МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИ-ЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

СБОРНИК ПЕРЕВОДОВ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. В. ИДЕЛЬСОНА и Г. Е. МИНЦА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.1
М 34
УДК 512.8+164

2-2-3
209-67

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Эта книга представляет собой сборник переводов (единственное исключение составляет статья Г. Е. Минца; см. ниже) статей по теории логического вывода. Возросший за последнее время интерес к этой области математической логики вызван бурным развитием «машинной логики», в частности, появлением многочисленных работ, посвященных машинному доказательству теорем *).

В сборнике представлены как работы, ставшие уже классическими, так и некоторые работы последних лет. Из многочисленных в настоящее время исследований по теории логического вывода в сборник отобраны работы, связанные с наиболее интересными (с точки зрения составителей) этапами развития этой теории.

Читатель, не обладающий никакими специальными сведениями в области математической логики (но обладающий некоторой математической культурой), может использовать этот сборник в качестве пособия для систематического изучения теории логического вывода. При таком использовании можно рекомендовать следующий *порядок чтения*.

1. §§ 3—5, 7 и 8 работы Г. Генцена «Непротиворечивость чистой теории чисел».
2. Разделы I—III работы Г. Генцена «Исследования логических выводов».
3. Раздел IV той же работы, § 1.
4. Раздел V той же работы.
5. §§ 1—3 статьи Г. Е. Минца «Теорема Эрбрана».

Читатель, овладевший этим материалом, получит достаточную первоначальную подготовку в области теории логического вывода и сможет в дальнейшем выбирать для чтения те или иные статьи сборника в соответствии со своими интересами.

---

*) Наиболее известна из них, пожалуй, работа Ван Хао, На пути к механической математике, Кибернетический сборник 5, ИЛ, 1962.

С целью облегчить чтение тех мест, которые изложены авторами недостаточно ясно или слишком сжато, переводчиками, а также редактором Г. Е. Минцем даны примечания. В отличие от авторских подстрочных примечаний, которые помечаются цифрами, подстрочные примечания переводчиков и редактора помечаются звездочкой.

Остановимся более подробно на содержании некоторых статей.

В работе Г. Генцена «Исследования логических выводов» описаны две формализации исчисления предикатов. Первая — формализация общеупотребительного в математике метода построения логических выводов с введением допущений (формализация «натурального» типа). Вторая — формализация, особенно удобная для исследования самого аппарата логического вывода (формализация «логистического» типа). Основным результатом работы является теорема об устранимости правила «сечения» в формализации логистического типа. Эта теорема служила и служит, во-первых, отправным пунктом для многих исследований по теории логического вывода и, во-вторых, теоретической базой построения многих алгорифмов машинного доказательства теорем.

Генценовские логистические исчисления часто называют просто генценовскими исчислениями.

Вместо аппарата генценовских логистических исчислений некоторые авторы применяют близкий аппарат семантических таблиц Э. Бета. В настоящем сборнике помещен перевод нескольких выдержек из тех разделов книги Э. Бета «Основания математики», где описывается этот аппарат и выясняется его связь с аппаратом генценовских исчислений.

В работе Г. Генцена «Непротиворечивость чистой теории чисел» подробно описывается формализация натурального типа для арифметики, обсуждается вопрос о средствах, с помощью которых можно доказать непротиворечивость арифметики, и дается доказательство ее непротиворечивости.

В работе Г. Генцена «Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел» указан метод распространения доказательства теоремы об устранимости сечения на логико-математические исчисления. Этот метод использован для доказательства непротиворечивости арифметики.

В работе С. Кангера «Упрощенный метод доказательства для элементарной логики» приводится секвенциальный вариант классического исчисления предикатов с равенством и описывается метод поиска вывода в этом исчислении, удобный для реализации на вычислительных машинах.

В работе С. К. Клини «Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях LK и LJ» доказаны теоремы, позволяющие теоретически обосновать возможность варьирования «тактики» поиска вывода при машинном доказательстве теорем. В его же работе «Конечная аксиоматизируемость теорий в исчислении предикатов с помощью дополнительных предикатных символов» эти теоремы используются для установления конечной аксиоматизируемости произвольного рекурсивно перечислимого дедуктивно замкнутого множества формул.

В работе К. Шютте «Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов» приводится короткое доказательство интерполяционной теоремы Линдона — Крейга для классического и интуиционистского исчисления предикатов. Эта теорема играет важную роль как в теории логического вывода, так и в теории моделей.

В работе К. Геделя «Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения» изложено основанное на новом подходе доказательство непротиворечивости арифметики.

Особое место в теории логического вывода занимает теорема Эрбрана. Она упоминается в работах, посвященных «машинной логике», пожалуй, даже чаще, чем теорема Г. Генцена. Она является основной теоремой работы Ж. Эрбрана Recherches sur la théorie de la demonstration, Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl III, sciences mathématiques et physiques, no. 33, стр. 128. Однако недавно было обнаружено*), что доказательство теоремы, данное Эрбраном в этой работе, содержит существенную ошибку, устранение которой связано со значительными техническими трудностями.

Таким образом, в настоящее время в литературе нет конструктивного доказательства теоремы Эрбрана для произвольных формул**). Поэтому было решено включить в сборник статью Г. Е. Минца «Теорема Эрбрана», содержащую доказательство теоремы Эрбрана, а также близких утверждений, относящихся к исчислению предикатов с равенством.

Авторы статей, переводы которых помещены в сборнике, применяют, вообще говоря, различную символику. При переводе была проведена унификация встречающихся обозначений с целью облегчить чтение. Однако в подстрочных примечаниях

*) B. Dreben, P. Andrews, S. Aandreaa. False lemmas in Herbrand, Bull. Amer. Math. Soc., **69**, № 5 (1963), 699—706.

**) Доказательства для предваренных формул имеются: см., например, Hilbert u. Bernays, Grundlagen der Mathematik. Bd. 2, 1939, § 3, пункт 3. К этому близка также усиленная основная теорема Г. Генцена (см. помещенную в настоящем сборнике статью Г. Генцена «Исследования логических выводов», раздел IV).

переводчиков указывается та символика, которую применяют авторы.

Следует обратить внимание читателя на нечеткость используемого некоторыми авторами (вслед за Гильбертом и Бернайсом) обозначения $A(t)$ для результата применения операции подстановки терма в формулу. При таком способе обозначения подразумевается, что фиксирована некоторая переменная a и производится подстановка терма t вместо всех вхождений a в формулу A. Однако сама переменная a при этом не указывается. Более точным было бы, например, обозначение $[A]_t^a$.

ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ[1])

Герхард Генцен

ОБЗОР

Настоящие исследования относятся к области логики предикатов, называемой в Г. — А.[2]) «узким исчислением предикатов» *). Эта логика охватывает такие выводы, которые постоянно применяются во всех разделах математики. К ним могут присоединяться еще аксиомы и правила вывода, которые можно причислить собственно к отдельным разделам математики, таковы, например, в арифметике аксиомы натуральных чисел, сложения, умножения и возведения в степень, а также правило полной индукции; в геометрии — геометрические аксиомы.

Наряду с классической логикой я рассматриваю в дальнейшем и интуиционистскую логику в том виде, как она формализована, например, Гейтингом[3]).

Настоящие исследования классической и интуиционистской логики предикатов распадаются, по существу, на две лишь слабо связанные друг с другом части.

1. Моя исходная точка зрения заключалась в следующем: формализация логических выводов, проведенная, в частности,

---

[1]) G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen. I, II, Mathematische Zeitschrift, B. 39, стр. 176—210, 405—443.

Эта работа принята факультетом математики и естественных наук Геттингенского университета в качестве докторской диссертации.

[2]) D. Hilbert und W. Ackermann. Grundzüge der theoretischen Logik.

В дальнейшем всюду цитируется как Г.—А. (Русский перевод: Д. Гильберт и В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, 1947. Страницы указываются по переводу. — *Прим. перев.)*

*) В первом издании книги Г.—А. это исчисление называлось «узким функциональным исчислением». Во втором издании, с которого сделан русский перевод, оно названо «узким исчислением предикатов». Причины изменения терминологии указаны в авторском предисловии ко второму изданию. — *Прим. перев.*

[3]) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. (1930). стр. 42—65.

