

СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

В ЧЕТЫРЕХ ЧАСТЯХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ДЖ. БАРВАЙСА

Часть I

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

С. С. Гончарова

В. Д. Дзгоева

К. Ф. Самохвалова

Д. И. Свириденко

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Ю. Л. Ершова

Е. А. Палютина

А. Д. Тайманова



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.12
С 74
УДК 512.8

51
С74

HANDBOOK OF MATHEMATICAL LOGIC

J. BARWISE (ED.)

NORTH-HOLLAND
PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM NEW YORK OXFORD
1977

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящее издание состоит из четырех книг: «Теория моделей», «Теория множеств», «Теория рекурсии», «Теория доказательств и конструктивная математика». В оригинале оно составляло один том, который при переводе для удобства был разбит на четыре книги, соответствующие четырем частям исходной книги.

Русский перевод каждой части дополнен статьей советских авторов, отражающей дополнительные аспекты, не нашедшие отражения в основном тексте издания.

Издание в целом рассчитано на всех математиков, начиная со студентов университетов, интересующихся развитием современной математики и логики.

Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/Под ред. Дж. Барвайса.—Ч. I. Теория моделей: Пер. с англ.—М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982 г.—392 с.

© North-Holland
Publishing Company—1977

© Перевод на русский язык.
Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1982

1.6.1982

1701111111 (100) Подписано
1982 (10) 10

БИБЛИОТЕКА

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЖ. БАРВАЙСА

«Справочник по математической логике» является попыткой коллектива математиков рассказать о некоторых современных достижениях в логике. Из многообразия относящихся сюда тем мы отобрали те, которые затрагивают основные проблемы данной области или особенно важны для применений в математике.

Математическая логика традиционно подразделяется на четыре раздела: теория моделей, теория множеств, теория рекурсии и теория доказательств. При составлении книги за неизменением лучшего мы следовали традиционному делению. Это делает расстановку глав, связанных с разными разделами логики, непростой задачей, так что данную расстановку не следует рассматривать как бесспорную. Каждая из четырех частей начинается с короткого предисловия к следующим за ним главам. Первая глава или две первые главы в каждой части носят вводный характер. Далее следуют главы, в которых рассматриваются более специальные вопросы, а также приложения математической логики. Каждая глава написана для тех, кто не является специалистом в данной области. С другой стороны, каждая глава рассчитана на своих собственных читателей, которые меняются от главы к главе. В частности, имеются главы, предназначенные для того, чтобы познакомить работающих в одних областях математической логики с достижениями в других областях.

Мы надеемся, что многие математики приобретут эту книгу из чистого любопытства и перелистают ее, чтобы получить удовольствие (или неудовольствие) от того, что происходит в другой области математики. Трудно представить себе математика, который, потратив десять минут на это, не захотел бы более подробно просмотреть несколько глав и вводных параграфов к другим главам. Это обстоятельство, не представившееся раньше, послужило поводом для написания настоящего справочника.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Бурное развитие теории моделей, одного из разделов математической логики, приходится на последние два десятилетия. Теория моделей изучает фундаментальные связи между синтаксическими свойствами множеств предложений формального языка, с одной стороны, и семантическими свойствами их моделей, с другой. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Развитие этой теории и ее приложений шло одновременно в разных направлениях. В первую очередь расширялось применение методов теории моделей в алгебре и геометрии, идущее от создателей теории — А. И. Мальцева и А. Тарского. Особый успех имели здесь идея классификации алгебраических систем с точностью до элементарной эквивалентности и проблемы разрешимости элементарных теорий классических алгебр.

В 1960 г. А. Робинсон предложил новую формализацию старой идеи бесконечно малых величин Г. Лейбница и создал новое изложение классического математического анализа, названное им «нестандартным анализом». С выходом его книги «Нестандартный анализ» началось применение методов теории моделей в анализе, переосмысливание старых результатов с новых позиций. Это шло достаточно успешно, так что возникла идея перестройки всего университетского курса математического анализа на основе нестандартного анализа и в настоящее время проводятся эксперименты по реализации этой идеи (Саливен [1]).

Методы теории моделей нашли применение также в топологии, теории множеств и в нематематических точных науках. Особенно ценны применения в теории множеств, где удалось выявить природу трудностей многих проблем теории множеств. С помощью построения моделей удалось доказать гипотезы Льюиса [1] о неразрешимости им же сформулированных в 1925 г. проблем дескриптивной теории множеств.

В настоящее время возникла необходимость разобраться в этом мощном ветвящемся потоке развития теории, обрисовать общую картину, выделяя основные магистральные направления, «и выявить то общее, что их объединяет. Данная книга посвящена

решению этой трудной задачи и предназначена как настольная книга, содержащая обзор современного состояния теории и справочный материал. Том состоит из восьми глав и дополнения, посвященных разным вопросам и написанных известными специалистами в этой области. Главы отличаются между собой не только по содержанию и стилю изложения, но и по уровню доступности. Это объясняется, во-первых, разнородностью излагаемого материала; во-вторых, тем, что индивидуальности авторов и их вкусы не могли не отразиться на их работах.

Глава первая, написанная Дж. Барвайсом, начинается с определения основных понятий математической логики первого порядка и после изложения фундаментальных достижений логики переходит к изображению общей картины развития теории, указывая магистральные, по его мнению, направления. Эта глава доступна студентам, даже незнакомым с математической логикой, и полезна философам, науковедом.

Вторая глава, написанная Х. Дж. Кейслером, является прекрасным введением в классическую теорию моделей и доступна студентам, прослушавшим университетский курс математической логики.

Третья глава, принадлежащая П. Эклофу, посвящена алгебраической операции ультрапроизведения, тесно связанной, как показала классическая теорема Е. Лося, с логикой первого порядка. Эта операция получила широкое применение в теории моделей и породила метод доказательства теорем и построения примеров, называемый методом ультрапроизведения. В главе на конкретных примерах показана мощь и слабость данного метода, что помогает читателю выработать интуитивное представление об области его применения.

Глава четвертая, написанная А. Макинтайром, посвящена анализу метода модельной полноты, ее связям с методом форсинга и свойством алгебраической замкнутости алгебр. В этой главе изложены применения этих методов к решению конкретных проблем, в том числе 17-й проблемы Гильберта. Третья и четвертая главы доступны студентам, знакомым с университетским курсом логики, и полезны алгебраистам.

В пятой главе, принадлежащей М. Морли, излагается конструкция Эренфойхта — Мостовского, получившая широкое применение в теории моделей и породившая метод неразличимых элементов. Этот метод позволяет глубоко проникнуть в строение отдельных алгебр. Глава доступна студентам и полезна также специалистам по математической логике и алгебраистам.

Написанная К. Д. Строяном шестая глава посвящена применению метода нестандартного анализа в дифференциальной геометрии и анализу работы К. Ф. Гаусса «Disquisitiones generales

circa superficies curvas». От читателя требуется знание дифференциальной геометрии в объеме университетского курса и знакомство с понятиями нестандартного анализа в объеме первых двух глав книги Девиса [1].

Глава седьмая, написанная М. Маккаи, посвящена четырем самостоятельным направлениям. В первом направлении, исходя из естественного аксиоматического определения конечных множеств и из естественного аксиоматического определения «вычислимости», определяется класс множеств (называемых допустимыми), «ведущих» себя как конечные множества. Это дает новый подход к решению философской проблемы описания класса множеств, к которым применимы законы нашего мышления, выработанные в процессе обращения с конечными объектами. Второе направление — это бесконечные логики, которые возникают, если отказаться от требования финитности в классической логике первого порядка. По-разному снимая требование финитности, получаем разные бесконечные логики, обобщающие логику первого порядка. При этом теряется принцип компактности Мальцева, являющийся важным методом доказательства теорем. Иногда удается доказать обобщение компактности или выделить фрагмент логики, в котором есть принцип компактности. В этих случаях возникает богатая теория. Третье и четвертое направления — классическая и эффективная дескриптивная теории множеств, изучающие вопрос: какие множества вещественных чисел нужны в математике и как они построены? В этой главе изложены основные достижения всех этих направлений, развивающихся независимо, и устанавливается их тесная связь. Это дает значительное продвижение в изучении философского вопроса о связи понятий «конечное», «бесконечное», «вычислимое», «нужное в математике множество». Читателю полезно предварительно познакомиться с книгами Барвайса [1], Кейслера [1], Московакиса [1], [2], Лузина [1]. В восьмой главе, принадлежащей А. Коку и Г. Е. Рейесу, излагаются результаты и перспективы применения идей теории категорий в теории моделей и в других отделах математической логики.

Дополнение Е. А. Палютина является обзором по теории категоричности и ее обобщению — теории стабильности. В теории категоричности и стабильности имеются идеи и методы, позволяющие глубоко проникнуть в строение классов алгебраических систем и структуру отдельных систем. Большое внимание в этом обзоре уделяется хорновым классам, для которых получены наиболее полные структурные результаты. Излагается подход для изучения произвольных полных теорий с помощью хорновых. Обзор содержит результаты, полученные после выхода английского издания настоящей книги, а также результаты советских

математиков, не упомянутые в других главах данного тома. Содержание обзора доступно студентам, знакомым с элементами теории моделей, содержащимися в первой и второй главах данной книги или в книге Ершова и Палютин [1].

ЛИТЕРАТУРА

- Барвайс (Barwise J.)
1. Admissible Sets and Structures. — 1975.
- Девис (Davis M.)
1. Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980.
- Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.
1. Математическая логика. — М.: Наука, 1979.
- Кейслер (Keisler H. J.)
1. Model Theory of Infinitary Logic. — 1971.
- Лузин Н. Н.
1. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — В кн.: Лузин Н. Н. Собрание сочинений, т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958, с. 1—188.
- Московакис (Moschovakis Y. N.)
1. Elementary Induction on Abstract Structures. — 1974.
2. Descriptive Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1980.
- Саливен (Sullivan K.)
1. The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. — Amer. Math. Monthly, 1976, 83, № 5, p. 370—375.

Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин,
А. Д. Тайманов

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга рассматривает основную связь между математическими утверждениями (аксиомами), с одной стороны, и математическими структурами (моделями), с другой. Основное внимание сосредоточено на теории моделей для логики *первого порядка*. Первая глава, написанная Барвайсом для тех, кто не знакомился ранее с логикой первого порядка, объясняет большинство основных понятий. Этот материал фактически непосредственно предшествует теории моделей и необходим в большинстве последующих глав книги.

Написанная Кейслером вторая глава содержит подлинное введение в теорию моделей. Просмотрев главу, читатель сможет увидеть объекты исследования этой теории, иллюстрированные основными результатами и приложениями.

В следующих трех главах более глубоко рассматриваются некоторые важные аспекты теории моделей, эти главы рассчитаны в основном на алгебраистов. В третьей главе, принадлежащей Эклофу, рассматривается операция ультрапроизведения, ее связи с логикой первого порядка и ее приложения к алгебре. В четвертой главе, написанной Макинтайром, обсуждаются как положительные, так и отрицательные приложения к алгебре введенного А. Робинсоном понятия *модельно полной теории* и родственного понятия «алгебраической замкнутости».

В пятой главе об однородных множествах, принадлежащей Морли, обсуждаются так называемые модели Эренфойхта — Мостовского. Эта конструкция оказалась весьма полезной в теории моделей и в приложениях к теории множеств. Она имела некоторые приложения к другим разделам математики, что сделало ее более известной.

Основные приложения теории моделей вне алгебры и теории множеств начинаются с «нестандартного анализа» Робинсона. В шестой главе Строян обсуждает элементарные аспекты этого предмета и с успехом выявляет скрытую роль, которую бесконечно малые играют в дифференциальной геометрии.

Последние три главы выходят за пределы обычной логики первого порядка. Некоторые расширения логики первого порядка упоминаются в последнем параграфе первой главы и

обсуждаются более подробно в последнем параграфе второй главы. Из всех известных расширений логика $L_{\omega\omega}$ имеет наиболее удовлетворительную теорию моделей. Эта логика и ее допустимые фрагменты обсуждаются в седьмой главе, написанной Маккаи.

Последняя глава, принадлежащая Коку и Рейесу, носит совершенно иной характер. Она дает теоретико-категорную точку зрения на некоторые аспекты теории моделей и других частей логики.

Планировалось включить еще главу о стабильности и главу об абстрактной теории моделей. Это оказалось невозможным, поэтому обзор теории стабильности содержится в § 7 главы 2*). Абстрактная теория моделей обсуждается в конце первой главы и затрагивается во второй главе.

К теории моделей относятся также работа Рабина о разрешимых и неразрешимых теориях и работа Ацела об индуктивных определениях. Они помещены в книге «Теория рекурсии».

Х. Дж. Кейслер

*) См. также Дополнение, написанное Е. А. Палютиным. — *Прим. ред.*

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Джон Барвайс

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Предисловие	13
§ 2. Что и как можно выразить в логике первого порядка	14
§ 3. Формализация логики первого порядка	25
§ 4. Теорема о полноте	30
§ 5. За пределами логики первого порядка	49
Литература	54

§ 1. Предисловие

Эта вводная глава написана (конечно, не идеально) для математиков, не знакомых с математической логикой, и по существу является объяснительной. Возможно, кто-нибудь уже начал читать последнюю главу этой книги и увяз лишь потому, что не усвоил основных понятий. Для большинства читателей быстрое чтение § 2 и введения к §§ 4 и 5 будет вполне достаточным.

Современная математика может быть описана как наука об абстрактных объектах таких, как вещественные числа, функции, поверхности, алгебраические системы или что-то в этом роде. Математическая логика описывает новое направление в этой науке, сосредоточивая внимание на языке, используемом в математике, на способах определения абстрактных объектов и на законах логики, которыми мы руководствуемся, когда рассуждаем об этих объектах. Логикой предприняли это изучение с надеждой понять природу математического опыта и в конечном счете внести вклад в математику как важными результатами, возникающими в самой логике (вторая теорема Гёделя о неполноте является наиболее известным примером), так и их приложениями к другим разделам математики. Главы этой книги предназначены для иллюстрации обоих аспектов математической логики.

Современная математическая логика берет начало от мечты Лейбница об универсальном исчислении, которое может включать в себя всю умственную деятельность, в частности всю математику. Эта мечта была слишком грандиозной, чтобы Лейбниц

воплотил ее. Его работы в этом направлении были в основном забыты и мало повлияли на развитие логики. Фреге, Пеано, Рассел, Уайтхед, Гильберт, Скулем, Гёдель, Тарский и их последователи, вооруженные более сильными абстрактными методами, исходя из актуальных проблем оснований математики (по крайней мере у Рассела и Гильберта), осуществили значительную часть мечты Лейбница.

§ 2. Что и как можно выразить в логике первого порядка

В этом параграфе мы преследуем весьма скромную цель: с помощью примеров дать почувствовать читателю, что может быть выражено в логике первого порядка, а что нет. Большинство наших примеров взято из арсенала понятий современной алгебры, с которым большинство математиков имеет хотя бы шапочное знакомство.

Набор начальных строительных блоков логики первого порядка состоит из логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\neg$ (не), $\rightarrow$ (влечет), символа равенства $=$, кванторов $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует), бесконечной последовательности переменных $x, y, z, x_1, y_1, \dots$ и круглых скобок $(,)$, необходимых для однозначного прочтения формул.

Кроме этих логических символов, можно ввести множество L примитивных нелогических символов. Например, если мы работаем с абелевыми группами, то множество L состоит из функционального символа $+$ для группового сложения и константного символа 0 для нулевого элемента. Если мы работаем с упорядоченными, то L содержит символ для отношения $<$. При изучении теории множеств L имеет символ для отношения $\in$. Довольно скучное формальное определение формулы логики первого порядка отложим до следующего параграфа. Здесь мы только подчеркнем, что формулы суть определенные *конечные* цепочки символов.

Слово «первый» в фразе «логика первого порядка» служит для того, чтобы отличать логику этого вида от более сильных логик (таких, как логика второго порядка или слабая логика второго порядка), в которых используются некоторые нелогические понятия (такие, как множество или натуральное число) как заданные. В частности, в логике первого порядка кванторы $\forall$ и $\exists$ всегда действуют на некотором данном множестве M . Логика же второго порядка разрешает одному из кванторов действовать на подмножествах множества M и на функциях F , отображающих, скажем, $M \times M$ в M . (Логика третьего порядка разрешает использовать кванторы по множествам функций и т. д.) Слабая логика второго порядка разрешает использовать кванторы по ко-

нечным подмножествам множества M и по натуральным числам. Имеются веские основания рассматривать логику первого порядка в качестве основного языка математики, это будет обсуждаться в § 5. Пока же мы предполагаем, что у читателя имеется собственная мотивировка для изучения логики первого порядка.

Теория групп

Первые несколько наших примеров взяты из теории групп. Рассмотрим следующие понятия:

- (a) группа,
- (b) абелева группа,
- (c) абелева группа, в которой порядок всякого элемента $\leq n$,
- (d) полная группа,
- (e) группа без кручения,
- (f) периодическая группа.

Понятия (a)–(c) легко задаются несколькими аксиомами логики первого порядка. Понятия (d) и (e) требуют бесконечного списка аксиом. Последнее понятие (f) не является понятием логики первого порядка. Посмотрим, почему.

Группа G есть тройка $G = (G, +, 0)$ (где G — непустое множество, $0 \in G$, $+$ — функция, отображающая $G \times G$ в G), которая удовлетворяет следующим аксиомам или высказываниям логики первого порядка:

$$\forall x \forall y \forall z [x + (y + z) = (x + y) + z], \quad (1)$$

$$\forall x [x + 0 = x], \quad (2)$$

$$\forall x \exists y [x + y = 0]. \quad (3)$$

Логик может сказать, что G является *моделью* для (1), (2), (3) и написать $G \models (1), (2), (3)$ вместо того, чтобы говорить, что G удовлетворяет (1), (2), (3).

Абелева группа есть группа, удовлетворяющая аксиоме

$$\forall x \forall y [x + y = y + x]. \quad (4)$$

Выбор символа « $+$ » в (1)–(4) является лишь соглашением, не имеющим существенного значения.

Для того чтобы выразить понятие (c), мы заменяем формальный терм $(x + x)$ термом $2x$, терм $((x + x) + x)$ термом $3x$ и по индукции заменяем терм $(nx + x)$ термом $(n + 1)x$. В абелевой группе G порядок всякого элемента $\leq n$, если G является моделью для выражения

$$\forall x [x = 0 \vee 2x = 0 \vee \dots \vee nx = 0], \quad (5)$$

являющегося простым высказыванием логики первого порядка.

Абелева группа G является *полной*, если

$$\forall n \geq 1 \forall x \exists y [ny = x]. \quad (6)$$

Это выражение можно считать предложением слабой логики второго порядка, но оно не является аксиомой логики первого порядка, так как первый квантор действует на множестве положительных натуральных чисел, а не на рассматриваемой области G . Мы можем, однако, заменить это выражение следующим бесконечным списком аксиом:

$$\forall x \exists y [2y = x], \quad (6)_2$$

$$\forall x \exists y [3y = x], \quad (6)_3$$

$$\forall x \exists y [ny = x], \quad (6)_n$$

(Мы опускаем $(6)_1$ в силу тривиальности $\forall x \exists y [x = y]$.) Для большинства целей эффективно представимый бесконечный список аксиом практически так же хорош, как и конечный список. Однако стоит убедиться для собственного удовлетворения, что не просто недостаток воображения заставляет нас использовать бесконечный список формул для выражения этого понятия.

2.1. Предложение. Любое конечное множество предложений, истинное во всех полных абелевых группах, истинно и в некоторой неполной абелевой группе.

Другими словами, понятие полной абелевой группы не является конечно аксиоматизируемым в логике первого порядка. Доказательство этого результата приведем несколькими параграфами ниже. Это же мы обнаружим, если попытаемся аксиоматизировать понятие абелевой группы без кручения:

$$\forall n \geq 1 \forall x [x \neq 0 \rightarrow nx \neq 0]. \quad (7)$$

Это предложение слабой логики второго порядка превращается в бесконечный список аксиом логики первого порядка:

$$\forall x [x \neq 0 \rightarrow nx \neq 0]. \quad (7)_n$$

Имеет место соответствующий отрицательный результат.

2.2. Предложение. Понятие абелевой группы без кручения не является конечно аксиоматизируемым в логике первого порядка.

Абелева группа G является периодической группой, если выполнено

$$\forall x \exists n \geq 1 [nx = 0]. \quad (8)$$

Это выражение является предложением слабой логики второго порядка, но оно не является предложением логики первого порядка, так как в нем имеется квантор $\exists n$ по натуральным числам. Мы можем попытаться имитировать (5), однако получается вот что:

$$\forall x [x = 0 \vee 2x = 0 \vee \dots \vee nx = 0 \dots] \quad (8)'$$

Выражения такого сорта аналогичны бесконечному формальному степенному ряду, и изучение таких «бесконечных формул» оказывается невыгодным (см. 5.3 и главы 2 и 7), однако это и не является частью обычной логики первого порядка. Следующий результат проясняет ситуацию.

2.3. Предложение. Множество предложений логики первого порядка, истинных во всех периодических абелевых группах, истинно в некоторой непериодической абелевой группе H .

На самом деле мы покажем, что если G — абелева группа, множество порядков элементов которой не ограничено, то существует непериодическая группа H такая, что $G \equiv H$. Последнее означает, что каждое предложение логики первого порядка, истинное в G , также истинно в H и наоборот. Поэтому класс периодических групп не может быть охарактеризован даже множеством аксиом первого порядка — конечным или бесконечным.

Результаты о неаксиоматизируемости

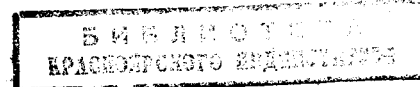
Имеются два стандартных метода для доказательства неаксиоматизируемости. Они являются следствиями теоремы компактности и будут доказаны в § 4. Мы воспользуемся этими методами для доказательства результатов данного параграфа.

2.4. Теорема компактности (Гёдель — Мальцев). Пусть T — произвольное множество аксиом логики первого порядка. Если для каждого конечного подмножества T_0 множества T существует модель для всех аксиом из T_0 , то существует модель для всех аксиом из T .

Иногда более удобным является альтернативная форма теоремы компактности. Будем писать $T \models \psi$ для обозначения того, что ψ является логическим следствием T , т. е. ψ истинна на всех моделях, на которых истинны все аксиомы T . Тогда теорема компактности эквивалентна утверждению: если $T \cup \{\psi\}$ — множество предложений логики первого порядка и $T \models \psi$, то существует конечное $T_0 \subseteq T$ такое, что $T_0 \models \psi$. Чтобы показать, что это следует из 2.4, применим 2.4 к $T \cup \{\neg \psi\}$, где $\neg \psi$ утверждает ложность ψ . Чтобы доказать 2.4 из этого варианта теоремы компактности, предположим, что ψ — некоторый абсурд, как, например, $\exists x (x \neq x)$. Теорема компактности не верна для логики второго порядка или даже для слабой логики второго порядка, как покажет доказательство теоремы 2.1.

Другое свойство логики первого порядка, иногда используемое для доказательства неаксиоматизируемости, есть следующая теорема Лёвенгейма — Скулема. Этот важный принцип сохраняется и для слабых логик второго порядка, но не для логики второго порядка.

567982



2.5. Теорема Лёвенгейма—Скулема. Пусть κ — бесконечный кардинал, и пусть T — множество аксиом первого порядка мощности $\leq \kappa$. Если существует модель, в которой все аксиомы T истинны, то существует модель для T , множество элементов которой имеет мощность $\leq \kappa$.

З а м е ч а н и е. Если множество L нелогических символов конечно или даже счетно, как это было до сих пор, то, так как всякая формула есть конечная последовательность, число формул логики первого порядка может быть только счетным. Следовательно, в силу 2.5 для таких L всякое множество T аксиом, имеющее модель, имеет и счетную модель.

Доказательство предложения 2.1. Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ — конечное множество предложений логики первого порядка, истинных во всех полных абелевых группах, и пусть φ — конъюнкция $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$. Наша задача заключается в доказательстве истинности φ в некоторой непустой абелевой группе. Применим второй вариант теоремы компактности. Пусть T — множество аксиом (1)–(4) плюс все аксиомы (6). Тогда T — множество аксиом для полной абелевой группы. Предположим, что $T \models \varphi$. По теореме компактности существует такое конечное $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \models \varphi$. Это означает существование такого натурального N , что φ истинна на всех абелевых группах, удовлетворяющих условию $\forall x \exists y [ny = x]$ для $n = 2, \dots, N$. (Эта часть доказательства является общей для многих доказательств.) Рассмотрим первый попавшийся пример, пусть Z_p — группа целых чисел по модулю p для некоторого простого $p > N$. Группа Z_p является моделью для $\forall x \exists y [ny = x]$ при $n < p$, так как отображение, переводящее x в nx , однозначно, следовательно, есть отображение на. Таким образом, φ истинно в Z_p . Однако Z_p непуста, так как $px = 0$ для всех $x \in Z_p$. $\square$

Доказательство предложения 2.2 оставляем читателю, так как оно очень похоже на доказательство предложения 2.1.

Доказательство предложения 2.3. Пусть $G = \langle G, +, 0 \rangle$ — произвольная (возможно, периодическая) группа такая, что для каждого n существует элемент $x_n \in G$ порядка $\geq n$. Например, G может быть суммой всех Z_p по всем простым p . Мы покажем, что существует непериодическая группа H , удовлетворяющая в точности тем же предложениям логики первого порядка, что и G . Опять используем теорему компактности, на этот раз ее первый вариант. Возьмем новый константный символ c , и пусть T состоит из всех предложений (не содержащих c), истинных в группе $\langle G, +, 0 \rangle$, плюс предложения $2c \neq 0$, $3c \neq 0$, $4c \neq 0$ и т. д. Таким образом, T — множество предложений языка, который имеет имя c для нового выделенного элемента. Если $H = \langle H, +, 0, c \rangle$ удовлетворяет всем аксиомам T , то $\langle H, +, 0 \rangle$ будет группой, на которой выполняются все ак-

сиомы, выполняющиеся на G , однако H не будет периодической, поскольку выделенный элемент c имеет бесконечный порядок. Осталось показать, что существует H , являющаяся моделью для T . По теореме компактности достаточно найти модель для каждого конечного $T_0 \subseteq T$. Однако это просто. Для заданного T_0 пусть N — наибольшее из таких n , что предложение $nc \neq 0$ содержится в T_0 . Тогда можем использовать x_N , чтобы сделать T_0 истинным, т. е. T_0 истинно в группе $\langle G, +, 0, x_N \rangle$ с выделенным элементом x_N , так как порядок x_N не меньше N . $\square$

Действительные числа

Наша первая серия примеров относилась к целым классам систем, теперь мы обратимся к одной конкретной системе, упорядоченному полю $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ вещественных чисел. Большинство изучающих анализ знакомо с построением $\mathbb{R}$ и с доказательством того, что некоторые аксиомы характеризуют $\mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма. Но эти аксиомы невыразимы в логике первого порядка.

2.6. Предложение. Не существует множество аксиом логики первого порядка, характеризующих $\mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма.

Доказательство. По замечанию после 2.5 множество предложений, истинных в $\mathbb{R}$, счетно. По теореме Лёвенгейма—Скулема это множество имеет счетную модель. $\square$

Так как теорема Лёвенгейма—Скулема верна и для слабой логики второго порядка, доказательство 2.6 показывает, что существует счетное поле с теми же выражающимися в слабой логике второго порядка свойствами, что и $\mathbb{R}$, среди которых имеется аксиома Архимеда

$$\forall x \exists n [x \leq n1],$$

где $n1$ — терм $\underbrace{((1 + 1) + \dots + 1)}_{n \text{ раз}}$, как и ранее. Это является

утверждением слабой логики второго порядка, так как квантор $\exists n$ действует не на элементах произвольной модели, а на натуральных числах.

Доказательство 2.6 вводит в заблуждение, поскольку оно создает впечатление, что приходится иметь дело с существованием неопределимых вещественных чисел, так как имеется больше вещественных чисел, чем возможно определить в логике первого порядка со счетным числом символов. Мы можем исправить это впечатление, доказав аналогичный результат для обогащенной системы $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, <, r \rangle_{r \in \mathbb{R}}$, где каждое вещественное число r трактуется как выделенный элемент и ему присваивается имя (т. е. константный символ). Мы продолжаем эту (слегка путающую),

практику использования одной и той же буквы для обозначения объекта и его имени.

2.7. Предложение. *Существует неархимедово поле $*R$, расширяющее R , которое удовлетворяет всем предложениям логики первого порядка, истинным в R , даже если мы позволяем присваивать имена всем вещественным числам.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 2.3, но фактически проще его. Мы возьмем новый константный символ c и пишем предложение

$$c > r$$

для всех вещественных чисел r . К этим предложениям добавляем все предложения логики первого порядка, истинные на R . По теореме компактности эти множества предложений имеют модель $*R$. Мы можем рассмотреть R как подмодель $*R$. Поскольку аксиомы поля истинны в R , они также истинны в $*R$. $\square$

Большинство теорем исчисления выражается в логике первого порядка, так что они сохраняются в $*R$. Таким образом, теорема 2.5 — далеко не отрицательный результат и фактически является основанием анализа бесконечно малых или, другими словами, «нестандартного анализа» Робинсона. (Элемент $1/c$ будет положительным бесконечно малым.) Таким образом, не будет большим преувеличением сказать, что придуманное Лейбницем универсальное символическое исчисление привело в конечном счете к оправданию использования им бесконечно малых в исчислении. Подробнее об этом см. главу 6, в частности п. 1.1.

В силу предложения 2.7 естественно задать вопрос: какая из обычных аксиом вещественных чисел не является аксиомой логики первого порядка? Ответ такой: аксиома полноты,

$\forall X \subseteq R$ [если $X \neq \emptyset$ ограничено, то X имеет наименьшую верхнюю грань].

Это не является предложением логики первого порядка, так как квантор общности пробегает множество всех подмножеств X множества R . Следовательно, доказательство единственности множества вещественных чисел на самом деле относится к универсуму теории множеств.

Кольца и поля

Как мы увидели, полнота поля вещественных чисел невыразима в логике первого порядка. Мы закончим введение в логику первого порядка рассмотрением некоторых свойств колец и полей, которые выражаются в логике первого порядка.

В этом обсуждении наш основной язык (или словарь) L имеет нелогические символы $+$, $\cdot$, 0 , 1 . Основные аксиомы для

коммутативных колец с единицей состоят из приведенных выше (1)–(4) (аксиомы абелевой группы) плюс следующие аксиомы, выразимые в логике первого порядка:

$$\forall x \forall y [x \cdot y = y \cdot x],$$

$$\forall x \forall y \forall z [(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)],$$

$$\forall x \forall y \forall z [x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)],$$

$$\forall x [x \cdot 1 = x],$$

$$0 \neq 1.$$

Кольцо $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ является областью целостности, если оно является моделью для

$$\forall x \forall y [x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)].$$

Прежде чем перейти к полям, сделаем паузу, слегка коснувшись теории колец, а именно понятия идеала. Собственный идеал коммутативного кольца $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ — это непустое собственное подмножество $I \subseteq R$, которое является подгруппой аддитивной группы кольца $\mathfrak{R}$ так, что для всех $x \in R$ и всех $y \in I$ имеем $x \cdot y \in I$. Для того чтобы выразить это в логике первого порядка, добавим имя для I и рассмотрим систему вида $(\mathfrak{R}, I) \models \varphi$ для φ — предложения логики первого порядка. Тогда I — идеал кольца $\mathfrak{R}$, если $(\mathfrak{R}, I) \models$ модель для следующих четырех аксиом. Чтобы не затрагивать теорию множеств, мы понимаем I как одноэлементное отношение и пишем $I(x)$ вместо $x \in I$. Две средние аксиомы утверждают, что I является подгруппой относительно $+$; последняя утверждает, что I замкнута относительно умножения на элементы из $\mathfrak{R}$:

$$I(0) \wedge \neg I(1),$$

$$\forall x \forall y [I(x) \wedge I(y) \rightarrow I(x + y)],$$

$$\forall x \forall y [I(x) \wedge x + y = 0 \rightarrow I(y)],$$

$$\forall x \forall y [I(y) \rightarrow I(x \cdot y)].$$

Идеал I является простым идеалом, если $(\mathfrak{R}, I)$ — модель для

$$\forall x \forall y [I(x \cdot y) \rightarrow I(x) \vee I(y)].$$

До сих пор было так: либо естественное определение понятия высказывалось в языке первого порядка, либо мы были в состоянии показать, что данное понятие невыразимо в логике первого порядка. Это не всегда так просто. В самом деле, некоторые из наиболее полезных приложений логических средств (как, например, ультрапроизведения) связаны с нахождением некоторого эквивалента в логике первого порядка для понятия, которое непосредственно в ней не выразимо. Это часто нетривиально, однако мы дадим лишь один простой пример. Другие примеры можно найти в главах 3 и 4.

Идеал I является *максимальным идеалом* в $\mathfrak{R}$, если $(\mathfrak{R}, I) \rightarrow$ модель для

$$\forall J [I \subseteq J \wedge J \text{ — идеал} \rightarrow J = I \text{ или } J = R]. \quad (9)$$

Это такое же предложение логики второго порядка, как и аксиома полноты для вещественных чисел. Однако мы можем найти эквивалентную ему аксиому в логике первого порядка, если вспомнить лемму, утверждающую, что I максимален в том и только в том случае, если фактор-кольцо $\mathfrak{R}/I$ является полем. Последнее означает, что для любого x , если $x + I$ не совпадает со смежным классом $0 + I$, то существует y такой, что $(x + I)(y + I) = 1 + I$. Так как $(x + I) \cdot (y + I) = x \cdot y + I$, мы можем выразить (9) аксиомой

$$\forall x [\neg I(x) \rightarrow \exists y (x \cdot y + I = 1 + I)],$$

которая детально записывается так:

$$\forall x [\neg I(x) \rightarrow \exists y \exists z (I(z) \wedge xy + z = 1)]. \quad (9)'$$

Несмотря на то, что формула (9)' теряет интуитивное содержание (9), она эквивалентна (9) и является формулой логики первого порядка, что очень важно.

Вот хорошее упражнение. Кольцо $\mathfrak{R}$ является *кольцом главных идеалов*, если $\mathfrak{R}$ есть модель для предложения логики второго порядка

$$\forall I [I \text{ — идеал} \rightarrow \exists x \forall y (I(y) \leftrightarrow \exists z (y = zx))].$$

Это предложение имеет ту же общую форму, что и (9), но, в отличие от (9), не может быть выражено в логике первого порядка. Действительно, простые соображения компактности показывают, что существует кольцо $\mathfrak{R}$ с теми же самыми выразимыми в логике первого порядка свойствами, что и кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ (записывается $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}$), но $\mathfrak{R}$ не является кольцом главных идеалов.

Коммутативное кольцо $\mathfrak{R}$ является *полем*, если $\mathfrak{R}$ — модель для

$$\forall x \exists y [x \neq 0 \rightarrow x \cdot y = 1].$$

Поле R имеет *характеристику* p (p — простое число), если R — модель для

$$p1 = 0.$$

С другой стороны, R — поле *характеристики* 0, если

$$\forall p [p \text{ простое} \rightarrow p1 \neq 0]. \quad (10)$$

Вы узнали предложение слабой логики второго порядка? Область действия кванторов не над $\mathfrak{R}$, а над простыми числами. Поэтому мы должны представить (10) бесконечным списком

аксиом:

$$p1 \neq 0 \quad (10)_p$$

для каждого простого p . Результат, соответствующий предложениям 2.1 и 2.2, становится теперь более интересным. Доказательство подобно доказательству предложения 2.1.

2.8. Предложение и е. Любое предложение ϕ логики первого порядка, истинное во всех полях характеристики 0, истинно во всех полях характеристики p для достаточно больших p , т. е. для p , больших некоторого N_ϕ .

Введем сокращения x^2 для терма $(x \cdot x)$ и по индукции x^{n+1} для $(x^n \cdot x)$. Поле R алгебраически замкнуто, если оно является моделью для всех аксиом вида ($n \neq 0$)

$$\forall x_0 \dots \forall x_n [x_n \neq 0 \rightarrow \exists y (x_n y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \dots + x_1 y + x_0 = 0)],$$

которые говорят, что каждый полином степени n имеет корень.

Теория множеств

Аксиомы для теории множеств, выразимые в логике первого порядка, очень подробно обсуждались у Шенфилда. Основной язык L теории множеств включает в себя только символ принадлежности $\in$. К этим аксиомам пришли после тщательного анализа нашего неформального понятия образования множеств, множеств, состоящих из множеств; множеств, состоящих из множеств, состоящих из множеств, и т. д. до бесконечности. Получившееся множество аксиом называется ZF по имени Цермело и Френкеля. Первая аксиома ZF — это аксиома объемности: множество полностью определяется своими элементами. Это записывается так:

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y].$$

Свойства математических теорий

Различные теории первого порядка, которые мы обсуждали ранее, имеют радикально разные свойства с логической точки зрения. Упомянем некоторые из них.

Теория абелевых групп является *разрешимой теорией*, в то время как теория групп неразрешима. Именно, можно дать эффективную процедуру, которая по произвольному предложению ϕ , включающему $+$ и 0 , скажет, является ли ϕ логическим следствием (1) — (4), т. е. будет ли ϕ верно на всех абелевых группах. Для теории групп такой процедуры не может быть. Эти вопросы разбираются в главе I «Теории рекурсии» и более полно в главе 3 там же.

Теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики является *полной теорией*, что означает, что любые два алгебраически замкнутых поля F_1, F_2 одной характеристики

имеют одни и те же свойства, выражимые в логике первого порядка, т. е. $F_1 \equiv F_2$. С другой стороны, большинство теорий, выражимых в логике первого порядка, не являются полными. Например, к теории колец мы можем добавить либо $\forall x \exists y [x \neq 0 \rightarrow x \cdot y = 1]$, либо его отрицание $\neg \forall x \exists y [x \neq 0 \rightarrow x \cdot y = 1]$, получая *непротиворечивые теории*. Это в точности означает тот тривиальный факт, что некоторые кольца являются телами, а некоторые нет. Комбинируя упомянутую выше полноту теории алгебраически замкнутых полей с теоремой о полноте, по теореме 7.2 из главы 1 «Теории рекурсии» получаем, что теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0 разрешима. Рассмотрим эффективную процедуру P для определения того, является ли предложение, включающее $+$, $\cdot$, 0 , 1 , следствием этой теории. Поскольку все модели этой теории имеют одни и те же свойства, выражимые в логике первого порядка, мы можем применить P для определения того, какие предложения, включающие $+$, $\cdot$, 0 , 1 , верны в поле $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ комплексных чисел. Это имеется в виду, когда говорят, что поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел является *разрешимой моделью*.

Известная теорема Гёделя о неполноте показывает, что кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел *неразрешимо*. Так, любая механическая процедура, которая пытается определить по предложению φ , включающему $+$, $\cdot$, 0 , 1 , является ли оно верным в $\mathbb{Z}$, должна ошибиться для бесконечно многих предложений. Следствием этого является то, что любой эффективный список T верных аксиом $\mathbb{Z}$, которые мы можем написать, должен неизбежно дать неполную теорию (поскольку в противном случае доказательство разрешимости $\mathbb{C}$ подошло бы и для $\mathbb{Z}$). На самом деле вторая теорема Гёделя о неполноте показывает, как можно найти предложение φ , верное в $\mathbb{Z}$, но не являющееся следствием T . Глава 1 «Теории доказательств и конструктивной математики» содержит тщательное обсуждение теоремы Гёделя о неполноте. Эти результаты обычно формулируются на языке системы $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ натуральных чисел, а не на языке кольца $\mathbb{Z}$. Стандартное определение $\mathbb{Z}$ через $\mathbb{N}$ показывает, что результаты верны также для $\mathbb{Z}$.

Имеется некоторое количество тем, которые можно было бы сейчас рассмотреть, но более разумно предоставить этим темам говорить самим за себя в последующих главах. В главе 2 обсуждаются основы теории моделей для логики первого порядка. В главе 3 рассматривается конструкция ультрапроизведения, алгебраический вариант теоремы компактности. Глава 4 также представляет особый интерес для алгебраистов, поскольку в ней фактически рассматриваются теоретико-модельные аналоги понятия «алгебраически замкнутый» и их применение в алгебре. Фундаментальные результаты Акса и Кочена, а также Ершова обсуждаются в обоих этих главах.

§ 3. Формализация логики первого порядка

Пусть L — фиксированное множество функциональных символов, предикатных символов и константных символов. Мы можем не ограничивать множество L , но обычно L конечное либо счетно бесконечное. Каждому функциональному символу $f \in L$ ставится в соответствие положительное целое число $\#(f)$; если $n = \#(f)$, то f называется n -арным функциональным символом. Аналогично каждый предикатный символ $R \in L$ связан с положительным целым числом $\#(R)$; если $n = \#(R)$, то R называется n -арным предикатным символом. Предикатные символы называют также символами отношений.

Примеры. Язык $*$) $L = \{+, 0\}$, соответствующий теории групп, не имеет предикатных символов и $\#(f) = 2$. Язык $L = \{=\}$ теории множеств не имеет функциональных или константных символов и $\#(=) = 2$.

Если дан язык L , то имеется естественное понятие *алгебраической системы* или просто *системы* для языка L . Под алгебраической системой $\mathfrak{M}$ понимается непустая совокупность M объектов, которая является областью действия кванторов, вместе с интерпретацией основных предикатных, функциональных и константных символов из L .

3.1. Определение. *Алгебраическая система* для языка L есть пара $\mathfrak{M} = \langle M, F \rangle$, где M — непустое множество и F — отображение с областью определения L такое, что (пишем $x^{\mathfrak{M}}$ вместо $F(x)$) **):

- (i) если $R \in L$ — n -арный предикатный символ, то $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$;
- (ii) если $f \in L$ — n -арный функциональный символ, то $f^{\mathfrak{M}}: M^n \rightarrow M$;
- (iii) если $c \in L$ — константный символ, то $c^{\mathfrak{M}} \in M$.

Будем записывать $\mathfrak{M}$ как $\langle M, R^{\mathfrak{M}}, \dots, f^{\mathfrak{M}}, \dots, c^{\mathfrak{M}}, \dots \rangle$.

Приведенное выше понятие можно назвать «теоретико-множественным», так как иногда желательно рассматривать более общее понятие системы, в котором M может и не быть множеством. Например, естественная система $\mathfrak{M}$ для языка $L = \{=\}$ теории множеств имеет в качестве M совокупность V всех множеств, которая сама не является множеством. Однако вследствие теоремы о полноте любая совокупность аксиом, имеющая модель в каком-то приемлемом смысле, имеет не очень большую, в разумном смысле, теоретико-множественную модель. Начиная с этого места, будем рассматривать только теоретико-множественные алгебраические системы.

*) В советской литературе вместо термина «язык» чаще используется термин «сигнатура». — Прим. ред.

**) Множество M в дальнейшем называется носителем или основным множеством системы $\mathfrak{M}$. — Прим. ред.

Пример. Если $L = \{+, 0\}$ — язык теории групп, то система для L имеет вид $\mathcal{M} = \langle M, +^M, 0^M \rangle$, где M — непустое множество, $+^M: M \times M \rightarrow M$ и $0^M \in M$. Обычно используем G вместо $\mathcal{M}$ и опускаем надстрочные символы.

Обратимся к синтаксическим понятиям логики первого порядка. Напомним основные строительные блоки $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, =, \forall, \exists, x, y, z, \dots$, упомянутые ранее в § 2. Пусть L — фиксированный язык. Всякая конечная последовательность, элементами которой являются основные символы или элементы L , называется *выражением*. Из множества выражений выделим те выражения, которым можно придать смысл.

3.2. Определение. Термы языка L образуют наименьшее множество выражений, содержащее $x, y, z, \dots$, все константные символы L (если таковые имеются) и замкнутое относительно правила образования: если $t_1, \dots, t_n$ — термы L и если $f \in L$ — n -местный функциональный символ, то выражение $f(t_1 \dots t_n)$ является термом языка L . Терм, не содержащий переменных, называется *замкнутым*.

Если в L нет функциональных символов, то правило образования термов бессодержательно и множество термов состоит только из переменных и константных символов.

Пример. Если $L = \{+, 0\}$, то, строго говоря, термами являются выражения вида

$$+(xy), \quad +(0+(x0)).$$

Естественно сокращать эти выражения так:

$$x+y, \quad 0+(x+0)$$

соответственно. Как и в § 2, мы используем n х для сокращения $(\dots((x+x)+x)+\dots+x)$ для $n \geq 1$. Для этого языка замк-

нутыми термами являются выражения, построенные из 0 и $+$. Они неинтересны с точки зрения теории групп.

3.3. Определение. Атомная формула языка L — это выражение одного из следующих двух видов:

$$(t_1 = t_2), \quad R(t_1 \dots t_n),$$

где t_1 и t_2 — термы языка L , а $R \in L$ — произвольный n -местный предикатный символ.

Примеры. В языке $L = \{+, 0\}$ теории групп нет предикатных символов, поэтому атомными формулами являются лишь утверждения о равенстве термов, например, выражения вида

$$(x+y=z), \quad (x+y=y+x), \quad (x+y)+z=x+(y+z).$$

В языке $L = \{\in\}$ теории множеств, в котором термы — это переменные, атомными формулами являются формулы вида

$(v=w)$ и $\in(vw)$: для переменных v, w . Последнюю мы записываем $v \in w$.

3.4. Определение. Формулы первого порядка языка L образуют наименьшее множество выражений, содержащее атомные формулы и замкнутое относительно следующего правила образования:

(i) если φ, ψ — формулы, то выражения

$$\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$$

также являются формулами;

(ii) если φ — формула и v — переменная, то $(\exists v\varphi)$ и $(\forall v\varphi)$ также являются формулами.

В выражениях, где один и тот же символ повторяется, скобки только подразумеваются. Так, например, $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$ есть $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ и $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \theta$ есть $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta))$.

Пример. Пусть $L = \{+, 0\}$. Следующие выражения являются формулами:

$$(x+y=0),$$

$$(\exists y(x+y=0)),$$

$$(\forall x(\exists y(x+y=0))).$$

Последняя формула — это более формальная запись предложения (3) из § 2. Заметим, что в первой формуле обе переменные x и y как бы «свободно плавают», во второй формуле y «ограничена сверху» символом $\exists$ и в последней формуле обе переменные x и y «ограничены». Лишь последняя формула интуитивно воспринимается как аксиома. Аналогичная ситуация имеется в анализе, где $x^2 + 2x + 1$ является выражением, содержащим переменную, однако в выражении

$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx$$

x «ограничена» в том смысле, что выражение не зависит от x . Определенный интеграл выполняет ту же синтаксическую роль, какую играют кванторы $\exists$ и $\forall$. Следующее определение, введенное индукцией по длине формул, делает понятие «свободной переменной» точным.

3.5. Определение. Множество $FV(\varphi)$ свободных переменных формулы φ определяется следующим образом:

(i) Если φ — атомная формула, то $FV(\varphi)$ есть в точности множество переменных, встречающихся в φ ;

(ii) $FV(\neg \varphi) = FV(\varphi)$;

(iii) $FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi \vee \psi) = FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;

(iv) $FV(\exists v\varphi) = FV(\forall v\varphi) = FV(\varphi) - \{v\}$.

Обычная практика использования записи $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ означает, что $FV(\varphi) \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ и, возможно, не все $v_1, \dots, v_n$ являются действительно свободными в φ . Это подобно тому, как в алгебре, записывая в виде $p(x_1, \dots, x_n)$ полином p от переменных $x_1, \dots, x_n$, мы не предполагаем, что все коэффициенты ненулевые.

3.6. Определение. *Предложением (первого порядка) языка L* называется формула, не содержащая свободных переменных.

До сих пор термы, формулы и предложения языка L являлись просто конечными совокупностями символов. Нам надо удостовериться в том, что если мы припишем заданные значения нашим логическим символам, то формулы § 2 выражают то, что мы подразумеваем. Это делается с помощью определения отношения выполнимости $\mathfrak{M} \models \varphi$ между системами, с одной стороны (слева), и предложениями, с другой.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ — система для языка L. *Интерпретация* в $\mathfrak{M}$ есть функция s с областью определения, равной множеству переменных языка L, и областью значений, равной подмножеству M . Мы понимаем s как приписывание значения $s(v)$ переменной v . Мы можем теперь определить для каждого терма t языка L функцию $t^{\mathfrak{M}}$, которая отображает интерпретации на элементы M .

3.7. Определение. Пусть дана система M . Для терма t языка L определим $t^{\mathfrak{M}}$ следующим образом:

- (i) если t — константный символ c , то $t^{\mathfrak{M}}(s) = c^{\mathfrak{M}}$;
- (ii) если t — переменная v , то $t^{\mathfrak{M}}(s) = s(v)$ для всех s ;
- (iii) если t — терм $f(t_1, \dots, t_n)$, то для всех s определяем

$$t^{\mathfrak{M}}(s) = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(s), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(s)).$$

Так как каждый из $t_1, \dots, t_n$ в (iii) проще, чем t , мы можем допускать индукцией по сложности термов, что термы $t_1^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}}$ уже определены. Значение $f^{\mathfrak{M}}$ определено, так как $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система для языка L и $f \in L$. Читатель может проверить, что если $s_1(v) = s_2(v)$ для всех переменных v , входящих в t , то $t^{\mathfrak{M}}(s_1) = t^{\mathfrak{M}}(s_2)$. Таким образом, $t^{\mathfrak{M}}$ как функция зависит только от конечного числа значений ее аргумента s .

Пример. Пусть L — язык колец, и пусть t — терм или полином

$$x^2 + 2x + 1.$$

Тогда $t^{\mathfrak{M}}$ для любого кольца $\mathfrak{R}$ есть соответствующая функция из $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$. Если $s(x) = a$, то $t^{\mathfrak{M}}(s) = a^2 + 2a + 1$, причем операции $+$ и $\cdot$ будут те же, что и в кольце $\mathfrak{R}$.

В последующем определении мы используем $s \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix}$ для обозначения интерпретации s' , которая совпадает с s , за исключением $s'(v) = a$.

3.8. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — L-система. Для всех интерпретаций s и всех формул φ мы определяем отношение

$$\mathfrak{M} \models \varphi[s]$$

(читается: формула φ истинна или удовлетворяется в $\mathfrak{M}$ при интерпретации s) следующим образом:

- (i) $\mathfrak{M} \models (t_1 = t_2)[s]$ равносильно $t_1^{\mathfrak{M}}(s) = t_2^{\mathfrak{M}}(s)$;
- (ii) $\mathfrak{M} \models R(t_1, \dots, t_n)[s]$ равносильно $(t_1^{\mathfrak{M}}(s), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(s)) \in R^{\mathfrak{M}}$;
- (iii) $\mathfrak{M} \models \neg \varphi[s]$ равносильно тому, что неверно $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$;
- (iv) $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)[s]$ равносильно $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ и $\mathfrak{M} \models \psi[s]$;
- (v) $\mathfrak{M} \models (\varphi \vee \psi)[s]$ равносильно либо $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$, либо $\mathfrak{M} \models \psi[s]$, либо и то, и другое;
- (vi) $\mathfrak{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)[s]$ равносильно тому, что либо не выполняется $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$, либо $\mathfrak{M} \models \psi[s]$;
- (vii) $\mathfrak{M} \models (\exists v \varphi)[s]$ равносильно существованию $a \in M$ такого, что $\mathfrak{M} \models \varphi \left[s \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} \right]$;
- (viii) $\mathfrak{M} \models (\forall v \varphi)[s]$ равносильно тому, что для всех $a \in M$ имеет место $\mathfrak{M} \models \varphi \left[s \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix} \right]$.

В этом определении нет ничего неожиданного. Это только подтверждает нашу уверенность в том, что все символы означают то, что мы хотим от них. Возможно, некоторое смущение вызывает использование в (i) нами $=$ в качестве действительного равенства (с правой стороны) и в качестве символа для равенства (с левой стороны). Многим авторам это не нравится, и они используют в качестве символа для равенства нечто вроде $\equiv$ или $\approx$.

Читатель должен заметить, что справедливость $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ зависит только от значений $s(v)$ для переменных, которые действительно свободны в φ . Это означает, что если $s_1(v) = s_2(v)$ для всех v , свободных в φ , то $\mathfrak{M} \models \varphi[s_1]$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \varphi[s_2]$. Таким образом, если φ есть $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ и $a_1 = s(v_1), \dots, a_n = s(v_n)$, то мы можем без смущения писать $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ вместо $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$. Точно так же, если φ — предложение, то истинность или ложность $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ совершенно не зависит от s . Поэтому мы будем писать $\mathfrak{M} \models \varphi$ (читается: $\mathfrak{M}$ является моделью φ или $\mathfrak{M}$ удовлетворяет φ), если для какой-

нибудь (следовательно, для каждой) интерпретации s имеет место $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$.

Если $\varphi(v)$ — формула и t — терм, то $\varphi(t/v)$ (или проще $\varphi(t)$) означает результат замены всевозможных свободных вхождений переменной v термом t . Используя это обозначение, мы всегда предполагаем, что ни одна из переменных в t не может быть связанной переменной в φ . Если это будет не так, мы всегда можем переименовать связанные переменные, иначе мы бы исказили значение $\varphi(t)$. Например, если t есть ω , а $\varphi(v)$ есть $\exists \omega(v \neq \omega)$, то $\varphi(t)$ должно утверждать $\exists \omega'(\omega \neq \omega')$, а не $\exists \omega(\omega \neq \omega)$.

Система $\mathfrak{M}$ является моделью множества Φ предложений, если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$. Если даны две системы $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ для языка L , то мы говорим, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ элементарно эквивалентны, и пишем $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, если и только если для всех предложений φ языка L $\mathfrak{M} \models \varphi$ равносильно $\mathfrak{N} \models \varphi$. Если $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ (т. е. $\mathfrak{M}$ изоморфна $\mathfrak{N}$ в обычном смысле), то $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Наконец, пусть $\mathcal{K}$ — класс систем для языка L . Класс $\mathcal{K}$ (конечно) аксиоматизируем, если существует (конечное) множество Φ предложений языка L , выражимых в логике первого порядка, такое, что для любой модели $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ является моделью Φ . Это согласуется с нашей терминологией в § 2. Некоторые авторы называют конечно аксиоматизируемый класс элементарным классом или ЕС-классом. Тогда им приходится называть аксиоматизируемый класс элементарным в широком смысле или ЕС_Δ-классом.

§ 4. Теорема о полноте

Несомненно, самым важным открытием древних греков в области математики было понятие доказательства, что превращало математику в дедуктивную науку. Каждая теорема φ должна иметь доказательство из множества T более или менее ясно сформулированных предложений или аксиом. Доказательство должно показать, что заключение φ следует из аксиом в T только по законам логики.

Само собой разумеется, что математик понимает, что такое доказательство, и, в частности, он сможет строго проверить, в действительности ли представленное полное доказательство устанавливает заключение из данных предположений. Возникает естественный вопрос: могут ли понятия «законы логики» и «доказательства» быть математически точными?

В этом параграфе мы хотим показать, что математически точное понятие « φ доказуемо из T » совершенно поглощает интуитивное понятие « φ следует из T только по законам логики» для φ и T , выражимых в логике первого порядка. Более полно, мы хо-

тим запастись конкретным множеством заведомо верных правил вывода таких, что φ следует из T только по законам логики, если и только если существует доказательство φ из аксиом T , которое использует только допустимые правила вывода.

Существует кажущееся препятствие к осуществлению нашей программы. Как мы можем надеяться доказать такой результат, не зная правильно, что значит следовать только по законам логики? К счастью, нам не нужно это знать. Все, что нам нужно, — это согласиться, что φ будет верной во всех алгебраических системах, которые являются моделями T , что означает $T \models \varphi$. Итак, чтобы реализовать нашу цель, более чем достаточно показать, что $T \models \varphi$, если и только если φ можно доказать из T . Это и есть содержание теоремы Гёделя о полноте.

План этого параграфа следующий. В 4.1 и 4.2 мы обращаем внимание на так называемую логику высказываний. В 4.3—4.8 мы обсуждаем возникший по существу благодаря Генкину метод сведения некоторых проблем логики первого порядка к проблемам в логике высказываний. Доказательства теоремы компактности и теоремы Лёвенгейма — Скулема даются этим методом. В конце параграфа мы представляем два различных варианта теоремы Гёделя о полноте, которые следуют из 4.8, для формальной системы гильбертовского типа (4.9) и для формальной системы генценовского типа (4.13).

Логика высказываний

Удобно разделить изучение логики первого порядка на две части: тривиальную часть, относящуюся к пропозициональным связкам $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$, и часть, связанную с равенством и кванторами $\forall$ и $\exists$.

Пусть P — множество объектов, называемых *первичными формулами*. Они могут быть предложениями какого-то естественного языка или, например, буквами $p, q, r, \dots$ алфавита. В нашем приложении они будут теми формулами логики первого порядка, которые не являются пропозициональными комбинациями более простых формул, т. е. атомными формулами и формулами, начинающимися с кванторов. Множество *пропозициональных формул* над P — это наименьшее множество, содержащее элементы P и замкнутое относительно правил: если A, B — пропозициональные формулы, то таковыми являются $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B)$ и $(A \rightarrow B)$. *Элементарными составляющими* пропозициональной формулы A являются просто первичные формулы, из которых состоит A .

Примеры. Пусть $P = \{p, q, r\}$. Следующие выражения являются пропозициональными формулами над P :

$$p, \quad q, \quad (p \vee q), \quad (q \vee p), \quad ((p \vee q) \rightarrow (q \vee p)).$$

Мы хотим точно показать, как истинность или ложность пропозициональной формулы зависит от истинности или ложности ее элементарных составляющих. Тогда, сделав еще один шаг, мы сможем показать, как решать, какие пропозициональные формулы всегда истинны независимо от истинности или ложности их элементарных составляющих; такими являются, например, формулы вида $(p \vee \neg p)$, $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ и т. д. Такие формулы называются пропозициональными *тавтологиями*, так как они справедливы только благодаря своей синтаксической форме. Эти тавтологии обеспечивают небольшой первый шаг в выделении законов логики.

Пусть t и f — различные новые символы, которые нужно понимать как «истина» и «ложь». Истинностная оценка на множестве P первичных формул есть по определению функция $v: P \rightarrow \{t, f\}$. Для каждой истинностной оценки v мы определяем расширение $\bar{v}$ на множество всех пропозициональных формул над P индукцией по длине формулы следующим образом:

$$\bar{v}(A) = v(A), \text{ если } A \text{ элементарная;}$$

$$\bar{v}(\neg A) = \begin{cases} f, & \text{если } \bar{v}(A) = t, \\ t, & \text{если } \bar{v}(A) = f; \end{cases}$$

$$\bar{v}(A \wedge B) = \begin{cases} t, & \text{если } \bar{v}(A) = \bar{v}(B) = t, \\ f & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\bar{v}(A \vee B) = \begin{cases} t, & \text{если } \bar{v}(A) = t \text{ или } \bar{v}(B) = t, \text{ или и то, и другое,} \\ f & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\bar{v}(A \rightarrow B) = \begin{cases} f, & \text{если } \bar{v}(A) = t \text{ и } \bar{v}(B) = f, \\ t & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эти определения можно объединить в следующую таблицу истинности:

A	B	$\neg A$	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \rightarrow B)$
t	t	f	t	t	t
t	f	f	f	t	f
f	t	t	f	t	t
f	f	t	f	f	t

Построенная таблица истинности позволяет полностью анализировать, как зависит истинность или ложность пропозиционных формул от истинности или ложности элементарных составляющих. Мы иллюстрируем метод для формулы

$$((\neg(p \wedge \neg q) \wedge q) \rightarrow p).$$

Мы опускаем в таблице некоторые символы t .

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg(p \wedge \neg q) \wedge q$	$(\neg(p \wedge \neg q) \wedge q) \rightarrow p$
t	t	f	f			
t	f	t	t	f	f	
f	t	f	f		t	t
f	f	t	f		f	

Таким образом, единственный случай, когда заключительная формула ложна, — это когда p ложна, а q истинна.

4.1. Определение. Пропозициональная формула A над P является *тавтологией*, если $\bar{v}(A) = t$ при всех истинностных оценках $v: P \rightarrow \{t, f\}$. Формула A совместна, если $\bar{v}(A) = t$ для некоторого $v: P \rightarrow \{t, f\}$.

С помощью таблиц истинности можно легко установить, является пропозициональная формула тавтологией или нет или же совместна она или нет. Если писать $A \leftrightarrow B$ вместо $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, то мы видим, что следующие формулы являются тавтологиями:

$$A \vee \neg A \quad (\text{закон исключенного третьего}),$$

$$\neg(A \wedge \neg A) \quad (\text{закон противоречия}),$$

$$\left. \begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \\ \neg(A \vee B) &\leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \end{aligned} \right\} \quad (\text{законы де Моргана}),$$

$$\neg\neg A \leftrightarrow A \quad (\text{закон двойного отрицания}).$$

Для того чтобы убедиться, что метод таблиц истинности является совершенно простым, мы приводим пример с тремя элементарными составляющими p, q, r :

$$[(\underbrace{(p \wedge q) \rightarrow r}_A) \wedge (\underbrace{\neg r \rightarrow q}_B)] \rightarrow (\underbrace{p \rightarrow r}_C)$$

p	q	r	$p \wedge q$	A	$\neg r$	B	$A \wedge B$	C	$[A \wedge B] \rightarrow C$
t	t	t			f				
t	t	f		f	t		f	f	
t	f	t	t		f	t	t	t	
t	f	f	t		t				
f	t	t	f		f	t	f	t	
f	t	f	f		t				
f	f	t	f		f	t	f	t	
f	f	f	f		t				

Так как «ложь» отсутствует в последней колонке, формула действительно является тавтологией.

На практике существует более короткий метод проверки того, является ли формула тавтологией или нет. Работая в обратном направлении, нужно пытаться находить подходящую оценку, которая делала бы формулу ложной. На самом деле, чтобы $[A \wedge \neg B] \rightarrow C$ была ложной, необходимо иметь $\bar{v}(A) = \bar{v}(B) = t$, а $\bar{v}(C) = f$. Чтобы $\bar{v}(C) = f$, мы должны иметь $\bar{v}(p) = t$, $\bar{v}(r) = f$. Чтобы $\bar{v}(B) = t$, нужно $\bar{v}(q) = t$, так как $\bar{v}(\neg r) = t$. Но тогда получается $\bar{v}(p) = \bar{v}(q) = t$, а $\bar{v}(r) = f$, откуда $\bar{v}(A) = f$, что дает противоречие. Таким образом, вышеприведенная формула является тавтологией.

Множество T пропозициональных формул называется *совместным* (в смысле логики высказываний), если существует такая истинностная оценка, что $\bar{v}(A) = t$ для всех $A \in T$.

4.2. Теорема компактности для логики высказываний. *Множество T пропозициональных формул совместно тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество T совместно.*

Доказательство. Мы приведем два доказательства непротиворечивой части.

Первое доказательство. Для удобства в этом доказательстве будем называть множество S *конечно совместным*, если каждое конечное подмножество S совместно. Мы докажем, что каждое конечно совместное множество совместно. Назовем S *максимальным* конечно совместным, если S конечно совместно и для каждой формулы A либо $A \in S$, либо $(\neg A) \in S$.

Существует естественное соответствие между истинностными оценками v и максимальными конечно совместными множествами. Произвольной v сопоставим множество $S_v = \{A \mid \bar{v}(A) = t\}$. Это множество является максимальным конечно совместным. Наоборот, пусть дано максимальное конечно совместное множество S , определим $v(p) = t$, если $p \in S$; $v(p) = f$, если $p \notin S$. Следующие утверждения непосредственно выводятся из того, что S — максимальное конечно совместное множество, и влекут (индукцией по формулам A), что $S = S_v$:

$B \in S$ эквивалентно $(\neg B) \notin S$,

$(A \wedge B) \in S$ эквивалентно $A \in S$ и $B \in S$,

$(A \vee B) \in S$ эквивалентно $A \in S$ или $B \in S$,

$(A \rightarrow B) \in S$ эквивалентно $A \notin S$ или $B \in S$.

Например, докажем, что $(A \vee B) \in S$ влечет $A \in S$ или $B \in S$. Допустим, что это неверно. Тогда $(A \vee B) \in S$, но $(\neg A) \in S$ и $(\neg B) \in S$ в силу максимальной. Но тогда $\{(A \vee B), \neg A,$

$\neg B\}$ — конечное несовместное подмножество S , получили противоречие.

Сделанные выше замечания показывают, что доказательство совместности конечно совместного множества T эквивалентно нахождению максимального конечно совместного множества $S \supseteq T$. Мы покажем, как строить такое S в случае, когда основное множество P первичных формул счетно. По существу то же самое доказательство работает, когда P вполне упорядочено, и, следовательно, по аксиоме выбора оно годится для всех P . Доказательство для вполне упорядоченных множеств P не нуждается в аксиоме выбора.

Если P счетно, то мы можем занумеровать множество всех его формул: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. Определим $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$ следующим образом:

$$T_0 = T;$$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{A_n\}, & \text{если это множество конечно совместно,} \\ T_n \cup \{\neg A_n\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $S = \bigcup T_n$. Очевидно, $T \subseteq S$ и для каждого A либо $A \in S$, либо $(\neg A) \in S$. Для завершения доказательства нам нужно только показать, что каждое T_n и, следовательно, S конечно совместны. Это доказывается индукцией по n ; для $n = 0$ наше утверждение выполнено, так как T конечно совместно. Предположим, что T_n конечно совместно, и докажем, что T_{n+1} конечно совместно.

Случай 1. $T_{n+1} = T_n \cup \{A_n\}$, T_{n+1} по определению конечно совместно.

Случай 2. $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg A_n\}$. Это может произойти, только когда существует конечное подмножество $T'_n \subset T_n$ такое, что $T'_n \cup \{A_n\}$ несовместно. Предположим, что T_{n+1} не является конечно совместным. Тогда существует конечное подмножество $T''_n \subseteq T'_n$ такое, что $T''_n \cup \{\neg A_n\}$ несовместно. Но тогда $T'_n \cup T''_n$ будучи конечным подмножеством T_n , совместно. Любая оценка v , делающая все элементы $T'_n \cup T''_n$ истинными, должна делать истинной либо A_n , либо $\neg A_n$, что противоречит несовместности $T'_n \cup \{A_n\}$ и $T''_n \cup \{\neg A_n\}$.

Таким образом, в обоих случаях T_{n+1} является конечно совместным. Это заканчивает доказательство.

Второе доказательство. Мы можем дать более короткое доказательство, используя теорему Тихонова. Правда, оно скрывает основную идею конструкции и тем самым менее пригодно для других конструкций в теории моделей. Пусть $2 = \{t, f\}$ — двухэлементное пространство с дискретной топологией, и пусть $X = 2^P$ — пространство всех истинностных оценок над P с тихоновской топологией. По теореме Тихонова X — компактное хаус-

дорфово пространство. Следовательно, если $\mathcal{F} = \{F_i | i \in I\}$ — снабженное индексами семейство замкнутых подмножеств и если $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, то существует конечное $I_0 \subseteq I$ такое, что $\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset$. Для каждой пропозициональной формулы A пусть $F_A = \{v \in X | \bar{v}(A) = t\}$. Мы утверждаем, что каждое F_A является открыто-замкнутым в X . Для первичной формулы $A = p \vee F_p$ открыто по определению топологии на произведении. Но $X - F_p = \{v | v(p) = f\}$ также открыто по определению, таким образом, F_p открыто-замкнуто. Для более сложных формул утверждение доказывается индукцией по длине формулы и с помощью следующих равенств:

$$F_{(A \vee B)} = F_A \cup F_B, \quad F_{(A \wedge B)} = F_A \cap F_B, \\ F_{(A \rightarrow B)} = F_B - F_A, \quad F_{\neg A} = X - F_A.$$

Это доказывает данное утверждение. Пусть теперь T такое, как в теореме. По предположению, для каждого конечного $T_0 \subseteq T$ существует $\bar{v}$, которая делает все $\phi \in T_0$ истинными, т. е. $\bigcap_{A \in T_0} F_A \neq \emptyset$. Ввиду компактности $X \cap_{A \in T} F_A \neq \emptyset$. Итак, существует истинностная оценка $\bar{v}$, делающая все $A \in T$ истинными. $\square$

Стандартным примером простого применения теоремы компактности для логики высказываний является доказательство того, что если бесконечная карта не может быть раскрашена k красками, то некоторая конечная подкарта не может быть раскрашена k красками. Чтобы доказать это, каждой «стране» на карте присваивается k первичных формул по одной для каждого цвета и выписываются тривиальные «аксиомы», утверждающие, что каждая страна делает «истинным» ровно один цвет и соседние страны делают «истинными» разные цвета. Другим примером является доказательство теоремы Тихонова для 2^P , использующее доказательство теоремы компактности.

Использование констант Генкина для сведения логики первого порядка к логике высказываний

В этом разделе мы применяем понятия логики высказываний к логике первого порядка. Если дан язык L , то пусть P будет множество формул языка L , которые либо являются атомными, либо начинаются с $\forall$ или $\exists$. Таким образом, тавтологией логики первого порядка является любая формула, которая верна независимо от истинностной оценки для первичных формул. Например, следующие формулы являются тавтологиями:

$$\forall x R(x) \vee \neg \forall x R(x), \\ \neg (\forall x R(x) \wedge \exists x S(x)) \leftrightarrow (\neg \forall x R(x) \vee \neg \exists x S(x)),$$

и следующие формулы не являются тавтологиями:

$$(c = c), \\ \forall x (R(x)) \vee \neg \forall x (R(x)), \\ \neg \exists x S(x) \rightarrow \forall x \neg S(x).$$

Первые две формулы являются первичными, третья имеет вид $|p \rightarrow q$ для первичных p и q . Мы видим, что тавтологии логики первого порядка поверхностно касаются всей совокупности «законов логики».

Сформулируем одну очевидную лемму.

4.3. Л е м м а. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$ — алгебраическая система для языка L , и пусть s — интерпретация в $\mathfrak{M}$, т. е. функция, отображающая переменные языка L в M . Существует истинная оценка v первичных формул языка L такая, что для всех формул ϕ языка L $\mathfrak{M} \models \phi[s]$, если и только если $\bar{v}(\phi) = t$. В частности, любое множество предложений, истинное в $\mathfrak{M}$, совместно в смысле логики высказываний.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для первичной формулы ϕ определим $v(\phi) = t$, если $\mathfrak{M} \models \phi[s]$, в противном случае $v(\phi) = f$. Так как каждая формула строится из первичных формул посредством пропозициональных связей, заключение теоремы очевидно. $\square$

Обратное утверждение неверно. Например, следующее множество предложений совместно в смысле логики высказываний (оно состоит из первичных формул), но не имеет модели:

$$(\forall x (R(x) \rightarrow S(x)), \quad \forall x R(x), \quad \exists x \neg S(x)).$$

Это произошло из-за того, что не было анализа кванторной структуры предложений.

4.4. А к с и о м ы р а в е н с т в а. Аксиомы равенства следующие (здесь $u, w, u_1, \dots$ обозначают переменные и символы констант языка L):

$$(u = u), \\ (u = w) \rightarrow (w = u), \\ (u_1 = u_2 \wedge u_2 = u_3) \rightarrow (u_1 = u_3), \\ (s_1 = w_1 \wedge \dots \wedge u_n = w_n) \rightarrow (R(u_1 \dots u_n) \rightarrow R(w_1 \dots w_n)), \\ (u_1 = w_1 \wedge \dots \wedge u_n = w_n) \rightarrow (t(u_1 \dots u_n) = t(w_1 \dots w_n)),$$

где R — произвольный n -местный предикатный символ языка L и t — произвольный n -местный терм языка L . Аксиомы равенства являются верными в том смысле, что для любой аксиомы ϕ , любой модели $\mathfrak{M}$ и любой интерпретации s $\mathfrak{M} \models \phi[s]$. Последние четыре аксиомы равенства можно назвать законами Лейбница.

Свидетельское расширение $L(C)$ языка L строится так. Пусть $C_0 = \emptyset$, и если C_n определено, то пусть $L_n = L \cup C_n$. Для каж-

дой формулы $\varphi(v)$ языка L_0 с одной свободной переменной пусть $c_{\varphi(v)}$ будет новым константным символом, и пусть C_1 будет множеством всех таких $c_{\varphi(v)}$. Пусть задано C_n , выберем различные новые константные символы $c_{\varphi(v)}$ для каждой формулы $\varphi(v)$ языка L_n , не являющейся формулой языка L_{n-1} (т. е. некоторая константа из C_n содержится в φ). Пусть C_{n+1} будет C_n , объединенное с множеством всех новых $c_{\varphi(v)}$. Пусть $C = \bigcup_n C_n$, и пусть $L(C) = L \cup C$.

4.5. Определение. Константный символ $c_{\varphi(v)}$ называется *константой-свидетелем*, а предложения

$$I \quad (\exists v \varphi(v)) \rightarrow \varphi(c_{\varphi(v)}),$$

$$II \quad \varphi(c_{\neg \varphi(v)}) \rightarrow \forall v \varphi(v)$$

называются *аксиомами Генкина* типа I и II.

Неформальная идея, кроющаяся за аксиомами Генкина, совершенно проста. Если $\exists v \varphi(v)$ истинна в модели, находим элемент a , удовлетворяющий $\varphi(v)$, и присваиваем ему новое имя $c_{\varphi(v)}$. Если $\forall v \varphi(v)$ ложна, находим контрпример b и присваиваем ему новое имя $c_{\neg \varphi(v)}$.

4.6. Определение. T_{Henkin} есть по определению множество всех предложений $L(C)$, которые либо являются аксиомами Генкина, либо имеют вид

$$III \quad \forall v \varphi(v) \rightarrow \varphi(t), \quad t \text{ — замкнутый терм языка } L(C);$$

$$IV \quad \varphi(t) \rightarrow \exists v \varphi(v), \quad t \text{ — замкнутый терм языка } L(C).$$

Две последние формулы называются *кванторными аксиомами*. Их неформальный смысл очевиден.

Множество T_{Henkin} не выполняется в каждой $L(C)$ -системе, но следующая лемма показывает, что каждую L -систему можно превратить в $L(C)$ -систему, которая будет моделью теории T_{Henkin} , используя идеи, которые мы высказали после 4.5.

Если $L \subseteq L'$ — языки, а $\mathcal{M}' = \langle M, F' \rangle$ — алгебраическая система для языка L' , то $\mathcal{M} = \langle M, F' \upharpoonright L \rangle$ называется *обеднением* $\mathcal{M}'$ до языка L и $\mathcal{M}'$ называется *обогащением* $\mathcal{M}$ до языка L' . Таким образом, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ отличаются тем, что в $\mathcal{M}'$ заданы символы из $L' - L$.

4.7. Лемма. Пусть $\mathcal{M}$ — система для языка L , и пусть $L(C)$ — свидетельское обогащение L . Существует такая интерпретация константных символов C на элементах $\mathcal{M}$, что полученное обогащение $\mathcal{M}'$ является моделью T_{Henkin} .

Доказательство. Кванторные аксиомы типа III, IV на самом деле выполняются, нам необходимо позаботиться об аксиомах типа I, II. Предположим, мы смогли получить истинность

аксиом типа I, и рассмотрим характерную аксиому типа II:

$$\varphi(c_{\neg \varphi(v)}) \rightarrow \forall v \varphi(v).$$

Допустим, что посылка выполняется на обогащении, а заключение нет. Но тогда $\exists v \neg \varphi(v)$ истинна и по I $\neg \varphi(c_{\neg \varphi(v)})$ истинна, получили противоречие. Таким образом, если все аксиомы типа I истинны, то и все аксиомы типа II тоже истинны.

Мы приступаем к заданию интерпретации констант из C_n на элементах из M индукцией по n . Если $c_{\varphi(v)} \in C_1$, то $\exists v \varphi(v)$ является предложением языка L и, следовательно, имеет смысл в $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M} \models \exists v \varphi(v)$, то выбираем некоторое $a \in M$, так что $\mathcal{M} \models \varphi(a)$, и положим $c_{\varphi(v)}^{\mathcal{M}} = a$. Если $\mathcal{M} \models \neg \exists v \varphi(v)$, то определим $c_{\varphi(v)}^{\mathcal{M}}$ произвольно. Это делает все аксиомы Генкина типа I с $c_{\varphi(v)} \in C_1$ истинными. Но как только константы проинтерпретированы, все предложения языка $L_1 = L \cup C_1$ приобретают смысл, так что мы можем продолжить те же рассуждения и приписать элементы из M константам $c_{\varphi(v)} \in C_2$ и т. д. $\square$

Каноническая система для $L(C)$ — это система $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$ такая, что каждое $a \in M$ есть значение некоторой $c \in C$, т. е. $M = \{c^{\mathcal{M}} \mid c \in C\}$. Множество Eq , упомянутое в 4.8, есть множество аксиом равенства для языка $L(C)$, которые являются предложениями $L(C)$, т. е. не содержат переменных.

Следующая лемма может показаться технической, но эквивалентность (i) и (iii) показывает, что мы можем сводить проблемы, относящиеся к моделям теорий первого порядка, к по существу тривиальным вопросам логики высказываний. Однако за это приходится расплачиваться. Даже в случае, когда T в (i) конечно, пропозициональная теория в (iii) бесконечна.

4.8. Основная лемма (сведение к логике высказываний). Пусть L — язык первого порядка, и пусть $L(C)$ — его свидетельское расширение. Для произвольного множества T предложений языка L следующие условия эквивалентны:

(i) T имеет модель, т. е. существует L -система $\mathcal{M}$, которая является моделью для всех предложений T ;

(ii) существует каноническая $L(C)$ -система $\mathcal{M}$, которая является моделью для всех предложений T ;

(iii) $T \cup T_{\text{Henkin}} \cup \text{Eq}$ совместно в смысле логики высказываний.

Доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна, (i) $\Rightarrow$ (iii) следует из леммы 4.3. Докажем (iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть v — истинностная оценка первичных предложений $L(C)$ такая, что $v(\varphi) = t$ для всех $\varphi \in T \cup T_{\text{Henkin}} \cup \text{Eq}$. Мы построим каноническую модель $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$ такую, что для всех предложений φ языка $L(C)$

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ равносильно } v(\varphi) = t.$$

Основное назначение T_{Henkin} — это обеспечить выполнимость для

$\bar{v}$ следующих условий:

$$\bar{v}(\exists v \varphi(v)) = t \text{ равносильно } \bar{v}(\varphi(c_{\varphi(v)})) = t,$$

$$\bar{v}(\forall v \varphi(v)) = t \text{ равносильно } \bar{v}(\varphi(t)) = t \text{ для всех}$$

замкнутых термов t языка $L(C)$.

Условия, позволяющие нам строить модель $\mathfrak{M}$ из констант в C , аналогичны построению группы из порождающих (элементов C) и определяющих соотношений (аксиом T). Определяя $\mathfrak{M}$, мы должны (а) построить носитель M для $\mathfrak{M}$, (б) для каждого n -местного предикатного символа $R \in L$ определить n -местное отношение $R^{\mathfrak{M}}$, интерпретирующее R , (с) определить для каждого n -местного функционального символа $f \in L$ интерпретацию $f^{\mathfrak{M}}: M^n \rightarrow M$ и (д) определить для каждого константного символа c из $L \cup C$ элемент $c^{\mathfrak{M}} \in M$. Для построенной таким путем системы $\mathfrak{M}$ остается лишь проверить, что для всех предложений φ языка $L(C)$ имеет место $\mathfrak{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\bar{v}(\varphi) = t$. Это условие предсказывает нам, как мы должны удовлетворить изложенные выше условия (б)–(д).

(а) Определим отношение эквивалентности $\approx$ на C следующим образом:

$$c \approx d \text{ тогда и только тогда, когда } v((c = d)) = t.$$

Аксиомы равенства гарантируют, что $\approx$ является отношением эквивалентности на C . Допустим, например, что $c \approx d$ и $d \approx e$. Проверим, что $c \approx e$. Так как $v(c = d) = t$, $v(d = e) = t$ ввиду $c \approx d$, $d \approx e$ и $\bar{v}((c = d \wedge d = e) \rightarrow c = e) = t$ в силу того, что это предложение является аксиомой равенства, то $v(c = e) = t$, поэтому $c \approx e$. Пусть

$\bar{c}$ — класс эквивалентности для c , и пусть $M = \{\bar{c} | c \in C\}$.

(б) Определим $R^{\mathfrak{M}}$ следующим образом:

$$\langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \text{ тогда и только тогда, когда } v(R(c_1 \dots c_n)) = t.$$

Чтобы это определение было корректным, мы должны проверить, что если

$$\bar{c}_1 = d_1, \dots, \bar{c}_n = d_n \text{ и } \langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}},$$

то $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$. Это следует из того, что

$$c_1 = d_1 \wedge \dots \wedge c_n = d_n \wedge R(c_1 \dots c_n) \rightarrow R(d_1 \dots d_n)$$

является аксиомой равенства, и следовательно, истинно при интерпретации v .

(с) Пусть даны $c_1, \dots, c_n \in C$ и $f \in L$. Утверждается, что существует $c \in C$ такая, что $v(f(c_1 \dots c_n) = c) = t$. Обозначим через $\varphi(x)$ формулу $(f(c_1 \dots c_n) = x)$. Если $\bar{v}(\exists v \varphi(v)) = t$, то $v(f(c_1 \dots c_n) = c_{\varphi}) = t$. Предположим, что $\bar{v}(\exists v \varphi(v)) = f$. Но

T_{Henkin} содержит предложение $(\varphi(f(c_1 \dots c_n)) \rightarrow \exists v \varphi(v))$, так что $v(\varphi(f(c_1 \dots c_n))) = t$. Это говорит о том, что атомное предложение $(f(c_1 \dots c_n) = f(c_1 \dots c_n))$ принимает значение t при интерпретации v . Но $\bar{v}(c_i = c_i) = t$ ($i = 1, \dots, n$) и $\bar{v}((c_1 = c_1 \wedge \dots \wedge c_n = c_n) \rightarrow (f(c_1 \dots c_n) = f(c_1 \dots c_n))) = t$, так как это аксиомы равенства; получаем противоречие. Таким образом, $v(\exists v \varphi(v)) = t$ всегда. Мы можем определить $f^{\mathfrak{M}}(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) = \bar{c}$ для $c \in C$ так, что $v(f(c_1 \dots c_n) = c) = t$. Рассуждения, подобные рассуждениям в (б), показывают, что $f^{\mathfrak{M}}$ определено корректно.

(д) Если $c \in C$, то пусть $c^{\mathfrak{M}} = \bar{c}$. Если $d \in L$, то рассуждения, подобные используемым в (с), показывают, что существует $c \in C$ такое, что $v(d = c) = t$, тогда пусть $d^{\mathfrak{M}} = \bar{c}$ для этого c .

Этим завершается построение $\mathfrak{M}$, и для атомных предложений конструкция гарантирует $\mathfrak{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $v(\varphi) = t$. Для других предложений доказываем это же индукцией по длине формулы. Для пропозициональных связок доказательство тривиально. Например, $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$ равносильно $\mathfrak{M} \models \varphi$ и $\mathfrak{M} \models \psi$ (по определению $\models$), что равносильно $\bar{v}(\varphi) = t$ и $\bar{v}(\psi) = t$ (по индукционному предположению), а это равносильно $\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = t$. Предположим, что φ есть $\exists x \psi(x)$. Если $v(\varphi) = t$, то по вышеприведенному условию существует c такое, что $\bar{v}(\psi(c)) = t$, поэтому по индукционному предположению $\mathfrak{M} \models \psi(c)$, но тогда $\mathfrak{M} \models \exists x \psi(x)$, т. е. $\mathfrak{M} \models \varphi$. С другой стороны, если $\bar{v}(\varphi) = f$, то $\bar{v}(\exists x \psi(x)) = f$, следовательно, согласно T_{Henkin} , $\bar{v}(\psi(t)) = f$ для всех замкнутых термов t языка $L(C)$. В частности, для каждого $c \in C$ $\bar{v}(\psi(c)) = f$. По индукционному предположению $\mathfrak{M} \models \neg \psi(c)$ для всех $c \in C$. Так как каждый элемент M есть значение некоторого $c \in C$, то $\mathfrak{M} \models \neg \exists x \psi(x)$. Таким образом, $\mathfrak{M} \models \exists x \psi(x)$ тогда и только тогда, когда $\bar{v}(\exists x \psi(x)) = t$. Доказательство для случая, когда φ начинается с $\forall$, аналогично. $\square$

Основная лемма дает метод фактического построения моделей теорий, исходя из символов. В частности, она дает нам непосредственные доказательства теорем компактности и Лёвенгейма — Скулема.

Доказательство теоремы компактности (2.4). Пусть T — множество предложений языка L первого порядка таких, что каждое конечное подмножество T имеет модель. Нужно показать, что T имеет модель. Вследствие (iii) $\Rightarrow$ (i) основной леммы достаточно показать, что $T \cup T_{Henkin} \cup Eq$ совместно в смысле логики высказываний. Но по теореме компактности для логики высказываний последнее будет установлено, если доказать, что для каждого конечного подмножества $T_0 \subset T$ совместна теория $T_0 \cup T_{Henkin} \cup Eq$, а это следует из условия теоремы и (i) $\Rightarrow$ (iii) основной леммы. $\square$

Другие доказательства этой теоремы приводятся в главах 2 и 3. Она следует также непосредственно из нижеследующей теоремы о полноте.

Доказательство теоремы Лёвенгейма — Скулема (2.5). Пусть κ — некоторый бесконечный кардинал, и пусть L — язык с $\leq \kappa$ символами. Так как каждая формула языка L является конечной последовательностью символов, то мощность множества формул языка L не превосходит κ . Вспомним определение свидетельского расширения $L(C)$ языка L , где $C = \bigcup_n C_n$. По индукции легко видеть, что мощность каждого C_n

не превосходит κ , так что мощность C также $\leq \kappa$. Таким образом, мощность всякой канонической системы для $L(C)$ не превосходит κ , поэтому желаемый результат является непосредственным следствием (i) $\Rightarrow$ (ii) основной леммы. $\square$

Теорема о полноте для формальной системы $\mathcal{H}$ гильбертовского типа

Существует несколько довольно различных подходов к теореме о полноте в зависимости от различного понимания доказательства. В пределах каждого подхода существует множество вариаций точной формулировки, в зависимости от которой одни законы мышления взяты как основные, другие — как производные. Мы не будем принимать во внимание небольшие вариации. Различные основные подходы очень важны, хотя для различных понятий доказательства они применяются по-разному. Необходимо запомнить, что, в то время как существует много понятий доказательства, имеется только одно, как показывает теорема о полноте, действительное понятие доказуемого для логики первого порядка.

Первый тип формальной системы, который мы изучаем, — это так называемая формальная система гильбертовского типа. Математики обычно предпочитают эту систему, так как она элегантна и легко запоминается. В 4.11 мы приводим схему формальной системы генценовского типа. Этот тип оказался очень полезным в анализе теоретико-доказательной силы различных математических теорий. При работе со студентами, которые с удовольствием осваивают формальные доказательства, пожалуй, лучше использовать разработанный Фитчем метод подчиненного доказательства или семантические таблицы Бета. Последние подробно рассматриваются в книге Смальяна [1].

В формальной системе гильбертовского типа основное ударение делается на логические аксиомы, что сводит правила вывода к минимуму. Если бы мы взяли $\exists x$ как производный символ, трактуя $\exists x \varphi$ как $\neg \forall x \neg \varphi$, то система была бы внешне еще

проще. Однако кажется более правильным рассматривать законы мышления, выражаемые этими кванторами, отдельно.

Пусть L — фиксированный язык логики первого порядка. Все формулы, данные ниже, являются формулами логики первого порядка, а все термы t являются термами L . Вспомним наше соглашение в § 3 относительно записи $\varphi(t/v)$, результата замены v на t в φ , только в случае, когда переменные в t не являются связанными в φ . Ниже мы будем писать $\varphi(t)$ вместо $\varphi(t/v)$.

Схемы аксиом для $\mathcal{H}$

- (1) Все тавтологии,
- (2) все аксиомы равенства,
- (3) все формулы вида

$$(\forall v \varphi(v)) \rightarrow \varphi(t), \quad \varphi(t) \rightarrow \exists v \varphi(v).$$

Правила вывода для $\mathcal{H}$

- (1) (*Modus ponens*). Из $(\varphi \rightarrow \psi)$ и φ следует ψ .
- (2) (*Правила обобщения*). Если переменная v не входит свободно в φ , то

из $\varphi \rightarrow \psi(v)$ следует $\varphi \rightarrow \forall y \psi(y)$,
из $\psi(v) \rightarrow \varphi$ следует $\exists y \psi(y) \rightarrow \varphi$.

Схематически эти правила обычно записываются так:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi};$$

если v не свободна в φ , то

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi(v)}{\varphi \rightarrow \forall y \psi(y)}, \quad \frac{\psi(v) \rightarrow \varphi}{\exists y \psi(y) \rightarrow \varphi}.$$

Доказательством φ из множества T (в формальной системе $\mathcal{H}$) называется конечная последовательность $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ формул, где $\varphi_n = \varphi$, а остальные являются либо аксиомами $\mathcal{H}$, либо элементами T или же следуют из предыдущих φ_i по одному из трех правил вывода. Мы говорим, что φ *доказуема из T* , и записываем $T \vdash \varphi$, если существует доказательство φ из T .

4.9. Теорема Гёделя о полноте для $\mathcal{H}$. Пусть T — множество предложений языка L . Предложение φ выводимо из T , если и только если φ истинно во всех алгебраических системах, которые являются моделями T . Символически: $T \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $T \vdash \varphi$.

Очевидная часть теоремы о полноте следует из леммы о непротиворечивости.

4.10. Лемма о непротиворечивости. Пусть T — множество предложений, $\mathcal{M}$ — модель T . Если $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ выводимо из T , то $\mathcal{M} \models \forall v_1 \dots v_n \varphi(v_1, \dots, v_n)$.

Доказательство. Индукцией по n можно доказать, что если последовательность $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — доказательство из T , то $\mathcal{M} \models \forall v_1 \dots v_n \varphi_n(v_1 \dots v_n)$. $\square$

Для доказательства теоремы о полноте необходима следующая лемма.

4.11. Л е м м а. Пусть T — множество предложений.

- (i) Если $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ и $T \vdash (\neg \varphi \rightarrow \psi)$, то $T \vdash \psi$.
- (ii) Если $T \vdash (\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow \psi$, то $T \vdash (\neg \varphi \rightarrow \psi)$ и $T \vdash (\theta \rightarrow \psi)$.
- (iii) Если v не входит в ψ и $T \vdash [(\exists u \varphi(u) \rightarrow \varphi(v)) \rightarrow \psi]$, то $T \vdash \psi$.
- (iv) Если v не входит в ψ и $T \vdash (\varphi(v) \rightarrow \forall u \varphi(u)) \rightarrow \psi$, то $T \vdash \psi$.

Доказательство. (i) Заметим, что $[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)]$ является тавтологией. Таким образом, если мы напишем доказательство $(\varphi \rightarrow \psi)$ и применим modus ponens, то получим доказательство $(\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$. Затем, написав доказательство $(\neg \varphi \rightarrow \psi)$ и применив modus ponens, получаем ψ .

(ii) Обратите внимание на то, что $[(\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow \psi] \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi)$ и $[(\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow \psi] \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)$ являются тавтологиями.

(iii) Допустим $T \vdash [(\exists u \varphi(u) \rightarrow \varphi(v)) \rightarrow \psi]$, где v не свободна в ψ . По (ii) $T \vdash (\neg \exists u \varphi(u) \rightarrow \psi)$ и $T \vdash \varphi(v) \rightarrow \psi$. Применив второе правило обобщения, имеем $T \vdash (\exists u \varphi(u) \rightarrow \psi)$. Но тогда по (i) $T \vdash \psi$. Доказательство (iv) аналогично, но использует первое правило обобщения. $\square$

Доказательство теоремы о полноте. Допустим, что $T \models \varphi$. По основной лемме (4.8) и теореме компактности для логики высказываний существует конечное множество $S \subseteq T \cup T_{\text{Henkin}} \cup E_q$ такое, что $S \cup \{\neg \varphi\}$ несовместно в смысле пропозиционального исчисления. Перечислим элементы S в виде $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_M$ следующим образом. Последовательность $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ состоит из тех элементов S , которые либо принадлежат $T \cup E_q$, либо являются кванторными аксиомами (типа III и IV), перечисленными в любом порядке. Последовательность β состоит из элементов S , которые являются генкинскими аксиомами типа I, II, но перечисляем их более внимательно. Напомним языки $L = L_0 \subset L_1 \subset \dots$ такие, что $L(C) = \bigcup_n L_n$. Определим ранг

$\varphi \in L(C)$ как наименьшее n такое, что $\varphi \in L_n$. Теперь выберем в качестве β_1 аксиому Генкина максимального ранга в S . В качестве β_2 выбираем аксиому Генкина максимального ранга в $S - \{\beta_1\}$ и т. д. В силу построения константа-свидетель, входящая в β_j , не встречается в $\beta_{j+1}, \dots, \beta_M$.

Например, если β_1 есть

$$\exists u \eta(v) \rightarrow \eta(c_{\eta(v)}),$$

то $c_{\eta(v)}$ не входит в $\beta_2, \dots, \beta_M$ ввиду условий максимальнойности на β_1 .

Помня, что $S \cup \{\neg \varphi\}$ несовместно в смысле логики высказываний и используя ассоциацию скобок направо*), мы видим, что $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_N \rightarrow \beta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_M \rightarrow \varphi)$ является тавтологией. Заменяем каждую константу-свидетель в этом предложении на различные новые переменные. Результат остается все еще тавтологией:

$$\alpha'_1 \rightarrow \alpha'_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha'_N \rightarrow \beta'_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta'_M \rightarrow \varphi',$$

но $\varphi' = \varphi$, так как φ не имеет вхождений констант-свидетелей. Каждая из формул $\alpha'_1, \dots, \alpha'_N$ является либо логической аксиомой, либо элементом T , поэтому мы можем применить N раз modus ponens и получить доказательство

$$\beta'_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta'_M \rightarrow \varphi.$$

Но теперь мы применяем части (iii) и (iv) леммы 4.11, последовательно исключая $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_M$, и получаем доказательство φ . $\square$

Заметим, что наше доказательство использует только правила вывода 4.11 (iii), (iv), следовательно, их можно использовать вместо более стандартных правил Н. Это обсуждается в книге См а л ь я н а [1].

Теорема о полноте для формальной системы G^+ генценовского типа

Системы гильбертовского типа легко определяются и допускают простое доказательство теоремы о полноте, но затруднительны в применении. Генценовские системы меняют эту ситуацию, подчеркивая важность правил вывода и сокращая роль логических аксиом до абсолютного минимума.

Буквы Γ, Δ используем для обозначения конечного множества формул. Секвенцией называется пара $\langle \Gamma, \Delta \rangle$, которая записывается $\Gamma \vdash \Delta$ и читается неформально как « Γ влечет Δ »; точнее, конъюнкция всех формул Γ влечет дизъюнкцию всех формул Δ . Записываем Γ, φ вместо $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Сперва ограничимся логикой высказываний.

Аксиомы: $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$.

*) При ассоциации скобок направо выражение $(A \rightarrow B \rightarrow C)$ понимается как $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ и т. д. — Прим. ред.

Доказательство. ($\Rightarrow$) непосредственно следует из леммы о непротиворечивости совершенно аналогично 4.10. Доказательство ($\Leftarrow$) использует основную лемму, теорему компактности для логики высказываний и 4.12. По основной лемме и теореме компактности для логики высказываний существует конечное $S \equiv T \cup T_{\text{Henkin}} \cup E_q$ такое, что каждая истинностная оценка v , делающая S истинным, делает φ истинным. Воспользуемся точными обозначениями, как в доказательстве теоремы 4.9. Пусть $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N\}$, и пусть $\alpha'_1, \dots, \alpha'_N, \beta'_1, \dots, \beta'_M$ такие, как и прежде. Тогда, если $\Gamma = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N, \beta'_1, \dots, \beta'_M\}$, то в силу 4.12 мы видим, что $\Gamma \vdash \varphi$ выводится в G^+ с использованием только аксиом и правил логики высказываний. Пусть $\Gamma_0 = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_K\}$, $K \leq N$, — подмножество $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N\}$ элементов T . Можно превратить вывод $\Gamma \vdash \varphi$ в вывод $\Gamma_0 \vdash \varphi$ следующим образом:

(1) Если φ — аксиома равенства или кванторная аксиома типа III или IV, то $\emptyset \vdash \varphi$.

(2) Если $\Gamma \vdash \Delta$, то $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \Delta \cup \Delta'$. Очевидно, что $\Gamma_0 \vdash \alpha'_i$ для всех $J < i \leq N$; тогда, применяя $N - J$ раз правило сечения, получаем вывод $\Gamma_0 \cup \{\beta'_1, \dots, \beta'_M\} \vdash \varphi$.

(3) Если $\Gamma, (\varphi \rightarrow \theta) \vdash \Delta$, то $\Gamma \vdash \Delta$, φ и $\Gamma, \theta \vdash \Delta$. Это подобно 4.11 (ii). Докажем первую секвенцию:

$\Gamma, \varphi \rightarrow \theta \vdash \Delta$ (гипотеза) $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \theta, \varphi$ (аксиома)

$\Gamma, \varphi \rightarrow \theta \vdash \Delta, \varphi$ (по 2) $\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \rightarrow \theta), \varphi (\vdash \rightarrow)$

$\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ (сечение)

Вторая секвенция доказывается аналогично. Комбинируя это с правилами $(\vdash \forall)$, $(\exists \vdash)$ и сечением, получаем:

(4) Если $\Gamma, \exists u \varphi(u) \rightarrow \varphi(v) \vdash \Delta$ и v не встречается свободно в $\Gamma \cup \Delta$, то $\Gamma \vdash \Delta$.

(5) Если $\Gamma, \varphi(v) \rightarrow \forall u \varphi(u) \vdash \Delta$ и v не встречается свободно в $\Gamma \cup \Delta$, то $\Gamma \vdash \Delta$.

Используя эти правила, удаляем $\beta'_1, \dots, \beta'_M$ из предложений и получаем вывод секвенции $\Gamma_0 \vdash \varphi$. $\square$

В нашем доказательстве теоремы о полноте для G^+ мы существенно пользовались правилом сечения, но оно не входило в доказательство пропозициональной части. Действительно ли это необходимо? Нет. Можно, работая прямо с системой G и расширяя доказательство пропозициональной части, доказать полноту си-

стемы G ; см., например, Смальян [1]. Это показывает, что правило сечения может быть исключено. Исторически все происходило как раз наоборот и составило первую важную главу в теории доказательства после теорем Гёделя о неполноте.

4.14. Теорема об устранении сечения (Генцен). Любая секвенция, которая имеет вывод с правилом сечения, имеет вывод и без него, т. е. G^+ и G имеют одни и те же выводимые секвенции.

Доказательство Генцена проходило сложной двойной индукцией, показывающей, как изменять произвольный вывод, предполагающий правило сечения, в вывод без сечения. Анализируя такие индуктивные доказательства, мы можем получить точную наименьшую верхнюю границу методов индукции, которые можно доказать в арифметике первого порядка. Эта система рассмотрена в деталях в главе 2 «Теории доказательств и конструктивной математики» об устранении сечения. Система, используемая там, легче, так как рассматривает только формулы в так называемой «нормальной форме с отрицанием».

Этим закончим обсуждение теоремы о полноте. Оставляем читателю поучительное упражнение, доказательство $\exists u [\varphi(u) \rightarrow \forall x \varphi(x)]$ в исчислениях H , G и G^+ . Неформальное доказательство состоит в нахождении y такого, что $\vdash \varphi(y)$, если такое y существует, в противном случае y произвольно. Таким образом, если $\varphi(y)$, то $\forall x \varphi(x)$. Доказательство в G^+ аналогично.

§ 5. За пределами логики первого порядка

Многие логики считают, что нет логики, кроме логики первого порядка, в том смысле, что если попытаться сделать все математические (внелогические) предположения явными, то эти аксиомы могли бы быть выражены в логике первого порядка и что неформальное понятие *доказуемости*, используемое в математике, в точности превратилось бы в формальное понятие *доказуемости в логике первого порядка*. Следуя Мартину Девису, мы будем называть эту точку зрения *тезисом Гильберта*.

Первая часть тезиса Гильберта, утверждающая, что вся классическая математика в конечном счете выразима в логике первого порядка, основана на эмпирической очевидности. И, в самом деле, было бы удивительно, если бы кто-то смог ввести новое понятие, оказывающееся очевидной частью логики. Вторая часть тезиса Гильберта, по-видимому, следует из первой части и теоремы Гёделя о полноте. Таким образом, тезис Гильберта до некоторой степени принимается многими математическими логиками, но даже те, кто принимает тезис Гильберта теоретически, весьма далеки от того, чтобы применять его на практике. Было

бы совершенно непрактично и фактически невыгодно всегда делать все внелогические предположения явными.

Пересмотрим пару примеров из § 2.

Пример. Аксиома $\forall x \exists n \geq 1 (nx = 0)$, выражающая периодичность абелевой группы, не является аксиомой логики первого порядка (по 2.3). Если бы нам нужно было применить тезис Гильберта в этом случае, то нам потребовалось бы аксиоматизировать не только теорию групп, но также свойства натуральных чисел, необходимые для проведения рассуждений. Это означало бы, что теория периодических групп содержит в себе всю выражимую в логике первого порядка теорию чисел, что, очевидно, не в духе современной алгебры.

Пример. Понятия метрического пространства и гильбертова пространства являются относительно простыми по модулю упорядоченного поля $\mathbb{R}$ действительных чисел. Однако, как мы видели в § 2, $\mathbb{R}$ категорично только относительно теории множеств. Тем не менее было бы крайне непродуктивным даже пытаться сформулировать все наши теоремы о метрических пространствах внутри некоторой формальной системы теории множеств, в то время как все, что мы собираемся делать, записывается на языке первого порядка по модулю поля $\mathbb{R}$. Нет никакой причины присоединять без необходимости к теории метрических пространств проблемы, свойственные теории множеств, в частности неразрешимые проблемы, к которым математика раньше никогда не испытывала любви.

Примеры показывают, что принять некоторые понятия и системы за базисные и работать в дальнейшем аксиоматически является обычной математической практикой, даже если мы сознаем, что эти понятия сами по себе не могут быть полностью аксиоматизированы в ограниченном языке логики первого порядка. Алгебраисты обычно принимают понятие *конечного* за базисное. Изучающие анализ, метрические и гильбертовы пространства начинают с системы $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Специалисты в области логики разработали различные усиления логики первого порядка, более точно соответствующие этой математической практике. Полученные усиления включают в логику некоторые математические понятия или системы таким же путем, каким алгебраист включает понятие конечного в свою неформальную логику. В этом параграфе мы кратко обсудим некоторые из этих усилений логики первого порядка.

5.1. Многосортная логика первого порядка. Двусортная логика первого порядка очень похожа на обычную логику первого порядка, за исключением того, что имеется два различных сорта переменных. Например, можно естественным образом написать аксиомы векторного пространства, имея один сорт переменных $r, s, t, \dots$ для скаляров (элементов поля $\mathcal{F}$) и другой сорт $v,$

$w, \dots$ для векторов. Векторное пространство состоит из тройки $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \cdot)$, где $\mathcal{F}$ — поле, $\mathcal{V} = \langle V, +, 0 \rangle$ — векторная система с векторным сложением и операция $\cdot$ — умножение на скаляр. В общем случае, двусортная алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots)^*$ состоит из двух обычных систем плюс некоторые функции и предикаты на их объединении. Двусортная (или многосортная) логика только внешне сильнее, хотя часто более естественна, чем обычная логика, поскольку мы всегда можем взять систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots)$ и превратить ее в обычную систему $\langle M \cup N, M, N, \dots \rangle$ с унарными предикатами M и N для выделения различных сортов элементов. Эта редукция позволяет перенести многие результаты логики первого порядка на многосортную логику и является подтверждением тезиса Гильберта. Мальцев и Феферман, среди прочих, подчеркивали удобство работы непосредственно с многосортным случаем. Хорошее введение можно найти у Фефермана [1].

5.2. ω -логика. Если взять двусортный язык и рассмотреть двусортные системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots)$ с фиксированной системой $\mathcal{N}$, то мы получим так называемую $\mathcal{N}$ -логику. Например, $\mathbb{R}$ -логика удобна для изучения метрических пространств и вещественных гильбертовых пространств. Если $\mathbb{N}$ — система натуральных чисел, то $\mathbb{N}$ -логика обычно называется ω -логикой. Она удобна для изучения, например, евклидовых колец, поскольку евклидово кольцо — это кольцо $\mathcal{R}$ с функцией $d: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющее обычным аксиомам логики первого порядка. Если $\mathcal{N}$ бесконечна, то $\mathcal{N}$ -логика сильнее, чем логика первого порядка. Например, теорема компактности неверна для $\mathcal{N}$ -логики.

5.3. Слабая логика второго порядка. Слабая логика второго порядка — это попытка построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом. Пусть дан язык L первого порядка. Пусть x, y, z — переменная языка L . Из L мы образуем новый двусортный язык L^* , который содержит переменные a, b, c и символ принадлежности $\in$. Данную систему $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$ для языка L расширим до системы $\text{HF}(\mathcal{M})$ для L^* , называемой системой *наследственно конечных множеств* над $\mathcal{M}$, следующим образом. Полагаем

$$\text{HF}_0(M) = \emptyset,$$

$$\text{HF}_{n+1}(M) = \{\text{все конечные подмножества } M \cup \text{HF}_n(M)\},$$

$$\text{HF}(M) = \bigcup_n \text{HF}_n(M).$$

Теперь $\text{HF}(\mathcal{M}) = (\mathcal{M}, \text{HF}(M), \in \upharpoonright (M \cup \text{HF}(M)))$. В слабой логике второго порядка (более точно называемой слабой логикой

*) Двусортные алгебраические системы называют часто *двуосновными*. — Прим. ред.

конечных типов) разрешается использовать формулу из L^* и интерпретировать переменные a, b, c множествами из $HF(M)$. Всякий знакомый с теорией множеств в рамках, скажем, ZF, поймет, что в $HF(M)$ можно определить натуральные числа и понятия конечной последовательности. На самом деле $HF(M)$ является допустимым множеством (см. главу 7 о допустимых множествах, в особенности 3.1 и 2.16), поэтому мы можем определить функции по рекурсии. В частности, все предложения из § 2, которые мы называли предложениями слабой логики второго порядка, как легко проверить, действительно принадлежат слабой логике второго порядка в этом точном смысле. Слабая логика второго порядка имеет по существу ту же силу, что и ω -логика, но значительно более естественна в алгебраическом контексте, поскольку она позволяет работать непосредственно с целыми числами, конечными множествами, конечными последовательностями и т. д.

5.4. Бесконечные логики. Слабая логика второго порядка пытается ввести понятие конечного в семантику (смысл) логики. Оказалось, что более элегантная теория получается при введении его в синтаксис логики посредством допущения бесконечных формул, подобных

$$\forall x [x = 0 \vee 2x = 0 \vee \dots].$$

Логика $L_{\omega, \omega}$ допускает дополнительное правило образования: если Φ — счетное множество формул, то $\bigwedge \Phi$ (конъюнкция Φ) и $\bigvee \Phi$ (дизъюнкция Φ) являются формулами. Эта логика обсуждается в нескольких главах данной книги. Обозначение $L_{\omega, \omega}$ объясняется тем, что в ней допустимы счетные ($< \omega_1$) конъюнкции и дизъюнкции и только конечное число ($< \omega$) кванторов. Логика $L_{\omega, \omega}$ можно понимать как выражение тех понятий, которые выразимы в языке первого порядка по модулю счетного количества информации. Теорема Лёвенгейма — Скулема верна для $L_{\omega, \omega}$, а теорема компактности неверна. Для справедливости теоремы о полноте для счетных теорий T языка $L_{\omega, \omega}$ нужно добавить бесконечное правило вывода.

Легко перевести слабую логику второго порядка в $L_{\omega, \omega}$, но не наоборот. В частности, в слабой логике второго порядка существуют неявно определяемые отношения, которые не определяемы явно, чего не может быть в логике первого порядка или $L_{\omega, \omega}$ по теореме Бета. Если искать наименьшую логику, которая содержит слабую логику второго порядка и в которой все неявно определяемые предикаты определяемы явно, то приходим к изучению допустимых фрагментов L_A логики $L_{\omega, \omega}$, как в главе 7.

5.5. Логика с новыми кванторами. Легко видеть, что все конечные пропозициональные связи можно определить из $\wedge$ и $\neg$ (в логике первого порядка). В свое время Мостовский предложил ввести новые кванторы в логику первого порядка. Так, пусть

Q — новый символ. Применим к нему правило образования: если $\varphi(x)$ — формула, то $Qx\varphi(x)$ — тоже формула. Существует много возможных интерпретаций Q . Например, мы можем определить, что $M \models Qx\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда существует бесконечно много x таких, что $M \models \varphi(x)$. Эта логика, названная $I.(Q_0)$, по существу эквивалентна ω -логике и слабой логике второго порядка.

Если мы определим, что $M \models Qx\varphi(x)$ тогда и только тогда, когда существует несчетно много x таких, что $M \models \varphi(x)$, то мы получаем логику с квантором «существует несчетно много». В этой логике, в отличие от всех ранее упомянутых, справедливы теорема компактности и теорема о полноте совершенно аналогично обычной логике первого порядка (поскольку множество символов L конечно или счетно). Некоторые специалисты утверждают, что понятие *несчетности* скорее логическое, чем строго математическое, но теорема Кейслера [1] о полноте для этой логики опровергает их. Понятия «много» и «больше» кажутся почти логическими, в то время как различные точные математические понятия, как «меры 1», «вторая категория», «бесконечно много», «несчетно много», используют интуитивное представление. Теорема Кейслера о полноте для квантора «существует несчетно много» показывает, что это понятие обеспечивает математически точную модель для неформального понятия «много». Используя слова «много» и «мало» для «несчетности» и «ненесчетности» соответственно, Кейслер предложил следующие фундаментальные аксиомы:

- (1) Для всех y существует мало x таких, что $x = y$.
- (2) Если $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$ для всех x и если много x удовлетворяет φ , то много x удовлетворяет ψ .
- (3) Если много x удовлетворяет $(\varphi(x) \vee \psi(x))$, то либо много x удовлетворяет φ , либо много x удовлетворяет ψ .
- (4) Если существует мало x , для которых $\exists y \varphi(x, y)$, и если для каждого x существует мало y таких, что $\varphi(x, y)$, то существует мало y , для которых $\exists x \varphi(x, y)$.

Заметим, что «существует много x » не является следствием аксиом, так как аксиомы верны во всех системах: конечных, счетных или несчетных.

5.6. Абстрактная теория моделей. В последние годы возникла новая ветвь теории моделей. Абстрактная теория моделей обозревает весь спектр логик и связи между ними. Логика состоит из синтаксиса и семантики, прекрасно друг другу соответствующих в том смысле, что элементарные синтаксические операции (как, например, переименование символов) выполнимы и после этого имеют требуемый смысл. Если посмотреть на данные выше примеры логик, то возникает желание сформулировать более точное определение (см. Барвайс [1]).

Из приведенных выше примеров слабая логика второго порядка, $L_{\omega_1, \omega}$ и $L(Q_0)$ удовлетворяют теореме Лёвенгейма — Скулема (теорема 2.5 при $\kappa = \omega$), но не удовлетворяют теореме компактности. С другой стороны, $L(Q)$, где Q обозначает «несчетно много», удовлетворяет теореме компактности, но не удовлетворяет теореме Лёвенгейма — Скулема. Это объясняется одним из первых и до сих пор наиболее поразительных результатов абстрактной теории моделей. Доказательство можно найти у Барвайса [1], где также приведены другие ссылки.

5.7. Теорема (Линдстрём). Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно $\wedge$, $\neg$, $\exists$ и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма — Скулема.

ЛИТЕРАТУРА

- Барвайс (Barwise J.)
1. Axioms for abstract model theory. — Ann. Math. Logic., 1974, 7, p. 221—265.
- Кейслер (Keisler H. J.)
1. Logic with quantifier «there exist uncountably many». — Ann. Math. Logic., 1970, 1, p. 1—93.
- Смальян (Smullyan R. M.)
1. First-Order Logic. — Berlin: Springer, 1968.
- Феферман (Feferman S.)
1. Application of many-sorted interpolation theorems. — In: Proceedings of the Tarski Symposium. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1971, p. 205—224.
- Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)
1. Model theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Русский перевод: Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.]
- Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. Mathematical Logic. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1967. [Русский перевод: Шенфилд Дж. Р. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.]
- Эндертон (Enderton H.)
1. A Mathematical Introduction to Logic. — N. Y.: Academic Press., 1972.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

Х. Джером Кейслер

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	55
§ 2. Теории	57
§ 3. Диаграммы и компактность	64
§ 4. Теорема Лёвенгейма — Скулема	70
§ 5. Рекурсивно насыщенные модели	75
§ 6. Большие и малые модели	79
§ 7. Стабильные теории	87
§ 8. Теоретико-модельный форсинг	94
§ 9. Бесконечные формулы и обобщенные кванторы	99
Литература	106

§ 1. Введение

Теорию моделей можно описать как объединение логики и универсальной алгебры. Основными объектами исследования являются предложения φ и алгебраические системы $\mathfrak{M}$ для языка L . Как мы увидим в этой главе, классические примеры в алгебре приводят к многим понятиям в теории моделей. Изучение предложений в качестве математических объектов явилось важнейшим инструментом, который привел к неожиданным применениям теории моделей в других отделах математики.

Например, 300 лет назад Лейбниц предполагал, что исчисление можно строго развить для расширения системы $\mathbb{R}$ вещественных чисел до системы ${}^*\mathbb{R}$ такой, что ${}^*\mathbb{R}$ содержит бесконечно малые, но каждое утверждение, истинное в $\mathbb{R}$, истинно и в ${}^*\mathbb{R}$. Не было возможности решить эту проблему до тех пор, пока теория моделей не достигла того уровня, что утверждения можно было определить точно и обращаться с ними, как с математическими объектами. Абрахам Робинсон решил эту проблему в 1960 г., взяв в качестве утверждений формулы логики первого порядка. В простейшей формулировке отправляются от системы $\mathfrak{M}$, которая имеет множество вещественных чисел в качестве основного, и символы для каждого вещественного отношения и функции. Первым шагом было определение собственного элементарного

расширения $*\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{M}$, которое задается как собственное расширение, удовлетворяющее тем же самым предложениям логики первого порядка, что и $\mathfrak{M}$. Это элементарное расширение легко получается применением основных результатов теории моделей: либо теоремы компактности, либо теоремы Лося об ультрапроизведениях. Неожиданным был следующий шаг: Робинсон показал, что ранние интуитивные утверждения о бесконечно малых могут быть точно определены в $*\mathbb{R}$ и новые результаты быстро следуют. Анализ бесконечно малых Робинсона будет изложен в главе 6. Другие приложения, большей частью к алгебре, будут описаны в других главах.

Мы выделим два исторических направления в развитии теории моделей. В северной Америке их часто называют западной и восточной теорией моделей, так как Тарский жил на западном побережье с 1940 г., а Робинсон — на восточном с 1967 г. до преждевременной смерти в 1975 г. Это различие давно утратило свое географическое значение, однако полезно с математической точки зрения.

Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множеств, и в ней используются все формулы логики первого порядка.

Восточная теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большое два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул.

Многие специалисты в теории моделей колеблются между восточной и западной теориями моделей. В действительности Тарский и Робинсон сделали большой вклад в оба направления. (Работы Тарского о вещественно замкнутых полях и эквивалентных классах относятся к восточной теории моделей, в то время как теорема Робинсона о непротиворечивости и его анализ бесконечно малых — к западной теории моделей.)

В этой главе будут предложены некоторые методы обоих направлений: восточного и западного. Многие понятия и результаты имеют два различных варианта. В западном варианте имеем дело с произвольными формулами, а в восточном — с бескванторными формулами. Мы будем часто применять приставку «базисный» для восточного варианта, чтобы отличить его от западного.

Более глубокие доказательства в теории моделей обычно зависят от построения модели с определенными свойствами. Построение почти всегда применяет один или несколько методов из следующего списка:

элементарные цепи,

диаграммы и другие обогащения языка,
теорема компактности,
теорема Лёвенгейма — Скулема о спуске,
теорема об опускании типов,
форсинг,
ультрапроизведения,
однородные множества.

В этой главе мы будем объяснять все методы, кроме двух последних. Об ультрапроизведениях и однородных множествах см. главы 3 и 5.

В этой части будет сконцентрировано внимание на простейшем нетривиальном языке, логике первого порядка. Для некоторых приложений будут более естественными многосортные логики (логики с несколькими сортами переменных). Наши результаты могут быть рутинно распространены на многосортные логики, но обозначения стали бы сложнее. В последнем параграфе мы покажем, как распространить наши методы на более сильные логики, где теория моделей также успешно развивается.

Мы предполагаем, что читатель знаком с материалом главы 1, в особенности с важным определением истинности формулы в алгебраической системе, $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$. Полезный обзор статей по теории моделей есть в статье Морли [1]. Для дальнейшего изучения теории моделей мы предлагаем книги Чэна и Кейслера [1] и Сакса [1].

§ 2. Теории

В этом параграфе мы изложим некоторые основные понятия теории моделей. В частности, мы обсудим различные способы классификаций теорий в логике первого порядка. Мы будем основываться на главе 1.

Мы рассмотрим язык L первого порядка. Под теорией T в языке L понимаем множество предложений языка L . Обозначение $\mathfrak{M} \models T$ читается « $\mathfrak{M}$ является моделью для T » и означает, что $\mathfrak{M}$ — такая система для языка L , что любое предложение φ из T истинно в $\mathfrak{M}$. Две теории T_1 и T_2 называются *эквивалентными*, если они имеют одни и те же модели. Теория T *непротиворечива*, или *совместна*, если она имеет хотя одну модель. Существует два пути, на которых обычно возникают теории.

На первом пути рассмотрим класс K систем для языка L . Теорией класса K назовем множество $\text{Th}(K)$ всех предложений φ языка L таких, что φ истинно в любой системе $\mathfrak{M} \in K$. Например, если K — класс конечных групп, то $\text{Th}(K)$, теория конечных групп, есть множество всех предложений, истинных во всех конечных группах.

Класс K называется *элементарным классом* или ES_{Δ} -классом, если K — класс всех моделей некоторой теории T (следовательно, теории $Th(K)$). Класс всех групп будет элементарным классом. Однако предложение 4.6 этой главы показывает, что класс конечных групп не является элементарным. Это происходит в силу того, что существует бесконечная группа, на которой истинны все предложения, истинные на конечных группах. Чтобы охарактеризовать понятие конечной группы, нужно использовать более сильный язык, чем логика первого порядка. Другой пример неэлементарного класса был дан в главе 1.

Пусть дана алгебраическая система $\mathcal{M}$. Теория $Th(\{\mathcal{M}\})$ или $Th(\mathcal{M})$ для $\mathcal{M}$ есть множество всех предложений, истинных в $\mathcal{M}$.

2.1. **Определение.** Теория T *полна*, если T эквивалентна теории $Th(\mathcal{M})$ для некоторой системы $\mathcal{M}$.

Две системы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ *будут элементарно эквивалентны*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, если $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$. Отсюда $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ означает, что на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ истинны одни и те же предложения.

Второй путь, на котором возникают теории, состоит в выборе множеств предложений в качестве исходных. Множество предложений, которое эквивалентно $Th(K)$, называется *множеством аксиом* для K . Примерами будут аксиомы теории групп, абелевых групп, полных групп и групп без кручения, как показано в главе 1. Первые два примера будут конечно аксиоматизируемыми, в то время как последние два рекурсивно, но не конечно аксиоматизируемыми. Язык L называется *рекурсивным*, если L конечен либо счетен с рекурсивным множеством символов.

2.2. **Определение.** Теория T *конечно аксиоматизируема*, если она эквивалентна конечному множеству предложений. Теория T *рекурсивно аксиоматизируема*, если она эквивалентна рекурсивному множеству предложений в рекурсивном языке.

Теорема компактности будет часто применяться, чтобы показать, что теория не является конечно аксиоматизируемой; см. главы 1 и 3. Разумеется, конечная аксиоматизируемость влечет рекурсивную аксиоматизируемость. Возможно, будут полезны некоторые дополнительные примеры.

2.3. **Пример.** Следующие теории конечно аксиоматизируемы:

- группы,
- абелевы группы,
- кольца,
- области целостности,
- поля,
- поля характеристики p ($p \neq 0$, фиксировано),
- упорядоченные поля,
- линейные порядки,

- решетки,
- булевы алгебры,
- теория множеств Гёделя — Бернаиса,
- противоречивая теория.

2.4. **Пример.** Следующие теории рекурсивно аксиоматизируемы, но не являются конечно аксиоматизируемыми:

- полные группы,
- группы без кручения,
- поля характеристики 0,
- алгебраически замкнутые поля,
- вещественно замкнутые поля,
- конечные поля (Акс [1]),
- теория множеств Цермело — Френкеля,
- арифметика Пеано.

Оказалось, что теория конечных групп даже не является рекурсивно аксиоматизируемой (Кобхем [1])^{*}.

Приведем естественную характеристику рекурсивно аксиоматизируемых теорий. Предложение φ является *следствием* теории T , $T \models \varphi$, если в любой модели теории T предложение φ истинно.

2.5. **Теорема.** Теория T в рекурсивном языке рекурсивно аксиоматизируема тогда и только тогда, когда множество всех следствий теории T рекурсивно перечислимо.

Обычно множество всех следствий теории T не рекурсивно. Теорема Чёрча показывает, что множество всех следствий пустой теории (т. е. тождественно истинных предложений) в языке, содержащем хотя бы один бинарный предикатный либо функциональный символ, не рекурсивно. Редкие теории, у которых множество следствий рекурсивно, весьма интересны.

2.6. **Определение.** Теория T в рекурсивном языке *разрешима*, если множество всех ее следствий рекурсивно.

Интуитивно, это означает, что существует алгоритм для разрешения проблемы: будет ли произвольное предложение φ следствием T . Приведем здесь простое, но важное достаточное условие разрешимости, доказанное в 7.2 главы 1 «Теории рекурсии».

2.7. **Теорема.** Каждая полная рекурсивно аксиоматизируемая теория разрешима.

В теории моделей развиты мощные методы доказательства полноты теорий; если такая теория имеет рекурсивное множество аксиом, то мы можем заключить, что она разрешима. Например, в классической работе Тарского и Маккинси [1] показано, что теория вещественно замкнутых полей полна и поэтому разрешима. Проблема может быть поставлена и следующим образом. Пусть дана алгебраическая система $\mathcal{M}$ (например,

^{*}) Этот результат получен независимо А. И. Мальцевым (ДАН СССР, 1961, 138, № 4). — Прим. ред.

поле вещественных чисел). Определить, будет ли $\text{Th}(\mathfrak{M})$ разрешима, и если это так, то найти рекурсивное множество аксиом. Другие результаты о разрешимых и неразрешимых теориях см. в главе 4 данной книги и главе 3 «Теории рекурсии».

Вернемся сейчас к некоторым понятиям, введение которых мотивируется алгебраическими конструкциями.

2.8. Определение. Универсальной называется формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$, где φ — бескванторная формула. Теория называется универсальной, если она эквивалентна некоторому множеству универсальных предложений.

Система $\mathfrak{N}$ называется подсистемой $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, если основное множество $\mathfrak{N}$ есть подмножество основного множества $\mathfrak{M}$, а интерпретация всех предикатных функциональных и константных символов в $\mathfrak{N}$ является ограничением соответствующей интерпретации в $\mathfrak{M}$. Дадим другое эквивалентное определение: для любой атомной формулы φ и интерпретации s в $\mathfrak{N}$ выполнено $\mathfrak{N} \models \varphi[s]$, если и только если $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$. Пусть дано непустое подмножество $X \subseteq M$, тогда существует наименьшая подсистема $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, содержащая X , назовем ее подсистемой, порожденной множеством X . Конечно порожденная подсистема в $\mathfrak{M}$ есть подсистема, порожденная конечным подмножеством $X \subseteq M$.

2.9. Предложение. Если T — универсальная теория, то любая подсистема модели для T есть модель для T .

В следующем параграфе будет доказано обратное утверждение, теорема Тарского — Лоса.

Например, теория групп, формируемая в языке $\{+, 0, -\}$, универсальная и каждая подсистема группы есть группа. Однако если теория групп формулируется в языке $\{+, 0\}$, то это уже не универсальная теория, так как необходим квантор существования для выражения существования обратного элемента:

$$\forall x \exists y (x + y = 0 \wedge y + x = 0).$$

Если формулируется теория групп в языке $\{+, 0\}$, то подсистема группы будет полугруппой с единицей, но не обязательно группой.

Другие примеры универсальных теорий дают теории абелевых групп, колец, тел, решеток, линейных порядков, булевых алгебр и групп без кручения в подходящих языках.

Западным аналогом подсистемы будет элементарная подсистема (Тарский и Ваот [1]), $\mathfrak{N}$ — элементарная подсистема в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$, если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ и для любой формулы φ и интерпретации s в $\mathfrak{N}$ выполнено

$$\mathfrak{N} \models \varphi[s], \text{ если и только если } \mathfrak{M} \models \varphi[s].$$

Мы будем также называть $\mathfrak{M}$ элементарным расширением $\mathfrak{N}$ и писать $\mathfrak{M} > \mathfrak{N}$. Очевидно, что $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ влечет $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$.

Часто вместо подсистем удобнее использовать вложения. Изоморфным вложением $f: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется отображение из N в M такое, что для любой атомной формулы φ и интерпретации s в $\mathfrak{N}$ выполнено

$$\mathfrak{N} \models \varphi[s], \text{ если и только если } \mathfrak{M} \models \varphi[f(s)].$$

Отображение f должно быть одно-однозначным, так как формула $x = y$ атомная. Аналогично элементарное вложение $f: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$ есть такое отображение, что для любой формулы φ и интерпретации s в $\mathfrak{N}$ выполнено

$$\mathfrak{N} \models \varphi[s], \text{ если и только если } \mathfrak{M} \models \varphi[f(s)].$$

Изоморфное вложение f называется изоморфизмом, если M равно области значений f , символически $f: \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$. Это обычное понятие в алгебре, и

$$f: \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M} \Rightarrow f: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}.$$

Несмотря на то, что понятие элементарного расширения очень сильное, в теории моделей существует достаточно много примеров. Полезен следующий критерий.

2.10. Теорема. $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$, если и только если $N \subseteq M$ и для любой формулы $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ и $a \in M, b_1, \dots, b_n \in N$, если $\mathfrak{M} \models \psi[a, b_1, \dots, b_n]$, то существует $b \in N$ такое, что $\mathfrak{M} \models \psi[b, b_1, \dots, b_n]$.

Заметим, что условие затрагивает лишь выполнимость в большей системе $\mathfrak{M}$. Для доказательства теоремы простой индукцией по длине формулы φ показываем, что для любой интерпретации s в $\mathfrak{N}$ выполнено

$$\mathfrak{N} \models \varphi[s], \text{ если и только если } \mathfrak{M} \models \varphi[s].$$

Приведем несколько примеров применения теоремы 2.10.

2.11. Пример. Пусть V — поле и X, Y — бесконечные множества переменных, где $X \subseteq Y$. Тогда $F[X] < F[Y]$, где $F[X]$ — кольцо полиномов от переменных X над F , и $F(X) < F(Y)$, где $F(X)$ — чистое трансцендентное расширение поля F посредством X . Если $G(X)$ — группа, свободно порожденная X , то $G(X) < G(Y)$.

Открытой является следующая проблема Тарского: будет ли $G(X) < G(Y)$ или даже $G(X) \equiv G(Y)$, где X — конечное множество из двух или большего числа элементов.

Понятие модельно полной теории дает дополнительные примеры элементарных расширений.

2.12. Определение. Теория T называется модельно полной, если для любых моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ теории T любая подсистема $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ будет элементарной подсистемой $\mathfrak{N}$. Эквивалентно, каждое изоморфное вложение есть элементарное вложение.

Это понятие предложено Робинсоном [1] и является центральной идеей в восточной теории моделей. Ему посвящена глава 4.

2.13. Пример. Следующие теории модельно полны (см. главы 3 и 4): алгебраически замкнутые поля, вещественно замкнутые поля, безатомные булевы алгебры, плотный линейный порядок. Так, например, упорядоченное поле вещественных чисел есть элементарное расширение упорядоченного поля алгебраических чисел.

