \gamma < \theta \textit{ и } p \Vdash t(k^*) = \gamma^*\} \in M$$

($c_2 \in M$, так как вынуждение $\Vdash$ определимо в M). Но эта последовательность убывающая. Значит, найдется ординал $\mu_0 \in M$ такой, что $A_{\mu_0+1} = A_{\mu_0}$. Положим $\Sigma = A_{\mu_0}$.

Множество Σ играет фундаментальную роль в доказательстве. В конечном счете мы покажем, что F является Σ-генерическим над $M[f]$, после чего теорема элементарно получится из 21.5.

Докажем следующие свойства множества Σ:

(Σ1) $\Sigma \subseteq \mathscr{P}_\lambda$, $\Sigma \in M[f]$ *удовлетворяет условию леммы* 20.5.

(Σ2) $F \subseteq \Sigma$.

(Σ3) *Если множество $D \in M$ плотно в $\mathscr{P}_\lambda$, то $D \cap \Sigma$ плотно в Σ.*

(Σ4) *Если* $p \in \Sigma$, *то найдется такое* $\mathscr{P}_\lambda$*-генерическое над* M *множество* F_1, *что* $p \in F_1 \subseteq \Sigma$.

(Σ5) *Если множество* $F_1 \subseteq \Sigma$ *является* $\mathscr{P}_\lambda$*-генерическим над* M, *то* $I_{F_1}(t) = I_F(t) = f$.

(Σ6) *Множество* F *является* Σ*-генерическим над* $M[f]$ (!).

Единственным нетривиальным моментом в (Σ1) является отсутствие $\leqslant$-минимальных элементов у множества Σ. Пусть $p \in \Sigma$. Предположим противное: ни одно из $p^\wedge\gamma\ (\gamma < \lambda)$ не принадлежит $\Sigma = A_{\mu_0}$. ($p^\wedge\gamma = p \cup \{\langle m, \gamma\rangle\}$, где $m = \operatorname{dom} p$.) Рассуждая в M, для каждого $\gamma < \lambda$ находим плотное в $\mathscr{P}_\lambda$ множество $D_\gamma \in M$ такое, что $\forall q \in D \cap A_{\mu_0}(\neg\, q \leqslant p^\wedge\gamma)$. Положим

$$D = \{q\colon\ \exists\gamma < \lambda\,(q \leqslant p^\wedge\gamma \wedge q \in D_\gamma)\}.$$

Тогда $D \in M$ плотно в $\mathscr{P}_\lambda$, но нет таких $q \in D \cap A_{\mu_0}$, что $q \leqslant p$, что противоречит предположению $p \in \Sigma = A_{\mu_0+1}$.

Несложная проверка (Σ2) оставляется читателю. (Нужно индукцией по μ доказать $F \subseteq A_\mu$, используя генеричность F.)

(Σ3) очевидно из выбора μ_0.

Проверим (Σ4). В силу счетности модели M мы можем занумеровать все плотные в $\mathscr{P}_\lambda$ множества $D \in M$: $\{D_n\colon\ n \in \omega\}$. Теперь с помощью (Σ3) нетрудно построить последовательность

$$p \geqslant p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots$$

так, что каждое p_n принадлежит $D_n \cap \Sigma$. Множество

$$F_1 = \{r \in \Sigma\colon\ \exists n\,(r \geqslant p_n)\}$$

искомое.

Из определения A_0 нетрудно вывести (Σ5).

Наконец, докажем (Σ6). Достаточно доказать, что F непусто пересекается с произвольным плотным в Σ множеством $D \in M[f]$. Предположим противное: $F \cap D = \varnothing$.

Будучи элементом модели $M[F]$ (так как $f \in M[F]$), множество D имеет вид $D = I_F(d)$ для подходящего $\mathscr{P}_\lambda$-терма $d \in M$. Следующая лемма уточняет выбор терма d:

Лемма. *Найдется такой* $\mathscr{P}_\lambda$*-терм* $d \in M$, *что* $D = I_F(d)$, *и, кроме того, для любого* $\mathscr{P}_\lambda$*-генерического над* M *множества* F_1 *выполняется импликация*

$$I_{F_1}(t) = I_F(t) \to I_{F_1}(d) = I_F(d).$$

(Такие термы d будем называть *подчиненными* терму t.)

Доказательство леммы. Можно показать, что

$$M[f] = \bigcup \{\mathrm{L}[x, f]^{M[F]}\colon\ x \in M\}.$$

Таким образом, найдется такое $x \in M$, что в $M[F]$ истинно $D \in \mathrm{L}[x, f]$. Следовательно, существует ординал $\nu \in M$ такой,

что в $M[F]$ истинно $\varphi(x, \nu, f, D)$, где

$\varphi(x, \nu, f, D) \leftrightarrow$ (*D есть ν-й по счету элемент класса* $\mathrm{L}[x, f]$ *в смысле канонического полного упорядочения этого класса*).

Ясно, что $\varnothing$ (т. е. $\leqslant$-наибольший элемент ЧУ множества $\mathscr{P}_\lambda$) вынуждает $\exists!\ D\varphi(x^*, \nu^*, t, D)$. Поэтому, согласно теореме 2.14 гл. 4, существует $\mathscr{P}_\lambda$-терм $d \in M$ такой, что $\varnothing \Vdash \varphi(x^*, \nu^*, t, d)$. Мы предлагаем читателю убедиться, что этот терм искомый. □

Продолжим доказательство (Σ6). Зафиксируем даваемый леммой $\mathscr{P}_\lambda$-терм $d \in M$, подчиненный терму t и такой, что $D = I_F(d)$. Сделанное выше предположение противного влечет существование условия $q \in G$, вынуждающего $d \cap \bar{F} = \varnothing$, где

$$\bar{F} = \{\langle r, r\rangle\colon\ r \in \mathscr{P}_\lambda\}.$$

(Замечание. $I_F(\bar{F}) = F$ для любого $F \subseteq \mathscr{P}_\lambda$.) Согласно (Σ2) и выбору D мы можем подобрать условие $p \in D$ такое, что $p \leqslant q$, а благодаря (Σ4) существует $\mathscr{P}_\lambda$-генерическое над M множество $F_1 \subseteq \Sigma$, содержащее p. Из (Σ5) следует $I_{F_1}(t) = f$, и поэтому $I_{F_1}(d) = D$ по выбору терма d. С другой стороны, очевидно, $p \in F_1 = I_{F_1}(\bar{F})$. Таким образом $I_{F_1}(\bar{F}) \cap I_{F_1}(d)$ непусто, и, следовательно, условие p не может вынуждать пустоту $d \cap \bar{F}$. Но $p \leqslant q$, а q вынуждает $d \cap \bar{F} = \varnothing$ — противоречие. (Σ6) доказано.

Закончим доказательство теоремы 22.1. В силу доказанного утверждения (Σ6) F является Σ-генерическим над $M[f]$ множеством. Но $M[f][F] = M[F] = M[G_{\leqslant\lambda}]$ по выбору F, и поэтому множество $G_{>\lambda} = G \cap \mathscr{P}_{>\lambda}$ будет $\mathscr{P}_{>\lambda}$-генерическим над $M[F]$ вследствие леммы 21.2. Наконец, $\Sigma \in M[f]$ удовлетворяет условию леммы 20.5. Теперь теорема следует из леммы 21.4, применяемой к модели $M[f]$ (которая является Ω-моделью согласно 21.6(в)). □

Доказанная теорема влечет следствие, усиливающее 21.8.

22.2. Следствие. *Пусть замкнутая формула* φ *содержит только параметры из* M *и некоторый параметр* $f \in {}^\omega M$. *Тогда* φ *одновременно истинна или одновременно ложна во всех* $\mathscr{P}$*-генерических расширениях модели* M, *содержащих* f.

Доказательство. Этот результат можно получить, либо применяя 21.8 к модели $M[f]$ (применимость гарантируется 21.6(в) и теоремой 22.1), либо непосредственно из следующего утверждения:

22.3. Следствие. *Ко всякой формуле* $\varphi(x)$, *содержащей параметры только из* M, *можно подобрать формулу* $\varphi^+(x)$ *также с параметрами только из* M *такую, что для любого* $\mathscr{P}$*-гене-*

рического над M множества G и любого $f \in M[G] \cap {}^{\omega}M$ справедлива эквивалентность

(в $M[G]$ истинно $\varphi(f)$) $\leftrightarrow$ (в $M[f]$ истинно $\varphi^+(f)$).

Доказательство. Формула $\varphi^+(f) \leftrightarrow \varnothing \Vdash^{\mathscr{P}}_{M[f]} \varphi^*(f^*)$ будет искомой вследствие леммы 21.7, применяемой к модели $M[f]$ (применимость 21.7 обеспечивается 21.6(в) и теоремой 22.1). Записанная формула выразима в $M[f]$ согласно лемме 2.11 гл. 4 (эта лемма в достаточной степени «равномерна»). □

23. Свойства регулярности в первой модели Леви — Соловея. По-прежнему остаются фиксированными Ω-модель M и $\mathscr{P}$-генерическое над M множество $G \subseteq \mathscr{P}$. Начнем с определения класса множеств, для которых в модели $M[G]$ будут справедливы основные свойства регулярности.

23.1. Определение. Пусть K — произвольный класс. Множество X называется *K-определимым*, если существует формула $\varphi(x)$ с параметрами только из K такая, что $X = \{x\colon \varphi(x)\}$.

Предостережение. Совокупность всех K-определимых множеств не является, вообще говоря, «законной» совокупностью, т. е. классом. В частности, совокупность всех $\varnothing$-определимых, т. е. просто определимых, множеств классом заведомо не является. Однако справедлива следующая лемма:

23.2. Лемма. *Совокупность всех ${}^{\omega}$On-определимых множеств является классом.*

$({}^{\omega}\mathrm{On} = \{f\colon$ *f есть функция из ω в* On$\}$.)

Доказательство. Указанная совокупность определяется следующей $\in$-формулой со свободной переменной x:

$\exists \mu \in \mathrm{On}\, \exists f \in {}^{\omega}\mathrm{On}\, \exists \varphi\, (f \in V_\mu \wedge \varphi(-,-)$ *есть формула с двумя свободными переменными* $\wedge\, x = \{y \in V_\mu : V_\mu \Vdash \varphi(f, y)\})$.

Возможность выразить записанную формулу средствами языка ZF проверяется совершенно аналогично такому же факту о формуле $x = \mathrm{Def}(y)$, § 3 гл. 5. Более подробно см. Майхилл, Скотт [1].

Класс ${}^{\omega}$On-определимых множеств достаточно широк. Он содержит, в частности, все проективные множества и интуитивно совпадает с совокупностью всех множеств, «определимых с помощью счетного семейства условий» (в наиболее широком понимании).

Следующая теорема выражает основные свойства регулярности ${}^{\omega}$On-определимых множеств в модели Леви — Соловея $M[G]$.

23.3. Теорема. *В $M[G]$ истинны следующие утверждения:*

(а) (Соловей [2]) *Каждое ${}^{\omega}$On-определимое множество $\subseteq I$ измеримо по Лебегу.*

(б) (Шторн [2]) *Если $\rho < \omega_1^{M[G]}$, то каждая ${}^{\omega}$On-определимая последовательность попарно различных множеств класса $\mathbf{\Pi}^0_\rho$ имеет счетную длину.*

(в) (Леви, Соловей [1]) *Каждое ${}^{\omega}$On-определимое множество $\subseteq I$ является объединением ω_1 борелевских множеств.*

(г) (Соловей [2]) *Каждое несчетное ${}^{\omega}$On-определимое множество $\subseteq I$ содержит совершенное ядро.*

(д) (Леви [1]) *Каждое ${}^{\omega}$On-определимое полное упорядочение множества $\subseteq I$ имеет счетную длину.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующее

23.4. Замечание. Справедливо равенство $M \cap \mathrm{On} = M[G] \cap \mathrm{On}$, см. предложение 2.6 гл. 4. Поэтому каждое ${}^{\omega}$On-определимое в $M[G]$ множество $X \in M[G]$ будет и ${}^{\omega}M$-определимым в $M[G]$. Расширим модель M до модели M' присоединением всех параметров из ${}^{\omega}M$, входящих в формулу, определяющую X в $M[G]$. Тогда M' будет Ω-моделью вследствие 21.6(в), а $M[G]$ будет $\mathscr{P}$-генерическим расширением модели M' согласно 22.1. Наконец, X будет M'-определимым в $M[G]$. Таким образом, можно, не ограничивая общности, рассматривать в утверждениях (а)—(д) теоремы 23.3 лишь M-определимые в $M[G]$ множества, что мы и будем делать.

Доказательство утверждения (а). Рассуждаем в $M[G]$. В соответствии с 23.4 ограничимся доказательством измеримости множества $X = \{\alpha \in I\colon \varphi(\alpha)\}$, определимого (в $M[G]$) формулой $\varphi(\alpha)$, содержащей параметры только из M. Имеем

$$X = \{\alpha \in I\colon \text{ в } M[\alpha] \text{ истинно } \varphi^+(\alpha)\},$$

где φ^+ есть формула, даваемая следствием 22.3. Заметим, что совокупность $\mathscr{R}_M$ всех случайных над M точек $\alpha \in I$ имеет меру 1 (в $M[G]$), так как $M \cap I$ счетно в силу 21.6(в). Теперь нужно провести доказательство леммы 18.4 для M вместо $\mathrm{L}[\lambda]$, и получится искомый результат об измеримости множества X. □

Замечание. Строго говоря, M не является в общем случае классом в $M[G]$, что делает данное доказательство (в ссылке на рассуждения 18.4) не вполне корректным. Однако можно проверить, что $M[G]$ является моделью теории ZFCM, получающейся из ZFC разрешением употреблять унарный предикат $M(x)$, интерпретирующийся как $x \in M$, в формулах аксиом выделения и подстановки (Соловей [2], с. 5—7). Таким образом, мы можем все-таки обращаться с M как с классом в $M[G]$.