Фреге, Расселом и Гильбертом, очень далека от тех способов рассуждений, которые применяются в действительности при математических доказательствах. Этим достигаются значительные формальные преимущества. Я хотел прежде всего построить такой формализм, который был бы как можно ближе к применяющимся в действительности рассуждениям. Так возникло «исчисление натуральных выводов» («NJ» для интуиционистской логики предикатов, «NK» — для классической). Далее обнаруживается, что исчисление обладает некоторыми особыми свойствами и что отвергаемый интуиционистами «закон исключенного третьего» занимает по отношению к этим свойствам особое место.

Исчисление натуральных выводов я описываю и рассматриваю в разделе II настоящей работы.

2. Более тщательное исследование особых свойств натурального исчисления привело меня, в конце концов, к некоторой очень общей теореме, которую в дальнейшем я буду называть «основной теоремой».

В основной теореме[1]) утверждается, что каждое чисто логическое доказательство может быть приведено к некоторой определенной, хотя и не однозначно, нормальной форме. Наиболее существенное свойство такого нормального доказательства можно выразить так: оно не содержит окольных путей. В него не вводится никаких понятий, кроме тех, которые содержатся в конечном результате и поэтому с необходимостью должны быть использованы для получения этого результата.

Основная теорема справедлива как для классической, так и для интуиционистской логики предикатов.

Для того чтобы сформулировать ее в соответствующей форме и доказать, мне пришлось ввести особое, подходящее для этих целей логическое исчисление. Натуральное исчисление оказалось непригодным для этого. Хотя уже в нем обнаруживаются существенные для справедливости основной теоремы свойства, но лишь в его интуиционистской форме, в то время как закон исключенного третьего, как уже отмечалось, занимает особое место относительно этих свойств.

В разделе III этой части работы описывается еще одно исчисление логических выводов, которое и в интуиционистской и в классической форме обладает всеми желаемыми свойствами («LJ» для интуиционистской, «LK» — для классической логики

---

[1]) Важный частный случай основной теоремы был доказан ранее Эрбраном совершенно иным путем. Подробнее об этом см. раздел IV, § 2.

предикатов). С помощью этого исчисления формулируется и доказывается основная теорема.

Основная теорема допускает разнообразные применения. В качестве примеров такого применения я рассматриваю в разделе IV разрешающую процедуру для интуиционистского исчисления высказываний (IV, § 1) и даю новое доказательство непротиворечивости классической арифметики без правила полной индукции (IV, § 3).

Разделы III и IV можно читать независимо от раздела II.

3. Раздел I содержит описание используемых в настоящей работе обозначений.

В разделе V я доказываю эквивалентность построенных мною ранее логических исчислений NJ, NK и LJ, LK некоторому исчислению («LHJ» для интуиционистской, «LHK» — для классической логики предикатов), которое может быть отождествлено с формальными системами Рассела, Гильберта и Гейтинга (и которое легко сопоставимо с этими системами).

4. Настоящая часть I содержит разделы с I по III; разделы IV и V содержатся в части II работы.

РАЗДЕЛ I

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Понятиям «объект», «функция», «предикат», «высказывание», «теорема», «аксиома», «доказательство», «вывод» и т. д. в логике и математике при их формализации сопоставляются определенные знаки и комбинации знаков. Мы их делим на

1) *знаки*;
2) *выражения* — конечные последовательности знаков;
3) *фигуры* — каким-либо образом упорядоченные конечные множества знаков.

Знаки являются частным случаем выражений и фигур, выражения — частным случаем фигур.

В настоящей работе мы будем рассматривать знаки, выражения и фигуры следующих видов.

1. Знаки

Знаки делятся на знаки для постоянных и для переменных.

1.1. Знаки для постоянных

Знаки для постоянных объектов: 1, 2, 3, ...

Знаки для постоянных функций: +, —, ·.

Знаки для постоянных высказываний: $\curlyvee$ («истинное высказывание»), $\curlywedge$ («ложное высказывание»).

Знаки для постоянных предикатов: =, <.

Логические знаки[1]): & «и», $\vee$ «или», $\supset$ «из ... следует», $\supset\subset$ «эквивалентно» *), $\neg$ «не», $\forall$ «для всех», $\exists$ «существует».

Мы применяем также следующие наименования: и-знак, или-знак, знак следования, знак эквивалентности, знак отрицания, знак всеобщности, знак существования.

Вспомогательные знаки:), (, $\rightarrow$.

1.2. Переменные

Предметные переменные. Мы делим их на *свободные* предметные переменные: a, b, c, ..., m, и *связанные* предметные переменные: n, ..., x, y, z.

Переменные высказывания: A, B, C, ...

Необходимо иметь в распоряжении сколь угодно много переменных; когда алфавит оказывается недостаточным, мы приписываем к буквам цифровые индексы, например, a_7, C_3.

1.3. Готические и греческие буквы служат нам в качестве «информационных знаков» и являются, следовательно, не знаками формализованной логики, а переменными в наших рассуждениях о ней. Их значения будут разъясняться там, где они применяются.

2. Выражения

2.1. Понятие высказывательного выражения, называемого кратко *формулой* (определяется индуктивно).

Понятие формулы употребляется нередко и в более общем смысле; определяемый в дальнейшем частный случай мы могли бы поэтому называть «чистой логической формулой».

2.11. Знак для постоянного высказывания есть формула. Это знаки ϒ и ⅄.

Переменное высказывание с некоторым числом (возможно, равным нулю) следующих за ним свободных предметных переменных есть формула **), например, $Abab$.

---

[1]) Знаки $\vee$, $\supset$, $\exists$ мы заимствуем у Рассела. Знаки, введенные Расселом для «и», «эквивалентно», «не», «все», а именно $\cdot$, $\equiv$, $\sim$, ( ), употребляются в математике в других значениях. Поэтому мы берем гильбертово &, в то время как гильбертовы знаки для эквивалентности, всеобщности и отрицания: $\sim$, (), $\bar{\ }$, также имеют обычно другие значения. Знак отрицания, кроме того, представляет собой отступление от линейного упорядочения знаков, что для многих целей неприемлемо. Поэтому мы применяем для эквивалентности и отрицания знаки Гейтинга, и в качестве знака всеобщности некоторый знак, аналогичный знаку $\exists$.

*) Знак $\supset\subset$ в настоящей работе не используется. В остальных статьях этого сборника в качестве знака эквивалентности используется знак $\equiv$. — *Прим. перев.*

**) Таким образом, переменными высказываниями автор называет переменные предикатные символы от нуля и более аргументов. При этом число аргументов данного предикатного символа не фиксировано. — *Прим. перев.*

Предметные переменные называются *аргументами* переменного высказывания.

Формулы описанных двух видов мы называем также *элементарными формулами.*

2.12. Если $\mathfrak{A}$ является формулой, то $\neg\mathfrak{A}$ тоже является формулой.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются формулами, то $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ тоже являются формулами *).

(Знак $\supset\subset$ в нашем исследовании не вводится; это излишне, так как $\mathfrak{A}\supset\subset\mathfrak{B}$ может рассматриваться как сокращение для $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\,\&\,(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$.)

2.13. Из формулы, в которую не входит связанная предметная переменная $\mathfrak{x}$, возникает новая формула, если перед ней ставится $\forall\mathfrak{x}$ или $\exists\mathfrak{x}$, причем одновременно можно заменить на $\mathfrak{x}$ некоторую входящую в формулу свободную предметную переменную на некоторых местах.

2.14. С помощью скобок следует обеспечить возможность однозначно видеть построение формулы. Пример формулы:

$$\exists x(((\neg Abxa)\vee Bx)\supset(\forall z(A\,\&\,B))).$$

Введя специальные соглашения, можно опускать скобки; мы не будем прибегать к этому (за исключением случая, описанного в пункте 2.4), так как нам не придется выписывать много формул.

2.2. *Степенью формулы* мы будем называть число входящих в нее логических знаков (элементарная формула имеет, таким образом, степень 0).

Внешним знаком формулы, не являющейся элементарной, будем называть тот логический знак, который был введен последним при построении формулы в соответствии с 2.12 и 2.13.

Подформулами данной формулы мы будем называть те формулы, которые строятся в процессе построения данной формулы в соответствии с 2.12 и 2.13, включая и саму данную формулу.