Каждый из перечисленных примеров обладает следующим свойством, которое даже сильнее модельной полноты. Пусть дана формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Выражение $T \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ означает, что предложение $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ есть следствие теории T .

2.14. Определение. Теория T допускает элиминацию кванторов, если любая формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ языка L T -эквивалентна бескванторной формуле $\psi(x_1, \dots, x_n)$ языка L , т. е.

$$T \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n).$$

Легко заметить, что теория, допускающая элиминацию кванторов, модельно полна. В действительности для модельной полноты T достаточно, чтобы каждая формула языка L была T -эквивалентна универсальной формуле языка L . Мы увидим в следующем параграфе, что это условие является и необходимым.

Восточная теория моделей в большей степени касается индуктивных теорий, которые будут определены ниже.

2.15. Определение. Теория T называется индуктивной, если T эквивалентна множеству $\forall \exists$ -предложений, т. е. предложений вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \psi,$$

где ψ — бескванторная формула.

Индуктивные теории также называются $\forall \exists$ -теориями. Большинство теорий, возникающих в алгебре, индуктивны. Все теории, перечисленные в примерах 2.3 и 2.4, исключая конечные поля, теорию множеств Гёделя — Бернайса, теорию множеств Цермело — Френкеля и арифметику Пеано, будут индуктивными. Следующий результат дает основание для названия «индуктивные».

2.16. Предложение. Если T — индуктивная теория, то объединение любой возрастающей цепи

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \dots$$

моделей T будет моделью T .

Доказательство предложения 2.16 простое. Обращение же более глубокое и будет доказано в следующем параграфе.

Западный аналог цепи алгебраических систем есть элементарная цепь

$$\mathcal{M}_0 < \mathcal{M}_1 < \mathcal{M}_2 < \dots$$

Элементарные цепи — исключительно важная конструкция в теории моделей. Ее важность основана на следующем фундаментальном результате Тарского и Воота [1].

2.17. Теорема об элементарных цепях. Объединение $\mathcal{M}$ элементарной цепи

$$\mathcal{M}_0 < \mathcal{M}_1 < \mathcal{M}_2 < \dots$$

будет элементарным расширением каждой системы $\mathcal{M}_n$ из этой цепи.

Доказательство. Показываем индукцией по длине формулы φ , что для любого n и любой интерпретации s в $\mathcal{M}_n$ выполнено

$$\mathcal{M}_n \models \varphi[s], \text{ если и только если } \mathcal{M} \models \varphi[s].$$

Отсюда следует, что объединение элементарной цепи моделей теории T есть модель теории T . Предложение 2.16 и теорема 2.17 верны не только для счетных цепей, но также и для неcountных цепей и даже для произвольного направленного вверх семейства алгебраических систем.

Существует два способа сведения западной теории моделей к восточной посредством присоединения дополнительных символов. Консервативным расширением теории T в языке L мы назовем теорию $T' \supseteq T$ в расширенном языке $L' \supseteq L$ такую, что любая модель $\mathcal{M}$ теории T может быть обогащена до модели $\mathcal{M}'$ теории T' .

2.18. Теорема. Любая теория T имеет консервативное расширение T' , которое индуктивно и допускает элиминацию кванторов.

Доказательство. Обозначим $x_1, \dots, x_n$ через x . Для каждой формулы $\varphi(x)$ языка L добавим новый предикатный символ $R_\varphi(x)$ языка L' , который назовем *скулемовским предикатом* для φ . T' есть объединение T и множества $\{\forall x (\varphi(x) \leftrightarrow R_\varphi(x)) : \varphi \in L\}$. Теория T' , очевидно, есть консервативное расширение T . Элиминируя скулемовские предикаты, мы получим, что любая формула $\varphi'(x)$ языка L' T' -эквивалентна формуле $\varphi(x)$ языка L , и, следовательно, T' -эквивалентна $R_\varphi(x)$. Поэтому T' допускает элиминацию кванторов. Множество предложений $R_\varphi, \psi \in T$, и предложений вида

$$\forall x (R_{\neg \varphi}(x) \leftrightarrow \neg R_\varphi(x)),$$

$$\forall x (R_{\varphi \wedge \psi}(x) \leftrightarrow R_\varphi(x) \wedge R_\psi(x)),$$

$$\forall x (R_{\exists y \varphi}(x) \leftrightarrow \exists y R_\varphi(x, y))$$

будет множеством $\forall \exists$ -аксиом для T' . $\square$

2.19. Теорема. Каждая теория T имеет консервативное расширение T' , которое универсально и модельно полно.

Доказательство. Для каждой формулы вида $\exists y \varphi(x, y)$ языка L присоединим новый функциональный символ $F_{\exists y \varphi}(v)$, называемый *скулемовской функцией* и получим новый язык L_1 . Присоединив к T новые аксиомы $\forall x (\exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, F_{\exists y \varphi}(x)))$, мы определим теорию T_1 . Итерируем этот процесс счетное число раз, и пусть $L' = \bigcup_n L_n$ и $T' = \bigcup_n T_n$. Тогда T' — консервативное расширение T . Применяя аксиомы, мы можем заменить кванторы существования скулемовскими функциями так, что любая формула φ языка L' будет T' -эквивалентна универсальной формуле φ' , а поэтому теория T' модельно полна. Множество универсальных предложений, эквивалентное T' , состоит из φ' , где $\varphi \in T$, и предложений $\forall x \forall y (\psi(x, y) \rightarrow \psi(x, F_{\exists y \varphi}(x)))$, где ψ — бескванторная формула языка L . $\square$

Теория T' из 2.18 иногда называется *морлиевским обогащением* теории T , в то время как T' из 2.19 называется (итерированным) *скулемовским обогащением* теории T . Морлиевское обогащение требует лишь единственного шага, так как каждое предложение из L' будет T' -эквивалентно предложению из L . С другой стороны, в скулемовском обогащении мы продолжаем получать новые формулы в L_{n+1} и должны итерировать конструкцию счетное число раз. Скулемовское обогащение играет ключевую роль в главе 5.

§ 3. Диаграммы и компактность

Метод диаграмм был изобретен Генкиным и А. Робинсоном около 1950 г. *). Они применили этот метод для нового доказательства теоремы Гёделя о полноте и для получения различных других приложений. Диаграмма алгебраической системы является аналогом таблицы умножения для группы; это есть множество предложений, содержащих новые константные символы для элементов системы $\mathfrak{M}$. Полезность диаграмм состоит в том, что они дают способ построения моделей из множеств предложений. Существует два вида диаграмм, соответствующих восточной и западной теориям моделей.

3.1. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — система для языка L первого порядка. *Диаграммным языком* системы $\mathfrak{M}$ является обогащение L_M языка L , полученное присоединением новых константных символов c_t для всех элементов t из M . *Диаграммным обо-*

*) Впервые метод диаграмм был предложен и использован в работах А. И. Мальцева (Матем. сб., 1936, 1, № 3; Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, 1, № 1). — Прим. ред.

гащением системы $\mathfrak{M}$ является система $\mathfrak{M}_M$ для языка L_M такая, что каждый константный символ c_t из L_M интерпретируется посредством t . (Базисная) *диаграмма* системы $\mathfrak{M}$ есть множество $D(\mathfrak{M})$ всех атомных предложений и их отрицаний в языке L_M , которые истинны в $\mathfrak{M}_M$. *Элементарной диаграммой* системы $\mathfrak{M}$ называется полная теория $\text{Th}(\mathfrak{M}_M)$, т. е. множество всех предложений языка L_M , истинных в $\mathfrak{M}_M$.

Более общо, пусть дано подмножество $X \subseteq M$, обогащение L_X и система $\mathfrak{M}_X$, определенные естественным образом. Если f — отображение X в M , то $\mathfrak{M}_{fX}$ будет системой для языка L_X , если каждый константный символ c_x интерпретировать посредством элемента $f(x)$.

Существует простая, но полезная зависимость между диаграммами и вложениями.

3.2. Предложение. (i) *Отображение f является изоморфизмом вложением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, если и только если обогащение $\mathfrak{N}_{fM}$ есть модель диаграммы системы $\mathfrak{M}$. Коротко,*

$$f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}, \text{ если и только если } \mathfrak{N}_{fM} \models D(\mathfrak{M}).$$

(ii) *Отображение f является элементарным вложением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, если и только если $\mathfrak{N}_{fM}$ есть модель элементарной диаграммы системы $\mathfrak{M}$:*

$$f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}, \text{ если и только если } \mathfrak{N}_{fM} \models \text{Th}(\mathfrak{M}_M).$$

Отсюда следует, что теория T модельно полна, если и только если теория $T \cup D(\mathfrak{M})$ полна для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T . Эта формулировка дала Робинсону повод назвать такие теории модельно полными.

В теории моделей наиболее значительным следствием теоремы о полноте является теорема компактности. Теорема о полноте и теорема компактности обстоятельно доказаны в написанной Барвайсом главе 1 данной книги. Чтобы проиллюстрировать применение диаграмм, приведем здесь второй способ доказательства теоремы компактности. Еще одно доказательство, использующее ультрапроизведения, будет дано в главе 3. Наше доказательство базируется на нижеследующей лемме.

Теория T называется *локально совместной*, если любое конечное подмножество из T имеет модель.

3.3. Лемма (Генкин [1]). Пусть M — непустое множество, L — язык первого порядка и T — теория в диаграммном языке L_M . Теория T будет элементарной диаграммой некоторой системы $\mathfrak{M}$ с основным множеством M , если и только если:

- (i) T локально совместна;
- (ii) для любого предложения φ из L_M либо $\varphi \in T$, либо $(\neg \varphi) \in T$;
- (iii) если $\exists x \varphi(x) \in T$, то $\varphi(c_t) \in T$ для некоторого $t \in M$;

(iv) если $m, n \in M$ и $m \neq n$, то $(\bigcap c_m = c_n) \in T$.

Доказательство. Очевидно, что элементарная диаграмма любой системы с основным множеством M удовлетворяет условиям (i)–(iv). Если T удовлетворяет свойствам (i)–(iv), то существует единственная модель $\mathfrak{M}$, у которой базисная диаграмма содержится в T . Тогда индукцией по длине предложения φ языка L_M получаем, что φ истинно в $\mathfrak{M}$, если и только если $\varphi \in T$.

3.4. Теорема компактности. Пусть T_0 — множество предложений языка L . Если теория T_0 локально совместна, то T_0 имеет модель.

Доказательство. Пусть в L имеется κ предложений и C — множество новых константных символов, имеющее мощность κ и должна быть бесконечной, тогда расширенный язык L_C также имеет κ предложений; перечислим их, взяв φ_α для всех ординалов $\alpha < \kappa$. Мы можем построить возрастающую цепь T_α , $\alpha < \kappa$, множеств предложений языка L_C такую, что:

- (1) менее чем κ константных символов из C входит в T_α ,
- (2) T_α — локально совместная теория,
- (3) если $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ — локально совместная теория, то $\varphi_\alpha \in T_{\alpha+1}$,
- (4) если $\varphi_\alpha \in T_{\alpha+1}$ и φ_α имеет вид $\exists x \varphi(x)$, то $\psi(c) \in T_{\alpha+1}$ для некоторого константного символа $c \in C$.

Пусть $T_\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} T_\alpha$, тогда T_κ обладает свойствами (i)–(iii)

леммы 3.3. Отношение $\{(c, d): (c = d) \in T\}$ есть отношение эквивалентности на C . Выберем подмножество $M \subseteq C$, содержащее в точности по одному элементу из каждого класса эквивалентных элементов, и пусть T — множество всех предложений языка L_M , входящих в T_κ . Тогда T обладает свойствами (i)–(iv) нашей леммы и T — элементарная диаграмма некоторой модели $\mathfrak{M}$. Так как $T_0 \subseteq T_\kappa$, то $T_0 \subseteq T$ и отсюда следует, что $\mathfrak{M}$ — модель теории T_0 . $\square$

Теорему компактности иногда называют локальной теоремой или теоремой конечности. Более часто ее называют теоремой компактности, потому что она утверждает, что определенное топологическое пространство компактно. Топологические понятия часто оказываются удобными в теории моделей, в особенности в такой известной области, как теория стабильности (§ 7).

Пусть задан язык L первого порядка и множество S всех полных теорий $\text{Th}(\mathfrak{M})$ в языке L . Назовем элемент $p = \text{Th}(\mathfrak{M}) \in S$ точкой множества S . Стоуновское пространство языка L — это множество S со следующей топологией. Для любого предложения φ языка L положим

$$[\varphi] = \{p \in S: \varphi \in p\}$$

и топологию на S определим, взяв в качестве базисных замкнутых множеств все множества вида $[\varphi]$. Эти множества образуют базис замкнутых множеств, так как

$$[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi].$$

В действительности множества вида $[\varphi]$ будут и открытыми (и, следовательно, открыто-замкнутыми), так как

$$[\neg \varphi] = S - [\varphi].$$

Замкнутыми множествами в S будут в точности пересечения базисных замкнутых множеств, а следовательно, множества вида

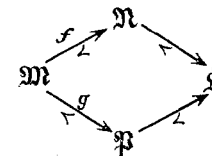
$$S(T) = \bigcap_{\varphi \in T} [\varphi] = \{p \in S: T \subseteq p\},$$

где T — теория в языке L . Топологическое пространство S вполне отделимо и хаусдорфово, так как для любых $p \neq q$ существует предложение $\varphi \in p - q$, и, следовательно, $p \in [\varphi]$ и $q \notin [\varphi]$ и $[\varphi]$ — открыто-замкнутое множество.

Теория T совместна, если $\bigcap_{\varphi \in T} [\varphi] \neq \emptyset$. Теорема компактности утверждает, что множество $\{[\varphi]: \varphi \in T\}$ имеет непустое пересечение, если каждое его конечное подмножество имеет непустое пересечение. Другими словами, теорема компактности утверждает, что стоуновское пространство S языка L компактно.

Приведем сейчас несколько приложений теоремы компактности. Другие приложения к алгебре и анализу можно найти в главах 1, 3, 4 и 6.

3.5. Теорема. Свойство амальгамируемости выполнено для элементарных диаграмм, т. е. если $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ и $g: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$, то существуют система $\mathfrak{D}$ и коммутативная диаграмма



Доказательство. Пусть T_N и T_P — элементарные диаграммы систем $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ с различными константными символами c_n , $n \in N$, и d_p , $p \in P$. Пусть T — теория

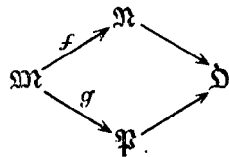
$$T = T_N \cup T_P \cup \{c_{f(m)} = d_{g(m)}: m \in M\}$$

в языке $(L_N)_P$. Любое конечное подмножество из T выполняется на обогащении $\mathfrak{M}$ до языка $(L_N)_P$, при котором константы $c_{f(m)}$, $d_{g(m)}$ для $m \in M$ интерпретируются посредством m . Следовательно-

но, по теореме компактности существует модель $\mathfrak{D}'$ теории T . Пусть $\mathfrak{D}$ — обеднение модели $\mathfrak{D}'$ до языка L и $h(n)$; $k(p)$ — интерпретации c_n и d_p в $\mathfrak{D}'$. Тогда $h: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{D}$, $k: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{D}$ и диаграмма коммутативна. В силу 3.2 отображения h и k — элементарные вложения. $\square$

Свойство амальгамируемости для изоморфных моделей является важнейшим в восточной теории моделей.

3.6. Определение. Класс K систем для языка L обладает свойством *амальгамируемости*, если для любых $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ из K и $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, $g: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$ существуют система $\mathfrak{D} \in K$ и коммутативная диаграмма



Следующий результат доказывается аналогично теореме 3.5.

3.7. Теорема. Если теория T допускает элиминацию кванторов, то класс K всех подсистем моделей теории T обладает свойством амальгамируемости.

Как будет видно в дальнейшем (теорема 3.11), класс K в этом случае является классом моделей некоторой теории. Если T и K будут определены, как в теореме 3.7, то мы назовем T модельным пополнением K . Таблица 1 указывает краткий список

ТАБЛИЦА 1

K	T — модельное пополнение K
Поля Упорядоченные поля Булевы алгебры Абелевы группы Группы	Алгебраически замкнутые поля Вещественно замкнутые поля Безатомные булевы алгебры Алгебраически замкнутые абелевы группы Не существует

примеров элементарных классов K со свойством амальгамируемости. Эти вопросы обсуждаются далее в главе 4, где обсуждаются некоторые более новые вызывающие интерес примеры.

Следующее приложение было найдено Мальцевым (см. Мальцев [1]) на первых шагах развития теории моделей и стало инструментом в ее дальнейшем развитии. Более общая трактовка, применяющая ультрапроизведения, содержится в главе 3.

3.8. Определение. Класс K систем для языка L называется *локальным*, если для любой системы $\mathfrak{M}$ она принадлежит K в том и только в том случае, когда любая конечно порожденная подсистема $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ принадлежит K .

3.9. Теорема. Если K — класс всех подсистем L -обеднений моделей теории T' в языке $L' \supseteq L$, то класс K локален.

Доказательство. $\mathfrak{M} \in K$, если и только если теория $T' \cup D(\mathfrak{M})$ имеет модель. Если каждая конечно порожденная подсистема $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ принадлежит K , то теория $T' \cup D(\mathfrak{M})$ локально совместна и по теореме компактности имеет модель. $\square$

Мальцев указал несколько приложений этой теоремы к теории групп. Приведем как образец некоторые из них.

3.10. Пример. Следующие классы групп локальны в силу теоремы 3.9:

- (1) класс разрешимых групп ступени не больше k (k — фиксированное натуральное число);
- (2) класс групп с нормальной подгруппой индекса не выше k ;
- (3) класс упорядочиваемых групп, т. е. обеднений упорядоченных групп;
- (4) класс всех групп $\mathfrak{M}$, которые представимы как группы $n \times n$ -матриц над некоторым полем $\mathcal{F}$.

Следующая теорема дает простейший пример из совокупности результатов, называемых теоремами сохранения или устойчивости. Теория T *устойчива относительно подсистем*, если любая подсистема $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ модели теории T также является моделью теории T .

3.11. Теорема Лося — Тарского. Теория T устойчива относительно подсистем, если и только если T — универсальная теория.

Доказательство. Будем доказывать несколько более сильное утверждение. Пусть K — класс всех подсистем моделей теории T и $T_{\forall}$ — множество всех универсальных следствий теории T .

Покажем, что K — класс всех моделей теории $T_{\forall}$. Очевидно, что из $\mathfrak{M} \in K$ следует $\mathfrak{M} \models T_{\forall}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель теории $T_{\forall}$. Из этого следует, что множество $D(\mathfrak{M}) \cup T$ локально совместно. По теореме компактности $D(\mathfrak{M}) \cup T$ имеет модель $\mathfrak{N}$. В силу 3.2 модель $\mathfrak{M}$ изоморфно вкладывается в $\mathfrak{N}$ и, следовательно, $\mathfrak{M} \in K$. $\square$

Используя подобные рассуждения, можно доказать характеризацию модельной полноты через элиминацию кванторов (Робинсон [1]).

3.12. Теорема. Теория T модельно полна, если и только если любая формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ T -эквивалентна универсальной формуле $\psi(x_1, \dots, x_n)$.

Закончим этот параграф еще одной теоремой устойчивости.

3.13. Теорема Чэна—Лося—Сушко. Теория T устойчива относительно объединения цепей, если и только если она индуктивна, т. е. эквивалентна множеству $\forall\exists$ -предложений.

Доказательство. Для доказательства нетривиальной части предположим, что T устойчива относительно объединения цепей. Пусть $T_{\forall\exists}$ — множество $\forall\exists$ -следствий теории T . Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{M}$ теории $T_{\forall\exists}$. Отсюда следует, что $D_{\forall}(\mathcal{M}) \cup T$ совместно, где $D_{\forall}(\mathcal{M})$ — множество всех универсальных предложений языка $L_{\mathcal{M}}$, истинных в $\mathcal{M}$. По теореме компактности теория $D_{\forall}(\mathcal{M}) \cup T$ имеет модель $\mathcal{N}_M$ такую, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_M$. Каждое экзистенциальное предложение языка L_M , истинное в $\mathcal{N}_M$, истинно и в $\mathcal{M}$. Поэтому диаграмма $D(\mathcal{N}_M)$ модели $\mathcal{N}_M$ совместна с $\text{Th}(\mathcal{M})$. По теореме компактности $\mathcal{N}$ имеет расширение $\mathcal{M}_1$, которое является элементарным расширением $\mathcal{M}$. Повторяя эту конструкцию счетное число раз, мы построим цепь $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \dots$, где каждая $\mathcal{N}_i$ — модель T и $\mathcal{M}_i$ образуют элементарную цепь. Объединение этих цепей является моделью теории T и элементарным расширением модели $\mathcal{M}$. Поэтому $\mathcal{M}$ — модель теории T и T эквивалентна $T_{\forall\exists}$. $\square$

Метод, примененный в вышеприведенном доказательстве, часто встречается в теории моделей и называется методом *альтернативных цепей*.

3.14. Следствие. Любая модельно полная теория индуктивна, т. е. эквивалентна множеству $\forall\exists$ -предложений.

Доказательство. Применяем теорему об элементарных цепях и 3.13.

§ 4. Теорема Лёвенгейма—Скулема

В главе 1 теорема Лёвенгейма—Скулема была доказана в следующей форме.

4.1. Теорема Лёвенгейма—Скулема. Если T имеет бесконечную модель, то T имеет модель любой бесконечной мощности κ , большей или равной мощности теории T .

Мы докажем две значительно более сильные формы этой теоремы, принадлежащие Тарскому и Вооту [1]. В этом параграфе мы полагаем, что κ — бесконечный кардинал, больший или равный числу символов языка L . Под мощностью модели $\mathcal{M}$ мы будем понимать мощность $|M|$ основного множества $\mathcal{M}$.

4.2. Теорема Лёвенгейма—Скулема о спуске. Если $X \subseteq M$ и $|X| \leq \kappa \leq |M|$, то в $\mathcal{M}$ существует элементарная подмодель $\mathcal{N} < \mathcal{M}$ мощности κ такая, что $X \subseteq N$.

Доказательство. Используя простую конструкцию, применяющую теорему компактности, мы получим доказательство

этого факта. Построим счетную возрастающую цепочку $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ подмножеств M такую, что:

(1) $X \subseteq X_0$;

(2) множество X_n имеет мощность κ ;

(3) для любого предложения $\exists x \varphi(x)$ языка L_{X_n} , истинного в $\mathcal{M}_{X_n}$, существует элемент из X_{n+1} , на котором выполняется формула $\varphi(x)$.

Тогда подсистема $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ с основным множеством $N = \bigcup_n X_n$ имеет все описанные свойства. $\square$

Теорема Лёвенгейма—Скулема о спуске может применяться к изучению свойств, невыразимых в логике первого порядка.

4.3. Пример. Если теория T в языке упорядоченных полей имеет архимедову модель, то она имеет счетную архимедову модель.

Это происходит в результате того, что каждая подсистема архимедова поля вновь является архимедовым полем.

4.4. Пример. $\in$ -моделью теории множеств будет модель вида $\langle M, \in \rangle$. Пусть T — теория в языке $L = \{\in\}$. Если T имеет бесконечную $\in$ -модель, то она имеет и счетную $\in$ -модель.

4.5. Пример. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, <, \dots \rangle$ — такая система, что $\langle M, < \rangle$ имеет порядковый тип ω_1 и язык L счетен. В этом случае существует счетная подсистема $\mathcal{N}$ системы $\mathcal{M}$ такая, что $\langle N, < \rangle$ — начальный сегмент $\langle M, < \rangle$.

Доказательство. Применяя 4.2 счетное число раз, мы получим элементарную цепь $\mathcal{N}_0 < \mathcal{N}_1 < \dots$ счетных элементарных подсистем системы $\mathcal{M}$ таких, что $\mathcal{N}_{k+1}$ содержит начальный сегмент из M , порождаемый $\mathcal{N}_k$. Система $\mathcal{N} = \bigcup_n \mathcal{N}_n$ будет удовле-

творять всем требуемым свойствам. $\square$

Приведем теперь конечный аналог теоремы Лёвенгейма—Скулема.

4.6. Предложение. Если теория T имеет конечные модели сколь угодно большой мощности, то T имеет бесконечную модель.

Доказательство. Теория

$$T' = T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y (y \neq x_1 \wedge \dots \wedge y \neq x_n) : n = 1, 2, \dots\}$$

локально совместна и поэтому имеет модель. Очевидно, что любая модель теории T' бесконечна. $\square$

Приведем сейчас другой результат Тарского и Воота, который доказываем, используя теорему компактности.

4.7. Теорема Лёвенгейма—Скулема о подъеме. Пусть $\mathcal{M}$ — бесконечная алгебраическая система для языка L . Для любого кардинала κ , большего или равного мощностям $\mathcal{M}$ и L , существует элементарное расширение системы $\mathcal{M}$ мощности κ .

Доказательство. Пусть C — множество константных символов мощности κ и T — теория в языке $(L_M)_C$ вида

$$T = \text{Th}(\mathfrak{M}_M) \cup \{\neg c = d: c, d \in C, c \neq d\}.$$

Теория T локально совместна и, следовательно, имеет модель $\mathfrak{N}'$. Мы можем предположить без ограничения общности, что каждое $m \in M$ является интерпретацией константного символа c_m в $\mathfrak{N}'$. В силу 3.2 обединение $\mathfrak{M}$ модели $\mathfrak{N}'$ до языка L является элементарным расширением $\mathfrak{M}$. Более того, $\mathfrak{M}$ имеет мощность не меньше κ . По теореме Лёвенгейма — Скулема о спуске существует подсистема $\mathfrak{P}$ мощности κ такая, что $\mathfrak{M} < \mathfrak{P} < \mathfrak{N}$.

4.8. З а м е ч а н и е. Таким же методом можно показать, что любая бесконечная алгебраическая система $\mathfrak{M}$ мощности κ имеет собственное элементарное расширение мощности κ .

Эта теорема иногда применяется к расширению первоначального языка L .

4.9. П р и м е р. Однородным линейным порядком называется линейный порядок $\langle M, < \rangle$ такой, что любая сохраняющая порядок функция из конечного подмножества M в M продолжается до автоморфизма порядка $\langle M, < \rangle$. Для любого бесконечного κ существует однородный плотный линейный порядок мощности κ .

Доказательство. Естественный порядок $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ на рациональных числах однородный. Таким образом, для любого n существуют $(2n+1)$ -местные функции $f_n(x, y, z)$ такие, что $f_n(\cdot, y, z)$ — автоморфизм порядка $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, отображающий y на z , если y и z — возрастающие последовательности элементов длины n . Если $\langle M, < \rangle$ есть элементарное расширение системы $\langle \mathbb{Q}, <, f_0, f_1, \dots \rangle$ мощности κ , то $\langle M, < \rangle$ — однородный порядок. Конечно, можно строить примеры непосредственно, но они довольно сложны. $\square$

Теорема Лёвенгейма — Скулема часто применяется в доказательствах полноты теорий. Простейший способ проверки полноты — это критерий Лося — Воота.

4.10. О п р е д е л е н и е. Теория T называется κ -категоричной, если с точностью до изоморфизма она имеет ровно одну модель мощности κ .

4.11. К р и т е р и й Лося — Воота. Если теория T не имеет конечных моделей и κ -категорична для некоторого кардинала κ , то она полна.

Доказательство. Если теория T имеет два различных полных расширения, то T должна иметь две неизоморфные модели мощности κ .

4.12. П р и м е р. Следующие теории ω -категоричны:

- (i) плотный линейный порядок без концов;
- (ii) отношение эквивалентности с бесконечным числом смежных классов, причем все смежные классы бесконечны;

(iii) безатомные булевы алгебры;

(iv) абелевы группы, у которых все элементы порядка p .

4.13. П р и м е р. Следующие теории ω_1 -категоричны:

- (i) алгебраически замкнутые поля фиксированной характеристики;
- (ii) полные абелевы группы без кручения;
- (iii) теория системы $\langle M, f \rangle$, где f — перестановка M без конечных циклов;
- (iv) абелевы группы, у которых все элементы порядка p .

Теории (i) — (iii) полны (в силу критерия Лося — Воота) и рекурсивно аксиоматизируемы, а поэтому разрешимы. κ -категоричные теории очень редки. Мы обратимся к ним снова в §§ 7 и 8. Следующий более общий критерий будет применяться чаще, чем критерий Лося — Воота.

4.14. К р и т е р и й полноты. Счетная теория T полна, если и только если она совместна и любые две конечные или счетные модели теории T имеют изоморфные элементарные расширения.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы компактности, а достаточность следует из теоремы Лёвенгейма — Скулема о спуске. $\square$

4.15. П р и м е р. Пусть T — теория систем $\langle M, f \rangle$, где $f: M \rightarrow M$ — перестановка множества M . Какие полные расширения имеет теория T ? Для любой счетной последовательности $s = \langle s_1, s_2, \dots \rangle$ элементов из $\omega \cup \{\infty\}$ обозначим через $T(s)$ теорию всех моделей теории T , у которых число циклов длины n равно s_n , где ∞ интерпретируется как бесконечно много.

Случай 1. Имеется лишь конечное число s_n , не равных 0. В этом случае $T(s)$ имеет ровно два полных расширения, причем, если $\sum s_n$ конечна, то одно из этих расширений категорично в бесконечных мощностях, а другое имеет лишь одну конечную модель.

Случай 2. Если бесконечно много s_n не равно нулю, то любая счетная модель $\mathfrak{M}$ теории $T(s)$ по теореме компактности имеет счетное элементарное расширение $\mathfrak{N}$ с бесконечным числом бесконечных циклов, а такая модель теории $T(s)$ с точностью до изоморфизма единственна и поэтому теория $T(s)$ полна.

4.16. П р и м е р. Пусть T — теория линейного порядка, в котором каждый элемент имеет единственного предшественника и последователя. Целые числа с естественным порядком дают пример модели теории T . Эта теория полна.

Мы покажем полноту T , применяя метод альтернативных цепей. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — две счетные модели теории T . По теореме компактности существует вложение $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}_1$, где $\mathfrak{N}_1$ — счетная модель, и f переводит предшественники в предшественники и последователи в последователи. Применяя теорему компактности еще раз, получаем вложение $g: \mathfrak{N}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1$ — счет-

ная модель, $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}_1$, g переводит предшественники в предшественники и последователи в последователи и $f \circ g$ тождественно на M . Повторяя эту цепочную конструкцию счетное число раз, мы получим две элементарные цепочки $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 < \mathfrak{M}_1 < \dots$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1 < \dots$ такие, что объединения этих цепей изоморфны. В силу 4.14 теория T полна. Отсюда следует, что T — теория целых чисел с порядком и T разрешима.

Полнота и разрешимость нескольких важных теорий может быть доказана этим методом. Это сделано, например, для теории целых чисел со сложением (Пресбургер) и теории вещественно замкнутых упорядоченных полей (Тарский). Этот метод может быть также применен для анализа всех полных расширений неполных теорий, например для теории булевых алгебр (Тарский).

Существует несколько способов обобщения проблемы Лёвенгейма — Скулема, если рассматривать свойства, отличные от мощности основного множества системы. Первая такая проблема, предложенная Воотом, касается пар кардиналов. Предположим, что U — унарный предикатный символ языка L . Под (κ, λ) -моделью мы понимаем модель $\mathfrak{M}$, основное множество которой имеет мощность κ , а интерпретация символа U — мощность λ . Мы будем устанавливать некоторые теоремы Лёвенгейма — Скулема без доказательства. Доказательства некоторых из них очень глубоко и применяют бесконечную комбинаторику. Во всех случаях будем предполагать, что L — счетный язык.

4.17. Теорема. Если теория T имеет (κ, λ) -модель и $\kappa \geq \kappa' \geq \lambda$, то T имеет (κ', λ) -модель (это следствие теоремы Лёвенгейма — Скулема о спуске).

4.18. Теорема (Чэн и Кейслер [1]). Если теория T имеет (κ, λ) -модель, то T имеет (κ', λ') -модель, где $\kappa \geq \kappa' \geq \lambda' \geq \lambda^\omega$.

4.19. Теорема (Воот [3]). Если теория T имеет (κ, λ) -модель, где $\lambda < \kappa$, то T имеет (ω_1, ω) -модель.

4.20. Теорема (Чэн [1], GCH). Если теория T имеет (ω_1, ω) -модель и ω_α — регулярный кардинал, то T имеет $(\omega_{\alpha+2}, \omega_{\alpha+1})$ -модель.

4.21. Теорема (Йенсен [1], $V = L$). Если n конечно и теория T имеет $(\omega_{\alpha+n}, \omega_\alpha)$ -модель, то T имеет $(\omega_{\beta+n}, \omega_\beta)$ -модель.

4.22. Теорема (Воот [3]). Предположим, что $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$, $2^{2^\lambda} < \kappa$, ... Если теория T имеет (κ, λ) -модель, то T имеет (κ', λ') -модель, где $\lambda' \leq \kappa'$.

Вышеперечисленные результаты в предположении аксиомы конструктивности $V = L$ показывают, что любой «конечный разрыв» между кардиналами можно сместить, любой бесконечный разрыв может быть заменен на любой разрыв, а любой разрыв

может быть сужен. Контрпримеры, принадлежащие Фуркену [1], показывают, что эти результаты не могут быть улучшены, а именно, конечный разрыв не может быть увеличен. Приведем здесь пример для простейшего случая.

4.23. Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ — упорядоченное поле вещественных чисел с одним унарным отношением U для множества рациональных чисел. Ясно, что $\mathfrak{M}$ будет $(2^\omega, \omega)$ -моделью. Так как U плотно в $\mathfrak{M}$, то теория T модели $\mathfrak{M}$ не имеет (κ, ω) -моделей для $\kappa > 2^\omega$. Верно более сильное утверждение, что теория T не имеет (κ, λ) -моделей для $\kappa > 2^\lambda$.

Ситуация для двукардинальных аналогов теорем Лёвенгейма — Скулема о спуске и подъеме сложна и приводит к результатам о независимости в теории множеств (см. Чэн и Кейслер [1]).

§ 5. Рекурсивно насыщенные модели

Понятие насыщенной модели и более позднее понятие рекурсивно насыщенной модели очень упростили и объединили большую часть теории моделей. Интуитивно, насыщенная модель — это модель, в которой имеются все возможные типы элементов. Насыщенные модели были впервые введены в восточном варианте, их мы будем называть базисными насыщенными моделями, следуя Йонсону [1]. Западный вариант этого понятия был введен Морли и Воотом [1]. Определение и основные результаты о рекурсивно насыщенных моделях принадлежат Барвайсу и Шлипфу [1]. Мы переставим исторический порядок и обсудим в этом параграфе рекурсивно насыщенные, а в следующем насыщенные модели.

Для простоты мы будем предполагать в этом параграфе, что язык L содержит лишь конечное число предикатных, функциональных и константных символов. Нам требуются лишь интуитивные знания о рекурсивных множествах. Нам достаточно следующих фактов: существует лишь счетное множество рекурсивных множеств и что любое множество формул языка L , которое описывается «конечными схемами», рекурсивно. В частности, так как L имеет лишь конечное число символов, множество всех формул языка L рекурсивно.

Мы будем применять обозначение $\Phi(x)$ для множеств формул $\varphi(x)$, которые содержат не более одной свободной переменной x . Будем говорить, что $\Phi(x)$ выполняется в $\mathfrak{M}$, если существует элемент $m \in M$, на котором одновременно выполняются все формулы $\varphi(x) \in \Phi(x)$.

5.1. Пример. В теории упорядоченных полей счетное множество формул

$$\{1 < x, 1 + 1 < x, 1 + 1 + 1 < x, \dots\}$$

выполняется в $\mathfrak{M}$, если и только если $\mathfrak{M}$ — неархимедово поле.

5.2. Пример. Рассмотрим множество формул $\{p(x) \neq 0; p(x) \text{ — полином над } \mathbb{Q}\}$ в теории полей характеристики нуль. Это множество формул выполняется в $\mathfrak{M}$, если и только если $\mathfrak{M}$ не является алгебраическим расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

5.3. Определение. Система $\mathfrak{M}$ называется *рекурсивно насыщенной*, если и только если для любого конечного множества $Y \subseteq M$ любое локально выполнимое в $\mathfrak{M}_Y$ рекурсивное множество формул $\Phi(x)$ языка L_Y выполняется в $\mathfrak{M}_Y$.

Из примера 5.1 мы видим, что любое рекурсивно насыщенное упорядоченное поле не архимедово. Из примера 5.2 видно, что рекурсивно насыщенное поле характеристики нуль не является алгебраическим расширением поля $\mathbb{Q}$. Выгода применения рекурсивных вместо произвольных множеств формул состоит в том, что становится возможным доказать следующую теорему существования.

5.4. Теорема существования. *Любая совместная теория T в языке L имеет конечную или счетную рекурсивно насыщенную модель.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — конечная либо счетная модель теории T . Существует лишь счетное множество конечных подмножеств $Y \subseteq M_0$ и для каждого Y существует лишь счетное множество рекурсивных множеств формул $\Phi(x)$ языка L_Y . В силу теоремы компактности существует счетное элементарное расширение $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_0$ такое, что каждое рекурсивное множество формул $\Phi(x)$, локально выполнимое в $\mathfrak{M}_{0,Y}$, выполнимо в $\mathfrak{M}_{1,Y}$. Повторим эту конструкцию счетное число раз, тогда объединение $\mathfrak{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ — рекурсивно насыщенная счетная модель теории T . $\square$

Рекурсивно насыщенные системы обладают приятными свойствами. Типична следующая теорема.

5.5. Теорема. *Любая рекурсивно насыщенная система $\mathfrak{M}$ ω -однородна, т. е. для любых конечных наборов $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ из множества M таких, что*

$$(\mathfrak{M}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{M}, b_1, \dots, b_n),$$

для любого элемента $a_{n+1} \in M$ существует элемент $b_{n+1} \in M$ такой, что

$$(\mathfrak{M}, a_1, \dots, a_{n+1}) \equiv (\mathfrak{M}, b_1, \dots, b_{n+1}).$$

Доказательство. Пусть

$$Y = \{a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_n\}.$$

Множество всех формул вида

$$\varphi(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \rightarrow \varphi(b_1, \dots, b_n, x)$$

рекурсивно и локально выполнимо в $\mathfrak{M}_Y$, поэтому оно выполняется на некотором элементе b_{n+1} из $\mathfrak{M}$. $\square$

Счетные ω -однородные системы $\mathfrak{M}$ обладают следующим интересным свойством: если $(\mathfrak{M}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{M}, b_1, \dots, b_n)$, то конечное отображение $a_i \rightarrow b_i$ может быть расширено до автоморфизма системы $\mathfrak{M}$.

Многие из приложений рекурсивно насыщенных систем применяют пары систем вместо отдельных систем. Если дан конечный язык $L = \{S_1, \dots, S_n\}$, то пусть L' и L'' — два непересекающихся языка с символами того же типа, что и L ,

$$L' = \{S'_1, \dots, S'_n\},$$

$$L'' = \{S''_1, \dots, S''_n\}.$$

Рассмотрим две системы $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ для языка L с одним и тем же основным множеством, $M = N$. Под *парой систем* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ мы понимаем алгебраическую систему для языка $L' \cup L''$, L' -обеднение которой есть $\mathfrak{M}$, а L'' -обеднение есть $\mathfrak{N}$.

5.6. Теорема об изоморфизме. *Если $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ — счетная рекурсивно насыщенная пара систем и $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Применяя челночный метод, мы строим нумерации $M = \{a_0, a_1, \dots\}$, $N = \{b_0, b_1, \dots\}$ такие, что для любого k выполняется

$$(\mathfrak{M}, a_0, \dots, a_k) \equiv (\mathfrak{N}, b_0, \dots, b_k).$$

Если k четно, то, взяв вначале a_k , мы выбираем b_k , на котором в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ выполнено рекурсивное множество формул

$$\varphi'(a_0, \dots, a_{k-1}, a_k) \leftrightarrow \varphi''(b_0, \dots, b_{k-1}, x),$$

где $\varphi(x_0, \dots, x_k)$ пробегает формулы из L . Если k нечетно, то мы сначала выбираем b_k , а затем подбираем для него a_k . $\square$

Приведенная выше конструкция дает пример рассуждения, часто используемого в теории моделей и называемого *челночным методом*.

Одним из основных результатов в логике является теорема Робинсона о совместности (Робинсон [2]). Можно указать много доказательств этой теоремы. Мы приведем здесь одно особенно простое доказательство, использующее рекурсивно насыщенные модели.

5.7. Теорема Робинсона о совместности. *Пусть L_1 и L_2 — два расширения языка L_0 , где $L_0 = L_1 \cap L_2$. Пусть*

T_0 — полная теория в языке L_0 и T_1, T_2 — два непротиворечивых расширения этой теории до теорий в языках L_1 и L_2 соответственно, тогда объединение $T_1 \cup T_2$ — непротиворечивое множество.

Доказательство. Применяя теорему Лёвенгейма — Скулема и теорему существования 5.4, мы получим конечную или счетную рекурсивно насыщенную пару моделей $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, где $\mathfrak{M}$ — модель теории T_1 , а $\mathfrak{N}$ — модель теории T_2 . $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будут системами для языков L_1 и L_2 . Объединения $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{N}_0$ моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ до языка L_0 будут моделями теории T_0 , а поэтому $\mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{N}_0$. Кроме того, $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ будет рекурсивно насыщенной, а в этом случае по теореме 5.6 об изоморфизме $\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{N}_0$. Этот изоморфизм дает нам обогащение $\mathfrak{N}_1$ модели $\mathfrak{N}_0$ до языка L_1 , которое будет моделью T_1 . Изменяя интерпретацию $L_1 - L_2$ на $\mathfrak{N}$, чтобы она подходила для $\mathfrak{N}_1$, мы получим модель теории $T_1 \cup T_2$.

5.8. П р и м е р. Если G — конечная группа, то пусть $F(G)$ — класс всех полей $\mathfrak{M}$ таких, что группой Галуа поля $\mathfrak{M}$ над некоторым подполем $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}$ будет G . Пусть T — полное расширение теории полей и G, H — конечные группы. Если T имеет модели $\mathfrak{M}_1 \in F(G)$ и $\mathfrak{M}_2 \in F(H)$, то T имеет модель $\mathfrak{M} \in F(G) \cap F(H)$. Это возможно в силу того, что $F(G)$ и $F(H)$ можно описать, используя теории с дополнительными символами. Легко построить много подобных примеров.

Теорема Робинсона о совместности была также доказана независимо в следующей эквивалентной формулировке Крейга [1].

5.9. Интерполяционная теорема Крейга. Пусть $L = L' \cap L''$ и φ, ψ — предложения соответственно языков L' и L'' . Если $\varphi \rightarrow \psi$ — тождественно истинное предложение, то существует предложение θ языка L такое, что предложения $\varphi \rightarrow \theta$ и $\theta \rightarrow \psi$ тождественно истинны.

Доказательство. Предположим, что искомого предложения θ не существует. Пусть T_0 — множество всех следствий из φ в языке L . В этом случае множество $T_0 \cup \{\neg\psi\}$ локально совместно и по теореме компактности имеет модель $\mathfrak{M}$. Пусть T — полная теория L -объединения модели $\mathfrak{M}$. Так как $T \cup \{\varphi\}$ и $T \cup \{\neg\psi\}$ одновременно совместны, то $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ совместно. Но это означает, что предложение $\varphi \rightarrow \psi$ не является тождественно истинным.

Мы закончим этот параграф одной из теорем устойчивости. Формула φ называется *позитивной*, если φ получается из атомных формул применением связок $\wedge, \vee, \forall, \exists$. Гомоморфизмом модели $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ называется отображение f из M в N такое, что для любой атомной формулы φ и интерпретации s в $\mathfrak{M}$

из $\mathfrak{M} \models \varphi[s]$ следует $\mathfrak{N} \models \varphi[f(s)]$.

Подсистема модели $\mathfrak{N}$, у которой основное множество равно области значений f , называется *гомоморфным образом* модели $\mathfrak{M}$ при гомоморфизме. Мы говорим, что теория T *устойчива относительно гомоморфных образов*, если любой гомоморфный образ любой модели теории T является моделью теории T .

5.10. Теорема Линдона о гомоморфизме (Линдон [1]). Теория T *устойчива относительно гомоморфных образов, если и только если T эквивалентна некоторому множеству позитивных формул.*

Доказательство. Индукцией по сложности позитивных формул доказывается, что позитивные формулы устойчивы относительно гомоморфных образов. Пусть теория T устойчива относительно гомоморфных образов и T_p — множество всех позитивных формул, выводимых из T . Пусть $\mathfrak{N}$ — модель теории T_p . По теореме компактности существует модель $\mathfrak{M}$ теории T такая, что любая позитивная формула, истинная в $\mathfrak{M}$, истинна и в $\mathfrak{N}$. Чтобы избежать осложнений, предположим, что модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ бесконечны. Тогда существует счетная рекурсивно насыщенная пара моделей $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$ такая, что $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}'$. Применяя челночный метод, мы увидим, что $\mathfrak{N}'$ есть гомоморфный образ $\mathfrak{M}'$, а поэтому $\mathfrak{N}' \models T$. Следовательно, теория T_p эквивалентна T . $\square$

5.11. П р и м е р. Теории групп и колец позитивны и, как хорошо известно, устойчивы относительно гомоморфных образов. Теория областей целостности неустойчива относительно гомоморфных образов (рассмотрим целые числа и числа по модулю n), поэтому она не может быть аксиоматизируема позитивными формулами. Основной виновник — это аксиома

$$\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0),$$

которая утверждает, что нет делителей нуля.

§ 6. Большие и малые модели

В этом параграфе изучим два типа моделей, насыщенные модели (которые будут большими) и простые модели (которые будут малыми). Вначале будет изложено понятие насыщенных моделей в оригинальном восточном варианте, принадлежащее Йонсону [1], а затем параллельный западный вариант, принадлежащий Морли и Вооту [1]. Теория простых моделей более успешно развивалась в западном варианте и в завершеном виде она изложена Воотом [2].

Теорема компактности является основным инструментом при конструировании больших моделей. Для конструирования малых моделей нужен новый инструмент, теорема об опускании типов.

Подход Йонсона в применении к теориям имеет следующий вид:

6.1. Определение. Теория T называется *йонсоновской*, если:

- (i) T имеет бесконечную модель;
- (ii) T индуктивна;
- (iii) T обладает *свойством совместного вложения*, т. е. любые две модели $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ теории T изоморфно вкладываются в некоторую модель $\mathfrak{B}$ теории T ;
- (iv) T обладает свойством амальгамируемости.

6.2. Пример. Следующие теории являются йонсоновскими:

- абелевы группы,
- булевы алгебры,
- линейный порядок,
- поля характеристики p (p — простое число или нуль),
- упорядоченные поля.

Через $T_\forall$ обозначается множество всех универсальных предложений, выводимых из T . *Базисными формулами* мы будем называть бескванторные формулы. Поэтому диаграмма $D(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ эквивалентна множеству всех базисных формул языка L_M , истинных в $\mathfrak{M}_M$. В общем случае для любого $X \subseteq M$ мы обозначим через $D(\mathfrak{M}, X)$ множество всех базисных формул языка L_X , истинных в системе $\mathfrak{M}_X$. Для классификации элементов модели $\mathfrak{M}$ оказывается полезным понятие базисного типа.

6.3. Определение. *Базисным типом* над T называется множество базисных формул $\Phi(x)$ с одной переменной x , максимальное совместное с T . Если t — элемент модели $\mathfrak{M}$ теории T , то множество всех базисных формул, истинных на этом элементе, будет базисным типом; назовем его базисным типом элемента t .

Заметим, что любое множество базисных формул, совместное с T , может быть расширено до базисного типа над T .

6.4. Пример. Пусть T — теория полей характеристики p (p — простое число или нуль). Для любого неразложимого полинома $P(x)$ над простым полем существует базисный тип, содержащий все следствия из $T \cup \{P(x) = 0\}$ и называемый типом корней $P(x)$. T имеет еще один базисный тип, тип трансцендентного x .

Теория упорядоченных полей имеет 2^ω базисных типов, так как существует 2^ω сечений в области рациональных чисел.

6.5. Определение. Пусть T — йонсоновская теория и κ — бесконечный кардинал. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется *базисно κ -насыщенной*, если для любого подмножества $X \subseteq M$ мощности, меньшей κ , любой базисный тип над $T \cup D(\mathfrak{M}, X)$ выполняется в $\mathfrak{M}_X$. (Эквивалентно: любое множество базисных формул $\Phi(x)$, совместное с $T \cup D(\mathfrak{M}, X)$, выполняется в $\mathfrak{M}_X$.)

$\mathfrak{M}$ называется *базисно насыщенной*, если $\mathfrak{M}$ базисно κ -насыщен, где κ — мощность основного множества модели (и κ бесконечно). Понятие базисной κ -насыщенности зависит от теории T и становится сильнее с возрастанием κ .

Мы приведем три теоремы Йонсона [1]. В каждом случае мы предполагаем, что T — йонсоновская теория с не более чем κ символами.

6.6. Теорема существования. Теория T имеет базисно κ^+ -насыщенную модель мощности 2^κ .

Доказательство. Аналогично теореме о существовании рекурсивно насыщенных моделей доказывается и эта теорема. Мы строим цепь длины κ^+ моделей мощности 2^κ . На непереломных шагах мы, используя свойства амальгамируемости и совместного вложения и теорему компактности, удовлетворяем 2^κ базисных типов над предыдущей моделью.

6.7. Следствие (ОКГ). T имеет базисно насыщенную модель мощности κ^+ .

6.8. Теорема единственности. Любые две базисно насыщенные модели теории T одной и той же мощности изоморфны.

Доказательство. Используем челночный метод.

6.9. Теорема. Модель $\mathfrak{M}$ теории T базисно κ -насыщена, если и только если:

- (i) модель $\mathfrak{M}$ базисно κ -универсальна, т. е. любая модель мощности, меньшей κ^+ , изоморфно вкладывается в $\mathfrak{M}$;
- (ii) модель $\mathfrak{M}$ базисно κ -однородна, т. е. если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ порождается множеством мощности, меньшей κ , и $f: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$, то в $\mathfrak{M}_N$ и $\mathfrak{M}_{fN}$ выполняются одни и те же базисные типы.

Приведенная теорема показывает, в каком смысле базисно насыщенная модель является большой.

6.10. Пример. Базисно ω_1 -насыщенное линейно упорядоченное множество будет η_1 -множеством в смысле Хаусдорфа [1]. η_1 -множеством $\langle M, < \rangle$ будет плотное множество в том смысле, что если X, Y — два произвольных подмножества мощности, меньшей ω_1 , и $X < Y$, то существует элемент $z \in M$ такой, что $X < z < Y$.

Из работы Эрдеша, Гилмана и Хенриксона [1] следует, что базисно ω_1 -насыщенными упорядоченными полями будут в точности вещественно замкнутые упорядоченные поля, у которых порядок является η_1 -множеством. Эти поля будут неархимедовыми.

Базисно ω_1 -насыщенными полями будут в точности несчетные алгебраически замкнутые поля.

Если $2^\omega = \omega_1$, то существует единственная базисно насыщенная группа мощности ω_1 , эта группа оказывается полной и простой.

Западный вариант обсуждаемой проблемы получается заменой:

- йонсоновская теория $\rightarrow$ полная теория,
 диаграмма $\rightarrow$ полная диаграмма,
 изоморфное вложение $\rightarrow$ элементарное вложение,
 базисная формула $\rightarrow$ формула.

Во всех определениях опустим прилагательное «базисный». Приведем здесь основные пункты.

6.3'. Определение. Типом над полной теорией T назовем максимальное совместное с T множество формул $\Phi(x)$.

6.5'. Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ называется κ -насыщенной, если для любого подмножества $X \subseteq M$ мощности, меньшей κ , любой тип над $\text{Th}(\mathfrak{M}_X)$ выполняется в $\mathfrak{M}_X$. Система $\mathfrak{M}$ называется насыщенной, если она κ -насыщена, где κ — мощность основного множества системы $\mathfrak{M}$.

6.6'. Теорема существования. Любая полная теория с бесконечными моделями имеет κ^+ -насыщенную модель мощности 2^κ .

6.8'. Теорема единственности. Любые две элементарно эквивалентные насыщенные системы одной мощности изоморфны.

Доказательство может быть получено либо непосредственно, либо из предыдущих результатов, если взять консервативное расширение T' из теоремы 2.18.

Вспомним, что T' получается из T присоединением новых символов для всех формул языка L . Если T — полная теория с бесконечными моделями, то T' — йонсоновская теория. Кроме того, для каждой модели $\mathfrak{M}$ теории T существует единственное обогащение $\mathfrak{M}' \models T'$ и типам в $\mathfrak{M}_X$ соответствуют базисные типы в $\mathfrak{M}'_X$.

Каждая ω -насыщенная система для конечного языка будет рекурсивно насыщенной. Большинство приложений рекурсивно насыщенных моделей параллельно простым приложениям насыщенных моделей. Насыщенные модели имеют и другие приложения. Для примера см. главу 3, они применяются также в теоремах Чэна и Йенсена о двух кардиналах в § 4 и в теореме Морли о категоричности в § 7. Трудность состоит в том, что счетные насыщенные модели не всегда существуют, в отличие от счетных рекурсивно насыщенных моделей, которые всегда существуют.

6.10'. Пример. η_1 -множества и η_1 -вещественно замкнутые упорядоченные поля будут ω_1 -насыщенными. Любое несчетное алгебраически замкнутое поле ω_1 -насыщено. Однако базисно насыщенная группа мощности ω_1 не является насыщенной.

В оставшейся части этого параграфа мы будем предполагать, что L — счетный язык, и будем изучать счетные модели полных теорий в языке L .

Будем обозначать $x_1, \dots, x_n$ через x и рассмотрим типы от n переменных. Под типом от переменных x над T будем понимать максимальное совместное с T множество формул $\Phi(x)$. Тип $\Phi(x)$ реализуется в алгебраической системе $\mathfrak{M}$, если он выполняется некоторым $t \in M$ в системе $\mathfrak{M}$, и он опускается в системе $\mathfrak{M}$, если он не реализуется. Для удобства под счетным множеством мы будем понимать множество конечное или мощности ω ; заметим, что конечные системы насыщены.

Начнем с характеристики теорий, имеющих счетные насыщенные модели.

6.11. Теорема (Воот [2]). Полная теория T имеет счетную насыщенную модель, если и только если для любого n теория T имеет лишь счетное число типов от n переменных.

Доказательство. Пусть T имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ — универсальная модель, то каждый тип от n переменных над T реализуется в $\mathfrak{M}$. Поэтому T имеет счетное множество типов. Обратное утверждение доказывается аналогично теореме существования рекурсивно насыщенных моделей.

6.12. Следствие. Если полная теория T имеет лишь счетное множество неизоморфных счетных моделей, то T имеет счетную насыщенную модель.

6.13. Пример. Теория T алгебраически замкнутых полей характеристики p имеет счетное множество счетных моделей, каждая из которых имеет степень трансцендентности n или ω . Следовательно, теория T имеет счетную насыщенную модель. Модель конечной степени трансцендентности опускает любой тип $n+1$ алгебраически независимых элементов. Поэтому поле степени трансцендентности ω будет насыщенной моделью.

6.14. Пример. Теория вещественно замкнутых упорядоченных полей не имеет счетной насыщенной модели, так как существует 2^ω типов от одной переменной. Аналогично полная теория стандартной модели арифметики не имеет счетной насыщенной модели, так как получаем 2^ω типов от одной переменной, рассматривая различные множества стандартных простых чисел, которые делят x .

Сейчас мы докажем основной результат, который позволит нам конструировать малые счетные модели.

6.15. Теорема об опускании типов (Генкин [2], Ори [1]). Пусть T — непротиворечивая теория и $\Phi_{mn}(x)$, $m, n < \omega$, — формула с переменными x . Предположим, что для любой формулы $\psi(x)$, совместной с T , и любого t существует n такое, что $\psi(x) \wedge \Phi_{mn}(x)$ совместно с T . В этом случае T имеет

модель $\mathfrak{M}$ такую, что

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge_m \forall x \bigvee_n \varphi_{mn}(x).$$

(Длина последовательности $x = x_1 \dots x_{f(m)}$ не зависит от n .)

Доказательство. Проведем построение, аналогичное доказательству теоремы компактности. Присоединим счетное множество C новых константных символов. Перечислив все предложения ψ языка L_C и все пары (m, c) , мы можем построить теорию T' в языке L_C такую, что

- (1) $T' \subseteq T$;
- (2) T' — полная теория в языке L_C ;
- (3) если $\exists x \psi(x) \in T'$, то $\psi(c) \in T'$ для некоторого $c \in C$;
- (4) для любой c из C и $m < \omega$ существует $n < \omega$ такое, что $\varphi_{mn}(c) \in T'$.

T' имеет единственную модель $\mathfrak{M}'$ такую, что любой элемент $m \in M'$ является интерпретацией некоторого константного символа $c \in C$. Обеднение $\mathfrak{M}$ модели $\mathfrak{M}'$ до языка L имеет все требуемые свойства. $\square$

Оригинальные работы о теореме об опускании типов имеют дело со специальным случаем ω -моделей арифметики. Пусть язык L содержит среди всех символов константы $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots$. Теория T называется ω -полной, если для любой формулы $\varphi(x)$ языка L

из $T \models \varphi(\dot{0}), T \models \varphi(\dot{1}), \dots$ следует $T \models \forall x \varphi(x)$.

Бесконечное правило вывода, которое утверждает, что $\forall x \varphi(x)$ выводится из $\varphi(\dot{0}), \varphi(\dot{1}), \dots$, называется ω -правилом. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется ω -моделью, если каждый элемент из $\mathfrak{M}$ равен некоторой константе $\dot{n}$, т. е.

$$\mathfrak{M} \models \forall x \bigvee_{n < \omega} x = \dot{n}.$$

6.16. Теорема об ω -полноте. Если теория T непротиворечива и ω -полна, то T имеет ω -модель.

Доказательство. Если формула $\theta(x)$ совместна с T , то для некоторого $n < \omega$ имеем $T \models \neg \theta(\dot{n})$. Следовательно, формула $\theta(x) \wedge x = \dot{n}$ совместна с T , и теперь применяем теорему об опускании типов.

Теорема об ω -полноте верна также и в более общем случае ω -логик, которые имеют один сорт переменных для натуральных чисел и другой сорт переменных для элементов (см. 5.2 главы 1).

Следующий результат был доказан для моделей произвольной мощности Макдоуэлом и Шпекером [1]. Для счетных моделей мы дадим простое доказательство, применяющее теорему об опускании типов.

6.17. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная модель арифметики Пеано. В этом случае существует собственное элементарное расширение $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$ такое, что для любого $m \in M$ и $n \in N - M$ выполнено $m < n$.

Доказательство. Присоединим новый константный символ c к языку L_M , и пусть T — теория

$$\text{Th}(\mathfrak{M}_M) \cup \{m < c : m \in M\}.$$

Применяя теорему об опускании типов и принцип отделения в арифметике Пеано, можно показать, что теория T имеет модель $\mathfrak{N}'$ такую, что $\mathfrak{N}' \models \bigwedge_{a \in M} \forall x (a \leq x \vee \bigvee_{b < a} x = b)$. Обеднение $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{N}'$ до языка L обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

Мы дали два приложения теоремы об опускании типов к неполным теориям. Возвратимся теперь к нашему изучению счетных моделей полных теорий.

6.18. Определение. Формула $\varphi(x)$ называется *полной* в теории T , если множество

$$\{\varphi(x) : T \models \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\}$$

является типом над T . Тип, который порождается полной формулой, называется *изолированным типом* *).

6.19. Теорема (Вотт [2]). Пусть T — полная теория. Теория T имеет модель, опускающую тип p , если и только если p — неизоллированный тип.

Доказательство. Если p — изолированный тип, порожаемый формулой $\varphi(x)$, то $T \models \exists x \varphi(x)$, и поэтому любая модель теории T реализует p . Предположим, что p — неизоллированный тип. Тогда по теореме об опускании типов теория T имеет модель $\mathfrak{M}$ такую, что

$$\mathfrak{M} \models \forall x \bigvee_{\psi \in p} \neg \psi(x),$$

поэтому $\mathfrak{M}$ опускает тип p .

Мы теперь готовы к изучению малых моделей.

6.20. Определение. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется *простой*, если она элементарно вкладывается в любую модель теории T .

Простые модели всегда счетные, и они будут противоположны ω -универсальным моделям. Следующие результаты получены Воттом [2].

6.21. Теорема. Пусть T — полная теория. Модель $\mathfrak{M}$ проста в теории T , если и только если $\mathfrak{M}$ — счетная модель и любой тип, реализующийся в $\mathfrak{M}$, является изолированным.

Доказательство. Применим теорему 6.19.

*) Изолированный тип часто называют *главным*. — Прим. ред.

6.22. Теорема единственности для простых моделей. Любые две простые модели полной теории T изоморфны.

Доказательство получается применением челночного метода с использованием теоремы 6.21.

6.23. Теорема существования для простых моделей. Полная теория T имеет простую модель, если и только если любая формула, совместная с T , принадлежит некоторому изолированному типу.

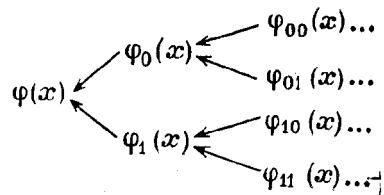
Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ — простая модель теории T , то любая формула $\varphi(x)$, совместная с T , выполняется в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, принадлежит изолированному типу. Предположим, что любая формула принадлежит изолированному типу. Пусть Φ_k — множество всех полных формул от k переменных над T . В силу теоремы об опускании типов теория T имеет счетную модель $\mathfrak{M}$ такую, что

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge_k \forall x \bigvee_{\varphi \in \Phi_k} \varphi(x).$$

Тогда в силу теоремы 6.21 $\mathfrak{M}$ — простая модель. $\square$

6.24. Следствие. Если полная теория T имеет счетную насыщенную модель, то она имеет простую модель.

Доказательство. Предположим, что T не имеет простой модели. Пусть $\varphi(x)$ — формула, которая не содержится ни в каком изолированном типе над T . В этом случае существует бинарное дерево



формул, совместных с T , такое, что все ветви этого дерева могут быть расширены до различных типов. Следовательно, T имеет 2^ω типов от x и T не имеет счетной насыщенной модели.

6.25. Пример. В силу элиминации кванторов простой моделью теории алгебраически замкнутых полей характеристики p будет поле алгебраических чисел.

Поле вещественных алгебраических чисел будет простой моделью теории вещественно замкнутых упорядоченных полей. Стандартная модель $\mathfrak{N}$ арифметики будет простой моделью теории $\text{Th}(\mathfrak{N})$.

Кульминацией нашего изучения счетных насыщенных моделей будет характеристика ω -категоричных теорий.

6.26. Теорема (Энгелер, Рыль-Нардзевский, Свенониус, Ворот [2]). Пусть T — полная теория без конечных моделей. Теория T ω -категорична, если и только если для любого n теория T имеет лишь конечное число типов с n переменными.

Доказательство. Пусть теория T ω -категорична и $\mathfrak{M}$ — счетная модель теории T . В силу теоремы Лёвенгейма — Скулема о спуске модель $\mathfrak{M}$ простая. Так как каждый тип над T реализуется в $\mathfrak{M}$, то в силу теоремы 6.21 каждый тип над T изолированный. Если бы T имела бесконечно много типов от x , то множество отрицаний полных формул от x было бы совместно и поэтому содержалось бы в неизолированном типе. Следовательно, T имеет лишь конечное число типов от x .

Предположим теперь, что для любого n теория T имеет лишь конечное число типов от n переменных; пусть это $p_1, \dots, p_m$. Тип p_i содержит полную формулу

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m,$$

где $\varphi_i \in p_i - p_j$ для $i \neq j$. Следовательно, каждый тип от n переменных над T изолированный. Поэтому в силу теоремы 6.21 каждая счетная модель теории T простая, и в силу теоремы единственности для простых моделей теория T ω -категорична. $\square$

6.27. Пример. Теория плотного линейного порядка T ω -категорична и допускает элиминацию кванторов. Поэтому для любого n конечное множество типов от $x_1, \dots, x_n$ будет определяться относительным порядком переменных $x_1, \dots, x_n$.

В действительности наше обращение с простыми моделями плодотворно потому, что любая формула $\varphi(x)$, совместная с полной теорией T , выполняется в любой модели теории T . Так как йонсоновские теории и базисные формулы этим свойством не обладают, то не получается аналога для восточного варианта простых моделей. Однако в § 8 мы получим восточный вариант теоремы об опускании типов.

§ 7. Стабильные теории

Морли [1] доказал следующую знаменитую теорему, отвечающую на вопрос Лоса.

7.1. Теорема Морли о категоричности. Пусть T — теория в счетном языке L . Если теория T категорична в некоторой несчетной мощности κ , то она категорична в любой несчетной мощности λ .

Отсюда для счетного языка L имеется лишь два вида κ -категоричности: ω -категоричность и ω_1 -категоричность (этот результат позднее был обобщен на несчетные языки Руботтомом, Ресгером и в окончательном виде Шелом [2]). Доказательство теоремы 7.1 было значительно упрощено, но оно еще слишком

техническое, чтобы приводить его здесь. Однако методы, используемые в ее доказательстве, стали более важными, чем сама теорема. Морли дает красивую и плодотворную классификацию типов над теорией. Мы начнем с восточного варианта, так как он имеет естественные примеры из алгебры. Чтобы мотивировать нашу теорию, мы рассмотрим расширения полей и абелевых групп.

Рассмотрим теорию T и модель $\mathfrak{M}$ теории T_V . Под *базисным типом над $\mathfrak{M}$* мы понимаем базисный тип от одной переменной над теорией $T \cup D(\mathfrak{M})$. Базисный тип *изолирован*, если он порождается одной базисной формулой.

Вначале пусть T — теория полей фиксированной характеристики и $\mathfrak{M}$ — модель теории T . Базисными типами над $\mathfrak{M}$ будут:

(0) Для любого неприводимого полинома $P(x)$ над $\mathfrak{M}$ изолированный тип, порождаемый формулой $P(x) = 0$. В некотором расширении $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ элемент имеет один из таких типов, если и только если он алгебраический над $\mathfrak{M}$.

(1) Единственный неизолитованный тип, реализуемый в расширении $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ трансцендентными элементами над $\mathfrak{M}$.

Типы (0) называются алгебраическими или ранга нуль по Морли над $\mathfrak{M}$. Тип (1) называется ранга один по Морли над $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, то каждый алгебраический тип над $\mathfrak{M}$ может быть расширен до нескольких различных базисных типов над $\mathfrak{N}$. Однако в теории полей оказывается, что любое расширение $q \supseteq p$ над $\mathfrak{N}$ изолированного базисного типа p над $\mathfrak{M}$ есть изолированный тип.

Пусть теперь T — теория абелевых групп и $\mathfrak{M} \models T$. Очевидно, что для любого $m \in M$ формула $x = m$ порождает изолированный тип, который имеет ранг нуль по Морли. Еще один тип p порождается множеством формул

$$\{x \neq m: m \in M\} \cup \{2x = 0\}.$$

Тип p реализуется на элементе $x \notin M$ порядка 2, и он изолирован, если и только если в $\mathfrak{M}$ существует лишь конечное число элементов порядка два. Однако над расширением $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ тип p будет всегда расщепляться на множество изолированных типов над $\mathfrak{N}$ и самое большее один неизолитованный тип. Тип p дает пример типа ранга 1 по Морли. Тип элемента x порядка 4 такого, что $2x \notin M$, имеет ранг 2 по Морли и т. д. Тип элемента x такого, что $nx \notin M$ для всех n , имеет ранг ω по Морли.

Мы готовы дать общее определение.

Легче определить ранг по Морли для базисных формул. До тех пор, пока мы этого не отметим, будем предполагать, что T — йонсоновская теория в счетном языке. Вспомним из § 3, что $\mathfrak{M} \models T_V$, если и только если $\mathfrak{M}$ — подсистема некоторой модели $\mathfrak{N} \models T$.

7.2. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель T_V . (*Базисный*) *ранг $m(\varphi)$ по Морли для (базисной) формулы $\varphi(x)$ языка L_M* определим индуктивно:

- (i) $m(\varphi) = -1$, если формула $\varphi(x)$ не совместна с $T \cup D(\mathfrak{M})$;
- (ii) $m(\varphi) = 0$, если для любой модели $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \models T_V$ формула $\varphi(x)$ принадлежит лишь конечному числу типов над $\mathfrak{N}$;
- (iii) пусть α — ординал, тогда $m(\varphi) = \alpha$, если для любой модели $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \models T_V$ множество $\{\varphi(x)\} \cup \{\neg \psi(x): \psi \text{ имеет ранг } < \alpha \text{ над } \mathfrak{N}\}$ может быть расширено лишь до конечного числа различных типов над $\mathfrak{N}$;
- (iv) $m(\varphi) = \infty$, если $m(\varphi) \neq -1$ и $m(\varphi) \neq \alpha$ для любого ординала α .

Мы понимаем под «конечным числом» по крайней мере один элемент, но меньше чем ω .

Заметим, что $m(\varphi) \leq m(\psi)$, если $T \models \varphi(x) \rightarrow \psi(x)$.

7.3. Определение. *Рангом по Морли для базисного типа p над $\mathfrak{M}$* является наименьший ординал α такой, что тип p содержит базисную формулу ранга α по Морли.

Мы начнем с леммы, показывающей, что ранг по Морли хорошо себя ведет.

7.4. Лемма. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \models T_V$ и $\varphi(x)$ — базисная формула языка L_M .

(i) Ранги по Морли для формулы $\varphi(x)$ над $\mathfrak{M}$ и над $\mathfrak{N}$ совпадают.

(ii) Если $m(\varphi) = \alpha < \infty$, то φ принадлежит лишь конечному числу базисных типов ранга α и не принадлежит базисным типам ранга $> \alpha$ над $\mathfrak{M}$.

(iii) Если p имеет ранг $\alpha < \infty$ над $\mathfrak{M}$, то p может быть расширен до конечного числа базисных типов ранга α и не может расширяться до базисных типов ранга $> \alpha$ над $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Индукцией по рангу формул, используя свойство амальгамируемости для T_V , доказываем (i). Импликация (i) $\rightarrow$ (ii) и (ii) $\rightarrow$ (iii) легко следуют из определения.

7.5. Определение. (*Базисным*) *рангом по Морли для теории T* будет ранг Морли для формулы $x = x$ над любой моделью $\mathfrak{M} \models T_V$. Эквивалентно ранг по Морли для теории T — это максимум рангов базисных типов над некоторой моделью $\mathfrak{M} \models T_V$.

Морли и [1] доказал, что ранг любой тотально трансцендентной теории меньше ∞ .

7.6. П р и м е р. Теория полей фиксированной характеристики имеет ранг 1 по Морли. Теория отношения эквивалентности $\langle M, E \rangle$ имеет ранг 2 по Морли. (Для любого $m \in M$ тип элемента $x \notin M$, для которого имеет место $E(x, m)$, имеет ранг 1, в то время как множество формул $\{\neg E(x, m): m \in M\}$ порождает

тип ранга 2.) Теории абелевых групп и дифференциальных полей характеристики 0 имеют ранг ω по Морли. Теория линейного порядка имеет ранг ∞ по Морли. Линейный порядок имеет следующие типы: для любого $m \in M$ формула $x = m$ порождает тип ранга 0. Любое сечение Дедекинда определяет тип ранга ∞ .

Возможно, лучше понимать определение ранга по Морли в топологических терминах. Оно тесно связано с производными Кантора — Бендиксона. В § 3 мы объясняли теорему компактности в топологическом пространстве, где точками были полные теории. Теперь мы рассмотрим топологическое пространство, в котором точками будут типы.

Если дана йонсоновская теория T и модель $\mathcal{M}$ теории T_v , то через $S(\mathcal{M})$ обозначим множество всех базисных типов от одной переменной над $\mathcal{M}$. Для каждой базисной формулы $\varphi(x)$ языка L_M рассмотрим

$$[\varphi] = \{p \in S(\mathcal{M}) : \varphi \in p\}.$$

Мы превращаем $S(\mathcal{M})$ в топологическое пространство, *базисное стоуновское пространство над $\mathcal{M}$* , взяв в качестве базиса топологии открыто-замкнутые множества вида $[\varphi]$. Из теоремы компактности следует, что $S(\mathcal{M})$ — компактное вполне отделимое хаусдорфово пространство. Точка $p \in S(\mathcal{M})$ изолирована в том смысле, что она порождается одной базисной формулой, если и только если она изолирована в топологическом пространстве. Поэтому, если $[\varphi]$ конечно, то любой тип $p \in [\varphi]$ изолирован. Производной Кантора — Бендиксона от пространства $S(\mathcal{M})$ будет подпространство

$$S(\mathcal{M})' = \{p \in S(\mathcal{M}) : p \text{ не изолирован}\}.$$

Итерируя этот процесс по ординалам, мы определим:

$$S(\mathcal{M})^0 = S(\mathcal{M}),$$

$$S(\mathcal{M})^{\alpha+1} = (S(\mathcal{M})^\alpha)',$$

$$S(\mathcal{M})^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} S(\mathcal{M})^\beta, \text{ если } \alpha \text{ предельный,}$$

$$S(\mathcal{M})^\infty = \bigcap_\alpha S(\mathcal{M})^\alpha.$$

Для любого α множество $S(\mathcal{M})^\alpha$ замкнуто. Пересечение $S(\mathcal{M})^\infty$ называется *совершенным ядром* пространства $S(\mathcal{M})$. Наконец, для любого $p \in S(\mathcal{M})$ *рангом Кантора — Бендиксона* будет наибольший ординал α такой, что $p \in S^\alpha(\mathcal{M})$.

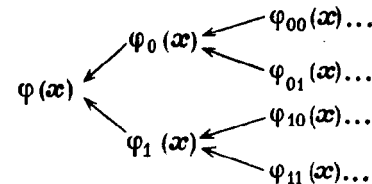
Ранг по Морли отличается от ранга Кантора — Бендиксона, так как ранг по Морли привлекает произвольные расширения $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}$, кроме самого $\mathcal{M}$. Один из способов определить ранг по Морли топологически состоит в рассмотрении категории базисных стоуновских пространств для моделей (см. Сакс [1]). Бо-

лее простой способ состоит в рассмотрении базисно ω_1 -насыщенной модели $\mathcal{M}$.

7.7. Теорема. Если $\mathcal{M}$ — базисно ω_1 -насыщенная модель, то для любого базисного типа $p \in S(\mathcal{M})$ его ранг по Морли равен рангу Кантора — Бендиксона этого типа.

Доказательство. Чтобы дать идею доказательства, мы рассмотрим лишь доказательство для ранга 0. Если p имеет ранг 0 по Морли, то он изолирован над любым расширением $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$, поэтому он изолирован над $\mathcal{M}$ и его ранг Кантора — Бендиксона равен нулю. Предположим, что p имеет ранг по Морли, больший нуля, и $p \in [\varphi]$. Тогда $\varphi(x)$ имеет ранг по Морли, больший нуля, а поэтому существует расширение $\mathcal{N}$ такое, что $\varphi(x)$ принадлежит бесконечно многим базисным типам над $\mathcal{N}$, пусть это $q_0, q_1, q_2, \dots$. Эти типы можно различить счетным множеством формул, а поэтому можно считать, что $\mathcal{N}$ счетно. Так как $\mathcal{M}$ базисно ω_1 -насыщен, то мы можем считать, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Следовательно, $[\varphi]$ бесконечно и p — неизоллированный тип, а поэтому для типа p ранг Кантора — Бендиксона > 0 . $\square$

7.8. Лемма. Пусть $\mathcal{M}$ — базисно ω_1 -насыщенная модель теории T . Базисная формула $\varphi(x)$ над $\mathcal{M}$ имеет ранг ∞ по Морли, если и только если имеется бинарное дерево базисных формул



такое, что каждая ветвь совместна с $T \cup D(\mathcal{M})$, но нет базисных типов, которые принадлежат более чем одной ветви.

Доказательство. Проведем доказательство чисто топологически. Эта лемма представляет классический результат о совершенном ядре. Для некоторого α $S(\mathcal{M})^\infty = S(\mathcal{M})^\alpha = S(\mathcal{M})^{\alpha+1}$, поэтому $S(\mathcal{M})^\infty$ не имеет изолированных точек. Следовательно, если $m(\varphi) = \infty$, то $[\varphi] \cap S(\mathcal{M})^\infty$ бесконечно, и, повторяя расщепления, мы получим бинарное дерево с корнем $\varphi(x)$.

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что $m(\varphi) = \alpha < \infty$ и существует бинарное дерево с корнем $\varphi(x)$. Можно предположить, что α — наименьший такой ординал. Так как $[\varphi]$ содержит лишь конечное число точек ранга α , то в дереве должна существовать формула $\varphi_s(x)$ ранга, меньшего α , но $\varphi_s(x)$ — также корень бинарного дерева, а это приводит нас к противоречию. $\square$

Следующий результат Морли [1] характеризует тотально трансцендентные теории в терминах мощности стоуновских пространств.

7.9. Определение. Теория T базисно κ -стабильна, если для любой модели $\mathfrak{M}$ теории $T_{\vee}$ мощности κ базисное стоуновское пространство имеет мощность κ .

7.10. Теорема. Теория T имеет ранг по Морли $< \infty$, если и только если она базисно ω -стабильна.

Доказательство. Если T имеет ранг ∞ по Морли, то в силу 7.8 существует бинарное дерево базисных формул над моделью $\mathfrak{M}$ теории T . Взяв счетную подмодель $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, содержащую все константы, которые входят в формулы этого дерева, мы видим, что над $\mathfrak{N}$ существует 2^{ω} базисных типов, так как в дереве 2^{ω} ветвей, а поэтому теория T не является ω -стабильной.

Пусть теперь теория T не является ω -стабильной, тогда пространство $S(\mathfrak{M})$ несчетно для некоторой счетной модели $\mathfrak{M} \models T_{\vee}$. Для каждой формулы $\varphi(x)$, если $[\varphi]$ не счетно, то можно расщепить $[\varphi]$ на два непересекающихся несчетных множества $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$, так как существует лишь счетное множество формул над $\mathfrak{N}$. Поэтому существует бинарное дерево базисных формул над $\mathfrak{M}$. $\square$

7.11. Теорема. Если теория T базисно ω -стабильна, то ранг по Морли теории T — счетный ординал.

Доказательство. Индукцией по числу порождающих можно показать, что существует лишь счетное число неизоморфных конечно порожденных моделей $\mathfrak{M} \models T_{\vee}$. Следовательно, существует лишь счетное множество различных рангов по Морли базисных формул над моделями $T_{\vee}$. Из определения легко видеть, что не существует формул ранга $> \alpha$, если нет формул ранга α . Поэтому любая формула имеет счетный ранг. $\square$

Заметим, что мы можем построить базисно насыщенную модель теории T мощности κ даже без ОКГ, если T — базисно κ -стабильная теория, где κ — регулярный кардинал (возможно, ω). В работе Шелаха показано, что свойство κ -стабильности имеет фундаментальное значение. Он предположил следующую классификацию теорий.

7.12. Определение. Спектром базисной стабильности теории T назовем класс всех бесконечных кардиналов κ таких, что теория T базисно κ -стабильна.

7.13. Теорема (Шелах [1]). Любая теория T имеет один из четырех спектров базисной стабильности s_T :

- (i) $s_T = \{\kappa: \omega \leq \kappa\}$ (T базисно ω -стабильна);
- (ii) $s_T = \{\kappa: 2^{\omega} \leq \kappa\}$ (T базисно суперстабильна);
- (iii) $s_T = \{\kappa: \kappa^{\omega} = \kappa\}$ (T базисно стабильна);
- (iv) s_T пусто (T базисно нестабильна).

Первым шагом в ее доказательстве был результат Морли [1], состоящий в следующем. Предположим, что теория T не является базисно κ -стабильной. Как и в доказательстве теоре-

мы 7.10, показывается, что существует бинарное дерево базисных формул над некоторой моделью теории T , поэтому T не является базисно ω -стабильной. Следовательно, ω -стабильность влечет κ -стабильность для всех κ . Остальные шаги более трудные.

7.14. Пример. Теория счетного множества одноместных отношений базисно суперстабильна, но не является ω -стабильной. Теория R -модулей, где $R = Z \oplus Z \oplus \dots$, базисно стабильна, но не суперстабильна. Такова же теория дифференциальных полей простой характеристики p с символом для корня p -й степени (Шелах [1]).

Прекрасная классификация теорий получается, если использовать функции стабильности для теорий T .

7.15. Определение. Функцией базисной стабильности для теории T называется функция f_T на бесконечных кардиналах κ , определенная следующим образом: $f_T(\kappa) = \sup \{ |S(\mathfrak{M})| : \mathfrak{M} \text{ — модель теории } T \text{ мощности } \kappa \}$. Обозначим функцию базисной стабильности линейного порядка через $\text{ded}(\kappa)$. В этом случае $\text{ded}(\kappa) = \sup \{ \lambda : \text{существует линейный порядок мощности } \kappa \text{ с } \lambda \text{ сечениями Дедекенда} \}$.

7.16. Теорема (Кейслер [4]). Функция базисной стабильности для любой теории совпадает с одной из следующих шести функций базисной стабильности f_T :

- (i) $f_T(\kappa) = \kappa$ (T базисно ω -стабильна);
- (ii) $f_T(\kappa) = \kappa + 2^{\omega}$ (T базисно суперстабильна);
- (iii) $f_T(\kappa) = \kappa^{\omega}$ (T базисно стабильна);
- (iv) $f_T(\kappa) = \text{ded}(\kappa)$ (T базисно упорядочена);
- (v) $f_T(\kappa) = (\text{ded}(\kappa))^{\omega}$ (T базисно мультиупорядочена);
- (vi) $f_T(\kappa) = 2^{\kappa}$ (T базисно независима).

Каждый вид теорий имеет синтаксическую характеристику, которая оправдывает данные названия: теории типов (iv), (v) и (vi) базисно нестабильны.

7.17. Пример. Теории линейного порядка и упорядоченных полей будут базисно упорядоченными. Теория счетного множества отношений линейного порядка будет базисно мультиупорядоченной. Теории групп, булевых алгебр и колец будут независимы. Другие примеры можно найти у Кейслера [4].

Классификационные теоремы 7.13 и 7.16 верны не только для йонсоновских теорий, но и для произвольных теорий с небольшими изменениями в определении функций стабильности.

Все, что мы получили в этом параграфе, верно также и в западном варианте. Предположим, что T — полная теория в счетном языке, и везде отбросим слова «базисный».

Очень грубый план доказательства теоремы Морли о категоричности состоял в следующем. Предполагая T κ -категоричной для $\kappa > \omega$, вначале покажем, что теория T ω -стабильна. Затем покажем, что модель мощности κ насыщена. Следующий шаг со-

стоит в доказательстве того, что теория T имеет ненасыщенную модель мощности κ , если она имеет какую-либо несчетную ненасыщенную модель. Поэтому все несчетные модели теории T будут насыщенными.

Приведем характеристику ω_1 -категоричных теорий в терминах стабильности. Необходимость получена Морли [1], а достаточность — Болдуином и Лахланом [1].

7.18. Теорема. Полная теория T ω_1 -категорична, если и только если:

- (i) T ω -стабильна;
- (ii) для любой модели $\mathcal{M} \models T$ мощности ω_1 любое определенное множество в $\mathcal{M}$ либо конечно, либо несчетно.

Мощностным спектром или просто спектром полной теории T называется функция $g_T(\kappa)$, равная числу неизоморфных моделей теории T мощности κ . Очень сложная проблема состоит в том, чтобы определить, какие функции могут быть мощностными спектрами. Теорема Морли о категоричности показывает, что для несчетных κ значение $g_T(\kappa)$ либо всегда равно единице, либо никогда не равно единице. Гораздо большего удалось достигнуть, применяя стабильность, в частности Шелахом. Мы приведем два типичных результата.

7.19. Теорема (Лахлан [1]). Если теория T суперстабильна, но не является ω -категоричной, то T имеет ω неизоморфных счетных моделей.

Сейчас приведем результат, противоположный категоричности.

7.20. Теорема (Шелах [1]). Если T не суперстабильна, то T имеет 2^κ неизоморфных моделей в любой несчетной мощности κ .

7.21. Пример. Если $\mathcal{M}$ — бесконечный линейный порядок или бесконечная булева алгебра, то $\text{Th}(\mathcal{M})$ нестабильна и, следовательно, имеет 2^κ неизоморфных моделей в любой несчетной мощности κ . Этот результат ложен для $\kappa = \omega$. Например, теории плотного линейного порядка и безатомной булевой алгебры нестабильны, но ω -категоричны.

Некоторые другие важные приложения стабильности обсуждаются в главах 4 и 5*).

§ 8. Теоретико-модельный форсинг

Опишем конечный форсинг по А. Робинсону (Робинсон [3]). Он аналогичен коэновскому форсингу**), но проще устроен, что позволяет построить модель для произвольных индук-

тивных теорий. Форсинг находится в близком родстве к теореме об опускании типов из § 6 и в действительности представляет собой восточный вариант теоремы об опускании типов (теорема 8.15). Более общая теория форсинга, включающая как коэновский так и робинсоновский форсинг, а также теорему об опускании типов, содержится в работе Кейслера [3].

Материал этого параграфа относится к восточной теории моделей.

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что язык L счетен и C — счетное бесконечное множество новых константных символов. Через T обозначим непротиворечивую теорию в языке L .

8.1. Определение. Под условием для теории T мы понимаем конечное множество атомных формул и отрицаний атомных формул языка L_C , которые совместны с T . Буквы p, q будут обозначать условия для теории T . Заметим, что пустое множество $\emptyset$ будет условием для T .

8.2. Определение. Выражение « p форсирует φ », обозначаемое $p \Vdash \varphi$ или (когда это необходимо) $p \Vdash_T \varphi$, задает отношение между условиями p и произвольными предложениями φ языка L_C . Оно определяется индукцией по длине формулы φ :

если φ — атомное предложение, то $p \Vdash \varphi$, если и только если $\varphi \in p$;

$p \Vdash \neg \varphi$, если и только если нет условия $q \Vdash \varphi$ такого, что $q \Vdash p$;

$p \Vdash \exists x \varphi(x)$, если и только если $p \Vdash \varphi(c)$ для некоторого $c \in C$;

$p \Vdash \varphi \vee \psi$, если и только если $p \Vdash \varphi$ или $p \Vdash \psi$.

В приведенном выше определении символы $\neg, \vee, \exists$ мы взяли за основные и $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ — за производные. Определение форсинга точно похоже на определение выполнимости, за исключением случая $\neg$. Интуитивно, мы можем понимать условие p как конечное множество информации о системе $\mathcal{M}$. Мы говорим, что p слабо форсирует φ , $p \Vdash^w \varphi$, если $p \Vdash \neg \neg \varphi$.

8.3. Лемма. (i) Если $p \Vdash \varphi$, и $q \Vdash p$, то $q \Vdash \varphi$.

(ii) Если $\varphi \in p$, то $p \Vdash \varphi$.

(iii) $p \Vdash^w \varphi$, если и только если для всех $q \Vdash p$ существует $r \Vdash q$ такое, что $r \Vdash \varphi$.

(iv) $p \Vdash \varphi$ влечет $p \Vdash^w \varphi$.

Доказательство. (i) доказывается индукцией по длине φ , в то время как (ii) — (iv) следуют непосредственно из определения. $\square$

Для построения моделей с помощью форсинга мы введем понятие генерического множества.

*) См. также Дополнение, написанное Е. А. Палютиным. — Прим. ред.

**) Коэновский форсинг часто называется «вынуждением». — Прим. ред.

8.4. Определение. Генерическим множеством для T называется множество базисных предложений G такое, что:

(i) любое конечное подмножество $p \subseteq G$ является условием для T ;

(ii) для любого предложения φ языка L_c существует условие $p \subseteq G$ такое, что $p \models \varphi$ либо $p \models \neg \varphi$.

Обозначим $G \models \varphi$, если $p \models \varphi$ для некоторого $p \subseteq G$. Отсюда следует, что для любого φ выполняется в точности одно из условий $G \models \varphi$ либо $G \models \neg \varphi$.

8.5. Лемма. Для любого условия p существует генерическое множество $G \supseteq p$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — список всех предложений языка L_c . Используя определение форсируемости для отрицания, мы можем выбрать цепь условий $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \dots$ такую, что $p_n \models \varphi_n$ или $p_n \models \neg \varphi_n$ для любого n . В этом случае множество $G = \bigcup_n p_n$ генерическое.

Приведенная лемма объясняет смысл предположения о счетности множеств L и C . Приведем сейчас основной результат об этой конструкции.

8.6. Теорема о генерической модели. Пусть G — генерическое множество для теории T . Существует единственная (с точностью до изоморфизма) система $\mathcal{M}(G)$ для языка L_c такая, что:

(i) каждый элемент $t \in M(G)$ является интерпретацией некоторой константы $c \in C$;

(ii) для любого предложения φ языка L_c выполнено $\mathcal{M}(G) \models \varphi$, если и только если $G \models \varphi$, т. е.

$$\text{Th}(\mathcal{M}(G)) = \{\varphi: G \models \varphi\}.$$

Доказательство. Отношение

$$c \sim d, \text{ если и только если } G \models c = d$$

является отношением эквивалентности на C . В качестве основного множества $\mathcal{M}(G)$ рассмотрим $M(G) \subseteq C$, содержащее в точности по одному элементу из каждого смежного класса по этой эквивалентности. Если $c \sim t$ для $t \in M(G)$, то интерпретируем константу c элементом t , а $\mathcal{M}(G)$ пусть будет единственной моделью для G с основным множеством $M(G)$. Тогда (ii) выполнено для любой атомной формулы φ . Отсюда индукцией по длине формулы φ доказывается, что это верно для любого предложения φ языка L_c . Тот факт, что G — генерическое множество, используется при проведении индукционного шага для отрицания:

$$\mathcal{M}(G) \models \neg \varphi \text{ равносильно } \mathcal{M}(G) \not\models \varphi \text{ равносильно}$$

$$G \not\models \varphi \text{ равносильно } G \models \neg \varphi.$$

Следующее утверждение полезно для доказательства форсируемости предложений.

8.7. Следствие. Следующие два условия эквивалентны:

(i) $p \models \neg \varphi$;

(ii) для любого генерического множества G теории T , расширяющего $p \subseteq G$, выполнено $\mathcal{M}(G) \models \varphi$.

Обратим наше внимание на T -генерические модели.

8.8. Определение. Система $\mathcal{M}$ для языка L называется T -генерической моделью, если $\mathcal{M}$ изоморфна L -обеднению модели $\mathcal{M}(G)$ для некоторого генерического множества G теории T .

8.9. Теорема. Если T — индуктивная теория, то любая T -генерическая модель является моделью теории T .

Доказательство. Можно предположить, что T состоит из $\forall \exists$ -предложений. Рассмотрим предложение $\varphi = \forall x \exists y \psi(x, y) \in T$, где ψ — бескванторная формула. Представим φ в виде $\neg \exists x \neg \exists y \psi(x, y)$. Предположим, что φ ложно в некоторой модели $\mathcal{M}(G)$ для генерического множества G теории T . В этом случае некоторое $p \subseteq G$ T -форсирует формулу $\exists x \neg \exists y \psi(x, y)$, тогда

$$p \models \neg \exists y \psi(c, y)$$

для некоторого c . Но условие p совместно с теорией T , а поэтому для некоторого $q \supseteq p$ из q выводимо $\psi(c, d)$ для некоторого d из C . Поэтому $q \models \neg \exists y \psi(c, y)$, что приводит к противоречию. Таким образом, мы показали, что φ истинно в любой T -генерической модели. $\square$

Чтобы понять идею устройства T -генерических моделей, рассмотрим несколько примеров и введем понятие экзистенциально замкнутой модели.

8.10. Пример. Любой генерический линейный порядок изоморфен рациональным числам. Любое генерическое упорядоченное поле будет вещественно замкнутым. Каждое генерическое поле алгебраически замкнуто. Эти примеры могут быть проверены непосредственно из определения форсинга.

8.11. Определение. Модель $\mathcal{M}$ теории T называется экзистенциально замкнутой, если экзистенциальное предложение φ языка L_M , истинное в некоторой T -модели, расширяющей $\mathcal{M}$, истинно и в $\mathcal{M}$.

Можно показать, что модели, описанные в примере 8.10, будут экзистенциально замкнутыми. Понятие экзистенциально замкнутой модели является плодотворным обобщением понятия алгебраически замкнутого поля.

8.12. Предложение. Если теория T индуктивна, то любая модель теории T вкладывается в экзистенциально замкнутую модель в T .

Доказательство этого результата вполне элементарно и использует лишь замкнутость теории T относительно объединения цепей.

8.13. Теорема. Если теория T индуктивна, то любая T -генерическая модель экзистенциально замкнута в T .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — T -генерическая модель, тогда $\mathfrak{M}$ есть L -обеднение модели $\mathfrak{M}(G)$ для некоторого генерического G . Пусть формула $\exists x\varphi(x)$ истинна в некоторой модели $\mathfrak{N}$ теории T , расширяющей $\mathfrak{M}$, где $\varphi(x)$ — бескванторная формула языка L_c . Пусть $p \subseteq G$ и константа c не входит ни в p , ни в $\varphi(x)$. Применяя диаграмму модели $\mathfrak{N}$, мы найдем условие $q \supseteq p$ такое, что

$$T \cup q \models \varphi(c).$$

В силу 8.7 и 8.9

$$q \models \neg \exists x\varphi(x).$$

Поэтому p не может форсировать $\exists x\varphi(x)$. Отсюда следует, что $G \models \exists x\varphi(x)$ и $\mathfrak{M}(G) \models \exists x\varphi(x)$. $\square$

Изучение форсинга продолжается в главе 4, но в более общем контексте. Эта глава содержит различные основные результаты о данном специальном случае. Например, теорема 8.13 может быть обращена следующим образом.

8.14. Теорема. Пусть теория T индуктивна. Если класс всех экзистенциально замкнутых моделей теории T элементарен, то любая счетная экзистенциально замкнутая модель теории T является T -генерической.

Поэтому любое счетное вещественно замкнутое упорядоченное поле будет генерическим упорядоченным полем, а любое счетное алгебраически замкнутое поле — генерическим полем. Случай группы интенсивно изучался. Существуют счетные экзистенциально замкнутые группы, не являющиеся генерическими (глава 4).

Приведем восточный вариант теоремы об опускании типов.

8.15. Основная теорема об опускании типов (Макинтайр [2]). Пусть теория T индуктивна и $\varphi_{mn}(x)$, $m, n < \omega$, — экзистенциальные формулы. Предположим, что для любого условия p для T , любого символа $c \in C$ и любого $m < \omega$ существует число $n < \omega$ такое, что множество

$$T \cup p \cup \{\varphi_{mn}(c)\}$$

совместно, тогда существует модель $\mathfrak{M}$ теории T , в которой выполнено бесконечное предложение $\bigwedge_m \forall x \bigvee_n \varphi_{mn}(x)$.

Доказательство. Можно выбрать последовательность условий $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \dots$ такую, что

(1) множество $G = \bigcup_n p_n$ генерическое;

(2) для любых $m < \omega$ и $c \in C$ выполнено $p_k \models \varphi_{mn}(c)$ для некоторых $k, n < \omega$.

В этом случае обеднение $\mathfrak{M}(G)$ имеет описанные свойства. $\square$

Доказательство 8.15 показывает, что модель $\mathfrak{M}$ можно выбрать экзистенциально замкнутой в T .

8.16. Пример. Пусть T — индуктивная теория, содержащая аксиомы групп. Предположим, что для любого условия p для T и любого символа $c \in C$ существует n такое, что $p \cup \{nc = 0\}$ совместно с T . Тогда теория T имеет модель, являющуюся периодической группой.

8.17. Пример. Пусть T — индуктивная теория, содержащая аксиомы упорядоченных полей. Предположим, что для любого условия p для T и любого символа $c \in C$ существует n такое, что $p \cup \{c < n\}$ совместно с T . Тогда T имеет архимедову модель.

8.18. Теорема (Макинтайр [2]). Пусть M — группа, порожденная элементами $a_1, \dots, a_n$. Если M изоморфно вкладывается в любую экзистенциально замкнутую группу, то множество E всех тождеств от $a_1, \dots, a_n$, истинных в M , рекурсивно.

Доказательство. Допустим, что множество E не рекурсивно. Пусть $\Phi(x)$ — множество базисных предложений, не выполненных на $a_1, \dots, a_n$ в M . Тогда $\Phi(x)$ не рекурсивно. Так как $\varphi \in \Phi$, если и только если $\neg \varphi \notin \Phi$, то $\Phi(x)$ даже не является рекурсивно перечислимым. Найдем экзистенциально замкнутую группу N такую, что

$$N \models \forall x \bigvee_{\varphi \in \Phi} \varphi(x).$$

M не может изоморфно вкладываться в такую группу N . Пусть p — условие для теории групп T и $c_1, \dots, c_n \in C$. Существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $p \cup \{\varphi(c)\}$ — условие, так как в противном случае $\Phi(x) = \{\neg \varphi(x) : T \cup p \models \varphi(c)\}$, и поэтому $\Phi(x)$ будет рекурсивно перечислимым. Отсюда следует, если использовать основную теорему об опускании типов, что описанная группа N существует. $\square$

Определенная здесь T -генерическая модель всегда счетна. Барвайс и Робинсон [1] дали более общее определение, которое также допускает и несчетные T -генерические модели. Здесь дан конечный форсинг по Робинсону. Имеется параллельная теория бесконечного форсинга по Робинсону, короткий набросок которой содержится в главе 4.

§ 9. Бесконечные формулы и дополнительные кванторы

Ограничение лишь логикой первого порядка является очень сильным препятствием, если мы хотим приложить теорию моделей к другим областям математики. В главе 1 были даны не-

сколько примеров понятий, которые более естественно возникают в более мощных языках. Теорема Линдстрёма (глава 1) показывает, что только в логиках первого порядка выполняются теоремы компактности и Лёвенгейма — Скулема. Однако существует два в высшей степени удачных распространения теории моделей на более мощные логики. В теории моделей для бесконечных логик приходится обходиться без теоремы компактности. В теории моделей с дополнительными кванторами теорема компактности сохраняется, но изменяется понятие системы.

Обсудим кратко некоторые методы, имеющиеся в этих логиках.

9.1. Определение. Пусть κ — регулярный кардинал. Логикой $L_{\kappa\omega}$ будет множество всех формул, построенных по следующим правилам:

(i) любая атомная формула языка L с переменными x_α , $\alpha < \kappa$, будет формулой логики $L_{\kappa\omega}$;

(ii) если φ, ψ — формулы логики $L_{\kappa\omega}$, то $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \exists x\varphi$ также принадлежат $L_{\kappa\omega}$;

(iii) если Φ — множество формул логики $L_{\kappa\omega}$ мощности, меньшей κ , то $\bigvee \Phi$ лежит в $L_{\kappa\omega}$.

Мы обозначим $L_{\infty\omega} = \bigcup_{\kappa} L_{\kappa\omega}$ и для λ сингулярного $L_{\lambda\omega} = \bigcup_{\kappa < \lambda} L_{\kappa\omega}$.

9.2. Пример. Логика $L_{\omega\omega}$ совпадает с обычной логикой первого порядка, а $L_{\omega,\omega}$ подобна логике первого порядка, но допускает счетные дизъюнкции.

Конечные символы $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ и $\forall$ и бесконечную конъюнкцию $\bigwedge$ можно ввести как сокращения.

9.3. Лемма. Любая формула логики $L_{\kappa\omega}$ имеет менее κ подформул.

Понятие подформулы определяется естественным образом. (Выделение в определении $L_{\kappa\omega}$ сингулярного κ необходимо для выполнения этой леммы.) Символ ω обозначает, что допускаются только конечные кванторы. Более общие языки $L_{\kappa\lambda}$ допускают кванторы над множествами менее чем λ переменных.

В нашем обсуждении мы сконцентрируем основное внимание на двух наиболее важных случаях $L_{\infty\omega}$ и $L_{\omega,\omega}$.

В логике $L_{\infty\omega}$ алгебраическая система определяется с точностью до изоморфизма своей диаграммой.

9.4. Пример. Если дана система $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$, если и только если в $\mathfrak{N}$ выполнено $L_{\infty\omega}$ -предложение

$$\bigwedge D(\mathfrak{M}) \wedge \forall x \bigvee_{m \in M} x = m.$$

Логика $L_{\infty\omega}$ получается более интересной, когда мы работаем в первоначальном языке системы $\mathfrak{M}$, не присоединяя символов для элементов системы $\mathfrak{M}$.

9.5. Пример. Понятие ω -насыщенной модели выражается следующим предложением логики $L_{\infty\omega}$:

$$\bigwedge_{n < \omega} \bigwedge \Phi(x, y) \subseteq L \quad [\forall x \bigwedge_{\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi} \exists y (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \exists y \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi].$$

9.6. Пример. Любое вполне упорядоченное множество $\langle \alpha, < \rangle$ может быть охарактеризовано с точностью до изоморфизма единственной формулой φ_α языка $L_{\infty\omega}$ (только с одним символом отношения $<$).

Определим вначале индукцией по α формулы $\psi_\alpha(x)$, утверждающие, что множество предшественников имеет тип α :

$$\psi_0(x) = \neg \exists y y < x,$$

$$\psi_\alpha(x) = \bigwedge_{\beta < \alpha} \exists y (y < x \wedge \psi_\beta(y)) \wedge \forall y (y < x \rightarrow \bigvee_{\beta < \alpha} \psi_\beta(y)).$$

Теперь определим φ_α следующим образом:

$$\varphi_\alpha = (\text{линейный порядок}) \wedge \bigwedge_{\beta < \alpha} \exists x \psi_\beta(x) \wedge \forall x \bigvee_{\beta < \alpha} \psi_\beta(x).$$

Понятие вполне упорядоченности может быть выражено в логике $L_{\omega,\omega}$ следующим предложением:

$$(\text{линейный порядок}) \wedge \neg (\exists x_0 x_1 \dots) \bigwedge_{n < \omega} x_{n+1} < x_n,$$

однако в логике $L_{\infty\omega}$ оно не может быть выражено.

9.7. Теорема (Лопес-Эскобар [1]). Любые предложения логики $L_{\infty\omega}$, имеющие произвольно большие вполне упорядоченные модели, выполняются на не вполне упорядоченной модели.

Челночный метод применим в логике $L_{\infty\omega}$ и обеспечивает характеристику эквивалентности в $L_{\infty\omega}$.

9.8. Определение. Алгебраические системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ $L_{\infty\omega}$ -эквивалентны, символически $\mathfrak{M} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{N}$, если на них выполняются одни и те же предложения логики $L_{\infty\omega}$.

9.9. Определение. Частичным изоморфизмом I : $\mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N}$ называется отношение I на множестве конечных последовательностей (m, n) элементов из $M \times N$ такое, что

(i) $\emptyset I \emptyset$;

(ii) если $m I n$, то $(\mathfrak{M}, m)$ и $(\mathfrak{N}, n)$ выполняют одни и те же атомные предложения;

(iii) если $m I n$, то для любого $a \in M$ существует $b \in N$ такое, что $(m, a) I (n, b)$, и наоборот.

9.10. Теорема (Карп [1]). $\mathfrak{M} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{N}$, если и только если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ частично изоморфны.

Следующий результат аналогичен теореме Линдстрёма (см. главу 1) и характеризует логику $L_{\infty\omega}$.

9.11. Теорема (Барвайс [2]). $L_{\infty\omega}$ — единственная логика, которая замкнута относительно $\wedge$, $\neg$, $\exists$ и удовлетворяет теореме о не вполне упорядоченности 9.7 и теореме Карпа 9.10.

Следующая теорема показывает, что в общем случае эквивалентность не влечет изоморфности.

9.12. Пример. По теореме 9.10 приведенные ниже пары будут $L_{\infty\omega}$ -эквивалентны, где X и Y — бесконечные множества: $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ и $\langle \mathcal{P}(Y), \subseteq \rangle$, где $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств X ;

$G(X)$ и $G(Y)$, где $G(X)$ — группа со свободными порождающими из X ;

$F[X]$ и $F[Y]$, где F — поле и $F[X]$ — кольцо всех полиномов с переменными из X над F ;

любые две модели полной ω -категоричной теории в логике L ;

любые две ω -насыщенные модели полной теории в логике L .
Барвайс и Эклоф [1] обобщили ульмовские инварианты на несчетные абелевы группы и показали, что две редуцированные периодические абелевы группы имеют одни и те же ульмовские инварианты, если и только если они $L_{\infty\omega}$ -эквивалентны. Другие приложения частичного изоморфизма можно найти у Барвайса [1].

Беспокоит в языке $L_{\infty\omega}$ то, что формулы образуют собственный класс, а не множество. Чаше работают с множествами формул, замкнутыми относительно подформул. Приняв это, мы получили обобщение теоремы Лёвенгейма — Скулема о спуске и теоремы об элементарных цепях для $L_{\infty\omega}$.

Одна общая конструкция, возможная в логике $L_{\infty\omega}$, дает понятие модели Эренфойхта — Мостовского, которое обсуждается в главе 5.

Теория моделей для $L_{\omega_1\omega}$ более удачна, чем для $L_{\infty\omega}$. Ключевым методом является теоретико-модельный форсинг, который мы будем распространять на логику $L_{\omega_1\omega}$. Этот метод эквивалентен более ранней конструкции Маккай, называемой свойством совместности (см. Кейслер [2]).

9.13. Пример. Понятия архимедово упорядоченного поля и периодической группы выразимы в логике $L_{\omega_1\omega}$. Также выразимы и понятия рекурсивно насыщенной, простой и ω -однородной моделей. В § 6 мы уже применяли предложение языка $L_{\omega_1\omega}$, выражающего теорему об опускании типов. Предложение $\forall x \bigvee_{n < \omega} x = \dot{n}$ истинно в $\mathfrak{M}$, если и только если $\mathfrak{M}$ — ω -модель. Из этих примеров видно, что переход от логики первого порядка к $L_{\omega_1\omega}$ вполне естествен.

Предположим для дальнейшего, что L содержит лишь счетное число символов.

Теорема Карпа 9.10 влечет для счетных моделей более сильное утверждение.

9.14. Теорема (Скотт [1]). Для любой счетной системы $\mathfrak{M}$ существует предложение φ в языке $L_{\omega_1\omega}$ такое, что для всех счетных систем $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}, \text{ если и только если } \mathfrak{N} \models \varphi.$$

Пусть C — счетно бесконечное множество новых константных символов. Обобщим понятие теоретико-модельного форсинга, присоединив к предложениям языка L_C хорошо ведущие себя предложения логики $(L_C)_{\omega_1\omega}$.

9.15. Определение. Под базой форсинга будем понимать счетное множество S предложений языка $(L_C)_{\omega_1\omega}$ такое, что:

- (i) каждое атомное предложение языка L_C принадлежит S ;
 - (ii) каждая формула φ из S содержит лишь конечное число символов из C ;
 - (iii) если $\psi(x)$ — подформула некоторой формулы $\varphi \in S$ и c из C , то $\psi(c) \in S$;
 - (iv) если $\varphi \in S$ и φ не начинается с символа $\neg$, то $\neg\varphi \in S$.
- 9.16. Форсинговым свойством** на S назовем непустое множество P непротиворечивых конечных подмножеств $p \subseteq S$ такое, что:

- (i) если $p \in P$ и $q \subseteq p$, то $q \in P$;
- (ii) если $p \models \exists x \varphi$ и $\varphi(c) \in S$, то $p \cup \{\varphi(c)\} \in P$ для некоторого $d \in C$;
- (iii) если $\bigvee \Phi \in p$, то $p \cup \{\varphi\} \in P$ для некоторого $\varphi \in \Phi$.

Применяя элементы $p \in P$ в качестве условий, получаем определение форсинга точно так же, как и раньше. Определение форсинга включает новый случай бесконечной дизъюнкции:

$$p \models \bigvee \Phi, \text{ если и только если } p \models \varphi \text{ для некоторого } \varphi \in \Phi.$$

Робинсоновский форсинг, как он определен в § 8, будет специальным случаем, когда условиями $p \in P$ будут все конечные множества атомных предложений и отрицаний атомных предложений, совместные с T . В описанном здесь более общем требовании на условия они могут содержать предложения с конъюнкциями и кванторами. Определение форсингового условия влечет, что p слабо форсирует φ , если $\varphi \in p$. Под генерическим множеством мы понимаем множество $G \subseteq S$ такое, что каждое конечное подмножество $p \subseteq G$ есть условие в P и для любого $\varphi \in S$ выполнено $G \models \varphi$ либо $G \models \neg\varphi$. Используя счетность S , мы видим, что для любого $p \in P$ существует содержащее его генерическое множество G .

9.17. Теорема о генерических моделях. Для любого генерического множества G существует алгебраическая

система $\mathfrak{M}(G)$ такая, что для $\varphi \in S$

$\mathfrak{M}(G) \models \varphi$, если и только если $G \models \varphi$.

Теорема о генерических моделях играет в $L_{\omega_1\omega}$ такую же роль, как теоремы компактности в логике первого порядка. Например, теоремы устойчивости для подсистем (Малиц) и гомоморфных образов (Лопес-Эскобар), интерполяционная теорема Крейга (Лопес-Эскобар), теорема о двух кардиналах от (κ, λ) до (ω_1, ω) (Кейслер), теорема об опускании типов и теорема существования для простых моделей могут быть получены в $L_{\omega_1\omega}$ с помощью форсинговой конструкции.

Теорема о генерических моделях может быть также применена для доказательства следующей теоремы полноты в $L_{\omega_1\omega}$.

9.18. Аксиомы в $L_{\omega_1\omega}$.

Все схемы аксиом для L .

$\bigwedge \Phi \rightarrow \varphi$ для любого $\varphi \in \Phi$.

9.19. Правила в $L_{\omega_1\omega}$:

Все правила вывода логики первого порядка L .

Из $\{\varphi \rightarrow \varphi : \varphi \in \Phi\}$ следует $\varphi \rightarrow \bigwedge \Phi$.

Мы допускаем выводы длины, меньшей ω_1 .

9.20. Теорема полноты для $L_{\omega_1\omega}$ (Карп [1]). *Предложение φ логики $L_{\omega_1\omega}$ доказуемо, если и только если оно тождественно истинно.*

Доказательство. Если φ доказуемо, то оно, очевидно, тождественно истинно. Предположим, что предложение φ не доказуемо. Пусть S — база форсинга с $\varphi \in S$, а P — множество всех конечных $p \subseteq S$ таких, что p формально непротиворечиво. Из аксиом следует, что P — форсинговое свойство. Так как $\neg \varphi$ — условие, то $\neg \varphi$ истинно в генерической модели $\mathfrak{M}$, поэтому φ не является тождественно истинным.

Верна также теорема Лёвенгейма — Скулема о подъеме для $L_{\omega_1\omega}$. Она сформулирована и доказана для специального случая ω -логик в главе 5.

Мы можем получить еще более бесконечную теорию моделей, выбрав язык более аккуратно и применяя понятие допустимого множества (см. главу 7). Ограничение $L_{\infty\omega}$ на допустимое множество A обозначим L_A . Работая с L_A , мы можем применить методы обобщенной теории рекурсии. Наиболее важный результат здесь — теорема Барвайса о компактности. Дальнейшие результаты в этом направлении об $L_{\omega_1\omega}$ и L_A см. у Кейслера [2] и Барвайса [3].

Закончим параграф несколькими словами о дополнительных кванторах. Формально язык $L(Q)$ похож на логику первого порядка, но он имеет дополнительный квантор и правило:

Если φ — формула, то $Qx\varphi$ — тоже формула.

Изучение таких кванторов было начато Мостовским. Системы для $L(Q)$ имеют вид $(\mathfrak{M}, q)$, где $\mathfrak{M}$ — система для L , а q — некоторое множество подмножеств множества M . Определение истинности включает дополнительный случай:

$\mathfrak{M} \models Qx\varphi$, если и только если $\{m \in M : \mathfrak{M} \models \varphi(m)\} \in q$.

Если мы рассмотрим произвольные системы, то теория моделей для $L(Q)$ очень похожа на теорию моделей для L с небольшими новыми трудностями. Однако в интересных приложениях $L(Q)$ мы ограничиваем класс моделей так, чтобы отразить подразумеваемую в этих случаях интерпретацию Q , при этом возникают новые проблемы.

Одна из естественных интерпретаций символа Q — «существует бесконечно много». Для этой интерпретации мы рассматриваем системы $(\mathfrak{M}, q)$, где q — множество всех бесконечных подмножеств из M . Этот язык подобен ω -логике и эквивалентен некоторому подязыку $L_{\omega_1\omega}$.

Другая интерпретация символа Q — «существует несчетное множество». Обозначим этот язык через $L(Q_{\omega_1})$. Он не является частью $L_{\omega_1\omega}$, но теория моделей для него очень хорошо ведет себя. Воот [3] и Фуркен [1] показали, что теорема компактности верна для счетных теорий и множество тождественно истинных предложений рекурсивно перечислимо. У Кейслера [1] доказана теорема полноты с простым множеством аксиом, приведенным в главе 1. Доказательство применяет теорему типа теоремы об опускании типов, которая также обобщается на $L(Q_{\omega_1})$. Брюс [1] распространил робинсоновский форсинг на $L(Q_{\omega_1})$. Оказалось, что комбинированный язык $L_{\omega_1\omega}(Q_{\omega_1})$ также имеет хорошо ведущую себя теорию моделей.

Следующая удачная интерпретация для Q стремится к изучению топологических моделей. В логике $L(Q_{\text{open}})$ рассматриваются системы $(\mathfrak{M}, q)$, где q — множество открытых множеств топологии на $\mathfrak{M}$. Выражение $Qx\varphi(x)$ означает, что множество всех x таких, что $\varphi(x)$, открыто.

Стро [1] доказал теорему компактности для $L(Q_{\text{open}})$, применяя ультрапроизведения, и теорему полноты со следующими аксиомами:

- (1) аксиомы логики первого порядка L ;
- (2) $\forall x (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (Qx\varphi \leftrightarrow Qx\psi)$;
- (3) $Qx\varphi(x) \leftrightarrow Qy\varphi(y)$;
- (4) $Qxx = x$;
- (5) $Qxx \neq x$;
- (6) $Qx\varphi \wedge Qx\psi \rightarrow Qx(\varphi \wedge \psi)$;
- (7) $\forall y Qx\varphi(x, y) \rightarrow Qx\exists y\varphi(x, y)$.

Последняя аксиома утверждает, что «определимое объединение открытых множеств открыто». Сгро [2] и Гаравалья [1] предприняли изучение более сильных логик и нашли приложение $L(Q_{\text{open}})$ к топологическим группам.

ЛИТЕРАТУРА

- Акс (Ax J.)
1. The elementary theory of finite fields. — *Ann. Math.*, 1968, 88, p. 239—271.
- Барвайс (Barwise J.)
1. Back and forth thru infinitary logic. — In: *Studies in Model Theory*/Ed. by M. Morley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973, p. 5—34.
2. Axioms for abstract model theory. — *Ann. Math. Logic*, 1974, 7, p. 221—265.
3. Admissible Sets and Structures. — Berlin: Springer, 1975.
- Барвайс и Робинсон (Barwise J., Robinson A.)
1. Completing theories by forcing. — *Ann. Math. Logic*, 1970, 2, p. 119—142.
- Барвайс и Шлиф (Barwise J., Schlipf J.)
1. Recursively saturated and resplendent models. — 1976.
- Барвайс и Эклоф (Barwise J., Eklof P.)
1. Infinitary properties of abelian groups. — *Ann. Math. Logic*, 1970, 2, p. 25—68.
- Блум (Blum L.)
1. Generalised Algebraic Theories: Thesis. — Cambridge (Mass.): M. I. T. Press, 1968.
- Болдуин и Лаклан (Baldwin J. T., Lachlan A. H.)
1. On strongly minimal sets. — *J. Symbolic Logic*, 1971, 36, p. 79—96.
- Брюс (Bruce K.)
1. Model-theoretic forcing and $L(\exists)$: Thesis. — Madison (Wisc.): University of Wisconsin, 1975.
- Воот (Vaught R. L.)
1. Applications of the Löwenheim—Skolem theorem to problems of completeness and decidability. — *Indag. Math.*, 1954, 10, p. 467—472.
2. Denumerable models of complete theories. — In: *Infinitistic Methods*. London: Pergamon, 1961, p. 303—321.
3. A Löwenheim—Skolem theorem for cardinals for apart. — In: *The Theory of Models*/Ed. by J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 390—401.
- Гаравалья (Garavaglia S.)
1. Completeness for topological languages: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1975.
- Генкин (Henkin L.)
1. The completeness of the first-order functional calculus. — *J. Symbolic Logic*, 1949, 14, p. 159—166.
2. A generalization of the concept of ω -consistency. — *J. Symbolic Logic*, 1954, 19, p. 183—196.
- Йенсен (Jensen R.)
1. Fine structure of the constructible hierarchy. — *Ann. Math. Logic*, 1972, 4, p. 229—308.
- Йонсон (Jonsson B.)
1. Homogeneous relational systems. — *Math. Scand.*, 1960, 8, p. 137—142.
- Карп (Carp C.)
1. Languages with Expressions of Infinite Length. — Amsterdam: North-Holland, 1964.
2. Finite-quantifier equivalence. — In: *The Theory of Models*/Ed. by J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, pp. 407—412.

- Кейслер (Keisler H. J.)
1. Logic with the quantifier «there exist uncountably many». — *Ann. Math. Logic*, 1970, 1, p. 1—93.
2. Model Theory for Infinitary Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1971.
3. Forcing and the omitting types theorem. — In: *Studies in Model Theory*/Ed. by M. Morley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973, p. 96—133.
4. Six classes of theories. — *J. Austral. Math. Soc.*, 1976.
- Кобхем (Cobham A.)
1. Undecidability in group theory. — *Notices Amer. Math. Soc.*, 1962, 9, p. 406.
- Крейг (Craig W.)
1. Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory. — *J. Symbolic Logic*, 1957, 22, p. 269—285.
- Лаклан (Lachlan A.)
1. On the number of countable models of a countable superstable theory. — In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science, IV*/Ed. by P. Suppes et al. Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 45—56.
- Линдон (Lyndon R.)
1. Properties preserved under homomorphisms. — *Pacific J. Math.*, 1959, 2, p. 143—154.
- Лопес-Эскобар (Lopez-Escobar E.)
1. On definable well-orderings. — *Fundam. math.*, 1966, 59, p. 13—21.
- Лось (Łoś J.)
1. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. — *Colloq. Math.*, 1954, 3, p. 58—62.
2. On the extending of models, I. — *Fundam. math.*, 1955, 42, p. 38—54.
- Лось и Сушко (Łoś J., Suszko R.)
1. On the extending of models, IV: infinite sums of models. — *Fundam. math.*, 1957, 44, p. 52—60.
- Макдоуэлл и Шпекер (MacDowell R., Specker E.)
1. Modelle der Arithmetik. — In: *Infinitistic Methods*. London: Pergamon, 1961, S. 257—263.
- Макинтайр (Macintyre A.)
1. On algebraically closed groups. — *Ann. Math.*, 1972, 96, p. 53—97.
2. Omitting quantifier-free types in generic structures. — *J. Symbolic Logic*, 1972, 37, p. 512—520.
- Мальцев А. И.
1. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
- Морли (Morley M.)
1. Categoricity in power. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, 114, p. 514—538.
- Морли и Воот (Morley M., Vaught R. L.)
1. Homogeneous universal models. — *Math. Scand.*, 1962, 11, p. 37—57.
- Ори (Orey Š.)
1. On ω -consistency and related properties. — *J. Symbolic Logic*, 1956, 21, p. 246—252.
- Робинсон (Robinson A.)
1. Complete Theories. — Amsterdam: North-Holland, 1956.
2. A result on consistency and its application to the theory of definition. — *Indag. Math.*, 1956, 18, p. 47—58.
3. Forcing in model theory, 1st Nat. Alta Mat. — *Symposia Math.*, 1970, 5, p. 69—82.
- Сакс (Sacks G.)
1. Saturated Model Theory. — N. Y.: Benjamin, 1972.
- Сгро (Sgro J.)
1. Completeness theorems for topological models. — *Ann. Math. Logic*, 1976.
2. Completeness theorems for continuous functions and product topologies. — *Israel J. Math.*, 1976.

Скотт (Scott D.)

1. Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers.— In: The Theory of Models/Ed. by J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 329—341.

Тарский (Tarski A.)

1. Contributions to the theory of models, I, II.—Indag. Math., 1954, 16, p. 572—588.

Тарский и Ваут (Tarski A., Vaught R. L.)

1. Arithmetical extensions of relational systems.—Compositio math., 1957, 13, p. 81—102.

Тарский и Маккинси (Tarski A., McKinsey J. C. C.)

1. A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry.—2 ed.—Berkeley; Los Angeles, 1948.

Фуркен (Fuhrken G.)

1. Languages with added quantifier «there exist at least $\aleph_0$ ».—In: The Theory of Models/Ed. J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 121—131.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

1. Grundzuge der Mengenlehre.—Leipzig, 1914. [Русский перевод: Хаусдорф Ф. Теория множеств.—М.; Л.: ОНТИ, 1937.]

Чэн (Chang C. C.)

1. On unions of chains of models.—Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, p. 120—127.
2. A note on the two-cardinal problem.—Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, p. 1148—1165.

Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)

1. Model Theory.—Amsterdam: North-Holland, 1973. [Русский перевод: Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей.—М.: Мир, 1977.]

Шелах (Shelah S.)

1. Stability, the finite cover property, and superstability.—Ann. Math. Logic, 1971, 3, p. 271—362.
2. Categoricity of uncountable theories.—In: Proceedings of the Tarski Symposium. Amer. Math. Soc. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1974, 25, p. 187—203.

Эрдёш, Гилман и Хенриксен (Erdős P., Gillman L., Henriksen M.)

1. An isomorphism theorem for real closed fields.—Ann. Math., ser. 2, 1955, 61, p. 542—554.

ТЕОРИЯ УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИСТОВ

П. Эклоф

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	109
Основы	110
§ 1. Фильтры	110
§ 2. Фильтрованные произведения	112
§ 3. Основная теорема	115
§ 4. Ультрапроизведения как функторы	118
Компактность	121
§ 5. Вариант теоремы компактности, связанный с ультрапроизведениями	121
§ 6. Теоремы вложения	124
§ 7. Ограниченные полиномиальные идеалы	128
Насыщенность	131
§ 8. ω_1 -насыщенные ультрапроизведения	131
§ 9. Ультрапроизведения нормированных полей	135
§ 10. Насыщенные модели	137
Литература	138

Введение

Конструкция ультрапроизведения является алгебраической операцией, важность которой следует из ее теоретико-модельных свойств. Алгебраический характер конструкции делает ее очень привлекательным (хотя и не существенным) орудием в использовании и применении приложений теории моделей к алгебре.

Эта статья является обзором основных свойств ультрапроизведений и некоторых их приложений к алгебре. Для чтения статьи необходимо знакомство с основными определениями теории моделей, данными в предыдущих главах, а также с определениями «категории», «функтора», «естественного преобразования». Кроме того, так как приложения к алгебре взяты из таких различных областей, как теория групп, теория колец, алгебраическая геометрия, универсальная алгебра и алгебраическая теория чисел, мы считаем необходимым знакомство с алгебраическими понятиями и результатами, которые нужны нам в примерах. (Обычно мы будем ссылаться на результаты и определения

в книге Лейнга [1].) Однако читатель может пропустить чисто алгебраические примеры без ущерба для понимания дальнейшего материала (возможно, за исключением алгебраических примеров, примыкающих по своему содержанию к описываемым в данной главе проблемам).

Глава разделена на три части. Первая часть «Основы» дает определение ультрафильтра и ультрапроизведения (так же, как и обобщения ультрапроизведения, называемого фильтрованным произведением) и доказательство «основной теоремы об ультрапроизведениях». В конце первой части мы обсуждаем функторные свойства ультрапроизведений. Остальные результаты даны в двух частях под названием «Компактность» и «Насыщенность», заглавия которых объясняют основные теоретико-модельные свойства ультрапроизведений, используемые в доказательствах различных результатов.

Некоторые из наиболее глубоких приложений ультрапроизведений к алгебре здесь только упомянуты, но ссылки на них приводятся. Вследствие того, что акцент в этой статье сделан на алгебраические приложения ультрапроизведений, мы совсем не обсуждаем многие интересные результаты, касающиеся ультрапроизведений, которые не подходят под заглавие. Для более детального изучения ультрапроизведений мы отсылаем читателя к превосходным обзорным статьям Кейслера [1] и Чэна [1], к книгам Чэна и Кейслера [1], Белла и Сломсона [1].

ОСНОВЫ

§ 1. Фильтры

Если I — непустое множество, то *фильтром над I* называется семейство D подмножеств множества I таких, что:

- (i) $\emptyset \notin D$, $I \in D$;
- (ii) если $X, Y \in D$, то $X \cap Y \in D$;
- (iii) если $X \in D$ и $X \subset Y \subset I$, то $Y \in D$.

Например, если Y — непустое подмножество множества I , то множество $\{X \subset I \mid Y \subset X\}$ является фильтром над I , называемым *главным фильтром*, порожденным Y , мы обозначаем его $\langle Y \rangle$. Если I конечно, то каждый фильтр над I будет главным (порожденным $\bigcap \{X \mid X \in D\}$). Если I бесконечно, то примером неглавного фильтра над I служит *коконечный фильтр* $C = \{X \subset I \mid I - X \text{ конечно}\}$.

Заметим, что по (i) и (ii) фильтр D над I обладает *свойством конечных пересечений* (СКП), т. е. пересечение любой конечной совокупности множеств из D непусто. Очевидно, любое подмно-

жество D также обладает СКП. Обратно, если S — множество подмножеств I , обладающее СКП, то S является подмножеством фильтра над I ; фактически

$$D = \{Y \subset I \mid X_1 \cap \dots \cap X_n \subset Y \text{ для некоторых } X_1, \dots, X_n \in S\}$$

есть фильтр, содержащий S .

Фильтр D над I называется *ультрафильтром над I* , если для каждого $X \subset I$ либо $X \in D$, либо $(I - X) \in D$.

1.1. Предложение. *Фильтр над I является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным фильтром над I .*

Доказательство. Допустим, что D — ультрафильтр над I и E — фильтр на I такой, что $D \subset E$ и $D \neq E$. Тогда $X \in E - D$ для некоторого $X \subset I$. Так как $X \notin D$, мы имеем $I - X \in D$ по определению ультрафильтра. Но тогда $I - X \in E$, что невозможно, так как $\{X, I - X\} \subset E$ не обладает СКП. Обратно, допустим, что D — максимальный фильтр, и пусть $X \subset I$ таково, что $X \notin D$. Тогда $D \cup \{I - X\}$ обладает СКП и является подмножеством некоторого фильтра E . Ввиду максимальной D E совпадает с D и, значит, $I - X \in D$. $\square$

С помощью леммы Цорна получаем

1.2. Следствие. *Если S — множество подмножеств I , обладающих свойством конечных пересечений, то S содержится в некотором ультрафильтре над I .* $\square$

1.3. Предложение. *Если D — ультрафильтр над I , $X \in D$ и $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$, то $Y_i \in D$ для некоторого i .*

Доказательство. Предположим противное, тогда по определению ультрафильтра $I - Y_i$ есть элемент D для любого $i = 1, \dots, n$. Но тогда по (ii) из определения фильтра $\emptyset = X \cap (I - Y_1) \cap \dots \cap (I - Y_n)$ — элемент D , что противоречит (i). $\square$

Главный ультрафильтр — это ультрафильтр, который является и главным фильтром. Если D — фильтр над I и $\{x\} \in D$ для некоторого $x \in I$, то D — главный ультрафильтр над I , порожденный $\{x\}$; в самом деле, $Y \in D$ равносильно $Y \cap \{x\} \in D$, что равносильно $\{x\} \subset Y$.

Обратно, если D — главный ультрафильтр, то D должен быть порожден одноточечным множеством. Действительно, если D порожден Y и существует $\emptyset \neq Y' \subsetneq Y$, то фильтр, порожденный Y' , есть собственное расширение D , что противоречит 1.1. $\square$

1.4. Предложение. *Для любого ультрафильтра D над I D является неглавным тогда и только тогда, когда D содержит коконечный фильтр C .*

Доказательство. Если D — неглавный ультрафильтр над I и $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное подмножество I , то по замечанию выше $\{x_i\} \notin D$, $i \leq n$. Поэтому $I - \{x_i\} \in D$, так что

$\bigcap_{i=1}^n I - \{x_i\} = (I - X) \in D$. Поэтому $C \subseteq D$. Наоборот, если $C \subseteq D$, то $\{x\} \notin D$ для всех $x \in I$ (так как $I - \{x\} \in C$), так что в силу предыдущих замечаний D неглавный. $\square$

1.5. Следствие. Пусть S — множество подмножеств I таких, что $X_1 \cap \dots \cap X_n$ бесконечно для всех $X_1, \dots, X_n \in S$. Тогда S содержится в неглавном ультрафильтре над I .