Доказательство утверждения (б). Рассуждаем в $M[G]$. Для каждого $\lambda < \Omega\,(= \omega_1^{M[G]})$ определим индукцией по λ ординал $\omega(\lambda)$ следующим образом: $\omega(0) = \omega$, $\omega(\lambda + 1) = (2^{\omega(\lambda)})^M$, и $\omega(\lambda) = \sup_{\mu < \lambda} \omega(\mu)$ для предельных λ. Последова-

тельность $\langle \omega(\lambda)\colon \lambda < \Omega\rangle$ монотонно стремится к Ω. Если в M верна обобщенная континуум-гипотеза, то $\omega(\lambda) = \omega_\lambda^M$ для всех $\lambda < \Omega$.

Для каждого $\lambda < \Omega$ через C_λ обозначим совокупность борелевских кодов (см. п. 16) $\langle T, d\rangle$, удовлетворяющих следующим условиям: $\langle T, d\rangle \in M$, $|T| \leqslant \lambda$, и $\mu < \omega(|\sigma|_T)$ всякий раз, когда $\sigma^\frown\mu \in T$. (Ср. с определением C_λ в п. 16.) Каждое множество C_λ принадлежит M и имеет мощность $\omega(\lambda+1)$ в M, т. е. счетно в $M[G]$. Поэтому для доказательства утверждения (б) достаточно (с учетом замечания 23.4) доказать следующую лемму, являющуюся аналогом леммы 16.3:

23.5. Лемма. *В $M[G]$ истинно: если $\rho < \omega_1^M$ и множество $X \subseteq I$ является M-определимым и принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$, то найдется такой код $\langle T, d\rangle \in C_\rho$, что $X = [T, d]$.*

Доказательство этой леммы полностью повторяет доказательство 16.3. Нужно внести лишь следующие изменения. Вместо универсума V всех множеств (или модели M в начале доказательства 16.3) нужно рассматривать модель $M[G]$. Вместо класса L (или L^M в начале доказательства 16.3) рассматривается модель M. Вместо ЧУ множества P_ν используется ЧУ множество $\mathscr{P}$. Вместо P_ν-генерических расширений универсума V (или модели M в начале доказательства 16.3) нужно рассмотреть $\mathscr{P}$-генерическое расширение модели $M[G]$. (Такое расширение, и это очень важно, будет также и $\mathscr{P}$-генерическим расширением модели M и любой модели вида $M[\alpha]$, где $\alpha \in I \cap M[G]$, согласно 22.1 и 21.5.) Наконец, вместо принципа абсолютности 10.3 и леммы 11.7 нужно использовать 21.8 и 22.2. Подробное доказательство леммы 23.5 мы оставляем читателю. □

Доказательство утверждения 23.3(в). Подобно доказательствам (а) и (б), ограничимся рассмотрением M-определимых множеств и докажем следующую лемму, дающую даже более сильный результат.

23.6. Лемма. *В $M[G]$ истинно: Каждое M-определимое множество $X \subseteq I$ является объединением ω_1 борелевских множеств, являющихся также M-определимыми.*

Доказательство леммы (в $M[G]$). Пусть $X = \{\alpha\colon \varphi(\alpha)\}$, причем формула φ содержит параметры только из M. Пусть $\varphi^+(\alpha)$ есть формула, даваемая следствием 22.3 для нашей формулы φ. Дадим такие определения для каждого $\lambda < \Omega$:

$$\Vdash_\lambda \text{ есть вынуждение } \Vdash_M^{\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}};$$

$$T_\lambda = \{t \in M\colon t \subseteq \mathscr{P}_{\leqslant\lambda} \times (\omega \times \omega)\};$$

$\psi_\lambda(\alpha)$ — результат замены в формуле $\varphi^+(\alpha)$ каждого параметра $x \in M$ соответствующим $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$-термом $x^* = \mathscr{P}_{\leqslant\lambda} \times x$;

$$C_\lambda = \{\langle p, t\rangle\colon p \in \mathscr{P}_{\leqslant\lambda} \wedge t \in T_\lambda \wedge p \Vdash_\lambda (\textit{в } M[t] \textit{ истинно } \psi_\lambda(t))\};$$

$$\mathrm{Den}_\lambda = \{Q \in M\colon Q \subseteq \mathscr{P}_{\leqslant\lambda} \textit{ плотно в } \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}\};$$

$$\mathrm{Gen}_\lambda = \{F \subseteq \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}\colon F \textit{ является } \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}\textit{-генерическим над } M\};$$

$$Y_\lambda = \{I_F(t)\colon F \in \mathrm{Gen}_\lambda \wedge \exists p \in F\, (\langle p, t\rangle \in C_\lambda)\}.$$

Последовательности множеств ψ_λ, T_λ, $\mathrm{Den}_\lambda (\lambda < \Omega)$, очевидно, принадлежат M. То же справедливо и для последовательности $\langle C_\lambda\colon \lambda < \Omega\rangle$ в силу леммы 2.11 гл. 4. Последовательность $\langle \mathrm{Gen}_\lambda\colon \lambda < \Omega\rangle$ является M-определимой; в ее определении фигурируют в качестве параметров последовательности множеств $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ и Den_λ. Стало быть, последовательность $\langle Y_\lambda\colon \lambda < \Omega\rangle$ также M-определима (все в $M[G]$). Докажем следующие две леммы:

23.7. Лемма. $X = \bigcup\limits_{\lambda<\Omega} Y_\lambda$.

23.8. Лемма. *Каждое Y_λ является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством в $M[G]$.*

Доказательство леммы 23.7 (в $M[G]$). Пусть $\alpha \in X$, т. е. $\alpha \in I$ и истинно $\varphi(\alpha)$. В силу 21.6(б) найдется такое $\lambda < \Omega$, что $\alpha \in M[F]$, где $F = G_{\leqslant\lambda} = G \cap \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ является $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$-генерическим над M множеством согласно 21.2. Далее, поскольку $\alpha \subseteq \omega \times \omega$, то найдется такой терм $t \in T_\lambda$, что $\alpha = I_F(t)$. По выбору формулы φ^+ в $M[\alpha]$ истинно $\varphi^+(\alpha)$. Таким образом, в $M[F]$ истинно:

$(\textit{в } M[I_F(t)] \textit{ истинно } \varphi^+(I_F(t)))$.

Значит, существует вынуждающее условие $p \in F$ такое, что

$$p \Vdash_\lambda (\textit{в } M[t] \textit{ истинно } \psi_\lambda(t)).$$

(Замечание. Мы можем элиминировать $M[t]$ из вынуждаемой формулы двумя путями: либо предположим, что в M истинно $\mathrm{V} = \mathrm{L}[x]$ для некоторого $x \in M$, и заменим $M[t]$ на $\mathrm{L}[x^*, t]$, либо разрешим вводить в вынуждаемые формулы специальный унарный предикат $M(x)$, интерпретирующийся как $x \in M$, и заменим $M[t]$ на $\{x\colon M(x)\}[t]$. См. замечание после доказательства утверждения (а) выше.)

Теперь $\alpha \in Y_\lambda$ очевидно.

Обратное включение доказывается аналогично. □

Доказательство леммы 23.8 (в $M[G]$). Множество $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ имеет мощность $< \Omega$ в M и поэтому счетно в $M[G]$. Значит, пространство $S = \{F\colon F \subseteq \mathscr{P}_{\leqslant\lambda}\}$ (с топологией $2^{\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}}$; топология $\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ дискретна) гомеоморфно канторову дисконтинууму $2^\omega \subseteq I$. Множество Den_λ также счетно. Отсюда нетрудно вывести, что $\mathrm{Gen}_\lambda \subseteq S$ является борелевским в S, и множество

$$\mathrm{Gen}_\lambda(p) = \{F \in \mathrm{Gen}_\lambda\colon p \in F\}$$

также борелевское в пространстве S при любом $p \in \mathscr{P}_{<\lambda}$. Аналогично при любом $t \in T_\lambda$ отображение $F \mapsto I_F(t)$ суть борелевская функция из S в I. Поэтому ее образ

$$Y_{pt} = \{I_F(t)\colon\ p \in F \in \mathrm{Gen}_\lambda\}$$

на множестве $\mathrm{Gen}_\lambda(p)$ является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством в I. Наконец отметим, что $Y_\lambda = \bigcup\{Y_{pt}\colon \langle p, t\rangle \in C_\lambda\}$, а множество C_λ счетно (в $M[G]$). □

Доказав леммы 23.7 и 23.8, закончим доказательство 23.6 утверждения 23.3 (в). Согласно доказанным леммам и 21.6 (а) наше множество X является в $M[G]$ объединением ω_1 M-определимых $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств Y_λ. Теперь используем лемму 2.22 гл. 4. □

Доказательство утверждения 23.3 (г). Рассуждаем в $M[G]$. В соответствии с 23.4 рассмотрим несчетное M-определимое (в $M[G]$) множество $X \subseteq I$ и докажем, что оно содержит совершенное ядро. Согласно лемме 23.6 мы имеем $X = \bigcup\limits_{\lambda<\Omega} X_\lambda$, где каждое множество X_λ борелевское и является M-определимым. Далее, раз X несчетно, то из 21.6 (в) следует $X \notin M$, т. е. некоторое $X_\lambda \notin M$. Докажем следующую лемму:

23.9. Лемма. *В $M[G]$ истинно: каждое счетное M-определимое множество $Y \subseteq I$ включено в M.*

Доказательство леммы (в $M[G]$). Согласно 23.5 найдется такой код $\langle T, d\rangle \in C_1$, что $Y = I - [T, d]$. По определению C_λ мы имеем $T, d \in M$ и $|T| \leqslant 1$. Следовательно, в соответствии с определением $[T, d]$ (см. п. 16) найдется такое множество $u \in M$, $u \subseteq I$, что $Y = \bigcup\limits_{\beta \in u} Z_\beta$. При этом каждое Z_β счетно (в $M[G]$), так как Y счетно. Поэтому для каждого $\beta \in I$ выполняется включение $Z_\beta \subseteq \Delta^{1,\beta}_1$ согласно 4.11. Отсюда вытекает $Z_\beta \subseteq M$ и $Z_\beta \in M$. Теперь лемма очевидна. □

Вернемся к доказательству утверждения 23.3 (г). По доказанной лемме имеем: наше X_λ несчетно. Значит, X_λ содержит совершенное ядро, будучи борелевским множеством. □

Доказательство последнего утверждения 23.3 (д) тривиально: если существует полное $^\omega$On-определимое упорядочение с несчетной областью $\subseteq I$, то существует и $^\omega$On-определимая строго возрастающая последовательность счетных множеств $\subseteq I$, что противоречит уже доказанному 23.3 (б).

24. Счетнозначные множества в первой модели Леви—Соловея. По-прежнему остаются фиксированными Ω-модель M и $\mathscr{P}$-генерическое над M множество $G \subseteq \mathscr{P}$. Структурная теория модели Леви — Соловея разработана в гораздо меньшей степени, чем теория свойств регулярности. Докажем следующие две теоремы, имеющие отношение к счетнозначным множествам:

24.1. Теорема. *Предположим, что в M истинна аксиома конструктивности $\mathrm{V} = \mathrm{L}$. Тогда в $M[G]$ истинно утверждение: существует счетнозначное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных $^\omega$On-определимых множеств.*

24.2. Теорема. *Пусть в M истинна аксиома $\mathrm{V} = \mathrm{L}$. Тогда в $M[G]$ истинно утверждение: всякое счетнозначное $^\omega$On-определимое множество $P \subseteq I^2$ можно вложить в счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество.*

Первая теорема показывает, что при любом $n \geqslant 2$ предложения 7.4 и 7.6 ложны в модели $M[G]$, причем в весьма сильной форме. Вторая теорема показывает, что при любом $n \geqslant 3$ предложение 7.5 истинно в $M[G]$, причем также в сильной форме.

Доказательство теоремы 24.1 (в $M[G]$). Построим сначала $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $U \subseteq I^2$ с указанным свойством. Таким является множество

$$U = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon\ \alpha, \beta \in I \wedge \beta \in \mathrm{L}[\alpha]\}.$$

Оно принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_2$ в силу 9.4. Счетнозначность U следует из 21.6 (в) и равенства $M[\alpha] = \mathrm{L}[\alpha]$ (в $M[G]$), которое для каждого $\alpha \in I \cap M[G]$ вытекает из предположения $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ в M. Покажем, что U не является (в $M[G]$) объединением счетного числа однозначных $^\omega$On-определимых множеств.

Предположим противное: $U = \bigcup\limits_{m<\omega} P_m$, где каждое $P_m \subseteq I^2$ однозначно и $^\omega$On-определимо. Докажем, что множество

$$W = \{\langle m, \alpha, \beta\rangle\colon\ P_m(\alpha, \beta)\}$$

также будет $^\omega$On-определимым. Используя рассуждения из доказательства леммы 23.2, мы можем построить последовательности

$\langle \varphi_m(f, x)\colon\ m \in \omega\rangle$ формул $\varphi_m(f, x)$ без параметров;

$\langle f_m\colon\ m \in \omega\rangle$ параметров $f_m \in {}^\omega\mathrm{On}$;

$\langle \varkappa_m\colon\ m \in \omega\rangle$ ординалов $\varkappa_m$

так, чтобы $P_m = \{x \in \mathrm{V}_{\varkappa_m}\colon$ *в* $\mathrm{V}_{\varkappa_m}$ *истинно* $\varphi_m(f_m, x)\}$ для всех m. Все эти три последовательности можно вполне эффективно закодировать (в $M[G]$) подходящим $g \in {}^\omega\mathrm{On}$ (формулы заменяются гёделевыми номерами). После этого построение формулы с параметром g, определяющей (в $M[G]$) множество W, с помощью материала § 3 гл. 5 не представляет затруднений.