Пример. Подформулами формулы $A\,\&\,\forall xBxa$ являются A, $\forall xBxa$, $A\,\&\,\forall xBxa$, а также все формулы вида $B\mathfrak{a}a$, где посредством $\mathfrak{a}$ обозначена любая свободная предметная

---

*) Данное автором определение формулы страдает тем формальным недостатком, что построенная в соответствии с ним формула может быть прочитана неоднозначно. Например если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — формулы, то $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ — тоже формула. Вторую часть 2.12 можно сформулировать следующим образом: «Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются формулами, то $(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ тоже являются формулами. Фактически в последующем изложении автор пользуется именно таким определением формулы (см., например, 2.14). — *Прим. перев.*

переменная (например, $\mathfrak{a}$ может и совпадать с a). Степень $A \& \forall x Bxa$ равна 2, внешним знаком ее является &.

2.3. Понятие *секвенции*

(Секвенции используются впервые в разделе III и цель их введения становится ясной лишь там.)

Секвенция есть выражение вида

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ — произвольные формулы. (Знак $\to$ и запятые являются не логическими, а разделительными знаками.)

Формулы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ образуют *антецедент*, формулы $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ — *сукцедент* секвенции. Оба выражения могут быть пустыми.

2.4. Секвенция $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ содержательно означает в точности то же самое, что формула

$$(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu).$$

(Под $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \mathfrak{A}_3$ мы подразумеваем $(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2) \& \mathfrak{A}_3$, соответственно для $\vee$.)

Если антецедент пуст, то подразумевается формула $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$.

Если сукцедент пуст, то секвенция означает то же самое, что формула $\neg(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu)$ или $(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset \curlywedge$.

Если и антецедент и сукцедент оба пусты, то секвенция означает то же, что $\curlywedge$, т. е. ложное высказывание.

Обратно, для каждой данной формулы существует эквивалентная секвенция, например та, антецедент которой пуст, а сукцедент состоит из одной данной формулы.

Формулы, из которых состоит некоторая секвенция, мы называем S-*формулами* (т. е. секвенциальными формулами), выражая этим ту мысль, что мы подразумеваем не формулу как таковую, а формулу, связанную с ее местом в секвенции*). Так, например, утверждение:

«Данная формула входит в данную секвенцию в нескольких местах в качестве S-*формулы*», можно выразить следующим образом:

«Несколько различных (что должно означать: стоящих на различных местах в секвенции) S-формул являются формально равными».

3. Фигуры

Мы употребляем фигуры заключения и фигуры доказательства. Они состоят из формул или из секвенций; мы будем говорить в дальнейшем (до конца раздела I) лишь о формулах, но все сказанное справедливо и для секвенций, надо лишь слово «формула» заменить везде словом «секвенция».

*) Иными словами, S-формула — это вхождение формулы в секвенцию. — *Прим. перев.*

3.1. *Фигуру заключения* можно записать в виде

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}} \qquad (\nu \geqslant 1),$$

где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}$ — формулы. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ называются *верхними формулами*, $\mathfrak{B}$ — *нижней формулой* фигуры заключения.

(Совершенно аналогично надо понимать термины: верхняя секвенция и нижняя секвенция фигуры заключения, состоящей из секвенций.)

Мы будем рассматривать лишь частные виды фигур заключения, которые будут введены в отдельных исчислениях.

3.2. Фигура доказательства, называемая кратко *выводом*, состоит из некоторого числа формул (по меньшей мере из одной формулы), которые образуют между собой фигуры заключения следующим образом: каждая формула является нижней формулой не более, чем одной фигуры заключения; каждая формула, кроме одной *конечной формулы*, является верхней формулой по крайней мере одной фигуры заключения; совокупность фигур заключения не содержит кругов, т. е. формулы, входящие в вывод, не образуют циклов (рядов, в которых первый член следует за последним, если считать, что нижняя формула каждой из фигур заключения следует за каждой из верхних формул этой фигуры заключения).

3.3. *Исходными формулами* вывода называются такие формулы вывода, которые не являются нижними формулами никаких фигур заключения.

Вывод называется *древовидным*, если все его формулы являются верхними формулами не более, чем одной фигуры заключения.

Отсюда следует, что все формулы, за исключением конечной формулы, являются верхними формулами в точности одной фигуры заключения.

Мы будем рассматривать только древовидные выводы.

Формулы, из которых, в соответствии с определением, состоит вывод, мы называем Н-*формулами* (т. е. формулами вывода*)), выражая этим ту мысль, что мы подразумеваем не формулу как таковую, а формулу, связанную с ее местом в выводе**).

*) От слова Herleitung (вывод). — *Прим. перев.*

**) Иными словами, Н-формула — это вхождение формулы в вывод. — *Прим. перев.*

В этом смысле мы употребляем выражения:

«Формула входит в вывод в качестве Н-формулы»;

«Две различные (т. е. стоящие на разных местах в выводе) Н-формулы формально равны, т. е. равны одной и той же формуле».

Таким образом, выражение «$\mathfrak{A}$ является той же Н-формулой, что и $\mathfrak{B}$» означает, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не только являются одинаковыми формулами, но и, кроме того, занимают одно и то же место в выводе. Говоря о совпадении формул безотносительно к занимаемым ими местам, мы употребляем слова «формально равные».

Для предметной переменной мы не будем вводить никакого особого наименования, связывающего ее с местом, на котором она стоит в формуле. Например, мы говорим: «Одна и та же предметная переменная входит в две различные Н-формулы».

3.4. Фигуры заключения, входящие в вывод, мы называем Н-*фигурами заключения*.

S-формулы Н-секвенций некоторого вывода, состоящего из секвенций, мы называем Н-S-*формулами* (т. е. секвенциальными формулами вывода).

3.5. *Нитью* в данном выводе мы называем (следуя Гильберту) любую последовательность Н-формул этого вывода, удовлетворяющую следующим трем условиям: 1) первая формула этой последовательности является исходной формулой, 2) последняя формула этой последовательности является конечной формулой, 3) каждая из формул этой последовательности, кроме последней, является верхней формулой той Н-фигуры заключения, нижняя формула которой непосредственно следует за ней в нити.

Мы говорим: «Данная Н-формула стоит *выше* (соответственно *ниже*) другой данной Н-формулы», когда существует нить, в которой первая предшествует (соответственно следует за) второй.

При этом мы подразумеваем, что вывод записан в виде древовидной фигуры с исходными формулами наверху и конечной формулой внизу. (Примеры приведены в разделе II, § 4.)

Далее, мы говорим: «Данная Н-фигура заключения стоит выше (соответственно, ниже) данной Н-формулы», если все формулы этой Н-фигуры заключения стоят выше (соответственно ниже) данной Н-формулы.

Вывод с конечной формулой $\mathfrak{A}$ мы будем называть также «выводом формулы $\mathfrak{A}$».

Исходные формулы некоторого вывода могут быть *основными формулами* или *допущениями*, о сущности которых мы будем говорить подробнее при описании отдельных исчислений.

РАЗДЕЛ II

ИСЧИСЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ВЫВОДОВ

§ 1. Примеры натуральных выводов

Мы хотим построить формализм, по возможности точно передающий логические заключения, которые в действительности встречаются в математических доказательствах.

Прежде всего, мы покажем на нескольких примерах, как в действительности протекают такие рассуждения; для этой цели мы рассмотрим три «истинные формулы» и попытаемся установить их истинность по возможности наиболее естественным путем.

1.1. Первый пример.

$$(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))$$

известна как истинная формула (Г.—А., стр. 59, формула 19).

Будем рассуждать так: пусть справедливо X или $Y \& Z$. Рассмотрим следующие два случая: 1. Справедливо X, 2. Справедливо $Y \& Z$. В случае 1 из допущения следует справедливость как $X \vee Y$, так и $X \vee Z$, а следовательно, и справедливость $(X \vee Y) \& (X \vee Z)$. В случае 2 имеет место $Y \& Z$, т. е. как Y, так и Z. Из Y следует $X \vee Y$, из Z следует $X \vee Z$. Итак, и в этом случае справедливо $(X \vee Y) \& (X \vee Z)$. Таким образом, последняя формула выведена в общем случае из $X \vee (Y \& Z)$, т. е. имеет место

$$(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z)).$$

1.2. Второй пример. $(\exists x \forall y Fxy) \supset (\forall y \exists x Fxy)$ (Г.—А., формула 36, стр. 107). Будем рассуждать так: существует такой x, что для всякого y справедливо Fxy. Пусть a — один из таких x. Следовательно, для всех y имеет место Fay. Пусть b — некоторый произвольный объект. Тогда имеет место Fab. Итак, существует некоторый x, а именно a, такой, что имеет место Fxb. Так как b любое, то это имеет место для всех объектов, т. е. для любого y существует некоторый x такой, что имеет место Fxy. Этим рассматриваемое утверждение доказано.