Доказательство. Следует из того, что $C \cup S$ обладает СКП, и из утверждений 1.2 и 1.4. $\square$

§ 2. Фильтрованные произведения

Пусть L — язык первого порядка, т. е. совокупность предикатных, функциональных и константных символов. Мы отсылаем читателя к 3.1 главы I для определения алгебраической системы $\mathcal{A}$ для языка L . (Когда мы будем говорить о специальных алгебраических системах, будем иногда следовать алгебраической традиции и обозначать алгебраическую систему $\mathcal{A}$ посредством ее основного множества A .) Если Σ — непротиворечивое множество предложений языка L , то пусть $\mathcal{M}(\Sigma)$ обозначает класс всех моделей Σ , т. е. класс всех алгебраических систем $\mathcal{A}$ для языка L таких, что каждое предложение Σ истинно на $\mathcal{A}$; обозначается $\mathcal{A} \models \Sigma$. Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем писать $\mathcal{M}(L)$ вместо $\mathcal{M}(\emptyset)$; таким образом, $\mathcal{M}(L)$ — класс всех алгебраических систем для языка L .

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}(L)$, то гомоморфизм η из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ — это функция $\eta: A \rightarrow B$, которая сохраняет все отношения, функции и константы языка L .

Например, если $L = \{+, \leq, 0\}$ (где $+$ — бинарный функциональный символ, $\leq$ — бинарный предикатный символ и 0 — константа), то $\eta: A \rightarrow B$ является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда $\eta(0_A) = \eta(0_B)$ и для всех $a_1, a_2 \in A$

$$\eta(a_1 + a_2) = \eta(a_1) + \eta(a_2),$$

$$a_1 \leq a_2 \Rightarrow \eta(a_1) \leq \eta(a_2).$$

Как обычно, *изоморфизм* — это гомоморфизм, который имеет обратный гомоморфизм, а *вложение* — это гомоморфизм, который является изоморфизмом на свою область значений.

Если $\langle \mathcal{A}_i: i \in I \rangle$ — совокупность алгебраических систем из $\mathcal{M}(L)$, индексы в которой пробегают множество I , то $\prod_i \mathcal{A}_i$ будет обозначать прямое произведение этого семейства, где $\prod_i \mathcal{A}_i$ — такая система для языка L , что основным множеством ее является прямое произведение $\prod_i A_i$ множеств A_i , а предикаты, функции и константы определяются покомпонентно. Например, если $\mathcal{A}_i = \langle A_i, +_i, \leq_i, 0_i \rangle$, то $\prod_i \mathcal{A}_i = \langle \prod_i A_i, +, \leq, 0 \rangle$, где $\tilde{0}(i) = 0_i$

для всех $i \in I$ и для любых $f, g \in \prod_i A_i$ $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ и $f \leq g$ равносильно $f(i) \leq_i g(i)$ для всех $i \in I$.

Если $\langle \mathcal{A}_i: i \in I \rangle$ — семейство, индексы в котором пробегают множество I , и X — подмножество I , то прямое произведение семейства $\langle \mathcal{A}_i: i \in X \rangle$ мы будем обозначать $\prod_X \mathcal{A}_i$. Заметим, что если $Y \subset X \subset I$, то каноническая проекция $\pi_{XY}: \prod_X \mathcal{A}_i \rightarrow \prod_Y \mathcal{A}_i$ является гомоморфизмом.

Пусть D — фильтр над I . Очевидно, что если мы определим частичный порядок на D посредством $X \leq Y \Leftrightarrow X \supseteq Y$, то $(D, \leq)$ есть направленное множество (т. е. для любых $X, Y \in D$ существует $Z \in D$ так, что $X \leq Z$ и $Y \leq Z$). Если $\langle \mathcal{A}_i: i \in I \rangle$ — семейство алгебраических систем для языка L с индексами из множества I , то *фильтрованное произведение* $\langle \mathcal{A}_i: i \in I \rangle$ по модулю D (обозначается $\prod_D \mathcal{A}_i$) называется прямой предел (в $\mathcal{M}(L)$) прямой системы $\{\pi_{XY}: \prod_X \mathcal{A}_i \rightarrow \prod_Y \mathcal{A}_i \mid X, Y \in D, X \leq Y\}$. Если D — ультрафильтр, то $\prod_D \mathcal{A}_i$ называется *ультрапроизведением* $\langle \mathcal{A}_i: i \in I \rangle$ по модулю D . Если $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ для $i \in I$, то мы пишем $\prod_D \mathcal{A}$ вместо $\prod_D \mathcal{A}_i$ и называем *ультрастепенью* $\mathcal{A}$ по модулю D .

Хотя подход к определению фильтрованных произведений через понятие прямого предела является самым коротким, этот подход возможно в какой-то степени вводит в заблуждение, так как в дальнейшем важно именно конкретное построение прямого предела, а не его универсальные свойства отображений. Поэтому давайте более четко опишем структуру алгебраической системы $\prod_D \mathcal{A}_i$. Следующее описание фильтрованного произведения очень просто исходит из обычного построения прямого предела с учетом того, что для каждого $X \in D$ проекция π_{IX} сюръективна, так что каждый элемент прямого предела представлен элементом $\prod_X \mathcal{A}_i$. Те читатели, которым неудобно понятие прямых пределов, могут рассматривать следующее как определение фильтрованных произведений.

Определим отношение эквивалентности $=_D$ на $\prod_i A_i$ следующим образом. Если $f, g \in \prod_i A_i$, то $f =_D g$ тогда и только тогда, когда $\pi_{IX}(f) = \pi_{IX}(g)$ для некоторого $X \in D$, т. е. $f =_D g$ тогда и только тогда, когда $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$. Основное множество $\prod_D \mathcal{A}_i$ есть $\prod_D A_i$, множество классов эквивалентности элементов $\prod_i A_i$. Обозначим класс эквивалентности для $f \in \prod_i A_i$ через f_D .

Предикаты на $\prod_D \mathcal{A}_i$ определяются условием, что предикат истинен на элементах $\prod_D \mathcal{A}_i$ тогда и только тогда, когда он истинен на множестве компонент, принадлежащем D ; аналогично определяются и функции. Например, если $\mathcal{A}_i = \langle A_i, +_i, \leq_i, 0_i \rangle$ и $f_D, h_D \in \prod_D \mathcal{A}_i$, то $f_D \leq g_D$ в $\prod_D \mathcal{A}_i$ тогда и только тогда, когда $\{i \in I \mid f(i) \leq_i g(i)\} \in D$. (Эквивалентно, $f_D \leq g_D$ равносильно тому, что существует $X \in D$ такой, что $\pi_{IX}(f) \leq \pi_{IX}(g)$ в $\prod_X \mathcal{A}_i$.) Аналогично $f_D + g_D = h_D$ в $\prod_D \mathcal{A}_i$ тогда и только тогда, когда

$\{i \in I \mid f(i) + g(i) = h(i)\} \in D$, и интерпретация 0 в $\Pi_D \mathcal{A}_i$ есть 0_D , где $\{i \in I \mid 0(i) = 0\} \in D$. Легко проверить, используя свойства фильтров, что $\leq$, $+$, 0 корректно определены на $\Pi_D \mathcal{A}_i$.

Следующая лемма оправдывает сходство наших обозначений для прямых произведений и фильтрованных произведений. Это непосредственно следует из того, что в направленном множестве $(\langle X \rangle, \leq)$ X является наибольшим элементом.

2.1. Лемма. Если $\langle X \rangle$ — главный фильтр над I , порожденный X , то фильтрованное произведение $\langle \mathcal{A}_i; i \in I \rangle$ по модулю $\langle X \rangle$ изоморфно прямому произведению $\langle \mathcal{A}_i; i \in X \rangle$ (т. е. $\Pi_{\langle X \rangle} \mathcal{A}_i \cong \Pi_X \mathcal{A}_i$).

Именно ультрапроизведения, а не фильтрованные произведения вообще более интересны для логиков, так как ультрапроизведения сохраняют логические свойства семейства $\langle \mathcal{A}_i; i \in I \rangle$ (в том смысле, в котором они уточняются в основной теореме следующего параграфа). Но перед тем как перейти к этому, необходимо упомянуть, что в случае, когда модели являются кольцами с делением, можно дать другое построение фильтрованных произведений.

Пусть $\langle R_i; i \in I \rangle$ — семейство колец с делением. Для любого $f \in \Pi_I R_i$ пусть $Z(f) = \{i \in I \mid f(i) = 0\}$. Заметим, что для любого $f, g \in \Pi_I R_i$ $Z(f) \subseteq Z(g)$ равносильно существованию $h_1 \in \Pi_I R_i$ такого, что $h_1 f = g$, а это равносильно существованию $h_2 \in \Pi_I R_i$ такого, что $f h_2 = g$. (Мы воспользовались тем, что R_i — кольца с делением.) Следовательно, каждый (левый или правый) идеал $\Pi_I R_i$ двусторонний. Если N — подмножество $\Pi_I R_i$, то пусть $Z(N) = \{Z(f); f \in N\}$.

2.2. Теорема (Кочен [1]). Пусть $\langle R_i; i \in I \rangle$ — семейство колец с делением. Если N — идеал $\Pi_I R_i$, то $Z(N)$ — фильтр над I . Отображение Z , которое ставит N в соответствие фильтру $Z(N)$, является одно-однозначным сохраняющим включение соответствием между собственными идеалами N и фильтрами над I . При этом отображении главным идеалам соответствуют главные фильтры, максимальным идеалам соответствуют ультрафильтры. Кроме того, для любого идеала N кольца $\Pi_I R_i$ фактор-кольцо $\Pi_I R_i / N$ изоморфно фильтрованному произведению $\Pi_{Z(N)} R_i$.

Доказательство. Если S — подмножество I , то $\bar{S} \in \Pi_I R_i$ обозначает «характеристическую функцию» S , т. е. $\bar{S}: I \rightarrow \{0, 1\} \subseteq R$ такова, что $\bar{S}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in S$. Заметим, что если N является идеалом $\Pi_I R_i$ и $f \in \Pi_I R_i$, то $f \in N$ эквивалентно тому, что $\bar{Z}(f) \in N$. Отсюда следует, что для любых $f, g \in N$ имеем $Z(f) \cap Z(g) \in Z(N)$, так как

$$Z(f) \cap Z(g) = \overline{Z(\overline{Z(Z(f)) + Z(g)})} + \overline{Z(f) Z(g)}.$$

(Более простое представление возможно, если ни одно R_i не имеет характеристику 2.) Таким образом, $Z(N)$ удовлетворяет условию (ii) из определения фильтра, условия (i) и (iii), очевидно, следуют из определения $Z(N)$ и замечаний, предшествующих теореме. Таким образом, $Z(N)$ является фильтром.

Если D — фильтр над I , то пусть $N_D = \{f \in \Pi_I R_i \mid Z(f) \in D\}$, тогда N является идеалом, так как $Z(f - g) \supseteq Z(f) \cap Z(g)$ и $Z(fg) \supseteq Z(f)$; N собственный, потому что $\emptyset \notin D$. Отображение, которое переводит D в N_D , есть обратное к отображению Z , и, следовательно, Z — одно-однозначное соответствие между идеалами $\Pi_I R_i$ и фильтрами над I . Так как Z сохраняет включения, то максимальные идеалы соответствуют максимальным фильтрам, т. е. ультрафильтрам (см. предложение 1.1). Также легко проверяется, что идеал N порожден f в том и только в том случае, когда $Z(N)$ порождает $Z(f)$. Наконец, функция, которая сопоставляет смежному классу $f + N$ в $\Pi_I R_i / N$ класс $f_D \in \Pi_{Z(N)} R_i$, осуществляет изоморфизм этих колец.

2.3. Следствие. Если $\langle R_i; i \in I \rangle$ есть семейство колец с делением и N — простой идеал $\Pi_I R_i$, то N является максимальным идеалом и $\Pi_I R_i / N$ — кольцо с делением.

Доказательство. Для доказательства максимальности N достаточно доказать, что $Z(N)$ — ультрафильтр. Пусть $X \subset I$. Если $X \notin Z(N)$ и $I - X \notin Z(N)$, то X и $I - X$ не лежат в N . Но $X(I - X) = 0 \in N$, получаем противоречие. Таким образом, $Z(N)$ есть ультрафильтр. Чтобы показать, что $\Pi_I R_i / N$ — кольцо с делением, допустим, что $f \in \Pi_I R_i$ такова, что $f \notin N$. Тогда $Z(f) \notin Z(N)$, и поэтому $I - Z(f) \in Z(N)$. Если $g \in \Pi_I R_i$ такова, что $g(i) = f(i)^{-1}$ для всех $i \in I - Z(N)$, то $\{i \in I \mid g(i)f(i) = 1\} = I - Z(f) \in N$. Следовательно, по замечаниям, предшествующим теореме 2.2, $1 - gf \in N$, т. е. $gf + N$ является единицей в $\Pi_I R_i / N$. $\square$

§ 3. Основная теорема

Следствие 2.3 говорит нам, что ультрапроизведение колец с делением есть кольцо с делением (в то время как фильтрованное произведение колец с делением, не являющееся ультрапроизведением, может и не быть кольцом с делением). Этот результат является частным случаем основной теоремы об ультрапроизведениях, которая говорит, что элементарные свойства семейства $\langle \mathcal{A}_i; i \in I \rangle$ сохраняются относительно ультрапроизведений. Более точно, основная теорема или теорема Лося утверждает следующее.

3.1. Теорема (Лось [1]). Пусть $\langle \mathcal{A}_i; i \in I \rangle$ — семейство алгебраических систем для языка L , и пусть D — ультрафильтр над I . Тогда для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ языка L и любых

элементов $g^1, \dots, g^n \in \Pi_i \mathcal{A}_i$

$$\Pi_D \mathcal{A}_i \models \varphi[g_D^1, \dots, g_D^n]$$

тогда и только тогда, когда

$$\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D.$$

Прежде чем доказывать основную теорему, укажем некоторые следствия из нее. Для случая, когда φ не имеет свободных переменных, мы получаем

3.2. Следствие. Для любого ультрапроизведения $\Pi_D \mathcal{A}_i$ и любого предложения φ $\Pi_D \mathcal{A}_i \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$.

3.3. Следствие. Если $\mathcal{A}_i$ принадлежат $\mathcal{M}(\Sigma)$ для каждого $i \in I$, то ультрапроизведение $\Pi_D \mathcal{A}_i$ принадлежит $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Подкласс $\mathcal{M}(\Sigma) \subset \mathcal{M}(L)$, который определяется некоторым множеством предложений Σ языка L , называется *аксиоматизируемым* (в логике первого порядка) или *элементарным*. Следствие 3.3 говорит, что любой аксиоматизируемый класс замкнут относительно ультрапроизведений. Например, ультрапроизведение групп (полугрупп, колец, коммутативных колец, полей, алгебраически замкнутых полей, колец с делением, формально вещественных полей, алгебр Ли, булевых алгебр и т. д.) является группой (полугруппой, кольцом, коммутативным кольцом, полем, алгебраически замкнутым полем, кольцом с делением, формально вещественным полем, вещественно замкнутым полем, алгеброй Ли, булевой алгеброй и т. д.), потому что класс их аксиоматизируем. Таким образом, для доказательства неаксиоматизируемости класса достаточно доказать, что этот класс не замкнут относительно ультрапроизведений. Мы приведем пример. Другое доказательство дано в 2.3 главы 1. Полезно сравнить два этих доказательства.

3.4. Следствие. Пусть $L = \{+, 0\}$ — язык абелевых групп (т. е. L состоит из двуместного функционального символа $+$ и константного символа 0). Класс периодических абелевых групп неаксиоматизируем.

Доказательство. Достаточно показать, что ультрапроизведение периодических абелевых групп не является периодической группой. Пусть $I = \omega$, и пусть A_n — циклическая группа порядка $n+1$ для каждого $n \in I$. Пусть D — неглавный ультрафильтр над I , тогда $\Pi_D A_n$ — непериодическая группа. Пусть $f \in \Pi_D A_n$ такова, что $f(n)$ имеет порядок $n+1$ для каждого $n \in I$. Для любого $m > 0$, если $\varphi_m(x)$ есть формула

$$(x + x + \dots + x = 0)$$

(x суммируется m раз), то по 3.1 $\Pi_D A_n \models \varphi_m[f_D]$, так как $\{n \in I \mid A_n \models \varphi_m[f(n)]\}$ — конечное множество и, следовательно, не

принадлежит D в силу 1.4. Таким образом, f_D не имеет конечного порядка. (Вместо этого, обращаясь к 3.1, мы можем проверить непосредственно из определения, что $mf_D \neq 0$ в $\Pi_D A_n$ для произвольного $m \neq 0$.) Таким образом, $\Pi_D A_n$ не является периодической. $\square$

Этот метод доказательства того, что класс неаксиоматизируем, не всегда работает, потому что, как будет показано в § 4, существуют классы, замкнутые относительно ультрапроизведений, но не аксиоматизируемые. В § 5 будет показано, как с помощью техники ультрапроизведений доказывать, что класс не является конечно аксиоматизируемым. Перейдем к доказательству теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 3.1. Для простоты мы будем доказывать теорему для конкретного примера $\mathcal{A}_i = \langle A_i, +_i, \leq_i, 0_i \rangle$, но рассуждения будут вполне общими. Доказательство проводим индукцией по сложности формулы φ . Рассмотрим самый простой случай, атомные формулы: $x_1 \leq x_2$; $x_1 + x_2 = x_3$; $x_1 = 0$. Если φ — одна из них, то справедливость теоремы следует из определения ультрапроизведения.

Более сложные атомные формулы: $t_1 \leq t_2$, $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы, построенные из функционального символа $+$ и константного символа 0 (например, $t_1 = ((x_1 + x_2) + ((0 + x_3) + x_1)) + ((x_4 + x_2) + 0)$). В этом случае желаемый результат следует из уже рассмотренного более простого случая, если мы индукцией по построению терма $t(x_1 \dots x_n)$ докажем, что $t_{\Pi_D \mathcal{A}_i}[g_D^1 \dots g_D^n] = h_D$ эквивалентно $\{i \in I \mid t_{\mathcal{A}_i}[g^1(i) \dots g^n(i)] = h(i)\} \in D$. Мы оставляем детали читателю: простейшие случаи ($t = x_{i_1} + x_{i_2}$; $t = x_{i_j}$; $t = 0$) следуют из определения ультрапроизведения. (См. 3.7 главы 1, определение $t_{\mathcal{A}}$, только там пишется $t^{\mathcal{A}}$.)

Предположим, что $\varphi = \neg \psi(x_1, \dots, x_n)$, и теорема доказана для ψ . Тогда

$$\Pi_D \mathcal{A}_i \models \varphi[g_D^1, \dots, g_D^n] \Leftrightarrow \Pi_D \mathcal{A}_i \not\models \psi[g_D^1, \dots, g_D^n]$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \notin D$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \not\models \psi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D.$$

(В предпоследней эквивалентности мы воспользовались тем, что D является ультрафильтром, а не просто фильтром.) Если $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ и теорема доказана для φ_1 и φ_2 , то просто восстановить доказательство для φ . Достаточно воспользоваться свойством фильтров: $X \cap Y \in D$ тогда и только тогда, когда $X \in D$ и $Y \in D$.

Наконец, если $\varphi = \exists x_0 \psi(x_0, \dots, x_n)$, то $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi[g_D^1, \dots, g_D^n] \Leftrightarrow$ существует $g^0 \in \prod_I \mathfrak{A}_i$ такой, что $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \psi[g_D^0, g_D^1, \dots, g_D^n] \Leftrightarrow$ существует $g^0 \in \prod_I \mathfrak{A}_i$ такой, что

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi[g^0(i), g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D \\ \Rightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D.$$

Наоборот, если $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} = X \in D$, то существует $g^0 \in \prod_I \mathfrak{A}_i$ такой, что для каждого $i \in X$ имеем $\mathfrak{A}_i \models \psi[g^0(i), g^1(i), \dots, g^n(i)]$; следовательно,

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[g^0(i), g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D. \quad \square$$

Вследствие важности основной теоремы в дальнейшем сосредоточим наше внимание на ультрапроизведениях (и ультрастепенях), а не на произвольных фильтрованных произведениях.

§ 4. Ультрапроизведения как функторы

Всюду в этой главе мы предполагаем, что рассматриваемые нами классы моделей замкнуты относительно изоморфизмов. Если $\mathcal{A}$ — подкласс $\mathcal{M}(L)$, то мы обозначаем буквой $\mathcal{A}$ также категорию, объектами которой являются элементы $\mathcal{A}$ и морфизмами все гомоморфизмы между элементами $\mathcal{A}$. Мы будем также рассматривать категорию $\mathcal{A}'$, объектами которой являются снабженные индексами семейства $\langle \mathfrak{A}_i: i \in I \rangle$ объектов из $\mathcal{A}$, а морфизмами из $\langle \mathfrak{A}_i: i \in I \rangle$ в $\langle \mathfrak{B}_i: i \in I \rangle$ являются снабженные индексами семейства $\langle \eta_i: i \in I \rangle$ гомоморфизмов $\eta_i: \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{B}_i$. Поскольку мы рассматриваем только эти категории, мы будем использовать слова «класс» и «категория» взаимозаменяемо при обращении с $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}'$. Если $\langle \eta_i: i \in I \rangle$ — семейство гомоморфизмов $\eta_i: \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{B}_i$, то пусть $\prod_D \eta_i: \prod_D \mathfrak{A}_i \rightarrow \prod_D \mathfrak{B}_i$ — функция, определенная так: $(\prod_D \eta_i)(f_D) = g_D$, где $g(i) = \eta_i(f(i))$. Легко проверяется, что $\prod_D \eta_i$ является корректно определенным гомоморфизмом; он называется *ультрапроизведением гомоморфизмов η_i по модулю D* .

Если $\eta_i = \eta: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ для всех $i \in I$, то $\prod_D \eta_i$ обозначается $\prod_D \eta$ и называется *ультрастепенью η по модулю D* ; она является гомоморфизмом из $\prod_D \mathfrak{A}$ в $\prod_D \mathfrak{B}$. Рутинным упражнением на понимание определений является проверка следующего результата. Определение *элементарного вложения* можно найти в главе 2.

4.1. Теорема. Если D — ультрафильтр над I и $\mathcal{A}$ является подклассом $\mathcal{M}(L)$, замкнутым относительно ультрастепеней (соотв. ультрапроизведений), то ультрастепень (соотв. ультрапро-

изведение) $\prod_D$ является функтором из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ (соотв. из $\mathcal{A}'$ в $\mathcal{A}$).

4.2. Теорема. Функтор-ультрастепень на $\mathcal{A}$ сохраняет вложение и элементарные вложения. Аналогично функтор-ультрапроизведение сопоставляет семейству $\langle \eta_i: i \in I \rangle$ вложений (соотв. элементарных вложений) вложения (соотв. элементарные вложения).

Доказательство. Достаточно доказать теорему для ультрапроизведений. По определению $\eta_i: \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{B}_i$ есть вложение в том и только в том случае, когда $\eta_i: \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{гап } \eta_i$ есть изоморфизм. Таким образом, если $\langle \eta_i: i \in I \rangle$ — семейство вложений, то $\prod_D \eta_i$ является вложением, так как функторы сохраняют изоморфизмы и $\text{гап } \prod_D \eta_i = \prod_D \text{гап } \eta_i$. В случае элементарных вложений воспользуемся основной теоремой (3.1). Допустим, что $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула языка L и $g_D^1, \dots, g_D^n \in \prod_D \mathfrak{A}_i$. Тогда $\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi[g_D^1, \dots, g_D^n] \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[g^1(i), \dots, g^n(i)]\} \in D$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{B}_i \models \varphi[\eta_i(g^1(i)), \dots, \eta_i(g^n(i))]\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \prod_D \mathfrak{B}_i \models \varphi[(\prod_D \eta_i)(g_D^1), \dots, (\prod_D \eta_i)(g_D^n)]. \quad \square$$

Конструкция ультрапроизведения позволяет единообразно определить функторы в различных категориях. Для того чтобы дать формальное выражение этого единообразия, нам необходимо понятие «забывающего функтора». Пусть L, L' — языки первого порядка такие, что $L \subset L'$. Напомним, что алгебраическая система для языка L' есть пара $\mathfrak{A}' = \langle A', \mathcal{I}' \rangle$, где $\mathcal{I}'$ — интерпретация каждого символа L' . Если $\mathfrak{A}'$ — алгебраическая система для языка L' , то пусть $R_{L,L}(\mathfrak{A}')$ — алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A', \mathcal{I} \rangle$ для языка L , где $\mathcal{I}$ — ограничение $\mathcal{I}'$ на символах L . $R_{L,L}(\mathfrak{A}')$ называется *обеднением $\mathfrak{A}'$ до L* . Если $\eta: \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{B}'$ — гомоморфизм систем для языка L' , то $R_{L,L}(\eta)$ есть в точности функция, которая является гомоморфизмом $R_{L,L}(\mathfrak{A}')$ в $R_{L,L}(\mathfrak{B}')$. Легко заметить, что $R_{L,L}$ является функтором из $\mathcal{M}(L')$ в $\mathcal{M}(L)$, который называют *забывающим функтором*. (Мы будем употреблять R без индексов, когда не возникает двусмысленности.) Например, если L пусто и $L \subset L'$, то $\mathcal{M}(L)$ есть категория, а $R_{L,L}$ — хорошо известный функтор из $\mathcal{M}(L')$ в $\mathcal{M}(L)$.

Если $R_{L,L}$ переводит подкласс $\mathcal{A}'$ из $\mathcal{M}(L)$ в подкласс $\mathcal{A}$ из $\mathcal{M}(L)$, то мы будем обозначать ограничение $R_{L,L}$ на $\mathcal{A}$ также $R_{L,L}$ и назовем его *забывающим функтором из $\mathcal{A}'$ в $\mathcal{A}$* . Например, имеется забывающий функтор из класса упорядоченных абелевых групп в класс абелевых групп, где $L = \{+, 0\}$ и $L' = \{+, \leq, 0\}$. Следующий результат является очевидным следствием определений.

4.3. Теорема. Пусть D — ультрафильтр над I , L и L' — языки первого порядка такие, что $L \subset L'$. Тогда следующие диа-

граммы (для ультрастепеней и ультрапроизведений соответственно) коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(L') & \xrightarrow{R_{L'L}} & \mathcal{M}(L) \\ \Pi_D \downarrow & & \downarrow \Pi_D \\ \mathcal{M}(L') & \xrightarrow{R_{L'L}} & \mathcal{M}(L) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(L')^I & \xrightarrow{R_{L'L}^I} & \mathcal{M}(L)^I \\ \Pi_D \downarrow & & \downarrow \Pi_D \\ \mathcal{M}(L') & \xrightarrow{R_{L'L}} & \mathcal{M}(L) \end{array}$$

Теорема 4.3 пригодна для доказательства замкнутости класса относительно ультрапроизведений, даже когда мы не знаем, что класс аксиоматизируем. Мы говорим, что класс $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(L)$ является *псевдоэлементарным*, если существует забывающий функтор $R = R_{L'L}$ такой, что $\mathcal{A}$ есть образ относительно R элементарного (т. е. аксиоматизируемого) класса $\mathcal{A}' \subset \mathcal{M}(L')$.

4.4. Следствие. Псевдоэлементарный класс замкнут относительно ультрапроизведений.

Доказательство. Придерживаясь обозначений определения, докажем, что для любого семейства $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ из $\mathcal{A}$ система $\Pi_D \mathcal{A}_i$ принадлежит $\mathcal{A}$. По предположению каждая $\mathcal{A}_i$ имеет вид $R(\mathcal{A}'_i)$ для некоторых $\mathcal{A}'_i$ из $\mathcal{A}'$. Но тогда по следствию 3.3 и теореме 4.3 имеем

$$\Pi_D \mathcal{A}_i = \Pi_D R(\mathcal{A}'_i) = R(\Pi_D \mathcal{A}'_i) \in R(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}. \quad \square$$

4.5. Теорема. Пусть $n \in \omega$. Если $\mathcal{A}$ — класс всех групп, изоморфных $GL(n, F)$ для некоторого поля F , то $\mathcal{A}$ замкнут относительно ультрапроизведений.

Доказательство. Через $GL(n, F)$ мы обозначаем группу относительно умножения обратимых матриц размера $n \times n$ над полем F . В силу 4.4 достаточно доказать, что $\mathcal{A}$ — псевдоэлементарный класс. Расширим $L = \{ \cdot, e \}$, язык групп, до языка $L' = \{ \cdot, e, +, *, 0, 1, \pi_{ij} \}$, где $+$, $*$ — бинарные функциональные символы, 0 и 1 — константные символы и π_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, — унарные функциональные символы. Пусть $\mathcal{A}$ — класс всех систем $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, e, +, *, 0, 1, \pi_{ij} \rangle$ для языка L' , удовлетворяющих следующим свойствам (которые, очевидно, записываются предложениями языка L'):

(i) два элемента a_1, a_2 из $\mathcal{A}$ равны тогда и только тогда, когда $\pi_{ij}(a_1) = \pi_{ij}(a_2)$ для всех i, j (следовательно, $\mathcal{A}$ состоит из матриц размерности $n \times n$);

(ii) объединение F областей значений π_{ij} образует поле относительно $+$, $*$, 0 , 1 ;

(iii) «матрица» e единичная;

(iv) операция $\cdot$ определяет умножение матриц;

(v) элементами $\mathcal{A}$ являются в точности обратимые матрицы размера $n \times n$ над полем F .

Тогда $\mathcal{A}$ является образом $\mathcal{A}'$ относительно забывающего функтора. $\square$

Известно, что класс $\mathcal{A}$ из предыдущей теоремы не аксиоматизируем (см. Саббах [1], доказано для $n = 1$, но оно обобщается на произвольное n). Неизвестно, будет ли элементарным класс из следующей теоремы.

4.6. Теорема (Саббах). Класс примитивных колец замкнут относительно ультрапроизведений.

Доказательство. Для наших целей удобно следующее определение примитивного кольца. R примитивно тогда и только тогда, когда существует максимальный регулярный правый идеал p кольца R такой, что $(p : R) = (0)$ (см. Херстейн [1], с. 40). При этом определении нетрудно видеть, что класс примитивных колец псевдоэлементарный. $\square$

Мы заканчиваем параграф еще одним полезным результатом об ультрапроизведениях.

4.7. Теорема. Пусть D — ультрафильтр над множеством I . Существует естественное отображение $d: I \rightarrow \Pi_D$ из тождественного функтора на $\mathcal{M}(L)$ на функтор-ультрастепень на $\mathcal{M}(L)$ такой, что для каждого $\mathcal{A}$ из $\mathcal{M}(L)$ $d(\mathcal{A})$ является элементарным вложением. Более того, для любого расширения $L \subset L'$ имеем $R_{L'L} d = d R_{L'L}$.

Доказательство. Для любой $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}(L)$ пусть $d(\mathcal{A}): \mathcal{A} \rightarrow \Pi_D \mathcal{A}$ определено посредством $d(a) = \bar{a}_D$, где $\bar{a}: I \rightarrow \mathcal{A}$ — константная функция со значением a . Тогда $d(\mathcal{A})$ является элементарным вложением, что следует из основной теоремы 3.1, так как

$$\Pi_D \mathcal{A} \models \varphi[d(a_1), \dots, d(a_n)]$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in D \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

Мы оставляем читателю очевидную проверку того, что d есть естественное отображение (т. е. $d(\mathcal{B}) \circ f = \Pi_D(f) \circ d(\mathcal{A})$ для любого $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$) и что $R_{L'L} d = d R_{L'L}$. $\square$

КОМПАКТНОСТЬ

§ 5. Вариант теоремы компактности, связанный с ультрапроизведениями

Из основной теоремы следует, что для любой совокупности $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ и ультрафильтра D , если на каждой $\mathcal{A}_i$ выполняется некоторое множество Σ предложений, формализуемых в логике первого порядка, то на $\Pi_D \mathcal{A}_i$ также выполняется Σ .

Содержанием следующей теоремы (которая, очевидно, является следствием основной теоремы) является то, что для некоторых ультрафильтров D ультрапроизведение $\prod_D \mathcal{A}_i$ может удовлетворять множеству предложений, записываемых в логике первого порядка, хотя ни одно $\mathcal{A}_i$ не является моделью Σ .

5.1. Теорема. Пусть $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ — снабженное индексами семейство алгебраических систем для языка L , и пусть Σ — множество предложений L .

(i) Если для каждого предложения φ из Σ множество $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\}$ коконечно, то для любого неглавного ультрафильтра D над I $\prod_D \mathcal{A}_i$ является моделью Σ .

(ii) Если для каждого конечного подмножества $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Sigma$ множество $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ не пусто, то существует ультрафильтр D над I такой, что $\prod_D \mathcal{A}_i$ — модель Σ .

Доказательство. (i) В силу предложения 1.4 если D — неглавный ультрафильтр, то $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\}$ лежит в D для каждого $\varphi \in \Sigma$ и по следствию 3.2 $\prod_D \mathcal{A}_i \models \varphi$.

(ii) Для каждого конечного подмножества $F \subseteq \Sigma$ пусть $I_F = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models F\}$, I_F не пусто по предположению. Заметим, что $S = \{I_F \mid F \text{ — конечное подмножество } \Sigma\}$ обладает СКП, так как

$$I_{F_1} \cap \dots \cap I_{F_n} \supseteq I_G, \text{ где } G = \bigcup_{i=1}^n F_i.$$

Таким образом, по следствию 1.2 S содержится в ультрафильтре D над I . Так как $I_{\{\varphi\}} \in D$, то по следствию 3.2 $\prod_D \mathcal{A}_i \models \varphi$ для каждого $\varphi \in \Sigma$. $\square$

Как следствие теоремы мы можем получить алгебраическое доказательство теоремы компактности, которое обсуждалось ранее.

5.2. Следствие. Если Σ — множество предложений языка L такое, что каждое конечное подмножество Σ имеет модель, то Σ имеет модель.

Доказательство. Пусть I — множество всех конечных подмножеств Σ и для каждого $i \in I$ пусть $\mathcal{A}_i$ — модель для i . Очевидно, что условие теоремы 5.1 (ii) выполнено, и тогда существует ультрафильтр D над I такой, что $\prod_D \mathcal{A}_i$ — модель Σ . $\square$

Большинство, если не все алгебраические применения ультрапроизведений, которые даются в этом и следующих двух параграфах, можно доказать без употребления ультрапроизведений, пользуясь вместо следствия 5.2 теоремой компактности. Многие из них и были впервые доказаны таким образом. Тем не менее целью этой работы как раз и является показать, как ультрапроизведения могут быть использованы, чтобы дать более «алгебраические» доказательства. Таким образом, наши доказательства являются более или менее прямыми применениями

теоремы 5.1 или теоремы 3.1 и даже ссылка на эти общие теоремы может быть заменена в конкретных применениях прямой проверкой желаемых свойств по определению ультрапроизведения (ср. замечание в конце доказательства следствия 3.4).

5.3. Теорема. Пусть P — бесконечное множество простых чисел и для каждого $p \in P$ пусть F_p — поле характеристики p . Если D — неглавный ультрафильтр над P , то $\prod_D F_p$ будет полем характеристики нуля.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\varphi_n \mid n \geq 1\}$, где φ_n — предложение « $n \cdot 1 \neq 0$ ». Для каждого n множество $\{p \in P \mid F_p \models \varphi_n\}$ бесконечно и совпадает с множеством простых чисел из P , не делящих n . Следовательно, в силу 5.1 (i) $\prod_D F_p$ является моделью для Σ , т. е. $\prod_D F_p$ имеет характеристику нуля.

Класс называется *конечно аксиоматизируемым* (в L), если он имеет вид $\mathcal{M}(\Sigma)$, где Σ — конечное множество предложений языка L ; заметим, что в этом случае можно считать, что Σ состоит из одного предложения, — достаточно взять конъюнкцию предложений из Σ . Если $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\{\theta\})$ является конечно аксиоматизируемым подклассом $\mathcal{M}(L)$, то дополнение $\mathcal{A}$ до $\mathcal{M}(L)$ тоже конечно аксиоматизируемо — совпадает с $\mathcal{M}(\{\neg \theta\})$ — и, следовательно, в силу 3.3 замкнуто относительно ультрапроизведений. Поэтому ввиду 5.3 класс полей ненулевой характеристики не замкнут относительно ультрапроизведений, и мы получаем

5.4. Следствие. Класс полей характеристики нуля аксиоматизируем, но не является конечно аксиоматизируемым.

Аналогично доказывается и следующее. (Доказательство и другие примеры неконечно аксиоматизируемых теорий см. в книге: Белл и Сломсон [1], глава 5, § 3.)

5.5. Теорема (Тарский). Класс алгебраически замкнутых полей аксиоматизируем, но не является конечно аксиоматизируемым.

5.6. Теорема. Если φ — предложение, записанное на языке полей, которое истинно в каждом поле (в каждом алгебраически замкнутом поле) характеристики нуля, то существует конечное множество простых чисел P_φ таких, что φ истинно в каждом поле (в каждом алгебраически замкнутом поле) характеристики p , если $p \notin P_\varphi$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует бесконечное множество простых чисел P такое, что для $p \in P$ существует поле (алгебраически замкнутое поле) F_p , в котором выполняется $\neg \varphi$. По 5.3 и 3.2, если D — неглавный ультрафильтр над P , то $\prod_D F_p$ является полем (алгебраически замкнутым полем) характеристики нуля, которое является моделью $\neg \varphi$, получили противоречие. $\square$

Мы заканчиваем этот параграф определением, которое играет важную роль в глубоком результате Акса [1] о разре-

шимости теории конечных полей. Пусть Σ — множество всех предложений в языке полей, которые истинны в каждом конечном поле. Бесконечные модели Σ будем называть *псевдоконечными* полями. (Акс [1] дал полное алгебраическое описание этих полей.) Приводимое ниже следствие из 5.1 (i) показывает, как строить псевдоконечные поля с помощью ультрапроизведений.

5.7. Следствие. Пусть $\langle F_n: n \in \omega \rangle$ — семейство конечных полей таких, что для каждого m множество $\{n \in \omega \mid \text{мощность } F_n \leq m\}$ конечно. Пусть D — неглавный ультрафильтр над ω . Тогда $\prod_D F_n$ псевдоконечно. $\square$

§ 6. Теоремы вложения

Следующая теорема резюмирует часто используемый метод доказательства с помощью ультрапроизведений (ср. Кегел и Верфриц [1], с. 66; также Гретцер [1], теорема 7, с. 261).

Множество $\{\mathfrak{B}_i \mid i \in I\}$ подсистем системы $\mathfrak{B}$ называется *локальным покрытием* для $\mathfrak{B}$, если: (1) $B = \bigcup \{B_i \mid i \in I\}$ и (2) для любых $i, j \in I$ существует $k \in I$ такой, что $B_i \cup B_j \subset B_k$. Например, множество всех конечно порожденных подсистем системы $\mathfrak{B}$ является локальным покрытием для $\mathfrak{B}$.

6.1. Теорема. Пусть $\{\mathfrak{B}_i \mid i \in I\}$ — локальное покрытие для системы $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}(L)$. Пусть $\langle \mathfrak{A}_i: i \in I \rangle$ — снабженное индексами семейство элементов $\mathcal{M}(L)$ таких, что для каждого $i \in I$ существует вложение (гомоморфизм) $\mathfrak{B}_i$ в $\mathfrak{A}_i$. Тогда существует ультрафильтр D над I и вложение (гомоморфизм) $\mathfrak{B}$ в $\prod_D \mathfrak{A}_i$.

Доказательство. Выбираем вложение (гомоморфизм) $\xi_i: \mathfrak{B}_i \rightarrow \mathfrak{A}_i$ для каждого $i \in I$. Для каждого $j \in I$ пусть $S_j = \{i \in I \mid B_j \subset B_i\}$. Тогда $S = \{S_j \mid j \in I\}$ обладает свойством конечных пересечений, так как $S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_n} \supset S_k$, где k таково, что $B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_n} \subset B_k$. Следовательно, в силу 1.2 S можно расширить до ультрафильтра D над I . Для каждого $j \in I$ существует вложение (гомоморфизм) $\eta_j: \mathfrak{B}_j \rightarrow \prod_D \mathfrak{A}_i$, который определяется так: $\eta_j(b) = b_D$, где $\tilde{b}(i) = \xi_i(b)$, если $i \in S_j$, и $\tilde{b}(i)$ произвольно в противном случае. По определению локального покрытия $\mathfrak{B}$ является прямым пределом покрывающих систем, состоящих из $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, и включающих отображения между ними. Функции $\{\eta_j \mid j \in I\}$ образуют совместное множество отображений и, следовательно, индуцируют функцию $\eta: \mathfrak{B} \rightarrow \prod_D \mathfrak{A}_i$, которая, очевидно, является вложением (гомоморфизмом).

6.2. Следствие. Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(L)$ замкнут относительно ультрапроизведений и если каждая конечно порожденная подсистема системы $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}(L)$ вкладывается в элемент из $\mathcal{A}$, то $\mathfrak{B}$ вкладывается в элемент из $\mathcal{A}$.

Группа называется *линейной степени n* , если она изоморфна подгруппе $GL(n, F)$ для некоторого поля F . Следующий результат непосредственно вытекает из следствия 6.2 и теоремы 4.5.

6.3. Теорема (Мальцев [1]). Пусть G — группа, каждая конечно порожденная подгруппа которой является линейной группой степени n . Тогда G — линейная группа степени n .

Для простоты в остальных доказательствах этого параграфа мы будем предполагать, что наш язык L содержит лишь конечное множество предикатных, функциональных и константных символов. Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система для языка L , то *уравнением над $\mathfrak{A}$* называется выражение вида $j_0 = f(j_1, \dots, j_n)$ или $R(j_1, \dots, j_n)$, где f (соотв. R) является n -арным функциональным (соотв. предикатным) символом, а каждое j_i является переменной или константой языка L , либо элементом A (точнее, новым символом c_a , соответствующим элементу $a \in A$). *Неравенством над $\mathfrak{A}$* называется отрицание равенства (уравнения) над $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, то мы говорим, что $\mathfrak{A}$ *алгебраически замкнута* (соотв. *экзистенциально замкнута*) в $\mathfrak{B}$, если любая конечная система уравнений (соотв. уравнений и неравенств) над $\mathfrak{A}$, которая имеет решение в $\mathfrak{B}$, имеет решение и в $\mathfrak{A}$. Говорят, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ *алгебраически замкнута* (соотв. *экзистенциально замкнута*) в $\mathcal{A}$, если $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнута (соотв. экзистенциально замкнута) в каждом расширении, лежащем в $\mathcal{A}$. (Сипонимом для экзистенциальной замкнутости является экзистенциальная полнота. Более подробно эти понятия обсуждаются в главе 4.)

6.4. Теорема. Предположим, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнута (соотв. экзистенциально замкнута) в $\mathfrak{B}$ в том и только в том случае, когда существует ультрафильтр D и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & \prod_D \mathfrak{A}_i & \\ d(\mathfrak{A}) \uparrow & \nearrow \eta & \\ \mathfrak{A} & \subset & \mathfrak{B} \end{array}$$

где η — гомоморфизм (соотв. вложение).

Доказательство. Достаточность. Заметим, что η переводит решения конечной системы S уравнений (соотв. уравнений и неравенств) с параметрами из A в решение системы $d(S)$ (в S параметр a заменяется на $d(a)$) в $\prod_D \mathfrak{A}_i$. Если $b_D^{(1)}, \dots, b_D^{(m)}$ — решение системы $d(S)$ в $\prod_D \mathfrak{A}_i$, то по теореме 3.1 существует непустое множество X в D такое, что для каждого $i \in X$ последовательность $b_{(i)}^{(1)}, \dots, b_{(i)}^{(m)}$ есть решение S в $\mathfrak{A}$. (Иначе можно было воспользоваться теоремой 4.7 о том, что d является элементарным вложением.)

Необходимость. Во-первых, заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что L не содержит функциональных символов (функции можно заменить их графиками). Пусть I — множество всех пар (F_1, F_2) , где F_1 — конечное подмножество A , содержащее интерпретации всех констант из L , и F_2 — конечное подмножество $B - A$. Рассмотрим $i = (F_1, F_2) \in I$, пусть $F_2 = \{b_1, \dots, b_k\}$, а S — множество всех уравнений (соотв. уравнений и неравенств) с переменными $x_1, \dots, x_n$ и константами из F_1 , которые выполняются в $\mathfrak{B}$, когда $x_j = b_j$ для $j = 1, \dots, n$. Так как S конечно, то S имеет решение $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ в $\mathfrak{A}$. Если обозначить через $\mathfrak{B}_i$ подсистему $\mathfrak{B}$ с носителем $F_1 \cup F_2$ (мы пользуемся тем, что L не имеет функциональных символов), то существует гомоморфизм (соотв. вложение) $\zeta_i: \mathfrak{B}_i \rightarrow \mathfrak{A}$ такой, что ζ_i тождествен на F_1 и $\zeta_i(b_j) = a_j$ для $j = 1, \dots, n$. Воспользовавшись теоремой 6.1 для локальной системы $\{\mathfrak{B}_i \mid i \in I\}$, мы получим искомый гомоморфизм (соотв. вложение)

$$\eta: \mathfrak{B} \rightarrow \Pi_D \mathfrak{A}.$$

Подобным же образом можно дать необходимое и достаточное условие того, что $\mathfrak{A}$ — элементарная подсистема $\mathfrak{B}$. (См. Белл и Сломсон [1], глава 8, § 1.) Следующее тонкое приложение 6.4 нашли Саббах (не опубликовано) и Баксич [1]. (Специальные случаи были ранее известны, например, для группы Неймана [1].) Система $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ называется *простой* в $\mathcal{A}$, если каждый нетривиальный морфизм в $\mathcal{A}$ с областью определения $\mathfrak{A}$ является одно-однозначным.

6.5. Теорема. *Предположим, что $\mathcal{A}$ замкнут относительно ультрапроизведений, и пусть каждая алгебраическая система из $\mathcal{A}$ может быть вложена в простую систему из $\mathcal{A}$. Если $\mathfrak{A}$ алгебраически замкнута в $\mathcal{A}$ и нетривиальна (т. е. мощности ≥ 2), то $\mathfrak{A}$ экзистенциально замкнута в $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{A}$ простая в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Для доказательства первой части мы должны показать, что если $\mathfrak{A}$ — подсистема $\mathfrak{B} \in \mathcal{A}$, то $\mathfrak{A}$ экзистенциально замкнута в $\mathfrak{B}$. По предположению, мы можем допустить, что $\mathfrak{B}$ проста. По 6.4 существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \Pi_D \mathfrak{A} & \\ d(\mathfrak{A}) \uparrow & \eta \swarrow & \\ \mathfrak{A} & \subset & \mathfrak{B} \end{array}$$

где η — гомоморфизм. Так как $\mathfrak{A}$ нетривиальна, то η нетривиален. Следовательно, η — одно-однозначное отображение и по 6.4 $\mathfrak{A}$ экзистенциально замкнута в $\mathfrak{B}$.

Чтобы показать, что $\mathfrak{A}$ простая, рассмотрим неконстантный гомоморфизм $f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$. Систему $\mathfrak{A}$ можно вложить в простую систему $\mathfrak{B}$, а по 6.4 и 4.7 имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{C} & \xrightarrow{\eta} & \Pi_D \mathfrak{A} & \xrightarrow{\Pi_D f} & \Pi_D \mathfrak{C} \\ & \searrow & \uparrow d(\mathfrak{A}) & & \uparrow d(\mathfrak{C}) \\ & & \mathfrak{A} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{C} \end{array}$$

где η — гомоморфизм. Так как $d(\mathfrak{C})$ одно-однозначно, то $\Pi_D f \circ \eta$ — неконстантное отображение и поэтому (так как $\mathfrak{C}$ простая) одно-однозначное. Поскольку диаграмма коммутативна, мы заключаем, что f — одно-однозначное отображение.

Заканчиваем параграф результатом о вложении колец, принадлежащим А. Робинсону и М. Рабину (см. Робинсон [3]). Можно было извлечь этот результат из теоремы 6.1, но мы приводим прямое доказательство. Кольцо R (возможно без единицы) называется *простым кольцом*, если для всех ненулевых α и β из R $\alpha R \beta$ отлично от нуля.

6.6. Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс колец, замкнутых относительно ультрапроизведений. Если R — простое кольцо, которое вкладывается в прямое произведение колец из $\mathcal{A}$, то R вкладывается в элемент из $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $R \subset \Pi_I A_i$, где $A_i \in \mathcal{A}$ для всех $i \in I$. Для каждого ненулевого α из R пусть $S_\alpha = \{i \in I \mid \alpha(i) \neq 0\}$. Так как R — простое кольцо, то $S = \{S_\alpha \mid \alpha \neq 0, \alpha \in R\}$ обладает СКП (ибо $S_\alpha \cap S_\beta \supset S_{\alpha\beta}$ для некоторого $j \in R$). Таким образом, по следствию 1.2 S можно включить в ультрафильтр D над I . Пусть $A = \Pi_D A_i$. По предположению $A \in \mathcal{A}$. Определим отображение $\eta: R \rightarrow A$, положив $\eta(\alpha) = \alpha_D$, тогда g является вложением, так как для каждого ненулевого α из R имеем $S_\alpha \in D$. $\square$

Приводимое ниже следствие принадлежит Робинсону [3] для случая колец с делением и Амицуру [3] для случая примитивных колец. См. Амицур [3], Херстейн [1], глава 7 или Хиршелман [1] по поводу обобщения и важных приложений теоремы Познера.

6.7. Следствие. *Если R — простое кольцо, которое является подкольцом прямого произведения колец с делением (соотв. примитивных колец), то R — подкольцо кольца с делением (соотв. примитивного кольца).*

Доказательство. Класс колец с делением аксиоматизируем, следовательно, замкнут относительно ультрапроизведений. Класс примитивных колец псевдоэлементарен, следовательно, замкнут относительно ультрапроизведений (см. теорему 4.6). $\square$

Некоторые другие применения теоремы 6.6 к изучению полиномиальных тождеств и рациональных тождеств в кольцах с делением можно найти у А м и ц у р а [1], [2].

§ 7. Ограниченные полиномиальные идеалы

В этом параграфе мы будем изучать кольца многочленов $F[X_1 \dots X_n]$ над полем F , где n — произвольное фиксированное положительное целое число. Многочлен в $F[X_1 \dots X_n]$ будем записывать в виде $f = \sum_M c_M X^M$, где M — совокупность всех n -ок $(m_1, \dots, m_n)$ натуральных чисел и X^M — сокращение для $X_1^{m_1} X_2^{m_2} \dots X_n^{m_n}$. Степень M , обозначается $\delta(M)$, есть $\sum_{i=1}^n m_i$;

степень f есть $\max \{\delta(M) \mid c_M \neq 0\}$.

Пусть $\langle F_i: i \in I \rangle$ — индексированное семейство полей, и пусть D — ультрафильтр над I . Пусть F обозначает поле $\prod_D F_i$ и для $c \in \prod_i F_i$ пусть $\bar{c}$ обозначает c_D . Пусть R — кольцо $\prod_D (F_i[X_1 \dots X_n])$. Заметим, что R не является кольцом многочленов над F — оно даже не нётерово, — но существует каноническое отображение

$$\mu: \bar{F}[X_1 \dots X_n] \rightarrow R,$$

определенное следующим образом. Если $f = \sum_M \bar{c}_M X^M \in \bar{F}[X_1 \dots X_n]$

и $\deg f = d$, то $\mu(f) = f_D$, где $f(i) = \sum_{\delta(M) \leq d} c_M(i) X^M$.

Индексированное семейство $f = \langle f_i: i \in I \rangle$ многочленов $f_i \in F_i[X_1 \dots X_n]$ называется *ограниченным*, если существует m такое, что $\deg f_i \leq m$ для всех $i \in I$. Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку следующего утверждения:

7.1. Теорема. Функция μ является корректным вложением колец, область значений которой есть подкольцо элементов из R , представленных ограниченными семействами. Более того, для любой $f \in \bar{F}[X_1 \dots X_n]$ и любых $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \bar{F}$ имеем $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \bar{v}$, где

$$v(i) = f(i)(a_1(i), \dots, a_n(i)).$$

Если $f = \langle f_i: i \in I \rangle$ — ограниченное семейство, то пусть $\bar{f}$ обозначает единственный элемент из $\bar{F}[X_1 \dots X_n]$ такой, что $\mu(\bar{f}) = f_D$. Как следствие из 7.1 и основной теоремы получаем

7.2. Следствие. Пусть $f = \langle f_i: i \in I \rangle$, $g^{(l)} = \langle g_i^{(l)}: i \in I \rangle$, $h^{(l)} = \langle h_i^{(l)}: i \in I \rangle$ — ограниченные семейства многочленов, где

$l = 1, \dots, r$. Тогда

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^r \bar{g}^{(i)} \bar{h}^{(i)} \text{ эквивалентно } \left\{ i \in I \mid f_i = \sum_{i=1}^r g_i^{(i)} h_i^{(i)} \right\} \in D.$$

Кроме того, для любых $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ из F имеем $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{i \in I \mid f_i(a_1(i), \dots, a_n(i)) = 0\} \in D$. $\square$

Приведем еще несколько приложений.

7.3. Теорема (Робинсон [1]). Для любых целых положительных n и d существует целое положительное m такое, что для любого алгебраически замкнутого поля F и любых многочленов $f, g^{(1)}, \dots, g^{(r)}$ из $F[X_1 \dots X_n]$ степени $\leq d$, если каждый общий корень многочленов $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(r)}$ в поле F является корнем f , то f^m принадлежит $\langle g^{(1)}, \dots, g^{(r)} \rangle$ — идеалу, порожденному $g^{(1)}, \dots, g^{(r)}$.

Доказательство. Заметим, что из формулировки теоремы следует, что выбор чисел m зависит только от n и d . Теорема Гильберта о корнях, которой мы пользуемся, утверждает, что для данных $f, g^{(1)}, \dots, g^{(r)}$, удовлетворяющих предположению, существует некоторое m , а prigi зависящее от $f, g^{(1)}, \dots, g^{(r)}$, такое, что $f^m \in \langle g^{(1)}, \dots, g^{(r)} \rangle$. Предположим, что теорема неверна, тогда для каждого $i \in I = \omega$ существует алгебраически замкнутое поле F_i и многочлены $f_i, g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)} \in F_i[X_1 \dots X_n]$ степени $\leq d$ такие, что $f_i \notin \langle g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)} \rangle$, но каждый корень $g_i^{(1)} \dots g_i^{(r)} \in F_i$ является корнем f_i . (Заметим, что можно считать, что r не зависит от i , так как каждый идеал, порожденный полиномами степени $\leq d$, имеет базис мощности, не превосходящей размерности (над полем коэффициентов) векторного пространства многочленов степени $\leq d$.) Пусть D — неглавный ультрафильтр над I . Так как $\langle f_i: i \in I \rangle$ и $\langle g_i^{(l)}: i \in I \rangle$, $l = 1, \dots, r$, — ограниченные семейства, мы можем считать $\bar{f}, \bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)} \in \bar{F}[X_1 \dots X_n]$. Каждый корень $\bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)}$ в F является корнем $\bar{f}$ по следствию 7.2, потому что это верно для всех $i \in I$. Следовательно, по теореме о корнях $\bar{f}^k \in \langle \bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)} \rangle$ для некоторого $k \in \omega$. Тогда по 7.2 мы имеем $\{i \in I \mid f_i^k \in \langle g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)} \rangle\} \in D$. Но это противоречит выбору $f_i, g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)}$ и тому, что D состоит из бесконечных множеств.

Следующий результат дает границы для теоремы Гильберта о базисе и доказывается подобным образом. (Чисто алгебраическое доказательство см. у Сейденберга [1].)

7.4. Теорема. Для данных положительных целых n и d существует m такое, что для произвольного поля F любая строго возрастающая цепь идеалов в $F[X_1 \dots X_n]$, которая порождается многочленами степени $\leq d$, имеет длину $\leq m$.

Можно также использовать эти методы для получения оценок для числа квадратов, требуемых для представления положительно определенного рационального функционала над упорядоченным полем в виде суммы квадратов (см., например, Робинсон [6]).

Следующий результат требует другого способа доказательства (см. Робинсон [5]). Его впервые доказали Кёниг [1] и Херман [1], используя сложные вычислительные методы. Следующее доказательство принадлежит Робинсону [5].

7.5. Теорема. Для данных целых положительных n и d существует t такое, что для любого поля F и любых полиномов $f, g^{(1)}, \dots, g^{(r)}$ из $F[X_1 \dots X_n]$ степени $\leq d$, если $f \in \langle g^{(1)}, \dots, g^{(r)} \rangle$, то существуют полиномы $h^{(1)}, \dots, h^{(r)} \in F[X_1 \dots X_n]$ степени $\leq t$ такие, что $f = \sum_{i=1}^r h^{(i)} g^{(i)}$.

Доказательство. По стандартным соображениям линейной алгебры достаточно доказать теорему для алгебраически замкнутых полей. Допустим, что теорема неверна. Тогда для каждого $i \in I = \omega$ существует алгебраически замкнутое поле F_i и многочлены $f_i, g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)} \in F_i[X_1 \dots X_n]$ степени $\leq d$ такие, что $f_i \in \langle g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)} \rangle$, но не существует многочленов $h_i^{(1)}, \dots, h_i^{(r)}$ степени $\leq i$ таких, что $f_i = \sum_{j=1}^r h_i^{(j)} g_i^{(j)}$.

Пусть D — неглавный ультрафильтр над I . Зафиксируем $\bar{f}, \bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)} \in \bar{F}[X_1 \dots X_n]$. Пусть $G = \langle \bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)} \rangle$ — идеал, порожденный $\bar{g}^{(1)}, \dots, \bar{g}^{(r)}$ в $\bar{F}[X_1 \dots X_n]$. Если мы сможем доказать, что $\bar{f} \in G$, то все будет доказано, так как будут существовать $\bar{h}^{(1)}, \dots, \bar{h}^{(r)} \in \bar{F}[X_1 \dots X_n]$ такие, что $\bar{f} = \sum_{i=1}^r \bar{h}^{(i)} \bar{g}^{(i)}$, и в силу 7.2 мы приходим к противоречию с выбором $f_i, g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)}$. Так как случай $G = \bar{F}[X_1 \dots X_n]$ тривиальный, можно считать, что $G = Q_1 \cap \dots \cap Q_k$, где Q_j — собственные простые идеалы (Зарисский и Самюэль [1], глава IV, § 4). Итак, достаточно доказать, что $\bar{f} \in Q_j$ для $j = 1, \dots, k$. Рассмотрим фиксированное $Q_j = Q$. Изменив координаты, мы можем допустить, что $Q \subset \langle X_1, \dots, X_n \rangle$. (Если $(a_1, \dots, a_n)$ — корень $\cdot Q$ в F , то пусть $Y_v = X_v - a_v$ для $v = 1, \dots, n$.)

Пусть P обозначает $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$. По теореме Крулля о пересечениях (Зарисский и Самюэль [1], глава IV, теорема 12) достаточно доказать, что $\bar{f} \in Q + P^m$ для каждого $m \geq 0$.

Поскольку $f_i \in \langle g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(r)} \rangle$, существуют многочлены $p_i^{(1)}, \dots, p_i^{(r)}$ такие, что $f_i = \sum_{j=1}^r p_i^{(j)} g_i^{(j)}$. Пусть $p_D^{(i)}$ — класс $\langle p_i^{(i)} : i \in I \rangle$ в R .

Тогда $f_D = \sum_{i=1}^r p_D^{(i)} g_D^{(i)}$, т. е. $\mu(\bar{f}) = \sum_{i=1}^r p_D^{(i)} \mu(\bar{g}^{(i)})$. Фиксируем $m > 0$. Пусть $q_D^{(i)}$ — класс $\langle q_i^{(i)} : i \in I \rangle$, где $q_i^{(i)} = \sum_{\delta(M) \leq m} c_M(i) X^M$, если $p_i^{(i)} = \sum_M c_M(i) X^M$. Заметим, что $q_D^{(i)}$ лежит в области значений μ , скажем $q_D^{(i)} = \mu(\bar{g}^{(i)})$. Тогда

$$\mu(\bar{f}) - \sum_{i=1}^r \mu(\bar{g}^{(i)}) \mu(\bar{g}^{(i)}) = \sum_{i=1}^r (p_D^{(i)} - q_D^{(i)}) g_D^{(i)}.$$

Левая часть равенства лежит в области значений μ , поэтому правая часть лежит в $\mu(P^m)$. Мы получаем, что $\bar{f} \in Q + P^m$. $\square$

Следующий результат принадлежит Херману [1] (см. также Сейденберг [2]). Было бы интересно получить доказательство этого результата через ультрапроизведения в духе предыдущего, избежав вычислительных методов Хермана. Пока такого доказательства нет.

7.6. Теорема. Для положительных целых n и d существует t такое, что для любого идеала I кольца $F[X_1 \dots X_n]$, который имеет базис, состоящий из многочленов степени $\leq d$, если I непустой, то существуют многочлены f, g степени $\leq t$ такие, что $fg \in I$, но $f \notin I$ и $g \notin I$.

О применении методов этого параграфа и § 5 к задачам алгебраической геометрии см. Эклоф [1].

НАСЫЩЕННОСТЬ

§ 8. ω_1 -насыщенные ультрапроизведения

В §§ 5—7 мы использовали ультрапроизведения для построения алгебраических систем, которые удовлетворяют заданным множествам Σ свойств, выражимых в логике первого порядка. Теперь мы хотим изучить свойство ультрапроизведений (в отношении некоторых ультрафильтров), называемое ω_1 -насыщенностью, которое не выразимо в логике первого порядка, но является теоретико-модельным по характеру и очень полезно при изучении свойств, выражимых в логике первого порядка.

Напомним из главы 2, что если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система для языка L и X — подмножество A , то L_X обозначает язык, полученный прибавлением константных символов c_a для каждого $a \in X$, и $\mathfrak{A}_X = (\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$ является алгебраической системой для L_X , полученной интерпретацией новых константных символов c_a элементами a . Пусть $\Gamma(v)$ — множество формул $\gamma(v)$ языка L_X с одной свободной переменной v ; $\Gamma(v)$ называется *типом* в $\mathfrak{A}_X$, если для каждого конечного подмножества $\{\gamma_0(v), \dots, \gamma_m(v)\}$

из $\Gamma(v)$ существует $a \in A$ такое, что $\mathcal{A}_x \models \gamma_i[a]$ для $i = 0, \dots, m$. Мы говорим, что Γ реализуется в $\mathcal{A}_x$, если существует $a \in A$ такой, что $\mathcal{A}_x \models \gamma[a]$ для всех $\gamma(v)$ в $\Gamma(v)$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ для языка L называется ω_1 -насыщенной, если для каждого счетного подмножества X множества A каждый тип в $\mathcal{A}_x$ реализуется в $\mathcal{A}_x$. Поясним определение на двух важных примерах. Линейно упорядоченное множество $\mathcal{A}$ называется η_α -множеством (Хаусдорф [1]), если всегда, когда B_1 и B_2 — подмножества множества A мощности $< \omega_\alpha$ такие, что $B_1 < B_2$ (т. е. для любых $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$ мы имеем $b_1 < b_2$), существует $a \in A$ такое, что $B_1 < a < B_2$ (т. е. для любых $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$ имеем $b_1 < a < b_2$). В частности, η_0 -множество — это плотно упорядоченное множество без первого и последнего элемента.

8.1. Лемма. *Всякое ω_1 -насыщенное η_0 -множество является η_1 -множеством.*

Доказательство. Пусть B_1 и B_2 — счетные подмножества множества A такие, что $B_1 < B_2, B_1 \subseteq A, B_2 \subseteq A$. Пусть $X = B_1 \cup B_2$ и $\Gamma(v)$ — множество всех формул языка L_X вида

$$c_{b_1} < v < c_{b_2},$$

где $b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2$. Так как $\mathcal{A}$ — η_0 -множество, то $\Gamma(v)$ является типом в $\mathcal{A}_x$. Поэтому $\Gamma(v)$ реализуется в $\mathcal{A}_x$ некоторым $a \in A$. Очевидно, $B_1 < a < B_2$. $\square$

(Утверждение, обратное к лемме 8.1, также верно, но мы не будем рассматривать его. В § 10 мы введем более общее определение ω_α -насыщенных моделей; 8.1 имеет естественный аналог в той ситуации.)

8.2. Лемма. *Всякая бесконечная ω_1 -насыщенная алгебраическая система несчетна.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. A счетно. Пусть $\Gamma(v)$ — множество всех формул языка L_A вида

$$v \neq c_a,$$

где $a \in A$. Так как A бесконечно, то $\Gamma(v)$ — тип в $\mathcal{A}_A$ и, следовательно, реализуется в $\mathcal{A}_A$, что невозможно. $\square$

Мы покажем, что ультрапроизведения по подходящему ультрафильтру ω_1 -насыщены; для этого нам нужны новые классы ультрафильтров. Ультрафильтр D над I называется ω_1 -неполным, если существуют попарно не пересекающиеся подмножества Y_n множества I такие, что $\bigcup_{n \in \omega} Y_n = I$, но $Y_n \notin D$ для всех

$n \in \omega$. Очевидно, что ω_1 -неполный ультрафильтр всегда неглавный, так как для главных ультрафильтров существует $a \in I$ такой, что $Y \in D$ эквивалентно $a \in Y$. Обратное верно, если I счетно.

8.3. Лемма. *Каждый неглавный ультрафильтр счетного множества I ω_1 -неполный.*

Доказательство. Пусть $I = \{a_n : n \in \omega\}$, $Y_n = \{a_n\}$. Тогда $Y_n \notin D$, так как D неглавный, но $\bigcup_n Y_n = I$. $\square$

Предположение, что 8.3 истинно для множеств I любой бесконечной мощности, совместно с обычными аксиомами теории множеств (ZFC). Однако неизвестно, можно ли доказать 8.3 (в ZFC) для всех бесконечных множеств I . Известно, что если 8.3 неверно для I , то мощность I необычайно велика. Мощность наименьшего такого I является измеримым кардиналом (это обсуждается в приложении к главе 3 «Теории множеств»).

8.4. Лемма. *Для любого бесконечного множества I существует ω_1 -неполный ультрафильтр над I .*

Доказательство. Так как I бесконечно, мы можемписать $I = \bigcup_{n \in \omega} Y_n$, где Y_n попарно не пересекаются и бесконечны.

Пусть $S = \{I - Y_n : n \in \omega\}$. Тогда S обладает СКП и по следствию 1.2 может быть расширено до ультрафильтра D , который будет ω_1 -неполным по построению. $\square$

8.5. Теорема. *Пусть L — счетный язык и D — ω_1 -неполный ультрафильтр над I . Для любого семейства $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ алгебраических систем для языка L ультрапроизведение $\prod_D \mathcal{A}_i$ является ω_1 -насыщенным.*

Доказательство. Пусть X — счетное подмножество $\prod_D \mathcal{A}_i$ и $\Gamma(v)$ — тип в $(\prod_D \mathcal{A}_i)_X$, скажем $\Gamma(v) = \{\gamma_n(v) : n \in \omega\}$. (Заметим, что Γ — счетный тип, так как L — счетный язык.) Пусть $Y_n, n \in \omega$, — подмножества I такие, что $Y_n \notin D$, но $\bigcup_{n \in \omega} Y_n = I$. Так как $\Gamma(v)$ — тип в $\prod_D \mathcal{A}_i$, то для каждого $m \in \omega$ существует элемент $f_D^{(m)}$ из $\prod_D \mathcal{A}_i$ такой, что $\prod_D \mathcal{A}_i \models \gamma_n[f_D^{(m)}]$ для $n = 1, \dots, m$.

Определим $g \in \prod_I \mathcal{A}_i$ посредством $g(i) = f_D^{(m)}(i)$, если $i \in Y_m$. Докажем, что $\prod_D \mathcal{A}_i \models \gamma_m[g_D]$ для всех $m \in \omega$. По теореме 3.1 достаточно доказать, что $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \gamma_m[g(i)]\} = Z_m \in D$. Но Z_m содержит $I - \bigcup_{n=0}^{m-1} Y_n = \bigcap_{n=0}^{m-1} (I - Y_n)$ и, следовательно, лежит в D , так как $Y_n \notin D$ для всех n . $\square$

Теория T в логике первого порядка называется *модельно полной*, если для моделей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ теории T таких, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, следует, что $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. Более подробно о модельной полноте см. главу 4. Здесь мы покажем, как ультрапроизведения могут быть использованы для доказательства модельной полноты теории.

8.6. Теорема (Робинсон). *Теория вещественно замкнутых полей модельно полна.*

Доказательство. Предполагаем континуум-гипотезу (CH). Пусть $R_1 \subseteq R_2$ — вещественно замкнутые поля. Пусть

$\varphi(v_1, \dots, v_n)$ — формула в языке полей, и пусть $a_1, \dots, a_n \in R_1$ таковы, что $R_1 \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Мы хотим доказать, что $R_2 \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Мы утверждаем, что можно считать R_1 и R_2 счетными. По теореме Лёвенгейма — Скулема (см. главу 2) существует счетная элементарная подсистема R'_1 системы R_1 , содержащая $a_1, \dots, a_n$, и существует счетная элементарная подсистема R'_2 системы R_2 , содержащая R'_1 . Таким образом, мы имеем счетные вещественно замкнутые поля $R'_1 \subset R'_2$, $R'_1 \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, и нужно доказать, что $R'_2 \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Предположение доказано.

Пусть D — неглавный ультрафильтр над счетным множеством I . По теореме 4.7 существуют элементарные вложения $d(R_v): R_v \rightarrow \prod_D R_v$ для $v = 1, 2$. По 8.3 и 8.5 $\prod_D R_v$ является ω_1 -насыщенной и по 8.1 $\prod_D R_v$ — η_1 -множество (относительно единственного упорядочения вещественно замкнутого поля) для $v = 1, 2$. В силу результата Эрдеша, Гилмана и Хенриксена [1] любые два вещественно замкнутых поля мощности ω_1 являющиеся η_1 -множествами, изоморфны; на самом деле, изоморфизм счетных подполей расширяется до изоморфизма вещественно замкнутых полей. По лемме 8.2 $\text{Card}(\prod_D R_v) \geq \omega_1$. Но $\text{Card}(\prod_D R_v) \leq \text{Card}(\prod_I R_v) = 2^\omega = \omega_1$. Следовательно, $\text{Card}(\prod_D R_v) = \omega_1$ для $v = 1, 2$. Поэтому в силу приведенных выше результатов, если $c: R_1 \rightarrow R_2$ — тождественное вложение, то существует изоморфизм $\Phi: \prod_D R_1 \rightarrow \prod_D R_2$ такой, что

$$\begin{array}{ccc} \prod_D R_1 & \xrightarrow{\Phi} & \prod_D R_2 \\ d(R_1) \uparrow & & \uparrow d(R_2) \\ R_1 & \xrightarrow{c} & R_2 \end{array}$$

коммутативна. Следовательно,

$$\begin{aligned} R_1 \models \varphi[a_1, \dots, a_n] &\Leftrightarrow \prod_D R_1 \models \varphi[d(R_1)(a_1), \dots, d(R_1)(a_n)] \\ &\Leftrightarrow \prod_D R_2 \models \varphi[\Phi(d(R_1)(a_1)), \dots, \Phi(d(R_1)(a_n))] \\ &\Leftrightarrow \prod_D R_2 \models \varphi[\Phi(d(R_2)(a_1)), \dots, \Phi(d(R_2)(a_n))] \\ &\Leftrightarrow R_2 \models \varphi[a_1, \dots, a_n]. \quad \square \end{aligned}$$

(Хотя мы предположили СН в доказательстве, из общих логических соображений, которые мы здесь не приводим, следует, что результат справедлив и без этого допущения.) Воспользуемся случаем упомянуть, что 8.6 имеет важные алгебраические следствия; фактически Робинсон [9] (см. также Робинсон [6]) показал, как решение семнадцатой проблемы Гильберта можно вывести из теоремы 8.6. См. 2.3 в главе 4.

8.7. Следствие (Тарский). Теория вещественно замкнутых полей полна, т. е. любые два вещественно замкнутых поля элементарно эквивалентны.

Доказательство. Следует непосредственно из 8.6 и из того, что любое вещественно замкнутое поле содержит экземпляр вещественного замыкания поля рациональных чисел (см. теорему 6 из 1.7 в главе 4).

Подобным способом, используя известную теорему Штейнница о том, что любые два алгебраически замкнутых поля одинаковой характеристики и одной и той же несчетной мощности изоморфны, можно доказать следующий результат:

8.8. Теорема (Тарский — Робинсон). Пусть p — либо ноль, либо простое число. Теория алгебраически замкнутых полей характеристики p полна и модельно полна.

Континуум-гипотеза не нужна в доказательстве 8.8 из-за следующего результата (см. Белл и Сломсон [1], с. 130).

8.9. Теорема. Если $\langle A_i: i \in I \rangle$ — семейство бесконечных множеств и D — произвольный ω_1 -неполный ультрафильтр над I , то мощность $\prod_D A_i$ не меньше 2^ω .

Мы заканчиваем изложение интересных приложений методов этого параграфа и § 5. Следующее утверждение является частным случаем теоремы Акса [1].

8.10. Теорема. Пусть F — алгебраически замкнутое поле и пусть $\Psi: F^n \rightarrow F^m$ — полиномиальное отображение, т. е. $\Psi(x_1, \dots, x_n) = (\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_1, \dots, x_n))$, где $\psi_1, \dots, \psi_m$ — элементы $F[X_1, \dots, X_n]$. Если Ψ — одно-однозначное отображение, то Ψ — отображение на.

Доказательство. При фиксированном n и фиксированных степенях многочленов $\psi_1, \dots, \psi_m$ теорема выражается формулой логики первого порядка в языке полей. Следовательно, по теореме 8.8 достаточно доказать теорему для алгебраически замкнутых полей различных характеристик. Для простой характеристики p легко убедиться в справедливости теоремы простым подсчетом для $\bar{F}_p$, объединения всех конечных полей характеристики p . По следствию 3.2 теорема верна для $\prod_D \bar{F}_p$, где D — неглавный ультрафильтр над множеством P простых чисел, и по теореме 5.3 $\prod_D \bar{F}_p$ имеет характеристику ноль. $\square$

§ 9. Ультрапроизведения нормированных полей

Важнейшим применением ультрапроизведений в алгебре явились работы Акса и Кочена [1] — [3] и Ершова [1] о гипотезе Артина. Размер этой главы ограничивает нас, и мы вынуждены кратко показать роль ультрапроизведений в доказательстве. Читатель, у которого наше введение пробудит интерес, мо-

жет обратиться к оригиналам либо к прекрасным изложениям, например Чэн и Кейслер [1], Кочен [2] и Робинсон [4]. См. также 2.4 главы 4.

Гипотеза Артина утверждала, что следующее свойство верно для n и d , когда $F = \mathbb{Q}_p$, полю p -адических чисел.

($A_{n,d}$) Каждый однородный многочлен $f \in F[X_1 \dots X_n]$ степени d такой, что $n > d^2$, имеет нетривиальный корень в F .

Это предположение наводит на сходство между $\mathbb{Q}_p$ и полем $\mathbb{Z}_p((t))$ формальных степенных рядов над p -элементным полем $\mathbb{Z}_p$. Ленг доказал, что $\mathbb{Z}_p((t))$ удовлетворяет свойству $A_{n,d}$ для всех n и d . Тер-жанян [1] показал, что гипотеза Артина в общем случае неверна. Однако Акс, Кочен и Ершов показали, что имеет место

9.1. Теорема. Для любых положительных целых n, d существует конечное множество простых чисел $P_0(n, d)$ таких, что для каждого $p \notin P_0(n, d)$ $A_{n,d}$ выполняется, когда $F = \mathbb{Q}_p$.

Сердцевинной доказательству теоремы 9.1 является следующий результат, который к тому же дает точную формулировку индуктивной аналогии между $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Z}_p((t))$:

9.2. Теорема. Для любого неглавного ультрафильтра D над P , множеством всех простых чисел, ультрапроизведения $\prod_D \mathbb{Q}_p$ и $\prod_D \mathbb{Z}_p((t))$ являются изоморфными полями.

Мы оставляем читателю очевидное доказательство 9.1 из 9.2. (Указание. Воспользуйтесь следствиями 3.2 и 1.5, результатом Ленга и тем, что для фиксированных n и d свойство $A_{n,d}$ выражается в логике первого порядка.)

Как и в случае теорем 8.6 и 8.8, теорема 9.2 доказывается использованием алгебраических свойств ω_1 -насыщенных ультрапроизведений. Мы не приводим доказательства из-за его сложности, но укажем на ключевую роль ω_1 -насыщенности. Фактически Акс и Кочен доказали, что $\prod_D \mathbb{Q}_p$ и $\prod_D \mathbb{Z}_p((t))$ изоморфны, как нормированные поля. Определим нормированное поле как алгебраическую систему

$$F = \langle F, +, \cdot, 0, 1, A, \leq, || \rangle,$$

где $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ — поле; $\langle A, \cdot, 1, \leq \rangle$ — упорядоченная абелева группа; $||: F \setminus \{0\} \rightarrow A$ сюръективно и является нормированием ($|xy| = |x| \cdot |y|$, $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$; $|x| = x$ для всех $x \in A$). F называется ω -псевдополным, если для любой последовательности $\{a_n \mid n \in \omega\}$ элементов F таких, что

$$(*) \quad |a_m - a_n| = |a_{n+1} - a_n| \quad \text{для } n < m < \omega,$$

существует $a \in F$ такой, что

$$|a - a_n| = |a_{n+1} - a_n|, \quad n \in \omega.$$

Основной результат тогда формулируется так:

9.3. Теорема. Если F — ω_1 -насыщенное нормированное поле, то F является ω -псевдополным.

Доказательство. Если $X = \{a_n \mid n \in \omega\}$ — последовательность из F , удовлетворяющая условию (*), — такая последовательность называется ω -последовательностью Коши, — то пусть $\Gamma(v)$ — множество всех формул вида

$$\gamma_n(v) \Leftrightarrow |v - a_n| = |a_{n+1} - a_n|, \quad n \in \omega.$$

$\Gamma(v)$ — подмножество языка L_X , где L — язык нормированных полей. Заметим, что $\Gamma(v)$ является типом, так как для любого $m \in \omega$ $F_X \models \gamma_n[a_{m+1}]$ для $n = 0, \dots, m$. Поэтому существует $a \in F$ такой, что при всех $n \in \omega$

$$F_X \models \gamma_n[a].$$

(Говорят, что a есть псевдопредел X .) $\square$

§ 10. Насыщенные модели

Коротко остановимся на определении κ -насыщенных и насыщенных моделей, которые являются обобщением ω_1 -насыщенных моделей, и сформулируем некоторые важные факты об этих моделях. Относительно более подробного изложения с доказательствами см. Чэн и Кейслер [1], Чэн [2] или Белл и Сломсон [1].

Пусть κ — бесконечный кардинал. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ для языка L называется κ -насыщенной, если для каждого подмножества X множества A мощности $< \kappa$ каждый тип в $\mathcal{A}_X$ реализуется в $\mathcal{A}_X$. $\mathcal{A}$ называется насыщенной, если $\mathcal{A}$ κ -насыщена, где κ — мощность A . Как и в § 8, может быть доказана

10.1. Лемма. (i) Мощность бесконечных κ -насыщенных алгебраических систем не меньше κ .

(ii) Если $\mathcal{A}$ — η_0 -множество, которое является ω_α -насыщенным, то $\mathcal{A}$ является η_α -множеством.

Алгебраические системы, которые являются κ -насыщенными, могут быть получены как ультрапроизведения, хотя доказать это более сложно, чем теореме 8.5. Следующая теорема была впервые доказана Кейслером [1] с использованием GCH и Кюненом [1] без GCH.

10.2. Теорема. Пусть L — язык мощности $\leq \kappa$, и пусть I — множество мощности κ . Тогда существует ультрафильтр D над I такой, что для любого семейства $\langle \mathcal{A}_i: i \in I \rangle$ алгебраических систем для языка L ультрапроизведение $\prod_D \mathcal{A}_i$ является κ^+ -насыщенной алгебраической системой. (Ультрафильтры со свойством, сформулированным в предыдущей теореме, называются κ^+ -хорошими ультрафильтрами и были введены Кейслером

[1].) Как следствие получаем существование насыщенных моделей. (Предположение GCH существенно.)

10.3. Следствие. Пусть κ — кардинал такой, что $2^\kappa = \kappa^+$. Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система для языка мощности $\leq \kappa$ (где L имеет мощность $\leq \kappa$), то существует элементарное расширение $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ мощности κ^+ , которое насыщено.

Доказательство. Пусть I и D таковы, как в теореме 10.2. Тогда $\mathfrak{B} = \text{Pr} \mathfrak{A}$ является κ^+ -насыщенной системой. По теореме 4.7 $\mathfrak{B}$ — элементарное расширение $\mathfrak{A}$. Кроме того, $\kappa^+ \leq \text{Card}(B) \leq 2^\kappa$ по лемме 10.1 и определению ультрапроизведения, так что, по предположению, $\text{Card}(B) = \kappa^+$ и, следовательно, $\mathfrak{B}$ насыщена. $\square$

Основное свойство насыщенных моделей, найденное Воотом (см. Морли и Воот [1]), следующее:

10.4. Теорема. Элементарно эквивалентные насыщенные модели одной и той же мощности изоморфны.

Приводимое ниже следствие непосредственно получается из 10.2 и 10.4 и было доказано прямым способом без GCH Шеломом [1].

10.5. Следствие (GCH). Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы для одного языка. Следующие утверждения равносильны:

- (1) $\mathfrak{A}$ элементарно эквивалентна $\mathfrak{B}$;
- (2) существует ультрафильтр D над I такой, что $\text{Pr} \mathfrak{A}$ изоморфна $\text{Pr} \mathfrak{B}$.

Таким образом, мы видим, что элементарная эквивалентность есть алгебраическое понятие.

ЛИТЕРАТУРА

- Акс (Ax J.)
1. The elementary theory of finite fields. — Ann. Math., 1968, 88, p. 239—271.
- Акс и Кочен (Ax J., Kochen S.)
1. Diophantine problems over local fields, I. — Amer. J. Math., 1965, 87, p. 605—630.
 2. Diophantine problems over local fields, II: A complete sets of axioms for p -adic number theory. — Amer. J. Math., 1965, 87, p. 631—648.
 3. Diophantine problems over local fields, III: 'Decidable fields. — Ann. Math., 1966, 83, p. 437—456.
- Амицур (Amitsur S.)
1. Generalized polynomial identities and pivotal monomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114, p. 210—226.
 2. Rational identities and applications to algebra and geometry. — J. Algebra, 1966, 3, p. 304—359.
 3. Prime rings having polynomial identities with arbitrary coefficients. — Proc. London Math. Soc. III, 1967, 17, p. 470—486.
- Баксич (Bacsich P. D.)
1. Cofinal simplicity and algebraic closedness. — Algebra Universalis, 1972, 2, p. 354—360.

- Белл и Сломсон (Bell J. L., Slomson A. B.)
1. Models and Ultraproducts, an introduction. — Amsterdam: North-Holland, 1969.
- Гретцер (Grätzer G.)
1. Universal Algebra. — N. Y.: Van Nostrand, 1968.
- Ершов Ю. Л.
1. Об элементарной теории максимальных нормированных полей. — ДАН СССР, 1965, 165, с. 1390—1393.
- Зарисский и Самюэль (Zariski O., Samuel P.)
1. Commutative Algebra. — N. Y.: Van Nostrand, 1958. [Русский перевод: Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра, т. 1—2. — М.: ИЛ, 1963.]
- Кегел и Верфриц (Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.)
1. Locally Finite Groups. — Amsterdam: North-Holland, 1973.
- Кейслер (Keisler H. J.)
1. Good ideals in fields of sets. — Ann. Math., 1964, 79, p. 338—359.
 2. A survey of ultraproducts. — In: Logic, Methodology and Philosophy of Science/Ed. Y. Bar-Hillel. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 112—126.
- Кёниг (König J.)
1. Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grossen. — Leipzig: Teubner, 1903.
- Кочен (Kochen S.)
1. Ultraproducts in the theory of models. — Ann. Math., Ser. 2, 1961, 74, p. 221—261.
 2. The model theory of local fields. — In: Logic Conference Kiel 1974. Berlin: Springer, 1975, p. 384—425.
- Кюнел (Kunen K.)
1. Ultrafilters and independent sets. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 172, p. 299—306.
- Ленг (Lang S.)
1. Algebra. — Revised printing. — Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1971. [Русский перевод: Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.]
- Лось (Łoś J.)
1. Quelques remarques, théorems and problèmes sur les classes définissables d'algèbres. — In: Mathematical Interpretation of Formal Systems. Amsterdam: North-Holland, 1955, p. 98—113.
- Мальцев А. И.
1. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. — Матем. сб., 1940, 8, с. 405—422.
- Морли и Воот (Morley M., Vaught R. L.)
1. Homogeneous universal models. — Math. Scand., 1962, 11, p. 37—57.
- Нейман (Neumann B. H.)
1. A note on algebraically closed groups. — J. London Math. Soc., 1952, 22, p. 247—249.
- Робинсон (Robinson A.)
1. Théorie Métamathématique des Ideaux. — Paris: Louvain, 1955.
 2. On ordered fields and definite functions. — Math. Ann., 1955, 130, p. 257—271.
 3. A note on embedding problems. — Fundam. math., 1962, 50, p. 455—461.
 4. Problems and methods of model theory. — In: Aspects of Mathematical Logic, C. I. M. E. 1968, III Ciclo. Rome: Edizioni Cremonese, 1969.
 5. О границах в теории полиномиальных идеалов. — В кн.: Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1973, с. 245—252.
 6. Model theory as a framework for algebra. — In: Studies in Model Theory/Ed. M. Norley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973, p. 134—157.

- Саббах (Sabbagh G.)
1. How not to characterize groups of fields. — J. London Math. Soc. (2), 1969, 1, p. 369—370.
- Сейденберг (Seidenberg A.)
1. On the length of a Hilbert ascending chain. — Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 29, p. 443—450.
2. Constructions in algebra. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 197, p. 273—313.
- Тержанян (Terjanian G.)
1. Un contre-exemple à une conjecture d'Artin. — C. r. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 1966, 262, p. 612.
- Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Grundzüge der Mengenlehre. — Leipzig, 1914. [Русский перевод: Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: Л.: ОНТИ, 1937.]
- Херман (Hermann G.)
1. Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale. — Math. Ann., 1926, 95, S. 736—788.
- Херстейн (Herstein I. W.)
1. Noncommutative Rings. — Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1968.
- Хиршелман (Hirschelmann A.)
1. An application of ultra-products to prime rings with polynomial identities. — In: Conference in Mathematical Logic — London'70. Berlin: Springer, 1972, p. 145—148.
- Чэн (Chang C. C.)
1. Ultraproducts and other methods of constructing models. — In: Sets, Models and Recursion Theory/Ed. J. N. Crossley. Amsterdam: North-Holland, 1967, p. 85—121.
2. What's so special about saturated models. — In: Studies in Model Theory/Ed. M. Morley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973, p. 59—65.
- Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)
1. Model Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Русский перевод: Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.]
- Шелах (Shelah S.)
1. Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers. — Israel J. Math., 1971, 10, p. 224—233.
- Эклоф (Eklof P.)
1. Resolution of singularities in prime characteristic for almost all primes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 146, p. 429—438.
- Эрдёш, Гиллман и Хенриксен (Erdős P., Gillman L., Henriksen M.)
1. An isomorphism theorem for real closed fields. — Ann. Math., Ser. 2, 1955, 61, p. 542—554.

МОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА

Ангус Макинтайр

СОДЕРЖАНИЕ

Пролог	141
Введение	141
§ 1. Основные понятия и критерий Робинсона	143
§ 2. Приложения: теорема о корнях, 17-я проблема Гильберта, гипотеза Артина и интегрально определенные функции	147
§ 3. Общая теория: модельные пополнения, экзистенциально замкнутые системы и форсинг	156
§ 4. Приложения. Дифференциально замкнутые поля и простые модельные расширения	165
§ 5. Отрицательные приложения: группы, тела и теории чисел	169
§ 6. Пучки и модельная полнота	174
Литература	176

Пролог

Абрахам Робинсон создал теорию модельных пополнений и указал путь ее развития на последующие 25 лет. В этом обзоре мне хотелось отразить развитие этого направления, подчеркивая его связи с алгеброй. Это для меня приятная возможность почтить память уникального математика и хорошего друга.

Введение

Я начну с некоторых исторических и методологических замечаний.

Основные идеи по этой проблеме можно обнаружить в литературе периода 1950—1957 гг. С одной стороны, Робинсон [1], [3] рассматривал модельную полноту для специфических алгебраических примеров. С другой стороны, Тарский и Ваот [1] получили некоторые фундаментальные результаты об элементарных расширениях (которые тогда назывались арифметическими расширениями). Я не знаю появления этих идей в более ранних работах, хотя очевидна их связь с теоремами Лёвенгейма — Скулема и Тарского об элиминации кванторов для вещественно замкнутых полей.

Почему естественно изучать модельные пополнения?

Я думаю, что некоторые справедливо скажут, что элементарная эквивалентность — более фундаментальное понятие в теории моделей. Она является аналогом понятия изоморфизма в общей алгебре. (Один из поразительных результатов этой теории объясняет элементарную эквивалентность в терминах ультрапроизведений (Шелх [1]).) Используя лишь элементарную эквивалентность и «дуальное» понятие полной теории, можно сформулировать и доказать довольно значительное число основных результатов, таких, как теорема компактности, слабая теорема Лёвенгейма — Скулема и различные важные приложения (например, используя ультрапроизведения, как это сделано в главе 3). Но уже в случае теоремы Лёвенгейма — Скулема о спуске пристальный анализ показывает, что доказан более сильный результат, и оправдывает введение понятий элементарной подсистемы и элементарного расширения.

С другой стороны, теория моделей несколько старше, чем теория категорий, и была определено более тонкой в 1950 г., однако и это направление извлекло раньше пользу из теоретико-категорного подхода. Это неизбежно привело к элементарным отображениям, частным случаем которых являются элементарные расширения. В теоретико-категорных терминах можно наилучшим образом объяснить введение элементарных отображений. Основная теорема Тарского (Тарский и Ваутер [1]) утверждает, что для логики первого порядка L категория L -систем с элементарными отображениями обладает прямыми пределами и это верно для подкатегории моделей фиксированной L -теории. Другая желательная особенность этой категории и введенной выше подкатегории — это свойство амальгамируемости (см. Йонсон [1]). Все они стали уместными при получении более глубоких результатов в период с 1955 г. по настоящее время. Эти идеи проявляются при изучении однородно универсальных моделей (см., например, Чэн и Кейслер [1]), насыщенных моделей (Чэн и Кейслер [1]), теории Морли (Морли [1]), автоморфизмов и неразличимости (Гайфман [1]). Систематическое применение скулемовских функций (например, Йенсен [1]) также связано с этими явлениями.

Ключевая идея и наиболее работающее понятие у Робинсона «относительная алгебраическая замкнутость v » происходит из классической теории полей. (Строго говоря, наивное обобщение указанного выше понятия приводит к более слабому понятию, чем $<$, так как в случае теории полей мы имеем дело только с полиномами от одной переменной. Но в интересных случаях оба они совпадают.) Робинсон выделил из этого источника понятие модельного пополнения теории и доказал, что модельное пополнение единственно, если оно существует. Каноническим

примером стала теория алгебраически замкнутых полей как модельное пополнение теории полей. Систематическое применение идей Робинсона привело к приятным приложениям теории моделей: к 17-й проблеме Гильберта (Робинсон [2]) и к гипотезе Артина (Акс и Кочен [1], Ершов [1]). Работа Акса [1] о конечных полях также принадлежит к этому направлению развития. В другом направлении анализ Робинсона привел к замечательному прогрессу в изучении дифференциальных полей (Робинсон [4], Сакс [1]). (Это, однако, не говорит об отсутствии приложений модельной полноты к проблемам дифференциальных полей.)

Позже в 1969 г. Робинсон дал общей теории новые силы, когда связал ее с форсингом (Барвайс и Робинсон [1], Робинсон [7]). На этом пути возникло много новых понятий и конструкций для тонкого анализа прежде неподдающихся алгебраических примеров. Были введены новые понятия полноты и установлены некоторые удивительные связи с категоричностью (Сараццо [1]). Понятие экзистенциально замкнутой системы было избавлено от мрака (Эклоф и Саббах [1]) и позволило создать удовлетворительную теорию.

Новые приложения благоразумнее назвать отрицательными результатами в противоположность работам о 17-й проблеме Гильберта и гипотезе Артина, так как они обычно показывают, что некоторые естественные системы крайне сложно устроены (Макинтайр [3], Хиршфелд и Уилер [1]). Но, несомненно, алгебра и методы Робинсона хорошо работают вместе.

Окончательное развитие обсуждаемых здесь вопросов заключается в установлении связи между пучками и результатами о модельных пополнениях в теории колец. Здесь положительные результаты Липшица и Сараццо [1] и Карсона [1] вызвали теорему переноса (Макинтайр [5], Вайспфенинг [2]). Отсюда можно получить аналог 17-й проблемы Гильберта для вещественных регулярных колец.

Основная из опущенных из-за недостатка места тема — это изучение иерархии экзистенциально замкнутых систем и окончательное определение генерических систем, не применяющее форсинга (Симмонс [2], [4], Энгар [2]). Это работа важна, но не имеет пока контактов с алгеброй.

§ 1. Основные понятия и критерий Робинсона

1.1. За основными понятиями логики первого порядка можно обратиться к главам 1 и 2. Материал по ультрапроизведениям можно найти в главе 3. Будут использоваться не только формальные, но и неформальные обозначения, так, например, не будет делаться различие в обозначениях для систем и их основных

множеств. Буква m будет обозначать конечный набор элементов $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$; если функция f определена на всех элементах m_i , то $f(m)$ будет обозначать набор $\langle f(m_1), \dots, f(m_k) \rangle$. Если c — L-константа, то интерпретацию константы c в модели $\mathcal{M}$ обозначим через $c^{\mathcal{M}}$.

1.2. Пусть L — язык логики первого порядка. Свяжем с L категорию $\mathcal{C}_L$ L-систем. Объектами $\mathcal{C}_L$ будут L-системы. Морфизмами в $\mathcal{C}_L$ будут мономорфизмы L-систем. Отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ будет морфизмом, если и только если:

(i) для любых константных символов языка L выполнено $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$;

(ii) для любой атомной L-формулы φ и набора m элементов из $\mathcal{M}$

(*) $\mathcal{M} \models \varphi(m)$, если и только если $\mathcal{N} \models \varphi(f(m))$.

Таким образом мы определим категорию $\mathcal{C}_L$. Очевидно, что $\mathcal{C}_L$ имеет прямые пределы.

Любой L-теории T мы можем сопоставить подкатегорию $\mathcal{C}_T$, объектами которой являются модели теории T (такие классы называются EC_Δ -классами). $\mathcal{C}_T$ может не иметь прямых пределов. Простой пример теории с таким свойством дают линейные порядки с первым элементом. В действительности по теореме Чэна — Лося — Сушко (Робинсон [6]) категория $\mathcal{C}_T$ имеет прямые пределы, если и только если $T = \forall \exists$ -теория.

Морфизм f называется элементарным, если условие (*) выполняется для всех формул φ . Пусть $\mathcal{C}_L^<$ — категория, состоящая из L-систем с элементарными отображениями, а $\mathcal{C}_T^<$ — соответствующая категория моделей теории T . Основное свойство этой категории состоит в следующем:

Теорема 1 (Тарский и Воот [1]). Категория $\mathcal{C}_L^<$ содержит прямые пределы.

Следствие. Категория $\mathcal{C}_T^<$ содержит прямые пределы.

В простых терминах объединение элементарной цепи является элементарным расширением каждого элемента этой цепи.

З а м е ч а н и е. Предшествующие идеи и результаты тщательно изучены в довольно широком окружении. Например, определения, примеры и результаты все справедливы для $L_{\infty\omega}$. Понятие получает хороший смысл в случае $L(Q)$, где Q — мощный квантор (см. 5.5 главы 1), но результат Тарского проходит лишь для длинных цепей. Вообще нужны логики с запирающими или непрерывными кванторами (Маковский [1]). Доказательство Тарского не имеет никакого отношения к компактности.

1.3. Мы получим сейчас другое теоретико-категорное свойство для $\preceq$, которое зависит от компактности. Доказательство

теоремы 2 представляет собой простое приложение теоремы компактности (см. 2.4 главы 1); его можно найти у Симмонса [1].

Теорема 2. Пусть L — язык первого порядка, а $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ — L-системы. Если даны морфизмы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow & & \\ \mathcal{N} & & \end{array}$$

в категории $\mathcal{C}_L^<$, то можно дополнить диаграмму до коммутативного квадрата в $\mathcal{C}_L^<$.

Заметим, что не утверждается, что существует коуниверсальный квадрат. Но можно улучшить немного теорему 2, как это сделали Баксич и Фишер в 1971 г. А именно, в дополнение к приведенной диаграмме мы можем утверждать, что $f(m) \neq g(n)$, если $\mathcal{A} \models m = n$. См. Баксич и Роулэнд-Хьюз [1].

1.4. Существует интересная характеристика элементарных отображений в терминах ультрапроизведений. Ее можно получить из теоремы Кейслера — Шелаха (Чэн и Кейслер [1], Шелах [1]).

Теорема 3. Отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ элементарное, если и только если существует множество индексов I , ультрафильтр D на I и изоморфизм $g: \mathcal{M}^I/D \rightarrow \mathcal{N}^I/D$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \mathcal{M}^I/D & \xrightarrow{g} & \mathcal{N}^I/D \end{array}$$

коммутативна, где Δ — естественное диагональное вложение.

1.5. Прежде чем перейти к понятию модельной полноты, введем некоторые ослабления для $\preceq$.

О п р е д е л е н и е. Отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ называется V_n -отображением и обозначается

$$\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N},$$

если условие (*) из 1.2 выполнено для всех формул φ в пренексной нормальной форме, у которых имеется менее n чередований кванторов и кванторная приставка начинается с $\forall$.

Таким образом, $\leq_0$ соответствует *изоморфной вложимости*, а $\leq_1$ — естественному обобщению *относительной алгебраической замкнутости в*. Очевидно, что f будет элементарным, если оно является $\forall_n$ -отображением для всех n . Приведем теперь основной результат.

Лемма 4 (Чэн и Кейслер [1]). *Отображение $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ является $\forall_1$ -отображением, если и только если существует изоморфное вложение $g: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}^*$ такое, что $g \circ f$ — элементарное отображение.*

Доказательство проводится стандартным образом с использованием компактности.

Модель $\mathfrak{M}^*$ можно взять как ультрапроизведение модели $\mathfrak{M}$, а в качестве $g \circ f$ можно взять диагональное вложение.

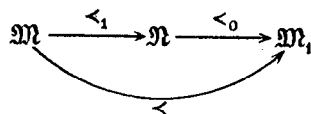
1.6. Определение. Теория T *модельно полна*, если и только если любое вложение ($\forall_0$ -отображение) в $\mathcal{E}_T$ является элементарным.

Следующая теорема приспособлена для приложений:

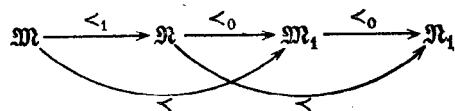
Теорема 5 (критерий Робинсона). *Теория T модельно полна, если и только если любое вложение в $\mathcal{E}_T$ будет $\forall_1$ -отображением.*

Доказательство. Приведем только главную часть доказательства, так как оно использует метод альтернативных цепей, который является основным в общей теории.

Доказательство для $(\Rightarrow)$ очевидно. Докажем следование в другую сторону $(\Leftarrow)$. Пусть $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ — вложение в $\mathcal{E}_T$, тогда оно является $\forall_1$ -вложением. По лемме 4 построим коммутативный квадрат



Ясно, что $\mathfrak{M}_1 \models T$, поэтому сделаем то же построение для пары $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}_1$ и получим



Повторяя эту конструкцию, мы получим $\mathfrak{M}_k, \mathfrak{N}_k$ такие, что

$$\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{N}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{M}_k \rightarrow \mathfrak{N}_k \rightarrow \dots,$$

где диаграммы коммутативны, а отображения $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_1, \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_1, \mathfrak{M}_k \rightarrow \mathfrak{M}_{k+1}, \mathfrak{N}_k \rightarrow \mathfrak{N}_{k+1}$ элементарны. Возьмем $\lim \mathfrak{M}_k = \lim \mathfrak{N}_k = \mathfrak{A}$. По теореме Тарского естественные вложения $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{A}$

будут элементарными, а поэтому и $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ будет элементарным и теория T модельно полна. $\square$

1.7. В качестве первого приложения модельной полноты можно получить условие полноты, используя существование простой модели, которое доказывается очевидным образом.

Теорема 6 (условие существования простой модели). *Если теория T модельно полна и существует модель $\mathfrak{M}$ теории T , которая вкладывается во все модели теории T , то теория T полна.*

Пример. T — теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0 и $\mathfrak{M}$ — поле вещественных алгебраических чисел. В теореме 7 будет показано, что T модельно полна, а поэтому T полна.

1.8. Критерий Робинсона имеет, как будет замечено позднее, большое практическое значение. Нетрудно заметить, что для выполнения условия критерия достаточно показать вложимость для формул $\forall y A(v, y)$, где A — конъюнкция атомных формул и их отрицаний, т. е. если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ — модели исследуемой теории и $\mathfrak{M} \models \forall y A(m, y)$, то $\mathfrak{N} \models \forall y A(m, y)$, где m — набор элементов из $\mathfrak{M}$.

§ 2. Приложения: теорема о корнях,

17-я проблема Гильберта,

гипотеза Артина и интегрально определенные функции

2.1. Я буду следовать по возможности историческому развитию этого направления. Основные приложения получаются из материала § 1 и были выполнены в период с 1950 по 1970 г. После 1970 г. наступил новый период развития теории, приложения которой (будут даны в § 5) имеют другой характер.

В этом параграфе будут рассмотрены приложения к теории полей. Робинсон является вдохновителем этих приложений. Что нужно знать для приложения критерия Робинсона?

Пусть T — теория полей. Мы знаем, что $\mathfrak{M} <_1 \mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Используя упомянутое ранее упрощение, нам достаточно показать: если Σ — конечная система равенств и неравенств над $\mathfrak{M}$ (т. е. с параметрами из M) и Σ имеет решение в $\mathfrak{N}$, то Σ имеет решение в $\mathfrak{M}$.

В теории полей неравенства можно заменить равенствами, так как в них верна следующая эквивалентность:

$$a \neq 0 \Leftrightarrow \exists y (a \cdot y = 1).$$

Таким образом, можно предполагать, что Σ — система равенств. Но тогда наши условия на Σ начинают выглядеть подобно теореме о корнях, и Робинсон нашел и продолжил эту аналогию.

Слабый вариант теоремы Гильберта о корнях (Ленг [2]) утверждает:

Если $\mathfrak{M}$ — алгебраически замкнутое поле и Σ имеет решение в $\mathfrak{M}$, то Σ имеет решение в $\mathfrak{M}$.

Но это как раз необходимое условие для приложения критерия Робинсона. Итак, из теоремы о корнях мы можем получить модельную полноту алгебраически замкнутых полей. Этот результат был впервые получен Тарским [1] при доказательстве элиминации кванторов. Тарский не применял теоремы о корнях.

Обратно, мы можем всегда вывести теорему о корнях для любой модельно полной теории полей. Так, в частности, теорема о корнях, приведенная выше для алгебраически замкнутых полей, следует из исследования Тарского.

Робинсон [1] также нашел доказательство модельной полноты, не зависящее от теоремы о корнях, и этот способ доказательства стал очень популярным. Его доказательство проводится таким образом. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — алгебраически замкнутые поля и не выполнено $\mathfrak{M} <_1 \mathfrak{N}$. Без ограничения общности (так как мы имеем дело с нарушением условия $\forall_1$ -расширения) можно считать, что $\mathfrak{N}$ имеет конечный ранг трансцендентности над $\mathfrak{M}$, а тогда без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{N}$ имеет ранг трансцендентности, равный 1 над $\mathfrak{M}$. Пусть $\{t\}$ — базис трансцендентности для $\mathfrak{N}$ над $\mathfrak{M}$. По предположению, что не выполнено $\mathfrak{M} <_1 \mathfrak{N}$, существует бескванторная формула φ и набор m из $\mathfrak{M}$ такие, что $\mathfrak{N} \models \exists v \varphi(v, m)$, но $\mathfrak{M} \not\models \exists v \varphi(v, m)$.

Робинсон заметил следующий основной факт:

(S) Диаграмма $(\mathfrak{M}(t)) \cup$ теория алгебраически замкнутых полей $\models \exists v \varphi(v, m)$.

Утверждение (S) следует из теоремы Штейница (Джекобсон [1]), которая утверждает, что существует простое алгебраически замкнутое поле, содержащее $\mathfrak{M}(t)$, а именно $\mathfrak{N}$. Но из (S) по теореме компактности легко вывести, что

$$\mathfrak{M} \models \exists v \varphi(v, m).$$

Полное доказательство см. у Робинсона [6].

Итак, мы заметили, что из теоремы Штейница выводится теорема о корнях.

Суммируя эту часть параграфа, мы можем сказать, что доказана

Теорема 7. Теория алгебраически замкнутых полей модельно полна.

Мы привели лишь один подход, подчеркивая связь с теоремой о корнях. Существуют и другие доказательства. Можно

применить теорему Штейница и теорему 3 или же теорему Штейница и теорему Линдстрёма (см. § 3).

2.2. Робинсон [2] применил свой метод к вещественно замкнутым полям. В этом случае нет хорошо известной теоремы о корнях. Однако, применяя метод Тарского элиминации кванторов, можно получить следующее утверждение:

Теорема 8. Теория вещественно замкнутых упорядоченных полей модельно полна.

Таким образом, можно вывести теорему о корнях, но, кажется, она не имеет особой важности. Доказательство элиминации кванторов можно найти у Тарского [1] или лучше у Кочена [2].

Робинсон доказал модельную полноту, применяя два факта, а именно:

I. Существует простое вещественно замкнутое расширение любого упорядоченного поля.

II. Если K — вещественно замкнутое поле, то $K(x)$ определяется как упорядоченное поле посредством сечения x , сделанного в K .

Его доказательство аналогично доказательству для алгебраически замкнутых полей. (В конце нужно применить тривиальный факт, что упорядоченные поля плотно упорядочены без конечных элементов.)

Доказательство Робинсона не дает прямо элиминации кванторов. В дополнение к его утверждению нужно применить его теорему (приведенную в § 3) о том, что модельное пополнение универсальной теории допускает элиминацию кванторов.

Более позднее доказательство Кочена [1] применяет метод ультрапроизведений. По существу рассматриваются ω_1 -насыщенные вещественно замкнутые поля и доказывается теорема об изоморфизме, из которой следует модельная полнота. Это доказательство основывается на тех же фактах, которые использовал Робинсон. Отсюда можно получить также элиминацию кванторов, применяя исследования Шенфилда [1] или Блюма [1].

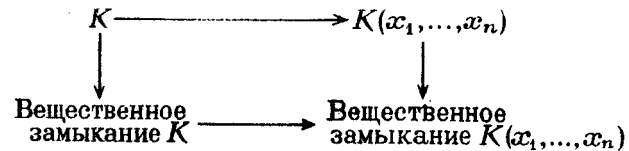
(Ясно, что эти методы в некотором смысле эквивалентны, это очевидно для классических алгебраических примеров. Но я хотел бы отметить, что существуют поучительные примеры (Робинсон [5], Ершов [2]), где метод Кочена кажется легче, чем метод Робинсона, и наоборот.)

2.3. 17-я проблема Гильберта. Перейдем теперь к подлинным приложениям. Проблема состояла в следующем: дана положительно определенная функция от переменных $x_1, \dots, x_n$ над $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Будет ли она всегда суммой квадратов рациональных функций?

Эта проблема была положительно решена Артином в 1927 г (Артин и Шрейер [1], Артин [1]). Для этого они создали теорию вещественно замкнутых полей и доказали основной результат о существовании и единственности вещественного замыкания. Главная идея состояла в обобщении теоремы Штурма (Джекобсон [1]). Кажется, не существует исследования, будь то в логике или в алгебре, которое избегало бы применять теорему Штурма. (Попытка сделать это привела к серьезным ошибкам в обоих направлениях.) Конечно, Коэн [2] получил точное доказательство, не использующее теоремы Штурма, но он применял вместо нее так называемое свойство перемены знака. Но неизвестен способ, как непосредственно получить из результата Коэна теоретические факты, необходимые для 17-й проблемы Гильберта. (Существовала обманчивая возможность заполнить существующий пробел применением результатов типа Морли — Шелаха о простых модельных расширениях, но кажется, что для проверки посылок таких теорем необходима теорема Штурма.)

Поэтому примем основные факты о существовании вещественного замыкания. Логическое доказательство будет короче и яснее любого доказательства, пренебрегающего применением логики. (Заслуживает внимания то, что новый алгебраический учебник Джекобсона [2] использует логический подход к вещественно замкнутым полям.)

Теперь я приведу решение Робинсона 17-й проблемы Гильберта. Пусть K — упорядоченное поле с единственным упорядочением (Q и R — такие поля). Предположим, что $f \in K(x_1, \dots, x_n)$ и f не является суммой квадратов. Изящным рассуждением, не имеющим отношения к логике, Артин и Шрейер показали, что $K(x_1, \dots, x_n)$ можно упорядочить таким образом, что $f < 0$. Так как K — подполе $K(x_1, \dots, x_n)$, то K наследует порядок из $K(x_1, \dots, x_n)$. В силу единственности этот порядок совпадает с первоначальным порядком на K . Из общей теории мы имеем коммутативную диаграмму вложений



Но $f < 0$ в $K(x_1, \dots, x_n)$, и поэтому $f < 0$ в вещественном замыкании для $K(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, в вещественном замыкании для $K(x_1, \dots, x_n)$ выполнена формула $\exists x_1 \dots \exists x_n [f(x_1, \dots, x_n) < 0]$. В силу модельной полноты в вещественном замыкании поля K также выполнена формула $\exists x_1 \dots \exists x_n$

$[f(x_1, \dots, x_n) < 0]$. Приняв теперь, что K плотно в своем вещественном замыкании, получим, что

$$K \models \exists x_1 \dots \exists x_n [f(x_1, \dots, x_n) < 0].$$

Таким образом, f не является положительно определенной.

Мы получили положительное решение проблемы Гильберта для полей K , имеющих единственное упорядочение и плотных в своем вещественном замыкании. Ясно, что Q и R — такие поля. Недавно Маккенна [1], основываясь на работе Д. Скотта [1], получил прекрасный результат о том, что для поля K , имеющего единственное упорядочение, 17-я проблема Гильберта решается положительно, если и только если K плотно в своем вещественном замыкании.

Описанная работа Робинсона оставляет нам самое лучшее приложение логики к алгебре. До настоящего времени ее превосходит лишь работа Ершова, а также Акса и Кочена о p -адических полях и гипотезе Артина. Очевидно, что работа Робинсона вдохновила дальнейшие достижения.

2.4. Гипотеза Артина. После приведенной выше работы остается ясный план дальнейшего развития. Задержка в одно десятилетие, предшествующая развитию, получает лаконичное объяснение в замечании в работе Блум [1]. Приложение Робинсона возникло «после получения алгебраических фактов»; работы о p -адических полях устанавливают алгебраические результаты фундаментальной важности. Поэтому необходимо обширное алгебраическое введение.

Естественно надеяться, что теория моделей для p -адических полей будет похожа на теорию моделей для вещественных полей. Самое очевидное сходство заключается в том, что:

- (а) R и Q_p — локально компактные поля;
- (б) для R и для Q_p имеются работающие алгебро-топологические критерии, дающие возможность обнаруживать корни полиномов, а именно, для R свойство перемены знака или теорема Штурма, а для Q_p лемма Гензеля (Джекобсон [1]) или ее варианты.

Конечно, свойство (б) более важное, так как результаты такого типа для вещественно замкнутых полей являются краеугольными во всей алгебраической и логической теории. Таким образом, наш план состоит в нахождении p -адических аналогов упорядоченного поля и вещественно замкнутого поля и в доказательстве аналогов утверждений I и II из 2.2, причем в качестве ключевой идеи берется лемма Гензеля.

Именно это и было сделано в оказавшихся большим достижением работах Акса и Кочена [1]—[3] и Ершова [1], появившихся после 1964 г. Как и в случае 17-й проблемы Гильберта, характерная особенность метода состоит в доказатель-

стве теоретико-модельных результатов об определенном элементарном классе, содержащем исследуемое поле, для изучения свойств этого поля. Мы не будем вдаваться в детали. Главные сложности алгебраические, но теория моделей проводит вас через эти сложности. Полное изложение можно найти в цитированных выше работах.

Основная ситуация. Пусть L — естественный язык нормированных полей. $\mathcal{F}$ — класс полей, а Γ — класс упорядоченных абелевых групп. Обозначим через $\mathcal{U}(\mathcal{F}, \Gamma)$ класс нормированных полей, у которых группы нормирований из Γ , а поля классов вычетов из $\mathcal{F}$, а через $\mathcal{U}_H(\mathcal{F}, \Gamma)$ — подкласс нормированных полей из $\mathcal{U}(\mathcal{F}, \Gamma)$, удовлетворяющих лемме Гензеля. Очевидно, что $\mathcal{U}_H(\mathcal{F}, \Gamma)$ будет ES_Δ -классом, если $\mathcal{F}$ и Γ будут ES_Δ -классами.

Следующая теорема имеет глубокие приложения:

Теорема 9. Если $\mathcal{F}$ и Γ будут ES_Δ -классами с полными теориями, а все элементы из $\mathcal{F}$ имеют характеристику 0, то теория для $\mathcal{U}_H(\mathcal{F}, \Gamma)$ полна.

Это не теорема о модельной полноте, но все-таки она близка к этому результату. Алгебраическое исследование приводит нас к следующим результатам:

(а) Каждый элемент из $\mathcal{U}(\mathcal{F}, \Gamma)$ имеет единственное *прямое* (Капланский [1]) алгебраическое расширение до элемента из $\mathcal{U}_H(\mathcal{F}, \Gamma)$. Это зависит от предположения о характеристике полей из $\mathcal{F}$. Этот результат дает нам аналог вещественного замыкания.

(б) Доказывается аналог утверждения II из 2.2.

Существуют различные второстепенные осложнения, которые здесь игнорируются. После этого теорема легко доказывается применением ультрапроизведений или насыщенных моделей.

Приложения теоремы 9. Для любого простого p обозначим через $F_p((t))$ поле формальных степенных рядов над конечным полем F_p . Это, конечно, нормированное поле с полем классов вычетов F_p и группой нормирований $\mathbb{Z}$. Оно удовлетворяет лемме Гензеля. Более важно, что оно является C_2 -полем, как заметил Ленг [1].

Пусть D — неглавный ультрафильтр над множеством простых чисел P . Определим $\prod_{p \in P} F_p((t))/D$. Это нормированное поле с полем классов вычетов $\prod_{p \in P} F_p/D$ и группой нормирований $\mathbb{Z}^P/D$. Оно также удовлетворяет лемме Гензеля и по основной теореме об ультрапроизведениях будет C_2 -полем. Его поле классов вычетов имеет характеристику 0. Определим поле $\prod_{p \in P} Q_p/D$. Оно имеет такое же поле классов вычетов и группу нормирова-

ний, как и построенное выше ультрапроизведение, и удовлетворяет лемме Гензеля. По теореме 9

$$\prod_{p \in P} F_p((t))/D \equiv \prod_{p \in P} Q_p/D,$$

и поэтому $\prod_{p \in P} Q_p/D$ — также C_2 -поле. В некотором смысле это означает, что почти все Q_p будут C_2 -полями. Знаменитая гипотеза Артина утверждает, что все поля Q_p являются C_2 -полями. Из логики мы получаем, что для любых n, d существует простое $q(n, d)$ такое, что f имеет нетривиальный корень в Q_p , если $p > q(n, d)$, и f — однородный полином над Q_p от n переменных степени d .

Это оказался (Тержанян [1]) наилучший возможный результат.

Мы заметим, что Коэн [2] получил прекрасное доказательство в направлении работы Тарского для вещественно замкнутых полей.

Ершов [1] получил различные интересные более обобщенные методы для изучения C_i -полей.

2.5. Модельная полнота Q_p . Обратимся теперь к несколько иной ситуации. Поле Q_p имеет конечное поле классов вычетов, несмотря на то, что само поле Q_p имеет характеристику 0. Для доказательства утверждения (а) теоремы 9 применяется работа Капланского [1]. Ее невозможно применить к Q_p и полям, ему элементарно эквивалентным.

Пусть $\mathcal{F}$ — класс полей $\{F_p\}$, а Γ — класс $\mathbb{Z}$ -групп (класс групп, элементарно эквивалентных $\mathbb{Z}$) (Пресбургер [1]); этот класс модельно полон, если присоединить наименьший положительный элемент 1. Тогда Q_p лежит в $\mathcal{U}_H(\mathcal{F}, \Gamma)$. Но таковым же является и $F_p((t))$, очевидно, не являющееся элементарно эквивалентным Q_p . Они различаются предложением $v(p)=1$, истинным в Q_p , но ложным в $F_p((t))$.

Пусть $\mathcal{U}_H^*(\mathcal{F}, \Gamma)$ — подкласс класса $\mathcal{U}_H(\mathcal{F}, \Gamma)$, удовлетворяющий вышеприведенному предложению. Тогда $\mathcal{U}_H^*(\mathcal{F}, \Gamma)$ будет ES_Δ -классом, когда $\mathcal{F}$ и Γ являются ES_Δ -классами.

Теорема 10 (Акс и Кочен [3], Ершов [1]). Пусть $\mathcal{F} = \{F_p\}$ и Γ — класс $\mathbb{Z}$ -групп. Теория класса $\mathcal{U}_H^*(\mathcal{F}, \Gamma)$ полна и модельно полна.

Существуют различные варианты этого доказательства. Мне кажется, что доказательство Ершова [1], использующее критерий Робинсона, наиболее естественное. Другие доказательства применяли постороннее понятие сечения (Акс и Кочен [3]) и были сложнее, чем необходимо. Доказательство Коэна [2], более элегантное и прямое, дает элиминацию кванторов для Q_p с использованием сечения $n \rightarrow p^n$.

Теоретико-модельная часть доказательства подобна доказательству теоремы 9. Устанавливаются аналоги для (а) и (б). Вначале необходимы новые алгебраические построения (Акс и Кочен [2], лемма 8).

Элиминация кванторов для $\mathcal{U}_n(\mathcal{F}, \Gamma)$ в некоторой степени более интересна. Если перенести сечения в формальный язык, то получаем элиминацию кванторов (Акс и Кочен [3], Коэн [2], Вайсфенинг [1]). Это можно сделать конструктивно или с использованием критерия Шенфилда, о котором говорится в 3.2. Но в таком случае будут очень трудные вычисления для описания определимых подмножеств в $\mathcal{Q}_p$. Это противоположно случаю поля $\mathbb{R}$, где Тарский [1] дает ясное и простое описание определимых подмножеств. Думая об этом, я дал (Макинтайр [8]) преобразование всей теории в терминах предикатов для нормированных колец и множеств n -х степеней, относительно которых $\mathcal{Q}_p$ допускает элиминацию кванторов. Таким образом, может быть получена

Теорема 11 ($K = \mathbb{R}$ или $\mathcal{Q}_p$). *Любое бесконечное определимое подмножество в K имеет непустую внутренность.*

Можно считать также, что этот подход дает нам в явном виде p -адический аналог теоремы Штурма.

2.6. Аналог 17-й проблемы Гильберта. Теперь, имея модельную полноту для $\mathcal{Q}_p$ и уместный здесь результат о простых модельных расширениях, мы можем надеяться получить теорему, подобную полученной в 2.3.

Итак, нам нужны аналоги:

- (i) положительно определенных функций,
- (ii) сумм квадратов.

Сразу приходит в голову аналог (i), а именно, понятие интегрально определенной функции. Пусть $f \in \mathcal{Q}_p(x_1, \dots, x_n)$. Функция f интегрально определена, если $v(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \geq 0$ в случае $v(\alpha_i) \geq 0$ для $1 \leq i \leq n$.

Аналог (ii) менее очевиден и был найден Коченом [2]. Он модифицировал каждый шаг исследования Робинсона и получил замечательный аналог решения 17-й проблемы Гильберта. Этот результат слишком сложен, чтобы описать его компактно, поэтому мы рекомендуем читателям работу Кочена. Исследование Кочена, таким образом, дает нам возможность понять природу контрпримеров к гипотезе Артина (Тержанян [1]).

2.7. Существует много других результатов о модельной полноте в направлении теоремы 10. Интересующиеся читатели могут посмотреть работу Ершова [1], а также Циглера [1].

2.8. Остается интригующая открытая проблема в этой области.

Проблема. Какова элементарная теория $\mathcal{F}_0((t))$?

Препятствием в этом исследовании является то, что нет аналогов для (а) и (б) из 2.4. Единственный результат в этом направлении можно найти у Ковена [1], применяющего результаты из лекций Гринберга [1].

2.9. Сепарабельно замкнутые поля. Поле K называется *сепарабельно замкнутым*, если оно не имеет сепарабельных алгебраических расширений. Ершов [2] классифицировал элементарные типы сепарабельно замкнутых полей, применяя критерий Робинсона.

Ключевым алгебраическим результатом, необходимым здесь, является (как мы и могли ожидать) теорема о корнях. Ее можно найти в книге Ленга [2]. Насколько мне известно, пока нет приложений результатов Ершова. Кроме того, не получены другие доказательства, из которых могла бы следовать теорема о корнях в подходящей форме.

2.10. Конечные поля. В 1967—1968 гг. Акс [1] достиг цели в исследовании теории моделей конечных полей и посредством этого получил положительное решение старой проблемы о разрешимости теории конечных полей. Первоначальный метод Акса использовал насыщенные модели, но, как обычно, главная идея была такая же, как и та, которая необходима и для доказательства, использующего критерий Робинсона. Существенно, что Акс нашел аксиомы для ультрапроизведений конечных полей. Существенными аксиомами для таких полей K будут:

- (i) K совершенно,
- (ii) K имеет ровно одно расширение любой степени n , самое важное,
- (iii) каждое абсолютно неприводимое многообразие над K имеет точку в K .

Аксиома (iii) глубокая. Заметим кстати, что (iii) является разновидностью теоремы о корнях. По формальным соображениям можно ожидать, что из слабой формы модельной полноты следует (iii).

Акс нашел элементарные инварианты для полей (так называемых псевдоконечных полей), удовлетворяющих условиям (i)—(iii). Позднее его ученики Адлер и Кифе [1] нашли для таких полей результаты о модельной полноте (в действительности элиминацию кванторов), издержками которых было присоединение некоторых вспомогательных предикатов к языку.

Недавно Джарден и Кине [1] упростили доказательство Акса и получили его теорему.

С другой стороны, кажется, пока нет приложений блестящего исследования Акса. В теореме 8.10 главы 3 приводится красивый результат, который внезапно появляется в работе Акса.

2.11. Разрешимость. Во всех рассмотренных выше случаях вполне просто, используя описанные системы аксиом, получаем

результаты о разрешимости. Во всех случаях, кроме 2.9 и 2.1 известны примитивно рекурсивные процедуры (Коэн [2]), для конечных полей такая процедура была объявлена (Фри и Сакердот [1]). Кроме того, теоретико-модельный подход позволяет получить эффективные границы в теории полиномиальных идеалов. Подробнее об этом см. в главе 3.

§ 3. Общая теория: модельные пополнения, экзистенциально замкнутые системы и форсинг

3.1. Ранее Робинсон описал основную конструкцию в предшествующих примерах. Он выделил понятие *модельного пополнения* теории и доказал некоторые достаточно общие результаты. С 1970 г. в большой степени благодаря усилиям Робинсона, его учеников и коллег общая теория была в основном уточнена и получены возможные новые типы приложений к алгебре.

3.2. **Модельные пополнения.** Модельные пополнения являются двойственной операцией к операции, которая ставит в соответствие полю (соотв. упорядоченному полю) его алгебраическое замыкание (соотв. вещественное замыкание).

Определение. Пусть T, T^* — некоторые L -теории. Теория T^* называется *модельным пополнением* теории T , если:

- (а) T и T^* взаимно модельно совместны, т. е. любая модель теории T вкладывается в модель теории T^* и наоборот;
- (б) T^* — модельно полная теория;
- (с) если $\mathcal{M} \models T$, то $T^* \cup \text{Diagram}(\mathcal{M})$ — полная теория.

Непродолжительное размышление показывает, что условие (с) относится к единственности алгебраического замыкания. А именно, оно утверждает, что модель теории T вкладывается в модель теории T^* «единственным образом» (см. утверждение 1 из 2.2). Незадолго до 1970 г. появилось более слабое понятие. Теория T^* называется *модельным компаньоном* теории T , если выполнены условия (а) и (б).

Пример 1. T — теория полей, T^* — теория алгебраически замкнутых полей. Из элиминации кванторов для T^* легко следует, что T^* — модельное пополнение теории T .

Пример 2. T — теория упорядоченных полей, T^* — теория вещественно замкнутых полей. Из элиминации кванторов для вещественно замкнутых полей следует, что T^* — модельное пополнение теории T .

Пример 3. T — теория формально вещественных полей. (Нет символа для $<$.) T^* — теория вещественно замкнутых полей. T^* — модельный компаньон теории T , но не модельное пополнение (Эклоф и Саббах [1]). Это происходит потому, что нет элиминации кванторов для вещественно замкнутых по-

лей, если мы не допускаем понятия порядка в качестве первичного.

Пример 4 (необходим позднее). T — теория булевых алгебр, T^* — теория безатомных булевых алгебр. Теория T^* — модельное пополнение теории T .

Пример 3 наводит на мысль доказать следующее утверждение.

Лемма 12. (а) Пусть T^* — модельный компаньон теории T , где T — универсальная теория. В этом случае T^* — модельное пополнение теории T , если и только если теория T^* допускает элиминацию кванторов.

(б) Пусть T^* — модельный компаньон теории T . В этом случае T^* — модельное пополнение теории T , если и только если T обладает свойством амальгамируемости.

Доказательство связано с критерием Шенфилда (Шенфилд [1]).

3.3. Наиболее важен следующий ранний результат:

Теорема 12 (Робинсон [6]). Теория T имеет не более одного модельного компаньона.

Доказательство основано на методе альтернативных цепей. Я приведу кратко современный вариант этого доказательства, принадлежащий Симмонсу [5]. Но вначале мы заметим, что теория может не иметь модельного компаньона. Мы рассмотрим интересующий нас пример позднее.

Обозначим через T^* модельный компаньон теории T , если он существует.

Каковы простейшие свойства частичного отображения $T \rightarrow T^*$?

Для любой теории T пусть $T_{\forall}$ (соотв. $T_{\forall\exists}$) — теория, аксиомами которой будут универсальные (соотв. универсально-экзистенциальные) следствия теории T . Применяя теоремы Лося — Гарского (Робинсон [6]) и Чэна — Лося — Сушко (Робинсон [6]), которые обсуждались в главе 2, мы легко получим:

- (i) Если T^* определена, то определена $(T_{\forall})^*$ и $T^* = (T_{\forall})^*$.
- (ii) Если $(T_{\forall})^*$ определена, то T^* определена и $T^* = (T_{\forall})^*$.
- (iii) Если $T^* = \forall\exists$ -теория, то $T_{\forall\exists} \subseteq T^*$.

Результаты (i) и (ii) соответствуют условию (а) из 3.1, а (iii) соответствует условию (б).

Заметим очевидное утверждение:

Лемма 13. Если T — модельно полная теория, то $T = \forall\exists$ -теория.

(Это непосредственно следует из теоремы о прямом пределе и теоремы Чэна — Лося — Сушко.)

Заметим, что существуют полные $\forall\exists$ -теории, которые не являются модельно полными. Наиболее естественный известный

мне пример — это теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики с выделенным собственным алгебраически замкнутым подполем (Робинсон [5]). В силе (iii) эта теория не имеет модельного компаньона.