Продолжаем доказательство теоремы 24.1. По доказанному и в силу 21.6 (г) найдется $\pi \in I\,(\cap M[G])$ такое, что множество

W является $M[\pi]$-определимым. Рассмотрим множество

$$F = \{\langle m, \beta\rangle\colon W(m, \pi, \beta)\}.$$

Оно является $M[\pi]$-определимой функцией из некоторого $u \subseteq \omega$ в I. Используя 21.9 для модели $M[\pi]$ вместо M (см. замечание 23.4) через посредство «свертки» F в некоторое $\gamma \in I$, нетрудно проверить $F \in M[\pi]$. Стало быть, множество

$$\operatorname{ran} F = \{\beta\colon \exists m\,(F(m) = \beta)\} = \{\beta\colon \exists m P_m(\pi, \beta)\}$$
$$= \{\beta\colon P(\pi, \beta)\} = I \cap \mathrm{L}[\pi] = I \cap M[\pi]$$

принадлежит $M[\pi]$ и счетно в $M[\pi]$ — противоречие с теоремой Кантора.

Итак, счетнозначное Σ^1_2-множество U не является (в $M[G]$) объединением счетного числа однозначных $^\omega$On-определимых множеств. Теперь построение Π^1_1-множества с такими же свойствами проходит совершенно аналогично доказательству теоремы 5.4. □

Доказательство теоремы 24.2 (в $M[G]$). Рассмотрим счетнозначное $^\omega$On-определимое множество $P \subseteq I^2$. Аналогично доказательству предыдущей теоремы найдется $\pi \in I$ такое, что P будет $M[\pi]$-определимым, а множество

$$Q = \{\langle \alpha, \beta\rangle\colon \alpha, \beta \in I \text{ и } \beta \in \mathrm{L}[\pi, \alpha]\}$$

счетнозначно и принадлежит классу $\Sigma^{1,\pi}_2$. Остается проверить $P \subseteq Q$. Пусть $\langle \alpha, \beta\rangle \in P$. Тогда β принадлежит счетному $M[\pi, \alpha]$-определимому (в $M[G]$) множеству $\{\beta\colon P(\alpha, \beta)\}$. Значит, по лемме 23.9, применяемой к $M[\pi, \alpha]$ вместо M (применимость обеспечивается с помощью 22.1 и 21.6 (в), см. 23.4), имеем $\beta \in M[\pi, \alpha] = \mathrm{L}[\pi, \alpha]$. Это и дает $\langle \alpha, \beta\rangle \in Q$. □

25. Вторая модель Леви — Соловея. Как мы видели, в первой модели Леви — Соловея основные свойства регулярности справедливы для класса $^\omega$On-определимых множеств включающего, в частности, все проективные множества. Можно ли построить модель, в которой эти свойства регулярности были бы справедливы для всех множеств вообще? Разумеется нельзя, если мы хотим остаться на базе теории множеств ZFC с «полной» аксиомой выбора (это показывает хотя бы пример неизмеримого множества § 3 гл. 2). Однако если мы согласимся ограничиться в наших требованиях к базисной теории множеств *аксиомой зависимого выбора* DC (т. е. Γ-DC$_\omega$, где $\Gamma = \{X\colon X \subseteq I^2\}$, в терминах п. 6), то искомую модель удается построить, слегка преобразовав первую модель Леви — Соловея.

Пусть, как и выше, множество G является $\mathscr{P}$-генерическим над Ω-моделью M. Мы знаем, что в первой модели $M[G]$ класс всех $^\omega$On-определимых множеств обладает интересующими нас

свойствами. Идея построения второй модели Леви — Соловея состоит в том, чтобы взять в нее из $M[G]$ лишь $^\omega$On-определимые множества (точнее, некоторую их часть).

Множество x называется *наследственно* $^\omega$On-*определимым*, если само x, элементы x, элементы элементов x и т. д. являются $^\omega$On-определимыми множествами.

Совокупность N всех наследственно $^\omega$On-определимых в $M[G]$ множеств $x \in M[G]$ назовем *второй* моделью Леви — Соловея (см. Соловей [2]).

25.1. Теорема. *N есть счетная транзитивная модель теории* ZF + DC, *в которой истинны следующие предложения*:

(а) (Соловей [2]) *Каждое множество $\subseteq I$ измеримо.*

(б) (Штерн [2]) *Если $\rho < \omega_1^N$, то каждая последовательность попарно различных $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-множеств имеет счетную длину.*

(в) (Леви, Соловей [1]) *Каждое множество $\subseteq I$ является объединением ω_1 борелевских множеств.*

(г) (Соловей [2]) *Каждое несчетное множество $\subseteq I$ содержит совершенное подмножество.*

(д) (Леви [1]) *Не существует полных упорядочений с несчетной областью $\subseteq I$.*

Если, кроме того, в M истинна аксиома конструктивности, то в N истинны следующие предложения:

(е) *Существует счетнозначное Π^1_1-множество $\subseteq I^2$, не являющееся объединением счетного числа любых однозначных множеств.*

(ж) *Каждое счетнозначное множество $\subseteq I^2$ можно вложить в счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество.*

Доказательство. N является классом в $M[G]$ вследствие 23.2. Поэтому в N истинны все аксиомы ZF. (Эти аксиомы, если отправляться от наследственно $^\omega$On-определимых множеств, приводят снова к таким же множествам.) Далее, используя идею проверки $^\omega$On-определимости множества W в доказательстве теоремы 24.1, нетрудно убедиться, что всякая функция $f\colon \omega \to N$, $f \in M[G]$, принадлежит модели N. Поэтому в N истинна DC.

Докажем утверждение (а) в N. Пусть $X \in N$, $X \subseteq I$. Тогда $X \in M[G]$ и X является $^\omega$On-определимым множеством в $M[G]$. Значит, X измеримо в $M[G]$ согласно 23.3 (а). Факт измеримости выражается существованием таких γ, $\delta \in I$, что $U_\gamma \subseteq X$, $U_\delta \cap X = \varnothing$, и сумма мер Лебега множеств U_γ и U_δ равна 1. Но $I \cap M[G] = I \cap N$, а указанное соотношение, связывающее X, γ и δ, абсолютно для перехода из $M[G]$ в N.

Доказательство остальных утверждений аналогично. □

Более подробно о моделях Леви — Соловея см. Леви [1], Соловей [2], Йех [1], Леви и Соловей [1].

26. О разбиениях континуума на ω_1 борелевских множеств. В этом пункте речь пойдет о предложении Г-Part: существует разбиение пространства I на ω_1 непустых множеств класса Г.

Лузин и Серпинский [2] доказали Δ^1_1-Part, но их разбиение заведомо не давало $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-Part ни для какого ординала $\rho < \omega_1$ (Лузин [6]). Предложение $\exists\rho(\mathbf{\Pi}^0_\rho\text{-Part})$ недоказуемо в ZF в силу теоремы 25.1 (б). Однако, в отличие от предложения 25.1 (б), предложение $\exists\rho(\mathbf{\Pi}^0_\rho\text{-Part})$ имеет смысл и в присутствии аксиомы выбора. Проблема о справедливости последнего предложения поставлена Лузиным [1] и названа им «узкой проблемой континуума».

Решение этой проблемы было получено Хаусдорфом [2] (см. также Серпинский [1]), доказавшим $\mathbf{\Pi}^0_3$-Part в ZFC. (Фактически, Хаусдорф построил строго возрастающую последовательность $\mathbf{\Pi}^0_2$-множеств, объединение которых совпадает с I.) Можно ли улучшить этот результат?

Штерн [1] доказал, что предложение $\mathbf{\Pi}^0_1$-Part не противоречит теории ZFC + ¬CH, а $\mathbf{\Sigma}^0_2$-Part не выводимо в ZFC. Открытой проблемой остается доказательство непротиворечивости отрицания $\mathbf{\Pi}^0_2$-Part и даже отрицания $\mathbf{\Sigma}^0_3$-Part. Отметим, что в предположении континуум-гипотезы CH все предложения Г-Part имеют тривиальный характер.

§ 5. Генерические расширения с помощью «почти дизъюнктных множеств»

Мы видели, что множество достаточно простых проективных классов не могут иметь слишком необычные свойства. Так, каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество измеримо и обладает свойством совершенного ядра (п. 1), каждое $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество имеет мощность либо $\leqslant\omega_1$, либо ровно 2^ω (следствие 3.15 гл. 8), каждое полное $\mathbf{\Sigma}^1_2$-упорядочение имеет длину $<\omega_2$ (п. 17), каждое $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество $\subseteq\omega$ конструктивно (п. 14) и т. п. Естественный вопрос: можно ли построить контрпримеры в следующем по сложности проективном классе? Конструктивный универсум образует модель с неизмеримым Δ^1_2-множеством, а также с несчетным $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством, не содержащим совершенное ядро. Но в L, конечно, нет полных упорядочений длины $\geqslant\omega_2$ множеств $\subseteq I$, неконструктивных точек $\in I$ и т. п.

Одной из первый генерических моделей была модель, в которой континуум 2^ω имел «произвольную» мощность, например, $2^\omega = \omega_{17}$ (см. гл. 4). В этой модели, очевидно, существуют неконструктивные точки $\in I$, множества $\subseteq I$ любой мощности $\leqslant\omega_{17}$ и полные упорядочения этих множеств. Вопрос состоял в том, чтобы «проективизировать» такие контрпримеры, т. е. сделать соответствующие множества проективными. С начала 70-х годов разработано несколько методов такой проективизации: метод «почти дизъюнктных множеств» (Йенсен, Соловей [1]; Мартин, Соловей [1]; Харрингтон [2]; Кановей [3]); метод Йенсена [1]; метод кодировки с помощью специальных деревьев (Йенсен, Юнсбротен [1]; Харрингтон [2]); метод кодировки с помощью степеней конструктивности. Каждый из этих методов имеет свои особенности и границы применения. Весьма плодотворный метод «почти дизъюнктных множеств» состоит в том, что определимость некоторого множества достигается соответствующей организацией других множеств. Напротив, определимость методом Йенсена [1] носит «внутренний» характер. Кановей [1], [2] модифицировал метод Йенсена для построения моделей, содержащих те или иные контрпримеры на данном проективном уровне n, но не содержащих контрпримеров такого же вида на уровнях $<n$. Метод кодировки с помощью специальных деревьев хорош тем, что дает кодировку, сохраняющуюся во всех P-генерических расширениях, если ЧУ множество P удовлетворяет у. с. ц.

В этом параграфе представлены простые приложения метода «почти дизъюнктных множеств»: построение генерических расширений, в которых данное множество из исходной модели принадлежит некоторому проективному классу, и построение моделей, содержащих полные $\mathbf{\Pi}^1_2$-упорядочения длины $\geqslant\omega_2$. О более сложных приложениях этого и других методов см. указанную литературу.

27. Как сделать данное множество $\subseteq I$ определимым в подходящем генерическом расширении? Мы имеем в виду следующую ситуацию. Пусть множество $Y\subseteq I$ принадлежит некоторой СТМ M. Можно ли построить генерическое расширение N модели M, в котором Y принадлежало бы данному проективному классу? Чтобы исключить тривиальные возможности, потребуем, чтобы кардиналы модели M сохранялись в N. (Иначе можно было бы расширить M с помощью генерической функции из ω на Y; Y окажется счетным и, следовательно, $\mathbf{\Sigma}^0_2$-множеством в таком расширении.) При таком ограничении мы уже не можем, вообще говоря, построить сохраняющее кардиналы генерическое расширение N модели M так, чтобы $Y\in\mathbf{\Sigma}^1_2$ в N. В самом деле, возьмем M и Y так, чтобы $\omega_2 < 2^\omega$ в M и $\omega_1 < \operatorname{card} Y < 2^\omega$ в M. Последнее неравенство выполняется и в любом сохраняющем кардиналы генерическом расширении N модели M, что препятствует Y быть $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеством в таком

расширении ввиду того, что в силу теоремы 2.23 гл. 8 каждое Σ^1_2-множество имеет мощность 2^ω или $\leqslant\omega_1$.

Однако справедлива следующая теорема (Харрингтон [2]):

27.1. Теорема. *Если $Y\in M$, $Y\subseteq I$ и в M истинно $\omega_1=\omega_1^L$, то найдется сохраняющее кардиналы генерическое расширение N модели M вида $N=M[s]$, где $s\subseteq\mathrm{Seq}$ таково, что в N истинно $Y\in\Pi^{1,s}_2$.*

Доказательство этой теоремы составляет содержание п. 27. Начнем со следующего определения.

27.2. Определение. Пусть $\alpha\in I$, $s\subseteq\mathrm{Seq}$ (Seq есть совокупность всех конечных последовательностей натуральных чисел) и $k\in\omega$. Пишем, что *s покрывает α выше k*, если найдется такое $l>k$, что $\alpha\restriction l\in s$. Пишем, что *$s$ покрывает α*, если s покрывает α выше любого $k\in\omega$. В противном случае пишем, что *s не покрывает α*.

Каждому множеству $U\subseteq I$ сопоставим совокупность $P(U)$ всех пар $p=\langle s^p, X^p\rangle$, удовлетворяющих таким условиям:

(1) $s^p\subseteq\mathrm{Seq}$ конечно;

(2) $X^p\subseteq\omega\times U$ конечно;

(3) если $\langle k,\alpha\rangle\in X^p$, то s^p не покрывает α выше k.