1.3. Третий пример.

Требуется установить, что $(\neg \exists x Fx) \supset (\forall y \neg Fy)$ — интуиционистски истинная формула. Мы будем рассуждать так: предположим, что не существует такого x, для которого имело бы место Fx. Отсюда надо вывести, что для всех y имеет место $\neg Fy$. Пусть a — некоторый объект, для которого Fa справедливо. Отсюда следует: существует x, для которого имеет место Fx, а именно, таким является a. Это противоречит предположению $\neg\exists xFx$. Итак, мы пришли к противоречию, т. е. Fa не может быть справедливо. А так как a мы брали совершенно произвольно, то, следовательно, для всех y имеет место $\neg Fy$. Это и требовалось доказать.

Доказательства такого рода, как приведенные в этих трех примерах, могут быть включены в некоторое точно определенное исчисление (в § 4 будет показано, как эти примеры представляются в исчислении).

§ 2. Построение исчисления NJ

2.1. В этом параграфе будет описано исчисление «натуральных» интуиционистских выводов истинных формул. Ограничение, накладываемое на интуиционистские выводы, вводится здесь пока что без объяснения; обоснование такого ограничения и расширение исчисления на классические заключения (путем присоединения закона исключенного третьего) будет дано ниже.

Важнейшее внешнее отличие NJ-выводов от выводов в системах Рассела, Гильберта, Гейтинга следующее: в последних истинные формулы выводятся из некоторого множества «логических основных формул» посредством применения немногих правил вывода; натуральные же выводы исходят вообще не из логических аксиом, а из д о п у щ е н и й (см. примеры в § 1), из которых делаются логические заключения. А затем посредством некоторых дальнейших заключений результат делается уже независимым от допущений.

Мы будем называть исчисления первого вида *логистическими*.

2.2. После этих предварительных замечаний определим понятие NJ-*вывода* следующим образом*) (примеры в § 4):

NJ-*вывод состоит из формул, расположенных в виде дерева* (см. I, 3.3).

(Требуя древовидного расположения формул, мы отходим от аналогии с действительными заключениями. Дело в том, что: 1) действительные заключения, вследствие линейной последовательности мыслей, неизбежно состоят из линейно следующих одно за другим высказываний и 2) полученный результат обычно в дальнейшем многократно используется, тогда как древовидная форма допускает лишь однократное применение выведенной формулы. Оба эти отклонения служат для удобства формулировки понятия вывода и не являются существенными.)

Исходные формулы вывода являются д о п у щ е н и я м и; каждая из них в выводе поставлена в соответствие в точности одной Н-фигуре заключения (при этом данная исходная формула стоит «выше» (I, 3.5) нижней формулы этой Н-фигуры заключения, что в дальнейшем будет пояснено подробнее).

Все формулы, стоящие ниже данного допущения и одновременно выше нижней формулы той Н-фигуры заключения, которой сопоставлено данное допущение, а также и само данное допущение мы называем *зависящими* от данного допущения.

(Таким образом, заключение делает полученное в его результате высказывание независимым от сопоставленного ему допущения.)

В соответствии со сказанным конечная формула вывода не зависит ни от каких допущений.

2.21. Перечень допустимых ф и г у р з а к л ю ч е н и я.

Приведенные ниже схемы фигур заключения надо понимать следующим образом.

Из некоторой схемы получается NJ-фигура заключения, если вместо $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ подставить любые формулы; вместо $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ (соответственно вместо $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$) любую формулу, внешним знаком которой является $\forall$ (соответственно $\exists$), где $\mathfrak{x}$ обозначает стоящую за ним связанную предметную переменную; вместо $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ — формулу, которая получается в результате замены в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ связанной предметной переменной $\mathfrak{x}$ всюду, где она имеется, свободной предметной переменной $\mathfrak{a}$.

(В качестве $\mathfrak{a}$ может быть, например, взята переменная, уже входящая в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Для фигур заключения AE и EB эта возможность исключается приведенным ниже ограничением на переменные, а для AB и EE эта возможность сохраняется. (Если $\mathfrak{x}$ совсем не входит в $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$, естественно, равна $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.) Очевидно, что $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ всегда является подформулой $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ и $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ в соответствии с определением подформулы в I, 2.2.)

Знаки, стоящие в квадратных скобках, имеют следующее значение: формально равные формулы этого вида в любом количестве (в том числе и нулевом) могут сопоставляться фигуре заключения в качестве допущений. Они, следовательно, должны быть исходными формулами вывода и находиться в тех нитях вывода, к которым принадлежит соответствующая верхняя формула фигуры заключения (т. е. та верхняя формула, над которой в схеме стоят квадратные скобки; она сама может быть допущением).

Введенное в выводе соответствие между данной Н-фигурой заключения и сопоставленным ей допущением может быть

*) Определение NJ-вывода в 2.2 представляется слишком конспективным. Ввиду того, что понятие NJ-вывода является одним из важнейших понятий настоящей работы, мы приводим его подробное определение в помещенном после этой статьи «Дополнении переводчика». — *Прим. перев.*

каким-либо образом отмечено, например посредством общей нумерации (см. примеры в § 4).

Обозначения отдельных схем фигур заключения: UE, UB и т. д., означают, что построенные по ним фигуры заключения являются фигурами «введения» (E) или «удаления» (B) логических знаков: «и» (U), «или» (O), всеобщности (A), существования (E), следования (F) и отрицания (N) *). Подробнее об этом см. в § 5.

Схемы фигур заключения:

UE

$$\frac{\mathfrak{A}\quad\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}};$$

UB

$$\frac{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},\qquad \frac{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}};$$

OE

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}},\qquad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}};$$

OB

$$\frac{\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}\quad \overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{C}}\quad \overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}};$$

AE

$$\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}};$$

AB

$$\frac{\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a}};$$

EE

$$\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}};$$

EB

$$\frac{\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}\quad \overset{[\mathfrak{F}\mathfrak{a}]}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}};$$

FE

$$\frac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}};$$

FB

$$\frac{\mathfrak{A}\quad\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}};$$

NE

$$\frac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\curlywedge}}{\neg\mathfrak{A}};$$

NB

$$\frac{\mathfrak{A}\quad\neg\mathfrak{A}}{\curlywedge};\qquad \frac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}.$$

Собственной переменной некоторой AE (соответственно EB) мы называем свободную предметную переменную, обозначенную в соответствующей схеме посредством $\mathfrak{a}$. (Предполагается, что она существует, т. е. что связанная предметная переменная, обозначенная посредством $\mathfrak{x}$, входит в формулу, обозначенную посредством $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

Ограничение на переменные:

NJ-вывод должен удовлетворять еще следующим условиям (об их смысле см. § 3):

Собственная переменная AE не должна входить ни в формулу, обозначенную в схеме посредством $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$, ни в одно из

*) Первые буквы введенных обозначений представляют собой первые буквы немецких слов Und (U), Oder (O), All (A), Es gibt (E), Folgt (F), Nicht (N), а вторые — немецких слов Einführung (E) и Beseitigung (B). — *Прим. перев.*

допущений, от которых эта формула зависит; собственная переменная EB не должна входить ни в формулу, обозначенную в схеме посредством $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$, ни в верхнюю формулу, обозначенную посредством $\mathfrak{C}$, ни в одно из допущений, от которых последняя зависит, исключая допущение, которое обозначено посредством $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ и сопоставлено данной фигуре заключения.

На этом определение «NJ-вывода» заканчивается.

§ 3. Содержательный смысл NJ-фигур заключения

Мы хотим пояснить содержательный смысл некоторых из схем фигур заключения и тем самым попытаться показать, что описанное исчисление на самом деле воспроизводит «действительные рассуждения».

FE. Словами это заключение можно выразить так: «Если $\mathfrak{B}$ доказано с использованием допущения $\mathfrak{A}$, то (уже без этого допущения) из $\mathfrak{A}$ следует $\mathfrak{B}$». (Естественно, могли быть сделаны другие допущения, от которых этот результат остается зависимым.)

OB («разбор случаев»). Если доказано $\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}$, то можно вести доказательство разбором случаев. Предположим сначала, что имеет место $\mathfrak{A}$, и из него выведем $\mathfrak{C}$. Если далее из предположения о том, что имеет место $\mathfrak{B}$, снова вывели $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C}$ вообще имеет место уже независимо от обоих допущений (ср. 1.1).