Вернемся теперь вновь к рассмотрению отображения $T \mapsto T^*$. Замечательным достижением после 1969 г. явилось следующее: были найдены различные конструкции, дающие всюду определенное отображение $T \mapsto T^*$, которое расширяет $T \mapsto T^*$.

Определение. Операция $T \mapsto T^*$ на теориях будет *компаньон-операцией*, если:

- (i) $(T^*)_{\forall} = T_{\forall}$;
- (ii) если $T_{\forall} = T'_{\forall}$, то $T^* = (T')^*$;
- (iii) $T_{\forall\exists} \subseteq T^*$.

Неожиданно оказалось, что существует много интересных компаньон-операций, но имеет место

Теорема 14. Если $\#$ — компаньон-операция и T^* — модельный компаньон теории T , то $T^* = T^{\#}$.

Доказательство. $T_{\forall} = (T^*)_{\forall}$. Поэтому $T^{\#} = (T^*)^{\#} \supseteq (T^*)_{\forall\exists} = T^*$ и, таким образом,

$$T^* \subseteq T^{\#}. \quad (1)$$

Заметим, что я не применял здесь модельную полноту T^* , а, используя лишь то, что T есть $\forall\exists$ -теория, получил (1).

Теперь пусть $\mathcal{M} \models T^*$. Применяя свойство взаимной модельной совместности для T , T^* и $T^{\#}$, построим цепь

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \dots$$

с $\mathcal{M}_{\infty} = \varinjlim \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_{2n} \models T^*$ и $\mathcal{M}_{2n+1} \models (T^{\#})$. По теореме Чэна — Лося — Сушко $\varinjlim \mathcal{M}_{2n+1} \models (T^{\#})_{\forall\exists}$ и, следовательно, $\mathcal{M}_{\infty} \models (T^{\#})_{\forall\exists}$. Но в силу модельной полноты теории T^* $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 < \varinjlim \mathcal{M}_{2n} = \mathcal{M}_{\infty}$. Поэтому $\mathcal{M} \models (T^{\#})_{\forall\exists}$.

Так как $\mathcal{M}$ — произвольная модель, то

$$(T^{\#})_{\forall\exists} \subseteq T^*. \quad (2)$$

Итак,

$$(T^{\#})_{\forall\exists} \subseteq T^* \subseteq T^{\#}.$$

Так как T^* — $\forall\exists$ -теория, то $(T^{\#})_{\forall\exists} = T^*$.

Наконец, отсюда следует, что $T^{\#}$ модельно полная, так как T^* модельно полная, а поэтому $(T^{\#})_{\forall\exists} = T^{\#}$ и $T^* = T^{\#}$. $\square$

Теорема 12 будет непосредственным следствием, если мы укажем хотя бы один компаньон-оператор. Теперь я приведу некоторые примеры, поэтому теорема 12 будет доказана.

Примеры компаньон-операторов.

Пример 1. Оболочка Кайзера. В силу формулы (1) из предшествующего доказательства мы видим, что $T' \subseteq T^{\#}$, если T' является $\forall\exists$ -теорией и взаимно модельно совместна с T . Это приводит на мысль о существовании минимального компаньон-оператора, в качестве которого может быть максимальная $\forall\exists$ -теория, взаимно модельно совместная с T . Почему такая существует? Теория $T_{\forall\exists}$ взаимно модельно совместна с T , и если T_1 и T_2 взаимно модельно совместны с T , то и $T_1 \cup T_2$ также обладает этим свойством. Это доказывается с использованием обычного метода альтернативных цепей (Кайзер [1]). Итак, мы получили T^0 , оболочку Кайзера теории T , и очевидно, что $T \rightarrow T^0$ будет компаньон-оператором. До некоторого времени он был единственным известным компаньон-оператором. Заметим, насколько он естествен.

$\forall\exists$ -предложения указывают нам обычно условия, относительно которых система уравнений имеет решения; несомненно, такого вида утверждения необходимы в качестве аксиом для замкнутых алгебраических систем.

Это приводит нас к экзистенциально замкнутым алгебраическим системам и к следующему:

Пример 2. Оператор $T \rightarrow T^e$.

Определение. Пусть $\mathcal{M} \models T_{\forall}$. Модель $\mathcal{M}$ называется *T -экзистенциально замкнутой* (T -э. з.), если $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1 \models T_{\forall}$ влечет, что $\mathcal{M} <_1 \mathcal{M}_1$.

Универсальный алгебраический метод (существенны объединения цепей) дает нам следующее утверждение.

Теорема 15. Если $\mathcal{M} \models T_{\forall}$, то существует модель $\mathcal{M}_1$ такая, что $\mathcal{M}_1$ T -э. з. и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$. Более того, $\mathcal{M}_1$ можно взять мощности $\max(\text{card}(\mathcal{M}), \text{card}(L))$.

Обозначение. E_T — класс T -э. з. систем.

В качестве основного материала относительно E_T рекомендуется работа Симмонса [1]. Существует, например, следующее неявное определение класса E_T :

E_T — единственный класс $\mathcal{E}$ моделей теории $T_{\forall}$ таких, что:

(i) каждая модель теории $T_{\forall}$ вкладывается в элемент из $\mathcal{E}$;

(ii) если $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{E}$ и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, то $\mathcal{M} <_1 \mathcal{N}$;

(iii) если $\mathcal{N} \in \mathcal{E}$ и $\mathcal{M} <_1 \mathcal{N}$, то $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$.

Поэтому класс E_T взаимно модельно совместен с классом моделей теории T и удовлетворяет условиям критерия Робинсона. Следовательно, $\text{Th}(E_T)$ — хороший кандидат в качестве модель-

ного компаньона теории T . Препятствие состоит в том, что E_T не обязан быть ES_Δ -классом.

Определим теперь новый компаньон-оператор.

Определение. $T^e = Th(E_T)$.

Теорема 16. *Отображение $T \rightarrow T^e$ является компаньон-оператором.*

Это проверяется тривиально.

Следствие. Если T^* существует, то $T^* = T^e$.

Но мы можем утверждать больше.

Теорема 17 (Эклоф и Саббах [1]). *Теория T имеет модельный компаньон, если и только если E_T будет ES_Δ -классом.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Класс E_T удовлетворяет условиям критерия Робинсона, поэтому, если он элементарен, то теория $Th(E_T)$ модельно полна.

($\Rightarrow$) Если T^* существует, то $T^* = T^e$, и поэтому T^e — модельно полная теория. Если $\mathfrak{M} = T^e$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$ для некоторой модели $\mathfrak{M}_1 \in E_T$, то $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}_1$, так как T^e — модельно полная теория. В силу условия (iii) вышеприведенного определения $\mathfrak{M} \in E_T$, и поэтому $E_T = Mod(T^e)$ и E_T будет ES_Δ -классом.

Эта теорема дает нам рабочий критерий для доказательства того, что определенная теория не имеет модельного пополнения. Здесь приводится типичное приложение, которое наводит на мысль о более поздних исследованиях.

Пример (Эклоф и Саббах [1]). T — теория групп. Пусть $\mathfrak{M}_n$ ($n \in \omega$) — элемент из E_T . Очевидно, что в $\mathfrak{M}_n$ существуют элементы x_n, y_n порядка $n+1$, $n+2$ соответственно.

Пусть D — неглавный ультрафильтр на ω и $\mathfrak{M} = \prod_{n \in \omega} \mathfrak{M}_n / D$. Если

E_T будет ES_Δ -классом, то $\mathfrak{M} \in E_T$. Но это приводит к противоречию. Пусть $x = \prod x_n / D$, $y = \prod y_n / D$ с очевидными обозначениями. По основной теореме об ультрапроизведениях элементы x и y имеют бесконечные порядки. Но в силу основного комбинаторного результата (Хигман, Б. Нейман и Х. Нейман [1]) существует группа, расширяющая $\mathfrak{M}$, с элементом t таким, что $t^{-1}xt = y$. Так как $\mathfrak{M} \in E_T$, то такой элемент t существует и в $\mathfrak{M}$. Но тогда $\{n \in \omega: x_n \text{ и } y_n \text{ сопряжены в } \mathfrak{M}_n\} \in D$. Но это множество пусто, так как x_n и y_n имеют различные порядки.

Замечание. Почти такое же рассуждение проходит и для тел (Саббах [1]). Подобные рассуждения работают и в случаях нильпотентных групп (Сараццо [3]), разрешимых групп (Сараццо [2]), алгебр Ли (Макинтайр [9]), коммутативных колец (Черлин [1]), модулей над несвязанными кольцами (Эклоф и Саббах [1]).

Поэтому нелегко понять экзистенциальную замкнутость систем из этих классов.

3.4. Доказательство теоремы 17 фактически показывает, что E_T будет ES_Δ -классом и $T^* = Th(E_T)$, если T^* существует. Поэтому мы можем в силу результатов § 2 описать E_T для классов полей и упорядоченных полей. В этом свете мы видим, что T^* является метаматематическим аналогом алгебраического замыкания. Однако позднее мы увидим в случае дифференциальных полей, что при изучении моделей теории T^* мы не можем использовать аналогию с ясными примерами алгебраически замкнутых полей. Свойства простого модельного расширения из § 2 не выпадают из модельной полноты. С этой точки зрения исследование алгебраичности, сделанное Морли [1], становится связанным с алгеброй.

3.5. Форсинг-конструкция. В 1969 г. произошло неожиданное развитие теории. С 1963 г. различные люди пробовали модифицировать коэновский форсинг (Коэн [1]) в общую теоретико-модельную конструкцию, но с малым успехом. В диссертации Рейеса [1] путем бэровских категорий соединяется форсинг и однородные универсальные модели. Существенно, что Рейес получил понятие бесконечного форсинга, которое Робинсон [7] развил в большей общности в 1969—1970 гг. Но вначале Робинсон изобрел конечный форсинг (Барвайс и Робинсон [1]), также известный как теоретико-модельный форсинг. В основном это направление отражено в главе 2 данной книги.

Я немного скажу о форсинге как о методе построения и объясню основные свойства форсинг-компаньона.

Пусть задана теория T . Существует понятие форсинга относительно теории T . Условиями в нем являются существенно конечные фрагменты диаграмм моделей теории T . Построение модели с помощью конечного форсинга является типичным построением все больших и больших конечных фрагментов ее диаграммы. В некотором роде этот метод подобен сложным построениям рекурсивно перечислимых множеств. Если это замечание принять всерьез, то можно получить приложения к объединению комбинаторной алгебры и теории рекурсии (Макинтайр [2]). Одним из результатов развития Робинсоном теории форсинга было открытие взаимосвязи между классической теорией моделей и теорией рекурсии (Макинтайр [2]).

Раньше у нас было определение конечного форсинга относительно теории T . Мы определим теперь T^f , конечный форсинг-компаньон теории T , положив

$$T^f \models \{\varphi \mid T \models \neg \neg \varphi\}.$$

Рутинное доказательство показывает, что T^f — непротиворечивая теория. Следующая теорема верна также и для несчетных логик L . Доказательство можно найти у Барвайса и Робинсона [1].

Теорема 18. (а) $T \rightarrow T^f$ является компаньон-оператором.

(б) Теория T^f полна, если и только если T обладает свойством совместного вложения.

Исходя из этого, дается (Барвайс и Робинсон [1]) общее определение F_T — класса (конечных) генерических моделей. Вообще, если $\mathcal{M} \in F_T$, то $\mathcal{M} \models T^f$. Но если L несчетна, то F_T может быть и пустым (Энрар [1], Шелах [2]).

Общий результат будет следующий:

Теорема 19. (а) Если L — счетный язык, то $F_T \neq \emptyset$ и $T^f = \text{Th}(F_T)$;

(б) $F_T \subseteq E_T$;

(с) $\mathcal{N} \in F_T, \mathcal{M} <_1 \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \in F_T$;

(д) $\mathcal{M} \in F_T$, если и только если $\mathcal{M}$ — пополнение T^f , т. е. если и только если из $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \models T^f$ следует $\mathcal{M} < \mathcal{N}$;

(е) T^* существует, если и только если F_T — ЕС_Δ-класс.

Доказательства (Барвайс и Робинсон [1]) не содержат в себе никаких сложностей.

Итак, мы имеем

$$T^0 \subseteq T^e \subseteq T^f.$$

Если T — теория групп, то все включения собственные (Макинтайр [2]).

Замечания. (1) Позднее был найден способ построения T^f и F_T без форсинга (Симмонс [4], Энрар [2]). К тому же можно вполне определить F_T на пути определения E_T (Симмонс [2]).

(2) Существует важная связь между приведенным выше форсингом и теоремой об опускании типов, эти два метода в некотором смысле совпадают (Кейслер [1], Симмонс [3]). Это было замечено также Шелахом [2].

3.6. Бесконечный форсинг. Это более грубый инструмент для построения моделей, чем конечный форсинг. Но он обладает приятными свойствами, которые можно быстро получить.

Пусть снова зафиксирована теория T . Теперь мы определим отношение

$$\mathcal{M} \models \varphi(m) \quad (\mathcal{M} \text{ форсирует } \varphi),$$

где $\mathcal{M} \models T_\forall$, φ — L-формула, а m — набор элементов из $\mathcal{M}$.

Определение форсинга очевидное, и самой важной частью этого индуктивного определения является следующая:

$\mathcal{M} \models \neg \varphi$, если и только если не существует модели $\mathcal{N}$ такой, что

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T_\forall \text{ и } \mathcal{N} \models \varphi.$$

Определение генерической модели также очевидно. Модель $\mathcal{M}$ генерическая, если форсируемость и истинность совпадают на $\mathcal{M}$. Пусть G_T — класс генерических моделей и $T^g = \text{Th}(G_T)$.

Возможно следующее неявное определение G_T :

Теорема 20 (Робинсон [7]). G_T — единственный класс $\mathcal{C}$ моделей теории $T_\forall$ такой, что:

(i) любая модель теории $T_\forall$ вкладывается в некоторую модель из $\mathcal{C}$;

(ii) если $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, то $\mathcal{M} < \mathcal{N}$;

(iii) если $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{M} < \mathcal{N}$, то $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$.

Это также показывает, что T^g является кандидатом для T^* .

Теорема 21. (а) $T \rightarrow T^g$ — компаньон-оператор;

(б) $G_T \subseteq F_T$;

(с) T^g — полная теория, если и только если T обладает свойством совместного вложения;

(д) T^* существует, если и только если G_T — ЕС_Δ-класс.

Возможна интересная связь с однородными универсальными моделями. Можно заметить, что последние будут экзистенциально замкнутыми в более сильном смысле — определенные бесконечные системы равенств и неравенств можно реализовать.

Получаем следующее

Определение. Пусть $\mathcal{M} \models T_\forall$. Модель $\mathcal{M}$ является T -экзистенциально универсальной (T -э. у.), если для любых моделей $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ теории $T_\forall$ и множества $\Sigma(v)$ базисных формул над $\mathcal{M}$ с конечным множеством свободных переменных v и мощности $\text{card}(\Sigma) < \text{card}(\mathcal{M})$ истинность $\exists v \Sigma(v)$ в модели $\mathcal{N}$ влечет $\mathcal{M} \models \exists v \Sigma(v)$.

Однородные универсальные модели теории $T_\forall$, очевидно, являются T -э. у.

Следующая красивая теорема показывает, каким образом построить G_T без форсинга:

Теорема 22 (Фишер [1], Вуд [1]). $\mathcal{M} \in G_T$, если и только если существует модель $\mathcal{N}$ такая, что $\mathcal{N}$ является T -э. у. и $\mathcal{M} < \mathcal{N}$.

В качестве хорошего изложения предшествующих результатов и расширения их на бесконечные логики рекомендуется статья Вуда [1].

Замечания. (1) Маневич [1] показал, что класс G_T не абсолютен для моделей ZFC, содержащих T , а классы F_T и E_T абсолютны.

(2) Пусть T — счетная теория. В этом случае E_T и F_T аксиоматизируемы единственным предложением языка $L_{\omega, \omega}$ (Макинтайр [3]), G_T аксиоматизируем множеством предложений языка $L_{\omega, \omega}$ (Вуд [1]), но, вообще говоря, не аксиоматизируем единственным предложением (Макинтайр [10]).

3.7. Связь между T^f и T^g . Мы имеем сейчас

$$T^0 \subseteq T^e \subseteq T^f$$

Все эти включения, вообще говоря, собственные (Макинтайр [2]), и $T^i \cap T^g$ может быть больше T^e . Заметим, что $T^i \cap T^g$ — также компаньон-оператор, но не удовлетворяет условию совместного вложения, которое выполнено для T^i и T^g . Наконец, $T^i \cup T^g$ может быть противоречивой теорией (Макинтайр [2]).

3.8. В одной из своих неопубликованных работ в 1971—1972 гг. я рассмотрел другие определения T -форсинга и форсинг-компаньона (Макинтайр [4]). Можно рассматривать форсируемость с рекурсивными условиями и т. д. Я обнаружил, что они полезны в теории групп.

3.9. Связи между категоричностью и модельной полнотой. Существуют простые примеры, показывающие, что полные κ -категоричные теории не всегда модельно полны. Но существует красивая теорема Линдстрёма, связывающая эти понятия. Напомним, что модельно полная теория T должна быть $\forall\exists$ -теорией.

Теорема 23 (Линдстрём [1]). Если T — полная $\forall\exists$ -теория и κ -категорична, где $\kappa \geq \text{card}(L)$, то T модельно полна.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда по теореме Лёвенгейма — Скулема существуют модели $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ теории T мощности κ такие, что $\mathfrak{M} \not\models E_T$. Но $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models E_T$ в силу категоричности, а это противоречит определению E_T .

3.10. Сарацино нашел неожиданную связь между ω -категоричностью и модельной полнотой.

Теорема 24 (Сарацино [1]). Если L — счетный язык и T — полная ω -категоричная теория, то T имеет ω -категоричный модельный компаньон T^* .

Доказательство. Мы покажем, что E_T является ES_Δ -классом. Пусть $\psi(v)$ — универсальная формула языка L . Пусть $e(\psi)$ — множество экзистенциальных формул $\varphi(v)$ таких, что формула $\forall v(\varphi(v) \rightarrow \psi(v))$ выводима из T . Эта формула логически эквивалентна $\forall$ -формуле, а поэтому является следствием из $T_\forall$. Теперь укажем бесконечные аксиомы для E_T , взяв

$$T_\forall \cup \{ \forall v(\psi(v) \leftrightarrow \bigvee_{\varphi \in e(\psi)} \varphi(v)) \}.$$

См. Симмонс [1]. Но для данного ψ существует лишь конечное число экзистенциальных формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ таких, что для любого $\varphi \in e(\psi)$ существует $i, 1 \leq i \leq n$, такое, что $T \models \forall v(\varphi(v) \leftrightarrow \varphi_i(v))$. Это верно в силу простой характеристики ω -категоричных теорий, полученной Риль-Нардзевским (см. Чэн и Кейслер [1]). Но $T \models \forall v(\varphi \leftrightarrow \varphi_i)$, если и только если $T_{\forall\exists} \models \forall v(\varphi \leftrightarrow \varphi_i)$. Таким образом, аксиомами для E_T будут

$$T_{\forall\exists} \cup \{ \forall v(\psi(v) \leftrightarrow \varphi_1(v) \vee \dots \vee \varphi_n(v)) \}.$$

Поэтому $I^* = T^e$.

Покажем теперь, что T^* — ω -категоричная теория. Мы покажем, что T^* имеет $<\omega$ n -типов для любого n . T^* — модельно полная теория, поэтому мы можем показать, что T^* имеет лишь конечное число неэквивалентных экзистенциальных формул. Но T и T^* имеют одни и те же непротиворечивые $\exists$ -формулы и $T_{\forall\exists} \models T^*$, а поэтому утверждение, очевидно, выполнено.

Замечание. Я использовал только то, что T имеет лишь конечное число экзистенциальных n -формул. Мне не ясно, что это эквивалентно ω -категоричности.

Пример. T — плотный линейный порядок с конечными элементами, а T^* — плотный линейный порядок без конечных элементов.

Пример. Определенные булевы расширения конечных моделей. См. § 6.

Благодаря теоремам Линдстрёма и Сарацино разумно надеяться, что если T — ω_1 -категоричная теория, то T имеет ω_1 -категоричный модельный компаньон. К сожалению, эта надежда была разбита:

(i) T может не иметь модельный компаньон (Белеградек и Зильбер [1], Сарацино [4]).

(ii) Если T имеет модельный компаньон T^* , то T^* может не быть ω_1 -категоричным (Белеградек и Зильбер [1]).

Можно, однако, заметить, что если T — κ -стабильная теория и имеет модельный компаньон, то модельный компаньон T^* — также κ -стабильная теория.

3.11. Скулемизация. Я хочу указать недавнее удивительное исследование Уинклера [1]. Он показал, что для многих естественных теорий (например, алгебраически замкнутые поля) их «свободные скулемизации» имеют модельный компаньон. Это доказательство привлекает понятие «алгебраической связанности», возникшее при изучении ω_1 -категоричности (Болдуин и Лахлан [1]).

§ 4. Приложения: дифференциально замкнутые поля и простые модельные расширения

4.1. Цель этого короткого параграфа в основном философская. Будет обсуждаться взаимодействие между логикой и алгеброй, которое имеет различную природу в «позитивных» приложениях в § 2 и «негативных» приложениях, приводимых в § 3.

В этом примере идеи Робинсона дополняются идеями из теории стабильности (Морли [1], Шелах [3]), и поэтому логика способствует развитию этого направления алгебры.

4.2. Ритт [1] ввел понятие дифференциального поля. Оно естественно формализуется в языке теории полей с добавленным функциональным символом для производной. См. Сакс

[1]. Сейденберг [1] нашел критерий, который показывал, когда система Σ над дифференциальным полем F имеет решение в (дифференциальном) расширении этого поля. Точнее, он построил алгоритм, который по любой конечной системе $\Sigma(v, m)$ определял $\forall_1$ -условие $\Sigma'(m)$ такое, что

$F \models \Sigma'(m)$, если и только если для некоторого расширения F_1 поля F выполнено $F_1 \models \exists v \Sigma(v, m)$.

В таком случае Σ неразрешима в любом расширении F , если и только если $F \models \neg \Sigma'$, $\neg \Sigma'$ эквивалентно экзистенциальной формуле.

Для полей характеристики 0 множество Σ' можно выбрать бескванторным. В положительных характеристиках анализ Сейденберга более сложен и переформулировка его первоначального утверждения по приведенному выше способу требует немалого труда.

Во всяком случае, утверждение, что Σ' можно выбрать как $\forall_1$ -условие, легко дает нам аксиомы для E_T , где T — теория дифференциально замкнутых полей некоторой фиксированной характеристики. Итак, имеет место

Теорема 25 (Робинсон [4] для $p = 0$; Вуд [2] для $p \neq 0$). *Теория дифференциальных полей характеристики p имеет модельный компаньон.*

(Этот модельный компаньон обозначим DCF_p .) Заметим, что аксиомы для T^* в этом случае не являются легко запоминающимися.

Для $p = 0$ теория T^* допускает элиминацию кванторов, так что имеет место

Теорема 26 (Робинсон [4]). *Теория дифференциальных полей характеристики 0 имеет модельное пополнение.*

Теорема 26 ложна для характеристики $p \neq 0$, так как нарушено свойство амальгамируемости. См. Вуд [2].

Однако оказывается, что для полей характеристики $p \neq 0$ мы можем присоединить к нашему языку функциональный символ извлечения корня p -й степени (он даст 0 для элементов, не являющихся p -ми степенями) и тогда найти естественную теорию дифференциальных полей с модельным пополнением. Мы рассмотрим теорию совершенных дифференциальных полей характеристики p . Для достижения нашей цели присоединим к теории дифференциальных полей характеристики p аксиомы

$$\forall x (D(x) = 0 \text{ влечет } \exists y (y^p = x)).$$

Вуд [2] показала, что эта теория имеет модельное пополнение. Символ корня p -й степени дает элиминацию кванторов, так как он делает аксиомы универсальными. В языке дифференциальных полей модельное пополнение есть то, что мы раньше обо-

начили DCF_p . В расширенном языке модельное пополнение также обозначается DCF_p .

4.3. Для этого примера характерно несколько необычных свойств.

Во-первых, аксиомы для модельного пополнения не были так же понятны, как в случае полей или упорядоченных полей.

Вторая особенность более существенна. Вернитесь вновь к § 2. В примерах из этого параграфа имеется не просто операция модельного пополнения, но также и операция замыкания на алгебраических системах, поле K имеет алгебраическое замыкание $\bar{K}$, которое просто над ним в следующем смысле: любое вложение $K \rightarrow L$, где L — алгебраически замкнутое поле, можно продолжить до

$$K \rightarrow \bar{K} \rightarrow L.$$

Более того, любые два таких простых расширения поля K будут изоморфными над K .

Наконец, простое расширение минимально, т. е. вложение $K \rightarrow \bar{K}$ не может быть продолжено до $K \rightarrow L \rightarrow \bar{K}$, где L алгебраически замкнуто и все вложения собственные.

Аналогичные утверждения справедливы для различных примеров из § 2 и эти утверждения имеют, несомненно, большой теоретико-модельный интерес.

Естествен вопрос:

Проблема замыкания. Будет ли это утверждение справедливо для модельных пополнений универсальных теорий?

Например, существует ли хорошее понятие дифференциального замыкания для дифференциальных полей.

Такое классическое понятие неизвестно. Таким образом, здесь мы имеем случаи, когда математическое понятие известно, но нет оператора замыкания на подходящих системах.

Восточная теория моделей не могла прояснить этот вопрос дальше. Прогресс был достигнут при комбинировании методов восточной и западной теории моделей. Блюм [1] показала, что подход Морли [1] дает возможность получить дифференциальное замыкание для полей характеристики 0.

4.4. В примерах § 2 замыкание поля K будет алгебраическим над K в смысле классической теории полей. Это не так в случае дифференциальных полей просто потому, что существуют дифференциальные уравнения, решения которых трансцендентны над $\mathbb{Q}$.

Морли [1] предложил прекрасное понятие алгебраичности в общем смысле. В формулировке Блюм [1] появились понятия α -алгебраичности для любого ординала α . Для случая $\alpha = 0$ это обычное классическое понятие для полей. Блюм показала, что необходимо применять понятие n -алгебраичности для

всех $n < \omega$ при конструировании дифференциального замыкания.

Ее основные результаты:

Теорема 27. (а) *Не применяя результат Сейденберга и применяя вместо него исследование простых расширений, можно найти модельное пополнение DCF_0 и с более приятным множеством аксиом.*

(b) DCF_0 будет ω -стабильной теорией и любое дифференциальное поле характеристики 0 имеет простое модельное расширение до модели теории DCF_0 .

(с) *Результат Сейденберга можно вывести из теоретико-модельного исследования.*

(Можно указать, что в работе Блюм содержится основное содержание исследования Сейденберга в виде определенных процедур сокращения.)

Таким образом, мы имеем понятие дифференциального замыкания для полей характеристики 0.

Позднее Вуд [3] выполнила соответствующее исследование для совершенных дифференциальных полей характеристики p . Аналоги свойств (а) и (с) верны. Свойство (b) нужно модифицировать, так как теория совершенных дифференциальных полей не является ω -стабильной. Вуд показала, что, несмотря на это, она обладает тем свойством, что множество изолированных точек плотно, и поэтому в силу результата Морли [1] выполнено свойство простого модельного расширения для (b). Таким образом, мы имеем дифференциальное замыкание и для полей характеристики p .

Вопрос об единственности дифференциального замыкания хитрее. На самом деле дифференциальное замыкание единственно, но для доказательства этого необходимо было достичь продвижения в общей теории, полученного Шелахом [3]. Он показал, что для ω -стабильных теорий простое модельное расширение единственно. Позднее Шелах [5] показал, что для стабильных теорий простое модельное расширение, если оно существует, единственно. Шелах [4] показал, что DCF_p — стабильная теория.

Итак, суммируя результаты предшествующих параграфов, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 28. *Дифференциальное замыкание единственно для всех характеристик.*

Минимальность. К несчастью, дифференциальное замыкание не минимально по крайней мере для характеристики 0. Это независимо доказали Колчин [1] и Шелах [4]. Можно обратиться к работе Шелаха [3] по поводу теории Морли — Шелаха, используемой здесь.

Случай характеристики p не решен.

Замечания. (1) У Сакса [1] приведена теорема о корнях, которая выводится из основного результата о модельной полноте.

(2) До сих пор не существует приложения, на которое повлияли бы результаты § 2.

§ 5. Отрицательные приложения: группы, тела и теории чисел

5.1. Новые методы § 3 дают новые конструкции для экзистенциально замкнутых структур. Основным направлением новых приложений было показать, что E_T — крайне сложные классы для естественных теорий T . Кроме того, можно было бы привести контрпримеры для существования замыканий и/или минимальных замыканий. Самое всестороннее исследование этих вопросов опубликовано Хиршфелдом и Уилером [1]. Мы начнем со сжатого изложения метода и поэтому перейдем к более конкретным алгебраическим проблемам.

Необходимая не теоретико-модельная подоплека этих исследований состоит в следующем:

- (а) T — теория групп: комбинаторная теория групп (Хигмен, Б. Нейман и Х. Нейман [1]);
- (b) T — теория тел: работа Кона [2];
- (с) T — теория чисел: основы теории рекурсивно перечислимых множеств, некоторые идеи, восходящие к Рабину [1]; и теорема Матиясевича [1].

Основной факт, установленный во всех трех классах, состоит в следующем:

Существует единый метод определения для любой модели $\mathcal{M}$ из E_T интерпретации $P(\mathcal{M})$ такой, что:

- (а) $P(\mathcal{M})$ — подсистема арифметики второго порядка;
- (b) интерпретации сохраняются при расширениях;
- (с) если $\mathcal{M}$ — T -экзистенциально универсальная модель, то $P(\mathcal{M})$ — стандартная модель арифметики второго порядка.

Мы можем легко вывести, что арифметика второго порядка сводится по Тьюрингу к T^g . Обратное есть общий факт для арифметических теорий T таких, как указано в примерах, приведенных в начале параграфа. Итак, справедлива

Теорема 29 (Хиршфелд и Уилер [1], Макинтайр [1]). *Для приведенных выше теорий T теории T^g не являются аналитическими множествами.*

Следуя тому же направлению, можно показать, что имеет место

Теорема 30. *Для приведенных выше теорий теории T^f являются Δ_1^1 -множествами, но не арифметическими множествами.*

Следствие. $T^f \neq T^g$.

Доказательства этих основных утверждений включают в себя нумерации и теорию определимости. Их можно найти в работе Хиршфелда и Уилера [1].

5.2. Экзистенциально замкнутые группы. Недостаток работы, сообщенной в 5.1, состоит в том, что не получены результаты, которые были бы понятны алгебраисту, не знающему теорию рекурсии. В этом подпараграфе приведем некоторые естественные алгебраические результаты, доказываемые форсингом.

В этом подпараграфе T — теория групп, формализуемая в обычной логике с символами $\cdot, ^{-1}, e$. Так как T — универсальная теория, то элементы E_T — также группы и в действительности в точности нетривиальные алгебраически замкнутые группы, рассмотренные У. Р. Скоттом в начале 1950 г. (У. Р. Скотт [1]). Скотт получил весьма важный специальный случай теоремы 15.

Позднее Нейман [1] установил, что экзистенциально замкнутые группы простые. Точно так же тривиальные мощностные соображения дают 2^{ω} типов изоморфизма счетных экзистенциально замкнутых групп. Но, к сожалению, мы не знали инвариантов для экзистенциально замкнутых групп, т. е. не могли указать две конкретные счетные экзистенциально замкнутые группы. Подтверждение возникающих здесь трудностей дает прекрасная теорема Неймана [2].

Теорема 31. *Любая конечно порожденная группа с разрешимой проблемой равенства вкладывается в любую экзистенциально замкнутую группу.*

Эта теорема была доказана применением конечного форсинга. Нейман применил теорему Хигмена о вложении (Хигмен [1]), и его результаты были вскоре использованы в комбинации с конечным форсингом (Макинтайр [2]). Результат Неймана оставлял открытым вопрос: какие конечно порожденные группы вкладываются во все экзистенциально замкнутые группы?

На него получен красивый ответ, который демонстрирует применение конечного форсинга.

Теорема 32 (Макинтайр [2]). *Если в конечно порожденной группе неразрешима проблема равенства, то существует экзистенциально замкнутая группа, в которую она не вкладывается.*

(Это утверждение является частным случаем приложения общей теоремы, применимой также к телам, алгебрам Ли и т. д.).

Итак, для начала получен чисто алгебраический критерий для разрешимости проблемы тождества слов для конечно порожденных групп. (Позднее Бун и Хигмен [1] дали совершенно иной критерий.)

Но более важная проблема состояла в построении счетных экзистенциально замкнутых групп, которые «выглядят различными». Макинтайр [2] и Фишер (не опубликовано) заметили, что имеет место

Теорема 33. *Две счетные экзистенциально замкнутые группы изоморфны, если и только если у них одни и те же с точностью до изоморфизма конечно порожденные подгруппы.*

Отсюда кажется правдоподобным, что следующая проблема имеет положительный ответ:

Проблема Берса. *Любые ли две экзистенциально замкнутые группы элементарно эквивалентны?*

Оказалось, что ответ отрицательный (Макинтайр [2]). T^e — не полная теория. Мною построено V_4 -предложение ϕ (объясненное ниже), которое имеет ясный алгебраический смысл на элементах E_T и таково, что ϕ истинно в одних моделях из E_T , но ложно в других. Позднее Белеградек [1] и Миллер [1] получили V_3 -предложение. Из общих соображений известно, что теория T^e полна для V_2 -предложений.

Новое явление, которое рассматривается впервые здесь, состоит в следующем: существуют классы $\mathcal{C}$ групп такие, что $\mathcal{C}$ не являются ES_Δ -классами, но $\mathcal{C} \cap E_T$ можно представить как $\mathcal{C}_1 \cap E_T$, где $\mathcal{C}_1$ — уже ES_Δ -класс (аксиоматизируем единственным предложением). Другими словами, существуют понятия, невыразимые в логике первого порядка в классе всех групп, но выражимые в логике первого порядка относительно класса экзистенциально замкнутых групп.

Тривиальный пример:

$\mathcal{C}$ — класс простых групп.

Более сложные примеры будут следующие:

(1) $\mathcal{C}$ — класс групп, имеющих 2-порожденную подгруппу, в которую вкладываются все 2-порожденные подгруппы (Макинтайр [2]).

(2) Для любой конечно представимой группы $\mathcal{H}$ класс $\mathcal{C}$ групп, в которые $\mathcal{H}$ вкладывается (Белеградек [1], Миллер [1]).

Оба доказательства применяют комбинаторную теорию групп и свойства кодирования.

Решение проблемы Берса состоит в доказательстве того, что класс $\mathcal{C}$ из первого примера дает нетривиальное разбиение E_T . Для доказательства этого применяется универсальная конечно представимая группа Хигмена [1] и метод конечного форсинга. Это дает $\mathcal{C} \cap E_T \neq \emptyset$. Замечаем, что в $\mathcal{C}$ нет экзистенциально универсальной группы и $E_T \not\subseteq \mathcal{C}$.

Пусть Мах — предложение, описывающее класс $\mathcal{C} \cap E_T$. Мах будет V_4 -предложением. Позднее (не опубликовано), применяя форсинг с условиями, рекурсивно перечислимыми в заданном

множестве, я показал, что любой счетный элемент из E_T вкладывается в элемент из $\mathcal{E}$. Таким образом, Белеградек [2], Макинтайр [1], Миллер [1] и Уилер [1] независимо доказали, что существует $2^{\aleph_0}$ элементарных типов экзистенциально замкнутых групп, а мне удалось доказать, что существует $2^{\aleph_0}$ элементарных типов, удовлетворяющих Мах. Эти результаты, в действительности кодирующие результаты о рекурсивно перечислимых множествах, дают значительно меньше алгебраической информации, чем первоначальное решение проблемы Берса.

Имеются также и другие результаты, полученные с помощью форсинга (Макинтайр [2]). Утверждения (с) и (d) противоположны результатам §§ 2 и 4.

(a) $G_T \cap F_T = \emptyset$;

(b) любая счетная экзистенциально замкнутая группа имеет собственное $L_{\aleph_0}$ -расширение;

(с) любая счетная экзистенциально замкнутая группа содержит собственную копию себя самой (следовательно, нет минимальных элементов в E_T);

(d) не существует экзистенциально замкнутой группы, которая вкладывается во все другие (следовательно, не существует простой модели в E_T).

Эти результаты используют в различной степени материал о проблеме тождества слов групп. Пока не осуществлена возможность хорошо объединить комбинаторную технику с конечным форсингом.

Более поздние результаты. Белеградек [1], [2] и Миллер [1] получили хорошие новые результаты о проблеме, когда можно взять одну данную группу в качестве подгруппы экзистенциально замкнутой группы и выбросить другую данную группу. Недавно Циглер [2] улучшил (b), получив расширения любой бесконечной мощности, что обобщает результат Макинтайра [6]. В частности, F_T имеет модели любой бесконечной мощности.

5.3. Тела. Изучение экзистенциально замкнутых тел началось в 1970 г., как только Кон [2] блестяще обнаружил подходящие аналоги комбинаторной техники в теории групп. Саббах (не опубликовано) вскоре показал, что нет модельного компаньона для теории тел. Далее следует отметить работы: Боффа и ван Праага [1], Макинтайра [1] и Уилера [1].

В этом подпараграфе пусть T — теория тел. Макинтайр [1] показал, что T^g — не аналитическое, а T^f — не арифметическое множество. Таким образом, существует $2^{\aleph_0}$ элементарных типов элементов из E_T . Доказательства применяют конечный форсинг и в явном виде не имеют большого алгебраического содержания, будучи записями свойств из теории рекурсии. Неза-

висимо, Уилер [1] нашел более красивые доказательства. Мы оба получили аналог (a) из 5.2, а Уилер получил аналоги для (b) и (с). Для получения (d) я вначале доказал (Макинтайр [7]) неразрешимость проблемы тождества слов для тел.

Имеются некоторые более важные проблемы, которые еще открыты. Существует аналог формулы Мах (см. 5.2) для тел, но неизвестно, существуют ли элементы из E_T , удовлетворяющие Мах. Основная проблема — получить теорему вложения типа теоремы Хигмена (см. 5.2). Получение такой теоремы является довольно трудным. Интересующиеся могут обратиться к работе Макинтайра [11]. Итак, в данное время не существует естественного способа показать различие экзистенциально замкнутых тел. Другая проблема состоит в перенесении последних результатов из 5.2 на тела.

Теорема о корнях. Более всего разочаровывает то, что структура экзистенциально замкнутых тел очень сложна. Можно надеяться, что они будут полезны как инструмент в теории колец и в качестве основы для некоторой будущей некоммутативной алгебраической геометрии.

Что представляет собой теорема о корнях? Пусть K — тело и $K\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ — кольцо полиномов на K с переменными $x_0, \dots, x_n$, не коммутирующими между собой и с элементами тела K .

Предположим теперь, что K — экзистенциально замкнутое тело и I — идеал в $K\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ с корнем в некотором расширяющем теле. Должен ли I иметь корень в K ?

Это очевидно, если I конечно порожден. Но Уилер [1] на основании аналогов 5.2 (b), (с) привел контрпример для общего случая.

Для экзистенциально универсальных тел теорема о корнях не так уж плоха, и остается до сих пор некоторая надежда для построения алгебраической геометрии.

5.4. Теории чисел. Пусть T — полная теория чисел. Барвайс и Робинсон [1] доказали, что $F_T = \{\mathbb{N}\}$ и в действительности $\text{Mod}(T) \cap E_T = \{\mathbb{N}\}$. Робинсон [8] показал, что можно определить $\mathbb{N}$ в лсбм из элементов E_T (см. 5.2). Его доказательство использует технику, предложенную Робинсоном [1], где используются простые множества вместо креативных.

Позднее целая область была систематически исследована Голдреем, Макинтайром и Симмонсом [1] и Хиршфелдом [1]. См. также Хиршфелд и Уилер [1]. Главная особенность результатов состоит в том, что ситуация так же хаотична, как и для групп и тел. Доказательства применяют ту же смесь методов теории моделей и теории рекурсивно перечислимых множеств.

5.5. Другие системы. Существует основание полагать, что алгебры Ли, нильпотентные группы фиксированного класса и разрешимые группы фиксированного класса будут иметь класс E_T такой же сложности, как и приведенные выше. См. Макинтайр [9], Сарацино [2], [3], Макинтайр и Сарацино [4]. Для коммутативных колец ситуация более неясная. Для них нет модельного компаньона (Черлин [1]), но нет оснований указать комбинаторную сложность (вопреки работе Тайцли-на [1]).

§ 6. Пучки и модельная полнота

6.1. В конце этого обзора я хочу привести позитивные результаты, связанные с § 2, и некоторые неисследованные пути изучения. Обсуждение будет кратким, так как я хочу главным образом сообщить некоторые формальные идеи.

Начальной точкой является теорема Карсона [1], Липшица и Сарацино [1]. Она доказывает, что теория коммутативных колец с 1 и без ненулевых нильпотентных элементов имеет модельный компаньон. (Противоположен этому результат Черлина [1], приведенный в § 5.) В действительности, они дают красивые аксиомы для экзистенциально замкнутых коммутативных регулярных колец с 1. Легко видеть, что теория коммутативных колец с 1 и без ненулевых нильпотентных элементов взаимно модельно совместна с теорией коммутативных регулярных колец с 1. Это более удобно, так как следует, что нужно работать с теорией T коммутативных регулярных колец с 1.

Для достижения общей точки зрения исследование пучков Карсона кажется наиболее естественным. По общей теореме о представлении (Пирс [1]) любая модель теории T изоморфна кольцу глобальных сечений пучка $\mathcal{P}$ полей над булевым пространством X . С булевым пространством связана дуальная алгебра B и в этом случае B будет алгеброй идемпотентов первоначального кольца. Теперь из исследований вышеприведенных авторов следует, что элементы E_T — в точности те модели теории T , где B — безатомная алгебра и стеблями пучка являются алгебраически замкнутые поля.

Теперь образец ясен. Для получения модельного компаньона теории T мы сделаем следующее:

(i) возьмем модельный компаньон теории булевых алгебр (см. 3.2, пример 4);

(ii) возьмем модельный компаньон теории стеблей.

Тогда элементы E_T будут сечениями пучков над пространством X , где X — булево пространство с безатомной дуальной алгеброй и стебли — это модели модельного компаньона теории первоначального класса пучков.

Макинтайр [5] и Вайспфенинг [2] на основе этого формального рассмотрения получили результат Карсона — Липшица — Сарацино в общем виде. Здесь приведем образец таких результатов:

Теорема 34 (Макинтайр [5]). Пусть T_1 — теория полей. T_1 модельно полна. Пусть T — теория колец сечений пучков $\mathcal{P}$ со стеблями из моделей теории T_1 и над булевым пространством без изолированных точек. Тогда T модельно полна.

Так как T_1 — теория полей, мы получаем теорему Карсона — Липшица — Сарацино. Ван ден Дрисс [1], Макинтайр [5] и Вайспфенинг [1] заметили, что, взяв теорию вещественно замкнутых полей, получим существование модельного компаньона для класса решеточно упорядочиваемых колец, так называемых регулярных f -колец (см. Биркгоф [1]).

Общий принцип заключается в том, что любой результат о модельной полноте из § 2 можно преобразовать аналогично результату о регулярных кольцах. Например, ван ден Дрисс [1] и Вайспфенинг [2] получили результаты о дифференциальных кольцах. Случай p -адических колец не был окончательно изучен.

6.2. Вышеприведенные результаты будут вообще не такие сильные, как в § 2. Трудность состоит в том, что мы не имеем в общем случае простого модельного расширения для элементов из E_T . См. Сарацино и Вайспфенинг [1]. Для теории регулярных колец T Липшиц [1] значительно прояснил вопрос о существовании простых модельных расширений.

В вещественно регулярном случае (регулярные f -кольца) существует единственное простое модельное расширение. См. Липшиц [2] и ван ден Дрисс [1]. Отсюда ван ден Дрисс получил аналог решения 17-й проблемы Гильберта для вещественно регулярных колец. Я полагаю, что Робинсон был восхищен этими результатами.

Замечания. (1) Этот материал связан с ω -категоричностью. В силу результатов Вашкевича и Венгложа [1] булево расширение ω -категоричной системы через безатомную булеву алгебру будет ω -категоричным. Поэтому в силу результата Сарацино [1] эта теория имеет модельный компаньон. С другой стороны, булево расширение является структурой сечения пучка над булевым пространством. Будут ли иметь модельный компаньон теории некоторых естественных булевых расширений?

(2) В моем варианте теоремы 34 я применял результат Комера [2] о теореме Фефермана — Воота для пучков. Позднее Комер, применив формальный принцип из 6.1, получил результаты о модельной полноте для полиадических алгебр (Комер [1]).

(3) Мне кажется, что результаты этого параграфа имеют интерпретацию в топосах, т. е. можно получить теорию моделей внутри категории пучков. Интуитивно ясно, что пучки, связанные с экзистенциально замкнутыми регулярными кольцами, будут алгебраически замкнутыми полями в смысле категории пучков. Соответствующие исследования об этих вопросах содержатся в статьях Жуаяля [1] и Лаулиса [1].

Признательность

Я благодарю Кэрол Вуд, которая любезно прочитала эту работу и сделала много полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- Адлер и Кифе (Adler A., Kiefe K.)
1. Pseudofinite fields, procyclic fields and model-completion. — *Pacific J. Math.*, 1976, 62, p. 305—310.
- Акс (Ax J.)
1. The elementary theory of finite fields. — *Ann. Math.*, 1968, 88, p. 239—271.
- Акс и Кочен (Ax J., Kochen S.)
1. Diophantine problems over local fields, I. — *Amer. J. Math.*, 1965, 87, p. 605—630.
2. Diophantine problems over local fields, II: A complete set of axioms for p -adic number theory. — *Amer. J. Math.*, 1965, 87, p. 631—648.
3. Diophantine problems over local fields, III: Decidable fields. — *Ann. Math.*, 1966, 83, p. 437—456.
- Артин (Artin E.)
1. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. — *Hamb. Abh.*, 1927, 5, p. 100—115.
- Артин и Шрейер (Artin E., Schreier O.)
1. Algebraische Konstruktion reeller Körper. — *Hamb. Abh.*, 1926, 5, p. 85—99.
- Баксич и Роулэнд-Хьюз (Bacsich P. D., Rowland-Hughes D.)
1. Syntactic characterizations of amalgamation, convexity and related properties. — *J. Symbolic Logic*, 1974, 39, p. 433—451.
- Барвайс и Робинсон (Barwise J., Robinson A.)
1. Completing theories by forcing. — *Ann. Math. Logic*, 1970, 2, p. 119—142.
- Белеградек О. Б.
1. Алгебраические замкнутые группы. — *Алгебра и логика*, 1974, 13, с. 239—255.
2. Личное сообщение. — 1974.
- Белеградек О. Б. и Зильбер Б. И.
1. Модельный компаньон κ -категоричной теории. — В кн.: III Всесоюзная конференция по математической логике. Новосибирск, 1974, с. 10.
- Белли Сломсон (Bell J. L., Slomson A. B.)
1. Models and Ultraproducts. — Amsterdam: North-Holland, 1969.
- Биркгоф (Birkhoff G.)
1. Lattice Theory. — Providence (Rhode Island): Amer. Math. Soc., 1967. [Русский перевод: Биркгоф Г. Теория структур. — М.: ИЛ, 1952.]
- Блюм (Blum L.)
1. Generalized Algebraic Theories: Thesis. — Cambridge (Mass.): M. I. T. Press, 1968.
- Болдуин и Лаклан (Baldwin J. T., Lachlan A. H.)

1. On strongly minimal sets. — *J. Symbolic Logic*, 1971, 36, p. 79—96.
- Боффа и ван Прааг (Boffa M., van Praag P.)
1. Sur les corps generiques. — *C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A.*, 1972, 274, p. 1325—1327.
- Бун и Хигмен (Boone W., Higman G.)
1. An algebraic characterization of groups with soluble word problem. — *J. Austral. Math. Soc.*, 1974, 18, p. 41—53.
- Вайспфеннинг (Weisspfenning V.)
1. On the elementary theory of Hensel fields: Thesis. — Heidelberg: University of Heidelberg, 1971.
- Вашкевич и Венглож (Waskiewicz J., Węglorz B.)
1. Some models of theories of reduced powers. — *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1968, 16, p. 683—685.
- Воот (Vaught R. L.)
1. The Löwenheim — Skolem theorem. — In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*/Ed. Y. Bar-Hillel. 2. ed. Amsterdam: North-Holland, 1972, p. 81—89.
- Вуд (Wood C.)
1. Forcing for infinitary languages. — *Z. math. Logik Grundle. Math.*, 1972, 18, p. 385—402.
2. The model theory of differential fields of characteristic $p \neq 0$. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, 40, p. 577—584.
3. Prime model extensions for differential fields of characteristic $p \neq 0$. — *J. Symbolic Logic*, 1974, 39, p. 469—477.
- Гайфман (Gaifman H.)
1. Uniform extension operators for models and their applications. — In: *Sets, Models and Recursion Theory*/Ed. J. N. Crossley. Amsterdam: North-Holland, 1967, p. 122—155.
- Голдрей, Макинтайр и Симмонс (Goldrei D. C., Macintyre A., Simmons H.)
1. The forcing companions of number theories — *Israel J. Math.*, 1973, 14, p. 317—337.
- Гринберг (Greenberg M.)
1. Lectures on Forms in Many Variables. — N. Y.: Benjamin, 1969.
- Джардени Кине (Jarden M., Kiehne U.)
1. The elementary theory of algebraic fields of finite corank. — *Invent. Math.*, 1975, 30, p. 275—294.
- Джекобсон (Jacobson N.)
1. Lectures in Abstract Algebra, III. — N. Y.: Van Nostrand, 1964.
2. Basic Algebra, I. — San Francisco (Calif.): Freeman, 1974.
- Дрисс, ван ден (van den Driess L.)
1. Artin-Schreier theory for commutative regular rings. — Utrecht: University of Utrecht, 1975, preprint.
- Ершов Ю. Л.
1. Об элементарных теориях максимальных полей. — *ДАН СССР*, 1965, 165, с. 1390—1393.
2. Разрешимые теории полей. — *ДАН СССР*, 1967, 174, с. 575—576.
- Жуаяль (Joyal A.)
1. Structures generiques dans les topos et ailleurs: Contributed paper (abstract). — Clermont-Ferrand: Siecil, 1975.
- Йенсен (Jensen R. B.)
1. The fine structure of the constructible hierarchy. — *Ann. Math. Logic*, 1972, 4, p. 229—308.
- Йонссон (Jonsson B.)
1. Extensions of relational structures. — In: *The Theory of Models*/Ed. J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 146—157.

- Кайзер (Kaiser K.)
1. Über eine Verallgemeinerung der Robinsonschen Modellvervollständigung. — Z. math. Logik Grundle. Math., 1965, 15, S. 37—48.
- Капланский (Kaplansky I.)
1. Maximal fields with valuation I. — Duke Math. J., 1942, 9, p. 303—321.
- Карсон (Carson A. B.)
1. The model completion of the theory of commutative regular rings. — J. Algebra, 1973, 27, p. 136—146.
- Кейслер (Keisler H. J.)
1. Forcing and the omitting types theorem — In: Studies in Model Theory/Ed. M. Morley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973, p. 96—133.
- Ковен (Coven C.)
1. Forcing in infinitary languages: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1971, Appendix.
- Колчин (Kolchin E.)
1. Constrained extensions of differential fields. — Advances in Math., 1974, 12, p. 141—170.
- Комер (Comer S. D.)
1. Complete and model-complete theories of polyadic algebras. — Nashville (Tenn.): Vanderbilt University, 1973, preprint.
2. Elementary properties of structures of sections. — Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1974, 19, p. 78—85.
- Кон (Cohn P. M.)
1. Free Rings and Their Relations. — London: Academic Press, 1971.
2. The embedding of firs in skew fields. — Proc. London Math. Soc., 1971, 23, p. 193—213.
- Кочен (Kochen S.)
1. Ultraproducts in the theory of models. — Ann. Math., 1961, 74, p. 221—261.
2. Integer valued rational functions over the p -adic numbers: a p -adic analogue of the theory of real fields. — In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XII, Number Theory/Ed. W. J. Leveque and E. G. Strauss. Providence (Rhode Island): Amer. Math. Soc., p. 57—73.
- Коэн (Cohen P. J.)
1. Set Theory and the Continuum Hypothesis. — N. Y.: Benjamin, 1966. [Русский перевод: Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.]
2. Decision procedures for real and p -adic fields. — Comm. Pure Appl. Math., 1969, 22, p. 131—151.
- Лаулис (Loulis G.)
1. Some aspects of the model theory on a topos: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1976.
- Ленг (Lang S.)
1. On quasi algebraic closure. — Ann. Math., 1952, 55, p. 373—390.
2. Algebraic Geometry. — N. Y.: Addison-Wesley, 1958.
- Линдстрём (Lindström P.)
1. On model-completeness. — Theoria, 1964, 30, p. 183—196.
- Липшиц (Lipschitz L.)
1. Prime model extensions for commutative regular rings. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974.
2. The real closure of a commutative regular f -ring. — Lafayette (Ind.): Purdue University, 1974, preprint.
- Липшиц и Сарацино (Lipschitz L., Saracino D.)
1. The model companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 37, p. 381—387.

- Макинтайр (Macintyre A.)
1. On algebraically closed division rings. — 1971.
2. On algebraically closed groups. — Ann. Math., 1972, 96, p. 53—97.
3. Omitting quantifier-free types in generic structures. — J. Symbolic Logic, 1972, 37, p. 512—520.
4. Lecture notes on forcing in model theory. — Berlin, 1972.
5. Model completeness for sheaves of structures. — Fundam. math., 1973, 81, p. 73—89.
6. The word problem for division rings. — J. Symbolic Logic, 1973, 38, p. 428—436.
7. Martin's Axiom applied to existentially closed groups. — Math. Scand., 1973, 32, p. 46—56.
8. On definable sets of p -adic numbers. — J. Symbolic Logic, 1974, 39.
9. Existentially closed Lie algebras: Abstract 74T — E38. — Notices Amer. Math. Soc., 1974, 21, p. A-379.
10. A note on axioms for infinite-generic structures. — J. London Math. Soc., 1975, 9, p. 581—584.
11. Combinatorial problems for skew fields. — New Haven (Conn.): Yale University, 1975, preprint.
- Макинтайр и Сарацино (Macintyre A., Saracino D.)
1. On existentially closed nilpotent Lie algebras: Abstract 74T — E37. — Notices Amer. Math. Soc., 1974, 21, p. A-379.
- Маккенна (McKenna K.)
1. Hilbert 17-th Problem revisited. — New Haven (Conn.): Yale University, 1975, preprint.
- Маковский (Makowsky J. A.)
1. On continuous quantifiers: Abstract 73T — E84. — Notices Amer. Math. Soc., 1973, 20, p. A-502.
- Маневитц (Manevitz L.)
1. Model theoretic forcing and absoluteness: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1975.
- Матиясевич Ю. В.
1. Диофантовость перечислимых множеств. — ДАН СССР, 1970, 191, с. 279—282.
- Миллер (Miller C. W. III)
1. On algebraically closed groups. — Princeton (N. J.): Princeton University, 1974, preprint.
- Морли (Morley M.)
1. Categoricity in power. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114, p. 514—538.
- Нейман Б. (Neumann B. H.)
1. A note on algebraically closed groups. — J. London Math. Soc., 1952, 27, p. 247—249.
2. The isomorphism problem for algebraically closed groups. — In: Word Problems/Ed. B. B. Boone, F. B. Cannonito and R. C. Lyndon. Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 553—562.
- Пирс (Pierce R. S.)
1. Modules over commutative regular rings. — Mem. Amer. Math. Soc., 1967, 70.
- Пресбургер (Presburger M.)
1. Ueber die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchen die Addition als einzige Operation hervortritt. — In: Comptes Rendus du I Congrès de Mathématiciens des Pays Slaves. Warsaw, 1930, S. 92—101.
- Рабин (Rabin M. O.)
1. Non-standard models and the independence of the induction axiom. — In: Essays on the Foundations of Mathematics. Jerusalem: Magnes Press, 1961, p. 287—299.

Рейес (Reyes G. E.)

1. Typical and generic in a Baire space for relations: Thesis. — Berkeley, 1967.

Ритт (Ritt J.)

1. Differential Algebra. — N. Y.: Dover, 1966.

Робинсон (Robinson A.)

1. On the Metamathematics of Algebra. — Amsterdam: North-Holland, 1951.
2. On ordered fields and definite functions. — Math. Ann., 1955, 130, p. 257—271.
3. Complete Theories. — Amsterdam: North-Holland, 1956.
4. On the concept of a differentially closed field. — Bull. Research Council Israel (F), 1959, 8F, p. 113—128.
5. Solution of a problem of Tarski. — Fundam. math., 1959, 47, p. 179—204.
6. Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra. — Amsterdam: North-Holland, 1963. [Русский перевод: Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. — М.: Наука, 1967.]
7. Infinite forcing in model theory. — In: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium/Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 317—340.
8. Non-standard arithmetic and generic arithmetic. — In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, IV/Ed. P. Suppes et al. Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 137—154.

Саббах (Sabbagh G.)

1. Personal communication. — 1970.

Сакс (Sacks G.)

1. Saturated Model Theory. — N. Y.: Benjamin, 1972.
2. The differential closure of a differential field. — Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 78, p. 629—633.

Сараццо (Saracino D.)

1. Model companion for $\aleph_0$ categorical theories. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 39, p. 591—598.
2. Wreath products and existentially complete solvable groups. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 197, p. 327—339.
3. On existentially complete nilpotent groups: Abstract 74T—E36. — Notices Amer. Math. Soc., 1974, 21, p. A-379.
4. A counterexample in the theory of model companions. — New Haven (Conn.): Yale University, 1975, preprint.

Сараццо и Вайсспеннинг (Saracino D., Weisspfenning W.)

1. Commutative regular rings without prime model extensions. — New Haven (Conn.): Yale University, 1973, preprint.

Сейденберг (Seidenberg A.)

1. An elimination theory for differential algebra. — Univ. of California Math. Publications, 1956, 3, p. 31—65.

Симмонс (Simmons H.)

1. Existentially closed structures. — J. Symbolic Logic, 1972, 37, p. 293—310.
2. A possible characterisation of generic structures. — Math. Scand., 1972, 31, p. 257—261.
3. An omitting types theorem with an application to the construction of generic structures. — Math. Scand., 1973, 33, p. 46—53.
4. Une construction du forcing-compagnon d'une théorie — C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1973, 277, p. 563—566.
5. Companion Theories (Forcing in Model Theory). — Louvain: Vander, 1975.

Скотт Д. (Scott D.)

1. Completing ordered fields. — In: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability/Ed. W. A. J. Luxemburg. N. Y.: Holt, Rinehart and Winston, 1969, p. 274—278.

Скотт У. Р. (Scott W. R.)

1. Algebraically closed groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, p. 118—121.

Тайцлин М. А.

1. Экзистенциально-замкнутые коммутативные кольца. В кн.: V Всесоюзная конференция по математической логике. Новосибирск, 1974.

Тарский (Tarski A.)

1. A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. — 2nd revised ed. — Berkeley: Univ. of California Press, 1951.

Тарский и Ваут (Tarski A., Vaught R. L.)

1. Arithmetical extensions of relational systems. — Compositio Math., 1957, 13, p. 81—102.

Тержанян (Terjanian G.)

1. Un contre-exemple à une conjecture d'Artin. — C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1966, 262, p. 612.

Уилер (Wheeler W. H.)

1. Algebraically closed division rings, forcing, and the analytic hierarchy: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1972.

Уинклер (Winkler P.)

1. Assignment of Skolem functions for model complete theories: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1975.

Фишер (Fisher E.)

1. Homogeneous-universal model revisited. — Yale notes, 1970.

Фрид и Сакердот (Fried M., Sacerdote G.)

1. A primitive recursive procedure for solving diophantine problems over all residue class fields of a number field, and all finite fields. — Irvine: University of California, 1973, preprint.

Хигмен (Higman G.)

1. Subgroups of finitely presented groups. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1961, 262, p. 455—475.

Хигмен, Нейман Б. и Нейман Х. (Higman G., Neumann B. H., Neumann H.)

1. Embedding theorems for groups. — J. London Math. Soc., 1949, 24, p. 247—254.

Хиршфельд (Hirschfeld J.)

1. Existentially complete and generic structures in arithmetic: Thesis. — New Haven (Conn.): Yale University, 1972.

Хиршфельд и Уилер (Hirschfeld J., Wheeler W. H.)

1. Forcing, Arithmetic, and Division Rings. — Berlin: Springer, 1975.

Циглер (Ziegler M.)

1. Die elementäre Theorie des Henselschen Körper: Thesis. — Cologne: University of Köln, 1972.

2. Personal communication. — 1975.

Черлин (Cherlin G.)

1. Algebraically closed commutative rings. — J. Symbolic Logic, 1973, 38, p. 493—499.

Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)

1. Model Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Русский перевод: Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.]

Шелах (Schelah S.)

1. Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers. — Israel J. Math., 1971, 10, p. 224—233.
2. A note on model complete models and generic models. — Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 34, p. 509—514.
3. Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories. — J. Symbolic Logic, 1972, 37, p. 107—113.

4. Differentially closed fields. — Israel J. Math., 1973, 16, p. 314—328.
 5. Uniqueness of prime models, with an application to differential fields: Abstract 74T—E17. — Notices Amer. Math. Soc., 1975, 21, p. A-318.
- Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. A theorem on quantifier elimination. — Symposia Math., 1971, 5, p. 173—176.
- Эклоф и Саббах (Eklof P., Sabbagh G.)
1. Model completions and modules. — Ann. Math. Logic, 1971, 2, p. 251—295.
- Энрап (Henrard P.)
1. Une theorie sans modèle generique. — C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1971, 272, p. 293—294.
 2. Le «forcing-compagnon» sans «forcing». — C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1973, 276, p. 821—822.

ОДНОРОДНЫЕ МНОЖЕСТВА

Майкл Морли

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	183
§ 2. Теоремы о разбиении и теорема Эрэнфойхта — Мостовского	184
§ 3. Скулемовские функции и элементарные подмодели	187
§ 4. ω -логика	189
§ 5. Типы и модели Эрэнфойхта — Мостовского	191
§ 6. Теоремы о разбиении для больших кардиналов и конструктивный универсум	195
Литература	198

§ 1. Введение

Свободная группа с множеством X свободных порождающих обладает тем свойством, что каждое одно-однозначное отображение X в себя может быть продолжено до мономорфизма группы в себя. Кроме того, если одно-однозначное отображение множества X в себя сюръективно, то индуцированный мономорфизм в действительности является автоморфизмом.

Могут ли существовать модели с аналогичными свойствами для более общих теорий? (Обычно, но не всегда, под теорией понимается теория в языке исчисления первого порядка.) Точнее, существует ли для данного множества X модель $\mathcal{A}$ теории T такая, что каждое одно-однозначное отображение X в себя может быть продолжено до мономорфизма модели $\mathcal{A}$? Очевидно, если теория T включает линейный порядок, то перестановки множества X , не сохраняющие порядок, не могут быть продолжены до мономорфизмов модели $\mathcal{A}$. Несколько неожиданной выглядит следующая теорема, утверждающая, что только линейные упорядочения являются единственным исключением из правила.

1.1. Теорема (Эрэнфойхт — Мостовский). Пусть T — счетная теория в исчислении предикатов, обладающая бесконечной моделью, и пусть $\langle X, < \rangle$ — бесконечное линейно упорядоченное множество. Тогда существует модель $\mathcal{A}$ теории T с $X \subseteq A$ такая, что каждое сохраняющее порядок отображение множества X в себя индуцирует мономорфизм модели $\mathcal{A}$ в себя, а каждое сюръ-

активное отображение множества X , сохраняющее порядок, индуцирует автоморфизм модели $\mathfrak{A}$.

Варьируя порядковый тип $\langle X, < \rangle$, можно получать модели с интересными свойствами. Часть данной работы посвящена обсуждению того, насколько модель $\mathfrak{A}$ определяется порядковым типом $\langle X, < \rangle$.

В § 2 содержится доказательство слабой формы теоремы Эрэнфойхта — Мостовского. В § 3 обсуждается механизм порождения подмоделей и приводится более сильная форма результата § 2. В § 4 содержится обобщение теоремы Эрэнфойхта — Мостовского на случай неэлементарных языков. Применение теоремы Эрэнфойхта — Мостовского в теории групп приводится в § 5, где обсуждаются теории, модели которых содержат сравнительно большие однородные множества. В § 6 рассматриваются некоторые следствия существования однородных множеств порядкового типа ω_1 в моделях теории множеств.

§ 2. Теоремы о разбиении и теорема Эрэнфойхта — Мостовского

Предварительно введем некоторые обозначения и определения. Пусть $X^{(n)}$ обозначает множество

$$X^{(n)} = \{y: y \subset X \text{ и } |y| = n\}.$$

Предполагая в дальнейшем выполнимость аксиомы выбора, мы можем считать множество X линейно упорядоченным. Поэтому множество $X^{(n)}$ можно рассматривать как множество n -ок

$$\{\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle: x_i \in X, x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}\}.$$

В дальнейшем мы будем обращаться с множеством $X^{(n)}$ как с множеством строго упорядоченных n -ок элементов множества X .

Ординал γ есть множество ординалов $< \gamma$. Как обычно, наименьший кардинал $> \kappa$ будем обозначать через κ^+ . Для каждого ординала α функция $2(\kappa, \alpha)$ определяется по индукции:

$$2(\kappa, 0) = \kappa,$$

$$2(\kappa, \alpha) = \sup \{2^{2(\kappa, \gamma)}: \gamma < \alpha\}, \quad \alpha > 0.$$

Положим $\beta_\alpha = 2(\omega, \alpha)$. В этих обозначениях обобщенная континуум-гипотеза есть равенство $\omega_\alpha = \beta_\alpha$ для всех α .

Пусть P есть разбиение $X^{(n)}$ на μ непересекающихся классов. Множество $Y \subset X$ является однородным для P , если $Y^{(n)}$ содержится в одном из классов разбиения. Если для каждого множества X мощности κ и произвольного разбиения P множества $X^{(n)}$ на μ непересекающихся классов X содержит однородное для P

множество Y мощности λ , то будем писать

$$\kappa \rightarrow (\lambda)_\mu^n.$$

Доказательства следующих теорем о мощности однородных множеств приводятся в главе 3 «Теории множеств».

2.1. Теорема (Рамсей). *Если t конечное, то*

$$\omega \rightarrow (\omega)_m^n.$$

2.2. Теорема (Эрдёш — Радо). *Для каждого бесконечного кардинала κ*

$$(2(\kappa, n))^+ \rightarrow (\kappa^+)_\kappa^{n+1}.$$

2.3. Теорема (Эрдёш). *Не существует кардинала κ такого, что*

$$\kappa \rightarrow (\omega)_2^\omega,$$

т. е. не существует бесконечных однородных множеств для любого разбиения множества $X^{(\omega)}$ счетных подмножеств множества X .

2.4. Теорема (Эрэнфойхт — Мостовский). *Пусть T — счетная теория в языке L исчисления предикатов, обладающая бесконечными моделями, и пусть $\langle X, < \rangle$ — бесконечное линейное упорядоченное множество. Тогда теория T имеет модель $\mathfrak{A}$, $X \subseteq \mathfrak{A}$, обладающую тем свойством, что для каждого n все строго упорядоченные n -ки элементов $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ множества X удовлетворяют одному и тому же множеству формул языка L вида $\Phi(v_0, \dots, v_{n-1})$.*

Замечание. Упомянутое множество X называется однородным *) для модели $\mathfrak{A}$. Множество формул Φ , выполняющихся на строго упорядоченных последовательностях элементов из X , называют множеством Эрэнфойхта — Мостовского (Э. — М. множеством). Из теоремы о компактности следует, что для каждого Э. — М. множества Φ и линейного упорядочения $\langle Y, < \rangle$ существует модель, содержащая $\langle Y, < \rangle$ как однородное подмножество, строго упорядоченные последовательности элементов которого удовлетворяют формулам из Φ .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — бесконечная модель теории T и $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — некоторое перечисление формул языка L . Определим на B линейный порядок $<$. (Вообще говоря, этот порядок не имеет никакого отношения к предикатам модели $\mathfrak{B}$). Предположим, что φ_0 имеет своими свободными переменными переменные $v_0, \dots, v_n$. Формула φ_0 определяет на $B^{(n+1)}$ разбиение на два класса на основании того, удовлетворяет или нет этой

*) Часто это множество называют неразличимым в модели $\mathfrak{A}$ (см. Дополнение). — *Прим. ред.*

формуле строго упорядоченная $(n+1)$ -ка $\langle b_0, \dots, b_n \rangle$. Тогда, согласно теореме 2.2, существует бесконечное однородное подмножество $B_0 \subset B$ для этого разбиения. Пусть φ_1 имеет своими свободными переменными $v_0, \dots, v_k$. Тогда φ_1 определяет разбиение множества $B_0^{(k+1)}$ на два класса, для которого также существует бесконечное однородное подмножество $B_1 \subset B_0$.

Продолжая эту процедуру, мы тем самым конструируем последовательность $\{B_i: i \in \omega, B_{i+1} \subset B_i\}$ вложенных множеств B_i . Обогатим L , добавляя к нему новый константный символ x для каждого $x \in X$, и расширим теорию T , добавляя к ней для каждой формулы $\varphi_i \equiv \varphi_i(v_0, \dots, v_k)$ и каждой последовательности $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ из $X^{(k+1)}$ предложение $\varphi_i(x_0, \dots, x_k)$ или $\neg \varphi_i(x_0, \dots, x_k)$ в зависимости от того, удовлетворяет упорядоченная $(k+1)$ -ка элементов B_i формуле φ или $\neg \varphi$. Расширенная теория является непротиворечивой и, следовательно, согласно теореме о компактности она обладает моделью $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей заключению теоремы. $\square$

2.5. Следствие. Если $\varphi(v)$ выполняется на бесконечном множестве элементов в некоторой модели теории T , то последняя остается непротиворечивой при добавлении к ней условия о том, что элементы $\langle X, < \rangle$ удовлетворяют $\varphi(v)$ в модели $\mathfrak{A}$ из теоремы 2.4. Если $\varphi(v_0, v_1)$ линейно упорядочивает бесконечное множество в некоторой модели теории T , то в модели $\mathfrak{A}$ формула φ может определить упорядочение $<$ множества X .

2.6. Определение. Подсистемой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется произвольное подмножество A , замкнутое относительно всех функций из $\mathfrak{A}$. Подсистема, порожденная подмножеством X множества A , есть наименьшая подсистема системы $\mathfrak{A}$, содержащая X .

Таким образом, элемент подсистемы системы $\mathfrak{A}$, порожденной множеством X , может рассматриваться как терм $t(x_0, \dots, x_n)$, где $x_i \in X$ и t — суперпозиция функций системы $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим некоторое сохраняющее порядок отображение f однородного в модели $\mathfrak{A}$ множества X в $\mathfrak{A}$. Тогда f может быть продолжено на подсистему, порожденную множеством X , согласно следующему определению:

$$f(t(x_0, \dots, x_n)) = t(fx_0, \dots, fx_n).$$

Из теоремы 2.4 немедленно следует, что в действительности f индуцирует мономорфизм подсистемы в себя, а в случае, когда f есть отображение на, оно может быть продолжено до автоморфизма подсистемы. Таким образом, если мы желаем рассматривать подсистему, порожденную множеством X алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в качестве модели теории T , то мы должны предварительно достичь цели, поставленной в § 1. Этому и посвящен следующий параграф.

§ 3. Скулемовские функции и элементарные подмодели

Пусть L — язык исчисления предикатов. Соотнося каждой формуле $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ языка L новый n -арный функциональный символ f_φ (скулемовскую функцию), можно сконструировать новый язык L' . Если $n = 0$, то скулемовская функция есть константа c_φ . Определим по индукции языки L_n^* и L^* :

$$\begin{aligned} L_0^* &= L', & L_{n+1}^* &= (L_n^*)', \\ L^* &= \bigcup_{n \in \omega} L_n^*. \end{aligned}$$

3.1. Определение. Определяющим предложением скулемовской функции f_φ является L^* -предложение

$$\forall v_0 \dots v_{n-1} [\exists v_n \varphi(v_0, \dots, v_n) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{n-1}, f_\varphi(v_0, \dots, v_{n-1}))].$$

3.2. Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ для языка L' является скулемовской моделью, если каждое определяющее предложение языка L^* истинно в $\mathfrak{A}$. Если T — теория в языке L , то ее скулемовское замыкание определяется как $T^* = T \cup \{ \text{определяющие предложения языка } L^* \}$.

3.3. Определение. Термы языка L^* называются скулемовскими термами.

В предположении выполнимости аксиомы выбора каждая алгебраическая система $\mathfrak{A}$ для языка L может быть расширена до скулемовской модели $\mathfrak{A}^*$ с тем же основным множеством, что и у $\mathfrak{A}$, и такой, что для всех формул φ языка L $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_n)$, $a_i \in A$, если и только если $\mathfrak{A}^* \models \varphi(a_0, \dots, a_n)$.

3.4. Определение. Элементарная подмодель $\mathfrak{B}$ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ для языка L есть подсистема системы $\mathfrak{A}$ такая, что

$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_0, \dots, b_n), \quad b_i \in B,$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b_0, \dots, b_n)$$

для каждой формулы φ языка L .

В частности, одно и то же множество предложений языка L истинно и в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{B}$, так что и $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются моделями одной и той же полной теории. Тот факт, что $\mathfrak{B}$ — элементарная подмодель $\mathfrak{A}$, записывается $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$. Можно показать, что $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, если для каждой формулы φ языка L

$$\mathfrak{A} \models \exists v_0 \varphi(v_0, b_1, \dots, b_n), \quad b_i \in B,$$

тогда и только тогда, когда найдется такой элемент $b_0 \in B$, что

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b_0, b_1, \dots, b_n).$$

Пусть B — некоторое подмножество скулемовской модели $\mathfrak{A}^*$ языка L^* . Из предыдущего параграфа, учитывая тот факт, что скулемовская модель удовлетворяет определяющим предложениям L^* , следует, что подсистема, порожденная подмножеством B в $\mathfrak{A}^*$, является элементарной подмоделью модели $\mathfrak{A}^*$. Эта подсистема есть множество термов $\{t(b_0, \dots, b_n) : b_i \in B, t \text{ — скулемовский терм}\}$.

Закончим обсуждение теоремы 1.1 Эренфойхта — Мостовского. В доказательстве теоремы 2.4 предположим, что T — скулемовская теория, а $\mathfrak{B}$ — скулемовская модель. Тогда модель $\mathfrak{A}$, существование которой утверждается теоремой 2.4, является скулемовской моделью. Элементарная подмодель модели $\mathfrak{A}$, порожденная множеством X , и является той искомой (скулемовской) моделью теории T , которая полностью удовлетворяет заключениям теоремы 1.1.

3.5. Определение. Элементарную подмодель скулемовской модели $\mathfrak{A}$ в теореме 2.4, порожденную множеством X , обозначим через $\mathcal{M}(\Phi, X)$, где Φ есть $\exists$ —М. множество формул языка L^* , выполняющихся на строго упорядоченных последовательностях элементов множества X .

В оставшейся части настоящего параграфа мы займемся изучением некоторых свойств моделей $\mathcal{M}(\Phi, X)$.

(1) Каждая теория T^* имеет модель с нетривиальным автоморфизмом.

Доказательство. Достаточно в качестве $\langle X, < \rangle$ взять линейный порядок, подобный упорядочению множества рациональных чисел, который имеет нетривиальный порядковый автоморфизм.

3.6. Определение. Мономорфизм f между алгебраическими системами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ для языка L

$$f: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

называется элементарным, если для всех формул φ языка L имеет место следующее свойство:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_n), \quad a_i \in A,$$

тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \models \varphi(fa_0, \dots, fa_n)$.

(2) Рассмотрим две системы $\mathcal{M}(\Phi, X)$ и $\mathcal{M}(\Phi, Y)$.

(а) Каждое сохраняющее порядок отображение f множества X в Y индуцирует элементарное отображение $\mathcal{M}(\Phi, X)$ в $\mathcal{M}(\Phi, Y)$.

(б) Элементарный мономорфизм, индуцированный f , является сюръективным, если и только если f есть отображение X на Y .

*) Имеющая бесконечную модель. — Прим. ред.

Доказательство. (а) Очевидно, так как строго упорядоченные последовательности элементов из X и Y удовлетворяют одним и тем же формулам.

(б) Предположим, что $y \in Y - f(X)$ и $y \in f(\mathcal{M}(\Phi, X))$. Тогда $y = t(fx_0, \dots, fx_m) = t(y_0, \dots, y_m)$ для некоторых $x_0 < \dots < x_m \in X$ и $y_0 < \dots < y_m \in Y$, $y \neq y_i$, $1 \leq i \leq m$. Предположим также, что $y_0 < \dots < y_k < y < y_{k+1} < \dots < y_m$. Так как Y — однородное множество с $\exists$ —М. множеством формул Φ , то формулы

$$\varphi_{k+1} = t(v_0, \dots, v_k, v_{k+2}, \dots, v_{m+1}), \dots$$

$$\dots, t(v_0, \dots, v_k, v_{l+1}, \dots, v_{l+m-k}) = v_l,$$

где $l \geq k+1$, принадлежат Φ . Но из этих формул следует, что Y содержит самое большее $m+2$ различных элементов, что противоречит тому, что Y — бесконечное линейно упорядоченное множество. $\square$

§ 4. ω -ЛОГИКА

ω -логикой называется язык с константами для каждого натурального числа и двумя типами переменных; переменные одного типа принимают значения из множества натуральных чисел, переменные другого типа — значения из основного множества. Переменные, принимающие своими значениями натуральные числа, обозначим через $\omega_0, \omega_1, \dots$, переменные второго типа — через $v_0, v_1, \dots$. Более детальные сведения о ω -логиках можно получить в 5.2 главы I. Результаты настоящего параграфа в равной степени могут быть успешно применимы и к слабой логике второго порядка, описанной в 5.3 главы I.

Может ли теорема 1.1 Эренфойхта — Мостовского быть обобщена на случай ω -логики? Очевидно, что не составляет трудностей получить язык L^* , добавив скулемовские функции к языку L рассматриваемой ω -логики, и записать для них определяющие предложения. Неприятность возникает при конструировании $\exists$ —М. множества формул Φ . Как быть с формулами вида $\varphi \equiv \exists \omega_0 (t(v_0, \dots, v_n) = \omega_0)$? Ведь мы должны указать для $t(v_0, \dots, v_n)$, $v_0 < \dots < v_n$, некоторое определенное натуральное число ω .

В общем случае формула φ может определить разбиение P множества $(n+1)$ -ок на ω непересекающихся классов. Следовательно, вместо теоремы Рамсея целесообразно обратиться к теореме Эрдеша — Радо.

4.1. Теорема. Пусть T — счетная теория ω -логики L . Если T обладает ω -моделями во всех мощностях β_α , $\alpha \in \omega_1$, то для данного произвольного линейно упорядоченного множества $\langle X, < \rangle$ существует ω -модель $\mathfrak{A}$ теории T , $X \subseteq A$, такая, что все строго

упорядоченные последовательности элементов множества X удовлетворяют одному и тому же множеству формул языка L .

Доказательство. Предположим, что T — скульемовская теория в ω -логике L^* , и пусть $\mathfrak{A}_\alpha$, $|\mathfrak{A}_\alpha| \geq \beta_\alpha$ — скульемовские модели. Линейно упорядочим каждую $\mathfrak{A}_\alpha$ и перенумеруем формулы L^* : $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$. На первом шаге возможны следующие два случая:

(1) $\varphi_0 \equiv \exists \omega_0 (t(v_0, \dots, v_n) = \omega_0)$. Формула φ_0 индуцирует разбиение P множества $A_\alpha^{(n+1)}$ на ω классов, один из которых есть множество строго упорядоченных $(n+1)$ -ок, удовлетворяющих формуле $\varphi_0^{-1} \equiv \neg \varphi_0$, и определяет последовательность ω классов, каждый из которых образован строго упорядоченными $(n+1)$ -ками, удовлетворяющими формуле

$$\varphi'_0 \equiv \exists \omega_0 (t(v_0, \dots, v_n) = \omega_0 \wedge t(v_0, \dots, v_n) = l), \quad l \in \omega.$$

Согласно теореме Эрдеша — Радо существует множество $C_{\alpha+n}^0 \subset A_{\alpha+n}$, однородное для P , и $|C_{\alpha+n}^0| \geq \beta_\alpha$. Удовлетворяется ли каждая отдельная формула φ_k , $k \geq -1$, строго упорядоченными последовательностями из $C_{\alpha+n}$, зависит от α , но так как существует только ω таких выборов и ω не конфинально в ω_1 , то найдется конфинальная подпоследовательность $\{B_\alpha^0, \alpha \in \omega_1\}$ последовательности $\{C_\alpha^0, \alpha \in \omega_1\}$ такая, что для некоторого $k \geq -1$ и для всех $\alpha < \omega_1$ строго упорядоченные $(n+1)$ -ки множества B_α^0 удовлетворяют одной и той же формуле φ_k^0 и $|B_\alpha^0| \geq \beta_\alpha$.

(2) $\varphi_0 \equiv \varphi_0(v_0, \dots, v_n)$ и φ_0 не является формулой вида $\exists \omega_0 (t(v_0, \dots, v_n) = \omega_0)$. Формула φ_0 индуцирует разбиение P множества $A_\alpha^{(n+1)}$ на два непересекающихся класса, один из которых образован из строго упорядоченных $(n+1)$ -ок, удовлетворяющих либо формуле $\varphi_0^0 \equiv \varphi_0$, либо формуле $\varphi_0^{-1} \equiv \neg \varphi_0$.

По теореме Эрдеша — Радо существует множество $C_{\alpha+n}^0 \subseteq A_{\alpha+n}$, однородное для P , и $|C_{\alpha+n}^0| \geq \beta_\alpha$. Так как 2 не конфинально в ω_1 , найдем такую конфинальную подпоследовательность $\{B_\alpha^0, \alpha \in \omega_1\}$ последовательности $\{C_\alpha^0, \alpha \in \omega_1\}$, что строго упорядоченные $(n+1)$ -ки B_α^0 удовлетворяют в точности только одной из формул $\varphi_0^0 \equiv \varphi_0$ или $\varphi_0^{-1} \equiv \neg \varphi_0$ для всех $\alpha \in \omega_1$.

Продолжая индукцию, построим такое множество последовательностей $\{\{B_\alpha^n, \alpha \in \omega_1\}, n \in \omega\}$, что

$$(i) |B_\alpha^n| \geq \beta_\alpha;$$

$$(ii) B_\alpha^{n+1} \subseteq B_\beta^n \text{ для некоторого } \beta \text{ и множество ординалов } \{\beta: \exists \alpha \in \omega_1 (B_\alpha^{n+1} \subseteq B_\beta^n)\}$$

конфинально в ω_1 ;

(iii) найдется такое $k \geq -1$, что строго упорядоченные последовательности из B_α^k для всех $\alpha < \omega_1$ удовлетворяют φ_n^k . Обозначим формулу φ_n^k через φ_n .

Множество формул $\{\varphi_n, n \in \omega\}$ и есть искоемое Э. — М. множество Φ . Далее ход доказательства теоремы 4.1 подобен тому, как это делалось для теоремы 2.4. $\square$

Доказательство теоремы 4.1 непосредственно приводит нас к теореме 1.1 Эренфойхта — Мостовского для теорий ω -логики.

Другим неэлементарным языком является $L_{\omega_1\omega}$. Формулы этого языка строятся по индукции из формул исчисления предикатов посредством счетных конъюнкций и дизъюнкций, но строго конечных квантификаций. В $L_{\omega_1\omega}$ нет формул с более чем конечным числом свободных переменных.

Теории T , состоящие из предложений языка $L_{\omega_1\omega}$, ведут себя подобно теориям счетной ω -логики. Это обстоятельство объясняется тем, что счетная дизъюнкция $\bigvee_{i \in \omega} \Phi_i(v_0, \dots, v_n)$ формул Φ_i исчисления предикатов может быть заменена формулой

$\exists \omega_0 \Phi(\omega_0, v_0, \dots, v_n)$ соответствующей ω -логики, где $\Phi(i, v_0, \dots, v_n) \equiv \Phi_i(v_0, \dots, v_n)$, а счетная конъюнкция $\bigwedge_{i \in \omega} \Phi_i(v_0, \dots, v_n)$ —

формулой $\forall \omega_0 \Phi(\omega_0, v_0, \dots, v_n)$ ω -логики. Таким образом, теорема 4.1 может быть в равной степени применена и к теориям T , состоящим из предложений языка $L_{\omega_1\omega}$.

§ 5. Типы и модели Эренфойхта—Мостовского

Следующие две теоремы имеют интересные приложения для алгебраических теорий, две из которых будут обсуждаться в данной части.

5.1. Определение. 1-типом теории T в языке L называется максимальное множество $\{\varphi_i \equiv \varphi_i(v_0): \varphi_i \text{ — формула } L\}$ формул, совместное с T . Максимальное множество $\{\varphi_i \equiv \varphi_i(v_0, \dots, v_{n-1}): \varphi_i \text{ — формула } L\}$ формул, совместное с теорией T в языке L , есть n -тип этой теории. Максимальное множество формул $\{\varphi_i(v_0, b_1, \dots, b_n): b_i \in B, \varphi_i \equiv \varphi_i(v_0, \dots, v_n) \text{ — формула языка } L\}$ с параметрами из B , совместное с теорией T в языке $L(B)$, называется 1-типом теории T , соответствующим алгебраической системе $\mathfrak{B}$ в языке $L(B)$.

5.2. Теорема. Счетная теория T в исчислении предикатов, обладающая бесконечными моделями, имеет модель $\mathfrak{A}$ в каждой бесконечной мощности κ , реализующую ровно счетное число типов над любым счетным подмножеством множества A .

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы 5.2 будет следовать, что если T есть счетная теория в ω -логике, обладающая ω -моделями мощности $> \beta_\alpha$ для каждого $\alpha \in \omega_1$, то она имеет

ω -модель $\mathfrak{M}$ в каждой бесконечной мощности κ , удовлетворяющую заключению теоремы 5.2.

Доказательство. Мы покажем, что если κ — бесконечный кардинал и Φ является Э. — М. множеством формул для скулемовской теории T , то $\mathcal{M}(\Phi, \kappa)$, где κ — множество ординалов $< \kappa$, реализует только счетное число типов над произвольным его счетным подмножеством C . Каждый элемент из $\mathcal{M}(\Phi, \kappa)$ соответствует скулемовскому терму $t(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \kappa$, $\lambda_0 < \dots < \lambda_n$. Элементы счетного множества C соответствуют термам, в которых λ_i являются элементами некоторого счетного подмножества $C' \subset \kappa$. Множество C' называется поддержкой множества C . Тип данного терма $t(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ над множеством C определяется термом $t(v_0, \dots, v_n)$ и расположением элементов λ_i в упорядоченном множестве C' . Множество C' является вполне упорядоченным, поэтому существует только счетное число возможностей продолжить конечное подмножество в нем. Так как имеется только счетное число скулемовских термов $t(v_0, \dots, v_n)$, то найдется только счетное множество типов, соответствующих C . $\square$

5.3. Теорема. Счетная теория T , имеющая определимое бесконечное линейное упорядочение, имеет неизоморфные модели в каждой несчетной мощности.

Доказательство. Применяя только что доказанную теорему, мы должны лишь указать модели $\mathfrak{M}$ мощности $\kappa \geq \omega_1$, реализующие несчетное множество 1-типов над счетным подмножеством $C \subset A$. Предположим, что T — скулемовская теория; пусть линейное упорядочение определяется формулой $\varphi(v_0, v_1)$ и пусть $\langle X, < \rangle$ — линейно упорядоченное множество мощности ω_1 , содержащее (всюду) плотное счетное подмножество W . Для каждого элемента $x \in X$ добавим константу к T , а также предложение $\varphi(x_0, x_1)$, если и только если $x_0 > x_1$. Расширенная теория T_1 непротиворечива и, следовательно, имеет модель в каждой несчетной мощности κ . Каждая модель $\mathfrak{M}$ теории T_1 реализует несчетное множество типов над счетным подмножеством W , так как каждое $x \in X$ определяет отличное от других сечение, соответствующее W . $\square$

Макинтайр и Шеллах [1] привели великолепный пример использования теоремы 5.1. Они доказали существование в каждой несчетной мощности κ неизоморфных универсальных локальных конечных групп. Следующий материал заимствован из их работы.

5.4. Определение. Группа G называется универсальной локально конечной, если:

- (1) G — локально конечная группа, т. е. каждая конечно порожденная подгруппа является конечной;
- (2) каждая конечная группа изоморфно вложима в G ;

(3) если G_1 и G_2 — изоморфные конечные подгруппы группы G , то существует внутренний автоморфизм G , отображающий G_1 на G_2 .

Известно, что существуют универсальные локально конечные группы в каждой бесконечной мощности κ . Произвольная локально конечная группа бесконечной мощности κ может быть вложена в универсальную локально конечную группу мощности λ для каждого $\lambda \geq \kappa$. Все счетные универсальные локально конечные группы изоморфны.

Теория универсальных локальных конечных групп G является предложением T языка $L_{\omega_1, \omega}$. Это предложение T получается, если учитывать следующие обстоятельства:

(1) перенумеровав счетное множество таблиц произведений D_{g_i} конечных групп G_i , можно показать, что каждое конечное подмножество элементов из G удовлетворяет одной из этих таблиц и что для каждой таблицы D_{g_i} существует конечное подмножество множества G , которое удовлетворяет ей;

(2) если каждое из двух конечных подмножеств множества G удовлетворяет одной и той же таблице D_{g_i} , то существует внутренний автоморфизм группы G , переводящий одно множество на другое.

5.5. Теорема. В каждой несчетной мощности κ существуют неизоморфные универсальные локально конечные группы.

Доказательство. Теория T локальных конечных групп может рассматриваться как предложение языка $L_{\omega_1, \omega}$. Так как известно, что локально конечные группы существуют в каждой бесконечной мощности, то заключение теоремы 5.2 может быть применено к теории T .

Может быть найдена локально конечная группа Γ мощности ω_1 , реализующая ω_1 различных типов над некоторым счетным подмножеством $C \subset \Gamma$. Группа Γ вложима в универсальную локально конечную группу произвольной мощности $\kappa \geq \omega_1$.

Пусть S_3 — симметрическая группа от трех элементов. Тогда S_3 имеет два порождающих α, β , $\alpha^2 = e$, $\beta^3 = e$, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Декартонская степень H^* всякой конечной группы является локально конечной. Следовательно, S_3^{ω} — локально конечная группа. Группа S_3^{ω} содержит счетное подмножество

$$C \ni \{a_i: i \in \omega; \text{ если } n = i, \text{ то } a_i(n) = \alpha; \text{ если } n \neq i, \text{ то } a_i(n) = e\}.$$

Выберем множество P , состоящее из ω_1 отличных друг от друга подмножеств ω . Группа S_3^{ω} содержит множество C_P , где $C_P \ni \{c_X(n): \text{ если } n \in X, \text{ то } c_X(n) = e; \text{ если } n \notin X,$

$$\text{то } c_X(n) = \beta, X \in P\}.$$

Заметим, что $c_X \cdot a_i = a_i \cdot c_X$, если и только если $i \in X$. Таким

образом, для различных элементов X, Y множества P , подмножества элементов множества C , с которыми перестановочны s_X и s_Y , также различны. По этой причине s_X и s_Y имеют разные типы над C . Пусть Γ — группа, порожденная множеством $C \cup C_p$ в S_C^0 . Группа Γ , как подгруппа локально конечной группы, также локально конечная, имеет мощность ω_1 и реализует ω_1 типов над счетным множеством C . $\square$

Кратко обсудим ω -стабильные теории, опуская доказательства.

5.6. Определение. Полная теория T называется *стабильной* в κ или *κ -стабильной*, если число 1-типов, реализуемых в произвольной модели $\mathfrak{A}$ теории T над произвольным подмножеством C множества A , $|C| \leq \kappa$, самое большее κ .

Замечание. Легко видеть, что мы приходим к эквивалентному определению, если «1-тип» заменить на « n -тип» для произвольного $n \geq 1$.

5.7. Теорема. Если T ω -стабильна, то T будет κ -стабильной для всех $\kappa, \kappa \geq \omega$.

5.8. Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, X — подмножество A и S_n — симметрическая группа от n элементов. Тогда n -арное отношение R называется *связным* над X в $\mathfrak{A}$, если для каждой последовательности $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ из n различных элементов множества X существует такой элемент $s \in S_n$, что $\mathfrak{A} \models R(x_{s(0)}, \dots, x_{s(n-1)})$; оно называется *антисимметричным* над X в $\mathfrak{A}$, если существует такой $s \in S_n$, что $\mathfrak{A} \models \neg R(x_{s(0)}, \dots, x_{s(n-1)})$.

Замечание. Если $\mathfrak{A} = \langle X, < \rangle$ — линейный порядок, то $<$ — антисимметричное связанное бинарное отношение над X .

5.9. Теорема. Не существует модели $\mathfrak{A}$ ω -стабильной теории T , содержащей бесконечное подмножество X , над которым существует антисимметричное связанное отношение R .

Доказательство. Один из вариантов теоремы 5.1. $\square$

5.10. Определение. Линейное упорядоченное множество $\langle X, < \rangle$, где X — подмножество алгебраической системы $\mathfrak{A}$, называется *однородным* над подмножеством $B \subset A$, если для всех строго упорядоченных последовательностей $x_0 < \dots < x_n$ и $y_0 < \dots < y_n$ элементов X и всех формул $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n, \dots, v_{n+m})$ языка L

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x_0, \dots, x_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m})$$

эквивалентно

$$\mathfrak{A} \models \varphi(y_0, \dots, y_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m}),$$

где параметры b_i являются произвольными элементами B .

5.11. Теорема. Пусть T — ω -стабильная теория, κ — регулярный несчетный кардинал, $\mathfrak{A}$ — модель теории T мощности κ

и B — некоторое подмножество A мощности $< \kappa$. Тогда $\mathfrak{A}$ содержит подмножество X мощности κ , которое является однородным относительно B .

Отличительной особенностью этой теоремы является утверждение о том, что модель $\mathfrak{A}$ может содержать большое однородное множество X . Используя теорему 5.9, можно показать, что формулы, выполняемые на последовательностях элементов X , безразличны к его упорядочению. Таким образом, в контексте теоремы 1.1 Эренфойхта — Мостовского модели $\mathcal{M}(\Phi, X)$ для ω -стабильных теорий полностью аналогичны примеру свободных групп, обсуждаемому в § 1.

§ 6. Теоремы о разбиении для больших кардиналов и конструктивный универсум

Мы представим теорему о разбиении, которая позволит доказать существование $\mathfrak{A}$ — M множества Φ такого, что $\mathcal{M}(\Phi, X)$ вполне упорядочено, если вполне упорядоченным является множество X . Это условие на множество Φ необходимо, если мы желаем применить результаты о моделях $\mathcal{M}(\Phi, X)$ в теории множеств.

Множество всех строго упорядоченных конечных последовательностей ординалов из κ , где κ — кардинал, $\kappa = \{\lambda: \lambda \text{ — ординал } < \kappa\}$, будем обозначать $\kappa^{<\omega}$.

6.1. Определение. Подмножество Y кардинала κ называется *однородным* для разбиения P множества $\kappa^{<\omega}$ на непересекающиеся множества, если $Y^{(n)}$ содержится в одном из классов разбиения для каждого n . Этот класс разбиения может зависеть от n .

В настоящем параграфе наше внимание будет сконцентрировано на таких кардиналах κ , для которых $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$. Существование кардинала κ с таким свойством не может быть доказано в ZFC. Однако это следует из аксиомы, утверждающей, что первый такой кардинал является слабо компактным, сильно недосяжимым и, на самом деле, большим, чем наименьший кардинал, удовлетворяющий комбинаторным свойствам, упоминаемым в тексте главы 3 «Теории множеств». Следующая теорема восходит к Роуботтону. Доказательство можно найти у Морли [1].

6.2. Теорема. Если $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$, то $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$.

6.3. Теорема. Предположим, что $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$ и что теория T обладает вполне упорядоченной моделью $\mathfrak{A}$ мощности κ . Тогда $\mathfrak{A}$ содержит однородное множество Y мощности ω_1 и $\mathfrak{A}$ — M множество Φ , удовлетворяемое строго упорядоченными наборами элементов множества Y , обладает тем свойством, что если $\langle X,$

$\langle \rangle$ вполне упорядоченное, то модель $\mathcal{M}(\Phi, X)$ также вполне упорядоченная.

Доказательство. Пусть T — скулемовская теория и $\mathfrak{A}$ — скулемовская модель T . Обозначим упорядочивание $\mathfrak{A}$ через $<$. Счетное множество формул языка L^* определяет разбиение $\mathfrak{A}^{<\omega}$ на 2^ω классов. В $\mathfrak{A}$ существует подмножество Y мощности ω_1 , которое является однородным для этого разбиения. Пусть Φ — множество формул, удовлетворяемое строго упорядоченными наборами элементов из Y . Предположим, что для некоторого вполне упорядоченного множества $\langle X, \langle \rangle \mathcal{M}(\Phi, X)$ не является вполне упорядоченным. $\mathcal{M}(\Phi, X)$ содержит счетную убывающую цепь $z_0 > z_1 > \dots > z_n > \dots$. Последовательность $\{z_n, n \in \omega\}$ имеет счетный носитель $C \subset X$; каждый z_i имеет представление в виде некоторого терма $t(x_0, \dots, x_n)$, $x_i \in C$. Так как C — счетное вполне упорядоченное множество, то существует сохраняющее порядок отображение f множества C в однородное множество Y мощности ω_1 , $Y \subset A$. Отображение f индуцирует элементарный мономорфизм $\mathcal{M}(\Phi, C)$ в $\mathcal{M}(\Phi, Y)$. Тогда $\mathcal{M}(\Phi, C)$ есть элементарная подмодель модели $\mathfrak{A}$; таким образом, $\mathfrak{A}$ содержит счетную убывающую цепь $\{z_0 > f z_1 > \dots > f z_n > \dots\}$, что противоречит тому, что $<$ вполне упорядочивает A . $\square$

6.4. Теорема. Если теория T удовлетворяет условиям теоремы 6.3, то существует $\mathfrak{A}$. — М. множество Ψ формул теории T , которое, удовлетворяя заключению теоремы 6.3, обладает тем свойством, что для каждого скулемовского терма t множество Ψ содержит формулы

- (1) $t(v_0, \dots, v_{m+n}) \leq v_m$
 $\Rightarrow t(v_0, \dots, v_{m+n}) = t(v_0, \dots, v_m, v_{m+n+1}, \dots, v_{m+2n})$;
- (2) $v_n < t(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}, \dots, v_m)$
 $\rightarrow v_{n+1} \leq t(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}, \dots, v_m)$.

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathcal{M}(\Phi, \omega_1)$, где Φ — $\mathfrak{A}$. — М. множество, существование которого утверждается в теореме 6.3. Пусть P — множество всех однородных подмножеств Y мощности ω_1 , содержащихся в $\mathcal{M}(\Phi, \omega_1)$, и пусть $\Gamma = \{\lambda: \lambda \text{ есть } \omega\text{-й элемент } Y \text{ относительно вполне упорядочивания } < \text{ множества } \mathcal{M}, Y \in P\}$. Тогда Γ обладает минимальным элементом λ_ω . Пусть $Z \in P$ есть однородное множество, у которого ω -й элемент есть λ_ω , и пусть Ψ — $\mathfrak{A}$. — М. множество, удовлетворяемое строго упорядоченными наборами элементов Z . $\square$

В качестве упражнения предлагается показать, что если Ψ не содержит формул (1) или (2), соответствующих некоторому скулемовскому терму t , то t может привести к однородному для

$\mathcal{M}(\Phi, \omega_1)$ множеству мощности ω_1 , ω -й элемент которого строго меньше чем λ_ω .

В дальнейшем предполагается, что читатель знаком с системой аксиом теории множеств, которая обсуждается в главе I «Теории множеств».

Пусть T есть обычная система аксиом теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) плюс аксиома конструктивности $V = L$. Если T обладает моделью, ординалы которой имеют порядковые типы λ , $\lambda \geq \kappa$, $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$, то теорема 6.3 утверждает, что $\mathfrak{A}$ содержит множество ординалов Y мощности ω_1 , которое является однородным в $\mathfrak{A}$. В этом случае оказывается возможным доказать существование $\mathfrak{A}$. — М. множества Ψ , называемого *замечательным*, которое, помимо формул вида (1) и (2), приведенных в формулировке теоремы 6.4, содержит формулы вида

$$(3) \quad t(v_0, \dots, v_{n-1}) < v_n$$

для каждого скулемовского терма t в языке L^* .

Для замечательного $\mathfrak{A}$. — М. множества Ψ ординалы модели $\mathcal{M}(\Psi, \kappa)$, где κ — несчетный кардинал, не только вполне упорядочены, но и имеют порядковый тип κ . Таким образом, по теореме Гёделя об изоморфизме $\mathcal{M}(\Phi, \kappa)$ изоморфна модели $\langle \{F(\alpha), \alpha < \kappa\}, \varepsilon \rangle$, где $F(\alpha)$ перечисляет множество, конструируемое на уровне α .

Воспользовавшись принципом рефлексии, легко показать, что $\mathcal{M}(\Psi, \kappa)$, где κ — несчетный кардинал, в действительности является элементарной подсистемой конструктивного универсума.

Из того, что Ψ — замечательное $\mathfrak{A}$. — М. множество, следует, что если α — предельный ординал и $\beta > \alpha$, то ординалы $\mathcal{M}(\Psi, \alpha)$ являются начальными сегментами ординалов модели $\mathcal{M}(\Psi, \beta)$. Таким образом, изоморфизм между $\mathcal{M}(\Phi, \omega_1)$ и $\langle \{F(\alpha), \alpha < \omega_1\}, \varepsilon \rangle$ определяет изоморфизм $\mathcal{M}(\Phi, \omega)$ на $\langle \{F(\alpha), \alpha < \beta\}, \varepsilon \rangle$ для некоторого счетного предельного ординала β . Так как $\mathcal{M}(\Phi, \omega) < \mathcal{M}(\Phi, \omega_1)$ и $\mathcal{M}(\Phi, \omega_1)$ является элементарной подсистемой конструктивного универсума L , то $\langle \{F(\alpha), \alpha < \beta\}, \varepsilon \rangle$ также является элементарной подсистемой конструктивного универсума.

Сейчас мы в состоянии сделать некоторые выводы о размерах конструктивного универсума L в предположении существования кардинала κ , $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$.

Определимый элемент конструктивного универсума L необходимо является определимым элементом каждой его элементарной подсистемы. В частности, каждое определимое множество из L есть элемент элементарной подсистемы $\langle \{F(\alpha), \alpha < \beta\}, \varepsilon \rangle$. Но тогда с внешней точки зрения каждое определи-

мое множество из L счетно. Таким образом, множество конструктивных подмножеств ω является счетным с внешней точки зрения на L , но имеет мощность ω_1 с точки зрения универсума L .

Используя технику доказательства теоремы 5.2, можно показать, что множество конструктивных подмножеств произвольного кардинала κ имеет мощность κ , если смотреть на L со стороны. Конечно, с точки зрения самого универсума L множество всех подмножеств κ имеет мощность 2^κ . Конструктивный универсум в действительности имеет небольшие размеры и значительно отличается от того, что имеется в «реальном» мире, в котором, например, существует кардинал κ , $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$.

Вспомним, что формулы языка ZF могут быть эффективно закодированы натуральными числами. Множество кодов, соответствующих формулам замечательного Э. — М. множества Ψ , в литературе принято обозначать $0^\#$. Конечно $0^\#$ — не конструктивное множество. Даже существование большого кардинала κ , $\kappa \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$, приводит к тому, что относительно простое множество $0^\#$ не конструктивно. С другой стороны, если мы предполагаем существование счетного комбинаторного свойства ω том, что множество натуральных чисел $0^\#$ должно присутствовать в нашей модели, то тем самым мы высказываемся некоторым образом и о размерах конструктивного универсума. Существование $0^\#$, счетного комбинаторного свойства, четко определяет границы конструктивного универсума. Более подробные сведения об этом можно найти у Сильвера [1].

ЛИТЕРАТУРА

- Макинтайр и Шелак (Macintyre A., Shelah S.)
 1. Uncountable universal locally finite groups. — 1976.
 Морли (Morley M.)
 1. Partitions and models. — In: Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds 1967/Ed. M. H. Löb. Berlin: Springer, 1967.
 Сильвер (Silver J.)
 1. The bearing of large cardinals on constructibility. — In: Studies in Model Theory/Ed. M. Morley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973.
 Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)
 1. Model Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Русский перевод Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.]

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ *)

К. Д. Строян

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Робинсоновская формулировка принципа Лейбница	199
§ 2. Элементы инфинитезимального исчисления	210
§ 3. Непрерывная кривизна и дифференциалы	220
§ 4. Соприкасающиеся кривые	224
§ 5. Исследование поверхностей Гауссом	228
Литература	233

§ 1. Робинсоновская формулировка принципа Лейбница

Интуитивные представления о бесконечно больших и бесконечно малых числах интересны для большинства людей. Эти представления в том или ином виде были основными понятиями дифференциального и интегрального исчисления в течение почти двух столетий после того, как эти исчисления были изобретены Ньютоном и Лейбницем. Недавно понятие бесконечно малого числа было положено на прочную основу, причем так, что при этом сохранилась интуитивная привлекательность таких чисел и не возникло противоречий. В этой главе мы приводим некоторые основные применения бесконечно малых при изучении геометрии кривых и поверхностей, обеспечивая строгость рассуждений в ясном геометрическом стиле Гаусса. Кроме того, мы полагаем, что этот подход проливает свет на интуицию Римана и других, которая может показаться удивительной современному математику, а именно на то, что условия равномерности кривизны позволяют самым непосредственным способом подойти к обычным теперь « C^1 »-предположениям. Условия равномерной

*) По стилистическим соображениям мы часто переводим термин infinitesimal как прилагательное или наречие «инфинитезимальный» или «инфинитезимально», как существительное — «бесконечно малое число» или просто «бесконечно малое». Иногда это приводит к отклонениям от привычной терминологии, например вместо традиционного словосочетания «исчисление бесконечно малых» появляется словосочетание «инфинитезимальное исчисление». — Прим. перев.

гладкости первой производной настолько просты и естественны, что их легко можно использовать на уровне знаний студентов первого курса, миновав при этом некоторые технические трудности, возникающие при обычном подходе. Наконец, современные дифференциальные формы могут быть получены факторизацией бесконечно малых, что обеспечивает прямую связь с Гауссом — инфинитезимальный подход может быть автоматически «модернизирован».

Введение в математику бесконечно малых в конце семнадцатого века послужило источником большого спора, спора, который не был разрешен математически вплоть до 1960 г. Это решение, возможно, все еще широко не понято. В конце восемнадцатого века Даламбер попытался основать исчисление на понятии предела, чтобы разрешить это затруднение. В конце девятнадцатого столетия благодаря исследованию и влиянию Вейерштрасса метод «эпсилон — дельта», родственный древнегреческому «методу исчерпания», стал основным аппаратом «взятия пределов» в анализе. Больцано предложил этот метод приблизительно на пятьдесят лет раньше, но на него не обратили внимания. Деятельность Коши, систематически использовавшего пределы, которые он определил с помощью бесконечно малых чисел, обеспечила связь между позицией Лопиталья, автора первого руководства по исчислению бесконечно малых, трактовавшего бесконечно малые числа как метафизический факт, и позицией Вейерштрасса. В годы после Вейерштрасса метод «эпсилон — дельта» царил так безраздельно, что, по-видимому, считалось, что бесконечно малые числа не могут трактоваться непротиворечивым образом. Но в конце концов подход Лейбница был реабилитирован.

В 1961 г. Абрахам Робинсон [1] дал точную формулировку математического принципа, предложенного Лейбницем для обращения с бесконечно малыми числами. Лейбниц рассматривал бесконечно малые числа как «полезную фикцию», а не как метафизический факт и был занят правилами, которым они подчиняются. Он сформулировал принцип, что «идеальные числа» должны иметь те же самые свойства, что и «конечные числа», и наоборот, но он не уточнил, к каким свойствам это должно относиться. Например, имеется явное противоречие с аксиомой полноты или с вполне упорядочением натуральных чисел. Современный логик воспринимает эти примеры как причиняющие беспокойство формулы «высшего порядка» — формулы с кванторами по множествам, а не только по числам. Аксиома Архимеда составляет даже более трудную проблему, к которой сам Лейбниц не обращался. Средства современной теории моделей, изучающей связь между формальными языками и алге-

браическими системами, дают ту основу, на которой Робинсон смог сформулировать принцип Лейбница.

Формальный язык обычного анализа имеет в силу теоремы Гёделя о полноте или теоремы компактности (см., например, предложение 2.7 главы 1) интерпретацию в нестандартной модели. Нестандартные расширения могут быть получены также с помощью метода ультрастепеней, рассмотренного в главе 3.

Простая алгебраическая теорема говорит, что если имеется собственное расширение упорядоченного поля вещественных чисел, то это расширение неархимедово, т. е. содержит бесконечно малые числа и обратные им бесконечно большие числа. Кроме того, формальное предложение, интерпретация которого истинна в стандартной модели, имеет истинную интерпретацию в нестандартной модели, и наоборот. Это и есть правило Лейбница. Но возникает трудность: почему свойство «архимедовости» не имеет силы в нестандартной модели в противоположность изложенной нами алгебраической аргументации? Или, говоря более технически: как можете вы применять принцип компактности к языку высшего порядка? Ответ состоит в том, что Робинсон для формального анализа предложений в языке высшего порядка использует язык первого порядка, следовательно, интерпретация предложений, выражаемых в языке высшего порядка, в нестандартной модели оказывается слабее, чем их неформальный смысл. Но каким образом теория первого порядка может быть полезна в анализе...?

Здесь мы набрасываем эскиз идеи и подкрепим ее примерами. Единственная формальная тонкость — это осторожность, которую следует проявлять по отношению к кванторам. Прежде всего, не допускаются кванторы «для всех x » и «существует y », а допускаются только ограниченные кванторы, например «для каждого положительного ε в $\mathbb{R}$ » и «существует элемент n в $\mathbb{N}$ ». По-настоящему хитроумной частью этого рассуждения в нестандартной модели является то, что кванторы по множествам должны действовать на конкретном множестве множеств. Все множества, которые встречаются в классическом анализе, получают нестандартные расширения при отображении, обозначаемом «*». Лейбницево перенесенное свойство получается применением * к каждому множеству, входящему в данное предложение, — это называется *-изображением. Свойства, выражимые в логике первого порядка, переносятся без изменений, но свойства, выражимые в логиках высших порядков, имеют ограничения на свои кванторы — в области действия преобразованного квантора лежат только *внутренние множества*.

Одно подходящее определение «класса всех множеств, которые встречаются в классическом анализе», начинается с опреде-

ления суперсистемы над множеством атомов (или праэлементов):

X_0 — бесконечное множество атомов;

$$X_{k+1} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n=0}^k X_n\right), \quad k \in \mathbb{N};$$

наконец,

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k.$$

Мы начнем с рассмотрения случая, когда $X_0 = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел как множество атомов). Позднее нам придется строить суперсистему $\mathcal{U}$ на другом множестве атомов. Вещественные функции суть элементы $\mathcal{X}$, так как функции «являются» множествами упорядоченных пар, а упорядоченные пары «являются» множествами $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ и все их подмножества суть также элементы $\mathcal{X}$. Классические пространства $l^2(\mathbb{N})$, $L^p[0, 1]$, $H^\infty(U)$ и т. д. все являются элементами $\mathcal{X}$.

Элементы $\mathcal{X}$ называются *вещами*, а теория множеств вещей обеспечивает потребности классического анализа. Алгебраическая система $(\mathcal{X}, \in)$ называется *суперсистемой*. Язык первого порядка для $\in$ с ограниченными кванторами описывает теорию множеств вещей, где мы всегда имеем

$$\forall x[x \in A \Rightarrow \dots] \text{ или } \exists y[y \in B \& \dots],$$

причем A и B — вещи из $\mathcal{X}$. В нашем языке $L(\in)$ есть по одной константе для каждого элемента из $\mathcal{X}$. Каждая константа c языка в свою очередь имеет интерпретацию $I(c)$ в $\mathcal{X}$. Например, r из L может обозначать вещь $R \in \mathcal{X}$: $I(r) = R$. Это — стандартное интерпретирующее отображение. Мы можем представлять себе любое свойство из анализа выраженным в терминах теории множеств и, следовательно, в терминах отношений $\in$ и $=$ суперсистемы. Это и есть то, к чему мы применяем нестандартное расширение.

1.1. Принцип Лейбница. Существует множество атомов Y_0 , суперсистема $\mathcal{U}$, основанная на Y_0 , и отображение $*$ суперсистем $\mathcal{X}$ в $\mathcal{U}$, $*$: $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $*R = Y_0$ — отображение множества атомов в $\mathcal{X}$ в множество атомов в $\mathcal{U}$.

(ii) Расширение $*R$ множества R является существенным: множество $*R$ гипервещественных чисел собственно содержит ${}^oR$, ${}^oR = \{r: r \in R\}$, стандартных вложенных чисел, в частности в $*R$ имеется ненулевое бесконечно малое число.

(iii) Каждое высказывание $\alpha(c_1, c_2, \dots)$ о $\mathcal{X}$, формализованное в языке $L(\in)$ с ограниченными кванторами, истинно в

$\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда $*$ -изображение $\alpha(*c_1, *c_2, \dots)$, полученное из $\alpha(c_1, c_2, \dots)$ заменой каждой константы этого высказывания ее $*$ -изображением, истинно в $*\mathcal{X}$.

Доказательство. Применяем теорему компактности (теорема 2.4 главы 1) к объединению множества высказываний из $L(\in)$, интерпретация которых в $\mathcal{X}$ истинна, и бесконечного множества высказываний, утверждающих, что $c \in I^{-1}(R)$, но $\{c \neq I^{-1}(r): r \in R\}$, где « c » — новая константа, которая еще не встречалась. Каждая конечная часть полученного множества

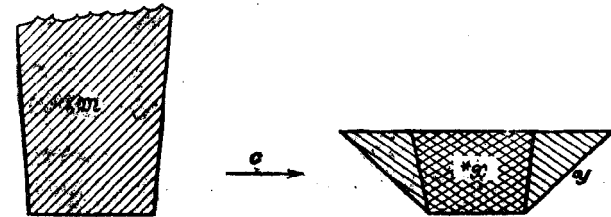


Рис. 1. Картина $*\mathcal{X}$, показывающая обрубленные «бесконечные типы» и внешнюю часть $\mathcal{U}$.

формул выполнима, поэтому оно имеет модель $\mathcal{M}$. (Чтобы получить этот же результат, мы можем вместо теоремы компактности применить основную теорему об ультрапроизведениях из главы 3.)

Теперь мы применяем метод сжатия Мостовского к фундированной части $\mathcal{M}$ (см., например, 3.7 главы 7). Это дает нам основное множество $*R$ как сжатую интерпретацию константы $I^{-1}(R)$. Остаток от сжатия $\mathcal{M}$ лежит внутри суперсистемы на $*R$. Формулы с ограниченными кванторами относятся только к этой части, так что наша теорема доказана. Сжатие показано на рис. 1.

Мы рассматриваем нестандартную модель $*\mathcal{X}$ нашего языка как собственное элементарное расширение $\mathcal{X}$ (относительно формул с ограниченными кванторами), вложенное в суперсистему $\mathcal{U}$, основанную на множестве $*R$ гипервещественных чисел. Тот факт, что мы вкладываем $*\mathcal{X}$ в $\mathcal{U}$, т. е. имеем «настоящее» $\in$ в качестве интерпретации в нестандартной модели, важен для того, чтобы возможно было иметь дело как с внутренними, так и с внешними множествами. Все новые конструкции будут основываться на внешних множествах, но они будут вовлекаться в важные взаимодействия с внутренними множествами. $\square$

Теперь мы приведем несколько примеров и следствий принципа Лейбница. Примером в логике первого порядка является

коммутативность сложения:

$$I\{\forall x\forall y[(x \in \mathbb{R} \& y \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x + y = y + x)]\}, \text{ где } I(\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$

«для каждого x и y из области действительных чисел $\mathbb{R}$ $x + y$ равно $y + x$ ». *-изображение:

$$I'\{\forall x\forall y[(x \in \mathbb{R} \& y \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x + y = y + x)]\}, \text{ где } I'(\mathbb{R}) = {}^*\mathbb{R},$$

«для каждого x и y из области гипервещественных чисел ${}^*\mathbb{R}$ $x + y$ равно $y + x$ ». Подобным же образом все аксиомы логики первого порядка для упорядоченного поля переносятся на ${}^*\mathbb{R}$. Заметим, что мы расширили сложение, которое можно понимать как тернарное отношение $S = \{(x, y, z): x + y = z; x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Обычно не принято писать звездочку на операциях, подобных $+$, $\cdot$, $\leq$, или на стандартных функциях, так как это расширение однозначно понимается на стандартных точках.

Аксиома Архимеда, «для каждого положительного действительного числа x имеется натуральное число n такое, что $x > 1/n$ »,

$$I\{\forall x\exists n[x \in \mathbb{R} \Rightarrow [n \in \mathbb{N} \& [x > 1/n]]]\},$$

преобразуется в

$$I'\{\forall x\exists n[x \in {}^*\mathbb{R} \Rightarrow [n \in {}^*\mathbb{N} \& [x > 1/n]]]\}$$

при неправильном употреблении обозначений, включающих константы для $\mathbb{R}$ и ${}^*\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ и ${}^*\mathbb{N}$, отношения «меньше чем» и деления: «каждое положительное гипервещественное число меньше чем $1/n$ для некоторого положительного гиперцелого». Будучи вынуждены расширить границы для квантора существования, мы получаем не аксиому Архимеда, а то, что каждое бесконечно малое число больше обратной величины некоторого бесконечного целого числа из расширения ${}^*\mathbb{N}$ множества натуральных чисел. Числа 1, 2, 3 и т. д. из $\mathbb{N}$, каждое из которых имеет единственное расширение в ${}^*\mathbb{N}$, мы называем вложенным стандартным множеством ${}^o\mathbb{N} = \{n: n \in \mathbb{N}\}$ и обычно не заботимся о том, чтобы писать ^{*1} , ^{*2} и т. д. для знакомых чисел. Положение, которое мы хотим доказать, состоит в том, что в ${}^*\mathbb{N}$ имеются бесконечные числа

$${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - {}^o\mathbb{N} \neq \emptyset.$$

В действительности каждое бесконечное множество A из классического анализа расширяется собственно:

$${}^*A - {}^oA \neq \emptyset,$$

где ${}^*A$ — расширение множества A .

Множество

$${}^oA = \{a: a \in A\}$$

есть (внешне) вложенное стандартное множество. Мы исследуем это далее в следующем примере.

1.2. Определение. Бесконечно малые задаются так:

$$o = \{x \in {}^*\mathbb{R}: |x| < 1/n \text{ для каждого } n \in {}^o\mathbb{N}\}.$$

Мы пишем $x \approx y$, если $(x - y) \in o$, и говорим, что x инфинитезимально близко к y . Кольцо конечных чисел задается так:

$$O = \{x \in {}^*\mathbb{R}: |x| < n \text{ для некоторого } n \in {}^o\mathbb{N}\}.$$

Бесконечные числа: ${}^*\mathbb{R}_\infty = {}^*\mathbb{R} - O$.

Помимо «инфинитезимально близко», можно также говорить «бесконечно близко» или просто «близко». Мы говорим, что гипервещественное число b является «почти стандартным», если существует $a \in {}^o\mathbb{R}$ такое, что $a \approx b$.

Так как ${}^*\mathbb{N} - {}^o\mathbb{N} \neq \emptyset$, то существуют бесконечные целые числа Ω , $\Omega + 1, 3 \cdot \Omega$, Ω^2 , Ω^3 . Все они в силу принципа Лейбница различны. Например, предложение «для каждого $x \in \mathbb{R}$ $x + 1 \neq x$ » говорит, что $\Omega + 1 \neq \Omega$ и т. д. (Отметим, что, следовательно, ни кардинальные, ни ординальные числа в канторовском смысле не могут служить в качестве ${}^*\mathbb{N}$.) Обратные величины $1/\Omega$, $1/\Omega^2$ суть бесконечно малые.

Алгебраически можно суммировать свойства конечных и бесконечных чисел следующим образом:

1.3. Теорема. O есть упорядоченное кольцо, содержащее o в качестве максимального порядкового идеала, а $O/\approx$ есть порядок, изоморфный $\mathbb{R}$, т. е. каждое конечное гипервещественное число бесконечно близко к своей стандартной части ${}^o\mathbb{R}$. Мы обозначаем канонический гомоморфизм через «st»,

$$o \rightarrow O \xrightarrow{\text{st}} \mathbb{R},$$

или иногда через $\hat{a} = \text{st}(a)$.

Мы опустим доказательство (см. Робинсон [2] или Строян и Люксембург [1]). Из этого следует одно важное наблюдение: конечное число, умноженное на бесконечно малое, есть бесконечно малое. Теорема дает полезную картину, которую Кейслер [1] называет инфинитезимальным микроскопом (рис. 2).

Две точки в ${}^*\mathbb{R}$ конечно удалены друг от друга, если $(x - y) \in O$. Например, целые числа Ω , $\Omega \pm 1$, $\Omega \pm 2$ и $\Omega \pm n$ для $n \in {}^o\mathbb{N}$ конечно удалены друг от друга. Заметим, что Ω/n для $n \in {}^o\mathbb{N}$ является бесконечным и бесконечно удалено от Ω , что справедливо также для $n \cdot \Omega$ и Ω^n . Бесконечный телескоп гово-

рит, что каждая *галактика*, или класс эквивалентности конечного числа, выглядит как копия $\mathcal{O}$. Это вытекает из принципа Лейбница, примененного к предложению «перевод есть изометрия», плюс последняя теорема, относящаяся к описанию $\mathcal{O}$.

Наш последний пример *-изображения состоит в следующем. Полнота $\mathbb{R}$ говорит: «каждое множество B в множестве-степени множества $\mathbb{R}$, ограниченное сверху, имеет наименьшую верхнюю грань»,

$$I\{\forall B[(B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \& \exists y[y \in \mathbb{R} \& \forall x[x \in B \Rightarrow x < y]]] \Rightarrow \exists b[b \in \mathbb{R} \& \forall z[z \in \mathbb{R} \Rightarrow [\forall w[w \in B \Rightarrow w < z] \Rightarrow b \leq z]]]\}.$$

Константы этого формального предложения на самом деле суть $I^{-1}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ и $I^{-1}(\mathbb{R})$, $I^{-1}(<)$ и $I^{-1}(\leq)$. Его *-изображение говорит, что каждое множество $B \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$, имеющее верхнюю грань, обладает наименьшей верхней гранью. Не всякое подмножество множества ${}^*\mathbb{R}$ появляется в ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$; справедливы следующие включения (все строгие):

$${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset {}^*\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}({}^*\mathbb{R}).$$

Иными словами, *-полнота — это же самое, что полнота в ${}^*\mathbb{R}$. Множество бесконечно малых не имеет наименьшей верхней грани, так как половина конечного

Рис. 2. Инфинитезимальный микроскоп: « a » есть единственное стандартное число в поле зрения.

числа является все еще верхней гранью, а дважды бесконечно малое больше, чем одно бесконечно малое (использование принципа Лейбница применительно к высказыванию «для каждого положительного $x \in \mathbb{R}$ $2x > x$ »). Следовательно,

$$0 \notin {}^*\mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Конечно,

$$0 \in \mathcal{P}({}^*\mathbb{R})$$

— бесконечно малые образуют подмножество гипервещественных чисел.

1.4. Определение Если A — вещь в $\mathcal{X}$, то и A и расширение ${}^*A$ считаются *стандартными* множествами. Стандартные множества суть элементы ${}^*\mathcal{P}(X_k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Элементы $B \in {}^*\mathcal{A}$ стандартных множеств ${}^*\mathcal{A}$ называются *внутренними*. Например, внутренние подмножества множества ${}^*\mathbb{R}$ суть элементы множества ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Множество

$$\{x \in {}^*\mathbb{R}: x \geq \Omega\} = [\Omega, \infty)$$

является внутренним множеством в ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$, но не в $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, когда Ω бесконечно. Оно является внутренним в силу принципа Лейбница, примененного к утверждению «для каждого $a \in \mathbb{R}$ $[a, \infty) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ». Внутренние множества — это те, «о которых знает» формальный язык; любое формальное свойство, относящееся только к внутренним множествам, само описывается как внутреннее множество. Символ « ∞ » не является гипервещественным числом.

Остальные множества в суперсистеме, основанной на ${}^*\mathbb{R}$, называются *внешними*.

Мы доказали, что бесконечно малые образуют внешнее множество, т. е. что $0 \in \mathcal{P}({}^*\mathbb{R}) - ({}^*\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Заметим, что существование внешних множеств в нашей модели заставляет нас погрузить ${}^*\mathcal{X}$ в теорию множеств (или одновременно иметь дело с внутренними множествами в двух теориях множеств). В этом состоит различие между нестандартной моделью инфинитезимального анализа и стандартными нестандартными моделями теории множеств (которые не обязательно должны быть «фундированными»).

Пространство непрерывных функций $C[0, 1]$ расширяется до *-непрерывных функций ${}^*C[0, 1]$, т. е. принцип Лейбница говорит, что каждая $f \in {}^*C[0, 1]$ есть вещественная функция на множестве $\{x \in {}^*\mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\} = {}^*[0, 1]$. *-непрерывные функции удовлетворяют *-изображению эпсилон — дельта-непрерывности (непрерывности в терминах эпсилон — дельта).

Взаимодействие между внутренними и внешними множествами — это то, что делает теорию Робинсона полезной. В качестве последнего примера рассмотрим внутреннюю функцию $f(x) = \sin(\pi\Omega x)$ для бесконечного $\Omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Мы знаем, что f является *-непрерывной: «для каждого $n \in {}^*\mathbb{N}$ $\sin(\pi n x) \in {}^*C[0, 1]$ ». Сказали бы вы, что она непрерывна в стандартном смысле?

Что есть $f(0)$? $f(\frac{1}{2}\Omega)$?

Мы используем данную формулировку «идеальных чисел», чтобы очертить инфинитезимальное исчисление в духе Лейбница — Робинсона и затем развить инфинитезимальную геометрию в духе Гаусса, но сперва завершим настоящий параграф, попытавшись поместить вклад Робинсона в историческую перспективу. Мы весьма поощряем нашего читателя свериться (по работе Робинсона [2]) с собственными взглядами Робинсона на историю исчисления бесконечно малых. Мы убеждены, что решение Робинсоном проблемы Лейбница является одним из главных результатов математики двадцатого века. Спустя почти три столетия Робинсон положил первоначальную интуитивную формулировку исчисления на такой прочный фундамент, как основы современной математики. Кроме того, мы убеждены, что

инфинитезимальные методы окажутся полезными в современной чистой и прикладной математике и что имеются веские основания считать, что бесконечно малые числа и *-конечные множества могут помочь сделать разнообразные запутанные пределы более ясными и понятными.

Хотя Лейбниц чувствовал, что идеальные числа должны иметь непротиворечивую трактовку, он осознавал противоречия и заявлял, что инфинитезимальные рассуждения могут быть заменены рассуждениями «в духе Архимеда». Точная формулировка последнего утверждения — открытая проблема (см. Робинсон [3], проблема одиннадцать). Что касается противоречивости, то ньютоновские флюксии также этим страдают. Беркли [1] превосходно описал трудности, связанные с отбрасыванием «членов высших порядков» и сохранением равенства (см. также Ньюмен [1]). Это побудило его называть бесконечно малые числа «приведениями отсутствующих величин». Беркли показал, что флюксии были не более непротиворечивы. В ретроспективе мы не можем не удивиться, почему эквивалентность «... бесконечно близко к ...» не отличали от «... равно ...». Мы увидим, что в гауссовой дифференциальной геометрии, кроме инфинитезимального отношения « $\approx$ » (см. 1.2), фундаментальную роль играют бесконечно малые относительно другой бесконечно малой. Они соответствуют отбрасыванию «членов второго порядка» и сохранению «членов первого порядка».