Упорядочим $P(U)$ следующим образом:

$$p\leqslant q\leftrightarrow s^q\subseteq s^p\wedge X^q\subseteq X^p.$$

Пусть $\langle U_\mu\colon \mu<\lambda\rangle$ — последовательность множеств $U_\mu\subseteq I$. Через $\bigoplus_{\mu<\lambda}P(U_\mu)$ обозначим совокупность всех функций p таких, что $\mathrm{dom}\,p\subseteq\lambda$ конечно и $p(\mu)\in P(U_\mu)$ для каждого $\mu\in\mathrm{dom}\,p$. Множество $\bigoplus_{\mu<\lambda}P(U_\mu)$ упорядочивается покомпонентно:

$$p\leqslant q\leftrightarrow \mathrm{dom}\,q\subseteq\mathrm{dom}\,p\wedge\forall\mu\in\mathrm{dom}\,q\,(p(\mu)\leqslant q(\mu)).$$

В частном случае, когда все U_μ совпадают с некоторым U, вместо $\bigoplus_{\mu<\lambda}P(U_\mu)$ будем писать $\bigoplus_\lambda P(U)$.

Замечание. В нашем изложении метода «почти дизъюнктных множеств» такими множествами являются множества $s_\alpha=\{\alpha\restriction k\colon k\in\omega\}$, где $\alpha\in I$. Ясно, что $S_\alpha\cap S_\beta$ конечно при $\alpha\neq\beta$, и $s\subseteq\mathrm{Seq}$ покрывает $\alpha\in I$, если и только если $s\cap s_\alpha$ бесконечно. Классическое изложение (Йенсен, Соловей [1], Харрингтон [2]) оперирует, по сути дела, с множествами вида $b''s_\alpha$, где $\alpha\in I'$, а b: Seq на ω — каноническая биекция, в то время как мы работаем с самими $\alpha\in I$.

27.3. Лемма. *Всякое множество вида $\bigoplus_{\mu<\lambda}P(U_\mu)$ удовлетворяет у. с. ц.*

Доказательство. Покажем, что множество $P(U)$ удовлетворяет у. с. ц. Заметим, что если $p, q\in P(U)$ таковы, что

$s^p=s^q$, то p и q совместимы в $P(U)$, так как $r=\langle s^p, X^p\cup X^q\rangle$ принадлежит $P(U)$ и $r\leqslant p, q$. Но множество $\{s^p\colon p\in P(U)\}$ счетно. Отсюда и следует у. с. ц. для $P(U)$. Совершенно аналогично любое произведение *конечного* числа множеств вида $P(U)$ удовлетворяет у. с. ц. Этого достаточно для доказательства леммы в силу теоремы 5.8 гл. 3. □

Доказанная лемма даст нам сохранение кардиналов, а следующая лемма дает основное свойство кодировки, присущее генерическим расширениям с помощью ЧУ множеств вида $P(U)$:

27.4. Лемма. *Пусть $U\in M$, $U\subseteq I$, и множество $G\subseteq P(U)$ является $P(U)$-генерическим над M. Положим $s=\bigcup\{s^p\colon p\in G\}$. Тогда $M[G]=M[s]$, и для любого $\alpha\in I\cap M$ справедлива следующая эквивалентность:*

$$\alpha\in U\leftrightarrow s\text{ не покрывает }\alpha.$$

Доказательство. $s\in M[G]$ очевидно, а $G\in M[s]$ выполняется в силу следующего равенства, проверку которого мы опускаем:

$G=\{p\in P(U)\colon$ $s^p\subseteq s$ *и пара* $\langle s, X^p\rangle$ *удовлетворяет требованию* 27.2(3)$\}$.

Пусть $\alpha\in U$. Покажем, что множество

$$D=\{p\in P(U)\colon \exists k\,(\langle k,\alpha\rangle\in X^p)\}$$

плотно в $P(U)$. Пусть $q\in P(U)$; построим такое $p\in D$, что $p\leqslant q$. Множество s^p конечно; пусть $k\in\omega$ таково, что $\mathrm{dom}\,h<k$ для всех $h\in s^p$. Тогда пара $p=\langle s^q, X^q\cup\{\langle k,\alpha\rangle\}\rangle$ принадлежит $P(U)$; при этом $p\leqslant q$ и $p\in D$. Итак, D в самом деле плотно в $P(U)$. Поэтому $D\cap G\neq\varnothing$ в силу генеричности G. Пусть $p\in D\cap G$, и пусть $\langle k,\alpha\rangle\in X^p$. Покажем, что s не покрывает α выше k.

Предположим противное: $l>k$ и $\alpha\restriction l\in s$. Тогда $\alpha\restriction l\in s^q$ для некоторого $q\in G$. В силу генеричности G найдется $r\in G$ такое, что $r\leqslant p, q$. Имеем $\alpha\restriction l\in s^r$, $\langle k,\alpha\rangle\in X^r$ и $l>k$, что противоречит определению 27.2(3).

Обратно, пусть $\alpha\in M\cap I$, но $\alpha\notin U$. Покажем, что, каково бы ни было $k\in\omega$, следующее множество D_k плотно в $P(U)$:

$$D_k=\{p\in P(U)\colon s^p\text{ покрывает }\alpha\text{ выше }k\}.$$

Пусть $q\in P(U)$. Множество $B=\{\beta\in I\colon \exists l\,(\langle l,\beta\rangle\in X^q)\}\subseteq U$ конечно и не содержит α. Поэтому найдется $l\geqslant k$ такое, что $\alpha\restriction l\neq\beta\restriction l$ для всех $\beta\in B$. Положим $p=\langle s^q\cup\{\alpha\restriction l\}, X^q\rangle$ и получим $p\in D$ и $p\leqslant q$.

Таким образом, G непусто пересекается с каждым D_k, откуда следует, что s покрывает α выше любого $k\in\omega$. □

Мы видим, что в генерическом расширении $M[s]$, даваемом леммой 27.4, множество U имеет вид $U=M\cap I\cap F$, где мно-

жество $F = \{\alpha \in I$: s *не покрывает* $\alpha\}$ принадлежит борелевскому классу $\Pi^{0,s}_2$ (т. е. классу $\Pi^{0,\pi}_2$, где $\pi \in I$ — характеристическая функция множества $b''s$, а b — каноническая биекция Seq на ω). Если теперь ввести предположение, гарантирующее определимость $M \cap I$ в $M[s]$, то получится соответствующая определимость U в $M[s]$. Если, скажем, предположить, что в M истинна аксиома конструктивности $V = L$, то $M = L^{M[s]}$, и поэтому $I \cap M \in \Sigma^{1}_{2}$ в $M[s]$ согласно 9.4. То же самое будет, если мы предположим, что $U \subseteq I \cap L$ в M. Итак, мы получили

27.5. Следствие. *Если в условии леммы* 27.4 *в* M *истинно* $U \subseteq I \cap L$, *то в* $M[s]$ *истинно* $U \in \Sigma^{1,s}_{2}$.

27.6. Замечание. Утверждение 27.5 можно доказать и в случае, когда U имеет мощность $\leqslant \omega^{L}_{1}$ в M (не обязательно $U \subseteq I \cap L$!). Идея состоит в том, что мы берем вспомогательное множество $W \subseteq I \cap L$, из которого U легко восстанавливается, и строим $P(W)$-генерическое расширение модели M, см. рассуждения после 27.7.

Результаты 27.5 и 27.6 можно усилить, заменив в них класс $\Sigma^{1,s}_{2}$ классом $\Pi^{1,s}_{1}$, см. Мартин, Соловей[1].

Доказательство теоремы 27.1. Пусть модель M и множество Y таковы, как указано в условии теоремы 27.1. Множество Y может иметь мощность $> \omega_1$ в M, и это мешает применить 27.5 и 27.6 непосредственно к Y. Поэтому мы построим сначала сохраняющее кардиналы генерическое расширение M' модели M, содержащее множество U мощности ω_1 в M', из которого довольно просто получается данное Y. Таким расширением служит модель $M' = M[H]$, где множество $H \subseteq \oplus_\lambda P(Y)$ является $\oplus_\lambda P(Y)$-генерическим над M, а $\lambda = \omega^{M}_{1}$. M' действительно сохраняет кардиналы ввиду 27.3 и теоремы 3.4 гл. 4. Для каждого $\mu < \lambda$ положим $H_\mu = \{p(\mu)$: $p \in H \wedge \mu \in \operatorname{dom} p\}$ и $s_\mu = \bigcup \{s^q$: $q \in H_\mu\}$, а через $\chi_\mu \in {}^{\omega}2$ обозначим характеристическую функцию множества $b''s_\mu$, где b — каноническая биекция Seq на ω.

Теперь мы собираемся расширить модель M' методом 27.4, желая добиться определимости множества $U = \{\chi_\mu$: $\mu < \lambda\}$. Но нет оснований утверждать $U \subseteq I \cap L$ в M'. В связи с этим «привяжем» U к подходящему множеству $W \in M'$, $W \subseteq I \cap L$ в M'.

Согласно 27.3 имеем $\omega^{M'}_{1} = \omega^{M}_{1}$, т. е. по выбору M выполняется $\omega_1 = \omega^{L}_{1}$ в M'. Поэтому благодаря 8.5 в M' существует конструктивная нумерация (без повторений) множества $I \cap L$ ординалами:

27.7. (В M') $I \cap L = \{g_\mu$: $\mu < \lambda\}$; $\langle g_\mu$: $\mu < \lambda\rangle \in L$.

Положим $C = \{\langle g_\mu, k, \chi_\mu(k)\rangle$: $\mu < \lambda \wedge k \in \omega\}$ и $W = F''C$, где F есть канонический гомеоморфизм $I \times \omega \times \omega$ на I. Согласно 27.7 будет $W \in M'$ и $W \subseteq I \cap L$ в M'. Возьмем $P(W)$-генерическое над M' множество $K \subseteq P(W)$ и обозначим $s = \bigcup \{s^r$: $r \in K\}$.

27.8. Лемма. (а) *Модель* $N = M'[K]$ *совпадает с* $M'[s]$.

(б) *В* N *истинно утверждение: множества* W *и* U *принадлежат* $\Sigma^{1,s}_{2}$.

(в) *В* N *истинно утверждение: последовательность* $\langle \chi_\mu$: $\mu < \lambda\rangle$ *принадлежит* $L[s]$.

(г) $N = M[s]$.

Доказательство. Непосредственно из 27.4, 27.5 следует (а) и $W \in \Sigma^{1,s}_{2}$ в N. Стало быть, и $C \in \Sigma^{1,s}_{2}$ в N. Но множество U «привязано» к C, так как $U = \{\chi \in I$: $\exists\alpha\forall k C(\alpha, k, \chi(k))\}$. Поэтому $U \in \Sigma^{1,s}_{2}$ в N. Далее, каждое χ_μ имеет в N равномерное по μ Σ^{1,s,g_μ}_{2}-определение через посредство множества C. Отсюда и из 10.3 нетрудно получить (в). Наконец, для доказательства (г) достаточно в силу (а) установить, что $H \in L[Y, s]$ в N, а это вытекает из следующего равенства и (в):

$$H = \{p \in \oplus_\lambda P(Y)\colon \forall\mu \in \operatorname{dom} p\,(s^{p(\mu)} \subseteq s_\mu$$

и пара $\langle s_\mu, X^{p(\mu)}\rangle$ *удовлетворяет требованию* 27.2(3))$\}$. □

Осталось проверить, что исходное множество Y принадлежит $\Pi^{1,s}_{2}$ в N. Этот факт тривиально получается из 27.8 (б) и следующей леммы, завершающей доказательство 27.1:

27.9. Лемма. *Для всякого* $\alpha \in I \cap N$ *имеет место эквивалентность*

$$\alpha \in Y \leftrightarrow \forall\mu < \lambda\,(s_\mu \text{ не покрывает } \alpha).$$

Доказательство. Представим двойное расширение $N = M[H][K]$ в виде однократного расширения. Положим $W' = I \cap L^{M}$. Как отмечено выше, $W \subseteq W'$, т. е. $P(W) \subseteq P(W')$. При этом $P(W') \in M$, а $P(W) \in M' = M[H]$. Поэтому, согласно лемме 2.5 гл. 4, найдется терм $\overline{P(W)}$, удовлетворяющий такому условию:

(1) $\overline{P(W)} \in M$, $\overline{P(W)} \subseteq (\oplus_\lambda P(Y)) \times P(W')$, $P(W) = I_H(\overline{P(W)})$.

Определим $P = \{\langle q, r\rangle$: $q \in \oplus_\lambda P(Y)$, $r \in P(W')$ и

$$[\exists q' \in \oplus_\lambda P(Y)\,(q' \geqslant q \wedge \langle q', r\rangle \in \overline{P(W)})]\}.$$

Формула в квадратных скобках означает, что q вынуждает (в смысле $\oplus_\lambda P(Y)$) формулу $r^* \in \overline{P(W)}$. Множество P упорядочивается покомпонентно. Оно удовлетворяет следующим трем утверждениям:

(2) $P \in M$; для P в M истинно у. с. ц.

(3) Множество $G = (H \times K) \cap P$ является P-генерическим над M.

(4) $N = M[G]$.

Утверждение (2) следует из 27.3 и леммы 6.2 гл. 4. (По существу, определение множества P совпадает с определением 5.3 гл. 4.) Утверждение (3), являющееся «обращением» теоремы 5.4 гл. 4, представляет вместе с (4) общее свойство двукратных генерических расширений. Эти утверждения доказаны, например, в книге Йеха [1], лемма 85 на с. 102.

Докажем эквивалентность в формулировке леммы. Пусть $\alpha \in Y$. По теореме 5.2 гл. 4 каждое H_μ является $P(Y)$-генерическим над M, и поэтому s_μ не покрывает α в силу 27.4.