AE. Если $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ доказано «для произвольного $\mathfrak{a}$», то имеет место $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Предположение, что $\mathfrak{a}$ «совершенно произвольно», может быть точнее выражено так: $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ не зависит ни от какого допущения, в которое входит предметная переменная $\mathfrak{a}$. И это вместе с само собой разумеющимся требованием, чтобы в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ все вхождения $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ были заменены на $\mathfrak{x}$, составляет в точности ту часть приведенного выше ограничения на переменные, которая относится к AE.

EB. Имеем $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Далее рассуждаем так: пусть $\mathfrak{a}$ — именно такой объект, для которого имеет место $\mathfrak{F}$, т. е. допустим, что имеет место $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$. (Естественно, при этом в качестве $\mathfrak{a}$ надо брать такую предметную переменную, которая не входит в $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.) Если, опираясь на это допущение, мы докажем некоторое высказывание $\mathfrak{C}$, которое уже не содержит $\mathfrak{a}$ и не зависит ни от каких других допущений, содержащих $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{C}$ доказано независимо от допущения $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$. В этом рассуждении уже высказана та часть ограничения на переменные, которая относится к EB. (Существует известная аналогия между EB и OB; это объясняется тем, что знак существования является обобщением знака $\lor$, а знак всеобщности — знака &.)

NB. $\mathfrak{A}$ и $\neg\mathfrak{A}$ означает противоречие, а таковое не может соответствовать действительности (закон противоречия). Это формально отражено в фигуре заключения NB, где знак $\perp$ означает «противоречие», «ложность».

NE (reductio ad absurdum) *). Если из допущения $\mathfrak{A}$ следует нечто ложное ($\perp$), то $\mathfrak{A}$ не является истинной, т. е. имеет место $\neg\mathfrak{A}$.

Схема $\dfrac{\perp}{\mathfrak{D}}$. Если имеет место нечто ложное, то имеет место любое высказывание.

Остальные схемы фигур заключения понять совсем легко.

§ 4. Запись трех примеров из § 1 в виде NJ-выводов

Первый пример (1.1):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{}}{X \vee (Y \& Z)} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{X}}{X \vee Y}\,\text{OE} \quad \dfrac{\overset{1}{X}}{X \vee Z}\,\text{OE}}{(X \vee Y) \& (X \vee Z)}\,\text{UE} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{Y \& Z}}{Y}\,\text{UB}}{X \vee Y}\,\text{OE} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{Y \& Z}}{Z}\,\text{UB}}{X \vee Z}\,\text{OE}}{(X \vee Y) \;\&\; (X \vee Z)}\,\text{UE}}{\dfrac{(X \vee Y) \& (X \vee Z)}{(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))}\,\text{FE}\,2.}\,\text{OB}\,1.$$

В этом примере расположение в виде дерева должно показаться несколько искусственным, поскольку при нем, например, пропадает преемственность между разбором случаев X, $Y \& Z$ и установлением $X \vee (Y \& Z)$.

Второй пример (1.2):

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{}}{\exists x \forall y Fxy} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall y Fay}}{Fab}\,\text{AB}}{\exists x Fxb}\,\text{EE}}{\forall y \exists x Fxy}\,\text{AE}}{\dfrac{\forall y \exists x Fxy}{(\exists x \forall y Fxy) \supset (\forall y \exists x Fxy)}\,\text{FE}\,2.}\,\text{EB}\,1$$

Здесь также при линейном расположении было бы естественно начать с введения в качестве допущения левой верхней формулы фигуры заключения EB, как это имело место в данном примере в § 1.

*) Приведение к нелепости. — *Прим. перев.*

Третий пример (1.3):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{Fa}}{\exists x Fx}\,\text{EE} \quad \overset{1}{\neg \exists x Fx}}{\perp}\,\text{NB}}{\neg Fa}\,\text{NE}\,2}{\forall y \neg Fy}\,\text{AE}}{(\neg \exists x Fx) \supset (\forall y \neg Fy)}\,\text{FE}\,1.$$

§ 5. Некоторые замечания об исчислении NJ. Исчисление NK

5.1. Исчисление NJ имеет много формальных недостатков. Но им противостоят следующие достоинства.

5.11. Далеко идущее приближение к действительным рассуждениям, к чему мы с самого начала стремились. Поэтому это исчисление особенно пригодно для формализации математических доказательств.

5.12. Выводы истинных формул в этом исчислении почти всегда короче, чем в логистических исчислениях. Это существенно связано с тем, что в логистических выводах одна и та же формула в большинстве случаев появляется несколько раз (как часть других формул), тогда как в NJ-выводах это имеет место гораздо реже.

5.13. Введенные выше обозначения отдельных фигур заключения (см. 2.21) показывают, что имеется заслуживающая внимания с и с т е м а т и з а ц и я их. С каждым из логических знаков $\&$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\neg$ связана одна фигура «введения» и одна фигура «удаления» его, как внешнего знака формулы. Наличие двух фигур заключения UB и OE представляет собой незначительное чисто внешнее отклонение. Введения представляют собой, так сказать, «определения» соответствующих знаков, а удаления являются в конце концов лишь следствиями этих определений, что может быть выражено так: при удалении некоторого знака формула, которой это касается, и знак, о котором идет речь, могут «использоваться лишь в том значении, которое они получают при введении данного знака». Следующий пример мог бы пояснить сказанное: формула $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ может быть введена, если имеется вывод $\mathfrak{B}$ из допущения $\mathfrak{A}$. Применяя же затем к этой формуле удаление $\supset$ [конечно, возможны и другие использования этой формулы, например, построение из нее более длинной формулы $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$ с помощью OE], мы действуем как раз таким образом, как будто $\mathfrak{B}$ следует из уже доказанного $\mathfrak{A}$, а это возможно именно вследствие того, что $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ регистрирует факт существования вывода $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{A}$, Уточняя эти соображения, можно было бы, введя определенные требования, доказать, что правила введения являются однозначными функциями правил удаления.

5.2. Отрицание можно исключить из нашего исчисления, если рассматривать $\neg\mathfrak{A}$ как сокращение для $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$. Это допустимо, так как если в некотором NJ-выводе уничтожить все знаки $\neg$, заменив каждую формулу вида $\neg\mathfrak{A}$ формулой $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ то получится снова NJ-вывод (при этом фигуры заключения NE и NB станут частными случаями FE и FB), и обратно: если в некотором NJ-выводе каждое $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ заменить на $\neg\mathfrak{A}$, то получится опять NJ-вывод.

Схема фигур заключения $\frac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$ занимает среди схем особое место, она относится не к логическому знаку, а к знаку высказывания $\curlywedge$.

5.3. «Закон исключенного третьего» и исчисление NK.

Если к исчислению NJ присоединить «закон исключенного третьего» (tertium non datur), то получится полное классическое исчисление NK. Иными словами, кроме допущений, в качестве исходных формул вывода разрешается теперь брать «основные формулы» вида $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — произвольная формула.

Таким образом, мы совершенно внешним образом предоставляем «закону исключенного третьего» особое место, так как мы считаем такую формулировку наиболее естественной. Можно было бы вместо схемы аксиом $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ допустить новую схему фигур заключения, а именно $\frac{\neg\neg\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ (аналогично тому, как это сделано Гильбертом и Гейтингом). Однако эта фигура заключения выпадает из рамок NJ-фигур заключения, так как представляет собой новое удаление отрицания, допустимость которого никак не следует из способа введения знака отрицания.

РАЗДЕЛ III

ИСЧИСЛЕНИЯ СПОСОБОВ ЗАКЛЮЧЕНИЙ LJ, LK И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

§ 1. Исчисления LJ и LK (логистические интуиционистское и классическое исчисления)

1.1. Предварительные замечания о строении исчислений LJ и LK.

Мы хотим построить исчисление способов заключений (для логики предикатов), которое, с одной стороны, было бы «логистическим», т. е. таким, в котором выводы не содержали бы, в противоположность исчислению NJ, никаких допущений, и которое, с другой стороны, сохраняло бы присущее исчислению NJ деление способов заключений на введения и удаления отдельных логических знаков.

Наиболее непосредственный способ превращения NJ-вывода в логистический состоит в том, что Н-формулу $\mathfrak{B}$, зависящую от допущений $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$, заменяют формулой $(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$. Так поступают со всеми Н-формулами.

Таким образом, получаются формулы, которые истинны уже сами по себе, т. е. истинность которых не зависит от истинности тех или иных допущений. Однако при этом появляются новые логические знаки & и $\supset$ и тем самым нарушается систематизация фигур заключения на фигуры введения и удаления. Поэтому мы вводим понятие секвенции (см. I, 2.3) и вместо формулы $(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$ пишем секвенцию $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$. Она отличается от этой формулы не содержательным значением, а лишь формальной структурой (ср. I, 2.4).