Методы Лейбница вызвали огромное развитие исчисления, и до некоторой степени эти результаты на время затемнили лежащие в основании противоречия. Тем не менее Эйлер, например, из-за своего открыто выражаемого скептицизма проверял свои результаты многими методами. Его большая осторожность и проницательность отражаются в том, что его доказательство одной из его наиболее фундаментальных лемм, формулы приведения (к виду, удобному для логарифмирования) для $\sin x$ было переведено в робинсоновскую теорию бесконечно малых и оказались правильными! (См. Люксембург [2] и Строян и Люксембург [1].)

Лагранж и Даламбер пытались изгнать бесконечно малые числа и решить проблему оснований около конца восемнадцатого столетия. В то время утверждение Лейбница, что инфинитезимальные рассуждения могут быть переформулированы в духе Архимеда, было не столь очевидно, но даже и после Вейерштрасса, введенного « $\varepsilon - \delta$ », Риман считал оба метода корректными, хотя вейерштрассовский метод более «конкретным». Помимо внутренней заинтересованности в вопросе оснований, анализ в конце девятнадцатого столетия усложнился так, что четкие различия между сходимостью и равномерной сходимостью, между непрерывностью и равномерной непрерывностью стали

необходимы, особенно для тригонометрических рядов и вариационного исчисления. Интересно отметить, что Риман приравнивал *равномерную непрерывность* к условию Коши

$$x \approx y \text{ влечет } f(x) \approx f(y).$$

и что в 1853 г. Коши вынужден был модифицировать свое введенное в 1821 г. инфинитезимальное определение сходимости к виду, который исключал бы приведенный в 1826 г. контрпример Абеля. Коши доказал, что ряд непрерывных функций имеет непрерывный предел. Робинсон [2], с. 273 показал, что этот пересмотренный вид эквивалентен равномерной сходимости и действительно дает правильный результат. Мы будем пользоваться относительно простым понятием «равномерно дифференцируемо», которое эквивалентно «непрерывно дифференцируемо» и которое показывает, что *определение Гаусса поверхности с «непрерывной кривизной» действительно означает « C^1 -вложенная» в современной терминологии.* «На удивление» более сильные свойства, получаемые инфинитезимальным изменением двух вещей, — это одна из сильных сторон метода Робинсона.

Приблизительно в то же время, когда Вейерштрасс установил метод « $\varepsilon - \delta$ », Кантор создал свою теорию кардинальных и ординальных чисел, до некоторой степени побуждаемый к этому опять-таки вопросами, связанными с тригонометрическими рядами. Бесконечные числа Кантора нарушают принцип Лейбница, так что бесконечные числа Робинсона являются полностью другой теорией, хотя этот факт, конечно, не влечет никакого конфликта. Большой прогресс в теории меры и топологии, вызванный канторовской теорией, повлиял, без сомнения, на современную неприязнь к бесконечно малым числам, но этот успех не означает, что имеется только один вид бесконечного числа. Мы надеемся, что математическая общественность признает наличие (по меньшей мере) двух видов бесконечных чисел.

Автор недостаточно квалифицирован, чтобы комментировать философские следствия вклада Робинсона, и он отсылает читателя по крайней мере к заключительным замечаниям в работе Робинсона [3].

В годы, последовавшие за реабилитацией Робинсоном бесконечно малых чисел, его идеи развились в нескольких направлениях. Кейслер [1] осуществил простое аксиоматическое развитие бесконечно малых чисел, подходящее для начинающих изучать анализ. Подход Кейслера к исчислению по большей части избегает формальной логики и обеспечивает ясное непротиворечивое введение в исчисление с тем сильным интуитивным духом, который всегда имели бесконечно малые. Его книга трактует также и метод «эпсилон — дельта», где он возникает естественно и, по существу, в численной аппроксимации. Более того,

при владении бесконечно малыми повышаются вычислительные навыки студентов. Йенсен [1] дал машинно ориентированный вариант инфинитезимального исчисления, в котором бесконечно малые числа суть бесконечно точные вычисления идеальной машины. Исследование Саливена [1] использует подход Кейслера применительно к разнообразным категориям и показывает, что этот подход является волнующим и практичным учебным методом.

Многие исследователи, особенно сам Робинсон, показали, какую роль играют бесконечно малые числа в современной алгебре и анализе. Широкий спектр вопросов анализа трактуют с точки зрения бесконечно малых чисел две монографии: Робинсон [2] и Строян и Люксембург [1]. Важной частью этого исследования является показ того, как изобретенные вслед за методом «эпсилон — дельта» разделы могут быть изложены в инфинитезимальном духе; этот процесс часто дает новую ясную перспективу. Например, в 1969 г. Беренс закончил новую работу над ограниченными голоморфными функциями в терминах бесконечно малых чисел и в последующем сделал заметный прогресс в изучении аналитической структуры максимальных идеалов и в проблеме Короны. Беренс [2] намечает инфинитезимальный подход к этой работе и делает интересные новые предположения. Другие примеры этого имеются в упомянутых выше монографиях, в трех публикациях симпозиумов: Люксембург [1], Люксембург и Робинсон [1], Хурд и Лёб [1], а также в заметках Маховера и Хиршфелда [1] и в математической литературе (Джонсон [1]). Мы уверены, что специалисты во многих областях нашли бы процесс переформулировки открытых проблем в терминах робинсоновских инфинитезимальных оснований благодарным и увлекательным. Поскольку бесконечно малые числа часто упрощают сложные «процедуры нахождения пределов», то длительная тяжелая работа возможно также показывает, что неразрешимые прежде проблемы лежат в пределах наших возможностей. Мы полагаем, что этот процесс потребует интуиции и усилий, но мы также надеемся, что во многих случаях он приведет к значительному прогрессу, если попытаться заняться им всерьез.

§ 2. Элементы инфинитезимального исчисления

Мы начинаем наше развитие исчисления с показа того, что « C^1 » может быть определено непосредственным образом. «Эпсилон — дельта»-вариант этой теоремы «хорошо известен», но, по нашему мнению, его оценивают неадекватно. В действительности свойство равномерной дифференцируемости лежит в основе

многого из дифференциального и интегрального исчисления. Мы начинаем с глобального одномерного случая, чтобы сосредоточиться на главном.

2.1. Теорема. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — стандартная вещественная функция. Следующие утверждения эквивалентны:

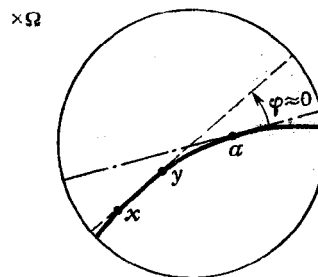


Рис. 3. Равномерная дифференцируемость в a под инфинитезимальным микроскопом.

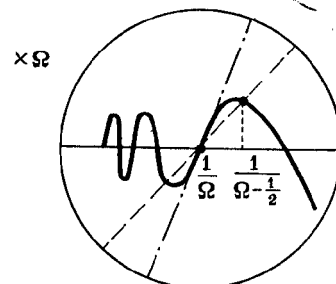


Рис. 4. Инфинитезимальные секущие и касательные для $x^2 \sin(\pi/x)$.

(i) Существует стандартное отображение $Df: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что всякий раз, когда x есть конечное число в ${}^*\mathbb{R}$, а δz есть ненулевое бесконечно малое число в ${}^*\mathbb{R}$, имеем

$$\frac{1}{\delta z} [f(x + \delta z) - f(x)] \approx (Df)_x.$$

(Это называется равномерной дифференцируемостью.)

(ii) Для каждого стандартного $a \in {}^*\mathbb{R}$ существует конечное число Δ_a такое, что всякий раз, когда $x \approx y \approx a$ в ${}^*\mathbb{R}$, $x \neq y$, то имеем

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \approx \Delta_a.$$

(Это называется локальной равномерной дифференцируемостью в a .)

(iii) Функция f непрерывно дифференцируема в эпсилон — дельта-смысле.

Условие (i) будет наиболее полезно нам в дифференциальной геометрии. Оно также является главной составной частью доказательства основной теоремы, которое мы приводим; это доказательство по существу такое же, как у Коши. Эта же идея лежит в основе теорем о замене переменных и о дивергенции, теоремы де Рама и других теорем, требующих « C^1 »-предположений. Она также тесно связана с локальным потоком или бесконечно малым преобразованием « C^1 »-векторного поля (через « C^1 »-теорему Пикара).

Условие (ii) под инфинитезимальным микроскопом показано на рис. 3.

Условие (ii) является более слабым требованием в том смысле, что мы могли бы потребовать, чтобы оно выполнялось в единственной точке $a \in {}^oR$. Беренс [3] и Нейенхёйс [1] показывают, что это условие в одной точке может заменить C^1 -предположение в теореме об обратном отображении. Кроме того, равномерные частные производные влекут равномерные полные производные. Условие (ii) является, вероятно, самым легким для формулировки в терминах эпсилон — дельта — мы оставляем это в качестве упражнения.

Функция $x^2 \sin(\pi/x)$ не является равномерно дифференцируемой в нуле. Как может проверить читатель с помощью вычислений, использующих принцип Лейбница, если $y = 1/(\Omega - \frac{1}{2})$ и $x = 1/\Omega$, то $\Delta y/\Delta x \approx \pm 2$, $Df_x = \pm \pi$ и $Df_0 = 0$. Этот

пример ясно указывает на то, что недостаточно проверить условия для одного значения δz или только для $x = a$ (но это небольшая цена за непротиворечивость бесконечно малых чисел). Читателя просят также начертить под инфинитезимальным микроскопом $g(x) = |x|$ в точке $x = 0$.

Заметим, что в рассматриваемом примере прямым вычислением устанавливается, что $(f(\delta z) - f(0))/\delta z \approx 0$ для всех бесконечно малых чисел δz (см. рис. 4; нуль на этом рисунке не показан); ср. это с теоремой 2.2.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть заданное x бесконечно близко к $a \in {}^oR$. Сначала покажем, что (i) влечет $Df_x \approx Df_a$. Пусть z — конечное число, $\delta = (x - a)$ и δz есть « δ , умноженное на z ». Условие (i) в x говорит:

$$f(x + \delta z) - f(x) = Df_a \cdot \delta z + \delta \cdot \eta$$

для некоторого $\eta \approx 0$. Мы также можем применить это условие в точке a , чтобы получить

$$\begin{aligned} f(x + \delta z) - f(a) + f(a) - f(x) &= Df_a \cdot (x + \delta z - a) \\ - Df_a \cdot (x - a) + \delta \cdot \zeta &= Df_a \cdot \delta z + \delta \cdot \zeta, \text{ где } \zeta \approx 0. \end{aligned}$$

Теперь вычтем эти два равенства, разделим на δz и увидим, что

$$Df_x \approx Df_a.$$

Из этого вытекает условие (ii), так как

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \approx Df_x \approx Df_a,$$

а Df_a является обязательно стандартным числом, поскольку оно есть значение стандартной функции в стандартной точке. Это показывает, что (i) влечет (ii).

Мы разделим доказательство того, что (ii) влечет (iii), на несколько шагов. Теоремы 2.2 и 2.3 доказываются ниже.

2.2. Теорема. Пусть f — стандартная вещественная функция и $a \in {}^oR$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) (в ${}^*R$) Существует стандартная константа b такая, что всякий раз, когда $x \approx a$ в ${}^*R$, имеем $(f(x) - f(a))/(x - a) \approx b$.

(ii) (в R) Функция f определена в окрестности точки a , и существует число $b \in R$, удовлетворяющее условию: для каждого $\epsilon \in R^+$ существует $\delta \in R^+$ такое, что $|x - a| < \delta$ влечет $|(f(x) - f(a))/(x - a) - b| < \epsilon$.

Теорема 2.2 показывает (используем условие (ii) при x или y , равно a , и $b = st(\Delta a)$), что f дифференцируема в эпсилон — дельта-смысле. Более того, мы можем использовать ее, чтобы (внешним образом) определить стандартное отображение $Df_a = st(\Delta a)$. (Это определение является внешним в том смысле, что оно задает значения Df только для стандартных значений a .)

Мы можем в свою очередь применить принцип Лейбница к условию (ii) в 2.2, к расширению функции $x \mapsto Df_x$ и к фиксированному стандартному $\epsilon > 0$, чтобы убедиться, что «существует $\delta \in {}^*R^+$ такое, что $|x - y| < \delta$ влечет $|(f(y) - f(x))/(y - x) - Df_x| < \epsilon$ ». Если мы выберем $x \approx a \in {}^oR$, $\epsilon \approx 0$ и к тому же применим условие (ii), то мы можем заключить, что $Df_x \approx Df_a$. (Заметим, это доказывает, что (ii) влечет (i).)

2.3. Теорема. Пусть g — внутренняя вещественная функция, и $a \in {}^oR$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) $g(x) \approx g(a)$ всякий раз, когда $x \approx a$.

(ii) Функция g определена в стандартной окрестности точки a , и для каждого $\epsilon \in {}^oR^+$ существует $\delta \in {}^oR^+$ такое, что $|x - a| < \delta$ влечет $|g(x) - g(a)| < \epsilon$.

Робинсон называет эти эквивалентные условия S -непрерывностью в a .

Теорема 2.3 показывает, что Df непрерывна в смысле эпсилон — дельта в каждой стандартной действительной точке. В самом деле, полагая $g = {}^*Df = Df$ в силу соглашения не ставить $*$ на функции и применяя принцип Лейбница для стягивания этого условия к стандартной модели, получаем, что если $\epsilon \in R^+$, то

$$\{\delta \in R^+ : |x - a| < \delta \text{ влечет } |Df_x - Df_a| < \epsilon\}$$

не пусто.

Мы показали, предполагая верными теоремы 2.2 и 2.3, что (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Условие (iii) влечет (i), так как ввиду непрерывности и теоремы 2.3 $Df_y \approx Df_a$ всякий раз, когда $y \approx a$. Если (i) не выполняется, то

$$\frac{1}{\delta z} [f(x + \delta z) - f(x)] = Df_x + \theta, \quad \text{где } \theta \not\approx 0.$$

В силу *-изображения теоремы о среднем значении существует y между x и $x + \delta x$ такой, что $Df_y = Df_x + \theta$ и либо $Df_y \approx Df_a$, либо $Df_x \approx Df_a$.

Для доказательства теорем 2.2 и 2.3 характерно то, что в них с инфинитезимальными условиями обращаются, как с условиями на конечные величины. Общая формулировка принципа непрерывности (который в шутку мы называем принципом Коши) заключается в следующем. Мы обогащаем $L(\equiv)$ путем добавления полной «диаграммы» $*\mathcal{R}$, т. е. формальных констант для каждого внутреннего множества. Мы расширяем I' , чтобы включить эти добавленные константы.

2.4. Принцип Коши. Если $P(x)$ — внутреннее формальное свойство с ограниченными кванторами и свободной переменной x и если $I'\{P(\eta)\}$ справедливо для каждого бесконечно малого числа η , то $I'\{P(x)\}$ справедливо для всех x меньших, чем некоторое стандартное δ , $|x| < \delta$.

Этот принцип был даже обобщен Люксембургом на топологические пространства (см. Строян и Люксембург [1]).

Доказательство. Как мы показали в § 1, бесконечно малые числа δ составляют внешнее множество. Множество

$$\{\delta \in {}^*\mathbb{R} : \forall x[|x| < \delta \Rightarrow I'\{P(x)\}]\}$$

является внутренним и, по предположению, содержит все бесконечно малые числа; поэтому оно содержит и не бесконечно малое число δ . $\square$

Доказательство теоремы 2.2. (i) влечет (ii). Пусть задано $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^+$. Следующее множество является стандартным, так как его описание включает только стандартные константы:

$\{\delta \in {}^*\mathbb{R} : |x - a| < \delta \text{ влечет, что } f(x) \text{ определена}$

$$\text{и } \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - b \right| < \varepsilon\}.$$

Условие (ii) следует из принципа Коши или, с другой стороны, из того, что вышеприведенное множество не пусто в ${}^*\mathbb{R}$, а поэтому в силу принципа Лейбница оно не пусто также и в $\mathbb{R}$.

(ii) влечет (i). Пусть $x \approx a$ в ${}^*\mathbb{R}$. Применим принцип Лейбница к (ii) для фиксированного стандартного положительного ε и стандартного δ из (ii). Так как $|x - a| < \delta$, когда δ стандартно, то мы знаем, что отношение бесконечно малых разностей лежит в эpsilon-окрестности b . Но эpsilon произволен, так что (i) выполняется. $\square$

Интерпретация Лейбница для

$$\frac{df}{dx}(a)$$

может быть теперь получена как общая стандартная часть *всех* отношений бесконечно малых разностей $\frac{f(a + \delta x) - f(a)}{\delta x}$ при

условии, что они *все* имеют общую стандартную часть. (Ниже мы выйдем за эти рамки и интерпретируем как df , так и dx .)

Упражнение. Вычислить dP/dx , где P — полином, используя *-биномиальную теорему применительно к $(a + \delta x)$.

Доказательство теоремы 2.3. (i) влечет (ii). Так как g — внутренняя функция, то свойство $P_\varepsilon(\eta)$: « $|x - a| < \eta$ влечет, что $g(x)$ определена и $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ » также внутреннее. При условии, что ε стандартно и положительно, применяется принцип Коши и это дает (ii).

(ii) влечет (i). Пусть $x \approx a$, так что $|x - a| < \delta$ всякий раз, когда δ стандартно и положительно. Тогда условие (ii) влечет, что $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ для любого стандартного положительного эpsilon. Следовательно, $g(x) \approx g(a)$. $\square$

Мы повторяем вопрос последнего параграфа: является ли внутренняя функция $f(x) = \sin(\pi \Omega x)$ непрерывной в стандартном смысле?

2.5. Определение. Пусть $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ — стандартная функция. Чтобы определить интегралы Римана на $[a, b]$, мы делим интервал на *-конечное число бесконечно малых подынтервалов $a = x_0 < x_1 < \dots < x_\Omega = b$ таких, что $x_{(k-1)} \approx x_k$ для $1 \leq k \leq \Omega$; внутренне выбираем y_k , $x_{(k-1)} \leq y_k \leq x_k$, и вычисляем *-конечную сумму

$$\sum_{k=1}^{\Omega} f(y_k)[x_k - x_{(k-1)}].$$

Если все эти римановы суммы бесконечно малых бесконечно близки к одному и тому же конечному результату, то мы называем общую стандартную часть *интегралом*

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Мы разберем это определение детально, так как оно несколько сложно. Прежде всего, термин *-конечное означает *-изображение «конечного» из стандартной модели. «Конечное» в $\mathcal{R}$ может быть записано так: «существуют $n \in \mathbb{N}$ и биекция из $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$ на P », поэтому *-конечное разбиение есть просто внутренняя биекция из множества $\{k \in {}^*\mathbb{N} : 1 \leq k \leq \Omega\}$ на подмножество множества $[a, b]$. Примером этого служит просто разбиение на равные части

$$x_k = \frac{k}{\Omega}(b - a) + a, \quad 0 \leq k \leq \Omega.$$

Слова «внутренне выбираем y_k » означают, что y_0 также является внутренней функцией из $1 \leq k \leq \Omega$ в $[a, b]$. Так как функция Σ на стандартной модели определена для всех конечных множеств вещественных чисел, то ее нестандартное расширение определено для всех *-конечных множеств гипервещественных чисел; поэтому *-конечная сумма существует в ${}^*\mathbb{R}$. В то время как *-конечная сумма всегда существует, две *-конечные инфинитезимальные суммы Римана не обязательно должны быть бесконечно близкими. Например, пусть f — индикатриса рациональных чисел: $f(x) = 1$, если x рационально; $f(x) = 0$, если x иррационально. Тогда *-иррациональные y_k дают нулевую сумму, а *-рациональные y_k дают сумму, равную $(b-a)$; интеграл не существует.

Весьма просто усмотреть, что внутренняя конечная S -непрерывная функция действительно будет давать общую стандартную часть для всех инфинитезимальных сумм Римана. Например, если z_k и y_k — два выбора точек для оценки, то

$$\left| \sum_{k=1}^{\Omega} f(z_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^{\Omega} f(y_k) \Delta x_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq \Omega} |f(z_k) - f(y_k)| \cdot (b-a),$$

и внутренний *-конечный максимум достигается при $z_k \approx y_k$, так что $f(z_k) \approx f(y_k)$. Подобным же образом различные разбиения имеют общее измельчение в силу принципа Лейбница, примененного к высказыванию «конечные разбиения имеют общее измельчение». Суммы почти равны на общем измельчении, и каждая сумма на измельчении почти соответствует сумме на первоначальном разбиении. Это, в частности, показывает, что непрерывные стандартные функции являются интегрируемыми по Риману и что для таких функций всякая инфинитезимальная

сумма Римана может использоваться для оценки $\int_a^b f(x) dx = \text{st} \left(\sum_{k=1}^{\Omega} f(y_k) \Delta x_k \right)$. (Вполне возможно, что это не демонстрирует «эпсилон — дельта»-вариант интегрируемости по Риману, но наше определение эквивалентно ему, и, вероятно, Риман не возражал бы против бесконечно малых чисел.)

2.6. Основная теорема исчисления. (i) Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная стандартная функция, и пусть $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; тогда

$$(dF/dx)(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

(ii) Пусть $F(x)$ — равномерно дифференцируемая функция в окрестности интервала $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b (dF/dx)(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. По принципу Лейбница

$$\delta z \cdot \min_{x \leq t \leq x + \delta z} [f(t)] \leq \int_x^{x + \delta z} f(t) dt \leq \delta z \cdot \max_{x \leq t \leq x + \delta z} [f(t)];$$

когда $\delta z \approx 0$, имеем $\min f(t) \approx f(t) \approx \max f(t)$, поэтому

$$\frac{dF}{dx}(x) = \text{st} \left(\frac{F(x + \delta z) - F(x)}{\delta z} \right)$$

независимо от того, какое бесконечно малое число мы выбираем. Это доказывает (i).

($\approx$ Коши). Пусть $\{x_k: 0 \leq k \leq \Omega\}$ — инфинитезимальное разбиение. По условию (i) из 2.2

$$\frac{dF}{dx}(x_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} + \eta_k,$$

где $\eta_k \approx 0$ для $1 \leq k \leq \Omega$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\Omega} \frac{dF}{dx}(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{\Omega} [F(x_k) - F(x_{k-1})] + \sum_{k=1}^{\Omega} \eta_k \Delta x_k$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^{\Omega} \eta_k \Delta x_k \right| \leq \max(|\eta_k|) \cdot \sum_{k=1}^{\Omega} \Delta x_k = |\eta_m| \cdot (b-a) \approx 0,$$

в то время как

$$\sum_{k=1}^{\Omega} [F(x_k) - F(x_{k-1})] = F(b) - F(a)$$

в силу переноса формулы для телескопических сумм. Это доказывает (ii). $\square$

Нам нужна равномерная дифференцируемость в форме для «нескольких переменных». (Банахово многообразие в действительности не труднее.) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — подмножество n -мерного пространства при некотором фиксированном конечном n . Метрика на $\mathbb{R}^n$ имеет расширение в ${}^*\mathbb{R}^n$,

$$|X - Y| = \left(\sum_{j=1}^n (x^j - y^j)^2 \right)^{1/2}.$$

и мы говорим, что вектор $X = (x^1, \dots, x^n)$ примыкает в бесконечно малом (инфинитезимально примыкает) к вектору Y , если

$$|X - Y| \approx 0 \text{ в } {}^*\mathbb{R}.$$

Легко видеть, что это эквивалентно тому, что $x^j \approx y^j$, $1 \leq j \leq n$. Мы также могли бы говорить, что X «бесконечно близок к» или «почти равен» Y . Вектор B является «почти стандартным», если существует стандартный вектор A такой, что $B \approx A$. Вектор X конечен, если $|X|$ конечно в ${}^*\mathbb{R}$. Стандартная часть конечного вектора X есть стандартный вектор

$$\text{st}(X) = (\text{st}(x^1), \text{st}(x^2), \dots, \text{st}(x^n)).$$

Мы приводим несколько результатов, чтобы указать, как можно трактовать в терминах инфинитезимальных чисел топологию подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Вместо того чтобы иметь дело с монадой (с бесконечно малой окрестностью) стандартной точки, т. е. всеми $X \in {}^*\mathbb{R}^n$ такими, что $X \approx A$, мы будем иметь дело с относительной монадой, т. е. всеми $X \in {}^*\mathbb{M}$ такими, что $X \approx A$.

2.7. Теорема. Стандартное подмножество $U \subseteq \mathbb{M}$ является топологической $\mathbb{M}$ -окрестностью точки $A \in U$, если и только если всякий раз, когда $X \approx A$, $X \in {}^*\mathbb{M}$, имеем $X \in {}^*U$, т. е. при условии, что ${}^*U$ содержит относительную ${}^*\mathbb{M}$ -монаду точки A .

Доказательство. Применим принцип Коши к высказыванию

« ${}^*U$ содержит внутреннее множество $B(\eta) \cap {}^*\mathbb{M}$ »,

где $B(\eta) = \{X \in \mathbb{R}^n: |X - A| < \eta\}$. Затем применим принцип Лейбница к стандартному δ , полученному из принципа Коши, так, чтобы получить

« U содержит $B(\delta) \cap \mathbb{M}$ » без * .

Обратное немедленно следует из принципа Лейбница. $\square$

2.8. Теорема. Стандартное множество $U \subseteq \mathbb{M}$ является $\mathbb{M}$ -плотным, если и только если всякий раз, когда $u \in {}^*U$ примыкает в бесконечно малом (инфинитезимально близко) к стандартной $t \in \mathbb{M}$, имеем $t \in {}^*U$. Точнее, последовательность $\{x_n\}$ сходится к A , если и только если $X_\Omega \approx A$ для бесконечного натурального числа $\Omega \in {}^*\mathbb{M}_\infty$.

Доказательство теоремы 2.8 или 2.9 см. у Робинсона [2] или у Строяна и Люксембурга [1].

2.9. Теорема. Стандартное множество $U \subseteq \mathbb{M}$ является $\mathbb{M}$ -компактным тогда и только тогда, когда каждая точка $X \in {}^*U$ близка к некоторой стандартной точке $u \in {}^*U$.

Например, открытый единичный интервал $(0, 1)$ не компактен, так как ${}^*(0, 1) = \{x \in {}^*\mathbb{R}: 0 < x < 1\}$ содержит бесконечно малые числа $\varepsilon \approx 0$, но не содержит самого 0. Натураль-

ные числа — не компактное множество, так как ${}^*\mathbb{N}$ содержит бесконечное натуральное число Ω , не являющееся близким ни к какой стандартной точке.

Обозначим пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ через $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Внутреннее линейное отображение есть элемент из ${}^*\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Конечное внутреннее линейное отображение есть отображение, имеющее конечную суп-норму или, эквивалентно, имеющее конечные скаляры в матричном представлении его относительно стандартных базисов, или, эквивалентно, отображающее конечные векторы в конечные векторы.

2.10. Теорема. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — стандартная функция, определенная на $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) Существует стандартное отображение $Df: U \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ такое, что если x близка к некоторой стандартной точке из ${}^*U$ и если dz бесконечно мала в ${}^*\mathbb{R}^m$, то

$$f(x + dz) - f(x) = Df_x(dz) + |dz| \cdot \eta$$

для некоторой бесконечно малой $\eta \in {}^*\mathbb{R}^n$.

(ii) Для каждой стандартной точки $a \in {}^*U$ имеется конечное внутреннее линейное отображение L_a такое, что если $x \approx y \approx a$, то

$$f(y) - f(x) = L_a(y - x) + |y - x| \cdot \eta$$

для некоторой бесконечно малой $\eta \in {}^*\mathbb{R}^n$.

(iii) U открыто и f непрерывно дифференцируема на U .

Доказательство. Модифицируйте доказательство теоремы 2.1. $\square$

Производные более высоких порядков задаются в инфинитезимальных терминах следующими условиями равномерности.

2.11. Малая oh-формула Тейлора. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — стандартное отображение на $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) Существуют стандартные отображения $L^h: U \rightarrow \text{SLin}^h(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, симметричные h -линейные отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ такие, что если x близка к стандартной точке в ${}^*U$, а δ бесконечно мала в ${}^*\mathbb{R}^m$, то

$$f(x + \delta z) = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} L_x^h(\delta z)^{(h)} + |\delta z|^k \cdot \eta$$

для некоторой η , бесконечно малой в ${}^*\mathbb{R}^n$.

(ii) U открыто и $f \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$.

Отображения L^h суть производные h -го порядка от f , т. е. $D^h f$. Доказательство. См. Строян и Люксембург [1], §§ 5, 7, 9.

§ 3. Непрерывная кривизна и дифференциалы

Третья глава великолепной работы Гаусса *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Гаусс [1]) начинается так:

«Говорят, что кривая поверхность обладает непрерывной кривизной в одной из своих точек A , если направления всех прямых линий, выходящих из A к точкам поверхности на бесконечно малом удалении от A , бесконечно мало уклоняются от одной и той же плоскости, проходящей через A . Говорят, что эта плоскость *касается* поверхности в точке A ».

Этим мотивируется следующее определение.

3.1. Определение. Подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ есть m -многообразие с непрерывной кривизной, если только имеется стандартное отображение T точек M в аффинные m -мерные плоскости в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям:

- (i) Если $A \in M$, то T_A содержит A .
- (ii) Для каждой почти стандартной точки $A \in {}^*M$ ортогональная проекция множества ${}^*M$ на T_A отображает множество точек $B \in {}^*M$ таких, что $B \approx A$, на множество точек $b \in T_A$ таких, что $b \approx A$.
- (iii) Для каждого почти стандартных $A \in {}^*M$ и $B \in {}^*M$ таких, что $B \approx A$, если $B - A = t + n$ (где t лежит в T_A , а n — нормаль к T_A), то $|n|/|B - A| \approx 0$.

Условие (i) говорит, что привилегированная m -плоскость пересекает M в A . Условие (ii) говорит, что в бесконечно малом M имеет размерность по меньшей мере m . Условие (iii) говорит, что угол отклонения от тангенциальной составляющей бесконечно мал. Важно, что мы обходимся со всеми почти стандартными точками из ${}^*M$ одинаково, иначе мы получим только «дифференцируемое», а не « C^1 »-многообразие. Заметим, что (iii) запрещает как неправильно вложенные многообразия, так и петли (рис. 5).

3.2. Теорема. Если M — m -многообразие в $\mathbb{R}^n$ с непрерывной кривизной в смысле Гаусса, то M есть C^1 - m -многообразие в смысле Вейля с картами, заданными локальной проекцией на тангенциальные плоскости.

« C^1 -многообразие в смысле Вейля» означает обычное абстрактное определение многообразия, M покрывается атласом карт, где каждая карта есть гомеоморфизм ϕ из подмножества множества M на m -мерный шар. Карты удовлетворяют условию перекрывтия, при котором, если отображение $\phi \circ \psi^{-1}$ определено для двух карт, то оно есть C^1 -отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Во-первых, покажем, что если A и B почти стандартны на ${}^*M$, $A \approx B$, то T_A почти параллельна T_B . (Или, эквивалентно, так как $A \approx B$, касательные плоскости имеют одну и ту же стандартную часть, т. е. имеется стандарт-

ная плоскость P такая, что $st(T_A) = st(T_B) = P$.) Пусть $\delta = |B - A| \neq 0$. Единичные векторы $st((B - A)/\delta) = -st((A - B)/\delta)$ лежат на пересечении $st(T_A) \cap st(T_B)$. В силу (iii) мы имеем

$$\frac{B - A}{\delta} = \frac{n_A}{\delta} + \frac{t_A}{\delta} \approx \frac{t_A}{\delta},$$

нормаль + касательная в T_A , и

$$\frac{A - B}{\delta} = \frac{n_B}{\delta} + \frac{t_B}{\delta} \approx \frac{t_B}{\delta},$$

нормаль + касательная в T_B ; следовательно, $t_A/\delta \cdot t_B/\delta \approx -1$ и проекция одного на другой имеет одну и ту же стандартную

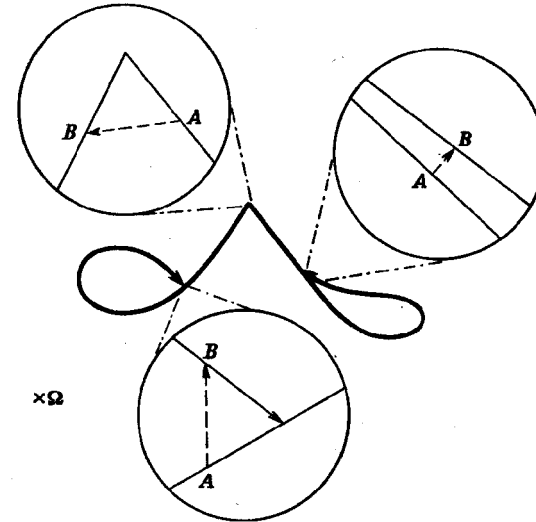


Рис. 5.

часть. Это упрощает наши обозначения: пишем $B - A \approx^\delta t_A$ вместо $(B - A)/\delta \approx t_A/\delta$ и т. д. На основании (ii) в ${}^*M$ имеются точки C, D такие, что $\delta = |C - A| = |D - B|$, а угол между $C - A$ и $D - B$ совпадает с углом, который образует T_A с T_B . Кроме того, согласно (iii) $C - A \approx^\delta t_C$ в T_A и $D - B \approx^\delta t_D$ в T_B . Итак, $C - A + A - B \approx^\delta t_C + t_B \approx^\delta t_C - t_A \approx^\delta C - B$, так что T_A почти параллельна T_B , поскольку образующие угол векторы лежат δ -почти в T_A и в T_B :

$$0 \approx^\delta (C - A) \cdot (D - B).$$

Во-вторых, ортогональное проектирование из M на T_A однозначно в инфинитезимальной окрестности почти стандарт-

ного вектора на ${}^*M$. Предположим, что $B - A = T + M$ и $C - A = T + N$, где M и N — нормали к T_A . Но вектор $C - B = C - A + A - B = N - M$ лежит почти в T_B согласно (iii) и почти в T_A , так как T_A почти параллельна T_B . Следовательно $M = N$.

Рассмотрим свойство $P(\eta)$: «ортогональное проектирование из множества векторов B на ${}^*M$ такое, что $|B - A| < \eta$, есть

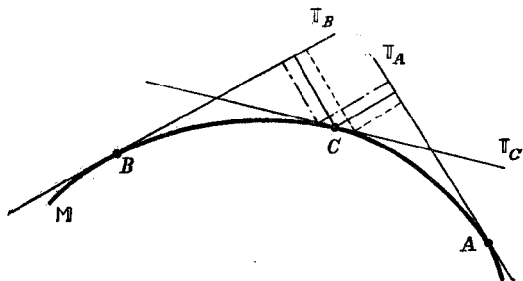


Рис. 6.

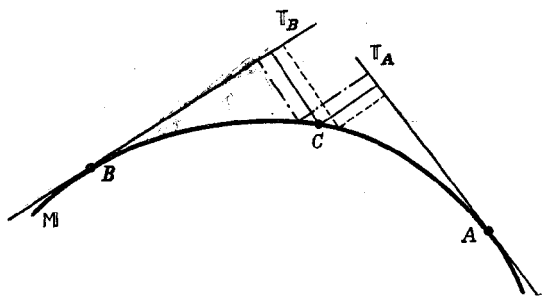


Рис. 7.

биекция на свой образ в T_A ». Согласно приведенным выше замечаниям $P(\eta)$ выполняется для каждого положительного бесконечно малого числа. Принцип Коши показывает, что проектирование является локальной биекцией.

Возьмем на ${}^*M$ две почти стандартные точки A, B с проекциями P_A и P_B , биективными на окрестностях, охватывающих почти стандартную точку C . Отображения P_A и P_B , определяемые путем пренебрежения нормальной компонентой векторов смещения, определимы всюду в ${}^*R^n$ и, в частности, на T_C . Рассмотрим «отражение» T_A на T_B посредством T_C (как схематически показано на рис. 6): $\Psi = P_B \circ (P_A^{-1}|_{T_C})$. Оно является линейным отображением перемещения из точки $P_A(C)$ в перемещение из точки $P_B(C)$. Настоящее охватывающее отображе-

ние — это $\Phi = P_B \circ P_A^{-1}$ т. е. проектирование из T_A на M и обратное проектирование из M на T_B , как схематически показано на рис. 7.

Без существенного ограничения мы можем полагать, что T_A, T_B и T_C все встречаются под острыми углами.

Допустим, что $c = P_A(C)$, и пусть $a \approx c$ на T_A . Пусть также $X = P_A^{-1}(x) \cdot P_A$ непрерывна, так что $X \approx C$, и мы можем применить условие Гаусса, чтобы убедиться, что $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ различаются инфинитезимальным числом, кратным $|X - C|$. Для этого требуется только небольшое тригонометрическое сравнение разницы между отображением из T_C и M , что мы оставляем читателю. Это показывает равномерную дифференцируемость Φ в C .

Применяя теорему 2.10, мы видим, что охватывающие отображения принадлежат классу C^1 . $\square$

Пусть A почти стандартна на ${}^*M$ и $0 < \delta \approx 0$. Будем писать

$$E \approx^\delta F, \text{ если только } \frac{|E - F|}{\delta} \text{ инфинитезимально,}$$

и говорить, что $E \approx^\delta$ -почти равно F или E отличается « δ -инфинитезимально» от F . Условие Гаусса означает, что множество

$$\delta M = \left\{ B \in {}^*M : \frac{|B - A|}{\delta} \text{ конечно} \right\}$$

$\approx^\delta$ -близко на $\mathcal{O}$ -векторном пространстве с A в качестве нуля. Точнее говоря, линейные комбинации в ${}^*R^n$ векторов смещения с конечными скалярами проектируются обратно в δM_A с наибольшей ошибкой, являющейся бесконечно малым числом, если она поделена на δ . Другой способ увидеть это состоит в том, что δM отличается только δ -инфинитезимально от своей проекции на T_A и является векторным пространством. Это обеспечивает связь между бесконечно малыми числами на фиксированной шкале и дифференциальными формами. Если ξ — отображение на M , имеющее в качестве значений стандартные C^1 -ковекторы, то $\delta \cdot \xi_A + A$ может мыслиться путем инвертирования проекции из T_A (и использования охватывающего внутреннего произведения для изоморфизма вектор — ковектор) почти в δM_A . С другой стороны, если $x: {}^*M \Rightarrow {}^*R^n$ — внутреннее конечное отображение такое, что $\delta \cdot x(A) \in \delta M_A$ и x имеет конечную линейную аппроксимацию в смысле 2.10, то мы можем интерпретировать

dx

как класс $\approx^\delta$ -эквивалентности этого отображения. Употребление бесконечно малых чисел в локальной геометрии обычно требует не функции, а только лишь одного-единственного $\approx^\delta$ -класса воз-

мушений. Теорема существования Пикара для дифференциальных уравнений позволила бы нам локализовать такого рода инфинитезимальное условие. Мы сожалеем об отсутствии места для того, чтобы проделать это более детально. Читатель может сам решить, какой путь имелся в виду Гауссом.

Внешняя алгебра пространства δM_A может быть теперь построена путем отождествления почти параллелограммов, охватываемых A, B, C и A, D, E , где $|B-A|, |C-A|, |D-A|, |E-A|$ все δ -конечны при условии, что $\{B-A, C-A\}$ и $\{D-A, E-A\}$ охватывают одно и то же подпространство T_A имеют почти одну и ту же площадь после деления на δ^2 (и т. д. вплоть до m -форм). Мы будем называть такую пару элементов δ -площади, если эта площадь, деленная на δ^2 , не является бесконечно малым числом.

Мы можем интерпретировать класс δ^2 -эквивалентности относительно некоторого внутреннего соответствия таких элементов δ -площади

$$d^2\Sigma$$

как 2-форму (и т. д. вплоть до m -форм; полное локальное рассмотрение форм дано в книге Строяна и Люксембурга [1], гл. 5).

§ 4. Соприкасающиеся кривые

Мы начнем наше исследование кривых в R^3 с построения соприкасающейся окружности — окружности, которая точно касается кривой в точке на кривой. Мы полагаемся на гауссово определение 3.1 кривой Γ , где $m=1$. Мы можем локально параметризовать кривую, взяв за параметр длину u вдоль касательной (теорема 3.2), а единичные отрезки касательной аппроксимировать посредством

$$T_A \approx \frac{B-A}{|B-A|},$$

где $B \approx A$ на Γ . Робинсон [2] дает инфинитезимальную трактовку длины дуги, когда Γ задана регулярной гладкой параметрической функцией $X(t)$. В этом случае

$$T_A = \frac{\frac{dX}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\text{st} \left(\frac{X(t+\delta t) - X(t)}{\delta t} \right)}{\text{st} \left(\frac{|X(t+\delta t) - X(t)|}{\delta t} \right)},$$

если A стандартная, $A = X(t)$, $B = X(t+\delta t) \approx A$. С длиной вдоль касательной как параметром по 3.1 имеем $|X(u) - A| = \varepsilon(u)(1+\varepsilon)$, так что

$$\frac{du}{ds}(A) = 1 \quad \text{и} \quad \frac{dX}{du}(A) = \frac{dX}{ds}(A) = T_A.$$

Рассмотрим теперь нормальное перемещение n точки, бесконечно близкой к A , в случае, когда X дважды непрерывно дифференцируема, $n = [X(\delta) - A - \delta T_A]$. Прежде всего, по формуле Тейлора $n = \frac{1}{2} \delta^2 (d^2X/du^2)(A) + \delta^2 \eta$, где $\eta \approx 0$, и $(d/du)(dX/du)(A) = dT/ds(A)$. Пусть $\kappa_A = dT/ds(A)$ и $\kappa_A \approx 0$, так что T_A и n задают плоскость P , проходящую через A . Пусть D — пересечение линии, параллельной n , проходящей через A , и нормали, восстановленной из середины AB в плоскости P , $B = X(\delta)$.

Треугольники на рис. 8 подобны, поэтому

$$\frac{|D-A|}{|B-A|} = \frac{|B-A|}{2|n|}$$

$$\text{и} \quad |B-A| = \delta(1+\varepsilon),$$

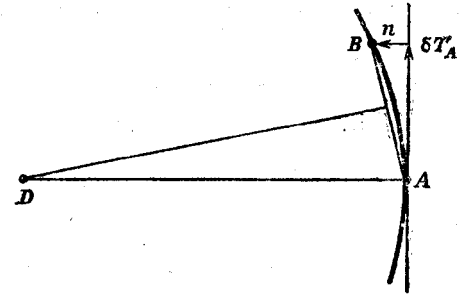


Рис. 8.

и, следовательно,

$$D-A = (1+\varepsilon)^2 \frac{\delta^2}{2|n|} \cdot \frac{n}{|n|} \approx \frac{1}{\left| \frac{dT}{ds}(A) \right|} \cdot \frac{\frac{dT}{ds}(A)}{\left| \frac{dT}{ds}(A) \right|}.$$

Более того, окружность, проходящая через A и B , с центром в D имеет стандартную круговую часть, касающуюся кривой стандартную окружность с радиусом $1/|\kappa_A|$, идущим в направлении κ_A . Это, очевидно, не зависит от выбора δ ; фактически C_A есть стандартная часть инфинитезимальной трубки

$$\{Y: |Y-D| \cdot |\kappa_A| \approx 1\}.$$

Окружность, проходящая через любые три точки F, B, E , близкие к A на данной кривой, лежит, как мы сейчас покажем, внутри этой трубки. Предположим, что B расположена между F и E и $|E-B| > |F-B|$. По формуле Тейлора

$$E-B = \varepsilon T_B + \frac{\varepsilon^2}{2} \kappa_B + \varepsilon^2 \eta, \quad \frac{\varphi}{|E-B|} \approx 1, \quad \eta \approx 0,$$

и

$$B-F = \varphi T_B + \frac{\varphi^2}{2} \kappa_B + \varphi^2 \zeta, \quad \frac{\varphi}{|F-B|} \approx 1, \quad \zeta \approx 0,$$

так что

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{B-F}{|B-F|} \cdot \frac{E-B}{|E-B|} \right] \approx \frac{(1+\varphi/\varepsilon)}{2} (T_B \cdot \kappa_B) \approx \frac{(1+\varphi/\varepsilon)}{2} (T_A \cdot \kappa_A).$$

Это доказывает, что плоскость FBE близка к соприкасающейся плоскости. В силу 3.1 угол между $B-F$ и $E-B$ является инфинитезимальным, следовательно, нормальная плоскость, делящая пополам EB , почти перпендикулярна к $T_B \approx T_A$, и этого достаточно, чтобы показать, что радиус r окружности, проходящей через F, B и E , близок к $1/|\kappa_A|$. С помощью простых тригонометрических выкладок и того факта, что угол между $B-F$ и $E-B$ инфинитезimalен, мы видим, что

$$\frac{2r}{|E-F|} : \frac{|E-B|}{|(E-B) + \frac{\varepsilon}{\varphi}(F-B)|} \approx 1,$$

а, используя вышеуказанные расширения Тейлора, что $r \approx 1/|\kappa_B| \approx 1/|\kappa_A|$. (Читатель может пожелать восполнить детали. Весьма легко показать, что окружность, проходящая через три равноотстоящие точки, близка к C_A .)

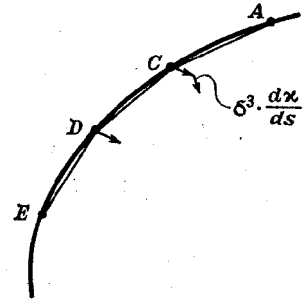


Рис. 9.

Пока мы показали: $(dT/ds)(A) = \kappa_A$, вектор кривизны, нормален к единичному касательному вектору T_A . Пусть $N_A = \kappa_A/|\kappa_A|$ обозначает главную нормаль. Вектор $(1/|\kappa_A|)N_A$ направлен от A к центру соприкасающейся окружности. Стандартная часть окружности, проходящей через любые три точки, бесконечно близкие к A , равна соприкасающейся окружности.

Вектор кривизны κ может меняться двумя способами, когда мы движемся вдоль кривой: во-первых, увеличиваясь или уменьшаясь по величине и, во-вторых, отклоняясь от плоскости начальных касательного вектора и вектора кривизны. Беря четыре равноотстоящие бесконечно близкие точки $A = X(0)$, $C = X(\delta)$, $D = X(2\delta)$, $E = X(3\delta)$, предполагая, что $X(s) \in \mathbb{C}^3$, и используя формулу Тейлора, мы находим, что изменение кривизны при переходе от C к D есть

$$[(E-D)-(D-C)] - [(D-C)-(C-A)] = \delta^3 d^3 X/ds^3 + \delta^3 \cdot \eta$$

(рис. 9).

Читатель должен заметить, что обозначения сильно упрощаются, если писать $\delta^3 \cdot o$, подразумевая « δ^3 , умноженное на не

который инфинитезимальный вектор», так что

$$X(2\delta) = A + 2\delta T + \frac{(2\delta)^2}{2} \kappa + \frac{(2\delta)^3}{6} \cdot \frac{d\kappa}{ds} + \delta^3 \cdot o,$$

$$X(\delta) = A + \delta T + \frac{\delta^2}{2} \kappa + \frac{\delta^3}{6} \frac{d\kappa}{ds} + \delta^3 \cdot o$$

и т. д. Это — инфинитезимальная форма исчисления «малых oh » Ландау, и наше оправдание имени для бесконечно малых чисел.

Изменение единичной нормали при переходе от C к D в силу (4.2) есть

$$\frac{[(E-D)-(D-C)]}{\delta^2 |\kappa|} - \frac{[(D-C)-(C-A)]}{\delta^2 |\kappa|} = \delta \cdot \frac{1}{|\kappa|} \frac{d\kappa}{ds} + \delta \cdot o.$$

Мы дополняем нашу стандартную подвижную систему координат из ортогональных единичных векторов T и $N = \kappa/|\kappa|$ бинормалью $B = T \times N$. Изменение вышеназванной единичной нормали лежит почти в плоскости векторов T и B , и оно почти нормально к N , поэтому мы разлагаем его в (T, B) -координатах: $0 = d/ds(\kappa \cdot T) = (d\kappa/ds) \cdot T + |\kappa|^2$, так что $(d\kappa/ds) \cdot T = -|\kappa|^2$. Остаточная часть (кручение) мы обозначаем через $\tau = |\tau|B$.

По формуле Тейлора $T(s+\delta) = T(s) + \delta|\kappa|N + \delta \cdot o$.

В силу приведенных выше вычислений изменений нормали и T -составляющей имеем $N(s+\delta) = N(s) - \delta|\kappa|T + \delta|\tau|B + \delta \cdot o$. Получаем $B(s+\delta) = B(s) - \delta|\tau|N + \delta \cdot o$ просто в силу исчисления «малых oh » вместе с указанными выше формулами в $B(s+\delta) = T(s+\delta) \times N(s+\delta)$. Подводя итоги, мы имеем (по модулю $\approx \delta$) формулы Серре—Френе для подвижной системы координат

$$dT = |\kappa| N ds,$$

$$dN = -|\kappa| T ds + |\tau| B ds,$$

$$dB = -|\tau| N ds.$$

Сфера, проходящая через четыре точки A, C, D, E , содержит в себе всю эту информацию геометрически. Ее стандартная часть называется *соприкасающейся сферой*. Плоскость векторов T и N пересекает эту сферу по ранее вычисленной соприкасающейся окружности. Центр этой сферы лежит выше центра соприкасающейся окружности вдоль вектора

$$\frac{1}{|\tau|} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{|\kappa|} \right) B,$$

где два коэффициента учитывают кручение в плоскости векторов T, N и спрямление радиуса кривизны соответственно. Мы

оставляем вычисления читателю. Заметим:

$$\frac{d^3 X}{ds^3} = -|\kappa|^2 T + \frac{d|\kappa|}{ds} N + |\kappa| \tau B.$$

Формулы для движущейся системы координат (репера) принимают простой вид, если вычислить ось вращения при перемещении системы координат в C в систему координат в D . Получается, что

$$dT = R \times T ds, \quad dN = R \times N ds, \quad dB = R \times B ds,$$

где $R = |\tau|T + |\kappa|B$. Эти вычисления мы также оставляем читателю.

§ 5. Исследование поверхностей Гауссом

В этом параграфе мы коротко рассмотрим роль бесконечных и инфинитезимальных векторов в работе Гаусса [1].

Поверхности, погруженные в E^3 , имеют касательные связки с более простыми описаниями, чем абстрактные многообразия. При такой постановке мы достаточно выигрываем в ясности и технической легкости, так что извинение за отсутствие общности было бы необязательным, даже если бы результаты Гаусса были не столь глубоки, как в действительности.

В своем «Резюме» работы *Disquisitiones generales circa superficies curvas* Гаусс утверждал следующее. «В исследованиях, в которых рассматривается бесконечно много направлений прямых в пространстве, выгодно представлять эти направления посредством точек на фиксированной сфере, которые являются концевыми точками радиусов, проведенных параллельно линиям. Центр и радиус этой вспомогательной сферы совершенно произвольны. Радиус может быть взят равным единице. Эта процедура по существу согласуется с той, которая постоянно используется в астрономии, где все направления относятся к воображаемой небесной сфере бесконечного радиуса». Конечно, инфинитезимальный анализ мог бы в точных терминах обеспечить нам небесную сферу бесконечного радиуса, которую мы могли бы использовать для того, чтобы проследить исследования Гаусса. Но, как отметил сам Гаусс, мы можем также нормализовать ее, после того как мы так или иначе отобразим различные вещи на эту сферу.

В главе 4 своей работы Гаусс обозначает через L точку на вспомогательной сфере, соответствующую единичной нормали к T_A , и берет точку, бесконечно близкую к A (δ -инфинитезимально отстоящую от A) с координатами $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, если A имеет координаты x, y, z . Если X, Y, Z — координаты L , то ка-

сательное условие Гаусса (в определении 3.1) непосредственно влечет

$$(X, Y, Z) \cdot (\delta x, \delta y, \delta z) \approx^{\delta} 0$$

или после факторизации по модулю $\approx^{\delta}$

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Остальная часть главы 4 посвящена определению того, какой вид имеет это уравнение, во-первых, когда M задана как нуль-множество функции W , $M = \{x: W(x) = 0\}$, во-вторых, когда M задана двумя отображениями координат, и, в-третьих, когда z задано как функция от x и y .

В первом случае мы считаем dW классом эквивалентности по модулю $\approx^{\delta}$ от

$$W(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - W(x, y, z) \approx^{\delta} dW.$$

Естественно,

$$dW = P dx + Q dy + R dz,$$

где

$$P = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial W}{\partial z},$$

по теореме 2.10 при условии, что W непрерывно дифференцируема. Поэтому

$$P \cos 1 \cdot \lambda + Q \cos 2 \cdot \lambda + R \cos 3 \cdot \lambda \approx^{\delta} 0,$$

так как W не изменяется на M . Это верно для каждого направления λ , происходящего из (δ -конечного) инфинитезимального перемещения A на M (на основании предположения), следовательно, мы получаем формулу Гаусса для нормальных координат:

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

или для нормальных координат с противоположным знаком.

Мы оставляем читателю рассмотрение бесконечно малых в других видах этой формулы.

В главе 5 Гаусс обсуждает локальную ориентацию нормального вектора к поверхности. К этому обсуждению мы добавляем следующее. Соседние касательные плоскости почти параллельны, следовательно, внутреннее утверждение «направление нормали в B образует острый угол с направлением, выбранным для нормали в A » истинно в инфинитезимальной окрестности точки A и, так как это множество является внешним, остается таковым на некотором конечном расстоянии вокруг A . На этом множестве нормаль под острым углом в B соответствует ориен-

тации в A . Итак, совместная локальная ориентация также вытекает непосредственно из условия непрерывной кривизны Гаусса.

Глава 6 вводит отображение, которое теперь часто называется гауссовым отображением, а именно, на совместно ориентированной части M мы устраиваем перевод A в $n(A)$, $A \mapsto n(A)$, где $n(A)$ — единичная нормаль на вспомогательной сфере.

Полная кривизна части M определяется как площадь ее образа на вспомогательной сфере. Далее мы берем стандартную точку A на M и δ -элемент площади в смысле предыдущего параграфа. Частное от деления внутренней полной кривизны элемента поверхности на площадь этого элемента поверхности (которую мы можем вычислить как площадь параллелограмма на T_A лишь с δ^2 -ошибкой) есть конечное число, стандартную часть которого Гаусс называет мерой кривизны M в A . Она существует и вполне определена независимо от δ и конкретного δ -элемента площади в силу стандартных результатов инфинитезимального исчисления.

Следующее является изложением, с некоторыми изменениями в обозначениях (и, возможно, δ -инфинитезимальными различиями), гауссовской главы 7. Три (δ -конечных) инфинитезимально близкие точки A, B, C на M охватывают параллелограмм на T_A со сторонами AB и AC , площадь которого в δ^2 -приближении равна площади его проекции на M . Это — δ -элемент площади на M в случаях, когда $B - A$ и $C - A$ расположены под конечным углом и не являются δ -инфинитезимальными. Мы предполагаем, что имеет место как раз такой случай, и обозначаем этот элемент через $d^2\sigma$ (по модулю δ^2).

Элемент площади $d^2\sigma$ отображается при отображении Гаусса n в некоторую фигуру на вспомогательной сфере. Кроме того, $n(A + E) \approx^\delta n(A) + Dn_A(E)$ всякий раз, когда $A + E$ лежит в δM_A . На самом деле $n(A + E) = n(A) + Dn_A(E) + |E|\eta_E$, и ошибка η_E ограничена бесконечно малым числом $\max[|\eta_E|: A + E \in d^2\sigma]$. Таким образом, мы заменяем $n(d^2\sigma)$ на $d^2\Sigma$ — проекцию на вспомогательную сферу параллелограмма, охватываемого векторами $n(A)$, $n(B)$ и $n(C)$ на плоскости, касательной к этой сфере в точке $n(A)$. Опять-таки, поскольку сфера имеет равномерно непрерывную кривизну, площадь (по модулю δ^2) элемента $d^2\Sigma$ может быть вычислена либо на сфере, либо на касательной плоскости в точке $n(A)$.

Итак, мера кривизны

$$k(A) \approx \frac{\text{площадь}(d^2\Sigma)}{\text{площадь}(d^2\sigma)}.$$

и мы могли бы использовать известную формулу векторного произведения для соответствующих площадей на соответствующих касательных плоскостях. Глава 7 является выводом формулы

для k в случае, когда M задана в третьей гауссовой форме, $z = f(x, y)$. В этом случае T_A не перпендикулярна xy -плоскости, и поэтому

$$\frac{\text{площадь}(d^2\Sigma)}{\text{площадь}(d^2\sigma)} = \frac{\text{площадь(проекция } d^2\Sigma \text{ на } xy\text{-плоскость)}}{\text{площадь(проекция } d^2\sigma \text{ на } xy\text{-плоскость)}}. \quad (5.1)$$

Обозначим координаты xy -проекций так:

$$\begin{aligned} A: x, & \quad y & n(A): X, & \quad Y \\ B: x + \delta_1 x, & \quad y + \delta_1 y & n(B): X + \delta_1 X, & \quad Y + \delta_1 Y \\ C: x + \delta_2 x, & \quad y + \delta_2 y & n(C): X + \delta_2 X, & \quad Y + \delta_2 Y. \end{aligned}$$

Тогда площади параллелограммов соответственно равны

$$(\delta_1 x)(\delta_2 y) - (\delta_2 x)(\delta_1 y), (\delta_1 X)(\delta_2 Y) - (\delta_2 X)(\delta_1 Y). \quad (5.2)$$

Так как M задана уравнением $z = f(x, y)$, то X и Y суть функции от x и y , и

$$\delta_1 X = X(B) - X(A) \approx^\delta \frac{\partial X}{\partial x} \delta_1 x + \frac{\partial X}{\partial y} \delta_1 y,$$

$$\delta_2 X = X(C) - X(A) \approx^\delta \frac{\partial X}{\partial x} \delta_2 x + \frac{\partial X}{\partial y} \delta_2 y,$$

$$\delta_1 Y = Y(B) - Y(A) \approx^\delta \frac{\partial Y}{\partial x} \delta_1 x + \frac{\partial Y}{\partial y} \delta_1 y,$$

$$\delta_2 Y = Y(C) - Y(A) \approx^\delta \frac{\partial Y}{\partial x} \delta_2 x + \frac{\partial Y}{\partial y} \delta_2 y.$$

Теперь подставим это в (5.2), а затем в (5.1), чтобы получить выражение

$$k = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}$$

«равенством», а не с «бесконечно близко», ибо обе стороны этого выражения стандартны.

Инфинитезимальное рассмотрение остальной части главы 7 предоставляется читателю.

В главе 8 Гаусс выводит теорему Эйлера, которая говорит, что среди кривых, образуемых пересечением M и плоскостей, содержащих нормаль, проходящую через A , кривые с максимальной и минимальной кривизной образуют прямые углы. Он также показывает, что произведение максимальной кривизны на минимальную есть мера кривизны « $k = TV$ ». Мы перефразируем это следующим образом.

Фиксируем точку A на M и выделяем координатную систему с началом в A , осью z вдоль нормали к T_A и прямоугольными координатами x^0, y^0 в T_A . Касательное условие Гаусса означает, что z вблизи A стремится к 0 как бесконечно малая величина

первого порядка. Если M принадлежит классу C^2 , а (x°, y°, z) — δ -конечный вектор, то

$$z = \frac{1}{2} T^\circ (x^\circ)^2 + U^\circ x^\circ y^\circ + \frac{1}{2} V^\circ (y^\circ)^2 + \delta^2 \cdot \sigma.$$

Повернув оси x и y на угол θ такой, что

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2U^\circ}{T^\circ - V^\circ},$$

легко увидеть, что новая формула для z будет

$$z = \frac{1}{2} T x^2 + \frac{1}{2} V y^2 + \delta^2 \cdot \sigma.$$

(I) Если кривая поверхность пересечена нормальной плоскостью, проходящей через оси x и z , то кривизна получающаяся кривой равна T . Знак T говорит, изгибается ли эта кривая выше или ниже T_A .

(II) Подобным же образом V представляет собой кривизну сечения нормальной плоскости, проходящей через оси z и y , при тех же соглашениях о знаках.

(III) Положив $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, имеем для бесконечно малого r равенство

$$z = \frac{1}{2} (T \cos^2 \varphi + V \sin^2 \varphi) r^2 + r^2 \sigma,$$

что дает кривизну

$$T \cos^2 \varphi + V \sin^2 \varphi$$

для сечения M нормальной плоскостью, проходящей через ось z под углом φ к оси x .

(IV) Поэтому всякий раз, когда $T = V$, все нормальные сечения имеют одну и ту же кривизну. Если T и V не равны, и имеют один и тот же знак, то одно из них есть максимум, а другое минимум кривизны всех таких нормальных сечений. С другой стороны, одно из них соответствует наибольшей выпуклости, а другое — наименьшей вогнутости, если T и V имеют противоположные знаки.

(V) Мера кривизны поверхности в точке A получает весьма простое выражение:

$$k = TV.$$

Мы убеждаемся в этом вычислением при $(x, y) = (\delta, 0)$ и $(x, y) = (0, \delta)$. При этом длина $(\delta, 0)$ на нормализованной копии касающейся окружности равна $T\delta$; $(0, \delta)$ нормализуется к V так что площадь $(d^2\Sigma)$ равна $TV\delta^2 \bmod \delta^2$, в то время как площадь $(d^2\sigma)$ равна $\delta^2 \bmod \delta^2$. (В терминах Dn

$$Dn = \begin{vmatrix} T & 0 \\ 0 & V \end{vmatrix}$$

в (x, y) -координатах.) Это доказывает результат Гаусса, содержащийся в главе 8:

5.1. Теорема. Мера кривизны C^2 -поверхности в точке A равна произведению экстремальных кривизн нормальных сечений, проходящих через $n(A)$. Эти экстремальные кривизны образуют прямые углы.

Мы верим, что сказанное является достаточным инфинитезимальным анализом, чтобы подготовить читателя к последующему использованию Гауссом бесконечно малых — оно (это использование) остается привлекательным руководством для дальнейшего изучения бесконечно малых чисел.

ЛИТЕРАТУРА *)

Беренс (Behrens M. F.)

1. Untitled preprint. — 1969.

2. Analytic sets in $M(D)$. — In: Victoria Symposium on Nonstandard Analysis/Ed. by A. Hurd and P. Loeb. Berlin: Springer, 1974.

3. A local inverse function theorem. — In: Victoria Symposium on Nonstandard Analysis/Ed. by A. Hurd and P. Loeb. Berlin: Springer, 1974.

Беркли (Berkeley G.)

1. A discourse addressed to an infidel mathematician. — In: The Analyst: Collected Works, v. 4, London, 1951.

Гаусс (Gauss C. F.)

1. General Investigation of Curved Surfaces. — Princeton (N. J.): Morehead & Hiltbeitel, 1902.

Джонсон (Johnson D. R.)

1. Bibliography of Nonstandard Analysis. — June, 1975. — Pittsburgh (Penns): University of Pittsburgh, 1975.

Йенсен (Jensen A.)

1. A computer oriented version of «non-standard analysis». — In: Contributions to Non-Standard Analysis/Ed. by W. A. J. Luxemburg and A. Robinson. Amsterdam: North-Holland, 1972.

Кейслер (Keisler H. J.)

1. Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals. — Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

Люксембург (Luxemburg W. A. J.)

1. (ed.) Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability. — N. Y.: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

2. What is nonstandard analysis? — Amer. Math. Monthly, 1973, 80, № 6, pt. II, p. 38—67.

Люксембург и Робинсон (Luxemburg W. A. J., Robinson A., editors)

1. Contributions to Non-Standard Analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1972.

Маховер и Хиршфелд (Machover M., Hirschfeld J.)

1. Lectures on Non-Standard Analysis. — Berlin: Springer, 1969.

Нейенхёйс (Nijenhuis A.)

1. Strong derivatives and inverse mappings. — Amer. Math. Monthly, 1974, 81, № 9, p. 969—980.

Ньюмен (Newman J. R.)

1. The World of Mathematics. — Vol. 1. — N. Y.: Simon and Schuster, 1956.

*) Более полную библиографию см. у Джонсона [1].

Робинсон (Robinson A.)

1. Non-standard analysis. — Proc. Roy. Acad. Amsterdam, Ser. A, 1961, p. 432—440.
2. Non-Standard Analysis. — Revised edition. — Amsterdam: North-Holla 1974.
3. Metamathematical problems. — J. Symbolic Logic, 1973, 38, № 3, p. 516.

Саливен (Sullivan K.)

1. The teaching of elementary calculus: An approach using infinitesimals. Thesis. — Madison (Wisc.): University of Wisconsin, 1974. Summary. Amer. Math. Monthly, 1976, 83, № 5, p. 370—375.

Строян и Люксембург (Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.)

1. Introduction to the Theory of Infinitesimals. Part 1: Classical infinite mals. Part 2: Infinitesimals in functional analysis. — N. Y.: Acade Press, 1976.

Хурд и Лёб (Hurd A., Loeb P.)

1. Victoria Symposium on Nonstandard Analysis. — Berlin: Springer, 197

ДОПУСТИМЫЕ МНОЖЕСТВА И БЕСКОНЕЧНАЯ ЛОГИКА

М. Маккаи

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	235
§ 2. Система аксиом Крипке — Платека	239
§ 3. Примеры допустимых множеств. Лемма об усечении	247
§ 4. Множества Хинтикки, существование моделей и Σ -компактность	252
§ 5. Конъюнктивные игровые формулы	255
§ 6. Применение игровых формул; полнота	266
§ 7. Σ -насыщенные алгебраические системы	271
§ 8. Теорема о покрытии	277
§ 9. Теорема о совершенном подмножестве	283
Литература	287

§ 1. Введение

Настоящая глава по своим целям отличается от большинства других глав данной книги. В то время как последние дают подробные представления о вполне сформировавшейся ветви математической логики, целью настоящей главы является рассмотрение весьма примечательного явления соприкосновения нескольких направлений в логике, каждому из которых в отдельности посвящено значительное число публикаций. Тот, кто тяготеет к теоретическому мышлению, интересуясь, как правило, объяснительными аспектами науки в противовес экспериментальному мышлению, охотящемуся за новыми явлениями, всегда имеет возможность наблюдать, как несвязанные или на первый взгляд несвязанные темы объединяются в связанное целое, даже несмотря на возможную неэффективность результатов, которые могут при этом появиться. Эта глава написана именно для такого «теоретически мыслящего» читателя.

В нашем случае имеются четыре участника, а именно, (i) допустимые множества, (ii) теория моделей логики $L_{\omega, \omega}$, (iii) классическая дескриптивная теория множеств (см. главу 8 «Теории множеств»), (iv) эффективная дескриптивная теория множеств (гиперарифметические множества, Π_1 -множества и т. д., см. также главу 8 «Теории множеств»). Все эти четыре аспекта нашей

темы получают свое отчетливое представление в данной главе. Кроме того, имеются еще два участника, играющие важную мотивирующую роль, но присутствующие в главе более или менее неявно, а именно, теория множеств и теория рекурсии. Теория индуктивной определимости, получившая самостоятельный статус совсем недавно (см. главу 7 «Теории рекурсии»), имеет важное отношение к нашей теме, но обсуждаться здесь не будет.

Из четырех упомянутых участников первые два будут играть «активную» роль. Нашей главной темой будет теория моделей допустимых фрагментов логики $L_{\omega_1\omega}$, но ее изложение предопределяется тем обстоятельством, будут ли наши результаты иметь прямое приложение к проблемам в двух последних областях.

Допустимые множества были введены Крипке [1] и Платеком [1], которые рассматривали эти множества прежде всего с точки зрения теории рекурсии. Они обобщили обычную рекурсивную теорию чисел до ординалов, меньших некоторого фиксированного, хорошо ведущего себя так называемого *допустимого* ординала. Первоначально допустимые ординалы были определены в терминах теории рекурсии, изложенной в стиле исчисления равенств Эрбрана — Гёделя. Это оказалось решающим для перехода от допустимых ординалов к *допустимым множествам*: технически это означало переход от допустимого ординала α к множеству L_α множеств, конструируемых на уровне α . В результате условия допустимости ординала смогли быть преобразованы в элегантную систему аксиом КР *первого порядка*, говорящую о теоретико-множественной системе $(L_\alpha, \in \upharpoonright L_\alpha)$.

КР — очень хорошая система аксиом. Она проста и даже имеет «замкнутую в себе» теорию. Так, например, она не нуждается в добавлении аксиомы « $V = L$ » (что, однако, имеет место в первоначально подразумеваемых моделях) для получения желаемых следствий. Действительно, было бы весьма печально, если бы « $V = L$ » оказалась необходимой, так как это отнюдь не простая или «естественная» аксиома.

Вначале была установлена связь допустимых множеств с эффективной дескриптивной теорией множеств (участник (iv)). Основные результаты о том, что: (а) наименьшее нетривиальное допустимое множество есть $\text{NYP}(\omega) = L_{\omega_1^{\text{СК}}}$, т. е. множество

всех подмножеств, конструируемых до уровня ординала Чёрча — Клини (наименьший не рекурсивный ординал) $\omega_1^{\text{СК}}$, и (б) $a \subset \omega$ является гиперарифметическим, если и только если $a \in \text{NYP}(\omega)$, были получены Крипке и Платеком (см. 6.5 и 6.6 ниже).

Тех, кто интересуется современным состоянием теории допустимых множеств, мы отсылаем к работе Барвайса [2].

Второй темой нашей работы является бесконечная логика. Бесконечная логика обрела свою настоящую жизнь в работе Ханфа и Гарского о некомпактности (Ханф [1]) и были впервые систематически изучена Карп [1]. Появление бесконечной логики связано с созданием теории моделей в логике $L_{\omega_1\omega}$ приблизительно в 1962 г. Познакомиться с ее ранним состоянием можно по работе Скотта [2]. Изложению этой теории уже в ее зрелом состоянии посвящена работа Кейслера [2].

С самого начала было понятно, что существует связь между дескриптивной теорией множеств и бесконечной логикой. Теорема Скотта [1] об изоморфизме была эквивалентна ответу на старый вопрос Куратовского. Обобщение Лопес-Эскобаром интерполяционной теоремы Крейга (см. об этом также ниже) оказалось обобщением теоремы Суслина об отделимости. Вообще, эта связь имеет следующие два аспекта. Во-первых, бесконечная логика заменяет классы точек пространства классами моделей. Во-вторых, синтаксические аспекты, которые только подразумевались в дескриптивной теории множеств, в логике присутствуют вполне явным образом и приводят к интересным рассуждениям. Так, например, теорема Малица [1] о сохранении характеризует предложения логики $L_{\omega_1\omega}$, сохраняющие свои истинностные значения на подсистемах, как такие, которые логически эквивалентны универсальным предложениям. За борелевскими и аналитическими множествами скрываются бесконечные формулы, но о теореме Малица можно рассуждать лишь тогда, когда эти формулы выписаны явно. Как стало понятным в настоящее время, теорема Малица и теорема Суслина об отделимости имеют тесные родственные связи как следствие более общего результата, см. Малица [2].

Воот сделал очень весомый вклад, фактически в противоположных друг другу направлениях, в установление и углубление связи между дескриптивной теорией множеств и логикой (см. Воот [1], [2]). Один из аспектов работы Воота [1] ниже будет проанализирован детально. В статье Воота [2] высказывается противоположная точка зрения, «элиминируются» методы теории моделей в пользу топологических методов, что позволило получить интересные и несколько неожиданные результаты.

Связь между допустимыми множествами и логикой $L_{\omega_1\omega}$ (что является главной темой данной главы) была установлена Барвайсом [1]. Барвайс ввел понятие *допустимых фрагментов* логики $L_{\omega_1\omega}$ (и логики $L_{\infty\omega}$), рассматривая только такие формулы, которые принадлежат данному допустимому множеству. Этот шаг был осуществлен в духе предложений Крайзеля, который подчеркивал, что чисто мощностные рассуждения (перво-

начальная основа классификации бесконечных формул в языке $L_{\alpha\beta}$ были весьма незрелым методом поиска интересных результатов. Вознаграждение не заставило себя долго ждать: теоремы Барвайса о полноте и Σ -компактности показали, что допустимые фрагменты обладают свойствами, аналогичными обычной логике первого порядка, и могут быть признаны как основа для дальнейших рассуждений.

Нашу точку зрения на взаимоотношения между допустимыми множествами и логикой можно представить как явление, которое может быть названо *синтаксической полнотой* допустимых множеств. Пусть A — счетное допустимое множество, L_A — фрагмент $L_{\omega_0} \cap A$. «Синтаксическая полнота» может быть проиллюстрирована на следующих примерах. Если $\varphi \in L_A$ — логически истинная формула, то не только существует ее вывод d генцевского типа в бесконечной формальной системе (согласно теореме о полноте для L_{ω_0} , Карп [1], Лопес-Эскобар [1]), но и сам вывод d принадлежит A (теорема Барвайса о полноте). В качестве второго примера заметим, что теорема Бета об определении верна для отдельных формул $\varphi(P)$ из L_{ω_0} (Лопес-Эскобар [1], см. также ниже). Опять-таки формула, «явно определяющая P », может быть найдена как элемент L_A , а $\varphi(P)$ принадлежит $L(P)_A$. В действительности допустимые множества представляют собой оптимальное решение проблемы нахождения «синтаксически полного» фрагмента логики L_{ω_0} .

В качестве следующего замечания отметим, что, вообще говоря, счетные допустимые множества не всегда являются «синтаксически полными». Так, например, предложение языка L_A может не иметь модели в A , даже если такая модель существует. Заметим также, что легко построить «синтаксически и семантически полные» счетные транзитивные множества (используя теорему Лёвенгейма — Скулема о спуске, начиная с НС, множества всех наследственно счетных множеств), но этот путь даст нам всего лишь небольшое число допустимых множеств, да и то не самых интересных. Следовательно, основные факты о логике на допустимых множествах лежат гораздо глубже, чем это кажется на первый взгляд.

Выгода в добавлении допустимых множеств к теоретико-множественной точке зрения, выражаемой в виде теоретико-дескриптивной модели, заключается в возможности наведения мостов через глубокую пропасть между неэффективной и эффективной дескриптивной теориями множеств, т. е. возможности достигнуть цели, которой придавал особое значение Аддисон [1] еще до появления допустимых множеств. В качестве возможно главного примера, иллюстрирующего эту связь, мы тщательно разберем, как теорема Клини, утверждающая, что

$\mu_{\text{ур}} = \Delta_1^1$, с одной стороны, и теорема Суслина об отделимости, с другой, окажутся частными случаями одного результата (см. ниже § 8).

Глава предназначена для специалистов по теории моделей, т. е. для тех, кто обладает определенными знаниями и хорошо понимает дух теории моделей в обычной логике первого порядка. Здесь будут изложены те методы, которые наиболее отвечают теоретико-модельным представлениям. В частности, мы продемонстрируем два современных аппарата: *конъюнктивные игровые предложения*, введенные Воотом, и *Σ -насыщенные алгебраические системы* Рессера. Хотелось бы заметить, что в результате мы получаем некоторые основные факты не совсем прямым способом (например, теорему Барвайса о полноте).

Первые два параграфа (после настоящего) носят преимущественно описательный характер и в большинстве случаев доказательства опущены. Основной материал содержится в § 4; изложение теории моделей носит существенно замкнутый характер. Приложениям в (эффективной) дескриптивной теории множеств полностью посвящены §§ 5—9.

§ 2. Система аксиом Крипке—Платека

Праэлементы

Хотя праэлементы на некоторое время потеряли свою популярность, они вновь входят в моду, по крайней мере в контексте допустимых множеств; см. Барвайс [2]. Аксиоматическая теория множеств может быть естественным образом развита с должным уважением к праэлементам без особых изменений в привычных конструкциях, скажем, теории множеств Цермело—Френкеля.

Праэлементы — это «точки», не имеющие теоретико-множественной структуры, т. е. если u — праэлемент, то не существует объекта, являющегося элементом u , — короче, всегда имеет место $x \notin u$. Можно описать канторовский универсум множеств с праэлементами следующим образом. Пусть U — некоторое множество, элементы которого называются *праэлементами*. Для ординалов α определим $V_{U,\alpha}$ следующим образом: $V_{U,0} = U$, $V_{U,\alpha+1} = \mathcal{P}(V_{U,\alpha})$, $V_{U,\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_{U,\alpha}$, если λ — предельный ординал, и положим $V_U = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_{U,\alpha}$. V_U есть универсум множеств с носителем $\subseteq U$. Если $U = \emptyset$, то получается обычная неразветвленная иерархия. Отношение принадлежности $\in_U$ в V_U определяем обычным образом, учитывая только то, что для произвольных $u \in U$ и $x \in V_U$ имеем $x \notin_U u$. Следовательно, можно писать $\in$ вместо $\in_U$.

В языке теории множеств с праэлементами в дополнение к символам $\in$ и равенства присутствует предикат U с естественной интерпретацией в V_U , когда рассматривается система всех множеств с носителем $\in U$. Будем пользоваться символами $\in$ и U только в особых случаях; обычно же будем писать $\in$ и U даже в формулах.

Стандартные аксиомы теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (ZFC) подвергаются совершенно незначительным изменениям даже в случае, когда они представляют собой формулировки наших предположений о V_U . Так, например, аксиома экстенциональности будет выглядеть следующим образом:

$$(\bigwedge Ua \wedge \bigwedge Ub) \rightarrow (\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b).$$

Поэтому и в случае V_U мы будем пользоваться теоретико-множественной терминологией («степень множества», «ординал» и т. д.) в обычном смысле.

Отсылая читателя к Барвайсу [2] по поводу дискуссии относительно целесообразности использования праэлементов при построении теории множеств, особенно теории *допустимых* множеств, укажем лишь причину нашего интереса к праэлементам. Мы будем рассматривать специальное допустимое множество $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$, *допустимую оболочку* системы $\mathfrak{M} = (|\mathfrak{M}|, R_1, \dots, R_l)$. Мы будем иметь $\mathfrak{M} \in \text{HYP}_{\mathfrak{M}}$, в частности, $|\mathfrak{M}| \in \text{HYP}_{\mathfrak{M}}$. Мы хотели бы придать $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$ теоретико-модельный смысл, а для этого, естественно, необходимо, чтобы любой изоморфизм $f: \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ мог быть расширен до $\in$ -изоморфизма $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$ и $\text{HYP}_{\mathfrak{N}}$. Ясно, что для этого необходимо, чтобы элементы множества $|\mathfrak{M}|$ не обладали «теоретико-множественной индивидуальностью» в $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$, т. е. чтобы они были праэлементами в $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$.

В данной главе праэлементы упоминаются только в контексте $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$.

Введение праэлементов в теорию допустимых множеств, $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$ и соответствующие понятия принадлежат Барвайсу [2]. С небольшими изменениями этот параграф также следует данному источнику.

Система аксиом Крипке — Платека

2.1. Определение. Семейство Δ_0 -формул (языка $\{\in, U\}$) есть наименьшее семейство Y , содержащее элементарные формулы и замкнутое относительно следующих условий:

- (i) если φ принадлежит Y , то и $\neg\varphi$ также принадлежит Y ;
- (ii) если φ и ψ принадлежат Y , то $\varphi \wedge \psi$ и $\varphi \vee \psi$ также принадлежат Y ;
- (iii) если Y содержит φ , то Y содержит $\forall x \in y(\varphi)$ и $\exists x \in y(\varphi)$.

Заметим, что $\forall x \in y(\varphi)$ означает то же, что и $\forall x[x \in y \rightarrow \varphi]$, а формула $\exists x \in y(\varphi)$ означает $\exists x[x \in y \wedge \varphi]$.

Транзитивное множество A (т. е. из того, что $x \in A$ и $y \in x$, следует $y \in A$) можно рассматривать как алгебраическую систему для языка $\{\in, U\}$, интерпретируя символ $\in$ реальным отношением $\in$, ограниченным множеством A , а U интерпретируя как $U \cap A$. В большинстве случаев мы будем писать просто A для обозначения системы $(A, \in \upharpoonright A, U \cap A)$.

Главное свойство Δ_0 -формул заключается в том, что они *абсолютны* при транзитивных интерпретациях в том смысле, что имеет место

2.2. Утверждение. Для транзитивных множеств $A, B \subset V_U$, если $A \subset B$, то для любой Δ_0 -формулы $\varphi(x)$ и любых элементов a в A следующие условия эквивалентны:

- 1) $A \models \varphi(a)$, 2) $B \models \varphi(a)$, 3) $V_U \models \varphi(a)$.

Доказательство. Легко проводится индукцией по сложности φ . $\square$

Многие элементарные понятия теории множеств могут быть формализованы с помощью Δ_0 -формул (например, « f есть функция», « α есть ординал» и т. п.). Значение этого состоит в том, что неважно, оцениваем ли мы определяемые формулы в V_U или в произвольном транзитивном множестве, содержащем рассматриваемый объект.

2.3. Определение. КРУ, система аксиом Крипке — Платека с праэлементами, есть теория над языком $\{\in, U\}$, аксиомами которой являются универсальные замыкания следующих формул:

Праэлементы: $U(u) \rightarrow x \notin u$.

Пустое множество: $\exists x(\neg U(x) \wedge \forall y(y \notin x))$.

Экстенциональность: см. выше (с. 240).

Фундирование (схема): $\forall x(\forall y \in x(\varphi(y) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$ для всех формул $\varphi(x)$.

Пара: $\exists a(x \in a \wedge y \in a)$.

Объединение: $\exists b \forall y \in a \forall x \in y(x \in b)$.

Δ_0 -выделение (схема): $\exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$ для всех Δ_0 -формул $\varphi(x)$ (не имеющих свободных вхождений b).

Δ_0 -выборка (схема): $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$ для всех Δ_0 -формул φ (не содержащих свободных вхождений b). (φ, ψ могут иметь свободные переменные, отличные от указанных.)

2.4. Определение. Транзитивное множество A (в котором V_U), являющееся моделью КРУ, называется *допустимым*.

Аксиомы экстенциональности и фундирования, конечно, автоматически выполняются для транзитивных множеств. Эти аксио-

мы появляются в КРУ из-за возможности рассмотрения также и «нестандартных» моделей КРУ, см. ниже.

Укажем некоторые важные общие принципы.

2.5. Определение. Формула вида $\exists u \varphi(u)$, где φ является Δ_0 -формулой, называется Σ_1 -формулой. Класс Σ -формул есть наименьший класс Y , содержащий Δ_0 -формулы и замкнутый относительно:

- а) конъюнкции и дизъюнкции (условие (ii) из 2.1),
- б) ограниченной квантификации (условие (iii) из 2.1),
- с) экзистенциальной квантификации: если φ содержится в Y , то Y содержит и $\exists u \varphi$.

Понятие Π -формулы получается заменой $\exists$ на $\forall$ в последнем пункте определения. С точностью до логической эквивалентности Π -формулы являются отрицаниями Σ -формул.

В следующем утверждении формулируется основное свойство Σ -формул — *устойчивость вверх*.

2.6. Утверждение. Пусть $A \subset B$ — транзитивные множества $\subset V_U$, $\varphi(x)$ есть Σ -формула, $a \in A$. Тогда $A \models \varphi[a]$ влечет $B \models \varphi[a]$ и $V_U \models \varphi[a]$.

Доказательство. Получается простой индукцией по φ . $\square$

Для данной формулы φ и переменной w обозначим через $\varphi^{(w)}$ результат замены каждого неограниченного квантора в φ квантором, ограниченным переменной w : $\exists u$ на $\exists u \in w$, $\forall u$ на $\forall u \in w$, при этом w не должно входить в φ . Если φ есть Δ_0 -формула, то $\varphi^{(w)} = \varphi$. Очевидно, что Σ -формулы $(\varphi^{(u)} \wedge u \in v) \rightarrow \rightarrow \varphi^{(v)}$ и $\varphi^{(u)} \rightarrow \varphi$ являются логически истинными.

2.7. Утверждение (принцип Σ -рефлексивности). Для всех Σ -формул φ формула

$$\varphi \leftrightarrow \exists a \varphi^{(a)}$$

является теоремой КРУ. В частности, каждая Σ -формула эквивалентна некоторой Σ_1 -формуле в КРУ.

Доказательство осуществляется индукцией по φ . Заметим, что аксиома о Δ_0 -выборке является специальным случаем принципа Σ -рефлексивности. Обратно, аксиома Δ_0 -выборки используется в доказательстве шага индукции: φ есть $\forall u \in v \psi(u)$. $\square$

Из 2.7 легко следует принцип Σ -выборки, т. е. аналог аксиомы Δ_0 -выборки, где φ — произвольная Σ -формула. Следующее определение является основным.

2.8. Определение. Пусть A — допустимое множество.

(i) Предикат на A есть Σ -предикат (сигма светлым шрифтом) (или Σ_A), если он определен Σ -формулой (в системе $A = (A, \in \upharpoonright A, \cup \upharpoonright A)$ без параметров).

(ii) Предикат $P(x)$ на A есть Σ -предикат (сигма полужирным шрифтом), если он определен Σ -формулой с параметрами в A , т. е. существует Σ -формула $\varphi(x, y)$ и фиксированные элементы b в A такие, что для любого a в A $P(a) \leftrightarrow A \models \varphi[a, b]$.

(iii) Операция на A является Σ -операцией или Σ -операцией в зависимости от того, каким является ее график.

(iv) Предикат $P \subseteq A^n$ является Δ -предикатом (или Δ -предикатом), если одновременно и P и его дополнение $A^n - P$ являются Σ -предикатами (или Σ -предикатами). (Для $A^n - P$ быть Σ -предикатом или Σ -предикатом — то же самое, что для P быть Π -предикатом или Π -предикатом соответственно.)

Для ориентации читателю в этом месте предлагается рассмотреть допустимое множество HF наследственно конечных множеств без праэлементов и убедиться (или по крайней мере поверить), что Σ -предикаты (а также Σ -предикаты) на HF (ограниченные множеством ω) являются в точности рекурсивно перечислимыми предикатами, и, следовательно, совокупности Δ -предикатов, Δ -предикатов и рекурсивных предикатов совпадают. Этот пример является показательным в том, насколько конструкции допустимых множеств соответствуют желанию найти аналоги фактам обычной теории рекурсии при обобщении рекурсивной перечислимости до Σ , а рекурсивности до Δ .

Подчеркивая эту аналогию, мы иногда говорим, что a является A -конечным, если $a \in A$, предикат P является A -рекурсивно перечислимым, если он является Σ_A -предикатом, A -рекурсивным, если он является Δ_A -предикатом, и, наконец, операция F является A -рекурсивной, если она есть Σ_A -операция.

2.9. Утверждение (принцип Δ -выделения). Для произвольных Σ -формулы $\varphi(x)$ и Π -формулы $\psi(x)$, возможно, содержащих, кроме x , другие свободные переменные, следующее утверждение есть теорема КРУ: если для всех $x \in a$ $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$, то существует b такое, что $b = \{x \in a : \varphi(x)\}$.

Доказательство. Предположим, что $\forall x \in a (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$. Тогда $\forall x \in a (\varphi(x) \vee \neg \psi(x))$ эквивалентна Σ -формуле и согласно Σ -рефлексивности существует c такое, что (i) $\forall x \in a [\varphi^{(c)}(x) \vee \neg \psi^{(c)}(x)]$. Пусть по Δ_0 -выделению $b = \{x \in a : \varphi^{(c)}(x)\}$. Ясно, что каждый $x \in b$ удовлетворяет $\varphi(x)$. Если $x \in a$ и $\varphi(x)$ истинна, то выполняется $\psi(x)$, поэтому имеет место $\psi^{(c)}(x)$ (поскольку ψ есть Π -формула). Отсюда в силу (i) получаем $\varphi^{(c)}(x)$. Итак, $x \in b$, т. е. желаемое b найдено. $\square$

Заметим, что внимательный анализ формулировки 2.9 приводит к прямым следствиям.

2.10. Следствие (Δ_A -выделение). Для элемента a допустимого множества A и для Δ -предиката $P(x)$ на A $\{x \in a : P(x)\}$ есть элемент множества A .

2.11. Следствие (Σ -замещение). Для каждой Σ -формулы $\varphi(x, y)$ следующее утверждение есть теорема KPU: если $\forall x \in a \exists! y \varphi(x, y)$, то существует функция f , $\text{dom}(f) = a$, такая, что $\forall x \in a \varphi(x, f(x))$.

Доказательство. По принципу Σ -выборки существует b такое, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$. Согласно Δ -выделению существует f такая, что

$$f = \{ \langle x, y \rangle \in a \times b : \varphi(x, y) \} \\ = \{ \langle x, y \rangle \in a \times b : \neg \exists z [\varphi(x, z) \wedge y \neq z] \}.$$

2.12. Следствие (Σ_Δ -замещение). Для $a \in A$, где A — допустимое множество, и для любой Σ_Δ -функции F на A сужении $F \upharpoonright a$ есть элемент множества A .

Приведем «формальные» аналоги понятий в 2.8. Символ Σ -операции в KPU есть символ операции F , введенный новой аксиомой $\forall x \forall y (F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y))$, где φ есть такая Σ -формула, что $\text{KPU} \models \forall x \exists! y \varphi(x, y)$. Символ Δ -предиката в KPU — это предикатный символ P , введенный новой аксиомой $\forall x (P(x) \leftrightarrow \varphi(x))$ так, что φ является Σ -формулой и существует Π -формула $\psi(x)$, для которой $\text{KPU} \vdash \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$. Конечно, такое «несущественное» расширение KPU этими символами является консервативным, но справедливо даже большее. Если допустить их вхождение в элементарные формулы и соответственно переопределить Δ_0 -формулы и Σ -формулы, то получим формулы, доказуемо эквивалентные Δ -формулам (т. е. как Σ -формулам, так и Π -формулам), соответственно Σ -формулам в старом смысле. Более того, все новые аксиомы и правила вывода KPU, полученные с новыми понятиями Δ_0 , Δ и Σ , становятся доказуемыми. Например, Δ_0 -выделение в новой формулировке влечет принцип Δ -выделения (утверждение 2.9) для старой KPU.

Эти факты связаны с понятием относительной допустимости. Если S есть конечный набор предикатов и операций на транзитивном множестве A , то A называется допустимым относительно S , если все аксиомы KPU с элементами из S , входящими в элементарные формулы, являются истинными в $\langle A, \in \upharpoonright A, S \rangle$. Имеет место

2.13. Теорема. Если A — допустимое множество, $\hat{S}$ — набор Δ_A -предикатов и Σ_A -операций на A , то A допустимо относительно $\hat{S}$. Более того, любое Σ -понятие или Δ -понятие относительно $\hat{S}$ является соответственно Σ_A -понятием или Δ_A -понятием.

В заключение мы сформулируем свойство абсолютности Δ .

2.14. Утверждение. Пусть $P(x)$ — Δ -предикатный символ KPU, $F(x)$ — символ Σ -операции KPU и $A \subseteq B \subseteq V_U$ — допустимые множества. Тогда для элементов a множества A $A \models P[a] \leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B \models P[a] \Leftrightarrow V_U \models P[a]$. Кроме того, A замкнуто относительно операции F^{V_U} (интерпретация F в V_U) и, в частности, F^{V_U} , ограниченная множеством A , есть F^A , т. е. интерпретация F в A .

Σ -рекурсия

Теперь мы установим наиболее важное правило вывода, правило Σ -рекурсии. $\text{TC}(a)$ означает транзитивное замыкание множества a , т. е. наименьшее транзитивное множество b такое, что $a \subset b$. Для праэлемента p всегда $\text{TC}(p) = \emptyset$.

Многие типы трансфинитной индукции могут быть построены как «индукции по $\text{TC}(x)$ », т. е. когда предположение индукции состоит в том, что утверждение справедливо для всех $y \in \text{TC}(x)$. В эту категорию попадает как обычная трансфинитная индукция, так и то, что называется индукцией на бесконечных формулах. Мы будем формулировать наброски доказательства и определений, доказуемые в KPU, также пользуясь индукцией «по $\text{TC}(x)$ ».

Опускаем доказательство следующего утверждения:

существует такой символ Σ -операции $\text{TC}(\cdot)$ в KPU, что следующие утверждения являются теоремами в KPU:

- $\text{TC}(a)$ транзитивно,
- $a \subset \text{TC}(a)$,
- для любого транзитивного b из $a \subset b$ следует $\text{TC}(a) \subset \text{TC}(b)$ (см. Барвайс [2]).

Довольно легко доказать следующее

2.15. Утверждение (принцип TC -индукции). Для любой формулы $\varphi(x)$, имеющей, возможно, и другие свободные переменные, утверждение: «если для каждого $x \forall y \in \text{TC}(x) \varphi(y)$ влечет $\varphi(x)$, то $\forall x \varphi(x)$ » является теоремой KPU.

2.16. Утверждение (определение по Σ -рекурсии). Пусть G — $n+2$ -арный символ Σ -функции, $n \geq 0$. Тогда можно определить новый символ Σ -функции F так, что утверждение «для всех $x = x_1, \dots, x_n$ и y $F(x, y) = G(x, y, (\lambda z F(x, z)) \upharpoonright \text{TC}(y))$ » является теоремой KPU.

Доказательство точно такое же, как доказательство принципа рекурсии для ZF, см. 5.6 в главе 1 «Теории множеств».

2.17. Утверждение (определение Σ_Δ -рекурсией). Пусть A — допустимое множество. Пусть G — $n+2$ -арная Σ -функция (соотв. Σ -функция) на A , $n \geq 0$. Существует Σ -функция (соотв. Σ -функция) F на A такая, что F удовлетворяет тождеству в 2.16.

Хотя 2.17 не является следствием 2.16, его доказательство легко получить модификацией доказательства 2.16.

2.18. Следствие (определение Δ -предикатов с помощью ТС-рекурсии). Пусть P, Q — Δ -предикатные символы от $n+1, n+2$ аргументов соответственно; $n \geq 0$. Можно ввести Δ -предикатный символ R так, что следующие утверждения будут доказуемы в KPU:

$$R(x, p) \leftrightarrow P(x, p) \text{ для праэлементов } p,$$

$$R(x, a) \leftrightarrow Q(x, a, \{b \in TC(a) : R(x, a)\}).$$

Очевиден вариант следствия 2.18 — следствие 2.19 о Δ -предикатах на допустимых множествах.

Есть много подобных теоретико-множественных операций и предикатов, которые могут быть введены в KPU как Σ -операции и Δ -предикаты с использованием 2.16 и 2.18. Далее мы увидим важные примеры этого.

Синтаксис и семантика $L_{\infty\omega}$ в KPU

Для знакомства с основными синтаксическими и семантическими понятиями логики мы отсылаем читателя к главе 2. Для нас важно то, что мы конструируем формулы как множества. Символы в основном языке L могут быть праэлементами, однако мы конструируем формулы $\exists x\phi, \forall\theta$ и т. д. как множества $\langle \exists, x, \phi \rangle, \langle \forall, \theta \rangle$ и т. д., где $\exists, \forall$ будут чем-то вроде таких фиксированных множеств, как 2 и 3. При такой структуре языка собственные подформулы формулы ϕ являются элементами $TC(\phi)$. Это делает возможным дать определение понятия « ϕ есть формула ω , ω -логики, основанной на L » посредством ТС-индукции. В частности, с помощью 2.18 мы получим, что это понятие есть Δ -предикат в KPU, а точнее, что в KPU имеется символ Δ -предиката, интерпретация которого на V_U приведена в кавычках выше.

Этот последний факт имеет важное значение для допустимых фрагментов $L_{\infty\omega}$. Пусть A — допустимое множество, и пусть $L \in A$. Обозначим через L_A набор формул из $L_{\infty\omega}$, которые есть в A , $L_A = L_{\infty\omega} \cap A$, и назовем L_A допустимым фрагментом ($L_{\infty\omega}$). Ввиду абсолютности Δ -предикатов в KPU (утверждение 2.14) Δ -определение логики $L_{\infty\omega}$, «релятивизованное» к A , дает определение L_A , следовательно, понятие формулы в L_A есть Δ -понятие на A . Аналогично обычные синтаксические свойства и операции на формулах логики $L_{\infty\omega}$ являются Δ -свойствами в KPU и, следовательно, соответствующие понятия для L_A являются Δ -понятиями на A .

Несколько более общий случай получится, если для допустимого множества A язык L есть Δ_A -подмножество множества A . Подобно предыдущему, мы снова можем убедиться, что поня-

тие формулы в $L_A = L_{\infty\omega} \cap A$ и другие синтаксические понятия L_A — Δ -понятия на A . Заметим, что для произвольного $\phi \in L_A$ имеется такое A -конечное $L_0 \subseteq L$, что $\phi \in (L_0)_A$.

Возвращаясь к «формальному в KPU» контексту, заметим, что фактически семантика $L_{\infty\omega}$ является Δ -семантикой в KPU. Другими словами, в KPU имеется Δ -предикат $Sat(L, \mathfrak{M}, a, \phi)$, выражающий « a есть конечная последовательность элементов L -системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models \phi(a)$ », т. е. интерпретация Sat в V_U совпадает с предикатом, заключенным в кавычки. Более того, Sat удовлетворяет, и это доказуемо в KPU, основным индуктивным пунктам определения истинности в $L_{\infty\omega}$. Эти факты вновь представляют собой частные случаи 2.18. Хотя они сами по себе очень важны, их ценность ограничивается тем обстоятельством, что в обсуждении допустимого фрагмента L_A мы обычно не можем ограничиться моделями в самом A . Во всяком случае, истинность L -формул в A -конечной системе является Δ -предикатом на A , если A допустимо, что следует из сказанного выше.

§ 3. Примеры допустимых множеств. Лемма об усечении

Некоторые допустимые множества

Ранее мы отмечали, что наследственно конечные множества в любом V_U образуют допустимое множество. Обобщая это замечание, рассмотрим бесконечный кардинал κ и определим $H_U(\kappa) = \{a \in V_U \mid TC(a) \text{ имеет мощность, меньшую чем } \kappa\}$. $H(\kappa)$ есть $H_*(\kappa)$.

3.1. Теорема. Для всех бесконечных кардиналов κ $H_U(\kappa)$ — допустимое множество. Если κ регулярный, то $H_U(\kappa)$ является допустимым множеством относительно любых предикатов на нем.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из результатов, приведенных ниже. $\square$

Читатель увидит, что случай регулярного κ практически тривиален. Регулярный кардинал κ имеет еще то дополнительное преимущество, что если $X \subseteq H_U(\kappa)$ и $\text{card}(X) < \kappa$, то $X \in H_U(\kappa)$.

Для $\kappa = \omega_1$ множество $H_U(\omega_1)$ обозначается как HC_U , а множество $H(\omega_1)$ — как HC , т. е. множество наследственно счетных множеств. Синтаксис $L_{\omega_1\omega}$ лежит всецело в HC_U .

Будем писать $\mathfrak{M} <_1 \mathfrak{N}$ для обозначения того, что $\mathfrak{M}$ есть элементарная подсистема систем $\mathfrak{N}$ по отношению к Σ -формулам, т. е. $\mathfrak{M} \models \phi[a] \iff \mathfrak{N} \models \phi[a]$ для любой Σ -формулы $\phi(x)$ и элементов a в $|\mathfrak{M}|$. При написании $A <_1 B$ для транзитивных множеств или классов под A и B мы, конечно, подразумеваем соот-

ветствующие системы с «реальным» $\in$ и «праэлементами». Следующий результат есть классическая теорема Леви [1].

3.2. Теорема Леви об абсолютности. $N_U(\kappa) \prec_1 N_U(\lambda) \prec_1 V_U$ для несчетных кардиналов $\kappa < \lambda$.

3.3. Теорема. Если A — транзитивное множество, B — допустимое множество или класс и $A \prec_1 B$, то A — также допустимое множество.

Теперь мы видим, что первое утверждение в 3.1 есть следствие 3.2 и 3.3.

3.4. Теорема. Пусть κ — бесконечный кардинал. Для любого $a \in N_U(\kappa^+)$ существует транзитивное множество $A \in N_U(\kappa^+)$ такое, что $a \in A$ и $A \prec N_U(\kappa)$ (тем более $A \prec_1 N_U(\kappa)$ и, таким образом, A — допустимое множество).

Доказательство. Обогатим систему $\mathfrak{M} = (N_U(\kappa^+), \in \upharpoonright N_U(\kappa^+), U \cap N_U(\kappa^+))$ добавлением κ новых операций $\langle f_\alpha: \alpha < \kappa \rangle$ таких, что для любых $0 \neq a \in N_U(\kappa^+)$ верно равенство $TC(a) = \{f_\alpha(a): \alpha < \kappa\}$. Возможность такого расширения очевидна. Теперь применим теорему Лёвенгейма — Скулема (см. главу 2), чтобы получить элементарную подсистему мощности κ системы $(\mathfrak{M}, f_\alpha)_{\alpha < \kappa}$, содержащую a . Основное множество этой новой системы удовлетворяет нашим требованиям. $\square$

Последний результат дает нам много счетных (и других) допустимых множеств, но не все допустимые множества можно получить таким путем. В число последних, как мы установим ниже в п. 6.3, попадают и допустимые множества, определяемые следующей теоремой.

3.5. Утверждение (существование следующего допустимого множества). Для любого множества $a \in V_U$ множество $HYP(a) \equiv \bigcap \{A: a \in A, A \text{ является допустимым}\}$ само является допустимым. $HYP(a) = L_\alpha(TC(a))$ для некоторого ординала α . $\text{Card } HYP(a) = \max(\omega, \text{card } TC(a))$.

Замечание. $HYP(a)$ иногда обозначается как a^+ .

Доказательство. Доказательство (и фактически формулировка второго утверждения) требует рассмотрения конструктивной иерархии, см. Барвайс [2]. $\square$

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система конечной сигнатуры, $\mathfrak{M} = (\langle \mathfrak{M} \rangle, R_1, \dots, R_l)$. Рассматривая элементы $\langle \mathfrak{M} \rangle$ как праэлементы, изучим $V_{\langle \mathfrak{M} \rangle}$. Внутри $V_{\langle \mathfrak{M} \rangle}$ сформируем допустимое множество $HYP(\mathfrak{M}) = HYP(\langle \mathfrak{M} \rangle, R_1, \dots, R_l)$ и назовем его $HYP_{\mathfrak{M}}$, допустимой оболочкой системы $\mathfrak{M}$. Заметим, что технически $HYP(\mathfrak{M})$ и $HYP_{\mathfrak{M}}$ могут отличаться; например, $HYP(\mathfrak{M})$ может вообще не содержать праэлементов. Кроме того, легко видеть, что для любого изоморфизма $f: \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ мы получаем рас-

ширение $f^*: HYP_{\mathfrak{M}} \simeq HYP_{\mathfrak{N}}$, которое является $\{\in, U\}$ -изоморфизмом.

В качестве следствия теоремы Барвайса об определмости (Барвайс [2], теорема 5.14 главы 2) имеем следующее утверждение:

3.6. Теорема. На $A = HYP_{\mathfrak{M}}$ выполняется $\Sigma = \Sigma$ с параметрами в $\langle \mathfrak{M} \cup \{ \langle \mathfrak{M} \rangle, R_1, \dots, R_l \} \rangle$.

Ординал α называется *допустимым*, если множество L_α всех множеств, конструируемых до уровня α , является допустимым. В теории рекурсии на допустимых ординалах важную роль играют различные специальные виды допустимых ординалов (таких, как *рекурсивно недостижимые*, *проективные* и т. д.). Ординал α называется *стабильным*, если $L_\alpha \prec_1 L$. Очевидно, каждый стабильный ординал является допустимым. Тот же прием, что и в 3.4, дает нам возможность получить много счетных стабильных ординалов. В § 6 мы укажем (без доказательства) значение первого стабильного ординала $> \omega$ для эффективной дескриптивной теории множеств. Более подробно о допустимых ординалах см. Барвайс [2].

Лемма об усечении

Пусть $A = (\langle A \rangle, E, U)$ — произвольная система для языка $\{e, U\}$. Предположим, что A удовлетворяет (модифицированной) аксиоме экстенциональности:

$$\forall x \forall y [(\bigwedge Ux \wedge \bigwedge Uy \wedge \forall z (zEx \leftrightarrow zEy)) \rightarrow x = y] \\ \wedge \forall x \forall y [Ux \rightarrow \bigwedge y Ex].$$

Мы назовем A *экстенциональной системой*. Для любого транзитивного множества или класса $A \subset V_U$ ($A, \in \upharpoonright A, U \cap A$) является, конечно, экстенциональной системой. Пусть A — экстенциональная система, и $a \in \langle A \rangle$. Назовем a *фундированным* в A , если не найдется бесконечной «убывающей» последовательности $a_0 = a, a_1, a_2, \dots$ такой, что $a_{n-1} E a_n$ для $n < \omega$. Систему в целом будем называть «фундированной», если все $a \in \langle A \rangle$ являются фундированными. Хорошим упражнением является проверка того, что A является фундированной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет «принципу доказательства E -индукцией»: для любого подмножества $B \subset \langle A \rangle$ система $(\langle A \rangle, E, U, B)$ удовлетворяет $\forall x (\forall y (yEx \rightarrow By) \rightarrow Bx) \rightarrow \forall x Bx$. Для фундированной экстенциональной системы A имеется соответствующий принцип определения E -рекурсией.

Понятно, что «стандартные» $\in$ -системы, основанные на транзитивных множествах, являются фундированными.

3.7. Лемма Мостовского о сжатии. Каждая фундированная экстенциональная система изоморфна некоторой стан-

дартной $\in$ -системе. Этот изоморфизм единственный в том случае, если он тождественный на праэлементах.

Доказательство. Для $A = (|A|, E, U)$, которая является фундированной экстенциональной системой, определим E -рекурсивной $f(p) = p$ для $p \in U$ и $f(u) = \{f(b) : bEa\}$ для $a \in |A| - U$. Тогда f и есть требуемый изоморфизм. Единственность доказывается E -индукцией. $\square$

Между прочим, используя 3.7 и теорему Лёвенгейма — Скулема, можно доказать теорему Леви 3.2.

Существенно единственная стандартная $\in$ -система в лемме 3.7 называется транзитивным сжатием A .

Пусть теперь A — произвольная экстенциональная система. Пусть $WF(A) \subset A$ (фундированная часть A) есть множество всех фундированных элементов множества A . Ясно, что из $U^A \subset WF(A)$, $x \in WF(A)$ и yE^Ax следует $y \in WF(A)$. При E^A , ограниченном на $WF(A)$, $WF(A) = (WF(A), E^A \upharpoonright WF(A), U^A)$ является фундированной экстенциональной системой.

Теперь мы введем теоретико-модельное понятие конечного расширения. Пусть A, B — системы, в которых интерпретирован, среди прочих, бинарный предикатный символ E . Система B называется *концевым расширением* A , если B есть расширение A в обычном смысле и, кроме того, если $a \in |A|$ и bE^Ba , то $b \in |A|$.

Примеры. (1) Для транзитивных множеств $A \subset B \in$ -система B есть концевое расширение множества A .

(2) Экстенциональная система A является концевым расширением множества $WF(A)$. Следующее утверждение обобщает 2.6. Оставляем его доказательство в качестве упражнения.

3.8. Утверждение. Пусть B — концевое расширение множества A , $a \in |A|$.

(i) Для любой Δ_0 -формулы $\varphi(x)$ имеем $A \models \varphi[a] \Leftrightarrow B \models \varphi[a]$.

(ii) Для любой Σ -формулы $\varphi(x)$ имеем $A \models \varphi[a] \Rightarrow B \models \varphi[a]$.

(iii) Для любой Σ -формулы $\varphi(x)$ и Π -формулы $\psi(x)$, если

$\forall x [\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$ истинна как в A , так и в B (φ определяет « Δ -предикаты» в A и B), то $A \models \varphi[a] \Leftrightarrow B \models \varphi[a]$.

Перейдем к изучению фундированной части модели $A = (|A|, E, U)$ системы KPU. Теоретико-множественная функция ранга $r(\cdot)$ является Σ -операционным символом в KPU, а высказывания « $r(x)$ есть ординал» и « $y \in x \Rightarrow r(y) < r(x)$ » доказуемы в KPU. Отсюда следует, что элемент $a \in |A|$ является фундированным в A тогда и только тогда, когда $r^A(a)$ определено.

Следующая лемма дает весьма характерное свойство KPU, которым не обладают многие более сильные теории множеств.

3.9. Лемма об усечении. Если $A = (|A|, E, U)$ является моделью KPU, то $WF(A) \models KPU$, следовательно, $WF(A)$ изоморфна некоторому допустимому множеству.

Доказательство. Δ_0 -выделение для $WF(A)$ следует немедленно из Δ_0 -выделения A . Мы неоднократно воспользуемся тем, что $a \in WF(A)$ тогда и только тогда, когда $b \in WF(A)$ для каждого $b \in a_E$, где $a_E \hat{=} \{b : bEa\}$. Так, например, отсюда легко следует, что $WF(A)$ удовлетворяет аксиомам пары и объединения. Остается доказать аксиому Δ_0 -выборки. Пусть $\varphi(x, y, z)$ является Δ_0 -формулой, $a, c \in WF(A)$, и предположим, что

(i) $WF(A) \models \forall x \in a \exists y \varphi(x, y, c)$.

Прежде всего, в силу 3.8(ii) отсюда следует, что $A \models \forall x \in a \exists y \varphi(x, y, c)$, и поэтому

(ii) $A \models \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y, c)$ для некоторого $b \in |A|$.

Если каждый «ординал» в A является фундированным, то $WF(A) = A$ и доказывать фактически нечего. Поэтому допустим, что β является нестандартным (т. е. не фундированным) «ординалом» в A . Все стандартные, т. е. фундированные, «ординалы» в A меньше чем β . Из (i) следует, что переменные y могут быть выбраны фундированными, так что мы имеем

(iii) $A \models \forall x \in a \exists y [r(y) < \beta \wedge \varphi(x, y, c)]$.

По схеме фундирования в KPU имеется «наименьший» «ординал» β_0 в A , который удовлетворяет (iii). Но для любого нестандартного β имеется другой нестандартный $\beta' < {}^A\beta$ (почему?), поэтому (iii) выполняется и для β' . Следовательно, β_0 должен быть стандартным! Теперь рассмотрим $b' \in |A|$ такой, что $xEb' \Leftrightarrow x \in b \wedge r(x) < \beta_0$; b' существует по аксиоме Δ_0 -выделения. Тогда $b' \in WF(A)$ (почему?). Из (ii) и (iii) для β_0 следует, что A , а поэтому и $WF(A)$ (почему?) удовлетворяют $\forall x \in a \exists y \in b' \varphi(x, y, c)$. $\square$

С этого момента будем обозначать через $WF(A)$ транзитивное сжатие того, что мы прежде понимали под $WF(A)$.

Сформулируем некоторые следствия леммы об усечении в связи с понятием следующих допустимых множеств.

3.10. Следствие. Пусть $A = \text{NYP}(a)$ является чистым допустимым множеством. Для любого $b \in A$ существует высказывание $\varphi_{(a,b)}$ в фрагменте L_A некоторого языка L , A -рекурсивно зависящее от a и b и такое, что для любой Σ -формулы ψ имеем $A \models \psi[b] \Leftrightarrow \text{KPU} + \varphi_{(a,b)} \models \psi(b)$.

3.10 говорит о том, что истинность Σ -формулы в A может быть «сведена» к отношению логического следования в L_A . Позднее мы сравним 3.10 с другими полученными результатами. Следствие 3.10 доказывается аналогично следующему результату, для которого мы приводим лишь набросок доказательства.

Отношение $B \subset |M|^r$ назовем Π_1^1 -отношением на M , если существует такая формула $\forall P_1 \dots \forall P_k \psi(x, y, P)$ логики второго порядка, где ψ — конечная формула логики первого

порядка над языком $\{R, P\}$, что для некоторых параметров p в $|M|$ мы имеем: $a \in B \Leftrightarrow M \models \forall P_1 \dots \forall P_k \varphi[a, p]$.

3.11. Следствие. Для бесконечной системы M конечно сигнатуры каждое отношение на $|M|$, которое является Σ -отношением на НУР_M , является Π_1 -отношением на M .

Доказательство (в общих чертах). Заметим, что по лемме об усечении и по определению НУР_M любая модель M системы КРУ, которая «содержит» M в подходящем смысле, будет концевым расширением НУР_M . Используя также устойчивость вверх Σ -формулы, можно видеть, что истинность Σ -формулы в A становится эквивалентной ее истинности во все моделях КРУ, «содержащих» M . Это показывает, как могут появиться кванторы общности второго порядка. Точное доказательство использует также теорему 3.6. $\square$

§ 4. Множества Хинтикки, существование модели и Σ -компактность

Основной метод построения моделей — построение их, исходя из некоторых видов множеств и формул. Эти множества дают более или менее полное описание не только атомарных формул, но и описывают другие формулы, истинные на каждом конечном наборе элементов модели. Множества Хинтикки (см. 4.1), кажется, являются наиболее подходящими множествами формул среди тех, которые дают возможность канонического построения модели, в том смысле, что их определение содержит определенный минимум требований.

В оставшейся части этой главы под «формулой» мы будем подразумевать формулу из $L_{\omega, \omega}$ для некоторого L , если только не следует иной смысл из контекста (например, Σ -формула, как и прежде, будет подразумеваться конечной).

Будем говорить, что формула имеет нормальную форму с отрицанием (н. ф. о.), если она построена из атомных формул и их отрицаний с использованием лишь $\wedge$, $\vee$, $\forall$ и $\exists$. Легко показать, что любая формула логически эквивалентна некоторой формуле в н. ф. о.

4.1. Определение. Пусть H — множество предложений в н. ф. о. и по крайней мере в одном из элементов H имеется индивидуальная константа. H называется *множеством Хинтикки*, если выполняются следующие условия:

(i) Для любой атомной формулы θ θ и $\neg \theta$ не могут принадлежать H одновременно.

(ii) Для любого замкнутого (свободного от переменных) термина t (языка H) $t \approx t \in H$.

(iib) Для любой атомной формулы $\varphi(x)$, самое большее, с одной свободной переменной x и любых замкнутых термов t_1, t_2 из $\varphi(t_1)$ и $t_1 \approx t_2 \in H$ следует $\varphi(t_2) \in H$.

(iii) Если $\bigwedge \Sigma \in H$, то $\varphi \in H$ для любого $\varphi \in \Sigma$.

(iv) Если $\forall x \varphi(x) \in H$, то $\varphi(t)$ для любого замкнутого термина t .

(v) Если $\bigvee \Sigma \in H$, то $\varphi \in H$ для некоторого $\varphi \in \Sigma$.

(vi) Если $\exists x \varphi(x) \in H$, то $\varphi(t) \in H$ для некоторого замкнутого термина t .

4.2. Предложение. Для любого множества Хинтикки H имеется такая модель M множества H , что каждый элемент множества $|M|$ является значением некоторого замкнутого термина.

Доказательство. Пусть L — множество нелогических символов в H . Введем отношение эквивалентности $\sim$ на множестве замкнутых термов: $t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow \text{дт } t_1 \approx t_2 \in H$. На основании (ii) $\sim$ является в действительности отношением конгруэнтности в L , т. е. мы можем определить L -систему M на множестве $|M|$ классов эквивалентности по отношению $\sim$, полагая

$$(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in P^M \Leftrightarrow \text{дт } Pt_1 \dots t_n \in H,$$

$$f^M(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) = \text{дт } ft_1 \dots t_n/\sim.$$

($|M|$ не пусто, так как имеется по меньшей мере одна индивидуальная константа.)

Индукцией по сложности предложений φ в н. ф. о. покажем, что $\varphi \in H$ влечет $M \models \varphi$. Для отрицания атомной формулы φ воспользуемся условием (i). Очевидные шаги индукции, использующие оставшиеся условия, опущены. $\square$

«Грубый» вариант понятия множества Хинтикки, используемый в следующем результате, будет тоже полезен. Назовем L_B *фрагментом* $L_{\omega, \omega}$, если оно является множеством таких $L_{\omega, \omega}$ -формулы, что:

(i) любая подформула формулы $\varphi \in L_B$ также принадлежит L_B (т. е. L_B замкнуто относительно подформулы);

(ii) L_B замкнуто относительно подстановки термов из L вместо свободных переменных;

(iii) L_B замкнуто относительно финитных логических операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ и $\exists$;

(iv) всякий раз, когда $\bigvee \Sigma \in L_B$, $\bigvee \{ \bigvee \Sigma \rightarrow \varphi : \varphi \in \Sigma \}$ принадлежит L_B ;

(v) каждая атомная формула из L принадлежит L_B .

Заметим, что каждый счетный допустимый фрагмент триангиально является фрагментом в данном смысле.

4.3. Предложение. Пусть L_B является фрагментом $L_{\omega, \omega}$, $C \subseteq L$ — множество индивидуальных констант и T — множество предложений в L_B . Предположим, что:

(i) каждое конечное подмножество множества T является выполнимым;

(ii) если предложение $\forall \Sigma$ является общезначимой дизъюнкцией и принадлежит L_B , то найдется $\varphi \in \Sigma$ такое, что $\varphi \in T$;

(iii) если $\exists x \varphi(x) \in L_B$ является общезначимым предложением, то $\varphi(c) \in T$ для некоторого $c \in C$.

Тогда T полно в L_B , т. е. для любого предложения φ в L либо $\varphi \in T$, либо $\neg \varphi \in T$, и T имеет такую модель $\mathfrak{M}$, что каждый элемент из $|\mathfrak{M}|$ является значением некоторого $c \in C$ и модель $\mathfrak{M}$ единственна с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 4.2. $\square$

Пусть L_A — допустимый фрагмент $L_{\omega, \omega}$ для счетного допустимого множества A . Продемонстрируем применение предложения 4.3 в доказательстве теоремы Барвайса о Σ -компактности — одного из самых главных результатов обсуждаемой темы. В доказательстве мы используем теорему Барвайса о полноте, которую докажем в следующем параграфе. Доказательство полноты неявно потребует некоторого усовершенствования понятия множества Хинтикки.

4.4. Теорема о Σ -компактности (Барвайс). Пусть A — счетное допустимое множество. Пусть T — множество предложений в L_A , и пусть T является Σ -множеством на A . Если каждое A -конечное подмножество T является выполнимым, то и T выполнимо.

Доказательство. Расширим T до множества, удовлетворяющего условиям (i) — (iii) из 4.3. Пусть C — счетное множество констант, не встречающихся в T . Пусть $\exists x_n \varphi_n(x_n), \forall \Sigma_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ — перечисления всех логически общезначимых предложений соответствующих видов из фрагмента $L_A(C)$ — множества предложений, полученного подстановкой элементов множества C вместо свободных переменных в формулы из L_A (заметьте, что любое φ в $L_A(C)$ содержит только конечное множество констант из C). Индукцией по $n < \omega$ определим множества T_n такие, что:

(i) $T_n - T$ является конечным множеством предложений из $L_A(C)$;

(ii) каждое A -конечное подмножество множества T_n является выполнимым.

Положим $T_0 = T$. Тогда по предположению имеют место (i) и (ii). Предположим, что T_n определено. Выберем любой элемент c из C , не содержащийся в T_n (из (i) следует, что только конеч-

ное множество элементов C содержится в T_n), и положим $T' = T_n \cup \{\varphi_n(c)\}$. Заметим, что на основании (i) T' является Σ -множеством на A . Поскольку $\exists x \varphi_n(x)$ общезначимо, то на основании (ii) применительно к T_n легко видеть, что каждое A -конечное подмножество множества T' выполнимо. Теперь пусть $\forall \Sigma = \forall \Sigma_n$ и допустим для «доказательства от противного», что для любого $\varphi \in \Sigma T' \cup \{\varphi\}$ не является A -конечно выполнимым. Это означает, что $A \models \forall \varphi \in \Sigma \exists a (a \in T' \& \neg (\bigwedge a \wedge \varphi))$ является логически общезначимым).

Теорема Барвайса о полноте в ее «абстрактном» варианте (которая будет доказана в следующем параграфе) гласит, что предикат « φ является логически общезначимым предложением в A » является Σ -предикатом на A . Используя полноту и Σ_1 -формулу с параметром b , определяющую T' , мы можем найти Σ_1 -формулу $\exists x \delta(\varphi, x, a, b)$, где δ является Δ_0 -предикатом, выражающую заключенную в кавычки часть. Так как $A \models \forall \varphi \in \Sigma \exists a \exists x \delta(\varphi, x, a, b)$, то по аксиоме Δ_0 -выборки получаем, что существует $c \in A$ такое, что

$$A \models \forall \varphi \in \Sigma \exists a \in C \exists x \in c \delta(\varphi, a, x, b).$$

Рассмотрим $d \Leftarrow \{a \in c : \exists \varphi \in \Sigma \exists x \in c \delta(\varphi, a, x, b)\}$. В силу

Δ_0 -выделения $d \in A$. Пусть $a_0 = \bigcup d$; тогда $a_0 \in A$. Так как для любого $a \in d$ имеем $A \models \exists x \delta(\varphi, x, a, b)$ для некоторого $\varphi \in \Sigma$, то a_0 является A -конечным подмножеством множества T' . По определению a_0 для любого $\varphi \in \Sigma$ существует такое a , что $a \in a_0$ и $a \cup \{\varphi\}$ невыполнимо, тем более $a_0 \cup \{\varphi\}$ невыполнимо для каждого $\varphi \in \Sigma$. Но это в точности означает, что $a_0 \cup \{\forall \Sigma\}$ невыполнимо, что противоречит A -конечной выполнимости T' .

Мы показали, что существует $\varphi \in \Sigma$ такое, что $T' \cup \{\varphi\}$ является A -конечно выполнимым. Определим $T_{n+1} = T' \cup \{\varphi\}$. Это завершает определение последовательности $T_n, n < \omega$.

Положим $T_\infty = \bigcup_{n < \omega} T_n$. Исследуя данную конструкцию, мы видим, что T_∞ удовлетворяет условиям теоремы 4.3; (i) следует из того, что любое конечное подмножество множества T_∞ является конечным, следовательно, и A -конечным подмножеством некоторого T_n . На основании 4.3 T_∞ и T имеют модель. $\square$

§ 5. Конъюнктивные игровые формулы

Некоторые понятия, выражимые в логике второго порядка

Σ_1^1 -формула над $L_{\omega, \omega}$ (или над L_A) является формулой логики второго порядка, если она имеет вид $\exists \bar{R} \varphi(\bar{R})$, где $\bar{R}$ — конечное или бесконечное множество предикатных и/или операционных символов, φ является формулой из $(L \cup \bar{R})_{\omega, \omega}$ (или из $(L \cup \bar{R})_A$).

и в этом случае $\bar{R}$ должно быть A -конечным). Если $\bar{R}$ есть $\{R_1, \dots, R_n\}$, мы будем писать $\exists R_1 \dots \exists R_n \varphi$. Если свободные переменные формулы $\exists \bar{R} \varphi$ суть x , т. е. $\exists \bar{R} \varphi = \exists \bar{R} \varphi(\bar{R}, x)$, то $\mathcal{M} \models \exists \bar{R} \varphi(\bar{R}, a)$ для $a \in |\mathcal{M}|$, если (естественно) на $|\mathcal{M}|$ имеются такие отношения R , соответствующие $R \in \bar{R}$, что $(\mathcal{M}, R)_{R \in \bar{R}} \models \varphi[\bar{R}, a]$. Π_1^1 -формула определяется подобным образом, и вместо квантора $\exists$ употребляется $\forall$. Определения Π_1^1 -формулы или Σ_1^1 -формулы без дальнейшей квантификации подобны аналогичным определениям для конечной логики $L_{\omega\omega}$.

О классе K подобных систем говорят, что K является $L_{\omega\omega}$ -элементарным, или L_A -элементарным, или Σ_1^1 -классом над $L_{\omega\omega}$ и т. д., если существует формула φ такая, что $\mathcal{M} \in K$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \varphi$ и $\varphi \in L_{\omega\omega}$, или $\varphi \in L_A$, или является Σ_1^1 -формулой над $L_{\omega\omega}$ и т. д. соответственно. Будем говорить, что K является $L_{\omega\omega}$ -элементарным классом счетных систем, если для некоторого $\varphi \in L_{\omega\omega}$ имеем $\mathcal{M} \in K$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \varphi$ и $\mathcal{M}$ счетно. Аналогично и для других понятий.

Будем говорить, что K есть Δ_1^1 -класс над $L_{\omega\omega}$ и т. д., если K является как Σ_1^1 -классом, так и Π_1^1 -классом над $L_{\omega\omega}$ и т. д. Короче, $\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$.

Зафиксируем систему $\mathcal{M}$ с сигнатурой L , и пусть $\Phi(x, y)$ будет формулой (произвольной логики), p — это параметры в $|\mathcal{M}|$ (соответствующие y), $B \subseteq |\mathcal{M}|^n$ будет отношением, определенным формулой Φ с параметром p : для $a \in |\mathcal{M}|^n$ имеем $a \in B \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Phi(a, p)$. Если Φ — конечная формула логики первого порядка, то B называется элементарным на $\mathcal{M}$. Если Φ является Π_1^1 -формулой или Σ_1^1 -формулой над L_A и т. д., то B называется Π_1^1 -отношением или Σ_1^1 -отношением над L_A и т. д. Если формула Φ принадлежит $L_{\omega\omega}$ или L_A , то B называется $L_{\omega\omega}$ -элементарным или L_A -элементарным отношением соответственно. Беря $\mathcal{M} = \omega \Rightarrow (\omega, 0, 1, +)$ и конечную формулу Φ логики первого порядка, мы получим то, что обычно называют арифметическим подмножеством множества ω . Если Φ есть Π_1^1 -формула или Σ_1^1 -формула, то получим Π_1^1 -подмножества или Σ_1^1 -подмножества ω . Для произвольных моделей $\mathcal{M}$ вновь $\Delta_1^1 \Rightarrow \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ при всех возможных значениях Σ_1^1 и Π_1^1 .

В качестве третьей группы понятий мы введем обобщения понятий второй группы на логику второго порядка. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая фиксированная система с сигнатурой L , $\Psi(S, y)$ — формула (произвольного вида), содержащая n -арный предикатный

символ S («предикатную переменную»), не интерпретируемый в $\mathcal{M}$ (все остальные нелогические символы из Ψ интерпретируются в $\mathcal{M}$), и пусть p — некоторый фиксированный параметр в $|\mathcal{M}|$. Пусть X — множество таких n -арных отношений S на $|\mathcal{M}|$, что $(\mathcal{M}, S) \models \Psi(S, p)$. Если Ψ — конечная формула логики первого порядка, то X называется элементарным на $\mathcal{M}$. Соответствующие понятия, выражимые в логике второго порядка, вновь получаются таким же образом. Если Ψ является Π_1^1 -формулой над $(L \cup \{S\})_{\omega\omega}$, то X называется Π_1^1 -множеством над $L_{\omega\omega}(1)$ на $\mathcal{M}$ и т. д. Вместо Π_1^1 над $L_{\omega\omega}$ мы пишем также Π_1^1 (Π_1^1 , написанное полужирным шрифтом) и т. д.

Пусть E — топологическое пространство 2^{ω^n} всех n -арных отношений на ω с обычной топологией произведения. E гомеоморфно канторовскому дисконтинууму. Множество $X \subseteq E$ является борелевским, аналитическим или дополнением аналитического в классическом смысле (см. главу 8 «Теории множеств») тогда и только тогда, когда X является соответственно $L_{\omega\omega}$ -элементарным, Σ_1^1 -элементарным или Π_1^1 -элементарным на ω .

Классы систем — «более общее» понятие, чем классы множеств, в следующем смысле. Пусть X — это класс n -арных отношений на $|\mathcal{M}|$, p — конечный набор элементов из $|\mathcal{M}|$. Рассмотрим класс $\tilde{X}$ всех систем, изоморфных $(\mathcal{M}, p, S)$ для некоторого $S \in X$. Утверждения о классе $\tilde{X}$ могут быть иногда выведены из аналогичных результатов, полученных для X , по следующей причине. Пусть для простоты $\mathcal{M} = \omega$. Следующее $L_{\omega\omega}$ -предложение φ_0 характеризует ω с точностью до изоморфизма:

$$\Delta \text{ Diagram } \omega \wedge \forall x \forall \{x \approx \ulcorner n \urcorner : n < \omega\};$$

здесь $\ulcorner n \urcorner = 1 + \dots + 1$ — формальный терм, обозначающий n . Если X определено формулой $\Psi(S, p)$, то $\tilde{X}$ определяется формулой $\varphi_0 \wedge \Psi(S, p)$; следовательно, если X является Π_1^1 -классом, Σ_1^1 -классом или Δ_1^1 -классом, то таким же будет и $\tilde{X}$ и т. д. Мы в дальнейшем неоднократно используем эту возможность.