Обратно, пусть $\alpha \in I \cap N$, $\alpha \notin Y$. Нужно доказать, что не каждое s_μ имеет конечное пересечение с множеством $S = \{\alpha \restriction k: k \in \omega\}$. В силу (3), (4) и леммы 2.5 гл. 4 найдется такой P-терм $t \in M$, $t \subseteq P \times \mathrm{Seq}$, что

$$S = I_G(t) = \{\sigma \in \mathrm{Seq}: \exists p \in G(\langle p, \sigma\rangle \in t)\}.$$

«Уменьшим» терм t следующим образом. Рассуждая в M, для каждого $\sigma \in \mathrm{Seq}$ положим $Q_\sigma = \{p \in P: \langle p, \sigma\rangle \in t\}$, выберем антицепь $A_\sigma \subseteq Q_\sigma$, максимальную среди всех антицепей $\subseteq Q_\sigma$, и обозначим $\bar{S} = \{\langle p, \sigma\rangle: \sigma \in \mathrm{Seq} \wedge p \in A_\sigma\}$. Тогда $\bar{S} \in M$, $S = I_G(\bar{S})$ (в силу максимальности антицепей A_σ), а множество $\varkappa = \bigcup \{\mathrm{dom}\, q: \exists r \exists \sigma(\langle q, r\rangle, \sigma\rangle \in \bar{S})\} \subseteq \lambda$ ограничено в λ (так как каждое A_σ счетно по 27.3, а $\lambda = \omega_1^M$). Стало быть, существует ординал $\mu < \lambda$, $\mu \notin \varkappa$.

Мы получим доказательство леммы, если докажем, что s_μ покрывает α, т. е. $S \cap s_\mu$ бесконечно. Предположим противное: $k \in \omega$ таково, что каждое $\sigma \in S \cap s_\mu$ имеет $\mathrm{dom}\, \sigma < k$.

Это обстоятельство вынуждается некоторым $p = \langle q, r\rangle \in G$:

$$(5) \qquad p \Vdash \forall \sigma \in \bar{S} \cap \bar{s}_\mu (\mathrm{dom}\, \sigma < k^*),$$

где P-терм $\bar{s}_\mu \in M$ таков, что $s_\mu = I_G(\bar{s}_\mu)$.

Заметим, что множество $Y' = \{\beta \in I: \exists j(\langle j, \beta\rangle \in X^{q(\mu)})\} \subseteq Y$ конечно; при этом $\alpha \notin Y'$, так как $\alpha \notin Y$. Значит, найдется $m > k$ такое, что $\beta \restriction m \notin S$, каково бы ни было $\beta \in Y'$. Имеем $\alpha \restriction m \in S$, т. е. некоторое $p_0 = \langle q_0, r_0\rangle$ принадлежит пересечению $G \cap A_{\alpha \restriction m}$. Будучи элементами генерического множества G, наши p и p_0 совместимы в P. Отсюда, очевидно, следует

(6) *q и q_0 совместимы в $\oplus_\lambda P(Y)$; r и r_0 совместимы в $P(W')$.*

Определим $q_1 \in \oplus_\lambda P(Y)$ так, чтобы $q_1(\mu) = \langle s^{q(\mu)} \cup \{\alpha \restriction m\}, X^{q(\mu)}\rangle$ (или $q_1(\mu) = \langle \{\alpha \restriction m\}, \varnothing\rangle$, если $\mu \notin \mathrm{dom}\, q$), а все остальные компоненты q_1 и q совпадали. Согласно выбору m и определению Y' такое q_1 действительно принадлежит $\oplus_\lambda P(Y)$, и $q_1 \leqslant q$. При этом q_1 и q_0 окажутся совместимыми в $\oplus_\lambda P(Y)$, так как q и q_0 совместимы в $\oplus_\lambda P(Y)$ в силу (6), $\mu \notin \mathrm{dom}\, q_0$ по выбору p_0 и μ, а q_1 отличается от q только в μ-й компоненте.

Итак, мы имеем $p_0 = \langle q_0, r_0\rangle \in P$, $p_1 = \langle q_1, r\rangle \in P$ (поскольку $q_1 \leqslant q$ и $\langle q, r\rangle \in P$), q_0 совместимо с q в $\oplus_\lambda P(Y)$, а r_0 совместимо с r в $P(W')$. В этой ситуации p_0 и p_1 совместимы в P. В самом деле, положим $d_0 = \mathrm{dom}\, q_0$, $d_1 = \mathrm{dom}\, q_1$ и определим $q' \in \oplus_\lambda P(Y)$ условием $\mathrm{dom}\, q' = d_0 \cup d_1$ и следующим равенством для всякого $\nu \in d_0 \cup d_1$:

$$q'(\nu) = \begin{cases} q_0(\nu) \text{ при } \nu \in d_0 - d_1, \\ q_1(\nu) \text{ при } \nu \in d_1 - d_0, \\ \langle s^{q_0(\nu)} \cup s^{q_1(\nu)},\ X^{q_0(\nu)} \cup X^{q_1(\nu)}\rangle \text{ при } \nu \in d_0 \cap d_1. \end{cases}$$

Положим также $r' = \langle s^{r_0} \cup s^r,\ X^{r_0} \cup X^r\rangle \in P(W')$. Вышеуказанные факты о совместимости позволяют без труда проверить, что действительно $q' \in \oplus_\lambda P(Y)$ и $r' \in P(W')$, причем $q' \leqslant q_0, q_1$ и $r' \leqslant r_0, r$. Отсюда следует, что $p' = \langle q', r'\rangle$ принадлежит множеству P и $p' \leqslant p_0, p_1$, т. е. p_0 и p_1 совместимы в P.

Но $p_0 \Vdash (\alpha \restriction m)^* \in \bar{S}$, так как $p_0 \in A_{\alpha \restriction m}$. С другой стороны, $p_1 \Vdash (\alpha \restriction m)^* \in \bar{s}_\mu$ по построению. Поэтому p' вынуждает $(\alpha \restriction m)^* \in \bar{S} \cap \bar{s}_\mu$ (в смысле вынуждения $\Vdash_M^P$). Это дает противоречие с (5), поскольку $p' \leqslant p$ по построению. Лемма и теорема 27.1 доказаны. □

28. Длинные полные упорядочения. В качестве приложения теоремы 27.1 дадим построение модели теории ZFC, в которой существует полное $\mathbf{\Pi}^1_2$-упорядочение «произвольной длины». Точная формулировка такова:

28.1. Теорема (Харрингтон [2]). *Пусть M_0 есть СТМ теории $\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ и $\Omega > \omega$ — кардинал несчетной конфинальности в M_0. Тогда существует генерическое расширение N модели M_0, сохраняющее кардиналы и содержащее полное $\mathbf{\Pi}^1_2$-упорядочение некоторого $\mathbf{\Pi}^1_2$-множества $\subseteq I$ мощности Ω в N.*

Доказательство. Пусть $P_0 \in M_0$ есть Ω-коэновское ЧУ множество (определение 3.1 гл. 4). Положим $M = M_0[G]$, где множество $G \subseteq P_0$ является P_0-генерическим над M. Кардинальные ряды M и M_0 совпадают в силу результатов 3.5 и 3.4 гл. 4. Кроме того, в M истинно $2^\omega = \Omega$, см. 3.16 гл. 4 или Шенфилд [2], теорема 11.1 на с. 509. Пусть $\langle \alpha_\mu: \mu < \Omega\rangle \in M$ есть нумерация без повторений множества $I \cap M$ в M. Применим теорему 27.1 к модели M и множеству $H''Y$, где

$$Y = \{\langle \alpha_\mu, \alpha_\nu\rangle: \mu < \nu < \Omega\},$$

а H есть канонический гомеоморфизм I^2 на I. В полученном сохраняющем кардиналы генерическом расширении $N=M[s]$ выполняется $H^{\prime\prime}Y\in\mathbf{\Pi}^1_2$, $Y\in\mathbf{\Pi}^1_2$ (по теореме 2.13 гл. 8) и, наконец, $I\cap M=\{\alpha_0\}\cup\{\alpha\colon Y(\alpha_0,\alpha)\}\in\mathbf{\Pi}^1_2$. Но Y есть полное упорядочение множества $I\cap M$. □

28.2. Упражнение (Харрингтон [2]). В модели N, даваемой доказательством теоремы 28.1, существует полное Δ^1_4-упорядочение всего множества $I\cap N$.

Указание. Если $\alpha\in I\cap N$, то найдется такое $\mu<\Omega$, что $\alpha\in \mathrm{L}[\alpha_\mu, s]$ в N. (Для доказательства этого утверждения нужно использовать метод сужения терма t до терма $\bar S$ в доказательстве леммы 27.9.) Через $\mu(\alpha)$ обозначим наименьшее из таких μ, а через $\nu(\alpha)\in\mathrm{On}$ обозначим номер α в смысле канонического полного упорядочения класса $\mathrm{L}[\alpha_\mu, s]$, см. п. 8. Теперь для $\alpha,\beta\in I\cap N$ положим $\alpha<\beta\leftrightarrow\mu(\alpha)<\mu(\beta)\vee(\mu(\alpha)=\mu(\beta)\wedge\nu(\alpha)<\nu(\beta))$. □

28.3. Замечание. Более точный анализ (Харрингтон [2]) показывает, что в рассматриваемой модели N существует полное Δ^1_3-упорядочение множества $I\cap N$ — максимальный (при $\omega_1^M<\Omega$) возможный результат (см. следствие 17.2).

29. Определимость без параметров. В пп. 27, 28 определимость тех или иных множеств из исходной модели в подходящих генерических расширениях достигалась с помощью специальных параметров $s\subseteq\mathrm{Seq}$, фигурирующих в искомых определениях данных множеств. «Чистая» (т. е. без параметров) определимость получается с помощью генерических расширений несколько иного типа, которые мы рассмотрим в этом пункте.

Зафиксируем СТМ M теории $\mathrm{ZF}+\mathrm{V}=\mathrm{L}$ и положим $\lambda=\omega_1^M$. Если множество $Y\in M$, $Y\subseteq I$, не принадлежит классу Σ^1_2 (или Π^1_2) в M, то по теореме 10.3 Y не принадлежит Σ^1_2 (соответственно Π^1_2) ни в каком расширении модели M. Поэтому беспараметрические варианты 27.1 и 27.5 не имеют места. Но уже для класса Δ^1_3 справедлива следующая

29.1. Теорема. *Если $Y\in M$, $Y\in I$, то найдется генерическое расширение N модели M, сохраняющее кардиналы и такое, что $Y\in\Delta^1_3$ в N.*

Доказательство этой теоремы использует систему Йенсена — Соловея, см. Йенсен, Соловей [1].

29.2. Определение. *Системой Йенсена — Соловея* (над M) назовем всякую последовательность $\langle U_\mu\colon \mu<\lambda\rangle\in M$ множеств $U_\mu\subseteq I$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

(1) $\{\langle\mu,\alpha\rangle\colon \mu<\lambda\wedge\alpha\in U_\mu\}\in\Delta^{\mathrm{L}_\lambda}_1$,

(2) если $P=\oplus_{\mu<\lambda}P(U_\mu)$ и множество $G\subseteq P$ является P-генерическим над M и если $\mu<\lambda$, $G_{-\mu}=\{p\in G\colon \mu\notin\mathrm{dom}\,p\}$, $s\in M[G_{-\mu}]$, $s\subseteq\mathrm{Seq}$, то утверждение

$$\forall\alpha\in I\cap M\,(\alpha\in U_\mu\leftrightarrow s\ \textit{не покрывает}\ \alpha)$$

не имеет места.

Не останавливаясь на построении такой системы (читатель найдет его в работе Йенсена и Соловея [1], § 4, см. также Кановей [3], где изложен другой метод построения), мы укажем некоторые приложения этих систем. Зафиксируем систему Йенсена — Соловея $\langle U_\mu\colon \mu<\lambda\rangle\in M$. Пусть $P=\oplus_{\mu<\lambda}P(U_\mu)$ и множество $G\subseteq P$ является P-генерическим над M. Для каждого $\mu<\lambda$ определим $G_\mu=\{p(\mu)\colon p\in G\wedge\mu\in\mathrm{dom}\,p\}$ и $s_\mu=\bigcup\{s^q\colon q\in G_\mu\}$. По теореме 5.2 гл. 4 G_μ является $P(U_\mu)$-генерическим над M, и поэтому из 27.4 следует

(1) *Если $\alpha\in M\cap I$, то $\alpha\in U_\mu\leftrightarrow s_\mu$ не покрывает α.*

Пусть $\langle\alpha_\mu\colon \mu<\lambda\rangle\in M$ и $\langle\beta_\mu\colon \mu<\lambda\rangle\in M$ суть пересчеты (возможно, с повторениями) в M множеств Y и $Y'=(I\cap M)-Y$ соответственно. Рассмотрим множество

$$E=\{\omega\mu+2^k\cdot3^{\alpha_\mu(k)}\colon \mu<\lambda\wedge k\in\omega\}\cup\{\omega\mu+2^k\cdot5^{\beta_\mu(k)}\colon \mu<\lambda\wedge k\in\omega\}.$$

Пусть $N=M[G\,|\,E]$, где $G\,|\,E=\{p\in G\colon \mathrm{dom}\,p\subseteq E\}$. Тогда N сохраняет кардиналы, так как $N\subseteq M[G]$. Если $\mu\in E$, то, очевидно, $s_\mu\in N$. Если же $\mu\notin E$, то $N\subseteq M[G_{-\mu}]$, так как $E\in M$. Поэтому из (1) и 29.2 (2) следует

(2) $E=\{\mu<\lambda\colon \exists s\subseteq\mathrm{Seq}\,\forall\alpha\in M\cap I\,(\alpha\in U_\mu\leftrightarrow s\ \textit{не покрывает}\ \alpha)\}$

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $E\in\Sigma^H_2$, где $H=\mathrm{HC}^N$ (см. 8.2). Действительно, если $E\in\Sigma^H_2$, то Y и Y' принадлежат Σ^H_2 по определению E. Следовательно, Y и Y' являются Σ^1_3-множествами в N согласно 9.1. Но $Y\cap Y'=\varnothing$, а $Y\cup Y'=I\cap M_0=I\cap\mathrm{L}^N$ (так как $M_0\models\mathrm{V}=\mathrm{L})\in\Sigma^1_2$ в N по 9.4. Таким образом, $Y\in\Delta^1_3$ в N, что и требовалось.