Теперь нам нужны еще новые фигуры заключения, которые не укладываются в систематизацию введения — удаления; однако мы имеем при этом то преимущество, что можем предоставить этим новым фигурам особое место, так как они относятся уже не к логическим знакам, а к структуре секвенций. Мы называем их поэтому «структурными фугурами заключения», а остальные «логическими фигурами заключения».

В классическом исчислении NK закон исключенного третьего занимает особое место среди способов заключения (см. II, 5.3), так как не включается в систематизацию введения—удаления.

В приведенном ниже логистическом классическом исчислении LK эта особенность закона исключенного третьего исчезает. Это становится возможным в результате допущения секвенций с несколькими формулами в сукцеденте, тогда как при приведенном только что переходе от исчисления NJ к исчислению LJ возникают только секвенции с единственной формулой в сукцеденте. (О содержательном смысле обобщенных секвенций см. в I, 2.4.) Достигаемая при этом симметрия оказывается более подходящей для классической логики. Для интуиционистского исчисления LJ, напротив, остается то ограничение, что сукцеденты секвенций могут состоять не более чем из одной формулы (см. ниже; пустой сукцедент означает то же, что $\curlywedge$ в сукцеденте).

Мы привели некоторые исходные соображения, положенные в основу построения описываемого ниже исчисления. По существу, однако, его форма определена с учетом доказываемой ниже «основной теоремы» (§ 2) и поэтому заранее не может быть обоснована более подробно.

1.2. Понятия LK-*вывода* и LJ-*вывода* определим следующим образом:

LJ-вывод (соответственно LK-вывод) состоит из секвенций, упорядоченных в виде дерева (см. I, 3.3).

Исходными секвенциями вывода являются основные секвенции вида

$$\mathfrak{D} \to \mathfrak{D},$$

где $\mathfrak{D}$ — произвольная формула.

Каждая фигура заключения, входящая в вывод, получается из приведенных ниже схем в результате следующих подстановок (ср. II, 2.21): $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ заменяются произвольными формулами, $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ и $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ заменяются произвольными формулами с внешним знаком $\forall$, соответственно $\exists$; $\mathfrak{x}$ обозначает связанную этим знаком предметную переменную; $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ есть формула, которая получается из $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ при замене связанной предметной переменной $\mathfrak{x}$, всюду, где она встречается, свободной предметной переменной $\mathfrak{a}$.

Γ, Δ, Θ, Λ заменяются произвольными (может быть, и пустыми) рядами формул, отделенных друг от друга запятыми.

В дальнейшем на LJ-фигуры заключения накладывается следующее ограничение (это ограничение является единственным пунктом, которым отличаются друг от друга LJ-вывод и LK-вывод):

«В сукцеденте каждой H-секвенции должно быть не более одной S-формулы».

Обозначения отдельных схем логических фигур заключения UES, UEA и т. д. означают следующее: фигура заключения, построенная по схеме, является фигурой введения (E) в сукцедент (S) или в антецедент (A) знака «и» (U), «или» (O), всеобщности (A), существования (E), отрицания (N), следования (F).

Схемы фигур заключения

1.21. Схемы структурных фигур заключения.

Утончение

$$\text{в антецеденте: } \frac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}, \qquad \text{в сукцеденте: } \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}};$$

сокращение

$$\text{в антецеденте: } \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}, \qquad \text{в сукцеденте: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}};$$

перестановка

$$\text{в антецеденте: } \frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}, \qquad \text{в сукцеденте: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Delta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Delta};$$

$$\text{сечение: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}.$$

1.22. Схемы логических фигур заключения:

$$\text{UES: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}, \qquad \text{OEA: } \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta},$$

$$\text{UEA: } \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \; \frac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}, \qquad \text{OES: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \; \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}},$$

$$\text{AES: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \Theta, \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}, \qquad \text{EEA: } \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Gamma \to \Theta}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \Theta}.$$

Ограничение на переменные: в обеих последних схемах предметная переменная, обозначенная посредством $\mathfrak{a}$ и называемая *собственной переменной* AES, соответственно EEA, не должна входить в нижнюю секвенцию фигуры заключения (т. е. ни в Γ, ни в Θ, ни в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

$$\text{AEA: } \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Gamma \to \Theta}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \Theta}, \qquad \text{EES: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \Theta, \exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}},$$

$$\text{NES: } \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\mathfrak{A}}, \qquad \text{NEA: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta},$$

$$\text{FES: } \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}, \qquad \text{FEA: } \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}.$$

1.3. Пример LJ-вывода (ср. II, 4.3):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{Fa \to Fa}{Fa \to \exists xFx}\,\mathrm{EES} \qquad \cfrac{\cfrac{\exists xFx \to \exists xFx}{\neg\exists xFx,\ \exists xFx \to}\,\mathrm{NEA}}{\exists xFx,\ \neg\exists xFx \to}\,\text{перестановка,}}{Fa,\ \neg\exists xFx \to}\,\text{сечение,}}{\neg\exists xFx \to \neg Fa}\,\mathrm{NES}}{\neg\exists xFx \to \forall y\, \neg Fy}\,\mathrm{AES}}{\to (\neg\exists xFx) \supset (\forall y\, \neg Fy)}\,\mathrm{FES.}$$

1.4. Пример LK-вывода (вывод «закона исключенного третьего»):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\to A,\ \neg A}\,\mathrm{NES}}{\to A,\ A \vee \neg A}\,\mathrm{OES}}{\to A \vee \neg A,\ A}\,\text{перестановка,}}{\to A \vee \neg A,\ A \vee \neg A}\,\mathrm{OES}}{\to A \vee \neg A}\,\text{сокращение.}$$

§ 2. Некоторые замечания об исчислениях LJ и LK. Основная теорема

(В дальнейшем замечания 2.1, 2.2 и 2.3 не применяются.)

2.1. Схемы не являются все независимыми друг от друга, т. е. одни из них могут быть заменены другими. Однако при этом «основная теорема» может стать уже неверной.

2.2. Вообще, если бы мы не были заинтересованы в основной теореме, исчисление можно было бы у п р о с т и т ь во многих отношениях. Так, в LK фигуры заключения UES, OEA, UEA, OES, AEA, EES, NES, NEA, FEA можно было бы заменить основными секвенциями следующих видов:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}, \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A};$$

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}; \quad \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{a};$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}; \quad \rightarrow \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \text{ (закон исключенного третьего)};$$

$$\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow \text{(закон противоречия)}; \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Легко показать, что эти основные секвенции эквивалентны соответствующим фигурам заключения.

Для фигур заключения исчисления LJ имеется такая же возможность, за исключением фигур заключения OEA и NES, так как H-секвенции в LJ не могут иметь двух S-формул в сукцеденте (ср. с этим раздел V, § 5).

2.3. Различие между и н т у и ц и о н и с т с к о й и к л а с с и ч е с к о й логиками для исчислений LJ и LK внешне выглядит совершенно иначе, чем для NJ и NK. Там оно состоит в допущении или недопущении закона исключенного третьего, в то время как здесь оно выражается в ограничении, наложенном на сукцеденты секвенций. (То, что оба эти различия являются эквивалентными, будет установлено при доказательстве эквивалентности всех рассматриваемых исчислений в разделе V.)

2.4. И с ч и с л е н и е LK, если опустить FES и FEA, оказывается з е р к а л ь н о - с и м м е т р и ч н ы м в следующем смысле: если в LK-выводе (не содержащем знака $\supset$) обратить все секвенции, т. е. вместо $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ написать $\mathfrak{B}_\nu, \ldots, \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_\mu, \ldots, \mathfrak{A}_1$, в фигурах с двумя верхними секвенциями поменять местами правую и левую верхние секвенции вместе с их выводами, далее, каждое вхождение & заменить на $\vee$, $\vee$ — на &, $\forall$ — на $\exists$, $\exists$ — на $\forall$ (при замене & на $\vee$ и $\vee$ на & поменять местами области действия знаков, например, $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ заменить на $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$), то получим снова LK-вывод.

Это явствует непосредственно из схем. (В их расположении подчеркнута эта симметрия.)

(Ср. с принципом двойственности у Г.—А., стр. 110.)