Конъюнктивные игровые предложения

Конъюнктивная игровая формула или формула Вюота, как мы ее будем иногда называть, есть частный случай Σ_1^1 -формулы специального вида над $L_{\omega\omega}$. Формула Вюота имеет вид

$$\Phi(z) = \forall u_1 \bigwedge_{k_1 \in K_1} \exists v_1 \bigvee_{l_1 \in L_1} \dots \forall u_n \bigwedge_{k_n \in K_n} \forall v_n \bigvee_{l_n \in L_n} \dots \bigwedge_{n < \omega} \varphi^{k_1 l_1 \dots k_n l_n}(z, u, v_1, \dots, u_n, v_n).$$

где $K_1, L_1, \dots$ — счетные множества, а $\varphi^{k_1 \dots l_n}$ является $L_{\omega, \omega}$ -формулой с указанными свободными переменными для каждого $k_1 \in K_1, l_1 \in L_1, \dots$. Значение высказывания «с удовлетворяет Φ в $\mathcal{M}$ » (обозначается $\mathcal{M} \models \Phi[c \text{ для } z]$) наилучшим образом объясняется бесконечной игрой, проводимой двумя игроками $\forall$ и $\exists$ на системе $\mathcal{M}$. Игра состоит из ω -последовательности ходов. На n -м ходу (≥ 1) $\forall$ выбирает элемент $a_n \in |\mathcal{M}|$ (интерпретирующий u_n) и индекс $k_n \in K_n$, а $\exists$ отвечает выбором $b_n \in |\mathcal{M}|$ (интерпретирующим v_n) и $l_n \in L_n$. $\exists$ выигрывает после завершения n -го хода для всех $n = 1, 2, \dots$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \bigwedge_{n < \omega} \varphi^{k_1 \dots l_n}[c, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]$.

Выигрышной стратегией для $\exists$ в этой игре является такая последовательность $\{f_n: n < \omega\}$ функций $f_n: |\mathcal{M}| \times K_1 \times \dots \times |\mathcal{M}| \times K_n \rightarrow |\mathcal{M}| \times L_n$, что при любой игре $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ игрока если $\exists$ всегда ведет себя согласно этой стратегии, т. е. всегда выбирается b_n, l_n , где $\langle b_n, l_n \rangle = f_n(a_1, k_1, \dots, a_n, k_n)$, то $\exists$ выигрывает в приведенном выше смысле. Наконец, $\mathcal{M} \models \Phi[c]$ означает, что игрок $\exists$ имеет выигрышную стратегию в игре на $(\mathcal{M}, c)$, ассоциированную с Φ .

Сделаем вначале несколько простых замечаний о конъюнктивных игровых предложениях. Прежде всего, можно рассмотреть менее регулярный префикс, чем он был определен выше или можно опустить полностью некоторые кванторы $\forall, \exists$, также $\bigwedge, \bigvee$ (которые могут рассматриваться как кванторы на фиксированных множествах K_n, L_n). Во всех этих случаях, вводя фиктивные переменные, можно легко получить формулу вида требуемого определения.

Это замечание остается в силе, даже если для начала взять конечный префикс и, например, рассматривать пренексную формулу. Тогда определение истинности через игровую интерпретацию есть не что иное, как обычная скелетовская форма с функцией Скулема для переменных, связанных кванторами $\exists$. Это замечание позволяет легко распознавать Σ_1^1 -характер конъюнктивных игровых предложений в общем случае, но мы вернемся к этому позже.

Чтобы сделать следующее замечание, начнем с того, что для простоты будем считать формулу Воота предложением, т. е. сделаем z пустой последовательностью. Тогда для любых фиксированных индексов $k_1, \dots, l_n$ из $K_1, \dots, L_n$ соответственно можно рассмотреть усеченную игровую формулу $\varphi^{k_1 \dots l_n}(u_1, \dots, v_n)$ полученную удалением кванторов от начала до $\exists v_n$ включительно. Пусть p — исключительная часть префикса. Тогда выражение $p\varphi^{k_1 \dots l_n}(u_1, \dots, v_n)$ можно интерпретировать двумя способами:

во-первых, как исходную Φ , а во-вторых, как « p применяется к $\langle \varphi^{k_1 \dots l_n}: k_1 \in K_1, \dots, l_n \in L_n \rangle$ ». Читателю предоставляется возможность самостоятельно убедиться в том, что эти два значения совпадают.

В качестве следующего замечания выступает

5.1. Предложение. Для определенного выше предложения Воота Φ (для простоты $z = \emptyset$) $\mathcal{M} \models \Phi$, если и только если на $|\mathcal{M}|$ существуют предикаты $P^{k_1 \dots l_n}(u_1, \dots, v_n)$, где $n < \omega$, $k_1 \in K_1, \dots, l_n \in L_n$, такие, что система $\mathcal{M}$, полученная расширением $\mathcal{M}$ этими предикатами, удовлетворяет предложению

$$\begin{aligned} P^\emptyset \bigwedge_{1 \leq n < \omega} \left(\bigwedge_{k_1 \in K_1} \dots \bigwedge_{l_{n-1} \in L_{n-1}} \forall u_1 \dots \forall v_{n-1} P^{k_1 \dots l_{n-1}}(u_1, \dots, v_{n-1}) \right. \\ \left. \rightarrow \forall u_n \bigwedge_{k_n \in K_n} \exists v_n \bigvee_{l_n \in L_n} P^{k_1 \dots l_n}(u_1, \dots, v_{n-1}, u_n, v_n) \right) \bigwedge_{1 \leq n < \omega} \bigwedge_{k_1 \in K_1} \dots \bigwedge_{l_n \in L_n} \forall u_1 \dots \forall v_n (P^{k_1 \dots l_n}(u_1, \dots, v_n) \\ \rightarrow \bigwedge_{i \leq n} \varphi^{k_1 \dots l_i}(u_1, \dots, v_i)). \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, что в качестве $P^{k_1 \dots l_n}$ можно взять определенные выше $\Phi^{k_1 \dots l_n}$. Обратно, полагая, что предикаты $P^{k_1 \dots l_n}$ с требуемыми свойствами существуют, можно определить индукцией по n такие функции:

$$f_n: K_1 \times |\mathcal{M}| \times \dots \times K_n \times |\mathcal{M}| \rightarrow L_n \times |\mathcal{M}|,$$

что $P^{k_1 \dots l_n}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ выполняются для любых $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}|, k_1 \in K_1, \dots, k_n \in K_n$ и для $\langle l_i, b_i \rangle = f_i(a_1, k_1, \dots, a_i, k_i)$. Для этого используются первая и вторая конъюнкции приведенного выше предложения. Из последней конъюнкции немедленно следует, что f_n образуют выигрышную стратегию для $\exists$. $\square$

Будем говорить, что формула Воота Φ является A -конечной (или Φ принадлежит A), если семейство $\langle \varphi^{k_1 \dots l_n}: n < \omega, k_1 \in K_1, \dots, l_n \in L_n \rangle$ является A -конечным.

5.2. Следствие. Любая формула Воота логически эквивалентна некоторой Σ_1^1 -формуле над $L_{\omega, \omega}$. Если A — допустимое множество и формула Воота Φ A -конечна (в частности, $\omega \in A$), то Φ логически эквивалентна некоторой Σ_1^1 -формуле над L_A .

Первый основной результат гласит о том, что конъюнктивные игровые формулы имеют такую же выразительную мощность (силу), как и Σ_1^1 -формулы над $L_{\omega, \omega}$ во всем, что касается счетных моделей. Рассматривать более сложное понятие конъюнк-

тивных игровых формул нас заставляет то, что их специальная синтаксическая форма предоставляет возможность полезных манипуляций, в частности конструирование аппроксимаций (см. ниже).

Используем обозначение $\models' \varphi$ для указания того, что φ истинна во всех счетных моделях. По теореме Лёвенгейма — Скулема о спуске для $L_{\omega_1\omega}$ (см. главу 2) $\models' \varphi$ эквивалентно $\models \varphi$ в случае, если $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$ -предложение.

5.3. Теорема о форме игры. Для любого Σ^1 -предложения $\exists \bar{R}\varphi(\bar{R})$ над $L_{\omega_1\omega}$ существует такое предложение Воота Φ , содержащее лишь символы из L , что $\models' \Phi \leftrightarrow \exists \bar{R}\varphi(\bar{R})$. Если A — допустимое множество, $\omega \in A$ и $\exists \bar{R}\varphi(R)$ есть Σ^1 -предложение над L_A , то существует A -конечное Φ . Фактически на A существует Σ -операция, дающая нужное Φ для любого Σ^1 -предложения над L_A в качестве аргумента.

Доказательство (Харник [1]). Можно считать, что $\varphi(\bar{R})$ является н. ф. о. Пусть Δ — счетный фрагмент $L(\bar{R})_{\omega_1\omega}$ (см. выше), содержащий $\varphi(\bar{R})$ и $x \approx y$ (в том случае, когда требуется, чтобы Φ было « A -конечным», нужно брать A -конечный Δ ; наименьший фрагмент, содержащий φ и $x \approx y$, будет подходящим (упражнение: используется то, что $L(\bar{R})$ является (может быть выбран) A -конечным и что $\omega \in A$)). Пусть C — бесконечное множество новых индивидуальных констант и $\Delta(C)$ — множество предложений, являющихся результатами подстановок элементов из C вместо свободных переменных в формулы из Δ . Пусть D есть множество всех замкнутых термов языка $L \cup \bar{R} \cup C$. Утверждается, что для любой счетной L -системы $\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{M} \models \exists \bar{R}\varphi(\bar{R})$ тогда и только тогда, когда выполнено:

(i) существуют такие множество Хинтики (см. 4.1) Θ , $\Theta \subset \Delta(C)$, и функция $f: D \xrightarrow{\text{на}} |\mathcal{M}|$, являющаяся отображением на, что $\varphi(\bar{R}) \in \Theta$ и для всех атомных формул $\pi(v_0, \dots, v_n)$ из L и всех $c_0, \dots, c_n \in D$ имеем $\mathcal{M} \models \pi[f(c_0), \dots, f(c_n)]$ тогда и только тогда, когда $\pi(f(c_0), \dots, f(c_n)) \in \Theta$ и либо $\pi(c_0, \dots, c_n)$, либо $\neg \pi(c_0, \dots, c_n)$ принадлежит множеству Θ .

Действительно, если $\mathcal{M} \models \exists \bar{R}\varphi(\bar{R})$, т. е. $(\mathcal{M}, \bar{R}) \models \varphi$ для некоторых отношений $\bar{R}$ на $|\mathcal{M}|$, то пусть f — любая функция $C \xrightarrow{\text{на}} |\mathcal{M}|$ и определим Θ как множество всех таких $\varphi(c_0, \dots, c_n) \in \Delta(C)$ в н. ф. о., что $\mathcal{M} \models \varphi[f(c_0), \dots, f(c_n)]$. Легко видеть, что этот выбор удовлетворяет (i). Обратно, допустим, что имеет место (i). Пусть $\mathcal{M}'$ является канонической моделью Θ , построенной в доказательстве утверждения 4.2. Тогда $\mathcal{M}' \models \varphi(\bar{R})$. По определению $\mathcal{M}'$ и по условию (i) видим, что функция

$c \mapsto f(c)$ является изоморфизмом $\mathcal{M}' \upharpoonright L$ на $\mathcal{M}$, позволяющим сделать вывод, что $\mathcal{M} \models \exists \bar{R}\varphi(\bar{R})$.

Представим условие (i) на $\mathcal{M}$ в форме предложения Воота Φ . Φ определяется как предложение

$$\Phi = \forall u_1 \bigvee_{c_1 \in D} \bigwedge_{d_1 \in D} \exists v_1 \bigwedge_{\delta \in \Delta(C)} \bigvee_{\theta_1 \in \Delta(C)} \forall u_2 \dots \left(\bigwedge_{c_n < \omega} N^{c_1 d_1 \theta_1 \dots \theta_n}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \right)$$

(в префиксе блоки типа $\forall u_1 \dots \bigvee_{\theta_1 \in \Delta(C)}$ присутствуют для каждого $n=1, 2, \dots$), где формулы $N^{c_1 \dots \theta_n}$ определяются следующим образом. Возможны два случая: либо каждое из условий (ii) — (v), приведенных ниже, выполняются на $\langle c_1, \dots, \theta_n \rangle$ (случай 1), либо нет (случай 2). В случае 2 полагаем $N^{c_1 \dots \theta_n}$ тождественно ложными, $\bigvee \emptyset$. В случае 1 мы полагаем

$$N^{c_1 \dots \theta_n}(u_1, \dots, v_n) = \bigwedge \{ \alpha(u_1, \dots, v_n) :$$

α является либо атомной формулой, либо отрицанием атомной формулы из L и $\alpha(c_1, d_1, \dots, c_n, d_n) \in \{ \theta_1, \dots, \theta_n \} \}$.

Условия, о которых идет речь, следующие: полагаем $\Theta_n = \{ \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-1} \}$.

(ii) Нет атомной формулы π , для которой как π , так и $\neg \pi$ принадлежат Θ_n .

(iii) Если $\delta_n \in \Theta_n$ и $\delta_n = \bigvee \Psi$ или $\delta_n = \exists v \psi(r)$, то $\theta_n = \varphi$ для некоторого $\psi \in \Psi$, или $\theta_n = \Psi(t)$ для некоторого замкнутого терма t соответственно.

(iv) Если $\delta_n \notin \Theta$, то либо (а) δ_n есть $t \approx t$, либо (б) δ_n есть $\varphi(t_2)$ такое, что $t_1 \approx t_2 \in \Theta_n$ и $\varphi(t_1) \in \Theta_n$, либо (с) $\delta_n \in \Sigma$ для некоторого Σ такого, что $\bigwedge \Sigma \in \Theta_n$, либо (д) $\delta_n = \varphi(t)$ такому, что $\forall x \varphi(x) \in \Theta$; тогда $\theta_n = \delta_n$.

(v) Если $\delta_n \notin \Theta_n$, δ_n является атомной формулой L и не выполняется ни одно из условий (а) — (д) из (iv), то $\theta_n = \delta_n$ или $\theta_n = \neg \delta_n$.

(Интуитивно, Θ_n есть «начальный сегмент» множества Хинтики, δ_n есть следующая обрабатываемая формула, θ_n — следующая формула, включаемая в множество Хинтики.)

Покажем, что $\mathcal{M}$ удовлетворяет (i) тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \Phi$ и $\mathcal{M}$ счетное. Легко видеть, что (i) влечет $\mathcal{M} \models \Phi$. Действительно, пусть Θ является множеством Хинтики, удовлетворяющим условию (i). Определим стратегию игрока $\exists$. Элементы $c_n \in D$ и $b_n \in |\mathcal{M}|$ (интерпретирующие v_n) должны выбираться игроком $\exists$ так, чтобы $f(c_n) = a_n =$ выбору игроком $\forall$ интерпретации u_n и $f(d_n) = b_n$, где $d_n \in C$ есть выбор

игрока $\forall$ на n -м ходу. Наконец, игроку $\exists$ нужно выбрать θ_n всегда в Θ , удовлетворяя условиям (iii) — (v); возможность этого следует из того, что Θ является множеством Хинтики и $\{\varphi(t), \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ (по выбору) является подмножеством Θ . Вновь из того, что Θ — множество Хинтики, мы получаем, что (ii) выполнено. Из заключения (i) следует $\mathcal{M} \models N^{c_1} \dots \theta_n [a_1, \dots, b_n]$ для любых выборов игрока $\forall$ и выбранной стратегии игрока $\exists$, что и доказывает выигрышность стратегии.

Предположим, что $\mathcal{M} \models \Phi$, и зафиксируем выигрышную стратегию для $\exists$ в соответствующей игре, проводимой на $\mathcal{M}$. Пусть стратегия игрока $\exists$ реализуется против игры игрока $\forall$, в которой:

- (vi) $\forall$ перебирает $|\mathcal{M}|$, выбирая a_n (интерпретирующие u_n так, что $|\mathcal{M}| = \{a_n: 1 \leq n < \omega\}$;
- (vii) каждый элемент множества C выступает в качестве некоторого d_n (выбранного игроком $\forall$ на n -м ходу);
- (viii) каждое предложение в $\Delta(C)$ выступает бесконечно часто в качестве некоторого δ_n .

Тогда результирующей игрой будет последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & c_1, & d_1, & b_1, & \delta_1, & \theta_1, & \dots \\ \forall & \exists & \forall & \exists & \forall & \exists & \end{array}$$

(снизу указаны игроки). Отсюда мы получаем, что $\Theta = \{\theta_n: 1 \leq n < \omega\} \cup \{\varphi\}$ является множеством Хинтики, содержащим φ . Действительно, поскольку мы имеем

$$(ix) \mathcal{M} \models N^{c_1} \dots \theta_n [a_1, \dots, b_n] \text{ для любого } n,$$

$N^{c_1} \dots \theta_n$ не может быть тождественно ложным. Следовательно, рассмотренный выше случай 2 не имеет места (для последовательностей $\langle c_1, \dots, \theta_n \rangle$, полученных в результате игры), и, значит, все условия (ii) — (v) выполняются. На основании (ii) имеет место 4.1 (i), выполнение 4.1 (ii), (iii) и (iv) следует из (iv) и (viii); например, если $\forall x \varphi(x) \in \Theta$ и t — замкнутый терм, то для некоторого n $\forall x \varphi(x) \in \theta_n$ и $\varphi(t) = \delta_n$ (из (viii)), следовательно, ввиду (iv) $\theta_n = \varphi(t) \in \Theta$. Согласно (iii) и (viii) мы аналогичным образом заключаем, что 4.1 (v) и (vi) выполняются для Θ , и, значит, Θ действительно есть множество Хинтики.

Более того, согласно (vii) и (vi) множество

$$f = \{\langle c_n, a_n \rangle: 1 \leq n < \omega\} \cup \{\langle d_n, b_n \rangle: 1 \leq n < \omega\} \subset D \times |\mathcal{M}|$$

имеет своей областью определения и областью значения D и $|\mathcal{M}|$ соответственно. В силу (ix), принимая во внимание (v), (viii) и определение $N^{c_1} \dots \theta_n$, получаем, что $\mathcal{M} \models \pi[e_1, \dots, e_n]$ тогда и только тогда, когда $\pi(f_1, \dots, f_n)$ принадлежит Θ .

всякий раз, когда $\langle e_i, f_i \rangle \in f$, а $\pi(x_1, \dots, x_n)$ является атомной формулой в L . Отсюда следует, что f является функцией и что заключительная часть (i) выполняется. Это завершает доказательство того, что из $\mathcal{M} \models \Phi$ следует (i).

Закончено доказательство того, что $\models' \exists \bar{R} \Phi(\bar{R}) \leftrightarrow \Phi$. Из вышеизложенного можно извлечь доказательство того, что $\exists \bar{R} \Phi(\bar{R})$ влечет Φ даже на несчетной системе $\mathcal{M}$ (упражнение), но доказательство в обратном направлении требует уже счетности системы $\mathcal{M}$. Можно проверить, что Φ , кроме того, имеет дополнительные свойства. $\square$

Аппроксимации конъюнктивных игровых формул

Полезность формул Воота основана главным образом на их аппроксимациях, введенных Воотом (обратите внимание также на исторические сведения, приведенные в п. 5.8). Пусть Φ — общее предложение Воота, определенное выше; вновь для простоты возьмем вместо z пустую последовательность. Будем использовать сокращение $\bar{k}$ для $\langle k_1, \dots, l_n \rangle$ (для $n=0$ $\bar{k}$ — пустая последовательность). Для произвольных $0 \leq n < \omega$, $\bar{k} \in K_1 \times \dots \times L_n$ и ординала α одновременной индукцией по α определим $L_{\infty\omega}$ -формулу $\Phi_{\alpha}^{\bar{k}} = \Phi_{\alpha}^{\bar{k}}(u_1, \dots, v_n)$ следующим образом:

$$\Phi_0^{\bar{k}} = \bigwedge_{i \leq n} N^{k_i} \dots l_i,$$

$$\Phi_{\alpha+1}^{\bar{k}} = \forall u_{n+1} \bigwedge_{k_{n+1} \in K_{n+1}} \exists v_{n+1} \bigwedge_{l_{n+1} \in L_{n+1}} \Phi_{\alpha}^{\bar{k} \cdot k_{n+1} \cdot l_{n+1}},$$

$$\Phi_{\lambda}^{\bar{k}} = \bigwedge_{\alpha < \lambda} \Phi_{\alpha}^{\bar{k}} \text{ для предельного } \lambda.$$

Ясно, что для счетного α $\Phi_{\alpha}^{\bar{k}}$ является формулой языка $L_{\omega\omega}$. Более того, $\Phi_{\alpha}^{\bar{k}}$ как функция от Φ , $\bar{k}$ и α является Σ -операцией на любом допустимом множестве (по Σ -рекурсии). В частности, если A — допустимое множество, Φ является A -конечной, то такими же являются и все аппроксимации $\Phi_{\alpha}^{\bar{k}}$ для $\alpha < \text{Ord}(A)$. Обозначим $\Phi_{\alpha}^{\emptyset}$ через Φ_{α} . Если вид префикса формулы Воота отличается от стандартного вида, то ее аппроксимации соответствующим образом модифицируются. Например, если Φ есть

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \dots \bigwedge_{n < \omega} \varphi^n(x_1, \dots, y_n),$$

то аппроксимации будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\Phi_0^n &= \bigwedge_{i \leq n} \Phi^i(x_1, \dots, y_i), \\ \Phi_{\alpha+1}^n &= \forall x_{n+1} \exists y_{n+1} \Phi_{\alpha}^{n+1}, \\ \Phi_{\lambda}^n &= \bigwedge_{\alpha < \gamma} \Phi_{\alpha}^n, \lambda \text{ предельный.}\end{aligned}$$

5.4. Теорема (Воот [1]). Для введенных понятий имеет место:

- (i) для $\alpha > \beta \models \Phi_{\alpha}^k \rightarrow \Phi_{\beta}^k$;
- (ii) для любого $\alpha \models \Phi \rightarrow \Phi_{\alpha}$;
- (iii) для любой системы $\mathcal{M}$ мощности $\leq \kappa$ $\mathcal{M} \models \Phi_{\kappa+} \rightarrow \Phi$;
- (iv) если A допустимо, Φ и L -система $\mathcal{M}$ являются A -конечными, то $\mathcal{M} \models \Phi_{\text{Ord}(A)} \rightarrow \Phi$.

Доказательство (i) оставляем для упражнения.

(ii) Вспомним определение «усеченных» игровых формул $\Phi^k(u_1, \dots, v_n)$. Утверждение (ii) доказывается как частный случай $\models \forall u_1 \dots v_n [\Phi^k \rightarrow \Phi_{\alpha}^k]$, который в свою очередь доказывается прямой индукцией по α .

(iii) Хотя (iii) следует из (iv) (почему?), (iii) легче доказать, чем (iv).

(iv) Вначале докажем следующее:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \forall u_1 \dots v_n \left[\bigwedge_{\alpha < \text{Ord}(A)} \Phi_{\alpha}^k \right. \\ \left. \rightarrow \forall u_{n+1} \bigwedge_{k_{n+1} \in K_{n+1}} \exists v_{n+1} \bigwedge_{l_{n+1} \in L_{n+1}} \bigwedge_{\alpha < \text{Ord}(A)} \Phi_{\alpha}^{k, k_{n+1}, l_{n+1}} \right];\end{aligned}$$

здесь $k_1 \in K_1, \dots, l_n \in L_n$ и $\bar{k} = \langle k_1, \dots, l_n \rangle$. Пусть $a_1, \dots, b_n \in |\mathcal{M}|$ — произвольные элементы (интерпретации $u_1, \dots, v_n$), и допустим (от противного!), что формула, указанная выше после знака $\rightarrow$, не выполняется для $a_1, \dots, b_n$, т. е.

$$\begin{aligned}(\text{v}) \quad A \models \exists u_{n+1} \in |\mathcal{M}| \exists k_{n+1} \in K_{n+1} \forall v_{n+1} \in |\mathcal{M}| \forall l_{n+1} \in L_{n+1} \exists \alpha [\text{Ord}(\alpha) \wedge \langle \mathcal{M} \models \neg \Phi_{\alpha}^{k, k_{n+1}, l_{n+1}}(a_1, \dots, b_n, u_{n+1}, v_{n+1}) \rangle].\end{aligned}$$

На основании замечаний, сделанных выше о Φ_{α}^k как о функции от α и $\bar{k}$, и из Δ -характера определения истинности $L_{\infty\omega}$ в КРУ следует, что выражение, стоящее в (v) в кавычках, является Δ -предикатом от всех входящих переменных, включая α . Единственным неограниченным квантором в (v) является $\exists \alpha$. Следовательно, на основании принципа Σ -выборки существует множество $x \in A$ такое, что в (v) $\exists \alpha$ может быть заменен на

$\exists \alpha \in x$; в качестве x , очевидно, можно взять ординал $\alpha_0 < \text{Ord}(A)$. Тогда согласно (i) $\exists \alpha$ может быть фактически исключено, а α можно заменить на α_0 . Согласно введенным определениям полученное заключение можно представить как $\mathcal{M} \models \neg \Phi_{\alpha_0+1}[a_1, \dots, b_n]$, что доказывает утверждение.

Теперь допустим, что $\mathcal{M} \models \Phi_{\text{Ord}(A)}$, т. е. $\mathcal{M} \models \bigwedge_{\alpha < \text{Ord}(A)} \Phi_{\alpha}^{\emptyset}$.

Используя 5.1, определим предикат $P^k(u_1, \dots, v_n)$ как $\bigwedge_{\alpha < \text{Ord}(A)} \Phi_{\alpha}^k$. Первая конъюнкция предложения 5.1 выполняется согласно предположению, вторая — согласно утверждению, а последняя — по определению Φ_0^k . □

Заметим, что (ii) и (iii) из 5.4 говорят нам о том, что $\models \Phi \leftrightarrow \bigwedge_{\alpha < \omega_1} \Phi_{\alpha}$. Принимая во внимание теорему 5.3 о форме игры, получаем

5.5. Следствие. Любой Σ_1^1 -класс над $L_{\omega, \omega}$ счетных алгебраических систем есть пересечение ω_1 элементарных классов над $L_{\omega, \omega}$.

Из замечаний, сделанных в начале этого параграфа, как частный случай вытекает

5.6. Следствие. Каждое аналитическое множество в канторовском пространстве является пересечением ω_1 борелевских множеств.

5.7. З а м е ч а н и е. Одной из причин того, почему мы не рассматривали допустимые множества с $\text{Ord}(A) = \omega$ (т. е. $\omega \notin A$), явилось то, что предположение $\omega \in A$ использовалось всюду в настоящем параграфе. Этого, однако, можно было бы избежать ценой некоторых дополнительных усилий. Основная модификация, которую потребовалось бы сделать в этом случае, — использование A -рекурсивных формул Воота вместо A -конечных. Формула Φ (как и выше) называется A -рекурсивной тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \omega$ функция $F_n = \langle \Phi^{k_1, \dots, l_n} : k_1 \in K_1, \dots, l_n \in L_n \rangle$ является A -конечной и $\langle F_n : n < \omega \rangle$ A -рекурсивно. Тогда в 5.3 для любого допустимого множества A и для A -конечной формулы $\exists \bar{R} \Phi(\bar{R})$ можно выбрать A -рекурсивную Φ , в частности «индекс» A -рекурсивной функции Φ (в подходящем смысле) является A -рекурсивной функцией от $\exists \bar{R} \Phi(\bar{R})$.

Далее заметим, что для A -рекурсивной функции Φ семейство $\langle \Phi_{\alpha}^k : \alpha < \text{Ord}(A), n < \omega, \bar{k} \in K_1 \times \dots \times L_n \rangle$ является A -рекурсивной функцией (в частности, любая аппроксимация Φ_{α}^k A -конечна для $\alpha \in A$).

5.4 (iv) также справедливо для A -рекурсивной Φ с тем же самым доказательством.

5.8. Историческая справка. Материал настоящего параграфа имеет сложную историю. Теорема о форме игры была сформулирована в 1965 г. для конечных Σ_1^1 -предложений Свенониусом [1]. Воот открыл современный вид этой теоремы, но затем фактически показал, что теорема в такой формулировке является следствием теоремы Свенониуса (см. Воот [1]).

Тем временем, и даже раньше, чем Воот, Московакис [1] вновь открыл один из вариантов теоремы Свенониуса, хотя, строго говоря, его результат был несколько слабее. Однако Московакис ввел (см. там же) свой вариант аппроксимаций игровых предложений раньше, чем это сделал Воот; он использовал это для доказательства того, что Π_1^1 -множества суть в точности индуктивные множества на счетных системах. Основным отличием работ Московакиса от работ Воота является то, что Московакис имел дело с фиксированной системой. Поэтому он, по существу, доказал теорему о форме игры, теорему об аппроксимациях и 5.4 (iii) только в «локальном» случае. С другой стороны, доказательство, предложенное Воотом, очень похоже на доказательство Московакиса. У обоих утверждается фактически одно и то же, только Воот увидел в этом нечто большее. Поэтому можно рассматривать работу Воота как «унифицированный» вариант работы Московакиса.

§ 6. Применение игровых формул; полнота

6.1. Теорема. Пусть A — допустимое множество, $A \subseteq \text{НС}_U$ (следовательно, каждое множество в A счетно). Тогда определение истинности A -конечных Π_1^1 -предложений в A -конечных моделях есть Σ -предикат на A , т. е. существует Σ -формула $\sigma(x, y, z)$ такая, что для A -конечного Π_1^1 -предложения $\forall \bar{R} \varphi(\bar{R})$ и A -конечной системы $\mathfrak{M}$

$\mathfrak{M} \models \forall \bar{R} \varphi(\bar{R}) [a]$, если и только если $A \models \sigma[\forall \bar{R} \varphi(\bar{R}), \mathfrak{M}, a]$.

Более того, то же σ применимо для всех A , содержащих ω .

Доказательство. Очевидно, заключение теоремы эквивалентно высказыванию « Σ_1^1 -истинность есть Π -предикат на A ». Это есть непосредственное следствие результатов последнего параграфа. Для $\exists \bar{R} \varphi(\bar{R})$ в A пусть Φ эквивалентно по Вооту $\exists \bar{R} \varphi(\bar{R})$; Φ является Σ -функцией $\exists \bar{R} \varphi(\bar{R})$ (см. 5.3). Для $\mathfrak{M}$ в A имеет место $\mathfrak{M} \models \exists \bar{R} \varphi(\bar{R})$, если и только если $\mathfrak{M} \models \Phi$ (так как $\mathfrak{M}$ счетно), а последнее согласно 5.4 (iv) имеет место, если и только если $\mathfrak{M} \models \Phi_\alpha$ для всех ординалов $\alpha \in A$. Это доказа-

тельство проходит для случая $\omega \in A$; в более общем случае необходимо воспользоваться 5.7; сейчас мы в состоянии серьезно заняться нашим смутным замечанием об «индексах» в п. 5.7. $\square$

6.2. Теорема Барвайса об абстрактной полноте. Для A , определенного в 6.1, предикат « φ логически общезначимо» для предложения φ из L_A является Σ -предикатом на A равномерно для всех A .

Доказательство (Воот [1]). Наше доказательство применимо только для случая $\omega \in A$ (однако см. замечания, приводимые ниже). Согласно теореме Лёвенгейма — Скулема о спуске каждое предложение в $L_{\omega, \omega}$ общезначимо в том и только в том случае, когда оно истинно для всех систем с областью v для произвольного $v \leq \omega$, где v само по себе является системой с пустой сигнатурой. Пусть $\varphi \in L_A$, и пусть $\bar{R}$ обозначает множество нелогических символов в φ . Тогда φ является логически общезначимой, если и только если $(\forall v \leq \omega) v \models \forall \bar{R} \varphi(\bar{R})$. Теперь осталось применить 6.1. $\square$

З а м е ч а н и е. Если существует по крайней мере одно бесконечное множество в A , то данное доказательство может быть спасено. Мы вынуждены при этом воспользоваться моделями с нестандартной интерпретацией равенства, но это небольшой ущерб. Остальные допустимые множества суть в точности HF_U для различных U , и логика есть в точности конечная логика. Но даже в этом случае доказательство можно «спасти» «добавлением» некоторого бесконечного множества к A ; детали мы опускаем.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что 6.2 не является полной теоремой Барвайса о полноте (о которой говорилось во Введении!). С другой стороны, интересно, что теорема об абстрактной полноте для L_A играет в теории моделей для языка L_A даже более важную роль, чем аналогичная теорема в теории моделей для обычной логики первого порядка.

Пусть $\text{Valid}_A(\varphi)$ обозначает предикат « φ есть логически общезначимое A -конечное предложение некоторого фрагмента L_A ». Существует счетное допустимое множество A такое, что Valid_A есть Δ -предикат на A ; таким множеством, например, является A , для которого $A <_1 \text{НС}$ (у п р а ж н е н и е). Но уже следующие допустимые множества ведут себя подобно HF в следующем смысле: Valid_A не является Δ -предикатом и, в частности, оно является «полным» A -рекурсивно перечислимым множеством. Пусть $A = a^+$ — чистое следующее допустимое множество с $\omega \in A$. Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ есть Σ -формула, $B \subset A$ — множество, определяемое на A формулой $\varphi(x_1, c)$, где c — элемент A . Сейчас нам понадобится 3.10. Бесконечное предложение $(\bigwedge K P U \bigwedge \bigwedge \varphi_{(a, b, c)}) \rightarrow \varphi(b, c)$ есть A -рекурсивная функция от b, c и формулы

ф. Обозначим эту функцию через $\xi(b, c, \varphi)$. В 3.10 утверждается, что $b \in B \Leftrightarrow \xi(b, c, \varphi) \in \text{Valid}_A$, что выражает «полноту» Σ -предиката Valid_A по отношению ко всем Σ -предикатам на A . Сейчас, воспользовавшись канторовской диагонализацией, можно показать, что предикат $Q(d) \Leftrightarrow \langle d = \langle c, \varphi \rangle \text{ для некоторого } c \in A \text{ и } \Sigma\text{-формулы } \varphi \text{ и } \xi(\langle c, \varphi \rangle, c, \varphi) \notin \text{Valid}_A \rangle$ не является Σ -предикатом. Конечно, Q есть Π -предикат и, следовательно, Σ -предикат $\neg Q(d)$ не есть Π -предикат и потому не есть Δ -предикат. Таким образом, существует Σ -предикат на A такой, что он не является Δ -предикатом и, следовательно, пользуясь «полнотой» Valid_A , мы доказали следующее утверждение.

6.3. Теорема. Пусть $A = a^+$ — счетное чистое следующее допустимое множество с $\omega \in A$. Тогда Valid_A не есть Δ -предикат на A .

Следующей нашей задачей является обращение 3.12 для счетной системы $\mathfrak{M}$.

6.4. Теорема (Барвайс [2]). Пусть $\mathfrak{M} = (|\mathfrak{M}|, R_1, \dots, R_i) \dots, R_i)$ — счетная бесконечная алгебраическая система конечной сигнатуры, и пусть S — отношение на $|\mathfrak{M}|$. Пусть $A = \text{HYP}_{\mathfrak{M}}$.

(i) Если S является Π_1^1 -отношением над L_A на $\mathfrak{M}$, то S является Σ -отношением на A .

(ii) S есть Π_1^1 -отношение на $\mathfrak{M}$, если и только если S есть Σ -отношение на $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$.

(iii) S есть Δ_1^1 -отношение на $\mathfrak{M}$, если и только если $S \in \text{HYP}_{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. (i). Следует непосредственно из 6.1, так как $\mathfrak{M} \in A$.

(ii) Следует из (i) и 3.12.

(iii) Следует из (ii) и из принципа Δ -выделения. $\square$

Если $\mathfrak{M} = (\omega, 0, 1, +, \cdot)$, то $\text{HYP}_{\mathfrak{M}}$ для всех практических целей совпадает с $\text{HYP}(\omega)$; так, например, чистые множества в HYP_{ω} в точности те же, что и в $\text{HYP}(\omega)$ (упражнение). Таким образом, мы получаем следующий результат.

6.5. Следствие (Крипке [1], Платек [1]). Π_1^1 -подмножества ω суть в точности $\text{HYP}(\omega)$ -рекурсивно перечислимые подмножества ω . Δ_1^1 -подмножества ω суть в точности $\text{HYP}(\omega)$ -конечные подмножества ω .

Чтобы подчеркнуть историческое значение 6.5, мы приведем конкретное описание $\text{HYP}(\omega)$. Будем называть ординал α рекурсивным, если существует рекурсивное упорядочение подмножества множества ω , имеющее порядковый тип α . Заметим, что если α — рекурсивный ординал и $\beta < \alpha$, то β — также рекурсивный ординал. Пусть $\omega_1^{\text{СК}}$ — первый некурсивный ординал.

6.6. Теорема (Крипке [1], Платек [1]). $\omega^+ = L_{\omega_1^{\text{СК}}}$, т. е. первый допустимый ординал $> \omega$ есть $\omega_1^{\text{СК}}$.

Доказательство. Пусть $\text{HYP}(\omega) = L_{\alpha}(\omega) = L_{\alpha}$. Используя теорему о Σ -рекурсии, легко показать, что порядковый тип полного упорядочения в допустимом множестве также принадлежит допустимому множеству. Так как все рекурсивные множества лежат в $\text{HYP}(\omega)$ (упражнение), то $\omega_1^{\text{СК}} \leq \alpha$.

Предположим теперь, что $\omega_1^{\text{СК}} < \alpha$, т. е. $\beta = \omega_1^{\text{СК}} \in \text{HYP}(\omega)$. Обозначим e -е рекурсивно перечислимое множество через W_e и воспользуемся следующими классическими результатами:

(i) для каждого Π_1^1 -множества A , $A \subset \omega$, найдется такая рекурсивная функция f , что $n \in A \Leftrightarrow f(n)$ есть номер рекурсивного вполне упорядочения $W_{f(n)}$ (нормальная форма Суслина — Клини, см. главу 8 «Теории множеств»);

(ii) существует Π_1^1 -множество $\subset \omega$, не являющееся Σ_1^1 -множеством (см. главу 8 «Теории множеств»).

Пусть B — Π_1^1 -подмножество ω , не являющееся Σ_1^1 -подмножеством, и применим к нему (i). Так как для каждого $n \in B$ порядковый тип $W_{f(n)} < \beta$, то существует сохраняющее порядок отображение g упорядочения $W_{f(n)}$ в $(\beta, \in \upharpoonright \beta)$. Конечно, в свою очередь, существование такого g влечет $n \in B$. Существование g может быть выражено высказыванием о том, что A -конечная система, A -рекурсивно зависящая от n , может удовлетворять определенному Σ_1^1 -предложению над L_A (упражнение). Анализируя все эти факты (и двойственные к ним) совместно с 6.1, получаем, что B является Π -множеством на A и, следовательно, согласно утверждению (двойственному к) 6.5, мы приходим к выводу, что B есть Σ_1^1 -подмножество ω , что приводит к противоречию с предположением. $\square$

6.6'. Следствие. Δ_1^1 -подмножества ω — это в точности те множества, которые конструируются до уровня $\omega_1^{\text{СК}}$.

Замечание. Следствие 6.6' есть одна из формулировок теоремы Клини [1], которая является одним из основных результатов эффективной дескриптивной теории множеств и (прикладной) логики второго порядка. Теорема Клини утверждает, что подмножество множества ω будет гиперарифметическим в том и только в том случае, когда оно является Δ_1^1 -множеством. Если мы заменим клиниевское определение гиперарифметичности на выражение «быть элементом $L_{\omega_1^{\text{СК}}}$ », то 6.6' есть модификация теоремы Клини. Действительно, два определения гиперарифметичности тождественны; оба включают в себя иерархию,

индексами у которой являются рекурсивные ординалы. Как легко видеть, 6.5 обобщается на произвольную счетную систему, удовлетворяющую 6.4. Теорема Клини — сама по себе более тонкое и глубокое утверждение и поэтому так просто не обобщается. См. обсуждение этого вопроса у Москюкиса [2].

Сейчас мы приведем без доказательства результат, который показывает, какую роль играет первый стабильный ординал σ_0 в эффективной дескриптивной теории множеств.

6.7. Теорема. (i) σ_0 есть первый ординал, не являющийся Δ_2^1 -ординалом, т. е. такой первый ординал α , что не существует Δ_2^1 -вполне упорядочения подмножества множества ω с порядковым типом α .

(ii) Для $A = L_{\sigma_0}$ подмножество B множества ω есть Σ_2^1 -множество, если и только если оно является Σ -множеством на A .

(iii) $B \subseteq \omega$ есть Δ_2^1 -множество, если и только если $B \in A$.

Следующее утверждение представляет собой важный результат, при доказательстве которого используются теоремы Барвайса о полноте и компактности, а также теорема об опускании типов (см. главу 2). Множество a назовем *внутренним* для модели $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей аксиоме экстенциональности, если $a \in \text{WF}(\mathfrak{M})$. Пусть $A = \text{NYP}_{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}$ — счетная система. Пусть T — теория в L_A , где $L = \{\in, U, \dots\}$, и пусть T есть Σ -теория на A .

6.8. Теорема. Если a — внутреннее множество для каждой модели теории T , то $a \in A$.

Теорема 6.8 представляет собой современный вариант теоремы Ганди — Крайзеля — Тейта: для произвольного непротиворечивого Π_1^1 -множества аксиом теории чисел второго порядка, если $a \subseteq \omega$ есть «в» каждой модели теории T , то a гиперарифметическое. Доказательство и исторические сведения о 6.8 можно найти у Барвайса [2], глава 4, теорема 1.3.

В заключение суммируем наши представления о теоремах о полноте и Σ -компактности для счетного допустимого множества A . Формулируемая ниже теорема будет основным рабочим инструментом в следующем параграфе о Σ -насыщенных системах. Ее доказательство предлагается читателю в качестве упражнения.

6.9. Теорема. Пусть T — Σ_A -теория в счетном допустимом фрагменте L_A . Тогда для произвольного $\varphi \in L_A$:

(i) $T \models \varphi$, если и только если $T' \models \varphi$ для некоторой A -конечной теории T' ;

(ii) $\{\varphi \in L_A: T \models \varphi\}$ есть Σ -множество на A (расширенная полнота);

(iii) пусть $p \subset I \times L_A$ есть Σ_A -семейство такое, что для каждого $i \in I$ $p_i = \{\psi: \langle i, \psi \rangle \in p\}$ есть множество предложений L_A ; тогда семейство $\{\langle i, \varphi \rangle: i \in I, p_i \models \varphi\}$ является Σ -множеством на A (равномерно расширенная полнота).

§ 7. Σ -насыщенные алгебраические системы

Везде в данном параграфе A будет счетным допустимым множеством, L — язык, являющийся Δ -подмножеством A . Тогда Σ -семейство L_A -типов с параметрами x — это по определению такое Σ -множество p , что $p \subset I \times L_A$ для некоторого A -конечного множества индексов I , и если $\langle i, \psi \rangle \in p$, то $\psi = \psi(v, x)$ есть L_A -формула с указанными свободными переменными. Для $i \in I$ пусть p_i или $p_i(v, x)$ будет «типом» $\{\psi(v, x): \langle i, \psi \rangle \in p\}$; p_i есть Σ -множество формул.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть L -система и рассмотрим Σ_A -семейство L_A -типов с параметрами из $\mathfrak{M}$, т. е. с элементами a из $|\mathfrak{M}|$ (точнее, с константами, обозначающими эти элементы), которые представлены вместо x . Будем в этом случае говорить о семействе типов *над* $\mathfrak{M}$. Будем также говорить, что p реализуемо в $\mathfrak{M}$, если, используя приведенные выше обозначения, имеем $\mathfrak{M} \models \exists v \bigvee_{i \in I} p_i$.

$\Delta p_i(v, a)$, т. е. по крайней мере реализуется один тип p_i . **7.1. Определение** (Рессер [1]; в приводимой формулировке: Харник [1]). $\mathfrak{M}$ называется Σ_A -насыщенной, если для каждого Σ_A -семейства типов p над $\mathfrak{M}$ из того, что каждое A -конечное подсемейство $q \subseteq p$ реализуемо в $\mathfrak{M}$, следует, что p реализуемо в $\mathfrak{M}$; в обозначениях это выглядит так:

$$\mathfrak{M} = \left[\bigwedge_{\substack{q \subseteq p \\ q \text{ конечн}}} \exists v \bigvee_{i \in I} \Delta q_i(v, a) \right] \rightarrow \exists v \bigvee_{i \in I} \Delta p_i(v, a).$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда I — одноэлементное множество, бесконечная дизъюнкция исчезает, и мы получаем условие, формально сводящееся к знакомому условию ω -насыщенности в теории моделей. В частности, для $A = \text{HF}$ мы получаем условие, которое в главе 2 мы называли рекурсивной насыщенностью (в действительности рекурсивно перечислимой насыщенностью, но это эквивалентно предыдущему). Так как в нашей модели конечное множество I фактически ничем не отличается от одноэлементного (упражнение), то Σ_{HF} -насыщенность совпадает с рекурсивной насыщенностью.

Эквивалентное определение Σ -насыщенной модели получается «расчленением» исходного определения на две части. Первая часть представляет собой приведенное определение с I как одноэлементным множеством (это условие называется Σ -насыщенностью по Шлипфу [1] и в действительности более под-

ходящее, чем полное условие), а вторая часть получается из исходного определения вычеркиванием x и $\exists x$ (это условие называется A -регулярностью по Шлиппу [1]).

Читатель в дальнейшем убедится, что ниже в доказательстве 7.2 A -регулярность необходима для «выполнимости дизъюнкций».

Каждая конечная L -система является Σ_A -насыщенной. Для произвольного множества a система (a) с пустой сигнатурой является Σ_A -насыщенной (упражнение: заметьте скудность оперируемых подмножеств из (a) с конечным числом параметров). Как показывает следствие 7.3, приведенное ниже, существует много Σ -насыщенных алгебраических систем. Следующая теорема является фундаментальным результатом о Σ -насыщенных алгебраических системах.

7.2. Теорема (сильное свойство универсальности Σ -насыщенных алгебраических систем, Рессер [1]). Пусть T' есть Σ_A -теория в языке L'_A , где $L' \supseteq L$. Если $\mathcal{M}$ — счетная Σ_A -насыщенная L -система, удовлетворяющая всем L_A -следствиям теории T' , то $\mathcal{M}$ имеет Σ_A -насыщенное расширение $\mathcal{M}'$ (т. е. $\mathcal{M}' \upharpoonright L = \mathcal{M}$), которое является моделью теории T' .

Доказательство (Харник [1]). Расширим язык L' до языка $L'(|\mathcal{M}|)$, введя имена для элементов $|\mathcal{M}|$. Имя элемента $a \in |\mathcal{M}|$ будем также обозначать через a . Пусть $p^0, p^1, \dots, p^n, \dots$ — список всех Σ_A -семейств $p(v, a)$ L'_A -типов над $\mathcal{M}$ (заметим, что A и $\mathcal{M}$ счетные). Определим по индукции множества $\Theta_0 \subset \Theta_1 \subset \dots$, удовлетворяющие условиям (i) и (ii) ниже.

(i) Θ_n есть Σ_A -множество $L'_A(|\mathcal{M}|)$ -предложений, содержащее только конечное число констант из $|\mathcal{M}|$ (заметим, что в силу этого условия не возникает трудностей с тем, что Θ_n есть Σ_A -множество даже в том случае, когда $|\mathcal{M}|$ не является подмножеством A : достаточно заменить конечное множество констант на конечное число свободных переменных).

(ii) Если $\Theta_n \models \psi(a)$, $\psi(x)$ есть L_A -формула и $a \in |\mathcal{M}|$, то $\mathcal{M} \models \psi[a]$.

Наша цель — построить Θ_n так, чтобы $\bigcup_{n < \omega} \Theta_n$ определяло (согласно 4.3) модель теории T' , изоморфную Σ_A -насыщенному расширению $\mathcal{M}$.

Полагаем $\Theta_0 = T'$. Тогда (i) и (ii) выполняются согласно условиям теоремы.

Предположим, что Θ_n уже определено. Пусть $p^n = p(v, a) \subset I \times L'_A$ будет n -м семейством рассматриваемых типов, a — это список всех $|\mathcal{M}|$ констант, встречающихся либо в Θ_n , либо в p^n . При конструировании Θ_{n+1} мы должны быть уверенными в том, что условие насыщенности выполняется для p^n .

Для $i \in I$ определим $r_i(v, a) = \{\psi(v, a) : \psi(v, x) \text{ есть } L_A\text{-формула (I) и } \Theta_n \cup p_i(v, a) \models \psi(v, a)\}$. Согласно теореме о расширенной полноте (см. 6.9 (ii)) каждое r_i является Σ_A -множеством и, более того, по теореме о равномерно расширенной полноте (6.9 (iii)) $r = \{\langle i, \psi \rangle : \psi \in r_i, i \in I\}$ является Σ_A -семейством типов. Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. $\mathcal{M}$ реализует семейство r . Пусть $b \in |\mathcal{M}|$ и $i \in I$ — такой индекс, что $\mathcal{M} \models \bigwedge r_i(b, a)$. Полагаем $\Theta_{n+1} = \Theta_n \cup p_i(b, a)$. Заметим, что по определению r_i условия (i) и (ii) остаются выполнимыми и для Θ_{n+1} .

Случай 2. $\mathcal{M}$ не реализует r . Так как $\mathcal{M}$ есть Σ_A -насыщенная модель, то существует такое A -конечное семейство $s \subset r$, что s нереализуемо в $\mathcal{M}$. Так как $s_i \subset r_i$ для каждого $i \in I$ и s_i является A -конечным, то согласно Σ -компактности получаем

(iii) $A \models \forall i \in I \exists t [t \subset p_i \wedge \Theta_n \models \forall v (\bigwedge t(v, a) \rightarrow \bigwedge s_i(v, a))]$.

По теореме о расширенной полноте предикат, заключенный в скобках (от переменных t и i), есть Σ -предикат на A . Согласно принципу Σ -семейства существует такое множество $\omega \in A$, что для каждого $i \in I$ t может быть выбрана в ω . Но тогда для $q = (\bigcup \omega) \cap p$ мы имеем

$A \models \forall i \in I (q \subset p \wedge \Theta_n \models \forall v (\bigwedge q_i(v, a) \rightarrow \bigwedge s_i(v, a)))$.

Другими словами,

(iv) $\Theta_n \models \bigwedge \exists v \bigvee_{i \in I} \bigwedge s_i(v, a) \rightarrow \bigwedge \exists v \bigvee_{i \in I} \bigwedge q_i(v, a)$.

Полагаем $\Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \{\bigwedge \exists v \bigvee_{i \in I} \bigwedge q_i(v, a)\}$. Так как S не реализуемо в $\mathcal{M}$, то формула, стоящая перед $\rightarrow$ в (iv), истинна в $\mathcal{M}$. Следовательно, в силу (iv) произвольное L_A -следствие Θ_{n+1} есть следствие Θ_n плюс L_A -предложение, истинное в $\mathcal{M}$. Но тогда условие (ii), выполняясь для Θ_n , выполняется и для Θ_{n+1} . Таким образом, (i) и (ii) вновь выполнены.

Имея для каждого $n < \omega$ определенное Θ_n , полагаем $\Theta_\omega = \bigcup_{n < \omega} \Theta_n$. Мы утверждаем, что Θ_ω удовлетворяет (i) — (iii) в

4.3. Индуктивное предположение (ii) влечет конечную непротиворечивость Θ_ω . Если $\bigvee \Phi$ — общезначимая в $L'_A(|\mathcal{M}|)$ дизъюнкция, то Σ_A - (в действительности, A -конечное) семейство $p \subset \Phi \times L'_A$ типов $p_\varphi = \{\varphi, v = v\}$ встречается как некоторое p^n . Но тогда должен иметь место случай 1 в определении Θ_{n+1} , так как $\bigvee \Phi$ общезначима, так что $\Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \{\varphi\}$ для некоторого $\varphi \in \Phi$, тем самым подтверждая истинность условия 4.3 (ii) для Θ_ω . Проверка выполнимости 4.3 (iii) также проста.

В силу 4.3 Θ_ω имеет модель $\mathcal{M}'$, каждый элемент которой обозначен константой в $|\mathcal{M}|$, и при этом $\mathcal{M}' \models \sigma$, если и только

если $\sigma \in \Theta_\omega$ для $\sigma \in L'_A(|\mathcal{M}|)$. Так как для L_A -формулы $\psi(x)$ из $\mathcal{M}' \models \psi(a)$ следует, что $\psi(a) \in \Theta_n$ для некоторого $n < \omega$, то согласно (ii) $\mathcal{M} \models \psi[a]$; отсюда следует, что $a \rightarrow a^{\mathcal{M}}$ есть изоморфизм $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}' \upharpoonright L$. Без потери общности можно считать, что $\mathcal{M}' \upharpoonright L = \mathcal{M}$ и $a^{\mathcal{M}'} = a$. Так как $\Theta_0 = T'$, то $\mathcal{M}' \models T'$. В заключение пусть $p = p^n(v, a)$ есть некоторое Σ_A -семейство типов над $\mathcal{M}'$. Заметим, что, согласно конструкции Θ_{n+1} , в случае 1 p реализуем в $\mathcal{M}'$ элементом b , а в случае 2 p даже A -конечно нереализуем в $\mathcal{M}'$. Это и означает, что $\mathcal{M}'$ является Σ_A -насыщенной. $\square$

7.3. Следствие (существование Σ -насыщенных моделей). Каждая непротиворечивая Σ_A -теория T в L_A имеет Σ_A -насыщенную модель.

Доказательство. Возьмем конечную или счетную модель $\mathcal{M}_0$ теории T . Рассматривая $(|\mathcal{M}_0|)$ как алгебраическую систему пустой сигнатуры L_0 , можно считать каждое предложение языка L_0 , которое является следствием теории T , истинным в $(|\mathcal{M}_0|)$. Так как $(|\mathcal{M}_0|)$ — Σ_A -насыщенная модель, то согласно 7.2 она имеет расширение, которое является Σ_A -насыщенной моделью T . $\square$

L -система $\mathcal{M}$ называется Σ_A -относительно универсальной, если для каждой Σ_A -теории T' в L'_A и для некоторого $L' \supseteq L$, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет каждому L_A -следствию T' , то она имеет расширение, являющееся моделью T' . Следующее утверждение есть слабая форма 7.2.

7.4. Следствие (Σ_A -относительная универсальность Σ_A -насыщенных моделей). Каждая Σ_A -насыщенная счетная система является Σ_A -относительно универсальной.

Следствия 7.3 и 7.4 не исчерпывают всей мощи теоремы 7.2, как это великолепно демонстрирует работа Рессера, хотя для многих допустимых множеств A Σ_A -относительная универсальность в действительности полностью характеризует Σ_A -насыщенные модели.

7.5. Следствие. Каждая A -конечная алгебраическая система Σ_A -насыщена.

Доказательство. Утверждение можно легко доказать непосредственно, но оно также является следствием 7.3: достаточно воспользоваться предложением $\bigwedge \text{Diag}(\mathcal{M}) \wedge \forall x \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} x =$

a , которое характеризует $\mathcal{M}$ с точностью до изоморфизма. $\square$

7.6. Теорема (Рессер [1]). Пусть $\mathcal{M}$ — счетная бесконечная Σ_A -насыщенная алгебраическая система для A -конечного языка L . Пусть t — бесконечное множество, $t \in A$. Тогда существует такое допустимое множество $B \supseteq A$, что B содержит изоморфную копию $\mathcal{M}$, основное множество которой есть t и $\text{Ord}(B) = \text{Ord}(A)$.

Доказательство (эскиз; см. Харник [1]). Пусть T есть Σ_A -теория в языке, включающем L , $\in$, U , константы $\ulcorner a \urcorner$ для $a \in A$ и некоторые другие символы, модели которой, объединенные до $L \cup \{\in, U\}$, суть в точности такие модели $\mathcal{N}$, $\{\in, U\}$ -обеднение которых $\mathcal{N}_1$, являясь моделью КРУ, изоморфно конечному расширению A и содержит в качестве «элемента» изоморфную копию L -обеднения модели $\mathcal{N}$ с основным множеством t . Конечно, каждая бесконечная L -система может быть расширена до модели теории T . Так как $\mathcal{M}$ может быть расширена до модели теории T , то, согласно 7.2, это расширение может быть осуществлено и до Σ_A -насыщенной модели $\mathcal{N}$ теории T (почему?). Мы можем считать, что $(\in, U)$ -обеднение $\mathcal{N}$ является конечным расширением A . Фундированная часть модели $\mathcal{N}$ есть допустимое множество $B \supseteq A$, которое содержит в качестве своего элемента изоморфную копию $\mathcal{M}$ с основным множеством t .

Остается только показать, что $\text{Ord } B \leq \text{Ord } A$. Пусть a — произвольный «ординал» в $\mathcal{N}$ такой, что каждый $\alpha < \text{Ord}(A)$ «меньше», чем a . Рассмотрим Σ_a -тип

$$\{\langle v \text{ есть ординал} \rangle\} \cup \{\alpha < v : \alpha < \text{Ord}(A)\} \cup \{v < a\}.$$

Легко видеть, что этот тип A -конечно выполним в $\mathcal{N}$ и, следовательно, по теореме о Σ -насыщенности он выполним в $\mathcal{N}$. Следствием этого является то, что среди «ординалов» a в $\mathcal{N}$, которые «больше», чем все $\alpha < \text{Ord}(A)$, нет «наименьших». Следовательно, $\text{Ord}(A)$ не может принадлежать B и, таким образом, $\text{Ord}(B) \leq \text{Ord}(A)$. $\square$

Следующая теорема представляет собрание некоторых результатов, характеризующих Σ_A -насыщенность для определенных допустимых множеств A . Мы опускаем ее доказательство, поскольку эти результаты не будут использованы в дальнейшем.

7.7. Теорема. Пусть A — разрешимое счетное допустимое множество, т. е. пусть A есть объединение области значения некоторой A -рекурсивной функции, определенной на ординалах из множества A . Тогда заключение утверждения 7.6 характеризует Σ_A -насыщенные системы A -конечной сигнатуры. Если $A = \text{HYP}(a)$ для чистого множества a , $\mathcal{M}$ — L -система, $L \in A$, то $\mathcal{M}$ будет Σ_A -насыщенной моделью в том и только в том случае, когда для $B = \text{HYP}(\{\mathcal{M}, a\})$, рассматриваемого в $V_{|\mathcal{M}|}$, $\text{Ord}(B) = \text{Ord}(A)$. Как следствие имеем, что для таких A Σ_A -насыщенные системы определяются единым Σ_1^1 -предложением над L_A , а также характеризуются Σ_A -относительной универсальностью.

Ввиду справедливости 7.7 мы в состоянии дать альтернативные определения Σ_A -насыщенных систем по крайней мере для определенных A . В частности, теорема существования 7.3 с одним

из таких определений Σ_A -насыщенности восходит к Фридману [1]. Но ни одно из этих определений не дает нам какого-либо намека, почему для Σ_A -насыщенных систем выполняется следующее простое, но фундаментальное свойство.

7.8. Теорема. Объединение L_A -элементарной цепи Σ_A -насыщенных алгебраических систем есть Σ_A -насыщенная алгебраическая система.

Доказательство. Доказательство достаточно очевидно базируется на исходном определении. $\square$

Рессер использовал 7.8 вместе с 7.2, чтобы получить новое доказательство теоремы Кейслера [1], утверждающей, что множество логически общезначимых предложений в $L_A(Q)$ т. е. в логике, которая получается из L_A добавлением квантор Qx , «существует несчетное число $x \dots$ », является Σ_A -множеством для произвольного допустимого множества A . Он также доказал общую теорему, из которой теорема Грегори [1] вытекает как частный случай: для произвольного счетного допустимого множества A , если T есть Σ_A -теория в L_A , обладающая такой парой моделей $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, что $\mathcal{M} \leq_{L_A} \mathcal{N}$, то T имеет несчетную модель.

В заключение мы приведем доказательство теоремы, восходящей к Г. Саксу и доказанной впоследствии очень простым способом Фридманом и Йенсеном (см. также Кейслер [2]). Мы называем ординал α допустимым, если множество L_α конструируемых множеств до уровня α является допустимым.

7.9. Теорема (Сакс). Для каждого счетного допустимого ординала α существует такое подмножество a множества ω , что $\alpha = \omega_1^a \cong \text{Ord}(\text{HYP}(a))$.

Доказательство (Рессер [1]). Пусть $A = L_\alpha$ — допустимое множество. Пусть T есть Σ_A -теория в языке, содержащем только единственный предикатный символ $<$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

- (i) « $<$ есть линейное упорядочение»,
- (ii) $_\beta$ «существует такое x , что $\{y: y < x\}$ имеет порядковый тип β » для всех $\beta < \alpha$ (хорошее упражнение: показать, используя только $<$ и $\approx$, что существует A -конечное предложение, выражающее (ii) $_\beta$).

Теория T непротиворечива и, следовательно, имеет Σ_A -насыщенную модель $\mathcal{M}$. В силу 7.6 можно считать, что $\mathcal{M} \in B$, $\mathcal{M}$ имеет в качестве своего основного множества ω , B является допустимым множеством и $\text{Ord}(B) = \alpha$. Множество $\mathcal{M}$ может быть естественно отождествлено с подмножеством $a \subset \omega$. Очевидно, что $\beta \in a^+$ для каждого $\beta < \alpha$, но конечно же $\alpha \notin a^+ \subset B$. Следовательно, $\alpha = \text{Ord}(a^+)$. $\square$

Два главных приложения Σ -насыщенных систем будут приведены в следующих двух параграфах.

§ 8. Теорема о покрытии

Пусть A — счетное допустимое множество, и пусть Φ — конъюнктивное игровое предложение в A над языком $L \in A$. Напомним, что аппроксимация Φ обозначается через Φ_β ; нас будет интересовать Φ_β для $\beta < \text{Ord}(A)$. Каждое такое Φ_β является предложением в L_A и $\langle \Phi_\beta: \beta < \alpha \rangle$ есть A -рекурсивная функция. То, что $\Phi \in A$, автоматически влечет $\omega \in A$; для допустимых множеств с ординалом ω мы будем рассматривать A -рекурсивные конъюнктивные игровые предложения (см. окончание § 5). Следующая теорема остается истинной и в более общем случае с фактически тем же доказательством (основанным на очевидных замечаниях).

8.1. Теорема Воота о покрытии (Воот [1]). Если ϕ — произвольное предложение в L'_A для $L' \supseteq L$, то из $\Phi \models \phi$ следует, что $\Phi_\beta \models \phi$ для некоторого $\beta < \text{Ord}(A)$.

Доказательство (Харник [1]). Воспользовавшись «тяжелой артиллерией» предыдущих параграфов, можно привести очень короткое доказательство. Предполагая, что заключение теоремы неверно, рассмотрим непротиворечивую Σ_A -теорию $\{\Phi_\beta: \beta < \text{Ord}(A)\} \cup \{\neg \phi\}$. Ввиду 7.3 эта теория имеет счетную Σ_A -насыщенную модель $\mathcal{M}$. Согласно 7.6 мы можем считать, что $\mathcal{M} \in B$ для некоторого допустимого множества $B \supseteq A$ с $\text{Ord}(B) = \text{Ord}(A)$. Применим 5.4 (iv) к допустимому множеству B и B -конечной системе $\mathcal{M}$. Так как $\Phi_{\text{Ord}(B)} = \Phi_{\text{Ord}(A)} = \bigwedge_{\beta < \text{Ord}(A)} \Phi_\beta$,

то $\mathcal{M} \models \Phi_{\text{Ord}(B)}$ и, следовательно, в силу 5.4 (iv) $\mathcal{M} \models \Phi$. Мы приходим к противоречию, так как $\mathcal{M} \models \neg \phi$ и $\Phi \models \phi$.

Эта теорема является фундаментальной в логике. Ниже мы рассмотрим некоторые стороны ее важности. Для начала получим непосредственное следствие 8.1 и теоремы 5.3 о форме игры.

8.2. Сильная интерполяционная теорема Крейга—Лопес-Эскобара. (i) Пусть $\phi \rightarrow \psi$ — общезначимая импликация предложений в $L_{\omega, \omega}$. Тогда существует такое предложение θ в $L_{\omega, \omega}$, называемое крейговским интерполянтом ϕ и ψ , что оба предложения $\phi \rightarrow \theta$, $\theta \rightarrow \psi$ являются общезначимыми, и все нелогические символы θ встречаются и в ϕ , и в ψ . В частности, если $\phi \in A$, $\psi \in A$, A и B — допустимые множества, $A \subset B$ и $\text{Ord}(A) = \text{Ord}(B)$, то θ может быть взято из A .

(ii) Для произвольного Σ_1^1 -предложения $\exists \bar{R} \Phi(\bar{R})$ над $L_{\omega, \omega}$ существует такая ω_1 -последовательность $\langle \Phi_\alpha: \alpha < \omega_1 \rangle$ $L_{\omega, \omega}$ -предложений, что всякий раз, когда $\exists \bar{S} \Psi(\bar{S})$ является произвольным другим Σ_1^1 -предложением над $L_{\omega, \omega}$ таким, что не существует (счетной) модели $\exists \bar{R} \Phi \wedge \exists \bar{S} \Psi$ ($\exists \bar{S} \Psi$ «отделимо» от $\exists \bar{R} \Phi$), то

существует такой ординал $\alpha < \omega_1$, что $\exists \bar{R}\varphi \models \Phi_\alpha$ и $\Phi_\alpha \models \neg \exists \bar{S}\psi$ (Φ_α «разделяет» $\exists \bar{R}\varphi$ и $\exists \bar{S}\psi$). Более того, Φ_α является наименьшим допустимым множеством, содержащим $\exists \bar{R}\varphi$ и α , $\{\exists \bar{R}\varphi, \alpha\}^+$ для $\alpha < \omega_1$. Кроме того, для данного $\exists \bar{S}\psi$ α может быть найдено в $\{\exists \bar{R}\varphi, \exists \bar{S}\psi\}^+$.

Доказательство (ii). Если изменить формулировку теоремы, подставив в соответствующие места $\{\exists \bar{R}\varphi, \alpha, \omega\}^+$, $\{\exists \bar{R}\varphi, \exists \bar{S}\psi, \omega\}^+$, то ее доказательство даст нам явно слабый результат. Используя A -рекурсивные предложения Вюота, можно получить полный результат. По теореме 5.3 о форме игры существует такое предложение Вюота Φ в $\{\exists \bar{R}\varphi, \omega\}^+$, что Φ и $\exists \bar{R}\varphi$ эквивалентны для счетных моделей. Рассмотрим аппроксимации Φ_α для $\alpha < \omega_1$. Для данной $\exists \bar{S}\psi(\bar{S})$, «отделимой» от $\exists \bar{R}\varphi$, имеем $\Phi \models \neg \varphi(\bar{S})$, следовательно, по теореме о покрытии существует $\Phi_\alpha \models \neg \varphi(\bar{S})$, т. е. $\Phi_\alpha \models \neg \exists \bar{S}\psi(\bar{S})$. Так как $\Phi \models \Phi_\alpha$, а также $\exists \bar{R}\varphi \models \Phi_\alpha$, то $\exists \bar{R}\varphi \models \Phi_\alpha$ (почему?). Теорема о покрытии, в частности, указывает нам α в произвольном допустимом множестве, содержащем Φ , $\exists \bar{S}\psi(\bar{S})$, и, таким образом, в произвольном допустимом множестве, содержащем $\exists \bar{R}\varphi$, ω и $\exists \bar{S}\psi(\bar{S})$.

(i) Пусть L_0 — множество общих нелогических символов предложений φ и ψ , пусть $\bar{R}$ и $\bar{S}$ — множества нелогических символов, не принадлежащих L_0 в φ и ψ соответственно. Тогда $\models \varphi \rightarrow \psi$ эквивалентно $\exists \bar{R}\varphi \models \neg \exists \bar{S}(\neg \psi)$. Применяя (ii), получаем такое L_0 -предложение $\theta = \Phi_\alpha$ в $\{\exists \bar{R}\varphi, \alpha\}^+$, $\alpha \in \{\exists \bar{R}\varphi, \exists \bar{S}(\neg \psi)\}^+$, что $\models \varphi \rightarrow \theta \wedge \theta \rightarrow \psi$. Если A и B удовлетворяют условиям теоремы, то очевидно, что $\theta \in A$. $\square$

Подчеркивая значимость теоремы 8.2, вновь приведем некоторые прямые ее следствия.

8.3. Следствие (Суслин). Непересекающиеся аналитические множества (канторовского пространства) могут быть отделены с помощью борелевского множества. В частности, для одного аналитического множества A существует ω_1 борелевских множеств B_α , $\alpha < \omega_1$, таких, что $A = \bigcap_{\alpha < \omega_1} B_\alpha$ и всякий раз, когда

A' есть другое аналитическое множество, не пересекающееся с A , некоторое B_α отделяет A от A' .

8.4. Следствие (интерполяционная теорема Барвайса). Два непересекающихся Σ_1^1 -класса алгебраических систем над L_A могут быть отделены L_A -элементарным классом. Следовательно, Δ_1^1 -классы над L_A и L_A -элементарные классы совпадают.

Сформулируем теперь обобщение 6.4 (iii), выражимое в логике второго порядка.

8.5. Следствие. Пусть $\mathfrak{M} = (|\mathfrak{M}|, R_1, \dots, R_l)$ — счетная бесконечная система, и пусть X — класс n -арных отношений на $|\mathfrak{M}|$. Пусть $A = \text{HYP}_{\mathfrak{M}}$ и $A_0 = \text{LOrd}(A)$ (наименьшее чистое допустимое множество с теми же ординалами, что и у A).

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) X есть Δ_1^1 -класс над L_A на $\mathfrak{M}$;
- (ii) X есть Δ_1^1 -класс над L_{ω_1} на $\mathfrak{M}$;
- (iii) X является L_A -элементарным на $\mathfrak{M}$;
- (iv) X является L_{A_0} -элементарным на $\mathfrak{M}$.

Замечание. Отметим, что импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) есть следствие интерполяционной теоремы Барвайса. С другой стороны, переходя от подмножества B множества ω к $X = \{\{n\} : n \in B\}$, получаем, что эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) есть обобщение второй части 6.5. Утверждение данного следствия аналогично связи между теоремой Клини (см. замечание после 6.6), интерполяционной теоремой Барвайса и теоремой Суслина об отделимости, установленной в общем результате 8.2.

Доказательство следствия 8.5. Вначале надо показать, что если Y есть L_A -элементарный класс на $\mathfrak{M}$, то Y есть Π_1^1 -класс на $\mathfrak{M}$. Мы опускаем доказательство этого, так как оно аналогично доказательству 3.11. Отсюда легко видеть, что имеет место импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii). «(ii) $\Rightarrow$ (iii)» содержится в 8.4, но, как сейчас мы покажем, более интересным является доказательство «(ii) $\Rightarrow$ (iv)». Предположим, что X — Δ_1^1 -класс на $\mathfrak{M}$, $S \in X \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, S) \models \exists T_1 \varphi_1(S, T_1) \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, S) \models \forall T_2 \varphi_2(S, T_2)$, где φ_1, φ_2 используют конечный список параметров p в $|\mathfrak{M}|$. Пусть φ есть A -конечное предложение, «описывающее» $\mathfrak{M}$ в языке, содержащем константу для каждого $a \in |\mathfrak{M}|$; φ_0 есть

$$\Delta \text{ Diag}(\mathfrak{M}) \wedge \forall x \bigvee_{a \in |\mathfrak{M}|} x = \ulcorner a \urcorner.$$

Имеет место $\varphi_1(S, T_1) \models \varphi_0 \rightarrow \varphi_2(S, T_2)$ (почему?). Следовательно, существует такой крейговский интерполянт θ (см. 8.2 (i)!), что θ есть предложение языка $\{R_1, \dots, R_l, S, p\}$, $\models \varphi_1 \rightarrow \theta$ и $\models \theta \wedge \varphi_0 \rightarrow \varphi_2$, $\theta \in A_0$. Следовательно, $\theta(S, p)$ определяет X на $\mathfrak{M}$ (упражнение). $\square$

Обобщение Лопес-Эскобаром интерполяционной теоремы Крейга 8.2 (i) без той части, которая начинается словами «В частности», было одним из первых важных результатов в бесконечной логике. Доказательство Лопес-Эскобара от начала до конца было бесконечной формальной системой генценовского типа и было очень похоже на первоначальное доказательство

Крейга. Барвайс получил тот же результат для допустимых фрагментов $L_{\omega, \omega}$. Естественное доказательство этих результатов может также быть получено, если использовать свойства непротиворечивости (см. Кейслер [2]). Однако данные доказательства не могут продемонстрировать всей мощи результата 8.2. Рессер [1] получил полное доказательство 8.2 без использования игровых формул (в частности, независимо от Вoot [1], но позже), однако для наших целей больше подходит доказательство Вootа.

Следующее утверждение является сильным вариантом теоремы Бета об определмости (см., например, главу 2).

8.6. Теорема Бета. Пусть $\sigma(P)$ есть Σ_1^1 -предложение на $L(P)_A$ или в более общем случае пусть $\sigma(P)$ есть $\exists \bar{R} \wedge \Psi(\bar{R}, P)$ для некоторого Σ_A -множества предложений Ψ в $L(\bar{R}, P)_A$. Предположим, что в некоторой L -системе $\mathcal{M}$ существует по крайней мере хотя бы одно отношение P такое, что $(\mathcal{M}, P) \models \sigma$. Тогда найдется такая L_A -формула $\varphi(x)$, что $\sigma \models \forall x (Px \leftrightarrow \varphi(x))$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \exists \bar{R} \varphi(\bar{R}, p)$. Пусть $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ — различные копии $\bar{R}$, а P_1, P_2 — различные копии P ; a — некоторый набор индивидуальных констант. Тогда из условий теоремы следует, что импликация $[\varphi(\bar{R}_1, P_1) \wedge P_1 a] \rightarrow [\varphi(\bar{R}_2, P_2) \rightarrow P_2 a]$ логически общезначима. Обе стороны импликации имеют общий язык L и общий символ a . По интерполяционной теореме существует формула $\varphi(a)$ в языке $L_A(a)$, которая представляет собой крейговский интерполянт. Тогда $\varphi(x)$ и есть искомого определение P .

Уп р а ж н е н и е. Закончите доказательство теоремы в случае, когда σ имеет более общий вид. $\square$

В доказательстве следующей теоремы мы воспользуемся точной формой аппроксимации Вootа.

8.7. Теорема. Пусть φ — предложение L_A , причем L содержит бинарный предикатный символ $<$. Предположим, что для каждого $\beta < \text{Ord}(A)$ существует такая модель $\mathcal{M}$ предложения φ , что $<^{\mathcal{M}}$ есть линейное упорядочение, содержащее подупорядочение, имеющее порядковый тип β . Тогда φ имеет такую модель $\mathcal{M}$, что $<^{\mathcal{M}}$ содержит копию упорядочения множества рациональных чисел.

8.8. Следствие. Если каждая модель предложения φ вполне упорядочена, то существует такой ординал $\beta \in A$, что каждая модель предложения φ имеет порядковый тип $\leq \beta$.

8.9. Следствие. Класс счетных вполне упорядочений не является Σ_1^1 -классом (над $L_{\omega, \omega}$) счетных алгебраических систем.

Доказательство теоремы 8.7. Будем считать, что в каждой модели, которую мы будем обсуждать, $<$ автоматиче-

ски обозначает линейное упорядочение (почему мы можем так считать?). Начнем доказательство с того, что выпишем чисто экзистенциальное «предложение Вootа», модели которого являются в точности расширением упорядочения Q рациональных чисел. Пусть $\{r_n: 1 \leq n < \omega\}$ — бесповторная нумерация множества $|Q|$. Пусть $\delta(x_1, \dots, x_n)$ обозначает конъюнкцию

$$\bigwedge \{x_i < x_j: r_i < r_j, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Тогда предложение Φ есть

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \dots \bigwedge_{n < \omega} \delta_n(x_1, \dots, x_n);$$

ясно, что Φ соответствует нашим целям. Предположим противное, т. е. что Φ не обладает моделью, содержащей копию Q . Тогда $\Phi \models \neg \varphi$. Заметим, что $\Phi \in A$ всякий раз, когда $\omega \in A$, и Φ является A -рекурсивным. По теореме о покрытии существует такой ординал $\alpha_0 < \text{Ord}(A)$, что $\Phi_{\alpha_0} \models \neg \varphi$. Анализируя значение Φ_{α_0} , мы придем к желаемому заключению.

Будем говорить, что линейное упорядочение имеет длину $\geq \alpha$, если оно обладает подупорядочением типа α . Пусть $r_{i_1} < \dots < r_{i_n}$ — строго упорядоченный набор первых n рациональных чисел. Потребуем, чтобы для каждого ординала α и произвольного упорядочения $\mathcal{M} = (|M|, <^{\mathcal{M}})$ было $\mathcal{M} \models \Phi_{\alpha}^a[a_1, \dots, a_n]$, если $a_{i_1} <^{\mathcal{M}} \dots <^{\mathcal{M}} a_{i_n}$ и каждый открытый интервал (a_{i_1}, a_{i_2}) , (a_{i_2}, a_{i_3}) , $\dots$, $(a_{i_{n-1}}, a_{i_n})$, $(a_{i_n}, \dots)$ имеет длину $\geq 3^{\alpha}$. Для $n=0$ условие означает, что $\mathcal{M}$ имеет длину $\geq 3^{\alpha}$, а заключение есть $\mathcal{M} \models \Phi_{\alpha}$. Далее доказательство ведется индукцией по α . Для $\alpha=0$ наше требование, очевидно, выполняется. Для $\alpha=\beta+1$ имеем $\Phi_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \exists x_{n+1} \Phi_{\beta}(x_1, \dots, x_{n+1})$. Теперь найдем, в каком из интервалов (r_{i_1}, r_{i_2}) , (r_{i_2}, r_{i_3}) , $\dots$, $(r_{i_{n-1}}, r_{i_n})$, $(r_{i_n}, \dots)$ лежит r_{n+1} . Предположим, что $r_{i_k} < r_{n+1} < r_{i_{k+1}}$. Так как $3^{\beta+1} \geq 3^{\beta} + 1 + 3^{\beta}$, то существует такое $a = a_{n+1}$, что $a_{i_k} <^{\mathcal{M}} a <^{\mathcal{M}} a_{i_{k+1}}$ и оба интервала (a_{i_k}, a) и $(a, a_{i_{k+1}})$ имеют длину $\geq 3^{\beta}$. Согласно индукционному предположению $\mathcal{M} \models \Phi_{\beta}[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]$ и, таким образом, $\mathcal{M} \models \Phi_{\beta+1}[a_1, \dots, a_n]$. Если α — предельный ординал, то индукционный шаг тривиален.

Наше требование и то, что $\Phi_{\alpha} \models \neg \varphi$, приводят к тому, что всякий раз, когда $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M}$ не может иметь длину $\geq 3^{\alpha_0}$. Как легко видеть, из $\alpha_0 \in A$ следует, что $3^{\alpha_0} \in A$. Это и доказывает теорему. $\square$

Другое доказательство, использующее свойства непротиворечивости, приведено в работе Кейслера [2]. В работе Барвайса [2] имеется доказательство этого же результата, пред-

ставляющего собой непосредственное применение теоремы Σ -компактности.

Мы привели данное выше доказательство, чтобы проиллюстрировать типичное применение теоремы Воота о покрытии. В работах Маккаи [2], Харника и Маккаи [1] даны другие примеры применения теоремы о покрытии, где важную роль играют форма и/или значение аппроксимаций. Таким образом, значение теоремы о покрытии не ограничивается только ее главным применением 8.2, а даже в большей степени раскрывается в случаях использования точных форм аппроксимации. Это представляет собой блестящий пример того, в каком смысле логическое обобщение (теорема о покрытии) заменяет исходный результат дескриптивной теории множеств (теорема Суслина). В работе Воота [1] содержатся другие результаты, чье доказательство основано на технике игровых формул и их аппроксимаций. Два из них мы приведем здесь.

8.10. Теорема о редукции для $L_{\omega_1\omega}$ (Воот [1]). Для двух произвольных классов K_1, K_2 счетных бесконечных алгебраических систем, являющихся Π_1^1 -классами над $L_{\omega_1\omega}$, существуют такие Π_1^1 -классы K_1^*, K_2^* над $L_{\omega_1\omega}$, что $K_1^* \subseteq K_1, K_2^* \subseteq K_2, K_1^* \cap K_2^* = \emptyset, K_1^* \cup K_2^* = K_1 \cup K_2$.

8.11. Теорема (Воот [1]). Произвольный класс счетных алгебраических систем, являющийся Σ_1^1 -классом над $L_{\omega_1\omega}$ (в действительности даже Σ_2^1 -классом над $L_{\omega_1\omega}$), есть объединение ω_1 классов, элементарных в $L_{\omega_1\omega}$.

Оказывается, что теорема Скотта об изоморфизме (см. Скотт [2]) есть непосредственное следствие 8.11. С другой стороны, оба результата 8.10 и 8.11 относятся к классическим результатам дескриптивной теории множеств; так, например, первый из них относится к редукционному свойству дополнения аналитических множеств.

Рессер [1] приводит интересные примеры применения теории моделей к дескриптивной теории множеств. Рессер дает доказательство теоремы Спектора — Ганди, характеризующее Π_1^1 -множества подмножеств ω , используя технику допустимых множеств. Пусть $\mathcal{M} = (|\mathcal{M}|, R_1, \dots, R_l)$ — счетная алгебраическая система конечной сигнатуры.

8.12. Теорема Спектора — Ганди. Множество X подмножеств $|\mathcal{M}|$ является Π_1^1 -множеством, если и только если существуют такие Σ -формула $\sigma(x, y)$ и некоторый набор параметров p в $|\mathcal{M}| \cup \{\mathcal{M}, R_1, \dots, R_l\}$, что

$$X = \{B \subseteq \omega : \text{HYP}_{(\mathcal{M}, p)} \models \sigma[B, p]\}.$$

Заметим, что теорема 8.12 есть обобщение теоремы 6.4 (ii) на логику второго порядка. Ее доказательство очень похоже на доказательство теоремы 6.4. Рессер использовал 8.12 (для $\mathcal{M} = (\omega, 0, 1, +, \cdot)$) для того, чтобы дать «теоретико-модельное» доказательство теоремы Новикова — Кондо (см. главу 8 «Теории множеств»).

§ 9. Теорема о совершенном подмножестве

Классическая теорема дескриптивной теории множеств говорит, что произвольное несчетное аналитическое множество, скажем, канторовский дисконтинуум, содержит совершенное подмножество и, следовательно, имеет мощность $2^{\aleph_0}$ (см. главу 8 «Теории множеств»).

С другой стороны, теорема в работе Харрисона [1] (см. также Мэнсфилд [1]) утверждает, что если X есть Σ_1^1 -множество подмножеств ω (для простоты буква Σ набрана светлым шрифтом), то каждый элемент X является гиперарифметическим. Мы докажем теорему теории моделей, которая имеет оба этих результата как следствия. Она одновременно является обобщением теоремы Рейеса об определмости (см. также Чэн [1], Маккаи [1], Чэн и Кейслер [1]) и теоремы Куэкера [1].

Пусть A — счетное допустимое множество. Пусть $\theta = \{\theta_i(v, u_i) : i \in I\}$ — A -конечное семейство L_A -формул и предположим, что $L(P)$ -система $(\mathcal{M}, P)$ удовлетворяет дизъюнкции

$$\bigvee_{i \in I} \exists u_i \forall v (P(v) \leftrightarrow \theta_i(v, u_i)),$$

обозначаемой для краткости δ_θ . Тогда P определяется одной из формул $\theta_i(v, b_i)$ с параметрами b_i из $|\mathcal{M}|$. Если для предложения σ над $L(P)$ (в некоторой «логике») известно, что $\sigma \models \delta_\theta$, то тогда для произвольных L -системы $\mathcal{M}$ и отношения P на $|\mathcal{M}|$ таких, что $(\mathcal{M}, P) \models \sigma$, выполняется приведенное выше заключение. В частности, для фиксированной счетной L -системы $\mathcal{M}$ множество $\{P : (\mathcal{M}, P) \models \sigma\}$ будет счетным. Это доказывает импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i) в следующей теореме.

9.1. Теорема. Для Σ_1^1 -предложения σ вида $\exists \bar{R} \wedge \Psi(\bar{R}, P)$, где $\Psi(\bar{R}, P)$ есть Σ_A -множество предложений языка $L(\bar{R}, P)_A$ (в частности, σ может быть Σ_1^1 -предложением над $L(P)_A$), следующие утверждения эквивалентны:

(i) для каждой счетной L -системы $\mathcal{M}$ множество $\{P : (\mathcal{M}, P) \models \sigma\}$ счетно;

(ii) для каждой счетной L-системы $\mathfrak{M}$ множество $\{P: (\mathfrak{M}, P) \models \sigma\}$ не содержит совершенное подмножество (в канторовском пространстве $2^{\mathfrak{M}}$, если P есть n -арное отношение);

(iii) для некоторой A-конечной дизъюнкции θ , аналогичной описанной выше, $\sigma \models \delta_\theta$.

9.2. Следствие (Харрисон [1]). Если Σ_1^1 -множество X подмножеств ω не содержит совершенное подмножество, то каждый элемент X есть гиперарифметическое множество; в частности, само X есть подмножество ω^+ -конечного множества.

Доказательство (основанное на 9.1). Пусть $\sigma(P) - \Sigma_1^1$ -предложение, определяющее X на $\mathfrak{M} = (\omega, 0, 1, +, \cdot)$. Применяя (ii) $\Rightarrow$ (iii) для $A = \omega^+ = L_{\omega_1^{CK}}$, получим, что для некоторого A-конечного $\theta = \{\theta_i: i \in I\}$

$$X \subseteq Y \Rightarrow \{\{a \in \omega: \mathfrak{M} = \theta_i[a, b_i]\}: i \in I, b_i \in \omega\};$$

$Y \subset A$, в частности Y есть A-конечное множество (почему?). Согласно 6.5 мы получаем требуемое заключение. $\square$

Для предложения σ в $L(P)_A$, выразимого в логике первого порядка, теорема, аналогичная теореме 9.1, была доказана Маккаи [3]. В последующем Барвайс [2] доказал настоящий, более общий и более полезный вариант теоремы. Доказательство, приведенное в работе Маккаи [2], так же как и доказательство Барвайса [2], использует свойства непротиворечивости (в терминах Барвайса «непротиворечивые машины»). Доказательство 9.3, приводимое ниже и использующее Σ -насыщенные алгебраические системы, восходит к Харнику [1]. Эта теорема есть прямое обобщение теоремы Харрисона.

9.3. Теорема (Харник [1]). Пусть σ есть Σ_1^1 -предложение вида $\exists \bar{R} \wedge \bar{\Psi}(\bar{R}, P)$, где $\bar{\Psi}(\bar{R}, P)$ есть Σ_A -множество предложений в $L(R, P)_A$ (в частности, σ может быть Σ_1^1 -предложением над $L(P)_A$). Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная Σ_A -насыщенная L-система, и предположим, что существует такое множество $P_0 \subset |\mathfrak{M}|$, что $(\mathfrak{M}, P_0) \models \sigma$ и P_0 не является L_A -элементарным на $\mathfrak{M}$. Тогда $\{P: (\mathfrak{M}, P) \models \sigma\}$ содержит совершенное подмножество.

Доказательство. Пусть $\sigma = \exists \bar{R} \wedge \bar{\Psi}(\bar{R}, P)$. Пусть $\Theta(P)$ — множество

$$\{\exists u \forall v (P(v) \leftrightarrow \theta(v, u)): \theta \in L_A\}.$$

Очевидно, $\Theta(P)$ — A-рекурсивное множество. Из предположений теоремы следует, что $(\mathfrak{M}, P_0)$ является моделью $\{\sigma\} \cup \Theta(P)$. Определим по индукции такие конечные множества $M_0 \subset M_1 \subset \dots$, $\dots \subset M_n \subset \dots$; $M_n \subset |\mathfrak{M}|$, и Σ_A -множества $T_s(\bar{R}, P)$ предложений языка $L(\bar{R}, P)_A(|\mathfrak{M}|)$ (используя конечное число констант

обозначающих элементы из $|\mathfrak{M}|$, где $s \in {}^\omega 2$, что приводимые ниже условия (i) — (iv) выполняются:

(i) Если $lh(s) = n$, то $T_s(\bar{R}, P) \subset L(\bar{R}, P)_A(M_n)$; если $s \subset s'$, то $\Psi \subset T_s(\bar{R}, P) \subset T_{s'}(\bar{R}, P)$.

(ii) Если s и s' несравнимы, то $T_s(\bar{R}, P) \cup T_{s'}(\bar{R}, P) \models P(a) \leftrightarrow P'(a)$ для некоторой константы $a \in M_n$, где $n = \min(lh(s), lh(s'))$.

Эти определения гарантируют, что для всех $\eta \in {}^\omega 2$ $(\mathfrak{M}, a)_{a \in |\mathfrak{M}|}$ является моделью формулы $\exists \bar{R} \exists P \wedge (\bigcup_{n < \omega} T_{\eta|n}(\bar{R}, P))$. В свою

очередь это обеспечивает создание такого совершенного множества из отношений P , что $(\mathfrak{M}, P) \models \sigma$.

Существенной предпосылкой для конструирования нашего множества является

$$(iii)_n (\mathfrak{M}, a)_{a \in M_n} \models \exists P \exists \bar{R} \wedge (T_s(\bar{R}, P) \cup \Theta(P)) \text{ для всех } s \in {}^n 2.$$

(Кроме всего, это условие будет гарантировать, что $\bigcup_{n < \omega} T_{\eta|n}(\bar{R}, P)$ конечно совместно с $\text{Diag}(\mathfrak{M})$.) Для того чтобы сформулировать еще одно условие, допустим, что $\exists u \delta_0(u)$, $\exists u \delta_1(u)$, ... — некоторое перечисление всех общезначимых предложений в $L(R, P)_A(|\mathfrak{M}|)$ вида $\exists u \delta(u)$ и что $\forall \Psi_0, \forall \Psi_1, \dots$ — перечисление всех общезначимых дизъюнкций в той же логике. Последнее полезное свойство нашей конструкции заключается в следующем:

(iv) Если $lh(s) = n + 1$, то $T_s(\bar{R}, P) \models \delta_n(a)$ для некоторого $a \in |\mathfrak{M}|$ и $T_s(\bar{R}, P) \models \psi_n$ для некоторого $\psi_n \in \Psi_n$.

Предположим, что мы имеем в своем распоряжении все T_s , $s \in {}^\omega 2$, удовлетворяющие (i) — (iv). Пусть η — фиксированный элемент из ${}^\omega 2$, $T_\eta \equiv \bigcup_{n < \omega} T_{\eta|n}$, и множество T_η удовлетворяет условиям 4.3 (вследствие (iv)) с $C = |\mathfrak{M}|$. Следовательно, ввиду 4.3 существует такая модель $\mathfrak{M}'_\eta$ множества предложений T_η , все элементы которого обозначаются некоторым $a \in |\mathfrak{M}|$. Так как T_η конечно совместно с $\text{Diag}(\mathfrak{M})$ и T_η полно (см. 4.3),

то $\text{Diag}(\mathfrak{M}) \subset T_\eta$. Отсюда следует, что отображение $a \rightarrow a^{\mathfrak{M}'_\eta}$ является изоморфизмом $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'_\eta \upharpoonright L$, следовательно, можно считать, что $\mathfrak{M}'_\eta \upharpoonright (L \cup \{P\})$ имеет вид $(\mathfrak{M}, P_\eta)$. Из (i) и (ii) вытекает, что $\{P_\eta: \eta \in {}^\omega 2\}$ есть совершенное подмножество множества ${}^{|\mathfrak{M}|} 2$, что и доказывает теорему. Единственное, что осталось, — это завершить конструкцию T_s .

Положим $M_0 = \emptyset$ и $T_\emptyset(\bar{R}, P) = \Psi(\bar{R}, P)$. Условие (iii)₀ в этом случае удовлетворяется. Предположим теперь, что $T_s(\bar{R}, P)$ уже

определено для всех s с $\text{lh}(s) = n$ (так же, как и M_n). Для того чтобы определить $T_{s(i)}$ и $T_{s(i)}$, предварительно докажем

9.4. Утверждение. *Существуют такие $P_0, P_1 \subset |\mathcal{M}|$, $P_0 \neq P_1$, что $(\mathcal{M}, a)_{a \in M_n} \models \exists \bar{R} \wedge (T_s(\bar{R}, P_i) \cup \Theta(P_i))$ для $i = 0, 1$.*

В противном случае, если бы это утверждение было ложно, то мы бы имели

$$(\mathcal{M}, a)_{a \in M_n} \models \exists P_1 \exists P_0 \exists \bar{R}_0 \exists \bar{R}_1 \wedge S,$$

где S — Σ_A -теория логики $L(\bar{R}_0, \bar{R}_1, P_0, P_1)_A$, определяемая так: $S = T_s(\bar{R}_0, P_0) \cup \Theta(P_0) \cup T_s(\bar{R}_1, P_1) \cup \Theta(P_1) \cup \{P_0 \neq P_1\}$. Тогда, так как $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}, a)_{a \in M_n}$ — Σ -насыщенная модель, то согласно отношению универсальности (см. 7.4) существует $L(M_n)$ -следствие $\neg \psi$ множества S , которое ложно в $\mathcal{M}'$. Таким образом, $\mathcal{M}' \models \psi$ и

$$\{\psi\} \cup T_s(\bar{R}_0, P_0) \cup \Theta(P_0) \cup T_s(\bar{R}_1, P_1) \cup \Theta(P_1) \models P_0 = P_1,$$

т. е. для каждой $L(M_n)$ -модели $\mathcal{M}$ формулы ψ существует по крайней мере одно P такое, что $(\mathcal{M}, P) \models \exists \bar{R} \wedge (T_s(\bar{R}, P) \cup \Theta(P))$. Тогда по теореме Бета 8.6 найдется $L(M_n)$ -формула $\theta(v, a)$ такая, что $\{\psi\} \cup T_s(\bar{R}, P) \cup \Theta(P) \models \forall v (P(v) \leftrightarrow \theta(v, a))$. Но тогда $\{\psi\} \cup T_s(\bar{R}, P) \cup \Theta(P)$ противоречиво (так как $\neg \exists u \forall b (P(b) \leftrightarrow \theta(b, u))$ принадлежит $\Theta(P)$), что не согласуется с тем, что $\mathcal{M}' \models \psi$, и с условием (iii)_n. Это и доказывает 9.4.

Имея доказательство утверждения 9.4, для фиксированного $s \in {}^n 2$ выберем такие $P_0, P_1 \subset |\mathcal{M}|$, что $P_0 \neq P_1$ и $(\mathcal{M}', P_i) \models \exists \bar{R} \wedge (T_s(\bar{R}, P_i) \cup \Theta(P_i))$ для $i = 0, 1$. Пусть $a = a_s \in |\mathcal{M}|$ — такой элемент, что $a \in P_0$ в том и только в том случае, когда $a \notin P_1$. Например, можем считать, что $a \in P_0$ и $a \notin P_1$. Определим $T'_{s(i)} = T_s \cup \{P(a)\}$ и $T'_{s(i)} = T_s \cup \{\neg P(a)\}$. Зафиксируем $i \in \{0, 1\}$. Определим $T_{s(i)}$, выбирая $\bar{R}$ так, чтобы $(\mathcal{M}', \bar{R}, P_i) \models T_s(\bar{R}, P_i)$, и полагаем $T_{s(i)}(\bar{R}, P) = T_{s(i)}(\bar{R}, P) \cup \{\delta_n(b), \psi_n\}$, где $b \in |\mathcal{M}|$ и $\psi_n \in \Psi_n$ выбраны таким образом, чтобы $(\mathcal{M}', \bar{R}, P_i) \models \delta_n[b] \wedge \psi_n$. Это завершает конструкцию T для каждого $s' = s \langle i \rangle$ длины $n+1$; заметим, что в дополнение к константам из T_s множество $T_{s'}$ содержит еще две константы из $|\mathcal{M}|$, а именно a и b . Пусть $M_{n+1} \subseteq |\mathcal{M}|$ — такое конечное множество, которое содержит M_n и все a и b встречаются в конечном числе $T_{s'}$, где $\text{lh}(s') = n+1$. Очевидно, что наше построение удовлетворяет требованиям (i) — (iv).

Доказательство теоремы 9.1. Покажем, что верна импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii), т. е. что $\neg \text{(iii)} \Rightarrow \neg \text{(ii)}$. Считая $\neg \text{(iii)}$,

рассмотрим непротиворечивую Σ_A -теорию $\psi \cup \Theta(P)$ (где $\Theta(P)$ взято из доказательства 9.3), которая, следовательно, имеет Σ_A -насыщенную модель $(\mathcal{M}, \bar{R}, P_0)$ (см. 7.3). Тогда и $\mathcal{M}$ — Σ_A -насыщенная модель (почему?), а P не является L_A -элементарным на $\mathcal{M}$. Так как $\mathcal{M} \models \sigma$, $\neg \text{(ii)}$ есть следствие 9.3. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

Аддисон (Addison J.)

1. The theory of hierarchies. — In: Proceedings of the International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Stanford, 1960, p. 26—37. [Русский перевод: Аддисон Дж. Теория иерархий. — В кн.: Математическая логика и ее применения. М.: Мир, 1965, с. 23—36.]

Барвайс (Barwise J.)

1. Infinitary logic and admissible sets. — J. Symbolic Logic, 1969, 34, p. 226—252.
2. Admissible Sets and Structures. — Berlin: Springer, 1975.

Вотт (Vaught R.)

1. Descriptive set theory in $L_{\omega_1, \omega}$. — In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic. Berlin: Springer, 1973, p. 574—598.
2. Invariant sets in topology and logic. — Fundam. math., 1974, 82, p. 269—293.

Грегори (Gregory J.)

1. Uncountable models and infinitary elementary extension. — J. Symbolic Logic, 1973, 38, p. 460—470.

Карп (Karp C.)

1. Languages with Expressions of Infinite Length. — Amsterdam: North-Holland, 1964.

Кейслер (Keisler H. J.)

1. Logic with the quantifier «there are uncountably many». — Ann. Math. Logic, 1970, 1, p. 1—93.
2. Model Theory for Infinitary Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1971.

Клини (Kleene S. C.)

1. Hierarchies of number theoretic predicates. — Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, p. 193—213.

Крипке (Kripke S.)

1. Transfinite recursion on admissible ordinals, I, II (Abstract). — J. Symbolic Logic, 1964, 29, p. 161—162.

Куэкер (Kueker D.)

1. Definability automorphisms, and infinitary languages. — In: The Syntax and Semantics of Infinitary Logic/Ed. J. Barwise. Berlin: Springer, 1968, p. 152—165.

Левин (Lévy A.)

1. A hierarchy of formulas in set theory. — Mem. Amer. Math. Soc., 1965, 57.

Лопес-Эскобар (Lopez-Escobar E. G. K.)

1. An interpolation theorem for denumerably long sentences. — Fundam. math., 1965, 57, p. 253—272.

Маккаи (Makkai M.)

1. On a generalization of a theorem of E. W. Beth. — Acta Mat. Acad. Sci. Hungar., 1964, 15, p. 227—235.
2. Vaught sentences and Lindström's regular relations. — In: Cambridge Summer School of Mathematical Logic. Berlin: Springer, 1973, p. 622—660.
3. Global definability theory in $L_{\omega_1, \omega}$. — Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 916—921.

Малиц (Malitz J.)

1. Infinite analogs of theorems from first order model theory. — J. Symbolic Logic, 1971, 36, p. 216—228.

Московакис (Moschovakis Y. N.)

1. The Suslin-Kleene theorem for countable structures. — Duke Math. J., 1970, 37, p. 341—352.
2. Elementary Induction on Abstract Structures. — Amsterdam: North-Holland, 1974.

Мэнсфилд (Mansfield R.)

1. Perfect subsets of definable sets of real numbers. — Pacific J. Math., 1970, 35, p. 451—457.

Платек (Platek R.)

1. Foundations of recursion theory: Dissertation and Supplement. — Stanford (Calif.): Stanford University, 1966.

Рейес (Reyes G.)

1. Local definability theory. — Ann. Math. Logic, 1970, 1, p. 95—137.

Рессер (Ressayre J. P.)

1. Models with compactness properties relative to an admissible language. — Ann. Math. Logic, 1976, 7.

Свенониус (Svenonius L.)

1. On the denumerable models of theories with extra predicates. — In: The Theory of Models/Ed. J. W. Addison et al. Amsterdam: North-Holland, 1965 (2nd reprint. — Amsterdam: North-Holland, 1972), p. 376—389.

Скотт (Scott D.)

1. Invariant Borel sets. — Fundam. math., 1964, 56, p. 117—128.
2. Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers. — In: The Theory of Models/Ed. J. W. Addison et al. Amsterdam: North-Holland, 1965 (2nd reprint. — Amsterdam: North-Holland, 1972), p. 329—341.

Фридман (Friedman H.)

1. Countable models in set theory. — In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic. Berlin: Springer, 1973, p. 539—573.

Ханф (Hanf W.)

1. Incompactness in languages with infinitely long expressions. — Fundam. math., 1964, 53, p. 309—324.

Харник (Harnik V.)

1. Lecture notes on $L_{\omega, \omega}$. — Hanover (New Hampshire): Dartmouth College, 1974.

Харник и Маккаи (Harnik V., Makkai M.)

1. Applications of Vaught sentences and the covering theorem. — J. Symbolic Logic, 1976, 41, p. 171—187.

Харрисон (Harrison J.)

1. Recursive pseudo-wellorderings: Thesis. — Stanford (Calif.): Stanford University, 1966.

Чэн (Chang C. C.)

1. Some new results in definability. — Bull. Amer. Math. Soc., 1964, 70, p. 808—813.

Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)

1. Model Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Русский перевод: Кейслер Х. Дж., Чэн К. К. Теория моделей. М.: Мир, 1977.]

Шлипп (Schlipf J. S.)

1. A guide to the identification of admissible sets above structures. — 1976.

ДОКТРИНЫ В КАТЕГОРИИ ЛОГИКЕ

А. Кок, Г. Э. Рейес

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	289
§ 1. Алгебраические теории	289
§ 2. Декартовы теории	295
§ 3. Элементарные доктрины: кваиторы как сопряженные функторы	299
§ 4. Логические категории: когерентная логика	301
§ 5. Топосы Гротендика: инфинитарно когерентная логика	304
§ 6. Элементарные топосы	308
§ 7. Топосы и аксиоматическая теория множеств	314
§ 8. Другие области исследования в категорной логике	316
Литература	317

Предисловие

Цель этой статьи — дать обзор применения теоретико-категорных методов в логике, в частности в теории моделей и в теории множеств. Материал мы располагаем по мере увеличения богатства рассматриваемых «доктрин». Эти доктрины суть категорные аналоги фрагментов логических теорий, имеющих достаточную теоретико-категорную структуру своих моделей, чтобы описывать их как функторы. В частности, мы имеем дело с доктринами эквациональной, декартовой, финитарно когерентной и инфинитарно когерентной логик. Логика высшего порядка и теория множеств затрагиваются в §§ 6 и 7.

Определенные темы проходят сквозь разные доктрины: инвариантность представления, относительная интерпретация, полнота, концептуальная полнота и генерические системы (так же как и выполняемые на них операции).

Основным для функторного подхода к теории моделей является введение универсумов (категорий), в которых заданы модели, и которые отличны от множеств. Это дает возможность рассматривать понятие генерической системы.

§ 1. Алгебраические теории

Введение категорного понятия алгебраической теории приводит к систематической теории относительных интерпретаций одной эквациональной теории в другую, а также к теории катего-

рий (или многообразий) алгебр этих теорий и их связи. Этот прогресс берет начало от того факта, что понятие эквациональной (алгебраической) теории инвариантно относительно представлений.

1.1. Историческое замечание. Ясно, что два стандартных способа представления понятия *абелевой группы*: (i) множество, снабженное бинарной операцией «плюс», унарной операцией «минус» и нулевой операцией (константой) «0» (удовлетворяющими определенным уравнениям) или (ii) множество, снабженное бинарным «минусом» и нулевым «0» (удовлетворяющими определенным уравнениям), — отличаются только тем, какие операции считаются основными, а какие производными. Их «эквациональные теории» одинаковы: «совокупности» операций (основных и производных) могут быть в обоих этих случаях отождествлены таким образом, что процесс подстановки одних операций в другие сохраняется при этом отождествлении. Для понимания этого явления в точных терминах как изоморфизма между двумя математическими структурами, «состоящими из» операций и снабженными некоторого рода подстановочной структурой, пришлось изобрести понятия, подобные «клону операций» (П. Холл, см. Ко н [1]), или «композитору» (compositeur; Л а з а р [1]). Но они оказались несколько неуправляемыми понятиями. Правильный путь осмысления совокупности операций эквациональной теории был открыт Ло вер о м [1], который понял, что *подстановка* должна рассматриваться как композиция стрелок в определенном виде категории:

1.2. Определение. *Алгебраическая теория* T есть категория, объектами которой являются натуральные числа $0, 1, 2, \dots$ и которая для каждого n снабжена n -кой отображений

$$\text{proj}_i: n \rightarrow 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

позволяющей рассматривать n как n -кратное категорное произведение $1: n = 1^n$.

1.3. Пример. Определим алгебраическую теорию T , полагая $\text{hom}(n, m) = m$ -ки полиномов от $X_1, \dots, X_n$ с целыми коэффициентами и с подстановкой полиномов в качестве композиции. (Тогда proj_i есть как раз X_i , рассматриваемое как полином от переменных $X_1, \dots, X_n$, $1 \leq i \leq n$.) Эта теория T называется *теорией коммутативных колец*. Дальнейшие примеры см. в 1.14.

1.4. Для каждой алгебраической теории отображение $n \rightarrow m$, имеющееся в ней, может быть описано m -кой отображений $n \rightarrow 1$, так как m есть m -кратное произведение 1 ; поэтому отображения $n \rightarrow 1$ играют особую роль. Они называются n -арными операциями теории. В приведенном примере n -арная операция

есть полином от n переменных, который также есть в точности то, чем является n -арная (производная) операция во всяком представлении эквациональной теории коммутативных колец.

Аналогично, имеются алгебраические теории для всех других эквациональных теорий, подобных теории групп, решеток, алгебр Ли, $\dots$; в них n -арные операции суть операции (композиции основных операций), зависящие от n переменных (т. е. n -арные *термы*), отождествляемые, если их равенство следует из аксиом (базисных уравнений) теории. Это описание указывает, как строить алгебраическую теорию (в смысле определения 1.2) для каждой эквациональной теории. Можно было бы назвать это синтаксическим способом конструирования алгебраических теорий.

Семантика алгебраических теорий, т. е. процесс, ведущий от теории к ее категории моделей, может теперь быть объяснена следующим образом.

1.5. Определение. Пусть T — алгебраическая теория и пусть $\mathcal{E}$ — категория с конечными произведениями. Категория T -алгебр или T -моделей в $\mathcal{E}$ есть полная подкатегория $\text{Alg}(T, \mathcal{E})$ функторной категории $[T, \mathcal{E}]$, объектами которой являются функторы, сохраняющие конечные произведения.

1.6. З а м е ч а н и е. (i) При рассмотрении $\text{Alg}(T, \mathcal{E})$ мы называем $\mathcal{E}$ категорией значений. Если $\mathcal{E} = (\text{Sets})$, мы пишем $\text{Alg}(T)$ вместо $\text{Alg}(T, \mathcal{E})$.

(ii) Так как $A(n) = A(1)^n$, то значение алгебры $A: T \rightarrow \mathcal{E}$ при $n \in T$ вполне определено, если мы знаем $A(1)$. A сохраняет произведения, а n является 1^n . Описать A на морфизмах T , например на морфизме («операция») $\omega: 2 \rightarrow 1$, равнозначно описанию отображения

$$A(2) = A(1) \times A(1) \xrightarrow{A(\omega)} A(1),$$

т. е. бинарной операции на объекте $A(1)$. Таким образом, в случае $\mathcal{E} = (\text{Sets})$ A интерпретирует абстрактные бинарные операции $\omega: 2 \rightarrow 1$ как настоящие бинарные операции на множестве $A(1)$, называемом *основным множеством* алгебры A .

(iii) Имея в виду эти замечания, нетрудно понять, почему в случае, когда, скажем, T есть алгебраическая теория коммутативных колец, мы имеем эквивалентность категорий: $\text{Alg}(T, (\text{Sets}))$ эквивалентна категории коммутативных колец. Следовало бы отметить, что требование естественности преобразования $\tau_1: A \rightarrow B$ в точности равносильно требованию, чтобы $\tau_1: A(1) \rightarrow B(1)$ было гомоморфизмом относительно всех операций теории. Если, например, $\omega: 2 \rightarrow 1$ есть бинарная операция в T ,

то оба эти требования равнозначны коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} A(1) \times A(1) & \simeq & A(2) & \xrightarrow{\omega_A} & A(1) \\ \tau_1 \times \tau_1 \downarrow & & \tau_2 \downarrow & & \tau_1 \downarrow \\ B(1) \times B(1) & \simeq & B(2) & \xrightarrow{\omega_B} & B(1) \end{array}$$

(левый квадрат является также коммутативным вследствие естественности).

1.7. Относительная интерпретация. Как указывалось выше, относительные интерпретации одной эквациональной теории в другую могут теперь рассматриваться весьма рационально.

1.8. Определение. Морфизм алгебраических теорий есть любой функтор $f: T \rightarrow T'$ такой, что $f(n) = n$ и $f(\text{proj}_i) = \text{proj}_i$ для всех проекций.

1.9. Пример. Мы приводим два тривиальных примера и один нетривиальный.

(i) Пусть T — теория абелевых групп, T' — теория коммутативных колец. Имеется очевидное вложение $T \rightarrow T'$; по сути дела $T(n, 1)$ может рассматриваться как подмножество $T'(n, 1)$ (= множество полиномов от n переменных), состоящее из однородных полиномов степени 1.

(ii) Пусть T — теория групп, T' — теория абелевых групп. Имеется очевидное «сюръективное» отображение $T \rightarrow T'$, получаемое отождествлением двух абстрактных групповых операций, если их равенство вытекает из закона коммутативности. В терминах Биркгофа (Кон [1]) изучение фактор-теорий теории T по сути дела эквивалентно изучению подмногообразий многообразия, которое она определяет.

(iii) Пусть T — теория колец Ли, T' — теория (ассоциативных, но не обязательно коммутативных) колец. Существует морфизм $T \rightarrow T'$, который переводит бинарную операцию $[-, -]$ из T в коммутаторную операцию ω в T' : $\omega(x, y) = x \cdot y - y \cdot x$.

1.10. Если $f: T \rightarrow T'$ — морфизм алгебраических теорий, то немедленно получается функтор «композиции с f »

$$f^b: \text{Alg}(T', \mathcal{E}) \rightarrow \text{Alg}(T, \mathcal{E}).$$

Этот признак является общим для всех видов функторной семантики. В случае алгебраических теорий (следующий параграф) можно сказать больше, а именно, имеет место (Ловер [1])

1.11. Теорема. Если категория значений $\mathcal{E}$ есть (Sets), (или любая другая локально представимая категория, Таб 6-

риель и Ульмер [1]), то функтор f^b имеет левый сопряженный.

Доказательство. Для доказательства в случае (Sets) мы отсылаем к книге Шуберта [1]. □

1.12. Свободные алгебры. Существование таковых может считаться следствием теоремы 1.11, если взять в качестве T в 1.10 алгебраическую теорию, у которой единственные n -арные операции суть проекции, а категория алгебр которой есть в точности (Sets). Функтор f^b может быть отождествлен с $A \mapsto A(1)$, что является функтором $\text{Alg}(T') \rightarrow (\text{Sets})$. Он имеет левый сопряженный функтор $F: (\text{Sets}) \rightarrow \text{Alg}(T')$ в силу 1.11. Алгебра вида $F(M)$ (M — множество) называется свободной алгеброй на множестве M образующих. Оказывается теперь, что любая алгебраическая теория может быть восстановлена по ее свободным алгебрам:

1.13. Теорема. Пусть T — алгебраическая теория. Тогда T эквивалентна двойственной категории для полной подкатегории категории $\text{Alg}(T)$, определяемой свободными алгебрами $F(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Доказательство. Функтор $\text{hom}_T(n, -): T \rightarrow (\text{Sets})$ сохраняет произведения и является, следовательно, T -алгеброй. Для любой другой T -алгебры $A: T \rightarrow (\text{Sets})$ мы имеем (обозначая через Hom hom -функтор для $[T, (\text{Sets})]$ и, следовательно, для $\text{Alg}(T)$)

$$\text{Hom}(\text{hom}_T(n, -), A) \simeq A(n) \simeq \prod_n A(1) \simeq \text{hom}(n, A(1))$$

(первый изоморфизм — в силу леммы Йонеды). Таким образом, $\text{hom}_T(n, -)$ служит в качестве $F(n)$. Теперь второе заключение получается сразу, опять по лемме Йонеды. □

1.14. Пример. Нижеследующее есть пример алгебраической теории, которая получается не представлением и не «семантическими» средствами, как в 1.13, а построением, осуществляемым в категории алгебраических теорий. Пусть $\hat{T}_0$ — теория, n -арными операциями которой являются формальные степенные ряды от n переменных и без постоянного члена. Они могут подставляться один в другой без какого-либо препятствия для сходимости, так как постоянный член отсутствует. Формально, $\hat{T}_0$ может быть получена как образование обратного предела в категории алгебраических теорий: $\varprojlim T_{0,n}$, где $T_{0,n}$ есть алгебраическая теория для коммутативных колец без единицы, удовлетворяющих условию $\forall x (x^n = 0)$. Алгебры для $\hat{T}_0$ неизвестны, и также неизвестно и ее синтаксическое представление.

1.15. Варьирование категории значений. Мы можем рассматривать $\text{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{E})$ для любой категории $\mathcal{E}$ с конечными произведениями; в частности, когда $\mathcal{E} = (\text{Alg}(\mathbf{T}'))^{\text{op}}$. В этом случае приходим к понятию « $\mathbf{T}$ -коалгебры в категории $\mathbf{T}'$ -алгебр» (см. Рейт [1] и Фрейд [1]), под которое подпадают такие структуры, как алгебры Хопфа, не описываемые в терминах классической универсальной алгебры (даже в финитарной логике первого порядка).

1.16. Генерическая алгебра. Ясно, что если $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ есть функтор, сохраняющий произведения, то мы, взяв композицию с p , получаем функтор «переноса по p »,

$$\text{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{E}').$$

Приведем тривиальный пример, который, однако, есть проявление важного принципа, с которым мы встретимся в §§ 2, 4 и 5, — принципа *генерической структуры*. Для данной алгебраической теории $\mathbf{T}$ можно рассмотреть $\text{Alg}(\mathbf{T}, \mathbf{T})$, что имеет смысл, поскольку $\mathbf{T}$ имеет конечные произведения. Среди $\mathbf{T}$ -алгебр в $\mathbf{T}$ имеем тождественный функтор $\text{id}_{\mathbf{T}}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$. Это есть *генерическая $\mathbf{T}$ -алгебра* в том смысле, что любая другая $\mathbf{T}$ -алгебра $A: \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{E}$ в любой категории $\mathcal{E}$ (с конечными произведениями) может быть получена переносом алгебры $\text{id}_{\mathbf{T}}$ по функтору A , сохраняющему произведения (очевидно, поскольку $A \circ \text{id}_{\mathbf{T}} = A$). (Пример 1.9 (iii) может быть рассмотрен в этом свете: мы наделяем основное множество генерической ассоциативной $\mathbf{T}'$ -алгебры (ассоциативное кольцо) структурой кольца Ли.)

Однако категория $\mathbf{T}$, в которой существует генерическая $\mathbf{T}$ -алгебра, весьма бедна по своей категорной структуре. В следующем параграфе мы столкнемся с более богатой категорией $\text{FP}(\mathbf{T})^{\text{op}}$, в которой также существует генерическая $\mathbf{T}$ -алгебра (на этот раз для декартовых (= сохраняющих конечные пределы) функторов), — аналогичное справедливо для каждой из более сильных доктрин, с которыми мы встретимся позднее. Более богатые контексты делают определенные построения на $\mathbf{T}$ -алгебрах возможными «раз и навсегда» именно как построения на генерической $\mathbf{T}$ -алгебре.

1.17. Ограничения. Можно охарактеризовать в категорных терминах категории, которые эквивалентны $\text{Alg}(\mathbf{T})$ для подходящей алгебраической теории $\mathbf{T}$ (см. Л о в е р [3]). Категория Cat малых категорий, категория алгебраических теорий или категория частично упорядоченных множеств не являются таковыми. С ними можно иметь дело в терминах функторной семантики, используя несколько более богатое понятие «теории» — малой декартовой категории. Это тот вид функторной семан-

тики, которому посвящена книга Габриеля и Ульмера [1]. Мы будем мотивировать введение декартовых теорий на примере относительной интерпретации одной теории в другую, которая не может быть описана в рамках алгебраических теорий.

§ 2. Декартовы теории

2.1. Пример (Декарт, приблизительно). Рассмотрим функтор «окружность»

$$S^!: (\text{коммутативные кольца}) \rightarrow (\text{Sets}),$$

сопоставляющий кольцу A множество $S^!(A)$:

$$S^!(A) = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Это множество даже несет на себе структуру абелевой группы, определяемую так:

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$$

(Гаусс). Обозначая через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ алгебраические теории коммутативных колец и абелевых групп соответственно, мы, таким образом, имеем функтор

$$S^!: \text{Alg}(\mathbf{T}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbf{T}'). \quad (2.1)$$

Если $\mathcal{E}$ — декартова категория (т. е. категория, имеющая конечные обратные пределы), то она имеет уравниатели, и если $A: \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{E}$ есть коммутативный объект кольца, мы можем использовать уравниатель для

$$A(X_1^2 + X_2^2) \text{ и } A(1) \quad (2.2)$$

(оба аргумента A рассматриваются как морфизмы $2 \rightarrow 1$ в $\mathbf{T}$), чтобы определить $S^!$. Таким путем контекст функтора (2.1) расширяется так, чтобы был определен функтор

$$S^!: \text{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbf{T}', \mathcal{E})$$

для любой *декартовой* категории $\mathcal{E}$.

В отличие от функтора (Ассоциативные алгебры) $\rightarrow$ (Алгебры Ли), рассмотренного в 1.9 (iii), функтор $S^!$ не описывается осуществлением раз и навсегда $S^!$ -конструкции на «генерическом коммутативном кольце» в $\mathbf{T}$, потому что $\mathbf{T}$ не обладает требуемым уравниателем. Это мотивирует поиски понятия декартовой теории, в которой такие конструкции могут быть осуществлены, и мотивирует исследование их функторной семантики.

2.2. Определение. *Декартова теория $\mathbf{C}$* есть малая категория с конечными обратными пределами. *Модель M для $\mathbf{C}$*

со значениями в категории $\mathcal{E}$ с конечными обратными пределами есть функтор $M: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, сохраняющий эти пределы; морфизм моделей $M \rightarrow M'$ есть любое естественное преобразование M в M' .

2.3. Замечание. Таким образом, мы определили категорию моделей со значениями в $\mathcal{E}$, часто обозначаемую через $\text{Lex}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, так как ее объекты суть точные слева (= сохраняющие конечные обратные пределы = декартовы) функторы. Она функторно зависит как от $\mathcal{C}$, так и от $\mathcal{E}$: всякий точный слева функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ между категориями значений определяет функтор «переноса» между категориями моделей, $\text{Lex}(\mathcal{C}, \mathcal{E}') \rightarrow \text{Lex}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Всякий точный слева функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ между декартовыми теориями («относительная интерпретация») индуцирует функтор $\text{Lex}(\mathcal{C}', \mathcal{E}) \rightarrow \text{Lex}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ между категориями моделей. Как и в случае алгебраических теорий, такие функторы имеют левые сопряженные при условии, что $\mathcal{E} = (\text{Sets})$ (или любая другая локально представимая категория). Читатель может найти основательное изложение категорных свойств таких категорий у Габриеля и Ульмера [1] (в их обозначениях $\text{Lex}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) = \text{St}_\alpha(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ с $\alpha = \aleph_0$). Среди теорем в их книге есть одна, которую мы могли бы назвать сильной формой концептуальной полноты декартовых теорий:

2.4. Теорема. *Предположим, что $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ суть декартовы теории такие, что $\text{Lex}(\mathcal{C}, (\text{Sets})) \simeq \text{Lex}(\mathcal{C}', (\text{Sets}))$. Тогда $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$.*

Доказательство. Доказательство следует из того, что $\mathcal{C}$ может быть восстановлена из $\text{Lex}(\mathcal{C}, (\text{Sets}))$ как категория, дуальная к подкатегории всех (абстрактно) конечно представимых объектов (Габриель и Ульмер [1], § 7, в особенности 7.10). $\square$

2.5. Сравнение с алгебраическими теориями. Ключ к доказательству того, что доктрина декартовых теорий охватывает доктрину алгебраических теорий, также лежит в идее конечно представимого объекта. В категории вида $\text{Alg}(\mathbf{T})$ конечно представимые объекты образуют в точности наименьшую подкатегорию, содержащую все объекты вида $F(n)$ и устойчивую относительно конечных копределов. Каждая конечно представимая алгебра A может быть описана как коуравнитель в $\text{Alg}(\mathbf{T})$

$$F(n') \rightrightarrows F(n) \rightarrow A$$

(и конечный копредел конечно представимых алгебр конечно представим). Мы обозначаем эту подкатегорию через $\text{FP}(\mathbf{T})$. Если α — функтор из полной подкатегории категории $\text{Alg}(\mathbf{T})$, состоящей из объектов вида $F(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) (и которую мы можем отождествить с $\mathbf{T}^{\text{op}}$ в силу 1.13), в категорию с конечными копределами, то он расширяется, вследствие упомянутого

коуравнителя, самое большее одним способом до функтора на $\text{FP}(\mathbf{T})$, сохраняющего конечные копределы, и необходимым условием этого является, конечно, то, что α сохраняет конечные копроизведения (так как $F(n) + F(m) = F(n + m)$). Это необходимое условие является также и достаточным: мы формулируем это в следующей теореме, где мы, однако, сначала исправляем несогласованность.

2.6. Теорема. *Пусть $A: \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{E}$ — функтор, сохраняющий конечные произведения, из алгебраической теории в декартову категорию (так что A есть алгебра для $\mathbf{T}$). Тогда следующая диаграмма может быть дополнена до коммутативной точным слева функтором $\bar{A}$ (который определяется однозначно с точностью до изоморфизма):*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{\quad} & \text{FP}(\mathbf{T})^{\text{op}} \\ & \searrow A & \swarrow \bar{A} \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

(Верхний функтор есть $n \mapsto F(n)$, который рассматривался также в 1.13.)

Доказательство. Для случая $\mathcal{E} = (\text{Sets})$ теорема вытекает из того, что $\text{Alg}(\mathbf{T})$ локально конечно представима и, следовательно, может быть восстановлена как категория точных слева функторов со значениями в (Sets) из категории, дуальной категории конечно представимых в ней объектов (Габриель и Ульмер [1], 7.9). Теперь теорема легко следует также и для $\mathcal{E}$, являющейся категорией функторов $[\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Sets})]$. Далее, если значения A суть представимые функторы, то значения $\bar{A}$ будут конечными обратными пределами представимых функторов и, следовательно, будут представимы при условии, что $\mathcal{C}$ имеет конечные обратные пределы. Это доказывает теорему для $\mathcal{E} = \mathcal{C}$. $\square$

2.7. Замечание. Способ прочтения этой теоремы (при условии, что категория значений имеет конечные обратные пределы) таков: каждая категория алгебр для алгебраической теории $\mathbf{T}$ может рассматриваться как категория моделей для декартовой теории $\mathbf{P} = \text{FP}(\mathbf{T})^{\text{op}}$. Это есть отождествление A с $\bar{A}$ в вышеприведенной диаграмме.

2.8. Область действия доктрины. Как отмечено в 1.17, имеются понятия, наподобие понятия «частично упорядоченного множества», которые могут быть выражены посредством функторной семантики декартовой, но не алгебраической теории. (Подходящей декартовой теорией $\mathcal{C}$ является в этом случае категория, дуальная категории конечных частично упорядоченных мно-

жеств.) Как это работает, подробно можно найти у Г а б р и е л я и У л ь м е р а [1], 8.2b, или в работе школы Эресмана, где можно найти много примеров декартовых теорий или тесно связанных с ними «эскизов», — см. Б а с т и а н и Э р е с м а н [1].

2.9. Синтаксическая характеристика доктрины. Достаточным условием для того, чтобы категория моделей теории первого порядка (отображения которой сохраняют примитивные предикаты и операции) имела вид $\text{Lex}(\mathbf{C}, (\text{Sets}))$ для подходящей декартовой теории $\mathbf{C}$, является то, что аксиомы теории суть простые хорновские высказывания, т. е. высказывания вида

$$\forall x (\varphi(x) \Rightarrow \exists! y \psi(x, y))$$

(x и y — кортежи переменных, а φ и ψ — конъюнкции атомных формул, см. К и н [1]). Такие теории могут быть и многосортными: это соответствует тому, что декартова теория $\mathbf{C}$, в отличие от алгебраической теории $\mathbf{T}$, не имеет выделенного основного объекта.

2.10. Пример (продолжение 2.1). Функтор (2.1) не индуцируется морфизмом алгебраических теорий. Однако если мы возьмем соответствующие декартовы теории, то это будет иметь место. Эквивалентно, из генерического объекта кольца в декартовой теории $\mathbf{C}$ коммутативных колец мы можем раз и навсегда построить объект окружности (с групповой структурой), т. е. мы имеем *генерическую окружность*. Если A^1 обозначает генерический объект кольца в $\mathbf{C}$, генерическая S^1 строится как уравни-
тель в $\mathbf{C}$

$$S^1 \rightarrow A^2 \rightrightarrows A^1,$$

где два указанных отображения из $A^2 (= A^1 \times A^1)$ в A^1 суть кольцевые операции $X_1^2 + X_2^2$ и 1 , примененные к объекту кольца A^1 . Теперь, вспоминая, что $\mathbf{C} = (\text{конечно представимые коммутативные кольца})^{\text{op}}$ и $A^1 = F(1)$, $A^2 = F(2)$, мы видим, что S^1 есть конечно представимое коммутативное кольцо, являющееся коуравнителем

$$S^1 \leftarrow Z[X_1, X_2] = F(2) \rightleftarrows Z[X] = F(1)$$

(два параллельных отображения вновь задаются посредством $X \mapsto X_1^2 + X_2^2$ и $X \mapsto 1$ соответственно). Итак,

$$S^1 = Z[X_1, X_2] / (X_1^2 + X_2^2 - 1).$$

Групповая структура на S^1 , если она рассматривается в $\mathbf{C}$, является когрупповой структурой (1.15), если она рассматривается в категории, дуальной более известной категории — категории конечно представимых коммутативных колец. В качестве таковой она есть отображение $S^1 \rightarrow S^1 \otimes S^1$ (которое не может

быть описано в терминах логики первого порядка). — Этот способ представлять окружность и другие «алгебраические подмножества» или «аффинные схемы» в аффинном пространстве A^n известен в современной алгебраической геометрии. См., например, Д е м а з ю р и Г а б р и е л ь [1].

§ 3. Элементарные доктрины: кванторы как сопряженные функторы

3.1. Раз уж эквациональная и декартова логика изложены в категорном контексте, то естественно искать категорное описание логики кванторов. Основное наблюдение, принадлежащее Л о в е р у [4]—[6], состоит в том, что экзистенциальная и универсальная квантификации (навешивание кванторов существования и всеобщности) могут рассматриваться как соответственно левый и правый сопряженные функтору подстановки. Ловер использовал это описание как основу для подхода к функторной семантике логики первого порядка, вначале в контексте «элементарных теорий» (см. Ловер [4]), разработанном в дальнейшем Ф о л ь г е р о м [1], а позднее в контексте «гипердоктрин» и «элементарных экзистенциальных доктрин», Ловер [6], с. 6. Мы рассмотрим последнее.

3.2. Определение. *Элементарная экзистенциальная доктрина* (ээд) задается базовой категорией $\mathbf{T}$ с конечными произведениями (объекты и морфизмы которой должны пониматься как *типы* и *термы* соответственно), и для каждого объекта (типа) n задается категория $B(n)$ — «категория атрибутов» этого типа. (Для применений в логике категория атрибутов обычно, но не всегда является просто частично упорядоченным множеством; при этом отношение порядка понимается как следование.) Требуемая базисная структура состоит теперь в том, что $B(n)$ зависит функторно-контравариантно от n , т. е. для морфизма $f: n \rightarrow m$ в $\mathbf{T}$ задан функтор (= сохраняющее порядок отображение) $B(f): B(m) \rightarrow B(n)$, понимаемый как подстановка по f и имеющий левый сопряженный функтор $\exists_f$ — «экзистенциальную квантификацию по f ».