Остается проверить $E\in\Sigma^H_2$. Как уже отмечено, $I\cap M=I\cap\mathrm{L}^N\in\Sigma^H_1$. Аналогично из 8.4 следует $L_\lambda\in\Sigma^H_1$, откуда с учетом 29.2 (1) нетрудно вывести, что множество $\{\langle\mu,\alpha\rangle\colon \mu<\lambda\wedge\alpha\in U_\mu\}$ принадлежит Δ^H_1. Теперь $E\in\Sigma^H_2$ вытекает из (2). □

29.3. Упражнение (Йенсен, Соловей [1]). Положим

$$E=\{2k\colon k\in b^{\prime\prime}s_0\}\cup\{2k+1\colon k\notin b^{\prime\prime}s_0\}\cup\{0\},$$

где b — каноническая биекция Seq на ω. Тогда в модели $M[G|E]$, множество $b''s_0 \subseteq \omega$ будет неконструктивным Δ_3^1-множеством.

Рассмотрим теперь (очевидно, единственное) множество $E \subseteq \omega$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(1) $0 \in E$; $m \notin E \to E_{m0} = \omega \wedge E_{m1} = \varnothing$

(где $E_{mi} = \{k\colon 2^m(2(2k+i)+1)-1 \in E\}$);

(2) $m \in E \to E_{m0} = b''s_m \wedge E_{m1} = \omega - (b''s_m)$.

Тогда E неконструктивно и $\{E\} \in \Pi_2^1$ в $M[G|E]$. □

О других результатах, касающихся определимых неконструктивных множеств, см. п. 14 и литературу, упомянутую во введении к этому параграфу.

ЛИТЕРАТУРА

Аддисон (Addison J. W.)
1. Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. — Fundam. math., 1959, **46**, p. 123—135.
2. Some consequences of ihe axiom of constructibility. — Fundam. math., 1959, **46**, p. 337—357.

Александров П. С.
1. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.
2. Sur la puissance des ensembles mesurables B. — C. r. Acad. sci. Paris, 1916, **162**, p. 323—325. [Русский перевод: О мощности множеств, измеримых по Борелю. — В кн.: Александров П. С. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. М.: Наука, 1978, с. 35—39.]

Берджес (Burgess J.)
1. A selector principle for Σ_1^1 equivalence relations. — Michigan Math. J., 1977, **24**, № 1, p. 65—76.

Гливенко В. И.
1. Sur les functions implicites. — Матем. сб., 1929, **36**, с. 138—142.

Йенсен (Jensen R. B.)
1. Definable set of minimal degree. — In: Mathematical Logic and Foundations of Set Theory. Amsterdam; London, 1970, p. 122—128.

Йенсен, Юнсбротен (Jensen R. B., Johnsbråten H.)
1. A new construction of a nonconstructible Δ_3^1 subset of ω. — Fundam. math., 1974, **81**, № 4, p. 279—290.

Йенсен, Соловей (Jensen R. B., Solovay R. M.)
1. Some applications of almost disjoined sets. — In: Mathematical Logic and Foundations of Set Theory. Amsterdam; London, 1970, p. 84—103.

Йех (Jech T.)
1. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973.

Кановей В. Г.
1. О дескриптивных формах счетной аскиомы выбора — В кн.: Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М.: Наука, 1979, с. 3—136.
2. О непустоте классов в аксиоматической теории множеств.—ИАН СССР, 1978, **42**, № 3, с. 550—579.

3. Множество всех аналитически определимых множеств натуральных чисел может быть аналитически определимым. — ИАН СССР, 1979, **43**, № 6, с. 1259—1293.
4. О некоторых проблемах дескриптивной теории множеств и связи конструктивности и определимости. — ДАН СССР, 1980, **253**, № 4, с. 800—803.

Кекрис (Kechris A. S.)
1. The theory of countable analytic sets. — Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **202**, p. 259—297.

Кондо (Kondo M.)
1. Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs. — Japan. J. Math., 1938, **15**, p. 197—230.

Коэн (Cohen P. J.)
1. Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969.

Куратовский (Kuratowski K.)
1. Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles. — Fundam. math., 1936, **26**, p. 183—191.
2. Топология, т. I. — М.: Мир, 1966.

Куратовский, Мостовский (Kuratovski K., Mostowski A.)
1. Теория множеств.— М.: Мир, 1970.

Лебег (Lebesgue H.)
1. Sur les fonctions représentable analytiquement. — J. de Math., 1905, p. 139—216.

Леви (Levy A.)
1. Definability in axiomatic set theory, II. — In: Mathematical Logic and Foundations of Set Theory. Amsterdam; London, 1970, p. 129—145.

Леви, Соловей (Levy A., Solovay R. M.)
1. On the decomposition of the sets of reals to Borel sets. — Ann. Math. Logic, 1973, **5**, № 1, p. 1—19.

Лузин Н. Н.
1. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: Гостехиздат, 1953.
2. Sur la classification de M. Baire. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1917, **164**, p. 91—94. [Русский перевод: О классификации Бэра. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 270—272.]
3. Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1925, **180**, p. 1572—1574. [Русский перевод: О проективных множествах Лебега. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 304—306.]
4. Sur les ensembles analytiques. — Fundam. math., 1927, **10**, p. 1—95. [Русский перевод: Об аналитических множествах. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 380—459.]
5. Analogues entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques. — Fundam. math., 1930, **16**, p. 48—76. [Русский перевод: Аналогии между множествами, измеримыми B, и аналитическими множествами. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 470—493.]
6. Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques. — Ann. Sci. Norm. Super. Pisa, 1933, **2**, № 3, p. 269—282. [Русский перевод: О классах конституант аналитических дополнений. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 627—641.]
7. Quelques remarques sur les corbes qui sont des complémentaires analytiques. — Mathematica, Cluj, 1934, **10**, p. 70—80. [Русский перевод: Некоторые замечания о кривых, являющихся аналитическими дополнениями. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 537—546.]

8. Несколько замечаний о кратной отделимости. — ДАН СССР, 1934, **2**, № 5, с. 280—284.
9. О стационарных последовательностях. — Тр. Физ.-матем. ин-та, отд. матем., 1934, **5**, с. 125—147.
10. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. — М.; Л.: Изд. АН СССР, 1935.
11. Sur les ensembles analytiques nuls. — Fundam. math., 1935, **25**, p. 109—131. [Русский перевод: О пустых аналитических множествах. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 662—682.]

Лузин Н. Н., Новиков П. С.
1. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique donné par un crible. — Fundam. math., 1935, **25**, p. 559—560. [Русский перевод: Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном посредством решета. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 617—618.]

Лузин Н. Н., Серпинский (Sierpiński W.)
1. Sur quelques propriétés des ensembles (A). — Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie, 1918, № 4—5A, p. 35—48. [Русский перевод: О некоторых свойствах A-множеств. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 273—284.]
2. Sur une décomposition du continu. — C. r. Acad. Sci. Paris, 1922, **175**, p. 357—359. [Русский перевод: Об одном разложении континуума. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 621—623.]

Люблецкий В. А.
1. Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел. — ДАН СССР, 1968, **182**, № 4, с. 758—759.
2. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества, типа CA. — ДАН СССР, 1970, **195**, № 3, с. 548—550.
3. Случайные последовательности чисел и A_2-множества. — В кн.: Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976, с. 96—122.

Ляпунов А. А.
1. Обзор по дескриптивной теории множеств. — В кн.: Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций. — М.: Наука, 1979, с. 55—82.
2. О кратной отделимости для (A)-операции. — ИАН СССР, 1939, **3**, № 5—6, с. 539—552.
3. Некоторые случаи униформизации плоских CA- и A_2-множеств. — ИАН СССР, 1939, **3**, № 1, с. 41—52.

Майхилл, Скотт (Myhill J., Scott D.)
1. Ordinal definability. — Proc. Symp. Pure Math., 1971, **13**, № 1, p. 271—278.

Мартин, Соловей (Martin D., Solovay R.)
1. Internal Cohen extensions. — Ann. Math. Logic, 1970, **2**, p. 143—178.

Матиас (Mathias A. R. D.)
1. A survey of recent results in set theory. — Stanford: Stanford University, 1968.

Менсфилд (Mansfield R.)
1. Perfect subsets of definable sets of real numbers. — Pacific J. Math., 1970, **35**, p. 451—457.

Московакис (Moschovakis Y.)
1. Descriptive Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1980.

Новиков П. С.
1. Sur les fonctions implicites mesurables B. — Fundam. math., 1931, **17**, p. 8—25. [Русский перевод: О неявных функциях, измеримых B. — В кн.: Новиков П. С. Избранные труды: теория множеств и функций, математическая логика и алгебра. М.: Наука, 1979, с. 13—25.]
2. О счетно-кратной отделимости B аналитических множеств. — ДАН СССР, 1934, **3**, с. 135—148.
3. Обобщение второго принципа отделимости. — ДАН СССР, 1934, **4**, с. 8—11.
4. Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe. — Fundam. math., 1935, **25**, p. 459—466. [Русский перевод: Об отделимости проективных множеств второго класса. — В кн.: Новиков П. С. Избранные труды: теория множеств и функций, математическая логика и алгебра. М.: Наука, 1979, с. 43—48.]
5. О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений. — ИАН СССР, 1937, **1**, с. 231—252.
6. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. — Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1951, **38**, с. 279—316.

Новиков П. С., Келдыш Л. В.
1. Комментарии к работам Н. Н. Лузина. — В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 725—739.

Роджерс (Rogers H., Jr.)
1. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.

Серпинский (Sierpiński W.)
1. Sur deux conséquences d'un théorême de Hausdorff. — Fundam. math., 1945, **33**, p. 269—272.

Сильвер (Silver J.)
1. Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations. — Ann. Math. Logic, 1980, **18**, p. 1—28.

Соловей (Solovay R.)
1. On the cardinality of Σ^1_2 sets. — In: Foundations of Mathematics. Berlin, 1969, p. 58—73.
2. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. — Ann. Math., 1970, **92**, № 1, p. 1—56.
3. A nonconstructible Δ^1_3 set of integers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1967, **127**, p. 50—75.

Соловей, Тенненбаум (Solovay R., Tennenbaum S.)
1. Iterated Cohen extensions and Suslin's Problem. — Ann. Math., 1971, **94**, p. 201—245.

Суслин М. Я.
1. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. — C. r. Acad. sci. Paris, 1917, **164**, № 2, p. 89—91.

Харрингтон (Harrington L.)
1. Π^1_2 sets and Π^1_2 singletons. — Bull. Amer. Math. Soc., 1975, **52**, p. 356—360.
2. Long projective wellorderings. — Ann. Math. Logic, 1977, **12**, № 1, p. 1—24.
3. Analytic determinacy and $0^{\#}$. — J. Symbolic Logic, 1978, **43**, № 4, p. 685—693.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Теория множеств. — М.; Л.: ОНТИ, 1937.
2. Summen von $\aleph_1$ Mengen. — Fundam. math., 1936, **26**, S. 241—255.

Шенфилд (Shoenfield J.)
1. The problem of predicativity. — In: Essays on the Foundations of Mathematics. Jerusalem, 1961, p. 132—139.
2. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.

Штерн (Stern J.)
1. Partitions of the real line into $\aleph_1$ closed sets. — Lect. Notes Math., 1978, 669, p. 455—460.
2. Suites transfines d'ensembles boreliennes. — C. r. Acad. sci. Paris, ser. *A*, 1979, 288, p. 527—529.
3. Effective partitions of the real line into Borel sets of bounded rank. — Ann. Math. Logic, 1980, 18, p. 29—60.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аартс (Aarts J. M.) 214, 233
Абрамсон (Abramson F.) 98
Адамар (Hadamard J.) 278
Аддисон (Addison J. W.) 6, 236, 258, 260, 262, 264, 266, 270, 284, 299, 301, 311—313, 360
Александров П. С. 236, 252, 275, 277—279, 360
Ароншайн (Aronszajn N.) 78—81, 89—91, 94, 180, 182, 209, 211
Арсенин В. Я. 277

Банах (Banach S.) 42, 44, 45, 48, 68, 97, 263
Бар-Хиллел (Bar-Hillel Y.) 36, 63
Барвайс (Barwise J.) 12, 93, 97
Баумгартнер (Baumgartner J.) 82, 96, 97, 209
Бендиксон (Bendixson I.) 236
Берджес (Burgess J.) 5, 8, 99, 295, 360
Бернштейн (Bernstein F.) 44, 226
Бертран (Bertrand J.) 60
Бласс (Blass A.) 59
Блекуэлл (Blackwell D.) 263, 264, 271
Борель (Borel E.) 70, 236, 275, 278
Бул (Bull E. R.) 63
Бэр (Baire R.) 58, 62, 71—73, 202, 207, 212, 214, 236, 237, 252, 253, 259, 261, 262, 269, 275, 277, 279

Валле-Пуссен (Vallee Poussin J. C. la) 275
Вейерштрасс (Weierstrass K.) 40
Вейсс (Weiss W.) 217, 233, 234
Витали (Vitali) 42, 43, 58, 236, 280, 281
Воот (Vaught R. L.) 199

Галвин (Galvin F.) 84, 97
Гаусс (Gauss C. F.) 36
Гейл (Gale D.) 262, 263, 271
Гермес (Hermes H.) 36
Гёдель (Gödel K.) 5—8, 33, 40, 49, 50, 71, 96, 99, 125, 143, 156, 158, 160, 169, 171, 173, 200, 235, 259, 262, 271
Гильберт (Hilbert D.) 36
Гитик (Gitik M.) 60
Гливенко В. И. 286, 293, 360
Гордан (Gordan P.) 36
Грегори (Gregory J.) 186