2.41. Знак $\supset$ является для исчисления NK, в известном смысле, вообще излишним, так как $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ можно рассматривать как сокращение для $(\neg \mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}$; легко проверить, что схемы для FES и FEA можно заменить в этом случае схемами для $\vee$ и $\neg$.

Для исчисления NJ это не имеет места.

2.5. Важнейшим для нас свойством исчислений LJ и LK является следующая

Основная теорема. *Каждый LJ-вывод (соответственно LK-вывод) можно перестроить в LJ-вывод (соответственно в LK-вывод) с той же конечной секвенцией, в который не входит фигура заключения, называемая «сечением».*

2.51. Доказательство приведено в § 3.

Чтобы предварительно пояснить значение основной теоремы, докажем одну простую д о п о л н и т е л ь н у ю т е о р е м у (см. 2.513).

Введем для этого некоторые (часто используемые в дальнейшем) выражения, относящиеся к логическим фигурам заключения.

2.511. Ту S-формулу, которая в схеме фигуры заключения содержит логический знак, мы называем *главной формулой* фигуры заключения.

Таковы S-формулы вида $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ в UES, UEA; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ в OES, OEA; $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ в AES, AEA; $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ в EES, EEA; $\neg \mathfrak{A}$ в NES, NEA и $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ в FES, FEA.

S-формулы, обозначенные в схемах фигур заключения посредством $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$, мы называем *боковыми формулами* соответствующей фигуры заключения. Они всегда являются подформулами главной формулы (в соответствии с определением подформулы в I, 2.2).

2.512. Из схем фигур заключения мы можем легко усмотреть следующие факты.

Главная формула всегда стоит в нижней секвенции, боковые формулы всегда стоят в верхних секвенциях логических фигур заключения.

Если некоторая формула входит в верхнюю секвенцию некоторой фигуры заключения в качестве S-формулы и не является там ни боковой формулой, ни формулой $\mathfrak{D}$ сечения, то эта формула входит и в нижнюю секвенцию в качестве S-формулы.

Из этих двух фактов вытекает следующее.

Пусть некоторая формула входит в LJ- или LK-вывод на каком-либо месте в качестве S-формулы; проследим нить вывода от соответствующей секвенции до конечной секвенции; рассматриваемая формула может исчезнуть в этой нити лишь в том случае, когда она является формулой $\mathfrak{D}$ сечения или боковой формулой некоторой логической фигуры заключения. В последнем случае данная формула включается в главную формулу следующей секвенции в качестве подформулы. К главной формуле можно вслед за тем применить то же рассуждение и т. д. Таким образом, получаем следующую дополнительную теорему.

2.513. Дополнительная теорема к основной теореме (свойство подформульности*)). *В* LJ-*выводе* (*соответственно в* LK-*выводе*), *не содержащем сечения, все входящие в него* H-S-*формулы являются подформулами* S-*формул, входящих в конечную секвенцию.*

2.514. Образно говоря, описанное свойство вывода без сечения можно выразить так: S-формулы при движении вниз могут лишь удлиняться, но никогда не укорачиваются. Конечный результат, так сказать, строится постепенно из его составных частей. Представленное посредством вывода доказательство не содержит окольных путей, в него входят лишь такие понятия, которые входят и в его конечный результат (ср. с обзором в начале этого сочинения).

Пример. Приведенный выше (1.3) вывод секвенции $\rightarrow (\neg \exists x Fx) \supset (\forall y \neg Fy)$ можно записать без сечения так:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Fa \rightarrow Fa}{Fa \rightarrow \exists x Fx}\ \text{EES}}{\neg \exists x Fx,\ Fa \rightarrow}\ \text{NEA}}{Fa,\ \neg \exists x Fx \rightarrow}\ \text{перестановка},$$

и далее, как раньше.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Основная теорема гласит:

Каждый LJ-*вывод* (*соответственно* LK-*вывод*) *можно преобразовать в* LJ-*вывод* (*соответственно в* LK-*вывод*) *с той же конечной секвенцией, в который не входит сечение.*

3.1. Доказательство основной теоремы для LK-выводов.

Мы вводим (для облегчения доказательства) некоторую новую фигуру заключения, которая представляет собой видоизменение сечения; мы называем ее «смешением».

Схема ее такова:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta \quad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma,\ \Delta^* \rightarrow \Theta^*,\ \Lambda}.$$

*) У автора «Teilformeln-Eigenschaft». В русском переводе книги С. К. Клини «Введение в метаматематику», ИЛ, 1957, в этом же смысле применен термин «свойство подформулы». — *Прим. перев.*

Здесь Θ и Δ должны замещаться такими рядами формул, отделенных друг от друга запятыми, в которые формула вида $\mathfrak{M}$, называемая «формулой смешения», входит по крайней мере один раз (в качестве члена ряда); Θ^* и Δ^* замещаются теми же рядами формул, из которых всюду исключена (как член ряда) формула вида $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ может быть любой формулой). Γ и Λ должны, как обычно, замещаться произвольными (возможно, и пустыми) рядами формул, отделенных друг от друга запятыми.

Пример смешения:

$$\frac{A \rightarrow B,\ \neg A \quad B \vee C,\ B,\ B,\ D,\ B \rightarrow}{A,\ B \vee C,\ D \rightarrow \neg A}.$$

Формулой смешения является B.

Очевидно, каждое сечение можно преобразовать в смешение с последующими утончениями и перестановками. (Можно и обратно: каждое смешение преобразовать в сечение с предшествующими перестановками и сокращениями; этим мы не пользуемся.)

В дальнейшем мы рассматриваем лишь выводы, в которые не входят сечения, но могут входить смешения.

Так как любой вывод можно преобразовать в такой, то для доказательства основной теоремы достаточно показать, что любой такой вывод можно преобразовать в вывод без смешения.

Далее, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. *Всякий вывод, содержащий смешение в качестве самой нижней фигуры заключения и не содержащий других смешений, можно преобразовать в вывод* (*с той же конечной секвенцией*), *в который смешение не входит.*

Отсюда легко вывести основную теорему следующим образом.

В произвольном выводе рассматривается смешение, выше нижней секвенции которого нет других смешений. Вывод этой нижней секвенции имеет вид, описанный в условии леммы, следовательно, его можно преобразовать в вывод без смешений. При этом вся остальная часть общего вывода не изменяется. Далее повторяется то же самое, пока не будут устранены все смешения.

Теперь нам остается лишь провести

Доказательство леммы (оно продолжается до 3.2).

Мы рассмотрим вывод, содержащий смешение в качестве самой нижней фигуры заключения и не содержащий других смешений.

«Степенью вывода» мы назовем степень формулы смешения (определение в I, 2.2).

«Рангом вывода» мы назовем сумму правого и левого ранговых чисел, которые мы определим так:

Левое ранговое число есть наибольшее число секвенций, содержащих формулу смешения в сукцеденте и идущих в конце одной нити непосредственно друг за другом, причем нижняя из них является левой верхней секвенцией смешения.

Правое ранговое число есть (соответственно) наибольшее число секвенций, содержащих формулу смешения в антецеденте и идущих в конце одной нити непосредственно друг за другом, причем нижняя из них является правой верхней секвенцией смешения.

Очевидно, ранг не может быть менее 2.

Для доказательства леммы мы проводим две полные индукции, по степени вывода γ и по рангу вывода ρ.

Мы доказываем теорему для вывода степени γ, предполагая при этом, что она верна для выводов меньших степеней (если они существуют, т. е. если $\gamma \neq 0$), т. е. что такие выводы можно преобразовать в выводы без смешения.

Далее мы сначала рассматриваем случай, когда ранг вывода ρ равен 2 (3.11), а затем случай, когда $\rho > 2$ (3.12), причем мы предполагаем, что для выводов той же степени, но меньшего ранга, теорема верна*).

В дальнейшем, как и до сих пор, прописные готические буквы будут служить для обозначения формул, прописные греческие буквы — для обозначения рядов формул (возможно, и пустых).

При преобразовании вывода будут иногда появляться «тождественные фигуры заключения», т. е. фигуры заключения с одинаковыми верхней и нижней секвенциями. Так как мы не допускаем таких фигур заключения в нашем исчислении, их надо каждый раз устранять, что достигается тривиальным образом: просто опускается одна из двух тождественных секвенций**).

Формулу смешения, стоящего в конце вывода, мы обозначим посредством $\mathfrak{M}$. Она имеет степень γ.

3.10. Переименование свободных предметных переменных, как подготовка к преобразованию вывода.