3.3. З а м е ч а н и е. В исходной ловеровской трактовке элементарных экзистенциальных доктрин предполагалось, что $B(n)$ — декартово замкнутая категория, однако имеется (грубо говоря) столько же вариантов этого понятия, сколько имеется фрагментов языка первого порядка.

3.4. П р и м е р. Любая категория $\mathcal{E}$ с конечными обратными пределами и с хорошими прямыми образами определяет элементарную экзистенциальную доктрину $P(\mathcal{E})$ с $\mathbf{T} = \mathcal{E}$, $B(n)$ — полурешетка подобъектов для $n \in \mathcal{E}$, и $B(f)$ — образование обратного образа (оттягивание) по f . Категории $B(n)$ будут иметь,

а функторы $B(f)$ сохраняют более или менее теоретико-решеточные свойства, зависящие от свойств точности $\mathcal{E}$, приводящих к разным вариантам понятия доктрины. Мы обсудим применимость элементарных экзистенциальных доктрин для функторной семантики, рассматривая булев случай, где мы имеем (абстрактную) элементарную экзистенциальную доктрину, в которой каждая $B(n)$ есть булева алгебра, а каждый $B(f)$ — булев гомоморфизм, и рассматривая лишь (Sets) в качестве категории значений; заметим, что $P((Sets))$ — булева элементарная экзистенциальная доктрина. Итак, имеем

3.5. **Определение.** Модель (со значениями-множествами) булевой элементарно экзистенциальной доктрины (T, B) есть морфизм булевых элементарных экзистенциальных доктрин

$$(T, B) \rightarrow P((Sets))$$

(здесь морфизм булевых элементарных экзистенциальных доктрин $(T, B) \rightarrow (T', B')$ есть сохраняющий произведение функтор $M: T \rightarrow T'$ между базовыми категориями и для каждого $n \in T$ булев гомоморфизм $B(n) \rightarrow B'(M(n))$, удовлетворяющий очевидным условиям совместимости).

3.6. Чтобы соотнести это понятие модели с понятием модели для обычной теории первого порядка $\mathcal{T}$, следует взять в качестве (T, B) «доктрину Линденбаума» для $\mathcal{T}$, где T — алгебраическая теория, не имеющая никаких других операций, кроме проекций (как рассмотрено в 1.12), а $B(n)$ — классы $\mathcal{T}$ -эквивалентности формул, свободные переменные которых содержатся среди $x_1, \dots, x_n$. Тогда $B(f)$ (для $f: n \rightarrow m$) определяется посредством синтаксического процесса подстановки. Экзистенциальная квантификация может быть определена в терминах синтаксического $\exists$. наброски этого вида семантики для элементарных экзистенциальных доктрин приведены в работе Ловера [4] (для случая высшего порядка); см. также Кост [1].

Читатель, знакомый с полиадическими или цилиндрическими алгебрами, может распознать их характерные признаки в (булевом) ээд-подходе, и, действительно, специфические теоремы сравнения уже доказаны (Жуаяль [1]).

3.7. Однако если рассматривать категории как теории, то элементарные экзистенциальные доктрины обладают тем дефектом, что они являются категориями T , наделенными чем-то дополнительным, а именно категориями $B(n)$, что не определяется в терминах категорной структуры, за исключением случая элементарной экзистенциальной доктрины подобъектов $P(\mathcal{E})$ (пример 3.4). Для каких элементарных экзистенциальных доктрин (T, B) или для каких теорий $\mathcal{T}$ первого порядка существует достаточно богатая декартова категория R такая, что (T, B) (или $\mathcal{T}$) имеет те же самые модели, что и элементарная экзистен-

циальная доктрина подобъектов $P(R)$? Или, что равносильно, когда $\mathcal{E}$ -значные модели для (T, B) (или $\mathcal{T}$) могут описываться как функторы $R \rightarrow \mathcal{E}$, сохраняющие определенную часть категорной структуры? Этот вопрос впервые был решен Жуаялем, Рейесом и Дионом (Дион [1], один из фрагментов); см. пример 4.4. Метод Диона состоял в том, чтобы построить R из $\mathcal{T}$. Лучшие доказательства этих результатов были даны Бенабу и Костом (Кост [2]), которые строят действительно «хорошие» категории R из элементарных экзистенциальных доктрин, удовлетворяющих законам «Бека» (или Шевалле) и «Фробениуса» (по терминологии Ловера [4]), и применяют эту конструкцию к доктрине Линденбаума для $\mathcal{T}$ (для соответствующего фрагмента логики). Другой метод принадлежит Фрейду, который исходит из понятия аллегории — категорной аксиоматизации исчисления отношений.

§ 4. Логические категории: когерентная логика

Поиски категорных вариантов логики первого порядка в духе теорий равенств как категорий и моделей как функторов приводят к понятию регулярной категории с устойчивыми супремумами, или, коротко, логической категории Жуаяля — Рейеса (Рейес [1]). (Как указано в § 3, Ловер и Фольгер раньше изучали родственное понятие «элементарной теории» и «элементарной доктрины».) В контексте логических категорий кванторы существования выступают как образы (в категорном смысле), связка $\vee$ («или») — как супремум (подобъектов), тогда как $\wedge$ («и») и подстановка (термов в переменные) суть случаи обратных пределов.

4.1. **Определение.** Логическая категория T есть декартова категория с:

- (а) образами, устойчивыми при оттягиваниях,
- (б) конечными супремумами подобъектов данного объекта, устойчивыми при оттягиваниях.

4.2. **Замечание.** (к (а)) Образ морфизма $f: A \rightarrow B$ есть наименьший подобъект $I \rightarrow B$, по которому факторизуется f . Мы пишем $f: A \twoheadrightarrow B$, чтобы обозначить, что образом морфизма f является само B .

Мы говорим, что $f: A \rightarrow B$ устойчив, если для каждой диаграммы оттягивания

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

образом морфизма f' является B' .

(к (b)) Мы говорим, что $\bigvee_{i \in I} A_i = A$ устойчиво, если для каждого $B \rightarrow A$

$$\bigvee_{i \in I} B_A \times A_i \simeq B.$$

4.3. Определение. *Логический морфизм* $f: T \rightarrow T'$ между логическими категориями есть функтор, сохраняющий конечные обратные пределы, образы и конечные супремумы.

Пусть $\text{Mod}_T(T)$ — полная подкатегория категории функторов $[T, T']$, состоящей из логических морфизмов. В частном случае $T' = (\text{Sets})$ морфизмы называются моделями для T , и мы определяем $\text{Mod}(T) = \text{Mod}_{(\text{Sets})}(T)$.

4.4. Пример. Жуаяль, Рейес и Дион (Дион [1]) доказали, что те теории первого порядка, категории моделей которых (с сохраняющими примитивные предикаты отображениями в качестве морфизмов) имеют вид $\text{Mod}_{(\text{Sets})}(T)$, являются в точности *когерентными* теориями $\mathcal{T}$, как они определены Жуаялем и Рейесом (Рейес [1]). Теория первого порядка *когерентна*, если она может быть задана аксиомами вида

$$\forall x (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)),$$

где φ и ψ либо строятся из атомных формул с помощью $\wedge$, $\vee$ и $\exists$, либо являются $\uparrow$ («истина») или $\downarrow$ («ложь»). Понятие когерентной теории будет основным в § 5. Трудная часть доказательства заключается в построении логической категории, исходя из $\mathcal{T}$. Главное то, что имеется один объект для каждого понятия, определимого в $\mathcal{T}$, и одно отображение для каждого доказуемого функционального отношения.

4.5. Пример. Теория коммутативных локальных колец когерентна, так как она аксиоматизируема равенствами и двумя аксиомами:

$$(i) \forall x (\uparrow \Rightarrow (\exists y (x \cdot y = 1) \vee \exists y ((x - 1) \cdot y = 1)));$$

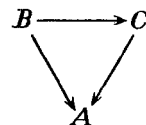
$$(ii) (1 = 0 \Rightarrow \downarrow).$$

(Равенства приобретают требуемый вид также с использованием $\uparrow$.)

4.6. Теорема о полноте (Делинь; Гротендик [1], Exposé [6]; Жуаяль). Если T — логическая категория и $f, g: X \rightrightarrows Y$ — два различных морфизма в T , то имеется модель M для T такая, что $M(f) \neq M(g)$.

Доказательство (набросок). Основная идея состоит в том, чтобы расширить T до новой логической категории T' , обладающей тем свойством, что каждый $A \rightarrow 1$ имеет сечение

(т. е. T' удовлетворяет слабой аксиоме выбора). Основное наблюдение в доказательстве Жуаяля следующее: всякий раз, когда в T задан $A \rightarrow 1$, мы можем «универсально» добавить формальное сечение путем «изменения базы», т. е. рассмотрения категории T/A , объектами которой являются морфизмы $B \rightarrow A$, а морфизмы — коммутативные треугольники



Категория T/A вновь является логической. Функтор оттягивания $T \rightarrow T/A$ (который переводит B в $\pi_2: B \times A \rightarrow A$) консервативен и, кроме того, $A \rightarrow 1 \in T$ имеет диагональ $\Delta_A: A \rightarrow A \times A$ как сечение в T/A .

Отождествляя объекты с формулами (как в этом примере), мы узнаем аналог ключевого шага в доказательстве Генкина: если A есть формула такая, что $T \vdash \exists x A$, то $T \cup A(a)$ есть консервативное расширение T , где a — новая константа.

Остальная часть доказательства осуществляется путем использования подходящего ультрафильтра. □

4.7. Замечание. Один важный вопрос, который может быть задан в категорном контексте, состоит в следующем: в какой степени категория моделей для T определяет T ? Один способ интерпретации этого вопроса состоит в том, чтобы спросить, можно ли ввести дополнительную логическую структуру в T , не изменяя категорию моделей для T , иначе: является ли T «концептуально полной». Мы сейчас же замечаем, что логические категории, вообще говоря, не являются «концептуально полными». В самом деле, «формально» добавляя в T копроизведения и частные по отношениям эквивалентности, мы получаем логическую категорию $\hat{T}$ такую, что логическое вложение $T \rightarrow \hat{T}$ индуцирует (путем композиции) эквивалентность $\text{Mod}(\hat{T}) \simeq \text{Mod}(T)$ (см. Антониус [1]). (Очевидно, что, например, X/R однозначно интерпретируется в (Sets) как частное от интерпретации X по интерпретации R .) Здесь мы обнаруживаем *дефект* обычных формализаций многосортных языков, где «неявно определяемые» операции копроизведений и частных не являются явными. Позволяя *предпоосу* быть логической категорией с «хорошими» копроизведениями и частными по отношениям эквивалентности, мы имеем следующее предложение:

4.8. Теорема о концептуальной полноте (Маккаи и Рейес [1]). Если логический функтор $f: T \rightarrow T'$ ме-

жду предтопосами индуцирует (путем композиции) эквивалентность $\text{Mod } T' \xrightarrow{\sim} \text{Mod } T$, то f есть эквивалентность.

Доказательство. Доказательство проводится путем введения синтаксических многосортных представлений для T, T' , благодаря чему f становится интерпретацией теорий. Затем используется компактность и метод диаграмм. Чисто категорное доказательство пока отсутствует. $\square$

4.9. З а м е ч а н и е. Инфинитарные логические категории также уже рассматривались, и Барр [1] доказал теорему о полноте для булевозначных моделей. Аксиоматизацию типа Генцена для этой инфинитарно когерентной логики с применениями к теоремам о полноте (включая теорему Барра) можно найти в работе Маккаи и Рейеса [1].

§ 5. Топосы Гротендика: инфинитарно когерентная логика

Топосы (и предтопосы) появились в алгебраической геометрии, где они повсеместны, как обобщение понятия пучка над топологическим пространством: по Гротендику, это есть понятие пучка над местом.

5.1. О п р е д е л е н и е. (i) Место (site) есть декартова категория $\mathcal{C}$ вместе с понятием локализации, т. е. для каждого $A \in |\mathcal{C}|$ нам задан непустой класс $\text{Loc}(A)$ семейств морфизмов $(A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ категории $\mathcal{C}$, называемых локализациями A , устойчивых при оттягиваниях в том смысле, что для каждого $B \rightarrow A$ семейство $(A_i \times B \rightarrow B)_{i \in I}$ есть локализация B .

(ii) Пучок (sheaf) над $\mathcal{C}$ есть функтор $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Sets})$, удовлетворяющий для каждого $(f_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I} \in \text{Loc}(A)$ следующим условиям:

(а) если $\xi, \eta \in F(A)$ таковы, что $\xi_i = F(f_i)(\xi) = F(f_i)(\eta) = \eta_i$ для всех $i \in I$, то $\xi = \eta$;

(б) если $(\xi_i)_{i \in I}$ — семейство такое, что $\xi_i \in F(A_i)$ для всех $i \in I$, и оно совместимо, т. е. в диаграмме

$$\xi_i \in F(A_i) \xrightarrow{F(\pi_i)} F(A_i \times A_j) \xleftarrow{F(\pi_j)} F(A_j) \ni \xi_j,$$

полученной посредством F из

$$A_i \xleftarrow{\pi_i} A_i \times A_j \xrightarrow{\pi_j} A_j,$$

мы имеем $F(\pi_i)(\xi_i) = F(\pi_j)(\xi_j)$ для всех $i, j \in I$, то существует $\xi \in F(A)$ такое, что $\xi_i = F(f_i)(\xi)$ для всех $i \in I$. Пусть $\text{Sh}(\mathcal{C})$ — полная подкатегория категории функторов $[\mathcal{C}^{\text{op}}, (\text{Sets})]$, состоящая из пучков над $\mathcal{C}$.

(iii) Топос Гротендика есть категория, эквивалентная категории вида $\text{Sh}(\mathcal{C})$ для малого места $\mathcal{C}$.

5.2. З а м е ч а н и е. (i) Эти понятия позволяют нам придать смысл той интуитивной идее, что некоторые понятия, например «действительные непрерывные функции с открытой областью», носят локальный характер. В этом примере мы отождествляем это понятие с функтором $C_R: \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow (\text{Sets})$, который каждому открытому множеству $U \in \text{Open}(X)$ ставит в соответствие его «расширение» $C_R(U) = \{f: U \rightarrow R \mid f \text{ непрерывна}\}$. Упорядоченная категория $\text{Open}(X)$ может рассматриваться как место, определяя локализации U как открытые покрытия U .

Локальный характер понятия, о котором идет речь, заключается в точности в утверждениях (а) и (б).

(ii) Структура места и соответствующее понятие пучка могут быть определены на категории $\mathcal{C}$, даже если $\mathcal{C}$ не обладает конечными обратными пределами. Это определение технически более сложно. Примеры этого типа встречаются в теории моделей (см. 5.3 (ii)).

(iii) Одной из основных теорем в теории топосов является теорема Жиро (Гротендик [1], Exposé 4), характеризующая топос как ∞ -предтопос с множеством образующих (где ∞ -предтопос есть категория с конечными обратными пределами, с «хорошими» бесконечными копроизведениями и частными по отношениям эквивалентности). В частности, всякий топос имеет каноническую структуру места, задаваемую тем, что $(A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ есть локализация, если и только если единственное отображение

$$\prod_{i \in I} A_i \rightarrow A$$

эпиморфно. («Быть хорошим» — это как раз то условие, что семейства этого типа суть локализации.) Иногда это называется локализацией произвольного покрытия.

5.3. П р и м е р. (i) Пусть B — полная булева алгебра, рассматриваемая как категория. Мы определяем каноническую локализацию следующим образом: $(a_i)_{i \in I}$ покрывает a , если и только если $a = \bigvee_{i \in I} a_i$.

Тогда $\text{Sh}(B)$ эквивалентна категории булевозначных множеств и булевозначных отображений универсума $V^{(B)}$ Скотта — Соловея.

Этот пример открывает путь для теоретико-категорного подхода к результатам независимости в теории множеств: см. Хиггс [1], Тьерне [1], Буало [2] и Бунге [1].

(ii) Пусть C — малая категория. На ней имеется так называемая $\sqcap$ -локализация, которую можно описать следующим

образом: семейство $\{C_i \rightarrow C \mid i \in I\}$ есть $\prod$ -локализация, если для каждого $B \rightarrow C$ имеется $A \rightarrow B$ такое, что для некоторого $i \in I$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C_i & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

Эта $\prod$ -локализация будет использована ниже.

(iii) Пусть R — логическая категория. Мы вводим структуру места на R , локализацию конечного покрытия, определяя для конечного I

$(A_i \rightarrow A)_{i \in I} \in \text{Loc}(A)$, если и только если $A = \bigvee_{i \in I} \text{Image}(f_i)$.

Условия устойчивости на R гарантируют, что это есть локализация.

5.4. Определение. (i) Функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ между двумя местами есть морфизм мест, если он сохраняет конечные обратные пределы и переводит локализации $\mathcal{C}$ в локализации $\mathcal{D}$. Пусть $\text{Cont}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ — полная подкатегория категории функторов $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, состоящей из морфизмов мест.

(ii) Геометрический морфизм $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ между топосами есть пара (p^*, p_*) , где $p^*: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ есть точный слева функтор, имеющий p_* в качестве правого сопряженного (следовательно, p^* есть морфизм мест для канонических структур мест на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$).

З а м е ч а н и е. Значимость когерентной логики заключается в том, что ее логические операции (т. е. $\exists$, $\vee$, $\wedge$, $\uparrow$, $\downarrow$) сохраняются функтором p^* для геометрического морфизма p . См. также 6.13.

5.5. Форсинг: семантика Крипке—Жуаяля. Из этих примеров должно быть ясно, что топосы имеют определенное отношение к форсингу и генерическим структурам. А. Жуаяль установил, что различные понятия форсинга (Коэна, Робинсона, Крипке) суть специальные случаи форсинга с местом условий. Даже для мест Ореп X (пример 5.2 (i)) обычные определения терпят неудачу. Например, в семантике Крипке справедливость дизъюнкции или экзистенциальной формулы на «данной стадии» или в «данный момент» α определяется «сразу», т. е. без ссылки на дальнейшие «стадии» (или «моменты»). С другой стороны, в топологии существование сечений (над всем пространством) для пучков редко сравнимо с локальным существованием, т. е. с существованием сечений над покрытиями. Это значит, что должны приниматься во внимание дальнейшие «стадии».

5.6. Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — место, F — пучок на $a \in F(X)$. $X \Vdash \exists x \varphi[x, a]$, если и только если имеются локализация $(f_i: X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ для X и семейство $(b_i)_{i \in I}$ такие, что для каждого $i \in I$ $b_i \in F(X_i)$ и $X_i \Vdash \varphi[b_i, F(f_i)(a)]$.

5.7. З а м е ч а н и е. (i) Аналогичный пункт следует использовать при определении $X \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. С другой стороны, $\wedge$ определяется «сразу», а $\Rightarrow$, $\forall$ рассматриваются в обычной манере Крипке, например $X \Vdash (\varphi \Rightarrow \psi)(a)$, если и только если для каждого $f: Y \rightarrow X$

$$Y \Vdash \varphi[F(f)(a)] \text{ влечет } Y \Vdash \psi[F(f)(a)];$$

отрицание есть $\Rightarrow \downarrow$, и $\downarrow$ описывается посредством объектов Y , для которых $\emptyset \in \text{Cov}(Y)$.

(ii) Можно убедиться, что обычные понятия форсинга являются специализациями этого понятия. Например, предположим, что $\mathcal{A} \models^* (\varphi \vee \psi)[a]$ в смысле Робинсона [1], т. е. пусть

$$\forall \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \in \text{Mod}(\mathbf{T}) \exists \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{L} \in \text{Mod}(\mathbf{T})$$

так, что $\mathcal{L} \models^* \varphi[gfa]$ или $\mathcal{L} \models^* \psi[gfa]$. Мы можем предполагать, что $g = \Phi(f)$. Тогда семейство

$$(\mathcal{A} \xrightarrow{\Phi(f) \circ f} \mathcal{L})_f$$

есть «колокализация» для $\prod$. Кроме того, для каждого $\mathcal{L}$ имеем $\mathcal{L} \models^* \varphi[\Phi(f)fa]$ или $\mathcal{L} \models^* \psi[\Phi(f)fa]$. Теперь мы используем индукцию. (Этот пример взят из неопубликованной работы Жуаяля и Рейеса.)

(iii) В частном случае, когда место есть топос $\mathcal{C}$ (с канонической локализацией), мы располагаем способом интерпретации языков (даже инфинитарных). В частности, мы можем определить понятие $\mathbf{T}$ -модели в $\mathcal{C}$ для любой теории $\mathbf{T}$ (скажем, в языке $L_{\infty\omega}$), а также и понятие категории $\mathbf{T}$ -моделей в $\mathcal{C}$. В случае $\mathcal{C} = (\text{Sets})$ это равнозначно следующему: ее объекты суть теоретико-множественные модели и ее морфизмы — «алгебраические», т. е. функции $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, сохраняющие символы основных отношений и операций в том смысле, что

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{B}}$$

(с соответствующим условием для символов операций).

Семантику в терминах экстенционалов см. в 6.8.

5.8. У т в е р ж д е н и е (существование классифицирующего топоса; Рейес [1] совместно с Жуаялем). Для каждой финитарно когерентной теории $\mathbf{T}$ имеется топос $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ и $\mathbf{T}$ -модель M в $\mathcal{C}[\mathbf{T}]$, являющаяся генерической в том смысле, что категория

$\mathcal{T}$ -моделей $\mathcal{D}$ эквивалентна (через M) категории геометрических морфизмов $\mathcal{D}$ в $\mathcal{E}[\mathcal{T}]$ для каждого топоса $\mathcal{D}$.

Доказательство (набросок). Пусть R — логическая категория, ассоциированная с $\mathcal{T}$ (пример 4.4). Тогда $\mathcal{E}[\mathcal{T}]$ есть категория пучков для R с топологией конечных покрытий (пример 5.3 (iii)). $\square$

5.9. Замечание. (i) Самый ранний пример существования классифицирующего топоса привела Хаким [1], которая доказала, что топос Зариского является классифицирующим топосом для теории локальных колец.

(ii) Эта теорема остается верной и для произвольной (т. е. инфинитарно) когерентной теории. Более того, любой топос является классифицирующим топосом подходящей теории (см. Маккаи и Рейес [1]).

§ 6. Элементарные топосы

Слово «элементарный» в данном контексте указывает на то, что понятие элементарного топоса является элементарным понятием — понятием категории с немногими свойствами, выраженными в терминах логики первого порядка в языке теории категорий. Оно даже является «по существу алгебраическим» понятием (Фрейд [2]).

Поиск такого понятия, как понятия для оснований математики, был начат в работе Ловера [3]; но более общее понятие, сравнимое с понятием топоса Гротендика и в то же время раскрывающее их логическую (даже логическую высшего порядка) природу, было найдено в 1969 г. Ловером и Тьерне; см. Ловер [7]. С возможными теперь упрощениями (Кок и Миккельсен [1]) это очень простое и сильное понятие можно описать следующим образом.

6.1. Определение. Элементарный топос $\mathcal{E}$ есть категория с конечными обратными пределами и объектом Ω , который:

- (i) классифицирует подобъекты,
- (ii) является возводимым в степень.

6.2. Замечание. Здесь (i) означает, что имеется универсальный подобъект истина: $1 \rightarrow \Omega$ такой, что всякий подобъект $A' \rightarrow A$ любого объекта A появляется как оттягивание

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & \Omega \\ \uparrow & & \uparrow \text{истина} \\ A' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

для единственного α («характеристической функции A' »), и (ii) означает, что для всякого A имеется объект Ω^A («степень-объект

A ») и отображение $\in_A: A \times \Omega^A \rightarrow \Omega$, устанавливающее для каждого B одно-однозначное соответствие

$$\frac{A \times B \xrightarrow{\hat{B}} \Omega}{B \xrightarrow{\hat{B}} \Omega^A} \quad (6.1)$$

следующим образом: с $\hat{B}$ мы ассоциируем

$$A \times B \xrightarrow{1 \times \hat{B}} A \times \Omega^A \xrightarrow{\in_A} \Omega.$$

6.3. Пример. Модель, которую следует иметь в виду, есть категория множеств с любым двухэлементным множеством Ω , скажем, множеством, состоящим из двух символов «истина» и «ложь»; тогда Ω^A может быть отождествлен со множеством-степенью для A (поскольку подмножество $A' \subseteq A$ может быть полностью описано своей характеристической функцией $\alpha: A \rightarrow \Omega$, задаваемой условиями

$$\alpha(a) = \begin{cases} \text{истина, если } a \in A; \\ \text{ложь, если } a \notin A. \end{cases}$$

Важно, во-первых, что каждый топос Гротендика есть также модель этих аксиом, во-вторых, что по существу вся («интуитивно-нистски верная») наивная теория множеств высшего порядка следует из простых аксиом определения 6.1. Начиная с 1969 г. и до настоящего времени огромное количество работ продемонстрировало, каким образом различные понятия и конструкции наивной теории множеств высшего порядка могут основываться и выполняться в элементарно-топосной постановке. Вместо того чтобы пытаться обзреть их все, мы приведем несколько подробных примеров построений.

6.4. Пример. Ясно, что Ω^A контравариантно зависит от A , $f: A \rightarrow B$ поднимается до $\Omega^f: \Omega^B \rightarrow \Omega^A$ (что в (Sets) соответствует закону, по которому подмножество B' множества B ставится в соответствие $f^{-1}(B') \subseteq A$). К тому же Ω^A канонически несет структуру упорядоченного объекта (в случае множеств: порядок по включению на множестве подмножеств множества A). Эта структура есть подобъект $\leq_A$:

$$\leq_A \rightarrow \Omega^A \times \Omega^A.$$

Он имеет характеристическую функцию

$$\text{ch}(\leq_A): \Omega^A \times \Omega^A \rightarrow \Omega,$$

соответствующую, согласно экспоненциальной сопряженности 6.1, отображению

$$\Omega^A \xrightarrow{\text{seg}} \Omega^{\Omega^A},$$

которое в случае (Sets) ставит в соответствие подмножеству $A' \subseteq A$ семейство всех подмножеств $A'' \subseteq A$ с $A'' \subseteq A'$ («нижний сегмент A' »). Теперь правый сопряженный $\forall_f$ к $\Omega^f: \Omega^A \rightarrow \Omega^B$ (для $f: A \rightarrow B$) может быть описан как композиция

$$\Omega^A \xrightarrow{\downarrow \text{seg}} \Omega^A \xrightarrow{\Omega^f} \Omega^{B \times \{\cdot\}} \rightarrow \Omega^B,$$

где $\{\cdot\}: B \rightarrow \Omega^B$ соответствует при экспоненциальной сопряженности характеристическому отображению $B \times B \rightarrow \Omega$ диагонали $B \rightarrow B \times B$. В случае (Sets) читатель найдет, что эта композиция следующим образом действует на $A' \subseteq A$:

$$\begin{aligned} A' &\mapsto \{A'' \subseteq A \mid A'' \subseteq A'\} \mapsto \{B' \subseteq B \mid f^{-1}(B') \subseteq A'\} \\ &\mapsto \{b \in B \mid f^{-1}(\{b\}) \subseteq A'\} \\ &= \{b \in B \mid \forall a \in A: f(a) = b \Rightarrow a \in A'\}, \end{aligned}$$

что мы обозначаем $\forall_f(A')$. Теперь легко теоретико-множественными рассуждениями убедиться, что у нас действительно есть правый сопряженный для образования обратного образа, т. е. мы имеем

$$f^{-1}(B') \subseteq A', \text{ если и только если } B' \subseteq \forall_f(A').$$

Используя эту «внутреннюю универсальную квантификацию», можно получить конструкцию — «пересечение»

$$\Omega^A \xrightarrow{\cap} \Omega^A,$$

которая в (Sets) ставит в соответствие $\mathcal{F} \subseteq \Omega^A$ множество $\cap \mathcal{F} \subseteq A$ (пересечение всех $A' \in \mathcal{F}$). Мы опускаем это. Используя этот «комбинатор пересечений», можно получить *левый* сопряженный $\exists_f$ («образование прямого образа по f ») как композицию

$$\Omega^A \xrightarrow{\uparrow \text{seg}} \Omega^A \xrightarrow{\Omega^f} \Omega^{B \times \{\cdot\}} \xrightarrow{\cap} \Omega^B$$

($\uparrow$ -сегмент определен дуально $\downarrow$ -сегменту). В (Sets) это отображение переводит $A' \subseteq A$ в пересечение всех $B' \subseteq B$ с $f^{-1}(B') \subseteq A'$, что, очевидно, есть именно $f(A')$. (Данные описания принадлежат Миккельсену [1]; это иллюстрирует, как можно вывести понятия типа копределов, подобно понятию образования образа $\exists_f$, на основе этих аксиом. Более подробно об основах теории см. Кок и Рейт [1], Кок и Миккельсен [1], Маклейн [1] или Рейт [2].)

Теперь мы опишем, каким образом некоторые более сложные понятия наивной теории множеств высшего порядка получают

очень простые формулировки в элементарно-топосной постановке. Заметим, что бинарное отношение на объекте A ,

$$R \rightarrow A \times A,$$

приводит к характеристической функции $A \times A \rightarrow \Omega$ и затем (с использованием экспоненциальной сопряженности) к отображению $r: A \rightarrow \Omega^A$ («нижний сегмент для R »), и обратно; вследствие этого мы называем отображение $r: A \rightarrow \Omega^A$ также бинарным отношением на A .

6.5. Определение (Осиус [2]). Отношение $r: A \rightarrow \Omega^A$ называется *рекурсивным* (или *сильно*) *фундированным*, если для каждого B и $g: \Omega^B \rightarrow B$ имеется *единственное* $f: A \rightarrow B$, делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Omega^A & \xrightarrow{\exists_f} & \Omega^B \\ r \uparrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (6.2)$$

коммутативной; r называется (*слабо*) *фундированным*, если для каждого $g: \Omega^B \rightarrow B$ имеется *не более одного* f , делающего (6.2) коммутативной.

6.6. Теорема (Миккельсен; см. Осиус [3]). *Понятия сильно и слабо фундированного отношения совпадают в любом элементарном топосе.*

Доказательство. Весьма трудное доказательство заключается, конечно, в построении f , делающего (6.2) коммутативной. Теорема 6.6, следовательно, утверждает, что принцип построения отображения трансфинитной рекурсией по (внутренне) фундированным отношениям справедлив в любом элементарном топосе. $\square$

6.7. Замечание. Тот факт, что принцип рекурсии справедлив в каждом топосе, может быть интерпретирован в терминах теории доказательств: он интуиционистски доказуем. В самом деле, Фурман, Кост [2], Буало [2] (в сотрудничестве с Жуаялем) предложили формальные системы для теории высшего порядка интуиционистского типа, являющиеся адекватными и полными относительно элементарных топосов. Таким образом, элементарные топосы могут рассматриваться как категорный вариант интуиционистской логики высшего порядка. Отдельные результаты могут быть интерпретированы и доказаны в данном контексте. Подробно это рассматривается в главе 6 «Теории доказательств и конструктивной математики».

Что касается интуиционистской логики первого порядка в топосе, то формальные системы, вновь адекватные и полные относительно топосов, были предложены Бенабу, Буало, Костом,

Дионом, Жуаялем, Маккаи, Улле, Рейесом, Робитай-Жигером (см. Кост [1], Улле [1] для системы генценовского типа и Робитай-Жигер [1] для системы гильбертовского типа).

6.8. Экстенциональная семантика. Хорошие свойства точности и декартова замкнутости, которые можно доказать для любого элементарного топоса, могут быть применены для доказательства того, что любые формулы логики первого порядка (когерентные или нет), сигнатурные предикаты которых уже интерпретированы «экстенционалами», сами имеют «экстенционалы». Понятие *экстенционала* формулы можно определить как универсальный элемент (в смысле семантики Крипке — Жуаяля), удовлетворяющий этой формуле. (Мы мыслим $\mathcal{E}$ как место с топологией конечных покрытий.) Систематическое описание этого метода образования экстенционалов формул и доказательства отношений включения между ними дано Митчелом [1], Бенабу (Кост [1], [2]) и Осиусом [1]. Связь с семантикой Крипке — Жуаяля анализируется у Осиуса [4].

6.9. Пример. Пусть R — объект кольца в элементарном топосе. Образует $GL(1, R) \subseteq R$ как экстенционал формулы « x обратим» (или, формально, « $\exists y (x \cdot y = 1)$ »). Кроме того, для всякого натурального числа n можно образовать экстенционал

$$[[\bigwedge ((x_1 = 0) \wedge \dots \wedge (x_n = 0))]] \in R^n, \quad (6.3)$$

так же, как и экстенционал

$$[[(x_1 \text{ обратим}) \vee \dots \vee (x_n \text{ обратим})]] \in R^n. \quad (6.4)$$

6.10. Определение. Мы говорим, что R — объект *поля*, если для каждого n объекты, описанные в (6.3) и в (6.4), совпадают (т. е. если R удовлетворяет высказыванию: «если n элементов не равны одновременно нулю, то один из них обратим, и обратно»). (Это некогерентное понятие.)

6.11. Пример (синтетическая геометрия, Кок [1]). Используя технику экстенционалов и другие свойства точности элементарного топоса $\mathcal{E}$ с объектом поля R , можно, следуя тому, что делают в случае (Sets), построить некоторые из интересных объектов алгебраической геометрии, подобных грассманианам. Мы проиллюстрируем это построением проективного $(n-1)$ -пространства $P^{n-1}(R)$. Оно есть просто (6.3) (или (6.4)) по модулю отношения эквивалентности, индуцированного на этом объекте очевидным действием $GL(1, R)$:

$$P^{n-1}(R) = \left[\left[\bigvee_{i=1}^n x_i \text{ обратим} \right] \right] / GL(1, R).$$

Кроме того, можно выделить из объекта-степени для $P^{n-1}(R)$ объект $(n-2)$ -плоскостей в $P^{n-1}(R)$, но для вычисления более

приемлемо построить этот объект с помощью линейной и полилинейной алгебры. Например, в случае $P^2(R)$ можно было бы определить объект L («прямых в $P^2(R)$ ») чисто алгебраически. Кроме того, используя определители третьего порядка, можно затем образовать экстенционал понятия «инцидентности», т. е.

$$[[\text{прямая } l \text{ проходит через точку } Q]] \in L \times P^2(R).$$

Теперь имеем модель определенной двухсортной структуры в логике первого порядка с сортами «прямые» и «точки» и одним отношением «инцидентность», и можно задать вопрос, какие предложения в этом языке выполняются для построенной таким образом структуры, в частности, удовлетворяет ли она аксиомам понятия проективной плоскости? Ответ: удовлетворяет при условии, что выбраны подходящие аксиомы из неэквивалентных интуиционистских форм аксиом для «проективной плоскости». Подробнее см. Кок [1]. С соответствующими модификациями — такими, как: говорить «обратимый» вместо «ненулевой» везде, где это возможно, — все развитие может быть доведено до конца для локального объекта кольца вместо объекта поля. Представляет интерес, когда это выполняется для *генерического* локального объекта кольца A в классифицирующем топосе $\mathcal{Z}$ для локальных колец (топос Зариского).

Оказывается (Кок [1]), что это генерическое локальное кольцо в действительности является объектом *поля* в объясненном выше смысле, так что построение $P^2(A)$ и других грассманианов может выполняться с использованием не только техники экстенционалов, но также и того предположения, что A есть поле. Это $P^2(A)$, которое как объект из $\mathcal{Z}$ есть функтор из конечно представимых коммутативных колец в множества, совпадает с таким явно описанным функтором, который в работе Демазюра и Габриеля [1] удостоен этого имени. Теория экстенционалов позволяет нам получать геометрические объекты «логическими средствами» без необходимости строить функторы и контролировать условия для пучков; это позволяет поднимать вопросы *синтетической* геометрии.

6.12. Замечание. С использованием объекта $D \subseteq A$, экстенционала $[[x^2 = 0]]$ в качестве «инфинитезимального объекта» и того, что $\mathcal{Z}$ есть элементарный топос (и, следовательно, обладает возведением в степень), по-видимому, открывается возможность иметь синтетическую дифференциальную геометрию в $\mathcal{Z}$ и в родственных топосах.

6.13. Арифметический универсум. Полной аксиоматизации этого понятия (принадлежащего Жуаялю), по-видимому, не существует, но хотелось бы аксиоматизировать следующее: всю структуру существенно алгебраической природы (Фрейд [1]).

которой обладает любой элементарный топос с объектом — натуральными числами и которая сохраняется функторами f^* обратных образов. Таким образом, арифметический универсум — это по крайней мере предтопос с объектом N — натуральными числами (поскольку f^* есть морфизм предтопоса, сохраняющий N), но так как элементарный топос с объектом — натуральными числами имеет, а f^* сохраняет образование свободных моноидов, свободных категорий на графе образующих, образование произведения $\otimes$ объектов — абелевых групп, ..., то все это может быть включено в хорошую аксиоматику для арифметического универсума в случае, когда это еще не вытекает из существования объекта — натуральных чисел в предтопосе (для большинства этих свойств это не так). Жуаяль предложил в качестве аксиоматизации предтопосы, в которых существуют свободные категории на графах. Морфизм арифметического универсума есть функтор, сохраняющий структуру предтопоса и дополнительную структуру (скажем, свободные категории на графах). Если включить в структуру образование произведения $\otimes$ абелевых групп, то можно описать понятие объекта — алгебры Хопфа (объект кольца A с отображением $A \rightarrow A \otimes A$, удовлетворяющим определенным равенствам) посредством функторной семантики применительно к арифметическому универсуму. Можно доказать, что существует классифицирующий топос для понятия алгебры Хопфа.

§ 7. Топосы и аксиоматическая теория множеств

Всякая модель m теории множеств (скажем, ZF) определяет элементарный топос — категорию m -множеств $\mathcal{E}(m)$, объектами которой служат элементы («множества») m , — и возникающие таким образом топосы весьма специальны (для разнообразия можно иметь в виду, скажем, топосы Гротендика). Возникает вопрос, можно ли охарактеризовать топосы вида $\mathcal{E}(m)$ в элементарных терминах (неэлементарная характеристика была дана в работе Ловера [2]).

Кроме того, это может рассматриваться как вопрос об относительной интерпретации подходящего расширения теории элементарного топоса, выразимой в логике первого порядка в системе ZF, и обратно.

Вопрос о характеристизации (или взаимной относительной интерпретации) был решен в 1971 г. Коулом [1], Митчелом [1] и Осиусом [2]. Основное — это построение моделей теории множеств по данному элементарному топосу, имеющему подходящие свойства. Какие же свойства подходят?

Во-первых, очевидны следующие предложения.

7.1. Предложение. *Всякий топос вида $\mathcal{E}(m)$ обладает тем свойством, что терминальный объект 1 является образующей, и он не тривиален: 0 не изоморфен 1.*

То, что 1 является образующей, означает: если f, g — два различных отображения $X \rightarrow Y$ в $\mathcal{E}(m)$, то имеется отображение $x: 1 \rightarrow X$ такое, что $f \circ x \neq g \circ x$, и это очевидно, поскольку отображение $x: 1 \rightarrow X$ соответствует элементу $x \in X$, когда X рассматривается как «множество» в m .

Очевидно, что чем больше свойств предполагается в элементарном топосе $\mathcal{E}$, тем более сильную модель теории множеств можно в нем построить. Основная идея построения заключается в том, чтобы начать с элементарного топоса с очень немногими дополнительными свойствами и получить модель слабой теории множеств. Мы зададим формулу Осиуса (Осиус [2]), которая ввиду 7.1 является «минимальной». Получаемая здесь теория множеств ZO лежит между теориями Цермело — Тиле и Цермело — Френкеля (ZF), см. Осиус [2].

7.2. Теорема. *Дан нетривиальный элементарный топос $\mathcal{E}$, в котором 1 — образующая. Тогда можно построить модель теории множеств ZO.*

Прежде чем привести (набросок) доказательства, мы мотивируем его и приведем относящееся к делу определение. Главным является категорная характеристика транзитивных множеств. Если $A \in m$, то говорят, что A транзитивно, если $a \in A \Rightarrow a \subseteq A$. Обозначив ограничение $\in$ -отношения на A через R и переинтерпретировав R как отображение $r: A \rightarrow \Omega^A$ в $\mathcal{E}(m)$, мы находим, что r фундировано (в смысле, объясненном в § 6) и является мономорфизмом, так как $\in$ — фундированный экстенционал в теории множеств Цермело — Тиле.

Более того, мы даже можем получить обратное утверждение (для ZF-модели m).

7.3. Теорема (Мостовский; см. Осиус [2]). *Для того чтобы отношение $r: A \rightarrow \Omega^A$ на $A \in \mathcal{E}(m)$ было изоморфным $\in$ -отношению на транзитивном множестве, необходимо и достаточно, чтобы r было фундированным (определение 6.5) и мономорфным как отображение.*

7.4. Теорема (Осиус [2]). *Для того чтобы отображение $f: A_1 \rightarrow A_2$ между двумя транзитивными множествами в m было вложением $A_1 \subseteq A_2$, необходимо и достаточно, чтобы диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\quad} & A_2 \\ r_1 \downarrow & & \downarrow r_2 \\ \Omega^{A_1} & \xrightarrow{\quad \exists_f \quad} & \Omega^{A_2} \end{array} \quad (7.1)$$

была коммутативной, где r_1 и r_2 суть $\in$ -отношения на A_1 и A_2 .

Так мы получили структурную характеристику транзитивных множеств и тех отображений между ними, которые являются вложениями.

7.5. Доказательство теоремы 7.2 (набросок). Мы начинаем с принятия заключений теорем 7.3 и 7.4 в качестве определений. Пусть $\mathcal{E}$ — нетривиальный элементарный топос, где 1 — образующая.

7.6. Определение. Объект $A \in \mathcal{E}$ с отношением $r: A \rightarrow \Omega^A$ называется *объектом транзитивных множеств*, если r монотонно и рекурсивно (определение 6.5). Отображение $f: A_1 \rightarrow A_2$ между двумя объектами транзитивных множеств (A_1, r_1) и (A_2, r_2) называется *вложением*, если (7.1) коммутативна.

Далее нужно доказать, что категория объектов транзитивных множеств в $\mathcal{E}$ с вложениями в качестве отображений эквивалентна (как категория) *решетке* (за исключением того, что максимальный элемент отсутствует).

Теперь модель $m(\mathcal{E})$ для ЗО можно построить следующим образом: элементы в $m(\mathcal{E})$ суть классы эквивалентности пар $((A, r), M)$, где (A, r) есть объект транзитивных множеств, а $M: A \rightarrow \Omega$ — отображение (эвристически: это M является характеристическим отображением) подмножества M' транзитивного множества A). Отношение эквивалентности задается с помощью решеточной структуры.

Для описания отношения принадлежности используется семейство отображений

$$\{\Omega^A \times A \xrightarrow{\varepsilon_A} \Omega \mid A \in \mathcal{E}\},$$

заданное структурой топоса на $\mathcal{E}$.

Более подробное сравнение определенных (более сильных) систем теории множеств и некоторых дальнейших усилений понятия элементарного топоса приводятся в работах Осиуса [2], Коула [1] и Митчела [1].

§ 8. Другие области исследования в категорной логике

Мы не пытались быть исчерпывающими. Нам бы хотелось включить также комментарий к темам:

8.1. Модельная полнота в терминах категорий пучков (Макинтайр [1]).

8.2. Логические методы, применяемые к категориям пучков на топологических пространствах, и объекты вещественных чисел в элементарных топосах (Малви [1], Скотт [1], Стаут, Тьерне).

8.3. Теоретико-топосная интерпретация методов нестандартного анализа (Кок и Миккельсен [1], Рейес [1], Такажаси [1]).

8.4. Теоретико-топосные методы в доказательствах независимости в теории множеств (Тьерне [1], Бунге [1]), хотя это противоречит тенденции, разрешающей понятию «топоса» главенствовать над понятием «модели теории множеств».

8.5. Элементарные топосы с объектом — натуральными числами, и как может быть образована внутренняя теория классифицирующего топоса (Дьяконеску, Тьерне, Жуаяль, Джонстоун, Лезафр, Декингер, Рейт [2], где можно найти ссылки).

8.6. Комбинаторная логика и теория доказательств в форме декартова замкнутых категорий (Ламбек, Сабо [1], Скотт [2]).

ЛИТЕРАТУРА

Антониус (Antonius W.)

1. Théories cohérents et pretopos: Thèse. — Montréal: Université de Montréal, 1975.

Барр (Barr M.)

1. Toposes without points. — J. Pure Appl. Algebra, 1974, 5, p. 265—280.

Бастини и Эресман (Bastiani A., Ehresmann C.)

1. Categories of sketched structures. — Cahiers Topologie Géom. Différentielle, 1972, 13, p. 105—214.

Бенабу (Benabou J.)

1. Catégories et logiques faibles: Tagungsbericht. — Oberwolfach, 1973.

Буало (Boileau A.)

1. Les multiples splendours de forcing: Thèse de Maîtrise. — Montréal: Université de Montréal, 1974.

2. Types versus topos. — Montréal: Université de Montréal, 1975.

Бунге (Bunge M.)

1. Topos theory and Souslin's hypothesis. — J. Pure Appl. Algebra, 1974, 4, p. 159—188.

Габриель и Ульмер (Gabriel P., Ulmer F.)

1. Lokal Präsentierbare Kategorien. — Berlin: Springer, 1971.

Гротендик и др. (Grothendieck A. et al., editors)

1. Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schemas. — Tome 1. — Berlin: Springer, 1963. Tome 2. — Berlin: Springer, 1972.

Демазюр и Габриель (Demazure M., Gabriel P.)

1. Groupes Algébriques, I. — Amsterdam: North-Holland, 1970.

Дионн (Dionne J.)

1. Des théories élémentaires aux catégories conceptuelles, et Addendum: Thèse. — Montréal: Université de Montréal, 1973.

Жуаяль (Joyal A.)

1. Polyadic spaces and elementary theories. — Notices Amer. Math. Soc., 1971, 18, № 3, p. 967.

2. Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarque sur l'algèbre constructive. — Cahiers Topologie Géom. Différentielle, 1975, 16, p. 256—258.

Кин (Keane O.)

1. Abstract Horn theories. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. — Berlin: Springer, 1975, p. 15—50.

Кок (Kock A.)

1. Linear algebra and projective geometry in the Zariski topos. — Aarhus Preprint Series, 1974, № 4.

Кок и Миккельсен (Kock A., Mikkelsen C. J.)

1. Topos theoretic factorization of non-standard extensions. — In: Victoria Symposium on Nonstandard Analysis 1972. Berlin: Springer, 1974, p. 122—143.

- Кок и Рейт (Kock A., Wraith G. C.)
1. Elementary Toposes. — Aarhus Lectures Notes Series, 1971, № 30.
- Кон (Cohn P. M.)
1. Universal Algebra. — N. Y.: Harper & Row, 1965. [Русский перевод: Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.]
- Кост (Coste M.)
1. Logique du 1^{er} ordre dans les topos élémentaires. — Paris: Seminaire Benabou, 1973.
2. Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires. — Paris: Seminaire Benabou, 1974.
- Коул (Cole J.)
1. Categories of sets and models of set theory. — In: Proceedings of the Bertrand Russell Memorial Logic Conference. Uldum (Denmark), 1971.
- Лазар (Lazard M.)
1. Lois de groupes et analyseurs. — Ann. École Norm. Super., 1955, 72, № 3, p. 299—400.
- Лавер (Lawvere F. V.)
1. Functorial semantics of algebraic theories. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 50, p. 869—872.
2. An elementary theory of the category of sets. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1964, 52, p. 329—334.
3. Algebraic theories, algebraic categories, and algebraic functors. — In: The Theory of Models. Amsterdam: North-Holland, 1965.
4. Functorial semantics of elementary theories. — In: Logic Colloquium. Leicester, 1965.
5. Adjointness in foundations. — Dialectica, 1969, 23, p. 281—296.
6. Equality in hyperdoctrines and comprehensive schema as an adjoint functor. — Proc. Amer. Math. Soc., 1970, p. 1—14.
7. Introduction. — In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic (Halifax, 1971)/Ed. F. W. Lawvere. Berlin: Springer, 1972.
8. Introduction to Part I. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer 1975, p. 3—14.
9. Continuously variable sets; algebraic geometry = geometric logic. — In: Logic Colloquium'73/Ed. H. E. Rose and J. C. Shepherdson. Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 135—156.
- Макинтайр (Macintyre A.)
1. Model completeness for sheaves of structures. — Fundam. math., 1973, 81, p. 73—89.
- Маккаи и Рейес (Makkai M., Reyes G. E.)
1. Model theoretic methods in the theory of topoi and related categories. — Bull. Acad. Polon. Sci., 1976, 24, p. 379—392.
- Маклейн (MacLane S.)
1. Sets, topoi and internal logic in categories. — In: Logic Colloquium'73/Ed. H. E. Rose, J. C. Shepherdson. Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 119—134.
- Малви (Mulvey C.)
1. Intuitionistic algebra and representations of rings. — Mem. Amer. Math. Soc., 1974, 148, p. 3—57.
- Миккельсен (Mikkelsen C. J.)
1. Lattice theoretic and logical aspects of elementary topoi: Thesis. — Aarhus Various Publications Series, 1976, № 25.
- Митчел (Mitchell W.)
1. Boolean topoi and the theory of sets. — J. Pure Appl. Algebra, 1972, 2, p. 261—274.
- Осиус (Osirus G.)
1. The internal and external aspect of logic and set theory in elementary topoi. — Cahiers Topologie Géom. Différentielle, 1973, 14, p. 47—49.

2. Categorical set theory: A characterization of the category of sets. — J. Pure Appl. Algebra, 1974, 4, p. 79—119.
3. Logical and set theoretical tools in elementary topoi. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer, 1975, p. 297—346.
4. A note on Kripke-Joyal semantics for the internal language of topoi. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer, 1975, p. 349—354.
- Рейес (Reyes G.)
1. From sheaves to logic. — In: M. A. A. Studies in Mathematics, v. 9/Ed. A. Daigneault. N. Y.: Math. Assoc. Amer., 1974, p. 143—204.
- Рейт (Wraith G. C.)
1. Algebraic Theories. — Aarhus Lecture Notes Series, 1969, № 22.
2. Lectures on elementary topoi. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer, 1975, p. 51—86.
- Робинсон (Robinson A.)
1. Infinite forcing in model theory. — In: Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium/Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971, p. 317—340.
- Робитай-Жигер (Robitaille-Giguere M.)
1. Modèles d'une catégorie logique dans le topos de préfaisceaux et d'ensembles de Heyting: Thèse. — Montréal: Université de Montréal, 1975.
- Сабо (Szabo M. E.)
1. Algebra of Proofs. — Amsterdam: North-Holland, 1977.
- Скотт (Scott D.)
1. Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis. — In: Logic and Foundations of Mathematics. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1968.
2. Continuous lattices. — In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic (Halifax, 1971)/Ed. F. W. Lawvere. Berlin: Springer, 1972, p. 97—136.
- Такахаси (Takahashi S.)
1. Géométrie Diophantienne. — Montréal: Presses de l'Université de Montréal, 1975.
- Тьерне (Tierney M.)
1. Sheaf theory and the continuum hypothesis. — In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic (Halifax, 1971)/Ed. F. W. Lawvere. Berlin: Springer, 1972.
- Уллет (Oullet R.)
1. Axiomatisation de la logique interne du premier ordre des topos, version inclusive et multisorte: Thèse. — Montréal: Université de Montréal, 1974.
- Фольгер (Volger H.)
1. Completeness theorem for logical categories. — In: Model Theory and Topoi/Ed. F. W. Lawvere, C. Maurer and G. C. Wraith. Berlin: Springer, 1975.
- Фрейд (Freud P.)
1. Algebra-valued functors in general and tensor products in particular. — Colloq. Math., 1966, 14, p. 89—106.
2. Aspects of topoi. — Bull. Austral. Math. Soc., 1972, 7, p. 1—76.
3. Allegories. — Montréal: Université de Montréal, 1973, preprint.
- Хаким (Hakim M.)
1. Topos Annelés and Schemas Relatifs. — Berlin: Springer, 1972.
- Хиггс (Higgs D.)
1. A category approach to boolean valued set theory. — 1976.
- Шуберт (Schubert H.)
1. Kategorien II. — Berlin: Springer, 1970.

СПЕКТР И СТРУКТУРА МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ

Е. А. Палютин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	320
§ 1. Общие понятия и результаты	322
§ 2. Несчетная категоричность	329
§ 3. Тотально трансцендентные теории	335
§ 4. Стабильные и суперстабильные теории	341
§ 5. Категоричные универсалы и хорновы классы	350
§ 6. Полные хорновы классы	361
§ 7. Конечная аксиоматизируемость категоричных теорий	367
§ 8. Спектр специальных моделей	369
§ 9. Неэлементарные языки	376
Литература	382

Введение

Одним из основных понятий теории моделей является понятие алгебраической системы. Примерами алгебраических систем (т. е. множеств вместе с определенными на них операциями и отношениями) могут служить группы, кольца, упорядоченные поля и многие другие объекты, встречающиеся почти во всех разделах математики.

Одной из главных задач каждого раздела математики, занимающегося тем или иным классом алгебраических систем, является задача классификации этих систем. Идеальное решение такой задачи — это получение классификации с помощью простых параметров (например, последовательностей ординалов), которая выделяла бы каждую алгебраическую систему заданного класса с точностью до изоморфизма. Лишь для немногих классов алгебраических систем можно сказать, что классификация доведена до конца: конечные поля, конечно порожденные абелевы группы, счетные абелевы p -группы, счетные суператомные булевы алгебры; есть надежда получить исчерпывающую классификацию для конечных простых групп. Однако почти всегда идеальная цель получения полной классификации недостижима в принципе. Одним из методологических аспектов теории моделей является получение классификации алгебраических си-

стем $\mathfrak{A}$ с точностью до элементарной эквивалентности (т. е. классификации теорий $\text{Th}(\mathfrak{A})$). Как показали Фреске [1], Тайманов [1], [2] и Эренфойхт [1], элементарная эквивалентность является естественным обобщением понятия изоморфизма. Преимуществом при поиске классификации полных теорий является наличие мощного метода: локальной теоремы А. И. Мальцева. Классификации полных теорий абелевых групп (Шмелева [1]), булевых алгебр (Тарский [1]), дистрибутивных решеток с относительными дополнениями (Ершов [1]), гензелевых полей (Акс и Кочен [1]—[3], Ершов [2], [4], [5]) и регулярно замкнутых полей (Ершов [6]) получили признание среди широкого круга математиков.

Изучение элементарных теорий классических алгебраических систем (таких, как группы, поля, кольца, решетки и др.) образуют важный раздел теории моделей — теоретико-модельную алгебру. Классификация полных теорий является одной из основных проблем также и в общей теории моделей. Одной из естественных характеристик теории T , по которой можно проводить классификацию, является структурная сложность моделей T . У нас имеется некоторое интуитивное представление о сложности алгебраической системы $\mathfrak{A}$. Однако попытки найти адекватные этому представлению характеристики сталкиваются с большими трудностями. Одной из естественных характеристик сложности системы $\mathfrak{A}$ является понятие алгоритмической сложности задания $\mathfrak{A}$. На этом пути развилась теория разрешимости и теория конструктивных моделей (см. Ершов [7]). Несмотря на важность и полезность такой характеристики сложности, она несколько «расходится» с интуитивным представлением сложности. Отметим два в некотором смысле типичных таких «расхождения».

1) Конечные системы являются очень простыми по алгоритмической сложности, что, конечно, не так с интуитивной точки зрения.

2) Алгебраическая система $\mathfrak{A}$, состоящая из единственной эквивалентности на множестве A , интуитивно довольно проста, однако алгоритмическая сложность такой системы $\mathfrak{A}$ может быть как угодно большой.

Другой подход к характеристике сложности состоит в следующем. Алгебраической системе $\mathfrak{A}$ сопоставляется булева алгебра $F(\mathfrak{A})$ ее формульных подмножеств и в качестве меры сложности $\mathfrak{A}$ берется ранг α стоуновского пространства $S(F(\mathfrak{A}))$ (т. е. длина ряда производных этого пространства). При этом, если пространство $S(F(\mathfrak{A}))$ имеет совершенное ядро, то считается, что $\mathfrak{A}$ очень сложна. На этой идее основано важное направление теории моделей — теория стабильности. Этой теории будут посвящены §§ 3 и 4. Здесь имеется безусловный прогресс,

получены весьма интересные результаты, касающиеся структуры моделей стабильных теорий. Что касается «расхождений» с интуицией, то «расхождение» 2) не имеет места, но «расхождение» 1) остается.

Изложим еще один подход к мере сложности алгебраической системы $\mathfrak{A}$. Пусть P — некоторое свойство замкнутости классов алгебраических систем (например, комбинации свойств замкнутости относительно фильтрованных произведений, элементарных подсистем, гомоморфных образов и др.). Если K — класс алгебраических систем, то через $P(K)$ обозначим наименьший класс, содержащий K и удовлетворяющий условию замкнутости P . Пусть η — некоторое отношение «близости» между алгебраическими системами (например, отношение изоморфизма или эквивалентности в некотором языке L). Мерой сложности алгебраических систем класса K может служить $\langle \eta, P \rangle$ -спектр $S_{K, \eta, P}$, который является функцией, сопоставляющей каждому кардиналу μ мощность $S_{K, \eta, P}(\mu)$ множества классов η -эквивалентности, содержащих $P(K)$ -системы мощности μ . В случае, когда η — отношение изоморфизма, $\langle \eta, P \rangle$ -спектр называется $\langle P \rangle$ -спектром, а когда P — пустое условие, $\langle P \rangle$ -спектр называется просто спектром или мощностным спектром класса K и обозначается через S_K . Многочисленные структурные теоремы, приведенные в данном обзоре и полученные для аксиоматизируемых классов с «малым» спектром, служат доказательством полезности этого подхода. Однако еще больше теорем этого направления ждут своих открывателей. В этом обзоре мы будем касаться в основном спектров и $\langle P \rangle$ -спектров для условий P , являющихся комбинациями свойств замкнутости относительно подсистем, фильтрованных произведений и гомоморфизмов.

Подавляющее большинство результатов, приведенных в обзоре, ранее опубликовано и снабжено ссылками. Результат не снабжается ссылкой в трех случаях: 1) когда он широко известен и ему трудно приписать авторство, 2) когда он является простым следствием других теорем обзора, 3) когда он является неопубликованным ранее результатом автора. Не исключены, конечно, неумышленные библиографические неточности.

§ 1. Общие понятия и результаты

Понятия и обозначения, которыми мы будем пользоваться без определения, можно найти в главах 1—4 данной книги или в книгах: Ершов и Палютин [1] и Кейслер и Чэн [1]. Вместо термина «язык» будет использоваться термин «сигнатура». Логику первого порядка часто будем называть элементарной логикой.

Мощность множества X обозначаем через $|X|$. Символом ω обозначается множество натуральных чисел и счетная мощность. Буквами κ и λ будут обозначаться бесконечные кардиналы, а буквами μ и ν — произвольные кардиналы. Через κ^+ обозначается первый кардинал $> \kappa$. Алгебраические системы будут обозначаться готическими буквами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, а их носители — соответствующими латинскими — A и B . Если Σ — некоторая сигнатура, то через $\|\Sigma\|$ будет обозначаться мощность множества символов Σ , если Σ бесконечна, и счетная мощность ω , если Σ конечна.

Под классом K алгебраических систем понимается всегда класс систем одной сигнатуры. Под теорией T , если не оговорено противное, понимается элементарная теория, имеющая бесконечные модели. Если K — класс алгебраических систем, то через K_+ и K_∞ будем обозначать соответственно класс неоднородных и класс бесконечных K -систем. Если T — некоторая теория, то через T_∞ будет обозначаться теория с множеством аксиом $T \cup \{\exists x_0 \dots x_n \bigwedge_{i < j \leq n} x_i \neq x_j \mid n \in \omega\}$. Если K — класс ал-

гебраических систем, а Ω — некоторое множество предложений сигнатуры Σ , то через $\text{Th}(K)$ и $\text{Mod}_\Sigma(\Omega)$ обозначаются соответственно элементарная теория класса K и класс систем сигнатуры Σ , являющихся моделями множества Ω . Если $K = \{\mathfrak{A}\}$, то вместо $\text{Th}(K)$ пишем $\text{Th}(\mathfrak{A})$. Класс K алгебраических систем называется аксиоматизируемым, если $K = \text{Mod}_\Sigma(\Omega)$ для некоторого множества Ω предложений сигнатуры Σ . Если K и $\mathfrak{A}$ — класс систем и система, то через $\Sigma(K)$ и $\Sigma(\mathfrak{A})$ обозначаем сигнатуру класса K и системы $\mathfrak{A}$ соответственно.

1.1. Определение. Класс K алгебраических систем называется категоричным в мощности μ (μ -категоричным), если все K -системы мощности μ изоморфны между собой. Теория T сигнатуры Σ называется категоричной в мощности μ , если класс $\text{Mod}_\Sigma(T)$ является μ -категоричным. Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ и теория T называются категоричными, если они категоричны в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma\|$ и мощности $\lambda \geq |T|$ соответственно.

Согласно данному выше определению μ -категоричный класс K может не иметь систем мощности μ . Если класс K категоричен в μ и имеет системы мощности μ , то иногда будем говорить, что K существует категоричен в μ .

Аксиоматизируемый класс K алгебраических систем называется полным (модельно полным), если полной (модельно полной) является теория $\text{Th}(K_\infty)$. Из теоремы Лёвенгейма — Скулема (4.1 главы 2) следует, что категоричный класс K является полным.

Набор (кортеж) $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ обозначаем через u , а его длину n через $l(u)$. Вместо $u \in X^n$ пишем $u \in X$. Если $a^i = \langle a_1^i, \dots, a_{n_i}^i \rangle$, $i \in I$, то через $\bigcup \{a^i \mid i \in I\}$ обозначается множество $\bigcup \{a_1^i, \dots, a_{n_i}^i \mid i \in I\}$. Буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ обозначаются ординалы. Через ${}^<\alpha X$ и ${}^<\alpha X$ обозначаются последовательности элементов X длины $< \alpha$ и α соответственно. Если $\eta \in {}^<\alpha X$, $\beta < \alpha$, $i \in X$, то $\eta \upharpoonright \beta$ означает ограничение η на β , а $\eta \wedge i$ — последовательность из ${}^{+1}X$, для которой $(\eta \wedge i) \upharpoonright \alpha = \eta$ и $\eta(\alpha) = i$. Через $\mu^{<\kappa}$ обозначается кардинал $\sum_{\nu < \kappa} \mu^\nu$. Кардинал $\beta(\kappa, \alpha)$ определяется индукцией по α : $\beta(\kappa, 0) = \kappa$; если δ — предельный ординал, то $\beta(\kappa, \delta) = \sum_{\gamma < \delta} \beta(\kappa, \gamma)$; $\beta(\kappa, \alpha + 1) = 2^{\beta(\kappa, \alpha)}$. Если f — отображение, то через $f \upharpoonright A$, $\text{dom } f$ и $\text{rang } f$ обозначаются ограничение f на A , области определения и значений f соответственно. Функции и отображения в дальнейшем не обязательно будут множествами, они могут быть собственными классами. В частности, мы будем рассматривать функции, определенные на всех кардиналах.

Под формулой в дальнейшем, если не оговорено противное, понимается формула логики первого порядка. Если T — полная теория сигнатуры Σ , то кортежем a элементов в теории T будем называть набор элементов некоторой T -модели $\mathfrak{A}$ вместе с множеством

$$\text{tr}(a, \mathfrak{A}) = \{\varphi(a) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a), \varphi(x) \text{ — формула сигнатуры } \Sigma\}.$$

При этом, если $\varphi(a) \in \text{tr}(a, \mathfrak{A})$, то пишем $T \models \varphi(a)$ и говорим, что $\varphi(a)$ истинно в T . Если a и b — два кортежа в T одинаковой длины, то пишем $a \equiv b$, если для любой формулы $\varphi(x)$ сигнатуры T , $l(x) = l(a)$, имеет место

$$T \models \varphi(a) \Leftrightarrow T \models \varphi(b).$$

Множеством X в полной теории T сигнатуры Σ называется подмножество $X \subseteq A$ носителя некоторой T -модели $\mathfrak{A}$ вместе с

$$\text{tr}(X, \mathfrak{A}) = \{\varphi(b) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(b), b \in X, \varphi(x) \text{ — формула сигнатуры } \Sigma\}.$$

Если $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры Σ , T — полная теория сигнатуры Σ и a — кортеж элементов в T длины $l(y)$, то $\varphi(x, a)$ будем называть *формулой в теории T* .

Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, $\theta(x, y)$ — формула или терм сигнатуры $\Sigma(\mathfrak{A})$ и $a \in A$, то через $\theta(\mathfrak{A}, a)$ обозначаем соответственно множество $\{b \mid \mathfrak{A} \models \theta(b, a)\}$ или $\{c \mid \mathfrak{A} \models \theta(b, a) = c \text{ для некоторого } b \in A\}$. Множество $X \subseteq A$ называется *относительно формульным* в $\mathfrak{A}$, если $X = \varphi(\mathfrak{A}, a)$ для некоторой фор-

мулы φ и $a \in A$. Через $F(\mathfrak{A})$ обозначается булева алгебра относительно формульных множеств в $\mathfrak{A}$. Если X — некоторое множество в полной теории T сигнатуры Σ , то через $F(T, X)$ обозначается булева алгебра классов эквивалентности формул $\varphi(x, a)$ в T , где $a \in X$.

Если $\varphi(x, y)$ — некоторая формула, то через $\exists^{>n} x \varphi$ будем обозначать формулу

$$\exists x_1 \dots x_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \varphi(x_i, y) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right).$$

Через $\exists^{<n} x \varphi$ и $\exists^{-n} x \varphi$ будем обозначать соответственно формулы $\neg \exists^{>n+1} x \varphi$ и $\exists^{>n} x \varphi \wedge \exists^{<n} x \varphi$. Множество формул

$$\{\exists^{>n} x \varphi \mid n \in \omega\}$$

будет обозначаться через $\exists^{>\omega} x \varphi$. Если $x = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ и $y = \langle y_0, \dots, y_n \rangle$, то через $x = y$ обозначаем формулу $\bigwedge_{i \leq n} x_i = y_i$.

Формула $\varphi(x, a)$ в полной теории T называется *конечной*, если для некоторого $n \in \omega$ имеет место $T \models \exists^{<n} x \varphi(x, a)$, в противном случае $\varphi(x, a)$ называется *бесконечной*. Если U — конечное множество формул, то через $\bigwedge U$ обозначается конъюнкция элементов U . Если φ — некоторая формула и θ — некоторое условие, то $\varphi^0 = \neg \varphi$, $\varphi^1 = \varphi$ и

$$\varphi^{i\theta} = \begin{cases} \varphi, & \text{если } \theta \text{ выполнено,} \\ \neg \varphi & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая система сигнатуры Σ и $X \subseteq A$. Обозначим через Σ_X сигнатуру, полученную из Σ добавлением новых констант c_a , $a \in X$, а через $\mathfrak{A}_X$ — обогащение $\mathfrak{A}$ до сигнатуры Σ_X , в котором значения c_a равны a , $a \in X$. Через $D^*(\mathfrak{A})$ обозначается $\text{Th}(\mathfrak{A}_X)$. Если $a \in A$, $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то через $\text{tr}(a, X, \mathfrak{A})$ обозначается множество

$\{\varphi(x_1, \dots, x_n) \mid \mathfrak{A}_X \models \varphi(a_1, \dots, a_n), \varphi \text{ — формула сигнатуры } \Sigma_X\}$. Через $\mathfrak{A}[X]$ обозначается подсистема $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, порожденная в $\mathfrak{A}$ множеством X . Система $\mathfrak{A}$ называется *K-свободной* для некоторого класса K систем сигнатуры Σ , если существует такое $Y \subseteq A$, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}[Y]$ и Y *K-свободно* в $\mathfrak{A}$, т. е. любое отображение Y в K -систему $\mathfrak{B}$ продолжается до гомоморфизма $\mathfrak{A}[Y]$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть T — полная теория сигнатуры Σ и X — некоторое множество в T . Множество формул U называется *множеством формул в T над X* , если каждая формула из U имеет вид $\varphi(x, a)$, где $a \in X$. Конечное множество $\{\varphi_1(x, a^1), \dots, \varphi_n(x, a^n)\}$ формул в T над X называется *совместным в T* , если $T \models \exists x \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(x, a^i)$. Бесконечное множество $\{\varphi_i(x, a^i) \mid i \in I\}$ формул в T над

X называется *совместным* в T , если любое конечное подмножество этого множества совместно в T . Любое множество $\{\varphi_i(x, a^i) \mid i \in I\}$ в T над X называется *x -типом* над X . Множество совместных в T x -типов над X обозначается через $\equiv S_x(X)$. Множество максимальных совместных в T (полных) x -типов над X обозначается через $S_x(X)$. Если p — некоторый x -тип над X в T и $\varphi(x, y)$ — некоторая формула, то через $p \vdash \varphi$ обозначается множество

$$\{\varphi(x, a) \mid \varphi(x, a) \in p\}.$$

Через $\equiv S_x^\varphi(X)$ и $S_x^\varphi(X)$ обозначаются множества $\{p \vdash \varphi \mid p \in \equiv S_x(X)\}$ и $\{p \vdash \varphi \mid p \in S_x(X)\}$ и называются соответственно *множествами* (φ, x) -*типов* и *полных* (φ, x) -*типов*. Если p — некоторый x -тип над X в T и $Z \subseteq X$, то через $p \vdash Z$ обозначается множество $\{\varphi(x, a) \mid a \in Z, \varphi(x, a) \in p\}$, которое является x -типом над Z в T . Если $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, то x -типы будут называться n -типами. Множества совместных и полных n -типов в T над X обозначаются через $\equiv S^n(X)$ и $S^n(X)$ соответственно. Если $n = 1$, то индекс n в этих обозначениях не пишется. Множество $\bigcup_{1 \leq n < \omega} S^n(\emptyset)$ называется *конечной диаграммой* теории T и обозначается через $D(T)$.

Полный x -тип p в T над X называется *главным*, если существует такая формула $\varphi(x, a) \in p$, что для любой формулы $\psi(x, b) \in p$ имеет место $T \models \forall x (\varphi(x, a) \rightarrow \psi(x, b))$.

Расширение $T_1 \supseteq T$ полной теории T называется *несущественным*, если сигнатура теории T_1 содержит, кроме символов сигнатуры теории T , лишь символы констант. Полное несущественное расширение T_1 теории T называется *главным*, если для любого кортежа c новых констант теории T_1 полный x -тип

$$\{\varphi(x) \mid T_1 \models \varphi(c), \varphi(x) \text{ — формула сигнатуры } \Sigma\}$$

является главным.

Пусть T — полная теория сигнатуры Σ , X — множество в T , $\mathfrak{A}$ — некоторая T -модель, $X \subseteq A$ и $T \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a)$ для всех $a \in X$ и формул $\varphi(x)$ сигнатуры Σ . Система $\mathfrak{A}$ называется *простой T -моделью* над X , если любое элементарное вложение (т. е. сохраняющее истинность формул) X в T -модель $\mathfrak{B}$ продолжается до элементарного вложения $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Система $\mathfrak{A}$ называется *минимальной* над X , если не существует собственной элементарной подсистемы $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, содержащей множество X . Система $\mathfrak{A}$ называется *атомной T -моделью* над X , если любой полный x -тип над X , который реализуется в $\mathfrak{A}$, является главным. Если $X = \emptyset$, то в предыдущих определениях X опускается.

Пусть T — полная теория сигнатуры Σ , $X \cup Y$ — множество в T и Δ — некоторое множество формул сигнатуры Σ . Множество X называется *Δ -неразличимым в T над Y* , если для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \in \Delta$, любого кортежа $d \in Y$, $l(d) = l(y)$, любых попарно различных $a_1, \dots, a_n \in X$ и попарно различных $b_1, \dots, b_n \in X$ мы имеем

$$T \models \varphi(a_1, \dots, a_n, d) \Leftrightarrow T \models \varphi(b_1, \dots, b_n, d).$$

Если $X = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$, то последовательность $\langle a_\beta \rangle_{\beta < \alpha}$ называется *Δ -неразличимой последовательностью в T над Y* , если для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \in \Delta$, любого кортежа $d \in Y$, $l(d) = l(y)$, и любых $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\beta_1 < \dots < \beta_n < \alpha$ мы имеем

$$T \models \varphi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}, d) \Leftrightarrow T \models \varphi(a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_n}, d).$$

Множество X называется *алгебраически независимым в T над Y* , если для любых $a \in X$, $b \in Y$ и любой конечной в T формулы $\varphi(x, a, b)$ мы имеем $T \models \neg \varphi(d, a, b)$ для всех $d \in X$, отличных от элементов кортежа a . Если $Y = \emptyset$ или Δ есть множество всех формул сигнатуры Σ , то в предыдущих определениях Y или соответственно Δ опускаются.

Если $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебраическая система сигнатуры Σ и $X \subseteq A$, то через $Cl_{\mathfrak{A}}(X)$ обозначаем множество

$$\bigcup \{\varphi(\mathfrak{A}, a) \mid a \in X, |\varphi(\mathfrak{A}, a)| < \omega, \varphi(x, y) \text{ — формула сигнатуры } \Sigma\}.$$

Полная теория T сигнатуры Σ называется *недвукардинальной*, если для любой T -модели $\mathfrak{A}$, формулы $\varphi(x, y)$ сигнатуры Σ , $a \in A$, $l(a) = l(y)$, множество $\varphi(\mathfrak{A}, a)$ либо конечно, либо его мощность совпадает с $|A|$. Теория T называется *двукардинальной*, если она не является недвукардинальной.

1.2. Определение. Пусть P — некоторое свойство (класс) формул. Отображение δ множества символов сигнатуры Σ в множество формул сигнатуры Σ_1 называется *P -интерпретацией Σ в Σ_1* , если выполняются следующие условия:

(1) $\delta(\theta)$ является P -формулой для любого символа θ сигнатуры Σ ;

(2) если r — n -местный предикатный символ сигнатуры Σ , то свободные переменные формулы $\delta(r)$ содержатся среди $v_1, \dots, v_n$;

(3) если f — n -местный функциональный символ сигнатуры Σ , то свободные переменные формулы $\delta(f)$ содержатся среди $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$.

1.3. Определение. Если δ — P -интерпретация сигнатуры Σ в Σ_1 , то через δ^* будем обозначать отображение некоторого

класса систем сигнатуры Σ_1 в класс систем сигнатуры Σ , определенное следующим образом:

(1) $\mathcal{A} \in \text{dom } \delta^*$ тогда и только тогда, когда для любого n -местного функционального символа f сигнатуры Σ имеет место $\mathcal{A} \models \forall v \exists! v_{n+1} \delta(f)(v, v_{n+1})$, $v = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, где формула $\exists! x \varphi(x, y)$ является сокращенной записью формулы

$$\exists x \varphi(x, y) \wedge \forall x_1 \forall x_2 ((\varphi(x_1, y) \wedge \varphi(x_2, y)) \rightarrow x_1 = x_2);$$

(2) если $\mathcal{A} \in \text{dom } \delta^*$, то носитель $\delta^*(\mathcal{A})$ есть A ;

(3) если $\mathcal{A} \in \text{dom } \delta^*$ и θ — символ сигнатуры Σ , то значением θ в $\mathcal{A}$ будет $\{a \mid \mathcal{A} \models \delta(\theta)(a)\}$.

1.4. Определение. Классы K и K_1 алгебраических систем сигнатур Σ и Σ_1 называются *P-эквивалентными*, где P — некоторый класс (свойство) формул, если существуют P -интерпретации δ и δ_1 соответственно сигнатуры Σ в Σ_1 и сигнатуры Σ_1 в Σ со следующими свойствами:

- (1) если $\mathcal{A} \in K_1$ и $\mathcal{B} \in K$, то $\mathcal{A} \in \text{dom } \delta^*$, $\mathcal{B} \in \text{dom } \delta_1^*$,
 $\delta^*(\mathcal{A}) \in K$ и $\delta_1^*(\mathcal{B}) \in K_1$;
- (2) $\delta_1^* \delta^*(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ и $\delta^* \delta_1^*(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ для всех $\mathcal{A} \in K_1$ и $\mathcal{B} \in K$.

Теории T и T_1 сигнатур Σ и Σ_1 называются *P-эквивалентными*, если P -эквивалентны классы $\text{Mod}_\Sigma(T)$ и $\text{Mod}_{\Sigma_1}(T_1)$. Если P — класс атомарных формул, то P -эквивалентные классы систем (теории) называются *рационально эквивалентными*.

1.5. Определение. Если K — класс алгебраических систем и μ — кардинал, то через $S_K(\mu)$ обозначается число типов изоморфизма K -систем мощности μ . Кардинал $S_K(\mu)$ называется μ -спектром класса K , а функция S_K называется *мощностным спектром* или просто *спектром* класса K . Спектром S_T полной теории T сигнатуры Σ будет называться спектр $S_{\text{Mod}_\Sigma(T)}$ класса $\text{Mod}_\Sigma(T)$. Если R — класс систем или теория, то *грубым спектром* $M(R)$ класса или теории R называется класс кардиналов $\{v \mid S_R(v) \neq 0\}$.

В дальнейшем нас будет интересовать в основном спектр полных теорий. О спектрах произвольных полных теорий имеется немного утверждений. Следствием теоремы компактности Мальцева и теоремы Лёвенгейма — Скулема является

1.6. Предложение. Если T — теория, имеющая бесконечные модели, то $S_T(\lambda) \neq 0$ для любого бесконечного $\lambda \geq |T|$.

1.7. Предложение (Воот [1]). Если T — полная теория, то $S_T(\omega) \neq 2$.

1.8. Теорема (Морли [1], [3], Болдуин и Лахлан [1]). Если T — счетная полная теория и $S_T(\lambda_0) = 1$ для некоторого $\lambda_0 \geq \omega_1$, то $S_T(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \geq \omega_1$ и $S_T(\omega) \in \{1, \omega\}$.

1.9. Теорема (Лахлан [6]). Если T — счетная полная теория и $S_T(\lambda_0) \in \omega - \{1\}$ для некоторого $\lambda_0 \geq \omega_1$, то $S_T(\omega) = 1$.

1.10. Теорема (Морли [4]). Если T — счетная полная теория, то $S_T(\omega) \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$.

Отметим, что имеются примеры счетных полных теорий с любым конечным числом $n \notin \{0, 2\}$ счетных моделей (см. Воот [1]). Что же касается бесконечных $S_T(\omega)$, то здесь имеется известная гипотеза.

1.11. Гипотеза (Р. Воот). Если T — счетная полная теория, то $S_T(\omega) \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$.

Еще более интригующей является гипотеза о неубывании функции спектра.

1.12. Гипотеза (анонимная). Если T — полная теория и $|T|^+ \leq \lambda \leq \lambda_1$, то $S_T(\lambda) \leq S_T(\lambda_1)$.

Существует даже более сильная гипотеза Шелаха, которая утверждает, что все функции спектра полных теорий принадлежат некоторому сравнительно небольшому известному множеству. Для простоты мы сформулируем ее для кардиналов $\lambda \geq \omega_\alpha$, $\alpha \geq 2^\omega$, и счетной сигнатуры.

1.13. Гипотеза (С. Шелах). Если T — полная теория, то функция $S_T(\omega_\alpha)$ для всех $\alpha \geq 2^{2^\omega}$ является одной из следующих:

- 1) $S_T(\omega_\alpha) = 1$;
- 2) $S_T(\omega_\alpha) = 2^{2^\omega}$;
- 3) $S_T(\omega_\alpha) = |\alpha|$;
- 4) $S_T(\omega_\alpha) = |\alpha|^{\omega_\alpha}$;
- 5) $S_T(\omega_\alpha) = |\alpha|^{2^\omega}$;
- 6) $S_T(\omega_\alpha) = 2^{|\alpha|}$;
- 7) $S_T(\omega_\alpha) = \min \{2^{\omega_\alpha}, \beta(|\alpha|^k, i+1)\}$, $i < \omega_1$, $k \in \{0, 1, \omega, 2^\omega\}$;
- 8) $S_T(\omega_\alpha) = 2^{\omega_\alpha}$.

§ 2. Несчетная категоричность

В работе Лоса [1] высказана гипотеза: «если теория T категорична в некоторой мощности $\lambda > |T|$, то T категорична во всех мощностях $> |T|$ ». Эта гипотеза для счетных теорий была подтверждена Морли [1], а для несчетных — Шелахом [7]. Работа Морли [1] фактически основала целое направление в теории моделей, которое сейчас можно назвать «теорией стабильности». Однако методы М. Морли являются слишком об-

щими, чтобы получить достаточно тонкие результаты о структуре моделей несчетно категоричных теорий. Основные структурные результаты здесь получены методом минимальных множеств, впервые примененным в данной ситуации У. Маршем.

Определим теории, модели которых могут играть роль атомов в структуре произвольной алгебраической системы.

2.1. Определение (Болдуин и Лахлан [1]). Полная теория T называется *сильно минимальной*, если для любой формулы $\varphi(x, a)$ либо она сама, либо ее отрицание являются конечными в T .

Из этого определения и определения алгебраической независимости (§ 1) сразу вытекает

2.2. Предложение. Если T — сильно минимальная теория и X — алгебраически независимое в T множество, то X является неразличимым в T множеством.

2.3. Теорема (Марш [1]). Если T — сильно минимальная теория, то для свойства алгебраической независимости справедлива лемма о замене. В частности, любая T -модель имеет однозначно определенную размерность $\dim \mathcal{A}$.

2.4. Следствие. Любая сильно минимальная теория T категорична в мощностях $> |T|$.

Как будет показано в дальнейшем, класс сильно минимальных теорий, несмотря на кажущуюся узость понятия, играет фундаментальную роль в изучении структуры моделей несчетно категоричных теорий. Что касается классификации самих сильно минимальных теорий, то здесь имеется пока мало результатов. Отметим, что достаточно полно описаны хорновы сильно минимальные теории (см. § 5). Имеется прогресс в изучении сильно минимальных счетно категоричных теорий (Зильбер [2]).

2.5. Определение (Марш [1]). Если T — полная теория, то формула $\varphi(x, a)$ называется *сильно минимальной* в T , если она бесконечна, но для любой формулы $\psi(x, b)$ одна из формул $\varphi(x, a) \wedge \psi(x, b)$, $\varphi(x, a) \wedge \neg \psi(x, b)$ конечна в T .

Основополагающую роль в изучении несчетно категоричных теорий счетной сигнатуры играют следующие две теоремы.

2.6. Теорема (Болдуин и Лахлан [1]). Если T — счетная ω_1 -категоричная полная теория, то существует сильно минимальная формула $\varphi(x, a)$, причем кортеж элементов a реализует главный в T тип над пустым множеством.

Из теорем компактности, Лёвенгейма — Скулема и теоремы Воота о двух кардиналах вытекает

2.7. Предложение. Если T — счетная ω_1 -категоричная теория, то T недвукардинальна.

Свойства, сформулированные в предыдущих утверждениях, оказались достаточными для ω_1 -категоричности счетных теорий.

2.8. Теорема (Еримбетов [1], Лахлан [6]). Если счетная теория T имеет недвукардинальную сильно минимальную формулу $\varphi(x, a)$, то T является ω_1 -категоричной.

Таким образом, мы имеем следующую характеристику ω_1 -категоричных теорий: для того чтобы счетная полная теория T была ω_1 -категоричной, необходимо и достаточно, чтобы T имела недвукардинальную сильно минимальную формулу $\varphi(x, a)$.

Обратимся теперь к свойствам моделей ω_1 -категоричных теорий.

2.9. Теорема (Морли [1]). Все несчетные модели ω_1 -категоричной счетной теории T являются насыщенными, следовательно, T категорична во всех несчетных мощностях.

2.10. Теорема (Болдуин и Лахлан [1]). Пусть T — ω_1 -категоричная полная счетная теория. Тогда:

а) все T -модели однородны;

б) $S_T(\omega) \in \{1, \omega\}$.

Отметим, что утверждение $S_T(\omega) \leq \omega$ было доказано Морли [3].

2.11. Определение. Если формула $\varphi(x, a)$ является сильно минимальной в теории T , $\mathcal{A}$ — модель T , $a \in A$, то мощность максимального алгебраически независимого подмножества $\varphi(\mathcal{A}, a)$ будем называть $\varphi(x, a)$ -размерностью $\mathcal{A}$ и обозначать $\varphi(x, a)\text{-dim } \mathcal{A}$.

В следующей теореме содержатся основные структурные свойства моделей полных ω_1 -категоричных счетных теорий.

2.12. Теорема (У. Марш, Дж. Болдуин, А. Лахлан). Пусть T — полная ω_1 -категоричная счетная теория, $\mathcal{A}_0$ — минимальная простая модель T . Пусть $T' = T \cup D^*(\mathcal{A}_0)$ и $\varphi(x)$ — сильно минимальная формула в T' . Если $\mathcal{A}$ — T' -модель, то $\varphi(x)$ -размерность $\varphi(x)\text{-dim } \mathcal{A}$ системы $\mathcal{A}$ будем обозначать $\dim \mathcal{A}$.

а) Для любого кардинала κ существует T' -модель $\mathcal{A}$, для которой $\dim \mathcal{A} = \kappa$.

б) Если $\mathcal{A}$ — T' -модель, $\dim \mathcal{A} = \kappa$ и $\kappa \leq \lambda$, то существует элементарное расширение $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, для которого $\dim \mathcal{B} = \lambda$.

в) Для любой T' -модели $\mathcal{A}$ существует минимальное элементарное расширение $\mathcal{A}$, т. е. такое элементарное расширение $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, что $\mathcal{B} \neq A$ и для любого $\mathcal{B}_1 \succ \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ мы имеем либо $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.

г) Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — T -модели, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, $\dim \mathcal{A} = \kappa$, $\dim \mathcal{B} = \lambda$ и $\kappa \leq \mu \leq \lambda$, то существует $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}_1$ и $\dim \mathcal{B}_1 = \mu$.

д) Если $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, то $\dim \mathcal{A} \leq \dim \mathcal{B}$, и если $\dim \mathcal{A} = n \in \omega$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, то $\dim \mathcal{B}$ строго больше n . В частности, если $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, $\dim \mathcal{A} = n \in \omega$ и $\dim \mathcal{B} = n + 1$, то $\mathcal{B}$ — минимальное расширение $\mathcal{A}$.

е) Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — T' -модели и $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Как показывает предыдущая теорема, тип изоморфизма модели $\mathfrak{A}$ ω_1 -категоричной теории T полностью определяется $\varphi(x)$ -размерностью для сильно минимальной формулы $\varphi(x)$. Грубо говоря, любое сильно минимальное формульное подмножество $X \subseteq A$ T -модели $\mathfrak{A}$ «связывает» всю модель. Однако это «связывание» осуществляется не так просто. Наиболее просто это происходит у следующего типа теорий.

2.13. Определение (Болдуин и Лахлан [1]). Полная теория T называется *почти сильно минимальной*, если существует несущественное расширение $T' \supseteq T$ и такая сильно минимальная формула $\varphi(x)$, что $A = \text{cl}(\varphi(\mathfrak{A}))$ для любой T' -модели $\mathfrak{A}$.

Из теоремы Еримбетова — Лахлана вытекает

2.14. Теорема. *Любая почти сильно минимальная теория T категорична в мощностях $> |T|$.*

Следующий пример показывает, что класс почти сильно минимальных теорий не исчерпывает класса всех полных ω_1 -категоричных теорий. Впервые пример полной ω_1 -категоричной не почти сильно минимальной теории построили Болдуин и Лахлан [1]. Аналогичный пример с дополнительным свойством ω -категоричности был построен Тайцлиным [1].

2.15. Пример. Теория T^0 , которая будет построена ниже, категорична во всех мощностях, а полная теория T_ω^0 не является почти сильно минимальной. Сигнатура T^0 состоит из символа одноместной операции f , символа двуместной операции $+$ и одной константы 0 . Аксиомами теории T^0 являются следующие предложения:

- 1) операция сложения $+$ удовлетворяет аксиомам абелевых групп с нулем 0 ;
- 2) $\forall x (x + x = 0)$;
- 3) $\forall x \forall y (f(x + y) = f(x) + f(y))$;
- 4) $\forall x (f(f(x)) = 0)$;
- 5) $\forall x \exists y (f(x) = 0 \rightarrow f(y) = x)$.

Категоричность T^0 во всех мощностях будет следовать из того, что в любой T^0 модели $\mathfrak{A}$ мощность подгруппы $f(\mathfrak{A})$ совпадает с мощностью фактор-группы $\mathfrak{A}/f(\mathfrak{A})$. Теория T^0 является хорновой, $\forall \exists$ -аксиоматизируемой. Заметим, что из результатов § 5 следует, что нельзя построить универсальную ω_1 -категоричную хорновую теорию T , для которой T_ω не являлась бы почти сильно минимальной. Из результатов § 5 следует также, что аналогичного примера нельзя найти среди позитивных хорновых теорий. Теория T_0 является модельно полной. Это выводим из следующей теоремы.

2.16. Теорема (Линдстрем [1]). *Если счетная теория категорична в некоторой бесконечной мощности и $\forall \exists$ -аксиоматизируема, то теория T_ω модельно полна.*

Впервые полную ω_1 -категоричную счетную теорию, не имеющую главных модельно полных расширений, построил Нуртзин [1].

Метод минимальных множеств может с успехом использоваться не только для ω_1 -категоричных, но и для более широкого класса теорий.

2.17. Определение (Белеградек [2]). Полная теория T называется *почти категоричной*, если существует главное несущественное расширение T' теории T и сильно минимальные в T' формулы $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, для которых формула $\varphi_1(x) \vee \dots \vee \varphi_n(x)$ является недвукардинальной в T .

В статье Белеградека [2] содержатся структурные результаты о моделях почти категоричных теорий, обобщающие соответствующие результаты для ω_1 -категоричных теорий.

Гипотеза Лося для несчетных теорий была подтверждена С. Шелахом. Он обобщил результат 2.9 на несчетную сигнатуру.

2.18. Теорема (Шелах [7]). *Если теория T категорична в некоторой мощности $> |T|$, то любая T -модель мощности $> |T|$ является насыщенной.*

Что касается применения метода минимальных множеств для теорий T , категоричных в мощностях $> |T|$, то по сравнению со счетным случаем здесь ситуация гораздо сложнее.

Как показывает следующая теорема, в отличие от счетной сигнатуры, случай категоричности несчетной теории T в мощности $|T|$ не является специфическим.

2.19. Теорема (Шелах [12]). *Если теория T категорична в мощности $|T| > \omega$, то она формульно эквивалентна теории T' , для которой $|T'| < |T|$.*

В заключение параграфа приведем описание теорий одной одноместной функции, категоричных в несчетных мощностях. Это описание получено Шишмаревым [1]. Пусть в дальнейшем Σ_0 обозначает сигнатуру, состоящую из одного символа f одноместной функции. Описание Шишмарева будет сформулировано в двух теоремах.

Пусть $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $n \in \omega$. Теория T сигнатуры Σ_0 называется *ограниченной*, если существует такое натуральное число N , что в T истинна формула

$$\forall x \left(\bigvee_{n < m < N} f^n(x) = f^m(x) \right).$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебраическая система сигнатуры Σ_0 . Через $n_a^\mathfrak{A}$ будет обозначаться мощность множества $\{b \mid \mathfrak{A} \models$

$\models f(b)=a\}$. Через $K(a, \mathfrak{A})$ обозначается ограничение $\mathfrak{A}$ на множество

$$\{b \mid \mathfrak{A} \models f^i(b)=a \text{ для некоторого } i \in \omega\}.$$

Элементы $a, b \in A$ называются $\mathfrak{A}$ -связанными в X , если существуют натуральные числа m и n такие, что $f^m(a) = f^n(b)$ и

$$f^0(a), \dots, f^m(a), f^0(b), \dots, f^n(b) \in X.$$

Множество $X \subseteq A$ называется $\mathfrak{A}$ -связанным, если любые два элемента из X $\mathfrak{A}$ -связаны в X . Подсистема $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, носитель которой является $\mathfrak{A}$ -связанным подмножеством A , называется *графиком* в $\mathfrak{A}$.

2.20. Теорема (Шишмарев [1]). Пусть T — полная ограниченная теория сигнатуры Σ_0 . Теория T тогда и только тогда категорична в несчетных мощностях, когда каждая модель $\mathfrak{A}$ теории T удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существует такое натуральное число N , что $n_a^{\mathfrak{A}} \leq N$ для всех $a \in A$ с конечным $n_a^{\mathfrak{A}}$;
- 2) существует не более одного элемента a с бесконечным $n_a^{\mathfrak{A}}$;
- 3) если в $\mathfrak{A}$ нет элемента a с бесконечным $n_a^{\mathfrak{A}}$, то все графики в $\mathfrak{A}$, за исключением конечного числа, изоморфны между собой;
- 4) если в $\mathfrak{A}$ имеется элемент a с бесконечным $n_a^{\mathfrak{A}}$, то в $\mathfrak{A}$ существует лишь конечное число графиков и все системы вида $K(a, \mathfrak{A})$, за исключением конечного числа, изоморфны между собой.

2.21. Определение. Если $N \in \omega$, $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ_0 и $X \subseteq A$, то множество

$$\{a \in A \mid \exists b \in X \exists n \leq N \exists m \leq N (\mathfrak{A} \models f^m(a) = f^n(b))\}$$

называется N -окрестностью X в системе A . Если $\mathfrak{B}$ — график в системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ_0 , то множество

$$\{a \in B \mid \mathfrak{A} \models f^n(a) = a \text{ для некоторого } n \in \omega\}$$

называется *кольцом графика* $\mathfrak{B}$.

2.22. Теорема (Шишмарев [1]). Пусть T — полная теория сигнатуры Σ_0 , не являющаяся ограниченной. Для категоричности T в несчетных мощностях необходимо и достаточно, чтобы каждая несчетная T -модель $\mathfrak{A}$ удовлетворяла следующим условиям:

- 1) существует такое натуральное число N , что $n_a^{\mathfrak{A}} \leq N$ для всех $a \in A$;

2) для каждого $n \in \omega$ существует лишь конечное число графиков, кольца которых состоят из n элементов;

3) существуют конечное множество $X_0 \subseteq A$, множество $Y \subseteq A$, натуральное число m и множество $\{P_a \mid a \in Y\}$, для которых выполняются условия:

- а) $X_0 \cup \bigcup_{a \in Y} P_a = A$, $X_0 \cap \bigcup_{a \in Y} P_a = \emptyset$, $P_a \cap P_b = \emptyset$ для $a \neq b$;
- б) $P_a \subseteq \{b \in A \mid \mathfrak{A} \models f^i(b) = a \text{ для некоторого } i \leq m\}$;
- в) для любых $a, b \in Y$ ограничения $\mathfrak{A}$ на P_a и P_b изоморфны между собой, и этот изоморфизм продолжается до изоморфизма $2m$ -окрестностей P_a и P_b .

§ 3. Тотально трансцендентные теории

Как уже отмечалось, метод Морли [1], придуманный им для изучения теорий, категоричных в несчетных мощностях, применим и для более широкого класса теорий. К таким теориям относятся, прежде всего, тотально трансцендентные теории.

3.1. Определение. Будем говорить, что полная теория T имеет свойство 2 -дерева, если в T существуют формулы $\Phi_\eta(x, a_\eta)$, $\eta \in {}^{<\omega}2$, для которых выполняются следующие условия:

- а) $T \models \exists x \Phi_\eta(x, a_\eta)$, $\eta \in {}^{<\omega}2$;
- б) $T \models \forall x (\Phi_{\eta \wedge i}(x, a_{\eta \wedge i}) \rightarrow \Phi_\eta(x, a_\eta))$, $\eta \wedge i \in {}^{<\omega}2$;
- в) $T \models \neg \exists x (\Phi_{\eta \wedge 0}(x, a_{\eta \wedge 0}) \wedge \Phi_{\eta \wedge 1}(x, a_{\eta \wedge 1}))$.

3.2. Определение. Пусть T — полная теория. Каждой совместной в T формуле $\varphi(x, a)$ сопоставим некоторый ординал $r(\varphi(x, a))$ или символ ∞ так, что выполняются следующие условия:

- 1) $r(\varphi(x, a)) \geq 0$;
- 2) если δ — предельный ординал, то

$$r(\varphi(x, a)) \geq \delta \Leftrightarrow (r(\varphi(x, a)) \geq \beta \text{ для всех } \beta < \delta);$$

3) тогда и только тогда $r(\varphi(x, a)) \geq \alpha + 1$, когда существуют такие попарно несовместные формулы $\psi_0(x, b^0), \dots, \psi_n(x, b^n), \dots$ что $r(\varphi(x, a) \wedge \psi_n(x, b^n)) \geq \alpha$ для всех $n \in \omega$.

Если для ординала α выполняется $r(\varphi(x, a)) \geq \alpha$ и не имеет места $r(\varphi(x, a)) \geq \alpha + 1$, то пишем $r(\varphi(x, a)) = \alpha$. Если для любого ординала α выполняется $r(\varphi(x, a)) \geq \alpha$, то пишем $r(\varphi(x, a)) = \infty$. Ясно, что условия 1)–3) однозначно определяют значение $r(\varphi(x, a))$.

3.3. Предложение. Пусть T — полная теория, $\varphi(x, a)$, $\psi(x, a)$ — формулы в T . Тогда

а) если $T \models \forall x (\varphi(x, a) \rightarrow \psi(x, b))$ то $r(\varphi(x, a)) \leq r(\psi(x, b))$;

б) если $a \equiv c$, то $r(\varphi(x, a)) = r(\varphi(x, c))$;

в) (Лаклан [1]) если $r(\varphi(x, a)) \geq |T|^+$, то $r(\varphi(x, a)) = \infty$.

Одним из параметров теории T , отражающих ее сложность, может служить ординал α_T , определенный ниже.

3.4. Определение. Если T — полная теория, то через α_T обозначим такой минимальный ординал, что $r(\varphi(x, a)) < \alpha_T$ для всех формул $\varphi(x, a)$ в T со свойством $r(\varphi(x, a)) \neq \infty$.

Из предложения 3.3 в) вытекает, что $\alpha_T \leq |T|^+$ для любой полной теории T . Для ω_1 -категоричных теорий имеет место следующий результат.

3.5. Теорема (Болдуин [1]). Если T — ω_1 -категоричная счетная теория, то $\alpha_T < \omega$.

Ранжирование формул с помощью функции r является основой метода Морли, изложенного в работе Морли [1]. Главные моменты этого метода будут изложены ниже.

3.6. Определение. Если p — некоторый тип в полной теории T , то определим $r(p)$ как наименьший ординал в множестве

$$\{r(\varphi_0(x, a^0) \wedge \dots \wedge \varphi_k(x, a^k)) \mid k \in \omega, \varphi_i(x, a^i) \in p, i \leq k\}.$$

Значение $r(\theta)$, где θ — формула или тип, называется *рангом* по Морли формулы или типа θ .

3.7. Теорема (Морли). Если T — полная счетная теория, то следующие условия эквивалентны:

1) T не имеет свойства 2-дерева;

2) $r(x = x) \neq \infty$;

3) для любого множества A в T булева алгебра $F(T, A)$ суператомна;

4) для любого не более чем счетного множества A в T мощность множества $S(A)$ не более чем счетна;

5) для любого множества A в T мощность множества $S(A)$ не превосходит $|A| + \omega$.

3.8. Определение (Морли). Если счетная полная теория T удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то она называется *тотально трансцендентной*.

Важной частью работы Морли [1] является

Теорема (Морли [1]). Любая счетная ω_1 -категоричная теория является тотально трансцендентной.

Из свойства 3) тотально трансцендентных теорий получаем

3.9. Следствие. Если T — тотально трансцендентная теория и A — множество в T , то существует простая над A T -модель $\mathfrak{B}$.

Пользуясь свойством 5) тотально трансцендентной теории T , для любой регулярной мощности $\lambda \geq \omega$ можно легко построить насыщенную T -модель мощности λ . Немного посложней доказывается этот факт для сингулярных мощностей.

3.10. Теорема (Шелах). Если T — тотально трансцендентная теория, то для любой мощности $\lambda \geq \omega$ существует насыщенная T -модель мощности λ .

Из свойства 5) теоремы 3.4 нетрудно вывести также следующий результат, из которого, в частности, следует, что в тотально трансцендентной теории нельзя интерпретировать теорию линейно упорядоченного множества.

3.11. Теорема (Морли [1]). Если T — тотально трансцендентная теория и $\langle a_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ — бесконечная неразличимая в T последовательность, то $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ — неразличимое в T множество.

Из определения ранга по Морли легко следует, что если для формулы $\varphi(x, a)$ имеет место $r(\varphi(x, a)) = \alpha \neq \infty$, то существует такое число $n \in \omega$, что если формулы $\varphi_0(x, b^0), \dots, \varphi_n(x, b^n)$ попарно несовместны, то для некоторого $i \leq n$ либо $\varphi(x, a) \wedge \varphi_i(x, b^i)$ несовместна, либо $r(\varphi(x, a) \wedge \varphi_i(x, b^i))$ строго меньше α . Наименьшее такое число n называется *степенью* по Морли формулы $\varphi(x, a)$ и обозначается через $d(\varphi(x, a))$. Если $p \in S(A)$, то степенью Морли $d(p)$ типа p называется степень $d(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$, где $\varphi_0, \dots, \varphi_k \in p$, $r(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = r(p)$ и $d(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$ минимальна среди таких $\varphi_0, \dots, \varphi_k$.

Легко проверить, что если имеет место $r(\varphi(x, a)) = 0$, то формула $\varphi(x, a)$ конечна и число реализаций $\varphi(x, a)$ в любой T -модели совпадает с $d(\varphi(x, a))$. Ясно также, что формула $\varphi(x, a)$ тогда и только тогда сильно минимальна, когда $r(\varphi(x, a)) = d(\varphi(x, a)) = 1$.

Если T — тотально трансцендентная теория, то ясно, что $\alpha_T = (r(x = x) + 1)$. Для тотально трансцендентной теории T можно определить натуральное число $d_T = d(x = x)$.

С помощью понятия ранга и степени Морли можно строить неразличимые множества следующим образом. Пусть A — множество в тотально трансцендентной теории T . Берем $p_0 \in S(A)$ с наименьшим ненулевым рангом по Морли r_0 и наименьшей степенью d_0 среди типов $p \in S(A)$ с рангом r_0 . Пусть a_0 реализует тип p_0 . Продолжая этот процесс, мы можем для любого ординала α построить такое множество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$, что для всех $\beta < \alpha$ элемент a_β реализует тип $p_\beta \in S(A \cup \{a_\gamma \mid \gamma < \beta\})$, $p_\beta \equiv \bigcup_{\gamma < \beta} p_\gamma$, с наименьшим ненулевым рангом $r(p_\beta)$ среди типов, содержащих $\bigcup_{\gamma < \beta} p_\gamma$, и наименьшей степенью $d(p_\beta)$ среди таких

типов ранга $r(p_\beta)$. Из вполне упорядоченности ординалов получаем, что для некоторого $\beta_0 < \alpha$ будем иметь $r(p_{\gamma_1}) = r(p_{\gamma_2})$, $d(p_{\gamma_1}) = d(p_{\gamma_2})$ для всех $\beta_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < \alpha$. Тогда, как показывает следующая лемма, множество $\{a_\gamma \mid \beta_0 \leq \gamma < \alpha\}$ будет неразличимым в T множеством над $A \cup \{a_\delta \mid \delta < \beta_0\}$.

3.12. Определение. Последовательность $\langle a_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ называется *последовательностью Морли* над множеством A в полной теории T , если для типов $p_\beta \in S(A \cup \{a_\gamma \mid \gamma < \beta\})$, реализуемых элементами a_β , выполняются условия:

- 1) $p_{\gamma_1} \equiv p_{\gamma_2}$, $\gamma_1 \leq \gamma_2 < \alpha$;
- 2) $r(p_{\gamma_1}) = r(p_{\gamma_2}) \neq \infty$, $\gamma_1 \leq \gamma_2 < \alpha$;
- 3) $d(p_{\gamma_1}) = d(p_{\gamma_2})$, $\gamma_1 \leq \gamma_2 < \alpha$.

3.13. Лемма (Морли [1]). Если $\langle a_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ — бесконечная последовательность Морли над множеством A в полной теории T , то множество $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ неразлично в T над множеством A .

Предыдущая конструкция и эта лемма дают такой результат.

3.14. Теорема (Морли [1]). Пусть T — totally трансцендентная теория, $A \subseteq B$ — множества в T , $|A| < |B|$ и $|B|$ — регулярный несчетный кардинал. Тогда существует неразличимое в T над A множество $X \subseteq B$ и $|X| = |B|$.

Следующие три рабочих результата показывают естественность понятий ранга и степени по Морли.

3.15. Лемма об определмости (Ляхлан [2], [7]). Пусть T — totally трансцендентная теория, $\varphi(x, a)$, $\psi(x, y, b)$ — формулы в T , $d(\varphi(x, a)) = 1$. Тогда существует такая формула $\chi(y, a, b)$, что для любого кортежа c соответствующей длины

$$T \models \chi(c, a, b) \leftrightarrow r(\varphi(x, a)) = r(\varphi(x, a) \wedge \psi(x, c, b)).$$

3.16. Лемма о нормализации (Ляхлан [7]). Пусть T — totally трансцендентная теория, $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры теории T и $p \in S^m(\emptyset)$, где m — длина y . Тогда существует такая формула $\varphi'(x, y)$, что выполняются условия:

- 1) $\varphi(x, b)$, $\varphi'(x, b)$ и $\varphi(x, b) \wedge \varphi'(x, b)$ имеют одни и те же ранг и степень по Морли для всех b , реализующих тип p ;
- 2) если для b_1, b_2 , реализующих тип p , имеет место $r(\varphi'(x, b_1)) = r(\varphi'(x, b_1) \wedge \varphi'(x, b_2))$ и $d(\varphi'(x, b_1)) =$

$$= d(\varphi'(x, b_1) \wedge \varphi'(x, b_2)),$$

то

$$T \models \forall x (\varphi'(x, b_1) \leftrightarrow \varphi'(x, b_2)).$$

3.17. Лемма о конечной эквивалентности (Шелах [12]). Пусть T — totally трансцендентная теория, A —

множество в T , $p \in S(A)$ и $d(p) = k$. Тогда существуют $a \in A$, формула $e(x, y, a)$ и $b_0, \dots, b_{k-1}$ такие, что выполняются условия:

- 1) $e(x, y, a)$ определяет в T -моделях отношение эквивалентности с конечным числом классов эквивалентности;
- 2) $r(p \cup \{e(x, b_i, a)\}) = r(p)$, $i < k$;
- 3) если $i < j < k$, то формула $e(x, b_i, a) \wedge e(x, b_j, a)$ несовместна.

Техника рангов и степеней существенно используется в доказательстве следующих результатов С. Шелаха, касающихся простых модельных расширений totally трансцендентных теорий.

3.18. Теорема (Шелах [6]). Пусть T — totally трансцендентная теория, A — множество в T и $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ — простые над A модели T . Тогда $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ изоморфны над A .

3.19. Теорема (Шелах [6]). Пусть T — totally трансцендентная теория, $\mathfrak{A}$ — модель T и $B \subseteq A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{A}$ — простая T -модель над B ;
- 2) $\mathfrak{A}$ — атомная T -модель над B , и любое множество $X \subseteq A$ неразличимых элементов в T над B не более чем счетно.

3.20. Теорема (Шелах [6]). Пусть T — totally трансцендентная теория, $\mathfrak{A}$ — модель T и $B \subseteq A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{A}$ — минимальная T -модель над B ;
- 2) $\mathfrak{A}$ — атомная T -модель над B , и любое множество $X \subseteq A$ неразличимых элементов в T над B конечно.

В оставшейся части параграфа будут рассмотрены результаты, касающиеся спектра totally трансцендентных теорий.

3.21. Теорема (Шелах [3]). Если T — totally трансцендентная теория, не являющаяся ω_1 -категоричной, то $S_T(\omega_\alpha) \geq |\alpha + 1|$ для любого ординала α .

3.22. Теорема (Ляхлан [8]). Если T — totally трансцендентная теория, то для спектра S_T выполняется одна из следующих возможностей:

- 1) $S_T(\omega) \in \{1, \omega\}$ и $S_T(\omega_\alpha) = 1$ для всех ординалов $\alpha \geq 1$;
- 2) $S_T(\omega_\alpha) \leq \max(|\alpha|, \omega)$ для всех ординалов α и $S_T(\omega_\alpha) = |\alpha|$ для $\alpha \geq \omega$;
- 3) $S_T(\omega_\alpha) = |\alpha + 1|^\omega$ для всех $\alpha \geq 1$;
- 4) $S_T(\omega_\alpha) \geq \omega^{|\alpha|}$ для всех ординалов α .

Конечно, случай 4) в этой классификации имеет большую неопределенность. Имеются примеры totally трансцендентных теорий T со следующими спектрами:

- a) $S_T(\omega_\alpha) = \omega^{|\alpha|}$, $\alpha \geq 1$;

- б) $S_T(\omega_\alpha) = 2^{\omega_\alpha}$, $\alpha \geq 1$;
 в) $S_T(\omega_\alpha) = \max(2^{\omega_\alpha}, \omega^{\omega_\alpha})$, $\alpha \geq 1$.

Байжановым [1] построены для любого ординала $\gamma < \omega_1$ totally трансцендентные теории со следующими спектрами:

г) $S_T(\omega_\alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, \beta(|\alpha + 1|, \gamma))$, $\alpha \geq 1$

(где кардинал $\beta(\kappa, \alpha)$ определен в § 1);

д) $S_T(\omega_\alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, \beta(|\alpha + 1|^\omega, \gamma))$, $\alpha \geq 1$.

3.23. Проблема. Описать все спектры $S_T(\omega_\alpha)$, $\alpha \geq \omega$, totally трансцендентных теорий T . В частности, существуют ли спектры $S_T(\omega_\alpha)$, $\alpha \geq \omega$, отличные от спектров, указанных выше (т. е. $S_T(\omega_\alpha) = 1$, $\alpha \geq 1$, и случаи а)—д))?

3.24. Проблема (Л а х л а н [8]). Для totally трансцендентных теорий T доказать гипотезу Вюота:

$$S_T(\omega) \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}.$$

Полностью описаны в настоящий момент лишь спектры S_T totally трансцендентных теорий T , для которых $\alpha_T = 3$. Для подсчета счетных моделей totally трансцендентных теорий T с $\alpha_T = 3$ и $d_T = 1$ служит теорема об однозначности размерности моделей таких теорий, доказанная Л а х л а н о м [7].

3.25. Определение (Л а х л а н [7]). Пусть T — totally трансцендентная теория, A — множество в теории T . Множество A называется *независимым* в T , если для любых попарно различных $a_1, \dots, a_n \in A$ и формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры теории T из $T \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ следует $r(\varphi(x, a_2, \dots, a_n)) = r(x = x)$. Будем говорить, что модель $\mathfrak{A}$ теории T имеет *размерность*, если все максимальные независимые в T подмножества $X \subseteq A$ имеют одну и ту же мощность.

В работе Л а х л а н [7] приведены примеры теории T с $\alpha_T = 4$ и $d_T = 1$, а также теории T_2 с $\alpha_{T_2} = 3$ и $d_{T_2} > 1$, для которых существуют T -модели, не имеющие размерности. Там же доказана

3.26. Теорема (Л а х л а н [7]). Если T — totally трансцендентная теория с $\alpha_T = 3$ и $d_T = 1$, то любая T -модель $\mathfrak{A}$ имеет размерность.

Для теорий T с $\alpha_T = 3$ и $d_T = 1$ гипотеза 1.11 Вюота справедлива.

3.27. Теорема (Л а х л а н [7]). Если T — totally трансцендентная теория с $\alpha_T = 3$ и $d_T = 1$, то $S_T(\omega) \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$.

Следующая теорема для теорий T с $d_T = 1$ доказана Л а х л а н о м [7] и обобщена Б а й ж а н о в ы м [2] на любые d_T .

3.28. Теорема (А. Л а х л а н, Б. С. Б а й ж а н о в). Пусть T — totally трансцендентная теория с $\alpha_T \leq 3$. Тогда для функции спектра $S_T(\omega_\alpha)$, $\alpha \geq 1$, выполняется одна из следующих возможностей:

- 1) $S_T(\omega_\alpha) = 1$, $\alpha \geq 1$;
- 2) $S_T(\omega_\alpha) \leq \max(|\alpha|, \omega)$, $\alpha \geq 1$, с равенством для $\alpha \geq \omega$;
- 3) $S_T(\omega_\alpha) = |\alpha + 1|^\omega$, $\alpha \geq 1$;
- 4) $S_T(\omega_\alpha) = \omega^{\omega_\alpha}$, $\alpha \geq 1$;
- 5) $S_T(\omega_\alpha) = \max(2^{\omega_\alpha}, \omega^{\omega_\alpha})$, $\alpha \geq 1$;
- 6) $S_T(\omega_\alpha) = 2^{\omega_\alpha}$, $\alpha \geq 1$;
- 7) $S_T(\omega_\alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{\omega_\alpha + 1})$, $\alpha \geq 1$.

§ 4. Стабильные и суперстабильные теории

В этом параграфе будут рассмотрены обобщения понятия totally трансцендентной теории. Если totally трансцендентную теорию можно определить как теорию, в которой нет бесконечного дерева формул, то стабильные и суперстабильные теории — это такие теории, в которых нет деревьев формул определенного вида.

4.1. Определение. Если $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры теории T и n — длина кортежа y , то $(\varphi, x, 2)$ -деревом в теории T высоты α называется множество кортежей a_η , $\eta \in {}^{<\alpha}2$, в T длины n со следующим свойством: для любой последовательности $\theta \in {}^{\omega}2$ множество

$$\{\varphi(x_\theta, a_{\theta \upharpoonright \beta})^{\theta(\beta)} \mid \beta < \alpha\}$$

совместно с T .

Если D — $(\varphi, x, 2)$ -дерево высоты ω , то будем называть D просто $(\varphi, x, 2)$ -деревом.

Следующее понятие является аналогом ранга по Морли и характеризует возможность построения $(\varphi, x, 2)$ -деревьев в T .

4.2. Определение (С. Шелах). Пусть $\psi(x, b)$ — совместная формула в полной теории T и $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры T . Индукцией по ординалу α определим свойство $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq \alpha$:

(1) $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq 0$;

(2) если δ — предельный ординал и $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$, то $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq \delta$;

(3) $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq \alpha + 1$, если существует кортеж элементов a той же длины, что и y , для которого

$$R_x^\varphi(\psi(x, b) \wedge \varphi(x, a)) \geq \alpha,$$

$$R_x^\varphi(\psi(x, b) \wedge \neg \varphi(x, a)) \geq \alpha.$$

4.3. Определение. Если $\psi(x, b)$ — совместная формула в полной теории T и $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры T , то будем говорить, что (φ, x) -ранг Шелаха равен α , и обозначать $R_x^\varphi(\psi(x, b)) = \alpha$, если имеет место $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq \alpha$ и не имеет места $R_x^\varphi(\psi(x, b)) \geq \alpha + 1$.

4.4. Определение. Если p — совместный x -тип в полной теории T , то (φ, x) -рангом Шелаха типа p называется наименьший ординал $R_x^\varphi(p)$ из множества

$$\{R_x^\varphi(\bigwedge p_i) \mid p_i \text{ — конечный подтип } p\}.$$

Ясно, что если $p = \{\psi(x, b)\}$, то $R_x^\varphi(p) = R_x^\varphi(\psi(x, b))$.

Как показывают следующие предложения, (φ, x) -ранг Шелаха — существенно более простое понятие, чем ранг по Морли.

4.5. Предложение (С. Шелах). Если p — совместный x -тип в полной теории T и $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры теории T , то $R_x^\varphi(p) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда в T совместно множество $\Gamma(\varphi, x, \alpha)$, где

$$\Gamma(\varphi, x, \alpha) = \{\varphi(x_\eta, y_{\eta+1})^{\eta(\beta)} \mid \eta \in {}^\omega 2, \beta < \alpha\}.$$

Из этого предложения и теоремы компактности вытекает

4.6. Предложение (С. Шелах). Пусть p — совместный x -тип в полной теории T и $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры теории T . Если $R_x^\varphi(p) \geq \omega$, то $R_x^\varphi(p) \geq \alpha$ для любого ординала α .

4.7. Определение (С. Шелах). Пусть $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры полной теории T .

(1) Формула $\varphi(x, y)$ имеет свойство порядка в T , если существуют такие кортежи a^n , $n \in \omega$, что для любого $k < \omega$ множество

$$\{\varphi(x, a^n) \mid k \leq n\} \mid n \in \omega\}$$

совместно в T .

(2) Будем говорить, что формула $\varphi(x, y)$ имеет свойство строгого порядка, если существует последовательность кортежей a^n , $n \in \omega$, удовлетворяющая условию из (1), и для любого кортежа b той же длины, что и x , существует $\alpha \leq \omega$ такое, что

$$\{n \mid T \models \varphi(b, a^n), n \in \omega\} = \{n \mid \alpha \leq n, n \in \omega\}.$$

(3) Формула $\varphi(x, y)$ имеет свойство независимости, если существует такая последовательность кортежей a^n , $n \in \omega$, что для любого подмножества $\omega \subseteq \omega$ множество

$$\{\varphi(x, a^n) \mid n \in \omega\}$$

совместно в T .

Ясно, что как свойство строгого порядка, так и свойство независимости влекут свойство порядка. В силу теоремы компакт-

ности предыдущие свойства можно определить через конечные последовательности $a^0, \dots, a^n$ кортежей, где n пробегает все натуральные числа.

4.8. Определение (С. Шелах). Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(y, z)$ — формулы сигнатуры полной теории T , p — (φ, x) -тип в теории T , a — некоторый кортеж элементов. Тогда:

(1) p называется $\psi(y, a)$ -определимым в T , если выполняются условия

$$\varphi(x, b) \in p \Rightarrow T \models \psi(b, a),$$

$$\neg \varphi(x, b) \in p \Rightarrow T \models \neg \psi(b, a);$$

(2) если в (1) кортеж a принадлежит A , то p называется $(\psi(y, z), A)$ -определимым в T ;

(3) (φ, x) -тип p называется A -определимым в T , если существует формула ψ сигнатуры T , для которой p является (ψ, A) -определимым.

4.9. Теорема (Шелах [4]). Пусть T — полная теория и $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры теории T . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) существует $(\varphi, x, 2)$ -дерево в теории T ;
- 2) $\varphi(x, y)$ не имеет свойства порядка в T ;
- 3) $\varphi(x, y)$ не имеет свойства строгого порядка и не имеет свойства независимости в T ;

$$4) R_x^\varphi(x = x) < \omega;$$

5) для любого множества A в T любой $p \in S_x^\varphi(A)$ является A -определимым;

6) существует такая формула $\psi(y, z)$ сигнатуры теории T , что для любого множества A мощности $|A| \geq 2$ в T любой (φ, x) -тип $p \in S_x^\varphi(A)$ является $(\psi(y, z), A)$ -определимым;

$$7) |S_x^\varphi(A)| \leq |A| \text{ для всех бесконечных множеств } A \text{ в } T.$$

4.10. Определение (С. Шелах). Формула $\varphi(x, y)$ сигнатуры теории T называется стабильной в теории T , если она удовлетворяет условиям теоремы 4.9.

4.11. Определение (С. Шелах). Полная теория T называется стабильной, если любая формула $\varphi(x, y)$ сигнатуры теории T стабильна в T .

4.12. Определение. Пусть $\varphi(x^1, \dots, x^n, a)$ — формула в полной теории T , длины кортежей $x^1, \dots, x^n$ равны m . Формула $\varphi(x^1, \dots, x^n, a)$ называется связанной и антисимметричной над множеством X кортежей длины m , если для любых попарно различных кортежей $b^1, \dots, b^n \in X$ существует перестановка σ множества $\{1, \dots, n\}$, для которой

$$T \models \varphi(b^1, \dots, b^n, a) \Leftrightarrow T \models \neg \varphi(b^{\sigma(1)}, \dots, b^{\sigma(n)}, a).$$

4.13. Теорема (Шелах [4], [12]). Следующие свойства полной теории T эквивалентны:

- 1) T нестабильна;
- 2) для любой мощности $\lambda \geq \omega$ существует множество A в T мощности λ , для которого $|S(A)| > |A|$;
- 3) для некоторой мощности λ с условием $\lambda^{|\lambda|} = \lambda$ существует множество A в T мощности λ , для которого $|S(A)| > |A|$;
- 4) существует нестабильная в T формула $\varphi(x, y)$, у которой длина x равна 1;
- 5) существует формула $\varphi(x, y)$ в T , у которой длины x и y равны m , и существует такая последовательность $\{a^n \mid n \in \omega\}$ кортежей длины m , что для всех $n, k \in \omega$

$$T \models \varphi(a^n, a^k) \Leftrightarrow n < k;$$

- 6) существует формула $\varphi(x^1, \dots, x^n, a)$ в T , $l(x^1) = \dots = l(x^n) = m$, и такое бесконечное множество X кортежей длины m , что формула $\varphi(x^1, \dots, x^n, a)$ является связанной и антисимметричной над X ;

7) существует бесконечная неразличимая в T последовательность кортежей, не являющаяся неразличимым множеством;

- 8) существует такая формула $\varphi(x^1, \dots, x^n, y)$ сигнатуры теории T , что для всех $n_0 \in \omega$ существует множество I кортежей длины $m = l(x^1) = \dots = l(x^n)$, $|I| \geq n_0$, и такой a , что $\varphi(x^1, \dots, x^n, a)$ связана и антисимметрична над I в T .

Многие свойства totally трансцендентных теорий переносятся на стабильные теории. Однако часто «глобальные» свойства (т. е. истинные для множества всех формул) заменяются на «локальные» (истинные для конечных множеств формул). В частности, имеется следующий аналог теоремы 3.14.

4.14. Теорема (Шелах [4], [12]). Пусть T — стабильная теория, Δ — конечное множество формул в T , λ — регулярный кардинал, A — множество в T , X — множество кортежей одинаковой длины $|A| < \lambda \leq |X|$. Тогда существует $Y \subseteq X$, $|Y| = \lambda$, являющийся Δ -неразличимым над A .

Аналогом леммы 3.13 является

4.15. Теорема (Шелах [4]). Пусть T — стабильная теория, $\mathcal{M}$ — модель T , $B \subseteq A$, α — ординал, $p \in S_*(A)$, $R_x^\varphi(p \upharpoonright \varphi) = R_x^\varphi((p \upharpoonright \varphi) \upharpoonright B)$ для всех формул $\varphi(x, y)$ сигнатуры теории T и для всех $\gamma < \alpha$ кортеж a^γ реализует тип $p \upharpoonright B_\gamma$, где $B_\gamma = \bigcup \{a^\beta \mid \beta < \gamma\} \cup B$. Тогда $\{a^\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ является неразличимым множеством над B и

$$|\{\gamma < \alpha \mid T \models \neg \varphi(a^\gamma, c)\}| < \omega$$

для всех $\varphi(x, c) \in p$.

4.16. Определение (С. Шелах). Полная теория T называется стабильной в мощности λ или λ -стабильной, если для любого множества A в T мощности λ имеет место $|S(A)| \leq |A|$.

В силу свойства 7) теоремы 4.9 стабильная теория T стабильна во всех мощностях λ , для которых $\lambda^{|\lambda|} = \lambda$. Из теоремы 4.9 вытекает также, что полная теория T стабильна, если она λ -стабильна для некоторого бесконечного λ . Полная счетная теория T тогда и только тогда totally трансцендентна, когда она ω -стабильна.

Далее будут полностью описаны множества кардиналов, в которых полная теория T стабильна.

4.17. Определение (С. Шелах). Говорим, что формула $\varphi(x, a)$ в теории T копируется над A , если существуют натуральное число m и кортежи a^n , $n \in \omega$, для которых выполняются условия:

$$(1) \text{ tp}(a, A) = \text{tp}(a^n, A), n \in \omega;$$

(2) множество формул $\{\varphi(x, a^n) \mid n \in \omega\}$ m -несовместно, т. е. для любого множества $w \subseteq \omega$ мощности m формула $\bigwedge_{n \in w} \varphi(x, a^n)$ несовместна в T .

4.18. Определение (С. Шелах). Будем говорить, что x -тип p разветвляется над множеством A в полной теории T , если существуют формулы $\varphi^0(x, a^0), \dots, \varphi^n(x, a^n)$ со свойствами

$$(1) \quad p \vdash \bigvee_{k \leq n} \varphi^k(x, a^k);$$

$$(2) \quad \varphi^k(x, a^k) \text{ копируется над } A \text{ для всех } k \leq n.$$

4.19. Определение (С. Шелах). Пусть T — стабильная теория. Определим кардиналы $k^m(T)$, $m \in \omega$, и $k(T)$ так: $k^m(T)$ — первый бесконечный кардинал κ , для которого не существует возрастающей последовательности множеств A_i , $i \leq \kappa$, в T и типа $p \in S^m(A_\kappa)$, для которых $p \upharpoonright A_{i+1}$ разветвляется над A_i , $i < \kappa$. Полагаем $k(T) = \sup \{k^m(T) \mid m \in \omega\}$.

Следующая теорема показывает, что кардиналы $k^m(T)$ для стабильных теорий T существуют, и дает их оценку сверху.

4.20. Теорема (Шелах [12]). Если T стабильна, то $k(T) \leq |T|^+$.

Описание спектра стабильности стабильных теорий T дает

4.21. Теорема (Шелах [12]). Пусть T — стабильная теория и

$$\mu_0 = \sup \{|S(A)|, A \text{ — множество в } T, |A| \leq |T|\}.$$

Тогда T стабильна в мощности μ в том и только в том случае, когда

$$\mu = \mu_0 + \mu^{< k(T)},$$

причем μ_0 — первый кардинал $\geq |T|$, в котором T стабильна, и $\mu_0 \leq 2^{|T|}$.

4.22. Определение (С. Шелах). Стабильная теория T называется *суперстабильной*, если она стабильна во всех мощностях $\lambda \geq 2^{|T|}$.

Из теоремы 4.21 получаем

4.23. Следствие. Стабильная теория T тогда и только тогда суперстабильна, когда $k(T) = \omega$.

Важность кардиналов $k^m(T)$, $m \in \omega$, кроме теоремы 4.21, объясняет также

4.24. Теорема (Шелах [12]). Пусть T — стабильная теория, X — неразличимое над A в T множество, a — некоторый кортеж элементов и $l(a) = m$. Тогда существует такое подмножество $Y \subseteq X$, что $|Y| < k^m(T)$ и $X - Y$ — неразличимое в T над $A \cup a \cup Y$ множество.

Из этой теоремы и 4.23 получаем

4.25. Следствие. Если T — суперстабильная теория, X — неразличимое над A в T множество и Y — конечное множество элементов, то существует такое конечное $Z \subseteq X$, что $X - Z$ является неразличимым над $A \cup Y \cup Z$.

Приведем несколько теорем, касающихся существования моделей стабильных теорий со специальными свойствами. Проблеме двух кардиналов для стабильных теорий полностью решает

4.26. Теорема (Шелах [1], Лахлан [2]). Если T — стабильная теория, $\mathfrak{A}$ — модель T , $\varphi(x)$ — формула сигнатуры теории T и $\omega \leq |\varphi(\mathfrak{A})| < |A|$, то для любых кардиналов $|T| \leq \lambda < \kappa$ существует модель $\mathfrak{B}$ теории T , для которой $|\varphi(\mathfrak{B})| = \lambda$ и $|B| = \kappa$.

Мощности насыщенных моделей стабильной теории T полностью описывает

4.27. Теорема (Шелах [12]). Если T — стабильная теория, то следующие условия на кардинал $\lambda \geq |T|$ эквивалентны:

1) T имеет насыщенную модель мощности λ ;

2) T стабильна в λ или $\lambda = \lambda^{<\lambda} + |D(T)|$.

4.28. Определение (С. Шелах). Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется λ -компактной, если каждый совместный в $\text{Th}(\mathfrak{A})$ тип p над A мощности $< \lambda$ реализуется в $\mathfrak{A}$.

Это понятие совпадает с понятием λ -насыщенной системы для $\lambda \geq |\Sigma(\mathfrak{A})|$. Для произвольных λ λ -насыщенность влечет λ -компактность.