Даукер (Dowker C. H.) 220, 224
Девис (Davis M.) 262, 263, 269, 271
Девлин (Devlin K.) 5, 8, 71, 72, 75, 97, 157, 158, 180, 185, 186, 194, 196, 199, 200, 225, 228, 233
Дедекинд (Dedekind R.) 72, 179
Дрейк (Drake F.) 93, 97

Евклид (Euclid) 35, 50

Истон (Easton W.) 82, 97, 146, 147, 156

Йенсен (Jensen R. B.) 8, 71, 72, 79, 82, 94, 136, 137, 171, 180, 182, 183, 185, 186, 194, 195, 199, 200, 220, 225, 228, 233, 301, 317, 351, 352, 358—360

Йех (Jech T.) 5, 7, 35, 43, 56, 60, 63, 81, 97, 132, 156, 161, 273, 349, 356, 360

Канамори (Kanamori A.) 95, 98
Кановей В. Г. 273, 295, 298, 317, 318, 351, 359, 360
Кантор (Cantor G.) 36, 37, 44, 235, 236
Канторович Л. В. 277
Карп (Karp C.) 171, 200
Картан (Cartan H.) 278
Кекрис (Kechris A.) 235, 263, 272, 278
Келли (Kelly J.) 44
Келдыш Л. В. 277, 278, 293, 297, 363
Кёниг (König J.) 77, 78, 89, 91, 280
Клейнберг (Kleinberg E. M.) 63, 87, 97, 98
Клини (Kleene S. C.) 236, 253, 255—257, 271
Козлова З. И. 277
Колмогоров А. Н. 277
Кондо (Kondo M.) 61, 258, 266, 275, 271, 278, 292, 312, 361
Коэн (Cohen P. J.) 7, 8, 51, 55, 58, 61, 62, 99, 102, 109, 118, 122, 156, 235, 271, 273, 361
Куратовский (Kuratowski K.) 45, 251, 273, 275, 278, 284, 285, 361
Курепа (Kurepa D.) 127, 128, 130—132, 139, 144, 157, 199, 200, 232, 233
Кюнен (Kunen K.) 5, 8, 64, 94, 95, 97, 195, 217, 224, 232—234, 267—269

Лаврентьев М. А. 277
Лаплас (Laplace P. S.) 64
Лебег (Lebesgue H.) 34, 49, 58, 62, 70, 96, 97, 208, 209, 236, 241, 252, 271, 274, 275, 278, 280, 286, 299, 319, 361
Леви (Levy A.) 36, 57—59, 97, 105, 108, 143, 156, 273, 274, 277, 297, 319, 320, 333, 335, 336, 338, 342, 343, 346, 348, 349, 361
Лейбниц (Leibniz G. W.) 64
Лёвенгейм (Löwenheim L.) 67, 102, 199, 215
Лёйхли (Läuchli H.) 58
Ливенсон Е. М. 277
Лузин Н. Н. 70—72, 97, 236, 242, 243, 252, 258, 271, 274—276, 278, 280—287, 292, 294—296, 318, 320, 350, 361, 362
Любецкий В. А. 299, 307, 308, 320, 321, 331, 362
Лютцер (Lutzer D. J.) 214, 233
Ляпунов А. А. 277, 278, 285—287, 362

Майхил (Myhill J.) 342, 362
Малыхин В. И. 218, 233
Мало (Mahlo P.) 93, 94
Манин Ю. И. 157
Мартин (Martin D. A.) 5, 6, 8, 63, 70, 72, 99, 147, 153, 157, 195, 201, 203, 208, 212—214, 217, 219, 220, 233, 235, 261—264, 267—269, 272, 351, 354, 362
Марчевский (Marczewski E.) 121, 156
Мате (Máté A.) 92, 98
Матиас (Mathias A. R. D.) 317, 362
Мансфилд (Mansfield R.) 261, 272, 299, 307, 320, 327, 362
Миллер (Miller E.) 180
Митчелл (Mitchell W.) 63, 79, 97
Московакис (Moschovakis Y. N.) 235, 237, 238, 251, 264, 266, 267, 269, 270, 272, 298, 299, 362
Мостовский (Mostowski A.) 52—57, 60, 273, 284, 331, 361
Мычельский (Mycielski J.) 262, 263, 269, 272

Нейман, фон (von Neumann J.) 65
Новиков П. С. 61, 236, 251, 258, 260, 266, 271, 274—278, 284—286, 291—293, 295, 297, 299, 301, 306, 312, 313, 318, 320, 362, 363
Ньютон (Newton I.) 64

Осташевский (Ostaszewski A. J.) 220, 224, 233

Пеано (Peano G.) 18, 36
Пинкус (Pincus D.) 57, 58, 60
Поспишил (Pospisil B.) 76, 80, 219
Прикры (Prikry K.) 82

Радо (Rado R.) 48, 87, 88, 92, 98
Рамсей (Ramsey F. R.) 8, 85—87, 95, 96, 210
Рассел (Russell B.) 10, 41, 55, 196
Рейнгардт (Reinhardt W.) 95, 98
Роджерс (Rogers H. R.) 287, 363
Рудин (Rudin M. E.) 5, 8, 81, 97, 201, 220, 224, 233, 234

Сагеев (Sageev G.) 59
Сверчковский (Swierczkowski S.) 262, 263, 269, 272

Серпинский (Sierpinski W.) 70, 97, 236, 242, 247, 252, 271, 272, 275, 278, 281—283, 350, 362, 363
Сикорский (Sikorski R.) 233
Сильвер (Silver J. H.) 82, 95—97, 130, 132, 133, 143, 156, 193, 194, 199, 225, 262, 272, 273, 295, 296, 363
Скотт (Scott D.) 15, 156, 342, 362
Скулем (Skolem Th.) 67, 102, 156, 158, 173—176, 186—188, 193, 199, 215
Соловей (Solovay R. M.) 8, 58, 69, 95—98, 109, 143, 148, 149, 156, 203, 212, 214, 233, 259—261, 267, 269, 272—274, 277, 297, 299, 307, 308, 317, 318, 320, 326, 327, 329, 333, 335—338, 342, 343, 346, 348, 349, 351, 352, 354, 358—363
Сохор (Sochor A.) 56, 60
Стефенсон (Stephenson R. M.) 218, 233
Стил (Steel J.) 269
Стоун (Stone A.) 48
Стьюарт (Stewart F. M.) 129, 262, 263, 271
Суслин М. Я. 30, 71, 72, 79—81, 157, 158, 179—185, 195, 197, 203, 209, 214, 215, 217, 220, 236, 244, 246, 247, 252, 256, 275, 278, 279, 282, 309, 363

Тайманов А. Д. 277
Тарский (Tarski A.) 42, 44, 46, 59, 60, 68, 97
Тенненбаум (Tennenbaum S.) 148, 149, 156, 326, 363
Тихонов А. Н. 39, 44, 47, 48
Толл (Tall F. D.) 216, 217, 233, 234

Уайткед (Whitehead A. N.) 204
Улам (Ulam S.) 69, 98
Уэдж (Wadge W.) 211, 268, 269

Федорчук В. В. 234
Феферман (Feferman S.) 58, 59
Фодор (Fodor) 67
Френкель (Fraenkel A.) 5—7, 36, 52—57, 63, 100, 158, 235
Фридман (Friedman H.) 263, 272, 312
Фубини (Fubini G.) 68

Хайнал (Hajnal A.) 84, 87, 88, 92, 97, 98, 196, 216, 227, 228, 230, 234
Халмош (Halmos P. R.) 64, 98, 100, 156
Халперн (Halpern J. D.) 59
Хан (Hahn N.) 45, 48
Харрингтон (Harrington L. A.) 98, 312, 318, 321, 328, 351, 352, 357, 358, 363
Хаусдорф (Hausdorff F.) 42—44, 278, 279, 350, 363
Хейеноорт (van Heijenoort J.) 156
Хехлер (Hechler S.) 217, 234

Цвиккер (Zwicker W.) 98
Цермело (Zermelo E.) 5—7, 36—38, 100, 106, 158, 235, 263
Цорн (Zorn M.) 27, 45, 46, 72, 117, 126

Чен (Chang C. C.) 194, 199
Чех (Čech E.) 48, 76, 80, 217, 219
Чёрч (Church A.) 255

Шапировский Б. Е. 216—218, 233, 234
Шелах (Shelah S.) 197, 204
Шенфилд (Shoenfield J. R.) 5, 7, 9, 95, 96, 98, 109, 110, 113, 114, 157, 204, 212, 253, 267, 272, 273, 299, 303, 305, 357, 363
Шор (Shore R. A.) 195
Штейнгауз (Steinhaus H.) 269
Штерн (Stern J.) 296, 321, 322, 343, 349, 350, 364

Эклоф (Eklof P. S.) 204, 212
Эрдёш (Erdős P.) 71, 86—88, 92, 98, 196

Юнсбротен (Johnsbraten H.) 71, 72, 75, 97, 180, 200, 301, 351,
Юхас (Juhász I.) 5, 8, 77, 84, 98, 213, 214, 216, 218, 224, 227, 228, 230, 233, 234

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома бесконечности (infinity axiom) 14
— выбора (axiom of choice) 24, 35, 37
— — счетная (countable) 48, 294
— выделения (separation axiom) 13
— детерминированности (axiom of determinateness, determinacy) 62, 269
— зависимого выбора (dependent choices) 49, 294
— измеримого кардинала (MC) 261
— конструктивности (axiom of constructibility) 168
— Мартина (Martin's axiom, MA) 147, 201
— непротиворечивая относительно системы (consistent relative to a system) 49
— объединения (union axiom) 14
— объемности (extensionality axiom) 13
— подстановки (replacement axiom) 14
— проективной детерминированности (axiom of projective determinacy) 263
— регулярности (regularity axiom) 15
— степени (power set axiom) 14
Антицепь (antichain) 80, 109, 180
— максимальная (maximal antichain) 109
— ниже p (antichain below p) 109
Атом (atom) 53

База фильтра регулярная (regular filter base) 214
Базис (basis) 257

Ветвь (branch) 180
Высота (height) 75

Гипотеза континуума (континуум-гипотеза) (continuum hypothesis) 69, 103, 235
— — обобщенная (generalized continuum hypothesis) 103
— Суслина (Souslin hypothesis) 72, 179
— — обобщенная (generalized Sauslin hypothesis) 182
Граф (graph) 85, 197
— полный (complete graph) 85
— пустой (empty graph) 85

Дерево (tree) 75, 104, 180
— Ароншайна (Aronszajn tree) 78, 180, 209
— полное A-арное (complete A-ary tree) 75
— Суслина (Suslin, Souslin tree) 80, 180, 203
Длина отношения (length of relation) 244

Замыкание транзитивное (transitive closure 174 300

Кардинал (cardinal) 25, 26, 65, 103
— измеримый (measurable cardinal) 96, 261
— компактный сильно (strongly compact cardinal) 96
— — слабо (weakly compact cardinal) 93
— Мало сильно/слабо (strongly/weakly Mahlo cardinal) 93
— невыразимый (ineffable) 96
— недостижимый сильно/слабо (strongly/weakly inaccessible cardinal) 92, 103
— предельный сильно/слабо (strongly/weakly limit cardinal) 92, 103
— Рамсея (Ramsey cardinal) 96
— регулярный (regular cardinal) 65, 103
— сингулярный (singular cardinal) 65, 103
Квантор (quantifier) 12, 100
— ограниченный (bounded quantifier) 105
Класс (class) 28
— двойственный (dual class) 239
— самодвойственный (self-dual class) 239
— собственный (proper class) 28
— точечный (pointclass) 238
Код стандартный (standart code) 187
— формулы 304
Конституанта (constituante) 282, 332
Континуум Суслина (Souslin line) 72
Конфинальность (confinality) 65, 103
Кривая 286

Лемма Кёнига (König lemma) 77
— о конденсации (condensation lemma) 171
— об истинности (truth lemma) 113
— — определимости (definability lemma) 113
— существования и минимальности (existence and minimality lemma) 111
— Цорна (Zorn lemma) 27, 45

Множества почти дизъюнктные (almost disjoined sets) 82
— — изоморфные 334
— равномощные (equinumerous) 25
Множество (set) 9—12
— аналитическое (analytical set) 256
— арифметическое (arithmetical set) 256
— борелевское (Borel set) 239
— генерическое (generic set) 110
— — над Ω-моделью (generic over Ω-model) 335
— дедекиндово (Dedekind set) 54
— детерминированное (determined set) 263
— допустимое (admissible set) 177
— замкнутое (closed set) 65, 103
— — неограниченное (з. н. о.) (closed and unbounded set, c. u. b.) 65, 103

Множество измеримое (measurable set) 252
— конструктивное (constructible set) 160
— — относительно множества (constructible relative to a set) 300
— Лузина (Luzin set) 70
— наследственно ординально определимое (hereditabily ordinal definable set) 51
— — финально плотное (НФП) (hereditarily finaly dense set) 225
— — $^{\omega}$On-определимое 342
— однозначное (uniform set) 286
— однородное (homogeneous set) 86, 195
— определимое (definable in/over set) 165, 166
— — с параметрами (definable with parameters) 159, 165
— основное (underlying set) 109
— открытое (open set) 109
— первой категории (set of first category) 252
— плотное (dense set) 109, 201
— — ниже p (dense below p) 109
— попарно несовместимое (pairwise incompatible set 201
— проективное (projective set) 242
— свободное (free set) 196
— совершенное (perfect set) 76, 252
— совместимое (compatible set) 201
— стационарное (stationary set) 66, 104
— счетнозначное 286
— точечное (point set) 238, 254
— транзитивное (transitive set) 19
— универсальное (universal set) 240
— фундированное (grounded set) 15
— частично упорядоченное (ЧУ) (partially ordered (PO) set) 109
— — — нормализованное (normalized) 148
— α-коэновское (α-Cohen set) 119
— $\varkappa$-дистрибутивное ($\varkappa$-distributive set) 123
— $\varkappa$-замкнутое ($\varkappa$-closed set) 123
— $\varkappa$-куреповское ($\varkappa$-Kurepa set) 128
— $\varkappa$-свертывающее ($\varkappa$-collapsing set) 142
— $\varkappa$-суслинское ($\varkappa$-Souslin set) 267
— $^{\omega}$On-определимое 342
Модель исходная (ground model) 51, 111
— конструктивная (constructible model) 50
— Леви — Соловея вторая 349
— — — первая 335
— пермутационная (permutation model) 52
— полученная присоединением к исходной модели (obtained by adjoining to the ground model) 111
— симметрическая (symmetric model) 54
— стандартная транзитивная (СТМ) (standart transitive model, STM) 102
— теории ZFC (model of ZFC) 102
— Френкеля — Мостовского (Fraenkel — Mostowski model) 52
Мощность (cardinality) 25, 65, 103

Ординал (ordinal) 19, 103
— допустимый (admissible ordinal) 178
— конечный (finite ordinal) 103
— недостижимый (inaccessible ordinal) 32
— предельный (limit ordinal) 103
— регулярный (regular ordinal) 190
Отношение рекурсивное (в) (recursive (in) relation) 253, 254
— фундированное (wellfounded relation) 244

Пара неупорядоченная (unordered pair) 104
— упорядоченная (ordered pair) 17, 104
Параметр стандартный (standart parameter) 187
Подграф (subgraph) 85, 197
Поддерево (subtree) 75
Подпорядок (suborder) 109
Праэлемент (urelement) 10, 53
Предикат, абсолютный для класса (absolute for a class) 166
Предложение невыводимое (independent sentence) 7
— совместимое (consistent sentence) 7
Принцип абсолютности 305
— зависимого выбора (principle of dependent choices) 49
— лестницы (principle of scale) 266
— ограничения 283
— отделимости (separation principle) 284
— предупорядочения (prewellordering principle) 249
— редукции (reduction principle) 248
— селектора (selector principle) 294
— сравнения индексов 251
— униформизации 258
Проблема континуума узкая 350
Проектум (projectum) 187
Проекция (projection) 242, 286
Пространство Бэра (Baire space) 237
— сильно бэровское (strongly Baire space) 214
— совершенное польское (perfect Polish space) 237
— $\varkappa$-бэровское ($\varkappa$-Baire space) 214
— π-полное (π-complete space) 214
Путь сквозь дерево (path through a tree) 77, 104

Разбиение (partition) 86, 195
— Рассела (Russell partition) 196
Ранг (rank) 104
Раньше (before) 11
Раскраска (colouring) 197
Ребро (edge) 197
Ретракция (retraction) 150

Свойство Бэра (Baire property) 252
— совершенного ядра (perfect subset property) 252
Система аксиом непротиворечивая (consistent system of axioms) 49
Степень (degree) 16
— Уэджа (Wadge degree) 268
Структура доступная (amenable structure) 186

Теорема Новикова — Кондо — Аддисона (Novikov — Kondo — Addison theorem) 258
— о переводе 301
— — простом идеале (prime ideal theorem) 46
— об ограниченных кванторах 300
Теснота (tightness) 214
Тип порядковый (order type) 103
Точка, случайная над классом (point random over a class) 308

Универсум всех множеств (universe of all sets) 158
— конструктивный (constructible universe) 160

Упорядочение полное (wellordering) 103
— Уэджа (Wadge ordering) 268
— частичное (partial ordering) 104
Уровень (level) 75
Условие вынуждающее (forcing condition) 112
— — более сильное (stronger forcing condition) 112
— счетности целей (у. с. ц.) (countable chain condition) 72, 120, 201

Формула (formula) 12, 101
— абсолютная (absolute formula) 104
— замкнутая (closed formula) 101
Функция (function) 17
— выбора (choice function) 24
— Скулема (Skolem function) 173, 176, 187
— α-пары (α-pairing function) 169

Число натуральное (natural number) 18
— хроматическое (chromatic number) 197

Шаг (step) 11

Элементы ЧУ множества несовместимые (incompatible elements of a partially ordered set) 109
Элементы совместимые (compatible) 109
— сравнимые (comparable) 109

Ядро совершенное (perfect subset) 279

$E(\varkappa)$ ЧУ множество ($E(\varkappa)$ PO set) 136
L-пространство (L-space) 227
$W(\varkappa)$ ЧУ множество ($W(\varkappa)$ PO set) 133
α-пара (α-pair) 169
Γ-детерминированность (Γ-determinacy) 263
Γ-лестница (Γ-scale) 266
Γ-отделимость (Γ-separation) 284
Γ-предупорядочение (Γ-prewellordering) 249
Γ-редукция (Γ-reduytion) 248
Γ-униформизация (Γ-uniformization) 257
(Γ_1, Γ_2)-униформизация ((Γ_1, Γ_2)-uniformization) 257
(θ, λ)-дерево ((θ, λ)-tree) 180
$\varkappa$-гипотеза Курепы ($\varkappa$-Kurepa hypothesis) 127
$\varkappa$-дерево ($\varkappa$-tree) 180
— Ароншайна ($\varkappa$-Aronszajn tree) 78
— Курепы ($\varkappa$-Kurepa tree) 127
— Суслина ($\varkappa$-Souslin tree) 80
$\varkappa$-условие антицепей ($\varkappa$-YA) ($\varkappa$-antichain condition) 120
π-база (π-base) 214
π-вес (π-weight) 214
π-характер (π-character) 214
Ω-модель 335
$\diamondsuit(\varkappa)$ ЧУ множество ($\diamondsuit(\varkappa)$ PO set) 139
$\square(\varkappa)$ ЧУ множество ($\square(\varkappa)$ PO set) 134

ОБОЗНАЧЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОПРЕДЕЛИМОСТЬЮ

HOD 51
Δ_0 105
Σ_n, Π_n (-формулы) 105
Σ_n^{ZF}, Π_n^{ZF}, Δ_n^{ZF} 165
$\Sigma_n^M(N)$, $\Pi_n^M(N)$, $\Delta_n^M(N)$ 165
Σ_n^M, Π_n^M, Δ_n^M 165
$\Sigma_n(M)$, $\Pi_n(M)$, $\Delta_n(M)$ 165
Σ_n, Π_n, Δ_n (-предикаты) 165
равномерно Σ_n, Π_n, Δ_n 166
$\mathbf{\Sigma}^0_\rho$, $\mathbf{\Pi}^0_\rho$, $\mathbf{\Delta}^0_\rho$ 240
$\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ 242
Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n (-множества) 253, 254
$\Sigma^{1,\alpha}_n$, $\Pi^{1,\alpha}_n$, $\Delta^{1,\alpha}_n$ 254
$\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ (-формулы) 303—304

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ZF 7, 158
AC 7, 63
MA 8, 147, 201
CH 8, 69, 103
$\diamondsuit$ 8, 71,
L 8, 50, 160
$\varnothing$ 10, 16
$\in$ 12, 100
$=$ 12, 100
$\neg$ 12,100
$\wedge$ 12, 100
$\vee$ 12, 100
$\rightarrow$ 12, 100
$\leftrightarrow$ 12, 100
$\forall$ 12, 100
$\exists$ 12, 100
$\exists!$ 12, 100
Set $\{x : \varphi(x)\}$ 13
$\subseteq$ 14
ZFC 16, 100, 158
$\{x : \varphi(x)\}$ 16, 28
$\{F(x) : \varphi(x)\}$ 16
$\bigcup z$ 16
$\mathscr{P}(y)$ 16, 65
$\{x, y\}$ 17
$x \cup y$ 17
$x \cap y$ 17
$x - y$ 17
$\{x_1, \ldots, x_n\}$ 17
$\langle x, y\rangle$ 17
$x \times y$ 17
0, 1, 2, 3, ... 18
Sc (x) 18
$\alpha < \beta$, $\alpha \leqslant \beta$ 20
ω 22
$F \restriction \alpha$ 22, 65
$R(\alpha)$ 23
$x \sim y$ 25
$|x|$ 25, 26, 65
HOD 51
$M[G]$ 52
$\aleph_\alpha$ 59
cf (α) 65, 103
ω_α 65
λ^+ 65 103
${}^Y X$ 65
ran f 65, 103, 104
$\varkappa^\lambda$ 65
$\varkappa^{<\lambda}$ 65
exp (λ) 65
$\mathbb{R}$ 65
$\mathbb{Q}$ 65
$\mathfrak{c}$ 65
SH 72, 179
$<^\alpha A$ 75
$s^\frown a$ 75
$\langle\ \rangle$ 75
lh (s) 75
GCH 78, 103
$[I]^n$ 86, 195
$\varkappa \rightarrow (\lambda)^n_\sigma$ 86, 195
$\varkappa \rightarrow (\lambda)^{<\omega}_\sigma$ 95
$\varkappa \rightarrow (\mathrm{stat})^n_\sigma$ 96
$M \models \varphi$ 101, 159
Lim (α) 103
sup X 103
card X 103
$2^\varkappa$ 103
$|T|$ 104
$\leqslant_T$ 104
T_α 104, 180
dom f 104
OR 104
OR^M 107
$\mathscr{P}^M(a)$ 107
$\mathrm{card}^M(a)$ 107
$|P|$ 109
$\leqslant_P$ 109
1_P 109
$I_G(t)$ 110
a^* 110
$\overline{G}$ 110
$p \Vdash^P_M \varphi$ 111
$(2^\varkappa)^M$ 118
$\exp^M(\varkappa)$ 118
$(\varkappa^+)^M$ 118
ω^M_α 118
KH $(\varkappa)$ 127
$W(\varkappa)$ 132, 225
$\square(\varkappa)$ 134
$E(\varkappa)$ 136, 228
$\diamondsuit(\varkappa)$ 139
$Q \otimes R$ 140
$Q \otimes \overline{R}$ 142
V_α 158
V 159
On 159
$\mathscr{L}$ 159
Def (X) 159, 165
$\overset{\circ}{x}$ 159, 162
$\mathscr{L}_X$ 159
L_α 160
L 160
φ^L 160
$s^\frown t$ 162
Sat 164
V $=$ L 168
$<_\alpha$ 170, 300
pr (x) 170
$<_L$ 171
$X \prec_{\Sigma_n} L_\alpha$ 171
TC 174, 300
h_α 176
$\hat{x}$ 180
ht (x) 180
$T \restriction \alpha$ 180
SH $(\varkappa)$ 182
$\square_\varkappa(E)$ 182
otp 182
$\square_\varkappa$ 182
$\diamondsuit_\varkappa(E)$ 182, 228
$\mathscr{L}_{L_\alpha}(\text{Å})$ 186
$h_{\alpha, A}$ 187
ρ^n_α 187
A^n_α 187
p^n_α 187
$\varkappa \rightarrow (\lambda)^n_{\mu,\,\theta}$ 195
$(\varkappa, n) \rightarrow \lambda$ 196
$G \restriction I$ 197
ch (G) 197
$P(\varkappa)$ 197
$t(X)$ 214
$\pi(X)$ 214
I 237
$\alpha \restriction n$ 237
$\overline{A}$ 239
$\breve{\Gamma}$ 239
$X_{\alpha R}$ 244
Seq 244
$\prec$ 244
$|x|^\prec$ 244
G_A 262
PD 263
δ^2_n 267
$\leqslant_W$ 268
AD 269
$B_\varkappa$ 269
$[R]$ 282
$[R]_\mu$ 282
пр P 286
$U^{(2)}$ 293
$L_\mu[x]$ 300
$L[x]$ 300

HC 300
pr_a 300
$(\delta)_m$ 303
Word 306
$|w|$ 306
z_w 306
Z_β 308
U_β 308
σ_k 308
$|\sigma|_T$ 322
$|T|$ 322
$[T, d]$ 322
C_λ 323
Ω 333, 335
p_μ 334
$\mathscr{P}_\lambda$ 334
$\mathscr{P}$ 334
$\mathscr{P}_{<\lambda}$ 334
$\mathscr{P}_{\leqslant\lambda}$ 334
$\mathscr{P}_{\geqslant\lambda}$ 334
$\mathscr{P}_{>\lambda}$ 334
M 335
$G_{\leqslant\lambda}$ 336
$G_{>\lambda}$ 336
φ^* 337
φ^+ 341
$P(U)$ 352
s^p, X^p 352
$\bigoplus_{\mu<\lambda} P(U_\mu)$ 352
$\bigoplus_\lambda P(U)$ 352
$G_{-\mu}$ 359

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского перевода 5
Введение 7
Глава 1. АКСИОМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. *Джозеф Р. Шенфилд* 9
Глава 2. ОБ АКСИОМЕ ВЫБОРА. *Томас Дж. Йех* 35
Глава 3. КОМБИНАТОРИКА. *Кеннет Кюнен* 64
Глава 4. ВЫНУЖДЕНИЕ. *Джон П. Берджес* 99
Глава 5. КОНСТРУКТИВНОСТЬ. *Кейт Дж. Девлин* 158
Глава 6. АКСИОМА МАРТИНА. *Мэри Эллен Рудин* 201
Глава 7. РЕЗУЛЬТАТЫ О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ В ТОПОЛОГИИ. *И. Юхас* 213
Глава 8. ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ: ПРОЕКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА. *Дональд А. Мартин* 235
Добавление. ПРОЕКТИВНАЯ ИЕРАРХИЯ Н. Н. ЛУЗИНА: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ. *В. Г. Кановей* 273
Именной указатель 365
Предметный указатель 368
Обозначения, связанные с определимостью 371
Указатель обозначений 372