4.29. Определение (С. Шелах). (1) Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется λ -простой над множеством $A_1 \subseteq A$, если $\mathfrak{A}$ является λ -компактной и для любой λ -компактной системы $\mathfrak{B}$, для которой $A_1 \subseteq B$ и

$$\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A_1} \equiv \langle \mathfrak{B}, a \rangle_{a \in A_1},$$

существует элементарное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, тождественное на A_1 .

(2) Если в (1) заменить « λ -компактность» на « λ -насыщенность», то получим определение $(\lambda, 1)$ -простой алгебраической системы.

4.30. Теорема (Рессер [1], Шелах [2]). Пусть T — стабильная теория, $\lambda > |T|$ или T стабильна в некоторой мощности $\mu < 2^\lambda$. Тогда над любым множеством X в T существует λ -простая (и также $(\lambda, 1)$ -простая) модель T , причем эта модель единственна, т. е. если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — λ -простые модели над X , то существует изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, тождественный на X .

4.31. Теорема (Шелах [6]). Если T стабильна и $\lambda \geq k(T) + \omega_1$, то над каждым множеством X и T существует $(\lambda, 1)$ -простая модель.

4.32. Теорема (А. Лахлан, С. Шелах). Пусть T — стабильная счетная теория. Тогда для каждого множества A_1 в T существует такая модель $\mathfrak{A}$ теории T , что $A_1 \subseteq A$ и выполняется условие: если $c \in A$ и $\varphi(x, y)$ — формула сигнатуры T , то существует формула $\theta(x, b)$, $b \in A_1$, для которой

(1) $T \models \varphi(c, a) \Rightarrow T \models \forall x (\theta(x, b) \rightarrow \varphi(x, a))$ для всех $a \in A_1$;

(2) $T \models \theta(c, b)$.

4.33. Определение. Однородным ω -деревом в теории T называется последовательность формул $\varphi_n(x, y^n)$, $0 < n < \omega$, и множество кортежей a_η , $\eta \in {}^{<\omega}\omega$, для которых выполняются условия:

(1) для любого $\eta \in {}^{<\omega}\omega$ множество

$$\{\varphi_n(x, a_{\eta \upharpoonright n}) \mid 0 < n < \omega\}$$

совместно в T ;

(2) для любых $\eta \in {}^{n+1}\omega$, $0 < n < \omega$,

$$T \models \forall x (\varphi_{n+1}(x, a_\eta) \rightarrow \varphi_n(x, a_{\eta \upharpoonright n}));$$

(3) для любых $\eta \in {}^n\omega$, $n < \omega$, $i < j < \omega$,

$$T \models \neg \exists x (\varphi_{n+1}(x, a_{\eta \upharpoonright i}) \wedge \varphi_{n+1}(x, a_{\eta \upharpoonright j})).$$

4.34. Определение (С. Шелах). Пусть $\varphi(x, b)$ — совместная формула в полной теории T . Индукцией по ординалу α определим свойство $D_x(\varphi(x, b)) \geq \alpha$:

(1) $D_x(\varphi(x, b)) \geq 0$;

(2) если δ — предельный ординал и $D_x(\varphi(x, b)) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$, то $D_x(\varphi(x, b)) \geq \delta$;

(3) $D_x(\varphi(x, b)) \geq \alpha + 1$, если существуют формула $\psi(x, z)$ сигнатуры T , число $n \in \omega$ и кортежи a^k , $k \in \omega$, для которых выполняются условия:

(a) $D_x(\varphi(x, b) \wedge \psi(x, a^k)) \geq \alpha$, $k \in \omega$;

(б) множество $\{\psi(x, a^k) \mid k \in \omega\}$ n -несовместно с $\varphi(x, b)$, т. е. для любого множества $w \subseteq \omega$ мощности n формула $\varphi(x, b) \wedge \bigwedge_{i \in w} \psi(x, a^i)$ несовместна в T .

4.35. Определение. Пишем $D_x(\varphi(x, a)) = \alpha$, если $D_x(\varphi(x, a)) \geq \alpha$ и не имеет места $D_x(\varphi(x, a)) \geq \alpha + 1$. Пишем $D_x(\varphi(x, a)) = \infty$, если для любого ординала α имеет место $D_x(\varphi(x, a)) \geq \alpha$. Значение $D_x(\varphi(x, a))$ называется x -степенью Шелаха формулы $\varphi(x, a)$.

4.36. Определение. Если p — совместный x -тип в полной теории T , то x -степенью Шелаха $D_x(p)$ типа p называется наименьший ординал из множества

$$\{D_x(\bigwedge p_i) \mid p_i \text{ — конечный подтип } p\}$$

или символ ∞ , если такого ординала не существует.

4.37. Теорема (Шелах [4]). Если p — совместный x -тип в полной теории T и $D_x(p) \geq |T|^+$, то $D_x(p) = \infty$.

4.38. Теорема (Шелах [4]). Пусть T — стабильная теория. Следующие свойства T эквивалентны:

- 1) T суперстабильна;
- 2) в T не существует однородного ω -дерева;
- 3) $D_x(x=x) < |T|^+$;
- 4) для некоторого λ , для которого $\lambda < \lambda^\omega$, и для любого A мощности λ имеет место $|S(A)| \leq |A|$;
- 5) для любого множества A и T имеет место $|S(A)| \leq |A| + 2^{2^{|A|}}$.

Следующие две теоремы относятся к наиболее интересным в данной теории.

4.39. Теорема (Шелах [5], [8]). Если для полной теории T и некоторой мощности $\lambda \geq |T| + \omega_1$ имеет место $S_1(\lambda) < 2^\lambda$, то T суперстабильна.

4.40. Теорема (Лаклан [4]). Если T — полная теория и $1 < S_T(\omega) < \omega$, то T не является суперстабильной.

Теорема 4.39 имеет многочисленные приложения при подсчете спектра различных теорий (см., например, § 6). Из этой теоремы и теоремы 4.9 сразу вытекает, что любая теория T , имеющая полное расширение T_1 , в котором интерпретируется частичный порядок с бесконечными цепями, имеет максимальный спектр $S_T(\lambda) = 2^\lambda$ в мощностях $\lambda \geq |T| + \omega_1$. Отметим также одно любопытное следствие теоремы 4.39.

4.41. Теорема (Белеградек [1]). Любое неабелево многообразие групп M имеет максимальный спектр $S_M(\lambda) = 2^\lambda$ в несчетных мощностях λ .

4.42. Определение (Мустафин [2]). Пусть T — счетная полная теория. Тип $p \in S^m(\emptyset)$ называется суперстабильным, если для любого $\lambda \geq 2^\omega$ и любого множества X в T мощности $\leq \lambda$ имеет место

$$|\{q \in S^m(X) \mid p \subseteq q\}| \leq \lambda.$$

Теорема 4.40 допускает следующее обобщение.

4.43. Теорема (Мустафин [2]). Если полная счетная теория T имеет хотя бы один неглавный суперстабильный n -тип p над $\emptyset$, то $S_T(\omega) \geq \omega$.

Теорема 4.39 используется для получения следующего усиления теоремы 3.21 Шелаха.

4.44. Теорема (Мустафин [2]). Если полная счетная теория T двукардинальна (см. § 1), то $S_T(\omega_\alpha) \geq |\alpha + 1|$ для любого ординала α .

Частным случаем гипотезы 1.13 Шелаха является

4.45. Гипотеза (С. Шелах). Для любой счетной полной теории выполняется одно из следующих условий:

- 1) $S_T(\omega_\alpha) \leq 2^{2^\omega}$ для всех α ;
- 2) $S_T(\omega_\alpha) \geq |\alpha + 1|$ для достаточно больших α .

Еще более слабой является

4.46. Гипотеза (М. И. Бекенов). Для любой счетной полной теории T имеется одна из возможностей:

- 1) $S_T(\kappa) \leq 2^{2^\omega}$ для любого кардинала κ ;
- 2) функция S_T не ограничена.

Заметим, что эта гипотеза также слабее гипотезы 8.21.

М. И. Бекенов подтвердил эту гипотезу для квазитрансцендентных теорий.

4.47. Определение (Мустафин [1]). Полная теория T называется квазитрансцендентной, если над любым множеством X в T существует простая атомная T -модель.

Тотально трансцендентные теории являются, конечно, квазитрансцендентными, однако среди квазитрансцендентных теорий имеются также не тотально трансцендентные.

4.48. Теорема (Бекенов [1]). Если T — счетная полная квазитрансцендентная теория, то спектр S_T удовлетворяет одному из условий гипотезы 4.46.

Пусть до конца параграфа T — счетная полная теория, X — некоторое множество в T .

Тип $p \in S(X)$ называется алгебраическим, если он содержит некоторую конечную в T формулу. Множество неалгебраических типов из $S(X)$ обозначим через $S^{(1)}(X)$.

Все определения, приведенные далее в этом параграфе, принадлежат Т. Г. Мустафину.

Тип $p \in S^{(1)}(X)$ называется *сильным*, если для любого множества $Y \supseteq X$ в T существует лишь единственный тип $q \in S^{(1)}(Y)$, для которого $p \leq q$.

Пусть $p, q \in S^{(1)}(X)$, $\mathfrak{A}$ — T -модель и $X \subseteq A$. Отношение $p \leq_A q$ означает, что для любой модели $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ из реализуемости q в $B - A$ следует реализуемость p в $B - A$. Отношение $p \equiv q$ означает, что для любой модели $\mathfrak{A}$, $X \subseteq A$, имеют место $p \leq_A q$ и $q \leq_A p$. Множество $\{q \mid q \in S^{(1)}(X), q \equiv p\}$ обозначим через $[p]$, а множество $\{[p] \mid p \in S^{(1)}(X)\}$ — через $S^{(1)}[X]$. Пишем $[p] \leq_A [q]$, если $p \leq_A q$. Типы p, q назовем *независимыми*, если для любой T -модели $\mathfrak{A}$, $X \subseteq A$, не имеют места ни $p \leq_A q$, ни $q \leq_A p$. Если p и q независимы, то будем говорить, что $[p]$ и $[q]$ независимы.

4.49. Определение (Т. Г. Мустафин). Множество $M = \{[p_i] \in S^{(1)}[X] \mid i \in I\}$ называется *базой* для $S^{(1)}[X]$, если:

(1) $[p_i]$ и $[p_j]$ независимы для $i \neq j$;

(2) для любого $[q] \in S^{(1)}[X]$ и любой T -модели $\mathfrak{A}$, $X \subseteq A$, существует такое $i \in I$, что $[p_i] \leq_A [q]$.

Базой теории T называется база для $S^{(1)}[\emptyset]$ (если она существует). Базу M теории T назовем *сильной*, если для любого $[p] \in M$ существует сильный тип $q \in [p]$. Следующая теорема описывает спектры квазитрансцендентных теорий с сильной базой.

4.50. Теорема (Мустафин [1]). Если T — счетная квазитрансцендентная теория с сильной базой, то существуют такие кардиналы ν и μ , что

$$S_T(\omega_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu + \mu = 1, \alpha > 0; \\ \max \{(|\alpha + 1|^\nu - |\alpha|^\nu), (\omega + |\alpha|)^{\min(\mu, \omega_\alpha)}\}, & \text{если } \alpha < \omega, \nu < \omega; \\ \max \{|\alpha + 1|^\nu, (\omega + |\alpha|)^{\min(\mu, \omega_\alpha)}\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

§ 5. Категоричные универсалы и хорновы классы

В этом параграфе будут рассмотрены категоричные классы алгебраических систем, обладающие классическими свойствами замкнутости: относительно подсистем, гомоморфных образов и фильтрованных произведений.

Если аксиоматизируемый класс K замкнут относительно подсистем, то он называется *универсальным* или *универсалом*, если он замкнут относительно гомоморфных образов, то он называется *позитивным*, и он называется *хорновым*, если он замкнут относительно фильтрованных произведений. Теорию T будем называть *универсальной*, *позитивной* или *хорновой*, если она имеет

систему аксиом, состоящую соответственно из универсальных, позитивных или хорновых предложений.

Следующую теорему можно уже отнести к «классике» теории моделей.

5.1. Теорема (Тарский, Линдон, Кейслер). Пусть K — некоторый аксиоматизируемый класс алгебраических систем. Тогда:

а) K — универсал $\Leftrightarrow$ теория $\text{Th}(K)$ универсальна;

б) K позитивный $\Leftrightarrow$ теория $\text{Th}(K)$ позитивна;

в) K хорнов $\Leftrightarrow$ теория $\text{Th}(K)$ хорнова.

В дальнейшем под «классом систем», если из контекста не вытекает противное, понимается «аксиоматизируемый класс систем».

Большинство классов систем, рассматриваемых в алгебре, обладает некоторыми из перечисленных свойств замкнутости. Если класс K является позитивным хорновым универсалом, то K называется *многообразием*. Примерами многообразий могут служить классы всех полугрупп, всех групп, всех колец, абелевых групп, булевых колец, нильпотентных групп ступени $\leq s$. Универсальные хорновы классы называются *квазимногообразиями*. Квазимногообразиями являются, например, класс групп без кручения из любого многообразия групп и класс колец характеристики 0. В качестве примера позитивного хорнова класса, не являющегося универсалом, укажем класс делимых абелевых групп, а в качестве хорнова класса, не являющегося ни позитивным, ни универсалом, — класс безатомных булевых алгебр.

Следующее предложение показывает, что если изучать структурные свойства полных или категоричных классов, то выделение позитивных классов или позитивных универсалов не имеет смысла.

5.2. Предложение. Пусть T — теория сигнатуры Σ , а сигнатура Σ' получается из Σ добавлением нового 3-местного функционального символа f . Тогда существует такое предложение Φ_0 сигнатуры Σ' , что теория T' сигнатуры Σ' с множеством аксиом $T \cup \{\Phi_0\}$ имеет следующие свойства:

а) T' — позитивная теория;

б) любая модель $\mathfrak{A}$ теории T' является определимым обогащением модели $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma$ теории T , в частности T' полна (κ -категорична) тогда и только тогда, когда T полна (κ -категорична);

в) если T — универсальная теория, то T' — универсальная теория.

Доказательство. В качестве Φ_0 берем следующее универсальное позитивное предложение:

$$\forall x \forall z (f(x, x, z) = z) \wedge \forall x \forall y \forall z (f(x, y, z) = y \vee x = y).$$

Следующее предложение истинно на неоднородных системах:

$$\Phi_0 \rightarrow \forall x \forall y (x \neq y \leftrightarrow \forall z (f(x, y, z) = y)).$$

Поэтому любое предложение сигнатуры Σ' эквивалентно относительно Φ_0 некоторому позитивному предложению. Отсюда получаем а). Из тождественной истинности предложения

$$\Phi_0 \rightarrow \forall x \forall y \forall z \forall u (f(x, y, z) = u$$

$$\leftrightarrow (x = y \rightarrow u = z) \wedge (x \neq y \rightarrow u = y))$$

получаем свойство б). Свойство в) следует из универсальности Φ_0 .

В силу предложения 5.2 интерес при изучении структур категоричных классов могут представлять лишь следующие комбинации классических свойств замкнутости: а) универсальность, б) хорновость, в) универсальность и хорновость, г) позитивность и хорновость, д) универсальность, позитивность и хорновость. В дальнейшем будет показано, что выделение классов с каждой из этих комбинаций свойств оказалось плодотворным.

Вначале мы рассмотрим универсалы. Следующая теорема хорошо известна.

5.3. Теорема (Линдстрём). *Класс бесконечных систем категоричного универсала K является модельно полным.*

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *локально конечной*, если любое конечное подмножество $X \subseteq A$ порождает в $\mathfrak{A}$ конечную подсистему. Следующая характеристическая теорема легко доказывается с помощью теоремы компактности Мальцева, характеристической теоремы Рыль-Нардзевского и предыдущей теоремы Линдстрёма.

5.4. Теорема (Палютин [1]). *Для того чтобы алгебраическая система $\mathfrak{A}$ принадлежала некоторому ω -категоричному универсалу, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- $\mathfrak{A}$ локально конечна;
- существует такая функция $g: \omega \rightarrow \omega$, что для всех $a \in A$ и конечных $X \subseteq A$ тип $\text{tp}(a, X, \mathfrak{A})$ реализуется в любой подсистеме $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, содержащей X и имеющей мощность $\geq g(|X|)$.

В качестве непосредственного следствия данной теоремы получаем

5.5. Следствие. *Если K — ω -категоричный универсал, то в K нельзя относительно элементарно определить (см. Ершов [3]) никакой класс бесконечных линейных порядков.*

Несмотря на это, вопрос о стабильности ω -категоричных универсалов остается открытым. Неизвестен ответ и на следующий вопрос.

5.6. Вопрос. *Существует ли ω -категоричный универсал K , не являющийся ω_1 -категоричным?*

Следующие два предложения, конечно, потеряют самостоятельное значение, если этот вопрос решится отрицательно. Однако нам кажется, что ответ на вопрос 5.6 будет положительным:

5.7. Предложение (Палютин [1]). *Если T — ω -категоричная универсальная теория, то полная теория T_∞ недвуккардинальна.*

5.8. Предложение (Палютин [1]). *Если T — ω -категоричная универсальная теория, то следующие условия эквивалентны:*

- T ω_1 -категорична;
- T_∞ ω -стабильна;
- некоторое несущественное расширение T имеет сильно минимальную формулу.

Из теоремы Лаклана [5] следует, что к условиям а) — в) предыдущего предложения можно добавить условие

- T_∞ суперстабильна.

Пример класса безатомных булевых алгебр показывает, что для хорновых классов K вопрос 5.6 решается положительно. Ниже будет показано, что для универсальных хорновых и позитивных хорновых классов K вопрос 5.6 решается отрицательно.

5.9. Определение. Класс алгебраических систем K называется *свободным* (в мощности λ), если все K_+ -системы (K -системы мощности λ) K -свободны.

5.10. Определение (Гивант [4]). Класс алгебраических систем K называется *строго свободным*, если для любой K_+ -системы $\mathfrak{A}$ выполняются следующие условия:

- если $a \in A$ не является значением константного термина в $\mathfrak{A}$, то множество $\{a\}$ K -свободно в $\mathfrak{A}$;
- если множество $X \subseteq A$ K -свободно в $\mathfrak{A}$ и $b \in A - A[X]$, то множество $X \cup \{b\}$ также K -свободно в $\mathfrak{A}$.

Легко понять, что строго свободный класс является свободным. Для универсалов верно и обратное.

5.11. Теорема (Гивант [1], [4]). *Любой свободный универсал является строго свободным.*

5.12. Определение (Наркевич [1]). Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *v^* -алгеброй*, если класс $\{\mathfrak{A}\}$ является строго свободным.

Понятие $\{\mathfrak{A}\}$ -свободного в $\mathfrak{A}$ множества для v^* -алгебры $\mathfrak{A}$ удовлетворяет лемме о замене из теории линейных пространств. Поэтому для v^* -алгебры $\mathfrak{A}$ максимальные $\{\mathfrak{A}\}$ -свободные в $\mathfrak{A}$ подмножества A имеют одинаковую мощность, которая называется размерностью $\mathfrak{A}$ и обозначается через $\dim \mathfrak{A}$. Из теоремы 5.11 следует, что свободный универсал функциональной сигнатуры состоит из v^* -алгебр. Следующая теорема дает описание всех v^* -алгебр размерности ≥ 3 с точностью до рациональной эквивалентности алгебр.

5.13. Теорема (Урбаник [1]). Если $\mathfrak{A}$ — v^* -алгебра и $\dim \mathfrak{A} \geq 3$, то $\mathfrak{A}$ рационально эквивалентна одной из следующих алгебр:

1) векторному пространству $\mathfrak{A}^*$ над некоторым телом D с некоторым множеством $A_0 \subseteq A^*$ выделенных элементов, т. е. сигнатура $\mathfrak{A}^*$, кроме сложения и умножения на числа $\lambda \in D$, содержит константы для всех $a_0 \in A_0$;

2) аффинному пространству $\mathfrak{A}^*$ над некоторым телом D с некоторым множеством линейных сдвигов, т. е. сигнатура $\mathfrak{A}^*$, кроме аффинного сложения $x + y - z$ и аффинного умножения $\lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in D$, содержит еще множество одноместных операций $\{x + a_0 \mid a_0 \in A_0\}$ для некоторого $A_0 \subseteq A^*$;

3) алгебре $\mathfrak{A}^*$, все операции которой имеют местность ≤ 1 , одноместные операции которой образуют группу G подстановок множества A^* и такой, что если для некоторых $g \in G$ и $a \in A^*$ имеет место $g(a) = a$, то a является значением некоторой константы $\mathfrak{A}^*$.

Из этого описания легко доказывается

5.14. Предложение. Если $\mathfrak{A}$ — v^* -алгебра, то квазимногообразие $Q(\mathfrak{A})$, порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$, является строго свободным.

Ясно, что если K — свободное квазимногообразие, то K — минимальное квазимногообразие, т. е. $K = Q(\mathfrak{A})$ для любой $\mathfrak{A} \in K_+$. Таким образом, из 5.11 и 5.14 вытекает

5.15. Теорема. Если K — квазимногообразие алгебр, то следующие условия эквивалентны:

а) K свободный;

б) $K = Q(\mathfrak{A})$ для некоторой v^* -алгебры $\mathfrak{A}$.

Следующее утверждение вытекает из того, что любая K -свободная система $\mathfrak{A}$ мощности, превосходящей $\|\Sigma(K)\|$, имеет K -свободный базис мощности $|A|$.

5.16. Предложение. Если K — λ -свободный класс алгебраических систем и $\lambda > \|\Sigma(K)\|$ или λ — конечный кардинал, то K категоричен в λ .

Конечно, для $\lambda = \|\Sigma(K)\|$ предыдущее утверждение неверно. Контрпримером может служить класс векторных пространств над бесконечным полем F .

5.17. Определение. Пусть K — класс алгебраических систем. Спектром свободы $F(K)$ (категоричности $C(K)$) класса K назовем класс таких мощностей $\lambda > 1$, что все K -системы мощности λ свободны (изоморфны между собой).

Заметим, что по этому определению, если не имеется K -систем мощности λ , то $\lambda \in F(K)$ и $\lambda \in C(K)$. В частности, если K — свободный класс, то $F(K)$ совпадает с классом всех мощностей > 1 . Из предложения 5.16 следует $F(K) \subseteq C(K) \cup \{\lambda \mid \omega \leq \lambda \leq \|\Sigma(K)\|\}$. Если K — класс алгебраических си-

стем, и $X = \{\lambda \mid \lambda \text{ — кардинал и } \lambda \leq \|\Sigma(K)\|\}$, то классы кардиналов $F(K) \cap X$ и $C(K) \cap X$ назовем соответственно большими спектрами свободы и категоричности класса K .

Следующие две теоремы полностью описывают большие спектры свободы и категоричности для квазимногообразий.

5.18. Теорема (Палютин [3], [4]). Если квазимногообразие K категорично в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(K)\|$, то K категорично во всех мощностях, за исключением, быть может, 1 и $\mu_0 \geq \omega$ такой, что K не имеет систем мощностей ν , $1 < \nu < \mu_0$.

5.19. Теорема (Гивант [3], [4]). Если квазимногообразие K свободно, но не категорично в мощности $\|\Sigma(K)\|$, то K — свободное квазимногообразие.

5.20. Теорема (Палютин [4]). Если квазимногообразие K категорично в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(K)\|$, то следующие условия эквивалентны:

1) K свободно;

2) для некоторого натурального $N > 1$ все N -порожденные K -системы свободны.

Условие категоричности K в предыдущей теореме существенно. Это показывает пример квазимногообразия K_0 абелевых групп без кручения. В квазимногообразии K_0 все конечно порожденные системы свободны.

Оставшаяся часть этого параграфа будет посвящена описанию хорновых классов, позитивных хорновых классов, квазимногообразий и многообразий, категоричных в некоторой бесконечной мощности, не меньшей мощности сигнатуры. Полное описание категоричных квазимногообразий было получено Палютиным [6] и Гивантом (в [2] для многообразий и в [5] для квазимногообразий). Следует отметить, что до получения этих окончательных теорем было опубликовано несколько работ обоих авторов, содержащих частичное описание категоричных квазимногообразий. Отметим также, что теорема 5.13 К. Урбаника в обоих описаниях играет важную роль. Е. А. Палютин и С. Гивант пришли к своим теоремам представления довольно разными путями. Формулировки этих теорем тоже различны. Е. А. Палютин нашел все множества аксиом для категоричных квазимногообразий, а С. Гивант описал структуры систем этих классов. Отметим, что вопрос об описании многообразий, категоричных во всех мощностях, ставили независимо А. Г. Курош в 1965 г. и А. Тарский в 1971 г. (см. Гивант [3], [4]).

5.21. Определение. Характеристикой типа A назовем четверку $X = \langle n, \kappa, G, E \rangle$, где n — положительное натуральное число, κ — кардинал, G — группа, E — множество подгрупп группы G , удовлетворяющее следующим условиям:

а) если $H \in E$ и $g \in G$, то $gHg^{-1} \in E$;

б) если $H_1, H_2 \in E$ и $H_1 \neq H_2$, то $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, где e — единица группы G ;

в) если $H \in E$, $g \in G$ и $g \notin H$, то $gHg^{-1} \neq H$.

5.22. Определение. Пусть $X = \langle n, \kappa, G, E \rangle$ — характеристика типа A . Определим квазимногообразие $K(X)$, которое будем называть *стандартным квазимногообразием типа A и характеристики X* . Сигнатура $\Sigma(X)$ квазимногообразия $K(X)$ состоит из символов одноместных функций $\{g \mid g \in G\}$ и двух множеств констант $\{c_H \mid H \in E\}$ и $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$, символа f n -местной операции и n символов $g_1, \dots, g_n$ одноместных операций. Аксиомами $K(X)$ будут:

$$A_1. h_1(h_2(g_1(x))) = h(g_1(x)), \quad h, h_1, h_2 \in G, \quad h = h_1 \cdot h_2;$$

$$A_2. e(g_1(x)) = g_1(x), \quad \text{где } e \text{ — единица группы } G;$$

$$A_3. h(c_H) = c_{hHh^{-1}}, \quad h \in G, \quad H \in E;$$

$$A_4. h(x) = x \rightarrow x = c_H, \quad h \in H, \quad H \in E, \quad h \neq e;$$

$$A_5. h(x) = x \rightarrow x = y, \quad h \neq e \text{ и } h \notin H \text{ для всех } H \in E;$$

$$A_6. h(c_\alpha) = c_\beta \rightarrow x = y, \quad h \in G, \quad h \neq e, \quad \alpha, \beta < \kappa;$$

$$A_7. h(c_\alpha) = c_H \rightarrow x = y, \quad h \in G, \quad \alpha < \kappa, \quad H \in E;$$

$$A_8. c_{H_1} = c_{H_2} \rightarrow x = y, \quad H_1, H_2 \in E, \quad H_1 \neq H_2;$$

$$A_9. g_1(c_\tau) = c_\tau, \quad \tau \in E \cup \kappa;$$

$$A_{10}. g_1(h(x)) = h(x), \quad h \in G;$$

$$A_{11}. h(x) = h(g_1(x)), \quad h \in G;$$

$$A_{12}. f(g_1(x), \dots, g_n(x)) = x;$$

$$A_{13}. g_i(f(g_1(x_1), \dots, g_1(x_n))) = g_1(x_i), \quad i \leq n;$$

$$A_{14}. g_i(g_j(x)) = g_j(x), \quad i, j \leq n;$$

$$A_{15}. f(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)).$$

5.23. Определение. Характеристикой типа B назовем тройку $\langle n, \kappa, D \rangle$, где n — положительное натуральное число, κ — кардинал, не равный нулю, а D — тело. Пусть $X = \langle n, \kappa, D \rangle$ — характеристика типа B . Определим *стандартное квазимногообразие $K(X)$ типа B и характеристики X* . Сигнатура $\Sigma(X)$ квазимногообразия $K(X)$ состоит из символа $+$ двуместной операции, символов $\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ констант, символа f n -местной операции и символов $g_1, \dots, g_n$ одноместных операций. Аксиомами $K(X)$ будут следующие квазитожества, где 1 и 0 — единица и ноль тела D :

$$B_1. x + y = y + x;$$

$$B_2. x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$B_3. x + c_0 = g_1(x);$$

$$B_4. 0(x) = c_0;$$

$$B_5. \lambda_1(\lambda_2(x)) = \lambda(x), \quad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in D, \quad \lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2;$$

$$B_6. \lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y), \quad \lambda \in D;$$

$$B_7. \lambda_1(x) + \lambda_2(x) = \lambda(x), \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in D, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$B_8. 1(x) = g_1(x);$$

$$B_9. \lambda_1 c_{\alpha_1} + \dots + \lambda_k c_{\alpha_k} = c_0 \rightarrow x = y,$$

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < \kappa, \quad 0 \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq D;$$

$$B_{10}. g_1(x + y) = x + y;$$

$$B_{11}. g_1(\lambda(x)) = \lambda(x), \quad \lambda \in D;$$

$$B_{12}. g_1(c_\alpha) = c_\alpha, \quad \alpha < \kappa;$$

$$B_{13}. x + y = g_1(x) + g_1(y);$$

$$B_{14}. \lambda(x) = \lambda(g_1(x)), \quad \lambda \in D;$$

$$B_{15}. \text{аксиомы } A_{12} - A_{15}.$$

5.24. Определение. Характеристикой типа C назовем пятерку $X = \langle n, e, k, \kappa, D \rangle$, где n — положительное натуральное число, $e \in \{0, 1\}$, $0 \leq k < n$, κ — кардинал, больший $k - 1$, и D — тело. Пусть $X = \langle n, e, k, \kappa, D \rangle$ — характеристика типа C . Определим *стандартное квазимногообразие $K(X)$ типа C и характеристики X* . Сигнатура $\Sigma(X)$ квазимногообразия $K(X)$ состоит из символа трехместной операции S , символов двухместных операций $\{P_\lambda \mid \lambda \in D\}$, символов одноместных операций $\{R_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, символа n -местной операции f и символов двухместных операций $g_1, \dots, g_n$. Если $e = 1$, то $\Sigma(X)$ содержит еще символ 0 одноместной операции.

Аксиомами $K(X)$ будут следующие, где 1 — единица D^*):

$$C_1. S(x, y, z) = S(y, x, z);$$

$$C_2. S(x, S(y, u, z), z) = S(S(x, y, z), u, z);$$

$$C_3. S(x, y, y) = g_1(y, x);$$

$$C_4. P_\lambda(P_{\lambda_1}(x, y), y) = P_{\lambda \cdot \lambda_1}(x, y), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in D;$$

$$C_5. P_\lambda(S(x, y, z), z) = S(P_\lambda(x, z), P_\lambda(y, z), z), \quad \lambda \in D;$$

$$C_6. P_{\lambda_1 + \lambda_2}(x, y) = S(P_{\lambda_1}(x, y), P_{\lambda_2}(x, y), y), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in D;$$

$$C_7. P_1(x, y) = g_1(y, x);$$

*) Здесь некоторые аксиомы упрощены по сравнению с работой Палютина [6]. На возможность такого упрощения указывал Гивант [5].

$$C_8. S(x, y, g_1(z, u)) = S(S(x, y, z), P_{-1}(g_1(z, u), z), z);$$

$$C_9. P_\lambda(x, g_1(y, z)) = S(P_\lambda(x, y), P_{(1-\lambda)}(g_1(y, z), y), y), \lambda \in D;$$

$$C_{10}. R_\alpha(g_1(y, x)) = S(g_1(y, x), R_\alpha(y), y), \alpha < \kappa.$$

Определим терм $R_{(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)}(x)$ сигнатуры $\Sigma(X)$, где

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D$ и $a_1, \dots, a_n \in \kappa$, индукцией по n :

$$R_{\lambda_1 a_1}(x) = P_{\lambda_1}(R_{a_1}(x), x), R_{(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{k+1} a_{k+1})}(x) = \\ = S(R_{(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k)}(x), R_{\lambda_{k+1} a_{k+1}}(x), x).$$

$$C_{11}. R_{(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m)}(x) = x \rightarrow y = z, \quad 0 \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subseteq D, \\ k \leq a_1, \dots, a_m < \kappa;$$

$$C_{12}. g_1(x, S(y, z, x)) = S(y, z, x);$$

$$C_{13}. g_1(x, P_\lambda(y, x)) = P_\lambda(y, x), \lambda \in D;$$

$$C_{14}. g_1(x, R_\alpha(x)) = R_\alpha(x), \alpha < \kappa;$$

$$C_{15}. S(x, y, z) = S(g_1(z, x), g_1(z, y), z);$$

$$C_{16}. P_\lambda(x, y) = P_\lambda(g_1(y, x), y), \lambda \in D;$$

$$C_{17}. f(g_1(y, x), \dots, g_n(y, x)) = x;$$

$$C_{18}. g_i(y, f(g_1(y, x_1), \dots, g_1(y, x_n))) = g_i(y, x_i), i \leq n;$$

$$C_{19}. g_i(y, x) = g_i(g_m(y, z), x), i, m \leq n;$$

$$C_{20}. g_i(x, x) = x, i \leq n;$$

$$C_{21}. f(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(y, x), g_2(y, g_1(x_1, x_2)), \dots, \\ \dots, g_n(y, g_1(x_1, x_n)));$$

$$C_{22}. g_i(z, g_1(x, y)) = S(g_1(x, y), g_i(z, x), g_1(z, x)), i \leq n;$$

$$C_{23}. g_1(x, S(y, u, z)) = S(g_1(z, y), g_1(z, u), g_1(x, z));$$

$$C_{24}. g_1(x, P_\lambda(y, z)) = P_\lambda(g_1(z, y), g_1(x, z)), \lambda \in D;$$

$$C_{25}. g_1(x, R_\alpha(y)) = R_\alpha(g_{\alpha+2}(x, y)), \alpha < k;$$

$$C_{26}. g_1(x, R_\alpha(y)) = R_\alpha(g_1(x, y)), k \leq \alpha < \kappa.$$

Если $\varepsilon = 0$, то список аксиом для $K(X)$ на этом заканчивается. Если $\varepsilon = 1$, то добавляем еще две аксиомы:

$$C_{27}. 0(g_1(x, y)) = 0(x);$$

$$C_{28}. g_1(y, 0(x)) = 0(y).$$

5.25. Определение. Квазимногообразие K назовем *стандартным*, если оно совпадает с $K(X)$ для некоторой характеристики X типов A, B или C .

Так как стандартные квазимногообразия явно выписаны в предыдущих определениях, то следующая теорема дает полное описание категоричных квазимногообразий.

5.26. Теорема (Палютин [6]). Любое квазимногообразие K , категоричное в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(K)\|$, рационально эквивалентно некоторому стандартному квазимногообразию $K(X)$.

5.27. Определение. Характеристику X типов A, B и C назовем *однородной*, если выполняются следующие условия:

1) если $X = \langle n, \kappa, G, E \rangle$, то $\kappa \leq 1$ и $|G| = 1$, причем, если $\kappa = 1$, то $E = \emptyset$;

2) если $X = \langle n, \kappa, D \rangle$, то $\kappa = 1$;

3) если $X = \langle n, \varepsilon, k, \kappa, D \rangle$, то $\kappa = k$.

Из вида аксиом стандартных квазимногообразий легко вытекает следствие теоремы 5.26, которое полностью списывает категоричные многообразия.

5.28. Следствие. Многообразие M тогда и только тогда категорично в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(M)\|$, когда оно рационально эквивалентно $K(X)$ для некоторой однородной характеристики X .

В дальнейшем будут указаны различные применения теорем 5.27 и 5.28. Здесь лишь отметим одно. В работе Болдуина и Лахлана [1], с. 101 был поставлен вопрос: существует ли не локально конечное многообразие M конечной сигнатуры, категоричное в некоторой мощности $\geq \|\Sigma(M)\|$. Из 5.28 нетрудно вывести

5.29. Следствие (Палютин [6]). Тогда и только тогда существует не локально конечное многообразие M конечной сигнатуры, категоричное в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(M)\|$, когда существует бесконечное конечно порожденное кольцо, являющееся телом.

Существование указанного в 5.29 тела является нерешенным вопросом в теории колец.

Сформулируем теперь описание категоричных многообразий, которое дано Гивантом [2].

Пусть n -местная операция d_n^A и одноместные операции $p_{n,i}^A$, $1 \leq i \leq n$, определены на A^n так:

$$d_n^A(\langle x_1, \dots, x_{1n} \rangle, \dots, \langle x_{n1}, \dots, x_{nn} \rangle) = \langle x_{11}, \dots, x_{nn} \rangle;$$

$$p_{n,i}^A(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \langle x_i, \dots, x_i \rangle.$$

Пусть K — класс алгебр сигнатуры Σ . Пусть Σ_n получается из Σ добавлением символов $d_n, p_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, и

$$K_n = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \simeq \langle \mathcal{A}^n, d_n^A, p_{n,i}^A \rangle_{1 \leq i \leq n} \text{ для некоторой } \mathcal{A} \in K \}.$$

Пусть $\sigma(v_1)$ — некоторый терм сигнатуры Σ_n . Определим множество

$T(\sigma) = \{t(v_1, \dots, v_m) \mid t \text{ — терм сигнатуры } \Sigma \text{ и}$

$$K_n \models \forall v_1 t(\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_1)) = \sigma(v_1)\}.$$

Если $t(v_1, \dots, v_m)$ — терм сигнатуры алгебры $\mathfrak{B}$, то через $t^{\mathfrak{B}}[v_1, \dots, v_m]$ обозначается операция, которую определяет терм $t(v_1, \dots, v_m)$ в системе $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\Sigma_n(\sigma)$ сигнатуру, полученную добавлением к Σ_n символов m -местных операций для каждого терма $t(v_1, \dots, v_m) \in T(\sigma)$. Определим класс алгебр сигнатуры $\Sigma_n(\sigma)$:

$$K_n(\sigma) = \{\{\mathfrak{B}, t^{\mathfrak{B}}[v_1, \dots, v_m] \mid (v_1, \dots, v_m) \in T(\sigma) \mid \mathfrak{B} \in K_n\}.$$

5.30. Теорема (Гивант [2]) *. Многообразие M тогда и только тогда категорично в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(M)\|$, когда M рационально эквивалентно одному из следующих классов:

1) $V_n(\sigma)$, где V — многообразие векторных пространств над некоторым телом D , $n \geq 1$ и $\sigma(v_1)$ — некоторый терм сигнатуры V_n ;

2) S_n , где S — многообразие всех множеств (пустой сигнатуры) и $n \geq 1$;

3) C_n , где C — многообразие всех множеств с выделенным элементом и $n \geq 1$.

В получении описания категоричных квазимногообразий K важную роль играет модельная полнота класса бесконечных K -систем, которая следует из теоремы П. Линдстрёма (теорема 5.3). Для позитивных хорновых классов теорему Линдстрёма применить нельзя. Основные методы здесь — конструкции на когруэнциях и метод минимальных множеств, который был важным также для универсальных хорновых классов.

5.31. Определение. Формулу Φ назовем $\exists^+$ -формулой, если она имеет вид

$$\exists x_1 \dots x_n (\Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_n),$$

где $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ — атомарные формулы.

Следующая теорема описывает категоричные позитивные хорновые классы с точностью до $\exists^+$ -эквивалентности классов (см. § 1).

*) Отметим, что заметка Гиванта [2] была сдана в печать 29 октября 1974 г. По удивительному совпадению именно в эти дни была сделана автором заявка на доклад «Описание категоричных квазимногообразий», который был прочитан 12 ноября 1974 г. на семинаре «Алгебра и логика» (см. «Алгебра и логика», 1975, 14, № 1, с. 115).

5.32. Теорема (Палютин [10]). Позитивный хорнов класс K тогда и только тогда категоричен в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(K)\|$, когда $K \exists^+$ -эквивалентен некоторому $K(X)$ для однородной характеристики X .

В качестве следствия отметим

5.33. Следствие (Палютин [8]). Если K — позитивный хорнов класс счетной сигнатуры, категоричный в ω , то K категоричен во всех неединичных мощностях.

Таким образом, в силу 5.18 и 5.32 для универсальных хорновых и позитивных хорновых классов счетной сигнатуры существует лишь одна теория категоричности — несчетная. Для хорновых классов это уже не так. Например, как ранее отмечалось, класс безатомных булевых алгебр является хорновым, категоричным в счетной мощности и некатегоричным в несчетных мощностях. Теория этого класса не стабильна. Поэтому трудно надеяться на достаточно исчерпывающее описание хорновых классов, категоричных в счетной мощности. Что касается категоричности в несчетных мощностях, то здесь ситуация в этом смысле вполне удовлетворительная (см. Палютин [12]).

5.34. Определение (Палютин [12]). Индукцией по построению определим понятие h -формулы (сигнатуры Σ):

- а) атомарные формулы являются h -формулами;
- б) если Φ и Ψ — h -формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$ также является h -формулой;
- в) если Φ — h -формула, то $\exists x\Phi$ и $\forall x\Phi$ также являются h -формулами;
- г) если Φ, Ψ — h -формулы, то и $(\exists x\Phi \wedge \forall x(\Phi \rightarrow \Psi))$ является h -формулой.

Определим h -ранг подмножества X системы $\mathfrak{A}$ как максимальную длину цепи h -подмножеств X .

5.35. Предложение. Если K — категоричный в мощностях $> \|\Sigma(K)\|$ хорнов класс и $\Phi(x, y)$ — h -формула, то существует $n \in \omega$ такое, что для любой K_+ -системы $\mathfrak{A}$ любое непустое множество вида $\Phi(\mathfrak{A}, a)$ имеет h -ранг n .

Из 5.35 следует, что любая формула эквивалентна в K булевой комбинации h -формул.

§ 6. Полные хорновые классы

В этом параграфе будут рассмотрены полные хорновые классы, т. е. хорновые классы K , для которых $\text{Th}(K_\infty)$ полна. Ясно, что хорновые классы K , категоричные в некоторой мощности $\lambda \geq \|\Sigma(K)\|$, будут полными. Полные хорновые классы имеют ряд свойств, которые способствуют их более глубокому изучению по сравнению с произвольными полными классами.

6.1. Определение (Палютин [12]). Пусть K — класс алгебраических систем, F — фильтр Фреше на ω . Аксиоматическое замыкание класса $K^h = \{\mathfrak{A}^\omega / F \mid \mathfrak{A} \in K\}$ будем называть h -компаньоном класса K . Если T — теория, то теорию T^h класса $(\text{Mod}(T))^h$ назовем h -компаньоном теории T .

Следующее предложение показывает, что полных хорновых классов «достаточно много».

6.2. Предложение (Палютин [12]). Если K — полный класс (T — полная теория), то h -компаньон класса K (теории T) является полным хорновым классом (полной хорновой теорией).

6.3. Определение. Если $\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n$ — некоторые формулы сигнатуры Σ , y — набор переменных, то через $\alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$ обозначим формулу

$$\forall y \left(\left(\bigwedge_{i \leq n} \exists x (\Phi \wedge \neg \Psi_i) \right) \rightarrow \exists x (\Phi \wedge \bigwedge_{k \leq n} \neg \Psi_k) \right),$$

а через $\beta(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$ — формулу

$$\exists y \left(\exists x \Phi \wedge \forall x (\Phi \rightarrow \bigwedge_{k \leq n} \Psi_k) \right) \rightarrow \alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y).$$

6.4. Теорема (Палютин [12]). Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ , то для того, чтобы $\text{Th}(\mathfrak{A})$ была хорновой, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathfrak{A}$ были истинны предложения $\alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$ для любых h -формул (определение 5.33) $\Phi(x, y), \Psi_0(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ сигнатуры Σ .

6.5. Следствие. Если Σ — некоторая сигнатура, то класс $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ имеет сигнатуру } \Sigma \text{ и } \text{Th}(\mathfrak{A}) \text{ хорнова}\}$

является аксиоматизируемым.

Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, то через $H(\mathfrak{A})$ обозначим наименьший хорнов класс, содержащий систему $\mathfrak{A}$.

Из теоремы 6.4 получаем также

6.6. Следствие. Если Σ — некоторая сигнатура, то класс $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ — бесконечная система сигнатуры } \Sigma \text{ и } H(\mathfrak{A}) \text{ — полный класс}\}$ аксиоматизируем с помощью аксиом $\alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$, где $\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n$ — h -формулы.

Следствие 6.6 можно переформулировать так:

6.7. Следствие. Класс всех бесконечных систем сигнатуры Σ , принадлежащих полным хорновым классам, аксиоматизируем.

Ниже будет показано, что условие бесконечности систем в этом утверждении убрать нельзя. Что касается конечных систем, то здесь имеет место

6.8. Теорема (Палютин [12]). Если $\mathfrak{A}$ — конечная алгебраическая система сигнатуры Σ , то для того, чтобы $H(\mathfrak{A})$ был полным хорновым классом, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathfrak{A}$ были истинны предложения $\beta(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n)$ для всех h -формул $\Phi(x, y), \Psi_0(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ сигнатуры Σ .

6.9. Следствие. Класс конечных алгебраических систем сигнатуры Σ , принадлежащих полным хорновым классам, аксиоматизируем в классе всех конечных систем сигнатуры Σ .

Следующая теорема контрастирует с утверждениями 6.7 и 6.9.

6.10. Теорема (Палютин [12]). Если сигнатура Σ содержит символы местности > 0 , то класс алгебраических систем сигнатуры Σ , принадлежащих полным хорновым классам, не аксиоматизируем.

6.11. Лемма (Палютин [12]). а) Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ и F — фильтр Фреше на ω , то $\mathfrak{A}^\omega / F \models \alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$ для любых h -формул $\Phi(x, y), \Psi_0(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ сигнатуры Σ .

б) Если K — класс алгебраических систем сигнатуры Σ и $K \models \alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$ для всех h -формул $\Phi(x, y), \Psi_0(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ сигнатуры Σ , то для любой формулы $\varphi(x)$ сигнатуры Σ существует формула $\varphi_1(x)$, эквивалентная в классе K формуле $\varphi(x)$ и являющаяся булевой комбинацией h -формул сигнатуры Σ .

Заметим, что из этой леммы вытекает предложение 6.2. Непосредственным следствием данной леммы является также

6.12. Теорема (Вашкевич и Венглож [1]). Если T — счетно категоричная теория, то ее h -компаньон T^h также счетно категоричен.

Так как $\text{Th}(\mathfrak{A})$ счетно категорична для любой конечной системы $\mathfrak{A}$, то отсюда вытекает

6.13. Теорема. Если K — полный хорнов класс, содержащий неоднородную конечную систему, то K счетно категоричен.

Отметим, что для случая, когда K — многообразие, этот факт был получен независимо Л а х л а н о м [3].

6.14. Определение. Если $\Phi(x, y)$ — некоторая формула, то через $\gamma(\Phi; y)$ обозначим предложение

$$\forall y \forall y' (\exists x (\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, y')) \rightarrow \forall x (\Phi(x, y) \rightarrow \Phi(x, y'))).$$

6.15. Теорема (Палютин [12]). Для того чтобы полная хорнова теория T была стабильна, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(\Phi; y) \in T$ для любой h -формулы $\Phi(x, y)$.

Из теоремы 6.15 следует, что если K — полный хорнов класс и $\text{Th}(K_\infty)$ стабильна, то для любой K -системы $\mathfrak{A}$ и h -формулы $\Phi(x, y)$ множества вида $\Phi(\mathfrak{A}, a)$, $a \in A$, либо совпадают, либо не пересекаются. В частности, для любого конечного множества h -формул X и любой K -системы $\mathfrak{A}$ множества вида $\Phi(\mathfrak{A}, a)$, где $\Phi(x, y) \in X$ и $a \in A$, не могут образовывать бесконечную строго убывающую цепь.

6.16. Определение. Будем говорить, что класс K алгебраических систем удовлетворяет условию h -минимальности ($\exists^+$ -минимальности), если в любой K -системе $\mathfrak{A}$ не существует бесконечной строго убывающей последовательности множеств вида $\Phi(\mathfrak{A}, a)$, где $\Phi(x, y)$ — h -формула ($\exists^+$ -формула) и $a \in A$.

Из следствия 5.35 легко вывести такой факт: если хорнов класс K категоричен в некоторой мощности $\lambda > \|\Sigma(K)\|$, то K удовлетворяет условию h -минимальности. Обратное утверждение неверно даже для квазимногообразий. Примером может служить квазимногообразие K со следующими простыми аксиомами:

- 1) $R(c_{2i}), i \in \omega$;
- 2) $R(c_{2i+1}) \rightarrow x = y, i \in \omega$;
- 3) $c_i = c_j \rightarrow x = y, i < j < \omega$.

Легко проверить, что K_1 удовлетворяет условию h -минимальности и не категоричен ни в какой бесконечной мощности. Однако для позитивных хорновых классов имеет место

6.17. Теорема (Палютин [8]). Для категоричности полного позитивного хорнового класса K в мощностях $> \|\Sigma(K)\|$ необходимо и достаточно, чтобы K удовлетворял условию $\exists^+$ -минимальности.

Эта теорема используется в доказательстве следующего результата.

6.18. Теорема (Палютин [10], [14]). Если K — полный позитивный хорнов класс, то либо $S_K(\lambda) = 1$ для всех $\lambda > \|\Sigma(K)\|$, либо $S_K(\lambda) = 2^\lambda$ для всех $\lambda > \|\Sigma(K)\|$.

Что касается спектров в мощности $\|\Sigma(K)\|$, то отметим здесь следующий факт.

6.19. Теорема (Палютин [10], [14]). Если M — полное многообразие счетной сигнатуры, не категоричное в несчетных мощностях, то $S_M(\omega) = 2^\omega$.

Приведем пример полного многообразия, не категоричного ни в какой бесконечной мощности. Вопрос о существовании таких многообразий ставился в диссертации Гиванта [3].

6.20. Пример (Палютин [11]). Универсальные замыкания следующих аксиом задают полное многообразие, теория которого несуперстабильна.

- 1₀. $f_0(g_0x, h_0x) = x$;
- 1_n. $f_n(g_nx, h_nx) = g_{n-1}x, 1 \leq n < \omega$;
- 2_n. $f_n(x, y) = f_n(g_nx, h_ny), n \in \omega$;
- 3_n. $g_n(f_n(x, y)) = g_nx, n \in \omega$;
- 4_n. $h_n(f_n(x, y)) = h_ny, n \in \omega$;
- 5_n. $\tau\eta x = \eta x, \tau, \eta \in \{g_n, h_n\}, n \in \omega$;
- 6_n. $g_nx = g_ng_{n-1}x, 1 \leq n < \omega$;
- 7_n. $h_nx = h_ng_{n-1}x, 1 \leq n < \omega$;
- 8_n. $g_{n-1}(f_n(x, y)) = f_n(x, y), 1 \leq l < n < \omega$.

Теоремы 6.18 и 6.19 полностью описывают бесконечные спектры полных многообразий счетной сигнатуры. В силу теоремы 6.13 некатегоричные полные многообразия не имеют систем в неединичных конечных мощностях. По теореме 5.18 категоричные квазимногообразия в любой конечной неединичной мощности имеют не более одной системы. Таким образом, для получения полного описания спектров полных многообразий нужно описать такие множества $X \subseteq \omega$, для которых существует многообразие M , что

$$X = \{n \in \omega \mid S_M(n) \neq 0\}.$$

Такое описание нетрудно получить из теоремы представления для категоричных многообразий (5.28).

6.21. Теорема. а) (Палютин [5]). Множество $X \subseteq \omega$ тогда и только тогда является множеством мощностей конечных систем некоторого полного квазимногообразия, когда оно равно одному из следующих множеств:

1) $\{1\} \cup \{p^{a \cdot m} \mid m \in \omega, m \geq b\}$, где $a, b \in \omega, p$ — простое число;

2) $\{1\} \cup \{(a \cdot m + b)^c \mid m \in \omega\}$, где $c \in \omega, a \neq 0, b \leq 1$, или существует группа подстановок степени b порядка a , любой неединичный элемент которой имеет не более одной неподвижной точки.

б) Множество $X \subseteq \omega$ тогда и только тогда является множеством мощностей конечных систем некоторого полного многообразия, когда оно равно одному из следующих множеств: $\{p^{a \cdot m} \mid m \in \omega\}$, где $a \in \omega, p$ — простое число.

Что касается бесконечных спектров полных квазимногообразий, то здесь, в отличие от многообразий, ситуация гораздо сложнее. Приведенные ниже примеры показывают, что полные квазимногообразия имеют несчетные спектры, отличные от несчетных спектров полных многообразий.

6.22. Примеры. Ниже будут определены полные квази-многообразия K_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, счетной сигнатуры, несчетные спектры $S_{K_i}(\omega_\alpha)$, $\alpha \geq 1$, которых соответственно равны $|\alpha| + \omega$, $(|\alpha| + \omega)^\omega$, $|\alpha|^{2^\omega}$ и $2^{\omega\alpha}$.

1) $S_{K_1}(\omega_\alpha) = |\alpha| + \omega$. В качестве K_1 можно взять пример, приведенный перед теоремой 6.17.

2) $S_{K_2}(\omega_\alpha) = (|\alpha| + \omega)^\omega$. Сигнатура K_2 состоит из символов предикатов P_n и констант c_k^n , $n, k \in \omega$. Аксиомами будут:

- (а) $P_0(x)$;
- (б) $P_{n+1}(x) \rightarrow P_n(x)$, $n \in \omega$;
- (в) $P_n(c_k^n)$, $n, k \in \omega$;
- (г) $\neg P_{n+1}(c_k^n)$, $n, k \in \omega$;
- (д) $\neg c_k^n = c_l^n$, $n \in \omega$, $k < l < \omega$.

3) $S_{K_3}(\omega_\alpha) = (|\alpha| + \omega)^{2^\omega}$. Обозначим через X множество функций $f: \omega \rightarrow \{0, 1\}$, принимающих значение 0 везде, за исключением конечного множества значений аргумента. Сигнатура K_3 состоит из символов предикатов P_n , $n \in \omega$, и констант c_f , $f \in X$. Аксиомы K_3 следующие:

- (а) $P_n(c_f)$, $n \in \omega$, $f \in X$, $f(n) = 1$;
- (б) $\neg P_n(c_f)$, $n \in \omega$, $f \in X$, $f(n) = 0$.

4) $S_{K_4}(\omega_\alpha) = 2^{\omega\alpha}$. В качестве K_4 можно взять полное несуперстабильное многообразие (пример 6.20). Однако среди полных квазимногообразий существует тотально трансцендентное с таким спектром. Сигнатура K_4 состоит из символов одноместных функций f , f^{-1} , g и h . Пусть $f^n(x)$ обозначает терм $f(f \dots f(x) \dots)$, где символ f встречается n раз. Аксиомы K_4 таковы:

- (а) $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$;
- (б) $f^n(x) \neq x$, $n \in \omega$;
- (в) $g^n(x) \neq x$, $n \in \omega$;
- (г) $g(x) = gf(x)$;
- (д) $gh(x) = x$.

6.23. Проблема. Описать все спектры полных хорновых классов (квазимногообразий).

В оставшейся части параграфа мы рассмотрим модельную полноту хорновых классов.

Из предложения 5.35 и лемм 10, 11 статьи Палютина [12] доказывается

6.24. Теорема. Категоричный в мощностях $> \|\Sigma(K)\|$ хорнов класс K является модельно полным.

6.25. Теорема. Если K — модельно полный хорнов класс, то K является объединением семейства $\{K_i \mid i \in I\}$ попарно непересекающихся полных модельно полных хорновых классов.

Доказательство. Так как любая K_∞ -система $\mathcal{A}$ вкладывается в фильтрованную степень $\mathcal{A}^\omega/F$ по фильтру Фреше, то из леммы 6.11, а) и модельной полноты K получаем, что

$\mathcal{A} \models \alpha(\Phi, \Psi_0, \dots, \Psi_n; y)$ для любых n -формул

$\Phi(x, y), \Psi_0(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ сигнатуры $\Sigma(K)$.

Требуемое утверждение следует теперь из теоремы 6.4.

6.26. Следствие (Болдуин и Гивант [1]). Пусть K — универсальный хорнов класс и K^0 состоит из всех K -систем, вложимых в неоднородные K -системы. Для того чтобы K был модельно полным, необходимо и достаточно, чтобы K^0 был объединением семейства $\{L^{(i)} \mid i \in I\}$ полных модельно полных универсальных хорновых классов, попарные пересечения которых содержат лишь одноэлементные системы.

Доказательство. Достаточность очевидна. Пусть K модельно полон. Пусть $\{K_i \mid i \in I\}$ — семейство из теоремы 6.25. Так как класс K универсальный и модельно полный, то хорновы классы K_i , $i \in I$, замкнуты относительно взятия бесконечных подсистем. Пусть $L^{(i)}$ получается добавлением к K_i всех конечных систем, вложимых в K_i -системы. Ясно, что $L^{(i)}$, $i \in I$, будут универсальными хорновыми полными модельно полными классами. Если бы существовала неоднородная система $\mathcal{A} \in L^{(i)} \cap L^{(j)}$ для $i \neq j$, то было бы также $\mathcal{A} \in K_i \cap K_j$, что противоречит условию $K_i \cap K_j = \emptyset$.

Из доказанного следствия, теоремы 6.13 и теоремы 5.18 вытекает

6.27. Следствие (Болдуин и Гивант [1]). Если K — модельно полный локально конечный универсальный хорнов класс, то спектр S_K класса K ограничен. Если $\|\Sigma(K)\| \leq \omega$, то $S_K(\lambda) \leq 2^\omega$ для любого λ .

§ 7. Конечная аксиоматизируемость категоричных теорий

После того как уже найдены примеры теорий с каким-то свойством P , естественно возникает вопрос, существует ли теория со свойством P среди конечно аксиоматизируемых теорий. Иногда ответить на такой вопрос довольно трудно. В частности,

до недавнего времени не был решен вопрос, поставленный Морли [1], о существовании конечно аксиоматизируемой ω_1 -категоричной теории, не являющейся ω -категоричной. В 1979 г. М. Г. Перетяткин построил пример такой теории, который будет сформулирован ниже. Заметим, что пример полной ω -категоричной конечно аксиоматизируемой теории довольно прост: теория плотных линейных порядков без первого и последнего элемента.

Что касается другого известного вопроса: «Существует ли полная теория, категоричная во всех бесконечных мощностях», то ответ на него получен недавно Б. И. Зильбером.

7.1. Теорема (Зильбер [3]). Если теория T конечно аксиоматизируема и категорична во всех бесконечных мощностях, то T не полна, т. е. T имеет конечные модели.

7.2. Пример (Перетяткин [2]). Ниже будет определена минимальная модель $\mathfrak{A}_0$, теория T_0 которой конечно аксиоматизируема, категорична в ω_1 и не категорична в ω . Сигнатура Σ_0 системы $\mathfrak{A}_0$ состоит из пяти символов одноместных предикатов D, P, A, X, U и пяти символов двухместных предикатов $\triangleleft, P, E, R, S^*$. Основное множество A_0 системы $\mathfrak{A}_0$ будет $\mathbb{Z}^4 \times \{-1, 1\}$, где $\mathbb{Z}$ — целые числа. Пусть $x, y \in A_0$ и

$$x = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \sigma \rangle, \quad y = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \tau \rangle.$$

Предикаты в алгебраической системе $\mathfrak{A}_0$ определяются так:

- а) $x \triangleleft y \leftrightarrow \beta_2 = \alpha_2 + 1$,
- б) $xPy \leftrightarrow \beta_1 = \alpha_1 + 1$,
- в) $xEy \leftrightarrow \beta_2 = \alpha_2 \wedge \beta_3 = \alpha_3 \wedge \beta_4 = \alpha_4$,
- г) $xRy \leftrightarrow \beta_1 = \alpha_1 + 1 \wedge \sigma = \tau \wedge \bigwedge_{2 \leq i \leq 4} \beta_i = \alpha_i$,
- д) $xDy \leftrightarrow \beta_1 = \alpha_1 \wedge \sigma = \tau \wedge \beta_2 = \alpha_2 + 1 \wedge \alpha_3 = \beta_3 + 1 \wedge \beta_4 = \alpha_4 + 1$,
- е) $D(x) \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$,
- ж) $P(x) \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 \wedge \sigma = 1$,
- з) $A(x) \leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4 \wedge \sigma = 1$,
- и) $U(x) \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 \wedge \alpha_1 \neq \alpha_4 \wedge \sigma = 1$,
- к) $X(x) \leftrightarrow \alpha_1 \neq \alpha_3 \wedge \alpha_1 = \alpha_4 \wedge (\sigma = -1 \leftrightarrow (\alpha_3 - \alpha_4) \text{ четное})$.

Если добавить к сигнатуре теории T_0 некоторые символы операций, определяемых в T_0 , то можно получить конечно аксиоматизируемую универсальную теорию, категоричную в ω_1 и не-

* Сигнатура теории в работе Перетяткина [2] содержит, кроме перечисленных, еще 9 символов, однако эти предикаты выражаются через остальные и служат лишь для удобства изложения.

категоричную в ω . Однако не видно никаких путей, как можно переделать пример М. Г. Перетяткина, чтобы получить полную хорнову конечно аксиоматизируемую ω_1 -категоричную теорию. Интерес к такой теории объясняет

7.3. Теорема. Тогда и только тогда существует полная хорнова конечно аксиоматизируемая ω_1 -категоричная теория, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) существует бесконечная группа G , любая нетривиальная циклическая подгруппа которой пересекается с некоторым фиксированным конечным множеством нетривиальных классов сопряженных элементов;
- 2) существует конечно определенное бесконечное кольцо, являющееся телом.

Эта теорема следует из имеющегося полного описания категоричных хорновых классов, начатого в работе Палютина [12]*).

Условия 1) и 2) являются известными нерешенными вопросами из теории групп и теории колец. Таким образом, если бы удалось построить теорию, аналогичную теории М. Г. Перетяткина, но еще и хорнову или доказать, что таких нет, то был бы решен известный алгебраический вопрос.

§ 8. Спектр специальных моделей

В этом параграфе будет рассмотрено распределение по мощностям насыщенных, однородных, генерических, жестких и топологизуемых моделей элементарных теорий.

Напомним (см. главу 2, определение 6.5), что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ является κ -насыщенной, если для любого $X \subseteq A$ мощности $|X| < \kappa$ любое совместное с $\text{Th}(\mathfrak{A}_X)$ множество $\{\Phi_i(x) \mid i \in I\}$ формул сигнатуры Σ_X выполнимо в $\mathfrak{A}_X$. Бесконечная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется насыщенной, если она является $|A|$ -насыщенной.

Насыщенные алгебраические системы играют важную роль в теории моделей. Фундаментальные теоремы о существовании и единственности насыщенных систем приведены в § 6 главы 2.

8.1. Теорема (Морли и Воот [1]). Каждая элементарная теория T имеет κ^+ -насыщенную модель мощности 2^κ для любого бесконечного кардинала κ .

8.2. Следствие. При обобщенной континуум-гипотезе (ОКГ) любая элементарная теория T имеет насыщенную модель в любой регулярной мощности λ .

* Эквивалентность условия 1) существованию конечно аксиоматизируемого ω_1 -категоричного не ω -категоричного квазигооморфизма унаров доказана М. А. Тайцлиным и Ю. Е. Шишмаревым в работе Абакумова, Палютина, Шишмарева и Тайцлина [1].

В самом деле, существование насыщенных моделей теории T мощностей вида κ^+ при ОКГ следует из 8.1. Насыщенную модель $\mathfrak{A}$ предельной регулярной мощности λ можно получить как $\mathfrak{A} = \bigcup_{\kappa < \lambda} \mathfrak{A}_\kappa$, где $\mathfrak{A}_{\kappa_1} < \mathfrak{A}_{\kappa_2}$ для $\kappa_1 < \kappa_2$ и $\mathfrak{A}_\kappa, \kappa < \lambda$, являются на-

сыщенными моделями теории T мощности κ^+ .

Отметим, что без ОКГ нельзя утверждать, что произвольная элементарная теория T имеет хотя бы одну насыщенную модель. Это следует из известных результатов о независимости в ZFC и следующего утверждения.

8.3. Предложение. *Существует такая полная теория T_1 , что T_1 не имеет счетных насыщенных моделей и насыщенных моделей сингулярных мощностей, а существование насыщенной модели теории T_1 любой регулярной мощности $\lambda > \omega$ равносильно выполнению условия $2^\kappa \leq \lambda$ для всех $\kappa < \lambda$.*

В качестве T_1 можно взять, например, $\text{Th}(\langle \omega; +, \cdot \rangle)$.

Как уже отмечалось в §§ 3 и 4, у тотально трансцендентных и стабильных теорий «много» насыщенных моделей.

Спектр (грубый) насыщенных моделей полных теорий полностью описывает

8.4. Теорема (М. Морли, Р. Воот, С. Шелах). *Полная теория T тогда и только тогда имеет насыщенную модель мощности λ , когда выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1) T стабильна в λ , т. е. для любого множества A в T мощности λ имеет место $|S(A)| \leq \lambda$;

2) $\lambda = \sum_{\mu < \lambda} \lambda^\mu + |D(T)|$.

8.5. Следствие (Воот [1]). *Для того чтобы полная теория T имела счетную насыщенную модель, необходимо и достаточно, чтобы $|D(T)| = \omega$.*

Следующая теорема отчасти объясняет значительный интерес к насыщенным системам в теории моделей.

8.6. Теорема (Морли и Воот [1]). *Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две насыщенные модели полной теории T и $|A| = |B|$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.*

Таким образом, класс насыщенных моделей любой полной теории T категоричен во всех мощностях. Как было отмечено в § 2, имеет место в некотором смысле обращение этого утверждения.

8.7. Теорема (М. Морли, С. Шелах). *Если полная теория T категорична в мощности $\lambda \geq |T|$, то все модели T мощностей $\kappa \geq |T|$ насыщены.*

Ослаблением условия насыщенности системы является свойство однородности.

8.8. Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *однородной*, если для любого $X \subseteq A$ мощности $< |A|$ любое элементарное в $\mathfrak{A}$ отображение $f: X \rightarrow A$ (т. е. $\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in X} \equiv \langle \mathfrak{A}, fa \rangle_{a \in X}$) продолжается до автоморфизма $\mathfrak{A}$.

Легко показывается, что насыщенная система является однородной.

8.9. Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *N^* -однородной*, если любой элементарный в $\mathfrak{A}$ изоморфизм между двумя элементарными подсистемами $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 < \mathfrak{A}$ мощности $< |A|$ продолжается до автоморфизма $\mathfrak{A}$.

Оба эти понятия рассматривались в работах Кейслера [1] и Кейслера и Морли [1]. Смешение данных понятий однородности и ошибочные утверждения об их эквивалентности в этих работах (что, конечно, не уменьшает большую ценность этих работ) было причиной появления работы Палютина [2]. Основным результатом этой работы является

8.10. Теорема (Палютин [2]). *Для любого кардинала $\kappa > \omega$ существует N^* -однородная система $\mathfrak{A}$ мощности κ , не являющаяся однородной.*

Для однородных моделей имеют место следующие теоремы существования и единственности.

8.11. Теорема (Кейслер и Морли [1]). *Пусть T — полная теория, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — модели T , $|A| = \omega$ и $\mathfrak{B}$ однородны. Тогда существуют счетные однородные T -модели $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$, для которых $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}$.*

8.12. Теорема (Кейслер и Морли [1]). *Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — однородные модели полной теории T , для которых имеет место $|A| = |B|$ и в которых реализуются одни и те же x -типы для любого кортежа x переменных. Тогда системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.*

8.13. Определение. Если T — полная теория, то функция спектра класса однородных T -моделей будет обозначаться через h_T .

Из 8.2 и 8.11 вытекает, что для любой полной теории T имеет место $h_T(\omega) > 0$ и при ОКГ $h_T(\lambda) > 0$ для любой регулярной мощности λ .

8.14. Теорема (Кейслер и Морли [1]). *Если для полной теории T имеет место $h_T(\omega) \leq \omega$, то $h_T(\lambda) \leq h_T(\omega)$ для любого бесконечного кардинала λ .*

8.15. Теорема (Кейслер и Морли [1]). *При ОКГ имеет место $h_T(\lambda) \leq h_T(\kappa)$ для любой полной теории T и несчетных кардиналов $\kappa \leq \lambda$.*

8.16. Следствие (ОКГ). *Функция h_T является невозрастающей, за исключением единственного случая: $h_T(\omega) = \omega_1$ и $h_T(\omega_1) = \omega_2$.*

8.17. Проблема (Кейслер и Морли [1]). Существуют ли полные теории T , для которых h_T удовлетворяют условиям:

- 1) $\omega > h_T(\omega) > 3h_T(\omega_1)$;
- 2) $h_T(\omega) = \omega$, $1 < h_T(\omega_1) < \omega$;
- 3) $h_T(\omega) = \omega_1$, $h_T(\omega_1) \leq \omega$;
- 4) $h_T(\omega) \geq \omega$, $h_T(\omega_1) > h_T(\omega_2)$;
- 5) $h_T(\omega_2) > h_T(\omega_3)$?

Из теоремы 8.12 вытекает

8.18. Теорема. Если, начиная с некоторого кардинала λ , все модели полной теории T однородны, то спектр T ограничен.

Если в условии предыдущей теоремы имеет место $\lambda = \omega_1$, то можно получить более сильное заключение.

8.19. Теорема (Шелах [3]). Если все модели счетной полной теории T мощности ω_1 однородны, то T категорична в несчетных мощностях.

Следующий пример показывает, что существуют некатегоричные полные теории T , все модели которых, начиная с некоторой мощности, однородны. В силу теорем 8.18, 3.21 и 4.39 такой пример обязан быть суперстабильной не тотально трансцендентной теорией.

8.20. Пример (М. Морли). Сигнатура теории T_0 состоит из множества $\{P_n \mid n \in \omega\}$ одноместных предикатов и двуместной операции $+$. Аксиомами T_0 будут

- 1) $\exists x \bigwedge_{i \leq n} P_i^{\delta_i}(x)$ для любых $n \in \omega$ и наборов $\langle \delta_0, \dots, \delta_n \rangle \in \in^{n+1}$
- 2, где $P_i^0 = \neg P_i$, $P_i^1 = P_i$;

2) операция $+$ задает на T_0 -моделях элементарную абелеву 2-группу;

- 3) $\forall x \forall y ((P_n(x) \leftrightarrow P_n(y)) \leftrightarrow \neg P_n(x+y))$, $n \in \omega$.

Легко проверить, что для любой T_0 -модели $\mathfrak{A}$ множество

$$\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \neg P(a) \text{ для всех } n \in \omega\}$$

с операциями $+$ является подгруппой $H(\mathfrak{A})$, а для любого $a \in A$ множество

$$\{b \in A \mid \mathfrak{A} \models P_n(b) \leftrightarrow P_n(a) \text{ для всех } n \in \omega\}$$

является смежным классом H_a по подгруппе $H(\mathfrak{A})$. Поэтому из условия $|A| > 2^\omega$ следует $|H(\mathfrak{A})| = |A|$ и $|H_a| = |A|$ для всех $a \in A$. Отсюда легко вытекает, что все T_0 -модели $\mathfrak{A}$ мощности $> 2^\omega$ однородны.

8.21. Гипотеза. Если полная теория T имеет ограниченную функцию спектра S_T , то все модели T , начиная с некоторой мощности λ , однородны.

В § 8 главы 2 дано определение T -генерической модели для элементарной теории T . Ниже мы будем пользоваться понятиями и результатами, содержащимися там. Генерические в $\forall\exists$ -теории T алгебраические системы являются алгебраически замкнутыми в T . Этот факт, а также определенная «конструктивность» генерических моделей (возможность построения их индуктивно, добавляя условия в диаграмму) объясняют заметную роль генерических моделей в теории моделей.

Ниже будут приведены результаты, касающиеся возможных спектров генерических моделей полных теорий.

8.22. Предложение (Робинсон [1]). Если T — счетная теория, то существует счетная T -генерическая алгебраическая система.

8.23. Определение (А. Робинсон). Теория T называется форсинг-полной, если $T = T^f$, где T^f — теория класса T -генерических моделей.

С. Шелах нашел теорию T_0 , не имеющую T_0 -генерических систем. Конечно, согласно утверждению 8.22 такая теория должна иметь несчетную сигнатуру. Теория T_0 , построенная С. Шелахом, не является ни полной, ни форсинг-полной. Поэтому представляет интерес

8.24. Теорема (Чихачев [1]). Существует полная и форсинг-полная теория T_1 , не имеющая T_1 -генерических систем.

Макинтайр [1] высказал гипотезу, что существует такая счетная теория T , для которой имеется T -генерическая модель мощности ω_1 и не имеется T -генерической модели мощности ω_2 . При континуум-гипотезе это предположение подтверждает

8.25. Теорема (Чихачев [2]). Существует полная и форсинг-полная счетная теория T , для которой имеется T -генерическая модель мощности 2^ω и не имеются T -генерические модели мощностей $\lambda > 2^\omega$.

Барвайсом и Робинсоном [1] было доказано, что для счетной теории T класс T -генерических моделей аксиоматизируем в языке $L_{\omega, \omega}$. Этот факт, а также результаты из работы Кейслера [3] о грубых спектрах теорий языка $L_{\omega, \omega}$ используются для доказательства следующей теоремы.

8.26. Теорема (Чихачев [3]). Счетная теория T тогда и только тогда имеет T -генерические модели во всех бесконечных мощностях, когда существует такая T -генерическая модель $\mathfrak{A}$, что некоторая ее скулемизация $\mathfrak{A}^s$ имеет бесконечную неразличимую последовательность.

Имеется пример (Чихачев [3]), показывающий, что в предыдущей теореме нельзя заменить скулемизацию $\mathfrak{A}^s$ на саму модель $\mathfrak{A}$.

8.27. Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется жесткой, если $\mathfrak{A}$ имеет единственный (тождественный) автоморфизм.

Простота и естественность определения жестких систем являются стимулами для изучения спектра жестких моделей элементарных теорий. Эренфойхт [2] впервые поставил проблему полного описания грубых спектров жестких моделей элементарных теорий. Для конечно аксиоматизируемых теорий С. Шелах дал следующую характеристику таких спектров.

8.28. Теорема (Шелах [10]). При предположении ОКГ класс кардиналов W тогда и только тогда является грубым спектром жестких систем некоторой конечно аксиоматизируемой теории T_0 , тогда существует Σ_2 -высказывание Φ логики второго порядка, для которого $W = \{\lambda \mid \lambda \models \Phi\}$.

8.28'. Проблема. Описать грубые спектры жестких систем для многообразий, квазимногообразий и хорновых классов.

В связи с этой проблемой интересны следующие результаты.

8.29. Теорема (Баррис [1]). Пусть хорнов класс K содержит систему $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами: (1) $\mathfrak{A}$ жесткая, простая и конечно порожденная; (2) решетка конгруэнций $\mathfrak{A}^2$ четырехэлементна, а решетки конгруэнций $\mathfrak{A}^n$, $n \in \omega$, модулярны. Тогда грубый спектр жестких систем хорнова класса K равен $\{\lambda \mid \lambda \geq \omega\}$.

8.30. Теорема (Пинус [4]). Пусть K — хорнов класс, все системы которого обладают дистрибутивными решетками конгруэнций и существует такая жесткая K_+ -система $\mathfrak{A}$, что совокупность ее главных конгруэнций образует жесткое линейно упорядоченное множество. Тогда грубый спектр жестких K -систем содержит все кардиналы $\lambda \geq \max\{|A|, \omega_1\}$.

В доказательстве предыдущих теорем используется техника булевых степеней и результат С. Шелаха о том, что грубый спектр жестких булевых алгебр равен $\{\lambda \mid \lambda \geq \omega_1\}$. Эта же техника используется для доказательства следующего результата.

8.31. Теорема (Пинус [4]). Любое многообразие M ассоциативных колец с единицей содержит жесткие кольца любой бесконечной мощности.

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется T_i -топологизируемой, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, если существует не дискретная T_i -топология τ на множестве A , при которой все операции $\mathfrak{A}$ непрерывны, а предикаты открыты в соответствующей степени $(A, \tau)^n$ топологического пространства (A, τ) . Хаусдорфово топологизируемые (т. е. T_2 -топологизируемые) алгебраические системы будем просто называть топологизируемыми.

Ясно, что любая конечная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ не топологизируема. Поэтому в дальнейшем под нетопологизируемой алгебраической системой мы всегда понимаем бесконечную нетопологизируемую систему.

Марков [1] поставил вопрос: существует ли нетопологизируемая группа. В 1967 г. А. И. Мальцев на Всесоюзной топологической конференции в Новосибирске напомнил о проблеме А. А. Маркова и поставил вопросы о топологизируемости других алгебраических систем (например, луп). Первый пример нетопологизируемого группоида был построен Хансоном [1]. Тайманов [3] построил пример нетопологизируемой полугруппы. Арнаутов [2] дал пример нетопологизируемого кольца. Шелах [11] при ОКГ построил несчетную нетопологизируемую группу. Хессе [1] элиминировал ОКГ в построении С. Шелаха. А. Ю. Ольшанский заметил, что нетопологизируемую счетную группу легко построить с помощью одной группы, описанной С. И. Адяном. В книге Адяна [1] построена группа $A(2, p)$ для любого нечетного $p \geq 665$ со следующими свойствами:

1) существует такой элемент $a_0 \in A(2, p)$ бесконечного порядка, что для любого отличного от единицы $b \in A(2, p)$ существует такое число $s \neq 0$, что $b^p = a_0^s$;

2) подгруппа, порожденная элементом a_0 , является центром группы $A(2, p)$.

Пусть теперь p — некоторое простое число > 665 , а H — подгруппа, порожденная в $A(2, p)$ элементом a_0^p . Рассмотрим группу $G = A(2, p)/H$. Группа G обладает следующими свойствами:

1) $b^{p^2} = e$ для всех $b \in G$;

2) $|\{b \in G \mid b^p = e\}| = p$.

Так как множество $\{b \in G \mid b^p = e\}$ должно быть открытым в любой топологизации G , то группа G нетопологизируема.

Марков [1] нашел простые необходимые и достаточные условия на счетную группу G , для того чтобы она была топологизируемой. Арнаутов [1] нашел аналогичные условия для топологизируемости счетных колец и доказал, что все счетные кольца топологизируемы. В работе Тайманова [5] найдены необходимые и достаточные условия для топологизируемости счетных тел. Подевский [1] показал, что любое счетное тело допускает $2^{2^{\aleph_0}}$ различных T_1 -топологий. Этот результат был обобщен Килтиненом [1] на тела любой мощности.

8.32. Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра сигнатуры Σ . Элемент $b \in A$ называется T_1 -изолированным в $\mathfrak{A}$, если существуют натуральное число n , термы $t_i(x, y)$, $i \leq n$, сигнатуры Σ , наборы $a_i \in A$, $i \leq n$, и элементы $b_i \in A$, $i \leq n$, для

которых выполняется условие

$$\{b\} = \bigcap_{i \leq n} \{d \in A \mid t_i(d, a_i) \neq b_i\}.$$

8.33. Теорема (Подевский [2]). Для того чтобы счетная алгебра $\mathfrak{A}$ была T_1 -топологизируемой, необходимо и достаточно, чтобы нашелся элемент $b \in A$, не являющийся T_1 -изолированным в $\mathfrak{A}$. Кроме того, если счетная алгебра $\mathfrak{A}$ является T_1 -топологизируемой, то имеется $2^{2^{\omega}}$ T_1 -топологий на $\mathfrak{A}$.

8.34. Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра сигнатуры Σ . Элемент $b \in A$ называется T_2 -изолированным в $\mathfrak{A}$, если существуют натуральное число n , термы $t_i(x, y)$, $q_i(x, y)$ и наборы $a_i, b_i \in A$ для $i \leq n$ такие, что выполняется условие

$$\{b\} = \bigcap_{i \leq n} \{d \in A \mid t_i(d, a_i) \neq q_i(d, b_i)\}.$$

8.35. Теорема (Тайманов [4]). Для того чтобы счетная алгебра $\mathfrak{A}$ была T_2 -топологизируемой, необходимо и достаточно, чтобы нашелся элемент $b \in A$, не являющийся T_2 -изолированным в $\mathfrak{A}$.

Отметим, что все упомянутые выше условия топологизируемости счетных групп, колец и тел являются частными случаями условия из теоремы 8.35.

В заключение параграфа приведем простой пример, показывающий, что из T_1 -топологизируемости алгебры $\mathfrak{A}$ не следует T_2 -топологизируемость $\mathfrak{A}$.

8.36. Пример. Пусть $A = \mathbb{Z} - \{0\}$, а сигнатура Σ состоит из одноместных функциональных символов f_n , $n \in \omega - \{0\}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра сигнатуры Σ , на которой функции f_n определены так:

$$f_n(k) = \begin{cases} -k, & \text{если } |k| = n, \\ k, & \text{если } |k| \neq n. \end{cases}$$

Алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию теоремы Пожевского, так как для любого $k \in A$, терма $t(x)$ сигнатуры Σ множество $\{a \in A \mid t(a) \neq k\}$ имеет конечное дополнение в A . Следовательно, $\mathfrak{A}$ является T_1 -топологизируемой. Так как для любого $k \in A$ мы имеем

$$\{a \in A \mid f_{|k|}(a) \neq f_{|k|+1}(a)\} = \{k, -k, k+1, -(k+1)\},$$

то по теореме Тайманова $\mathfrak{A}$ не является T_2 -топологизируемой.

§ 9. Неэлементарные языки

В этом параграфе будут рассмотрены спектральные вопросы теорий в логике с кванторами Q_1 и Хэртига, непрерывной логике и бесконечных логиках $L_{\omega, \omega}$ и $L_{\infty, \infty}$.

Для теории T неэлементарного языка проблема описания даже грубого спектра $M(T)$ может оказаться очень трудной. Напомним, что грубым спектром $M(T)$ теории T называется класс кардиналов, для которого

$$\kappa \in M(T) \Leftrightarrow \text{существует } T\text{-модель мощности } \kappa.$$

9.1. Определение. Числом Ханфа $h(L)$ логики L называется такой наименьший кардинал κ , что для любой теории T в логике L выполняется условие: если существует T -модель мощности $\geq \kappa$, то существуют T -модели как угодно большой мощности.

9.2. Определение. Числом Лёвенгейма $l(L)$ логики L называется такой наименьший кардинал κ , что для любой теории T в логике L выполняется следующее условие: если существует T -модель мощности $\geq \kappa$, то существует T -модель мощности $< \kappa$.

Из простых мощностных рассуждений вытекает

9.3. Предложение (Ханф [1]). Если совокупность предложений логики L является множеством (т. е. не является собственным классом), то числа Ханфа $h(L)$ и Лёвенгейма $l(L)$ существуют.

Определим число Лёвенгейма — Скулема для логики L как такой наименьший кардинал κ , что для любой теории T в логике L и любой T -модели $\mathfrak{A}$ мощности $\geq \kappa$ существует подмодель $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}$, для которой $\mathfrak{B} \models T$ и $|B| < \kappa$. Несмотря на тесную связь этого числа с числом Лёвенгейма, аналог предложения 9.3 для этого числа не имеет места. А именно, справедлива

9.4. Теорема (Пинус [1]). Для логики второго порядка число Лёвенгейма — Скулема не существует. Точнее, существует формула φ логики второго порядка, имеющая модели как угодно большой мощности и такая, что любая модель $\mathfrak{A}$ формулы φ не имеет собственных φ -подмоделей.

Логика $L^2(Q_1)$ получается добавлением к правилам образования формул сигнатуры Σ нового правила: если φ — формула $L^2(Q_1)$ и x — переменная, то $Q_1 x \varphi$ — также формула $L^2(Q_1)$. В определение истинности формул на модели $\mathfrak{A}$ добавляется такой пункт: $\mathfrak{A} \models Q_1 x \varphi(x, a)$ тогда и только тогда, когда $|\{\varphi(\mathfrak{A}, a)\}| \geq \omega_1$. Через $L(Q_1)$ обозначается логика $\bigcup \{L^2(Q_1) \mid \Sigma \text{ — некоторая сигнатура}\}$.

Обзор результатов по такой логике содержится в работах Кейслера [2] и Воота [2]. Используя рассуждения, аналогичные элементарному случаю, можно для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ построить $L(Q_1)$ -подсистему $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ мощности $\omega_1 \leq |\mathfrak{B}|$. Таким образом, имеет место

9.5. Предложение. Число Лёвенгейма для логики $L^2(Q_1)$ равно $(\omega_1 + |\Sigma|)^+$.

Для числа Ханфа доказательство значительно сложнее.

9.6. Теорема (Воот [2]). Если $\|\Sigma\| \leq \omega$, то число Ханфа для логики $L^2(Q_1)$ равно $\beta(\omega_1, \omega)$.

Дж. Болдуин (см. Фридман [1]) поставил вопрос: существует ли предложение ϕ логики $L(Q_1)$, имеющее ровно одну (с точностью до изоморфизма) несчетную модель? Частичным ответом на этот вопрос является

9.7. Теорема (Шелах [9]). При предположении аксиомы конструктивности $V = L$ не существует предложения языка $L(Q_1)$ (даже языка $L_{\omega, \omega}(Q_1)$), имеющего ровно одну несчетную модель.

В частности, из 9.7 следует, что положительно решить проблему Болдуина нельзя.

В работе Хэртига [1] введено расширение $L^2(I)$ элементарного языка, которое получается путем добавления к правилам образования формул сигнатуры Σ нового правила: если ϕ, ψ — формулы $L^2(I)$ и x — переменная, то $|x(\phi, \psi)$ — также формула $L^2(I)$. Определение истинности формул на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ дополняется таким пунктом:

$\mathfrak{A} \models |x(\phi(x, a), \psi(x, b))$ тогда и только тогда, когда $| \phi(\mathfrak{A}, a) | = | \psi(\mathfrak{A}, b) |$.

Квантор I называется квантором Хэртига, а через $L(I)$ обозначается логика

$U \{L^2(I) \mid \Sigma \text{ — некоторая сигнатура}\}.$

9.8. Определение. Если L — некоторая логика и κ — кардинал, то κ называется L -определимым, если существует такая теория T в L , что $M(T) = \{\kappa\}$.

Ясно, что если кардинал κ L -определим, то $\kappa < h(L)$ и $\kappa < l(L)$. В работах Исселя [1] и Фуркена [1] доказано несколько утверждений о $L^2(I)$ -определимости конкретных кардиналов и тем самым получены некоторые нижние оценки для $h(L^2(I))$ и $l(L^2(I))$. В работе Пинуса [2] эти оценки были значительно усилены. А именно, доказана

9.9. Теорема (Пинус [2]). Если $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n} — $L^2(I)$ -определимые кардиналы, $f(x_1, \dots, x_n)$ — примитивно рекурсивная функция на ординалах и $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \alpha_i, 1 \leq i \leq n$, то кардинал $\omega_{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ является $L^2(I)$ -определимым. Если $\omega_\alpha — $L^2(I)$ -определимый кардинал и λ — первый такой кардинал, что ω_λ -й недостижимый кардинал равен ω_λ , то $\omega_{\lambda \cdot \alpha}$ также $L^2(I)$ -определим$$

Из последнего утверждения теоремы получаем, в частности, неравенства $h(L^2(I)) \leq \omega_{\sum_{i \in \omega} i_{\lambda_i}}, l(L^2(I)) \leq \omega_{\sum_{i \in \omega} i_{\lambda_i}}$, которые пока-

зывают большую величину чисел Ханфа и Лёвенгейма для логики с квантором Хэртига. О большой величине числа Ханфа для $L^2(I)$ говорит также следующая теорема.

9.10. Теорема (Пинус [3]). При предположении аксиомы конструктивности $V = L$ числа Ханфа для логики с квантором Хэртига и для полной логики второго порядка совпадают.

Значительным обобщением элементарной логики является непрерывная логика. Подробное изложение теории моделей непрерывной логики содержится в книге Кейслера и Чэна [1]. Все используемые нами понятия, относящиеся к непрерывной логике, взяты из этой книги.

Для моделей непрерывной логики имеют место полные аналоги теорем об элементарных подсистемах и элементарных расширениях. В частности, для непрерывной логики $\mathcal{L}$ числа Ханфа и Лёвенгейма равны соответственно ω и $\|\mathcal{L}\|$, где $\|\mathcal{L}\|$ — мощность логики $\mathcal{L}$. Значительно сложнее доказывается аналог теоремы Морли о несчетной категоричности.

9.11. Теорема (Мурзин [2]). Если непрерывная логика $\mathcal{L}$ обладает t -, k - и l -множествами, а ее пространство обладает счетной базой, то любая счетная ω_1 -категоричная теория T в логике $\mathcal{L}$ категорична во всех несчетных мощностях.

Как показали Фрессе [1], Тайманов [1], [2] и Эренфойхт [1], элементарная эквивалентность $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ двух алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одной сигнатуры Σ эквивалентна следующему условию: для любого $n \in \omega$ и любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ существуют непустые множества $F_1(\Sigma_1, n), \dots, F_n(\Sigma_1, n)$ конечных частичных изоморфизмов $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma_1$ в $\mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma_1$ со следующим свойством:

(*) если $f \in F_i(\Sigma_1, n), 1 \leq i < n$, то для любых $a \in A$ и $b \in B$ существует $g \in F_{i+1}(\Sigma_1, n)$, для которого $a \in \text{dom } g, b \in \text{rang } g$ и $f \subseteq g$.

Естественным усилением этого отношения будет следующее

9.12. Определение. Будем говорить, что алгебраические

системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ κ -почти изоморфны (обозначаем $\mathfrak{A} \equiv^\kappa \mathfrak{B}$), если существуют непустые множества $F_n, n \in \omega$, частичных изоморфизмов $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ со следующими свойствами:

(1) если $f \in \bigcup_{n \in \omega} F_n$, то $|\text{dom } f| < \kappa$;

(2) если $f \in F_n, n \in \omega, X \subseteq A, Y \subseteq B, |X| < \kappa$ и $|Y| < \kappa$, то существует такой частичный изоморфизм $g \in F_{n+1}$, что $X \subseteq \text{dom } g$ и $Y \subseteq \text{rang } g$.

Ниже будут определены бесконечные логики $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$, где κ — бесконечный кардинал, соответствующие определенному выше отношению κ -почти изоморфизма. Пусть V — некоторый собственный класс символов, которые будут называться переменными.

9.13. Определение. Класс формул логики $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$ — это такой наименьший класс X , что:

(1) элементарные формулы сигнатуры Σ с переменными из класса V принадлежат X ;

(2) если $\varphi \in X$, $Y \subseteq V$ и $|Y| < \kappa$, то $\bigwedge Y \varphi \in X$ и $\exists v (v \in Y) \varphi \in X$;

(3) если Φ — некоторое множество и $\Phi \subseteq X$, то $\bigwedge \Phi \in X$.

Истинность предложения φ языка $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$ на алгебраической системе сигнатуры Σ определяется аналогично элементарному случаю: $\mathfrak{A} \models \exists v (v \in Y) \varphi$, если существует отображение $g: Y \rightarrow A$ и $\mathfrak{A} \models \varphi'$, где φ' получается из φ заменой свободных переменных $v \in Y$ на элементы $g(v)$; $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Phi$, если $\mathfrak{A} \models \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$.

9.14. Предложение. Алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ тогда и только тогда κ -почти изоморфны, когда они эквивалентны в логике $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$, т. е. на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны одни и те же предложения логики $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$.

Класс формул логики $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$ не является множеством, поэтому предложение 9.3 применить к этой логике нельзя. Действительно, если Σ содержит предикатный символ местности ≥ 2 , то индукцией по λ нетрудно для любого кардинала λ построить такую формулу φ_{λ} логики $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$, что $M(\text{Mod } \{\varphi_{\lambda}\}) = \{\lambda\}$, следовательно, для $L_{\infty\kappa}^{\Sigma}$ не существуют числа Ханфа и Лёвенгейма.

9.15. Определение. Если в (3) определения 9.13 потребовать $|\Phi| < \lambda$, то получим логику $L_{\lambda\kappa}^{\Sigma}$.

К логикам $L_{\lambda\kappa}^{\Sigma}$ уже можно применить предложение 9.3, следовательно, для них существуют числа Ханфа и Лёвенгейма. В частности, имеет место

9.16. Теорема (Морли [2], Лопес-Эскобар [1]). Если сигнатура Σ содержит предикатный символ местности ≥ 2 , то число Ханфа логики $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$ равно $\beta(\omega, \omega_1)$.

В книге Кейслера [3] содержится достаточно разработанная теория моделей логики $L_{\omega\omega}$. В отличие от элементарной логики, в $L_{\omega\omega}$ нет теории счетной категоричности.

9.17. Теорема (Скотт [1]). Любая полная теория T в логике $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$ является счетно категоричной.

9.18. Определение. Пусть X — некоторое множество. Логика $L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$ получается из $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$ выбрасыванием тех формул,

которые не принадлежат X . Логика $L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$ называется *фрагментом* логики $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$, если выполняются условия:

(1) X — непустое транзитивное множество;

(2) если $a, b \in X$, то $\{a, b\} \in X$, $a \cup b \in X$ и $a \times b \in X$;

(3) если $a \in X$ и α — наименьший ординал, не принадлежащий транзитивному замыканию множества a , то $\alpha \in X$;

(4) если $\varphi \in L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$, t — терм сигнатуры Σ и x — переменная, то $\varphi' \in L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$, где φ' — результат подстановки термина t вместо свободных вхождений x в φ .

9.19. Теорема (Кейслер [3]). Пусть $L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$ — счетный фрагмент логики $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$ и T — теория в логике $L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$. Если существует T -модель, реализующая несчетное множество типов из $D(T)$, то $S_T(\omega_1) = 2^{\omega_1}$.

Если L — некоторая логика и $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры логики L , то через $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$ будем обозначать то, что на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны одни и те же предложения логики L .

Если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $\langle \mathfrak{A}, a \rangle_{a \in A} \equiv_L \langle \mathfrak{B}, a \rangle_{a \in A}$, то пишем $\mathfrak{A} <_L \mathfrak{B}$.

9.20. Определение. Пусть L — некоторая логика. Если в определении κ -однородной системы $\mathfrak{A}$ в элементарной логике заменить отношение $\equiv$ на $\equiv_L$, то получим определение (κ, L) -однородной системы $\mathfrak{A}$.

Аналогом теоремы Морли о несчетной категоричности элементарных теорий для $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$ может служить

9.21. Теорема (Кейслер [3]). Пусть $L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$ — счетный фрагмент логики $L_{\omega\omega}^{\Sigma}$, T — теория в логике $L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)$ и $\kappa, \lambda > \omega$. Пусть выполнены условия:

1) T категорична в мощности κ ;

2) для каждой счетной модели $\mathfrak{A}$ теории T существуют модели $\mathfrak{B}$ как угодно большой мощности, для которых выполняется $\mathfrak{A} <_{L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X)} \mathfrak{B}$;

3) каждая T -модель $\mathfrak{A}$ мощности κ является $(|A|, L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X))$ -однородной.

Тогда T категорична в λ и все T -модели $\mathfrak{A}$ мощности λ являются $(|A|, L_{\omega\omega}^{\Sigma}(X))$ -однородными.

К сожалению, условие 3) данной теоремы не вытекает из условия 1). Соответствующий контрпример, как заметил С. Шелах, можно получить, используя пример Маркуса [1] минимальной счетной системы, содержащей бесконечное неразличимое множество.

9.22. Определение. Алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ будем называть *почти категоричной*, если для любой ал-

гебраической системы $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ из $|B| = |A|$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ следует $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$.

Легко понять, что если $\text{cf}|A| = \omega$, то система $\mathfrak{A}$ является почти категоричной. В частности, любая счетная модель является почти категоричной. Для ω_1 это уже не так. Первый пример системы $\mathfrak{A}$ мощности ω_1 , не являющейся почти категоричной, построил (как сказано в работе Чэна [1]) М. Морли. Следующий результат для $\lambda = \omega_1$ получен Палютиным [7], а затем он был обобщен Шелахом [13] на все регулярные мощности.

9.23. Теорема (Палютин [7], Шелах [13]). Пусть $V = L$. Если $\mathfrak{A}$ имеет регулярную мощность λ и не является почти категоричной, то существует 2^λ (т. е. максимум) попарно неизоморфных систем мощности λ , являющихся λ -почти изоморфными системе $\mathfrak{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

- Абакумов А. И., Палютин Е. А., Шишмарев Ю. Е., Тайцлин М. А.
1. Категоричные квазимногообразия. — Алгебра и логика, 1972, 11, № 1, с. 3—38.
- Адян С. И.
1. Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975.
- Акс и Кочен (Ax J., Kochen S.)
1. Diophantine problems over local fields, I. — Amer. J. Math., 1965, 87, p. 605—630.
2. Diophantine problems over local fields, II. — Amer. J. Math., 1965, 87, p. 631—648.
3. Diophantine problems over local fields, III: Decidable fields. — Ann. Math., 1966, 83, p. 437—456.
- Арнаутов В. И.
1. О топологизации счетных колец. — Сиб. матем. ж., 1968, 9, № 6, с. 939—946.
2. Пример бесконечного кольца, допускающего только дискретную топологию. — Математические исследования (Кишинев), 1970, 5, № 3, с. 182—185.
- Байжанов Б. С.
1. Некоторые свойства totally трансцендентных теорий. — В кн.: Теория моделей и ее приложения. Алма-Ата: МинВУЗ Каз. ССР и КазГУ, 1980.
2. Спектральные вопросы totally трансцендентных теорий конечного ранга. — В кн.: Теория моделей и ее приложения. Алма-Ата: МинВУЗ Каз. ССР и КазГУ, 1980.
- Барвайс и Робинсон (Barwise J., Robinson A.)
1. Completing theories by forcing. — Ann. Math. Logic, 1970, 2, p. 119—142.
- Баррис (Burris S.)
1. Rigid Boolean powers. — Algebra Universalis, 1978, 8, p. 264—265.
- Бекенов М. И.
1. О спектре квазитрансцендентных теорий. — Алгебра и логика, 1981, 20.
- Белеградек О. В.
1. О нестабильных теориях групп. — В кн.: Тезисы 2-й Всесоюзной конференции по математической логике. М., 1979, с. 5—6.
2. О почти категоричных теориях. — Сиб. матем. ж., 1973, 14, № 2, с. 277—285.
- Болдуин (Baldwin J. T.)
1. α_T is finite for ω_1 -categorical T . — Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 181, p. 37—51.
- Болдуин и Гивант (Baldwin J. T., Givant S.)
1. A note on model complete universal Horn classes. — 1979, preprint.
- Болдуин и Лаклан (Baldwin J. T., Lachlan A. H.)
1. On strongly minimal sets. — J. Symbolic Logic, 1971, 36, p. 79—96.
2. On universal Horn classes categorical in some infinite power. — Algebra Universalis, 1973, 3, p. 98—111.
- Вашкевичи Венглож (Waskiewicz J., Węglorz B.)
1. On ω -categoricity of powers. — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astron., Phys., 1969, 17, № 4, p. 195—200.
- Воот (Vaught R.)
1. Denumerable models of complete theories. — In: Infinitistic Methods. London: Pergamon, 1961, p. 303—321.
2. The Löwenheim—Skolem theorem. — In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, III. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 81—92.
- Гивант (Givant S.)
1. A representation theorem for universal classes of algebras in which all members are free. — Notices Amer. Math. Soc., 1972, 19, p. A-767.
2. A complete representation theorem for varieties categorical in power. — Notices Amer. Math. Soc., 1975, 22, p. A-33.
3. Universal Horn classes categorical or free in power: Dissertation. — Berkeley, 1975.
4. Universal Horn classes categorical or free in power. — Ann. Math. Logic, 1978, 15, p. 1—53.
5. A representation theorem for universal Horn classes categorical in power. — Ann. Math. Logic, 1979, 17, p. 91—116.
- Гретцер (Grätzer G.)
1. Universal algebra. — 2 Ed. — Berlin: Springer, 1979.
- Еримбетов М. М.
1. О полных теориях с 1-кардинальными формулами. — Алгебра и логика, 1975, 14, № 3, с. 245—257.
- Ершов Ю. Л.
1. Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров. — Алгебра и логика, 1964, 3, № 3, с. 17—38.
2. Об элементарной теории максимальных нормированных полей. — ДАН СССР, 1965, 165, № 1, с. 24—26.
3. Неразрешимость некоторых полей. — ДАН СССР, 1965, 161, № 1, с. 27—29.
4. Об элементарной теории максимальных нормированных полей, II. — Алгебра и логика, 1966, 5, № 1, с. 8—40.
5. Об элементарной теории максимальных нормированных полей, III. — Алгебра и логика, 1967, 6, № 3, с. 31—39.
6. Регулярно замкнутые поля. — ДАН СССР, 1980, 251, № 4, с. 783—785.
7. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
- Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.
1. Математическая логика. — М.: Наука, 1979.
- Зильбер Б. И.
1. Строение моделей категоричных теорий и проблема конечной аксиоматизируемости. — Деп. № 2800—77, 1977.
2. Сильно минимальные категоричные теории. — Сиб. матем. ж., 1980, 21.
3. Решение проблемы конечной аксиоматизируемости для теорий, категоричных во всех бесконечных мощностях. — В кн.: Теория моделей и ее приложения. Алма-Ата: МинВУЗ Каз. ССР и КазГУ, 1980, с. 47—60.

- Иссель (Issel W.)
1. Semantische Untersuchungen über Quantoren, I.—Z. math. Logik Grundl. Math., 1969, 15, № 2, S. 353—358.
- Кейслер (Keisler H. J.)
1. Some model theoretic results for ω -logic.—Israel J. Math., 1966, 4, № 4, 249—260.
2. Logic with the quantifier «there exist uncountably many».—Ann. Math. Logic, 1970, 1, p. 1—13.
3. Model theory for infinitary logic.—Amsterdam: North-Holland, 1971.
- Кейслер и Морли (Keisler H. J., Morley M.)
1. On the number of homogeneous models of a given power.—Israel J. Math., 5, № 2, p. 73—78.
- Кейслер и Чэн (Keisler H. J., Chang C. C.)
1. Теория непрерывных моделей: перев. с англ.—М.: Мир, 1971.
2. Теория моделей: перев. с англ.—М.: Мир, 1977.
- Килтинен (Kiltingen J. O.)
1. On the number of field topologies on an infinite fields.—Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 40, p. 30—36.
- Лаклан (Lachlan A.)
1. The transcendence rank of a theory.—Pacific J. Math., 1971, 27, p. 119—122.
2. A property of stable theories.—Fundam. math., 1972, 77, p. 9—20.
3. Complete varieties of algebras.—Notices Amer. Math. Soc., 1972, 19, № 5, p. 598.
4. On the number of countable models of a countable superstable theory.—In: Logic, Methodology and Philosophy of Science, IV. Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 45—56.
5. Two conjectures regarding the stability of ω -categorical theories.—Fundam. math., 1974, 81, p. 133—145.
6. Theories with a finite number of models in an uncountable power are categorical.—Pacific J. Math., 1975, 31, p. 133—145.
7. Dimension and totally transcendental theories of rank 2.—Lect. Notes Math., 1976, 537, p. 153—183.
8. Spectra of ω -stable theories.—Z. math. Logik Grundl. Math., 1978, 24, p. 129—139.
- Линдстрём (Lindström P.)
1. On model completeness.—Theorie, 1964, 30, p. 183—196.
- Лопес-Эскобар (Lopez-Escobar E.)
1. On definable well-ordering.—Fundam. math., 1966, 59, p. 13—21, 299—300.
- Лось (Łoś J.)
1. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems.—Colloq. Math., 1954, 3, p. 58—62.
- Макинтайр (Makintyre A.)
1. Martin's axiom applied to existentially closed groups.—Math. Scand., 1973, 32, № 1, p. 46—56.
- Маковский (Makowski J. A.)
1. On some conjectures connected with complete sentences.—Fundam. math., 1974, 81, № 3, p. 193—202.
- Марков А. А.
1. О безусловно замкнутых множествах.—Матем. сб., 1946, 18, № 1, с. 3—28.
- Маркус (Marcus L.)
1. A prime minimal model with an infinite set of indiscernibles.—Israel J. Math., 1972, 11, p. 180—183.
- Марш (Marsh W.)
1. On ω_1 - but not ω -categorical theories: Ph. D. Thesis.—Univ. of Dartmouth, 1966.

- Морли (Morley M. D.)
1. Categoricity in power.—Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114, p. 514—538.
2. Omitting classes of elements.—In: The Theory of Models/Ed. J. Addison, L. Henkin, A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 265—273.
3. Countable models of ω -categorical theories.—Israel J. Math., 1965, 5, p. 65—72.
4. The number of countable models.—J. Symbolic Logic, 1970, 35, p. 14—18.
- Морли и Воот (Morley M. D., Vaught R.)
1. Homogeneous universal models.—Math. Scand., 1962, 11, p. 37—57.
- Мурзин Ф. А.
1. Тотально трансцендентные и ω_1 -категоричные непрерывные теории.—В кн.: Тезисы 3-й Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск, 1974, с. 145—147.
2. ω -категоричные теории.—Сиб. матем. ж., 1977, 18, № 1, с. 232; Деп. № 3096—76.
- Мустафин Т. Г.
1. О сильной базе элементарных типов теорий.—Сиб. матем. ж., 1977, 18, № 6, с. 1356—1366.
2. О числе моделей счетных полных теорий.—В кн.: Тезисы 5-й Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск, 1979, с. 105.
- Наркевич (Narkiewicz W.)
1. Independence in a certain class of abstract algebras.—Fundam. math., 1961, 50, p. 333—340.
- Нуртазин А. Т.
1. Пример $\aleph_1$ -теории, категоричной в несчетных мощностях, но не имеющей главной моделью полных расширений.—Алгебра и логика, 1973, 12, № 3, с. 360.
- Палютин Е. А.
1. Модели со счетно категоричными универсальными теориями.—Алгебра и логика, 1971, 10, № 1, с. 23—32.
2. Об N^* -однородных моделях.—Сиб. матем. ж., 1971, 12, № 4, с. 920—921.
3. Категоричные квазимногообразия.—В кн.: Тезисы 2-й Всесоюзной конференции по математической логике. М., 1979, с. 38.
4. Категоричные квазимногообразия произвольной сигнатуры.—Сиб. матем. ж., 14, № 6, с. 1285—1303.
5. О спектре полных квазимногообразий.—В кн.: Тезисы 12-й Всесоюзной алгебраической конференции. Свердловск, 1973, с. 297.
6. Описание категоричных квазимногообразий.—Алгебра и логика, 1975, 14, № 2, с. 145—185.
7. О числе моделей в L_{∞, ω_1} -теориях, II.—Алгебра и логика, 1977, 16, № 4, с. 443—456.
8. О категоричных позитивных хорновых теориях.—Алгебра и логика, 1979, 18, № 1, с. 47—72.
9. Completeness and categoricity of quasivarieties.—In: Abstracts of 6-th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Hannover, 1979, p. 83—87.
10. Три теоремы о полных позитивных классах.—В кн.: Тезисы 5-й Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск, 1970, с. 116.
11. Criterion of complete varieties categoricity.—In: Abstracts of 6-th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Hannover, 1979, p. 143—147.
12. Категоричные хорновые классы. I.—Алгебра и логика, 1980, 19, № 5.
13. Описание категоричных позитивных хорновых классов.—Алгебра и логика, 1980, 19, № 6.

14. Number of models in complete varieties. — In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, VI. Amsterdam: North-Holland, 1980, p. 203—217.
- Перетяткин М. Г.
 1. Теории с тремя счетными моделями. — *Алгебра и логика*, 1980, 19, № 2.
 2. Пример ω_1 -категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории. — *Алгебра и логика*, 1980, 19, № 3, с. 314—347.
- Пинус А. Г.
 1. О свойстве Левенгейма — Сколема для логик второго порядка. — В кн.: МНТС, Рекурсивные функции. Иваново, 1978, с. 55—60.
 2. Мощность моделей теорий исчисления с квантором Хэртига. — *Сиб. матем. ж.*, 1980, 19, № 6, с. 1349—1356.
 3. Число Ханфа для исчисления с квантором Хэртига. — *Сиб. матем. ж.*, 1979, 18, № 2, с. 440—441.
 4. Спектр жестких систем хорновых классов. — *Сиб. матем. ж.*, 1981, 22, № 2.
- Подевский (Podewski K. P.)
 1. The number of field topologies on countable fields. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, 39, p. 33—38.
 2. Topologisierung algebraischer Strukturen. — *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1977, 22, № 9, S. 1283—1290.
- Рессер (Ressayre J. P.)
 1. Sur les theories du premier ordre catégorique en un cardinal. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, 142, p. 481—505.
- Робинсон (Robinson A.)
 1. Forcing in model theory. — *Symposia Math.*, 1970, 5, p. 69—82.
- Скотт (Scott D.)
 1. Logic with denumerable long formulas and finite string of quantifiers. — In: *The Theory of Models*/Ed. J. Addison, L. Henkin, A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 329—341.
- Тайманов А. Д.
 1. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей. I и II. — *ИАН СССР, сер. матем.*, 1961, 25, № 4, с. 601—620; 1961, 25, № 6.
 2. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей. — *Алгебра и логика*, 1962, 1, № 4, с. 5—31.
 3. Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию. — *Алгебра и логика*, 1973, 12, с. 64—65.
 4. О топологизации счетных алгебр. — *ДАН СССР*, 1978, 243, № 2.
 5. О топологизации классических алгебр. — В кн.: *Математический анализ и смежные вопросы математики*. Новосибирск: Наука, 1978.
- Тайцлин М. А.
 1. Не почти сильно минимальная теория, категоричная в бесконечных мощностях. — В кн.: *Тезисы 2-й Всесоюзной конференции по математической логике*. М., 1972, с. 47—48.
- Тарский (Tarski A.)
 1. Arithmetical classes and types of Boolean algebras. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949, 55, p. 64.
- Урбаник (Urbanik K.)
 1. A representation theorem for v^* -algebras. — *Fundam. math.*, 1963, 52, № 3, p. 291—317.
- Фрессе (Fraïssé R.)
 1. Sur quelques classifications des systèmes de relations. — *Publ. scient. de l'univ. d'Algers*, 1955, A1, p. 35—182.
- Фридман (Friedman H.)
 1. One hundred and two problems in mathematical logic. — *J. Symbolic Logic*, 1975, 40, p. 113—129.
- Фуркен (Fuhrken G.)
 1. A remark on the Häftig quantifier. — *Z. math. Logik Grundl. Math.*, 1972, 18, № 2, p. 227—228.

- Хансон (Hanson J.)
 1. An infinite groupoid which admits only trivial topologies. — *Amer. Math. Monthly*, 1967, 74, p. 568—569.
- Ханф (Hanf W.)
 1. Incompleteness in languages with infinitely long expressions. — *Fundam. math.*, 1964, 53, p. 309—324.
- Хессе (Hesse G.)
 1. Zur Topologisierbarkeit von Gruppen: Dissertation. — Hannover, 1979.
- Хэртиг (Häftig K.)
 1. Über einem Quantifikator mit zwei Wirkungsbereichen. — In: *Colloquium on Foundations of Mathematics, Mathematical Machines und their Applications*, Tihany, 1962. Budapest, 1965, p. 31—36.
- Чихачев С. А.
 1. О генерических моделях. — *Алгебра и логика*, 1975, 14, № 3.
 2. Генерические модели счетных теорий. — *Алгебра и логика*, 1976, 15, № 6.
 3. Один пример к теории конечного форсинга. — В кн.: *Тезисы 5-й Всесоюзной конференции по математической логике*. Новосибирск, 1979.
- Чэн (Chang C. C.)
 1. Some remarks on the model theory of infinitary languages. — In: *The Syntax and Semantics of Infinitary Languages*. Berlin, 1968, p. 36—63.
- Шелах (Shelah S.)
 1. Categoricity of classes of models: Ph. D. Thesis. — Jerusalem: Hebrew University, 1969.
 2. Stable theories. — *Israel J. Math.*, 1969, 7, p. 187—202.
 3. Finite diagrams stable in power. — *Ann. Math. Logic*, 1970, 2.
 4. Stability, the i.c.p. and superstability: model theoretic properties of formulas in the first order theory. — *Ann. Math. Logic*, 1971, 3.
 5. The number of non-isomorphic models of an unstable first order theory. — *Israel J. Math.*, 1971, 9, p. 473—487.
 6. Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first order theory. — *J. Symbolic Logic*, 1972, 37.
 7. Categoricity of uncountable theories. — *Proc. of Tarski's Symp.*, *Symp. Pure Math.*, 1974, 25, p. 187—204.
 8. Why there are many non-isomorphic models for unsuperstable theories. — *Proc. Intern. Congress of Math.*, Vancouver, 1974, p. 554—557.
 9. Categoricity in ω_1 of sentences in $L_{\omega\omega}(Q_1)$. — *Israel J. Math.*, 1975, 20, № 2, p. 127—148.
 10. Refuting Ehrenfeucht conjecture on rigid models. — *Israel J. Math.*, 1976, 25, p. 273—286.
 11. On a problem of Kurosh, Jonsson groups and applications. — Jerusalem, 1976, preprint.
 12. Classification Theory and Number of Non-Isomorphic Models. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
 13. On the number of non-isomorphic models of cardinality λ , $\lambda \geq \aleph_1$ equivalent to a fixed model. — *Notre Dame J. Formal Logic*, 1981, 22, № 1.
- Шишмарев Ю. Е.
 1. О категоричных теориях одной функции. — *Матем. заметки*, 1972, 11, № 1, с. 89—98.
- Шмелева (Szmielcw W.)
 1. Elementary properties of Abelian groups. — *Fundam. math.*, 1955, 41.
- Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)
 1. An application of games to the completeness problem for formalized theories. — *Fundam. math.*, 1961, 49, p. 129—141.
 2. Elementary theories with models without automorphisms. In: *The Theory of Models*/Ed. J. Addison, L. Henkin, A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1963, p. 70—76.

Абсолютность Δ формул 244
 — Δ_0 -формул 241
 Аксиома Архимеда 19, 204
 — объемности 23
 Аксиомы Генкина 38
 — равенства 37, 47
 Алгебра генерическая 294
 — свободная 293
 Алгебраическая система жесткая 374
 — — локально конечная 353
 — — насыщенная 369
 — — однородная 371
 — — почти категоричная 381
 — — топологизируемая 374
 — — N^* -однородная 371
 — — κ -насыщенная 369
 — — λ -компактная 346
 — — λ -простая 347
 — — $(\lambda, 1)$ -простая 347
 Алгебраические системы κ -почти изоморф-
 ные 379
 Аппроксимации конъюнктивных игровых
 формул 263

База теории сильная 350
 — форсинга 103

Вектор кривизны 226
 — почти стандартный 218, 220
 Вещь 202
 Вложение 112, 316
 — изоморфное 61
 — элементарное 61
 Выполнимость формулы 75
 Выражение 26

Галактика 206
 Гомоморфизм 112
 График 334
 Группа абелева 15, 290
 — — полная 15
 — — универсальная локально конечная 192
 — — экзистенциально замкнутая 170

Диаграмма 65
 — базисная 65
 — конечная 326
 — элементарная 65

Закон двойного отрицания 33
 — де Моргана 33
 — исключенного третьего 33
 — противоречия 33
 Законы Лейбница 37

Идеал 21
 — максимальный 22
 — простой 21

Изоморфизм 61, 112
 — частичный 101
 Интеграл Римана 215
 Интерпретация 28, 327
 — Лейбница 214
 — относительная 292, 296

Категория атрибутов 299
 — значений 291
 — логическая 301
 — моделей 296, 303
 — T -алгебр 291
 — T -моделей 291
 Квазимонообразие 351
 — стандартное 358
 — — характеристики X 356, 357
 Квантор Хэртига 378
 Кванторы обобщенные 100
 Класс алгебраических систем аксиоматизи-
 руемый 30, 58, 116, 323
 — — категоричный 323
 — — конечно аксиоматизируемый 30, 123,
 367
 — — локальный 69
 — — модельно полный 323
 — — полный 323
 — — псевдоэлементарный 120
 — — свободный 353
 — — строго свободный 353
 — — элементарный 30, 58, 116
 Классы алгебраических систем рациональ-
 но эквивалентные 328
 — — R -эквивалентные 328

Кольцо 20
 — главных идеалов 22
 — коммутативное 20
 — простое 127
 Компаньон модельный 156
 Константы Генкина 36
 Константы-свидетели 38
 Кривизна полная 230
 Кривые соприкасающиеся 224
 Критерий 72
 — — модельной полноты 148
 — — полноты 73

Лемма Мостовского о сжатии 249
 — об усечении 250
 Логика 31, 53, 120
 — бесконечная 52
 — многосортная 50
 — первого порядка 25
 — слабая второго порядка 51
 Локализация 304
 — конечного покрытия 306

Мера кривизны 230
 Место 304
 Метод альтернативных цепей 70
 — цепочный 77
 Микроскоп инфинитезимальный 205

Многообразие 351
 Множество алгебраически независимое 327
 — аналитическое 257
 — атомов 202
 — Борелевское 257
 — в полной теории 324
 — внешнее 207
 — внутреннее 201
 — — для модели 270
 — генерическое 96, 103
 — допустимое 241
 — наследственно конечное 51
 — независимое 340
 — однородное 184, 185, 194, 195
 — — для разбиения 195
 — относительно формульное 324
 — стандартное 206
 — транзитивное 315
 — формул в T над X 325
 — — совместное в T 325
 — Хинтики 252
 Модель 84
 — базисно насыщенная 81
 — большая 76
 — булевой элементарной экзистенциальной
 доктрины 300
 — генерическая 97
 — малая 76
 — насыщенная 137
 — простая 85
 — разрешимая 24
 — рекурсивно насыщенная 76
 — скулемовская 187
 — экзистенциально замкнутая 97, 159
 — T -генерическая 97
 Монада 218
 — относительная 218
 Мономорфизм элементарный 188
 Морфизм 144
 — алгебраических теорий 292
 — арифметического универсума 314
 — геометрический 306
 — логический 302
 — мест 306
 — моделей 296
 — элементарный 144

Непрерывность равномерная 209
 Неравенство над $\aleph$ 125
 Носитель универсума 239

Обеднение алгебраической системы 38, 119
 Область целостности 23
 Обобщение алгебраической системы 38,
 119
 — — — главное 326
 — — — диаграммное 64
 — — — морлевское 64
 — — — несущественное 326
 — — — скулемовское 64
 Оболочка системы допустимая 248
 Образ гомоморфизма 78
 Объект поля 312
 — транзитивных множеств 316
 Однородное ω -дерево 347
 Операция A -рекурсивная 243
 Ординал допустимый 249
 — стабильный 249
 Отношение антисимметричное 194
 — выполнимости 28
 — связанное 194
 — фундированное 311
 Отображение внутреннее линейное 218
 — элементарное 65, 145
 Оценка истинности 32

Переменная свободная 27
 Подмножество арифметическое 256
 Подсистема 60, 186
 — конечно порожденная 60
 —, порожденная множеством X 60
 — элементарная 60, 186, 187
 Покрытие локальное 124
 Поле 22
 — алгебраически замкнутое 23
 — нормированное 136
 — — псевдополное 136
 — псевдоконечное 124
 — сепарабельное замкнутое 154
 — характеристики p 22
 — — 0 22
 Пополнение модельное 156
 Порядок линейный однородный 72
 Последовательность Коши 137
 — Морли 338
 Правило обобщения 43
 — сечения 47
 Преэлементы 239
 Предикат A -рекурсивно перечислимый 243
 — A -рекурсивный 243
 Предложение 28
 Предтопос 303
 Принцип Коши 214
 — Лейбница 199, 212, 216
 — TC -индукции 245
 — Δ -выделения 243
 — Σ -замещения 244
 — Σ -рекурсии 245
 — Σ -рефлексивности 242
 Произведение фильтрованное 113
 Производная Кантора — Бендиксона 90
 Пространство стоуновское 66, 90, 93
 Псевдопредел 137
 Пучок 304

Ранг Кантора — Бендиксона 90
 — по Морли 89, 93, 336
 Расширение главное 326
 — несущественное 326
 — консервативное 63
 — конечное 250
 — простое модельное 165
 — свидетельское 38
 — элементарное 60

Свойство амальгамируемости 67, 68
 — конечных пересечений 110
 — независимости 342
 — порядка 342
 — совместного вложения 80
 — строгого порядка 242
 — форсингового 103
 Секвенция 45
 Семантика 53
 Синтаксис 53
 Система аксиом Крипке — Платека 241
 — алгебраическая 25
 — — κ -насыщенная 82
 — алгебраически замкнутая 125
 — каноническая 39
 — насыщенная 82, 137, 369
 — простая 126
 — рекурсивно насыщенная 76
 — фундированная 249
 — экзистенциально замкнутая 120
 — — полная 125
 — K -свободная 320
 — T -экзистенциально универсальная 163
 — — (κ, L) -однородная 381
 Системы элементарно эквивалентные 58

- Спектр базисной стабильности 92
 — грубый 328
 — категоричности 354
 — класса 328
 — свободы 354
 — теории 94, 328
 Степень по Морли 337
 — M 128
 Суперсистема 201, 207
 Сфера соприкасающаяся 227
- Тавтология 32, 33
 Тезис Гильберта 49
 Телескоп бесконечный 205
 Теорема Барвайса о Σ -компактности 254
 — об абстрактной полноте 267
 — Бета об определении 280
 — Вота о дескриптивных множествах 264
 — — — счетной насыщенной модели 83
 — единственности для простых моделей 86
 — интерполяционная Крейга 78
 — Крейга — Лопес-Эскобара сильная 277
 — компактности Гёделя — Мальцева 17, 34
 — для логики высказываний 34
 — Крипке — Платека 269
 — Леви об абсолютности 248
 — Лёвенгейма — Скулема 18
 — — — о подъеме 71
 — — — спуске 70
 — Линдона о гомоморфизме 79
 — Линдстрёма 54
 — Лося 115
 — Мальцева 125
 — Мальцева — Тарского 69
 — о полноте 43, 45—47, 302, 303
 — — — логической категории 302
 — — — разбиении 185
 — — — существовании классифицирующего топоса 307
 — — — насыщенных моделей 82
 — — — простых моделей 86
 — об опускании типов 83, 96, 98
 — — — устранении сечения 49
 — — — элементарных цепях 63
 — — S -непрерывности 213
 — — ω -полноте 84
 — — основная исчисления 216
 — — полноты для $L_{\omega, \omega}$ 104
 — Рамсея 185
 — Робинсона о совместности 77
 — Скотта о $L_{\omega, \omega}$ 103
 — Тарского — Вота 144
 — Чэна — Лося — Сушко 70
 — Эрдеша — Радо 185
 — Эрэнфойхта — Московского 185
 Теории эквивалентные 57
 — P -эквивалентные 328
 Теория 57
 — алгебраическая 290, 300
 — алгебраической системы 58
 — базисно мультиупорядоченная 93
 — — — независимая 93
 — — — стабильная 92, 93
 — — — суперстабильная 92, 93
 — — — упорядоченная 93
 — Генкина 38
 — групп 15, 292, 295
 — двукардинальная 327
 — декартова 295, 298
 — допускающая элиминацию кванторов 62
 — индуктивная 62
 — Йонсоновская 79
 — категоричная 323
 — — в мощности 72, 323
 — квазитрансцендентная 349
- Теория класса 57
 — когерентная 302
 — коммутативных колец 290, 295
 — конечно аксиоматизируемая 58, 367
 — локально совместная 65
 — множеств ZF 23
 — моделей абстрактная 53
 — — восточная 56
 — — западная 56
 — модельно полная 61, 133
 — недвукардинальная 327
 — непротиворечивая 24, 57
 — ограниченная 333
 — позитивная 350
 — полная 23, 58
 — почти категоричная 333
 — — сильно минимальная 332
 — разрешимая 23, 59
 — рекурсивно аксиоматизируемая 57, 58
 — сильно минимальная 330
 — совместная 57
 — стабильная 194, 343
 — — в мощности 194, 345
 — суперстабильная 346
 — totally трансцендентная 336
 — универсальная 60, 350
 — устойчивая относительно гомоморфных образов 78
 — — — подсистем 69
 — финитарно когерентная 307
 — форсинг-полная 373
 — хорнова 350
 — ω -полная 84
 Терм 26
 — замкнутый 26
 — скулёмовский 186
 Тип 82, 132, 133, 191, 326
 — алгебраический 349
 — базисный 80
 — изолированный 85, 88
 — полный 326
 — сильный 350
 — суперстабильный 349
 — A -определимый 343
 Типы независимые 350
 Топос Гротендика 305, 309
 — элементарный 307
- Ультрапроизведение 113
 — гомоморфизмов 118
 Ультрастепень 113
 Ультрафильтр 111
 — главный 111
 — κ^+ -хороший 137
 — ω -неполный 132
 Универсал 350
 Уравнение над системой 125
 Условие для теории 95
 — κ -минимальности 364
- Фильтр 110
 — главный 110
 — κ -конечный 110
 Фильтрованное произведение 112
 Формула 27
 — атомная 26
 — базисная 80
 — в нормальной форме с отрицанием (н. ф. о.) 252
 — — теории 7 324
 — конечная 325
 — конъюнктивная игровая 257
 — копирующаяся над A 345
 — логики второго порядка 255
 — первичная 31

- Формула позитивная 78
 — полная 85
 — пропозициональная 31
 — связанная и антисимметричная 343
 — сильно минимальная 330
 — совместная 31
 — стабильная в теории T 343
 — универсальная 60
 — усеченная игровая 258
 Форсинг бесконечный 162
 — конечный по Робинсону 94
 Фрагмент логики $L_{\omega, \omega}$ 253, 381
 Функциор забывающий 119
 — логический 303
 Функция базисной стабильности 93
 — вещественная 211
 — интегрально определенная 154
 — непрерывная стандартная 216
 — скулёмовская 64, 187
 — стандартная 204
 — S -непрерывная 216
- Часть стандартная 215
 — — конечного вектора 218
 Число бесконечное малое 204, 223
 — — целое 204
 — гипервещественное 202
 — — почти стандартное 205
 — гиперцелое 204
 — действительное 19
 — Лёвенгейма 377
 — Лёвенгейма — Скулема 377
 — стандартное 202, 212
 — Ханфа 377
- Экстенциональные формулы 312
 Элемент A -коновый 243
 — T -изолированный 375
 Элементарная экзистенциальная доктрина (ЭЭД) 299
- Ядро совершенное 90
 Язык диаграммный 64
 — рекурсивный 58
- ЕС-класс 30
 ЕСД-класс 30, 58
 h -компаньон 362
 L -определимый кардинал 378
 $L_{\omega, \omega}$ эквивалентность 101
 m -многообразие 220
 N -окрестность 334
 P -интерпретация 327
 S -непрерывность 216
 v^* -алгебра 353
 Δ -неразличимая последовательность 327
 Δ -неразличимое множество 327
 Δ -предикат 243
 Δ_0 -формула 240
 Δ_1 -класс 256
 η_α -множество 81, 132
 μ -спектр 328
 Π -предикат 243
 Π -формула 242
 Π_1 -класс 256
 Σ -предикат 243
 Σ -формула 242
 Σ_1 -класс 256
 (φ, x) -ранг Шелаха 342
 $(\varphi, x, 2)$ -дерево высоты α 341
 ω -логика 51, 189
 ω -модель 84
 V_L отображение 145
 V_E -теория 62

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	5
Предисловие Дж. Барвайса	6
Предисловие редакторов русского перевода	7
Введение	11
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. <i>Дж. Барвайс</i>	13
Глава 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ. <i>Х. Дж. Кейслер</i>	55
Глава 3. ТЕОРИЯ УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИ- СТОВ. <i>П. Эклоф</i>	109
Глава 4. МОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА. <i>А. Макинтайр</i>	141
Глава 5. ОДНОРОДНЫЕ МНОЖЕСТВА. <i>М. Морли</i>	183
Глава 6. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИВЫХ И ПОВЕРХ- НОСТЕЙ. <i>К. Д. Строян</i>	199
Глава 7. ДОПУСТИМЫЕ МНОЖЕСТВА И БЕСКОНЕЧНАЯ ЛО- ГИКА. <i>М. Маккаи</i>	235
Глава 8. ДОКТРИНЫ В КАТЕГОРНОЙ ЛОГИКЕ. <i>А. Кок, Г. Э. Рейес</i>	289
Дополнение. СПЕКТР И СТРУКТУРА МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕО- РИЙ. <i>Е. А. Палютин</i>	320
Предметный указатель	388

СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Часть I. ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

Редактор *В. В. Донченко*.

Технический редактор *С. Я. Шкляр*. Корректоры *Е. В. Сидоркина, В. П. Сорокина*

ИБ № 11559

Сдано в набор 03.04.81. Подписано к печати 04.05.82. Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1.
Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл.печ. л. 24,5. Уч.-изд. л. 25,92. Тираж
23 000 экз. Заказ № 1149. Цена 2 р. 20 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знаме-
ни Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполи-
графпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли. 199352, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.