Мы хотим добиться, чтобы вывод обладал следующим свойством:

3.101. Для каждой AES (соответственно EEA) имеет место следующее: ее собственная переменная встречается в выводе только в секвенциях, стоящих выше нижней секвенции AES

*) Таким образом, при доказательстве основной теоремы автор пользуется индукцией по трем параметрам (по числу смешений в выводе, степени вывода и рангу вывода). — *Прим. перев.*

**) И черта «тождественной фигуры заключения». — *Прим. перев.*

(соответственно EEA) и не входит ни в какую другую AES или EEA в качестве ее собственной переменной.

3.102. Это достигается в результате следующего переименования свободных предметных переменных:

Выделяем такую AES (соответственно EEA), выше нижней секвенции которой нет фигур заключения одного из этих видов, кроме тех, для которых данное преобразование уже проведено.

Собственную переменную выделенной фигуры заключения заменяем во всех секвенциях, стоящих выше ее нижней секвенции, одной и той же свободной предметной переменной, не встречавшейся ранее в выводе. Как легко проверить, AES (соответственно EEA) остается при этом корректной фигурой заключения того же вида (собственная переменная не входит в ее нижнюю секвенцию). Остальной вывод также остается выводом, что следует из приведенного ниже вспомогательного утверждения.

Проделав описанное преобразование последовательно с каждой отдельной AES и EEA, мы снова получим вывод, но уже обладающий желаемым свойством (3.101). При этом существенно, что степень и ранг вывода, а также его конечная секвенция, остаются без изменения.

3.103. Мы проведем теперь доказательство следующего вспомогательного утверждения.

(Мы формулируем его в несколько более общем виде, чем это необходимо для предстоящего применения, так как в другом месте (3.113.33) оно будет использовано еще раз.)

«Каждая основная секвенция и фигура заключения исчисления LK переходит в основную секвенцию или фигуру заключения того же вида, когда мы заменяем некоторую входящую в нее свободную предметную переменную, не являющуюся ее собственной переменной, всюду, где она входит в нее, одной и той же свободной предметной переменной, которая также не является собственной переменной данной фигуры заключения».

Это утверждение тривиально для всех фигур заключения, кроме AES, AEA, EES и EEA. Но и в этих случаях все в порядке: ограничение на переменные не нарушается, так как мы не исключаем и не вводим новых собственных переменных. (По этой причине оба условия являются необходимыми.) Далее, формула, возникающая из $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$, переходит при замене $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{x}$ в формулу*), возникающую из $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

*) Строго говоря, ни $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$, ни выражение, возникающее из него в результате описанного во вспомогательном утверждении преобразования, не являются формулами, так как в них есть вхождения связанной предметной переменной $\mathfrak{x}$, не находящиеся в области действия квантора, после которого стоит эта переменная («свободные» вхождения связанной переменной). — *Прим. перев.*

После подготовительного шага (3.10) следует уже основное преобразование вывода, имеющее целью удаление входящего в него смешения.

Как было сказано, мы рассмотрим два случая: $\rho=2$ (3.11) и $\rho>2$ (3.12).

3.11. Пусть $\rho=2$.

Мы рассмотрим несколько отдельных случаев. При этом случаи 3.111, 3.112, 3.113.1, 3.113.2 особенно просты; в этих случаях смешение просто совсем удаляется. Остальные случаи (3.113.3) более сложны, при их рассмотрении находит выражение основная идея всего преобразования. Здесь мы используем индукционное предположение относительно γ, т. е. в каждом из этих случаев сводим построение вывода без смешения к построению такого вывода меньшей степени.

3.111. Левая верхняя секвенция смешения, стоящего в конце вывода, является *основной секвенцией*. Тогда смешение имеет вид

$$\frac{\mathfrak{M}\to\mathfrak{M} \quad \Delta\to\Lambda}{\mathfrak{M},\ \Delta^*\to\Lambda}.$$

Оно преобразуется так:

$$\frac{\Delta\to\Lambda}{\overline{\mathfrak{M},\ \Delta^*\to\Lambda}}\ \text{возможно, несколько перестановок и сокращений.}$$

Часть вывода выше $\Delta\to\Lambda$ остается без изменения. Мы получаем вывод уже без смешений.

3.112. Правая верхняя секвенция смешения является *основной секвенцией*. Этот случай рассматривается симметрично предыдущему, рассмотрение одного из них должно быть «зеркальным отображением» рассмотрения другого. (Ср. 2.4.)

3.113. Ни левая, ни правая из верхних секвенций смешения не является основной секвенцией. Тогда обе они являются *нижними секвенциями фигур заключения*. Так как $\rho=2$, то и правое и левое ранговые числа равны 1, т. е. $\mathfrak{M}$ не входит в *сукцедент* секвенции, стоящей непосредственно над *левой* верхней секвенцией смешения, а также в *антецедент* секвенции, стоящей непосредственно над *правой* верхней секвенцией смешения.

Вообще, имеет место следующее: если формула входит в антецедент (соответственно в сукцедент) нижней секвенции фигуры заключения, то она или является главной формулой последней, или $\mathfrak{D}$ утончения, или входит в антецедент (соответственно в сукцедент) по крайней мере одной из верхних секвенций этой фигуры заключения.

Это можно усмотреть непосредственно из схем фигур заключения (1.21, 1.22).

Рассмотрим теперь следующие три случая, которыми, как легко видеть, исчерпываются в совокупности все возможные случаи, описанные в 3.113.

3.113.1. Левая верхняя секвенция смешения является нижней секвенцией *утончения*. Конец вывода имеет вид*)

$$\frac{\dfrac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{M}} \quad \Delta\to\Lambda}{\Gamma,\ \Delta^*\to\Theta,\ \Lambda}.$$

Он преобразуется в

$$\frac{\Gamma\to\Theta}{\overline{\Gamma,\ \Delta^*\to\Theta,\ \Lambda}}\ \text{возможно, несколько утончений и перестановок.}$$

Часть вывода выше $\Delta\to\Lambda$ отбрасывается совсем.

3.113.2. Правая верхняя секвенция смешения является нижней секвенцией утончения. Этот случай рассматривается симметрично предыдущему.

3.113.3. Формула смешения $\mathfrak{M}$ входит в сукцедент левой и в антецедент правой верхних секвенций смешения только в качестве *главной формулы* любой из логических фигур заключения**).

В соответствии с тем, что внешний знак $\mathfrak{M}$ может быть &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\neg$ или $\supset$ (формула без логических знаков не может быть главной формулой), надо рассмотреть шесть случаев: от 3.113.31 до 3.113.36.

3.113.31. Внешний знак $\mathfrak{M}$ есть &. Тогда конец вывода имеет вид

$$\frac{\dfrac{\Gamma_1\to\Theta_1,\ \mathfrak{A} \quad \Gamma_1\to\Theta_1,\ \mathfrak{B}}{\Gamma_1\to\Theta_1,\ \mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}}\,\text{UES} \quad \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma_2\to\Theta_2}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B},\ \Gamma_2\to\Theta_2}\,\text{UEA}}{\Gamma_1,\ \Gamma_2\to\Theta_1,\ \Theta_2}\ \text{смешение.}$$

(Рассмотрение этого случая для другой формулы UEA

---

*) Согласно сказанному в начале 3.113, $\mathfrak{M}$ не входит в Θ и, следовательно, во-первых, утончение может вводить только формулу $\mathfrak{M}$, а во-вторых, Θ^* совпадает с Θ. — *Прим. перев.*

**) Рассмотренные в 3.113.1—3.113.3 случаи исчерпывают все возможности, которые могут представиться в условиях пункта 3.113. Действительно, в любом другом мыслимом случае (именно: формула смешения входит в сукцедент левой или в антецедент правой верхней секвенции смешения в качестве члена одного из списков, обозначенных в схемах фигур заключения прописными греческими буквами, или в качестве одной из формул, обозначенных в схемах фигур заключения «перестановка» и «сокращение» прописной греческой буквой) $\rho>2$. — *Прим. перев.*

совершенно аналогично.) Он преобразуется в *)

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to \Theta_1^*, \Theta_2}\ \text{смешение,}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{возможно, несколько утончений и перестановок.}$$

К той части вывода, самой нижней секвенцией которой является $\Gamma_1, \Gamma_2^* \to \Theta_1^*, \Theta_2$, можно применить индукционное предположение относительно γ, так как она имеет степень, меньшую чем γ ($\mathfrak{A}$ содержит меньше логических знаков, чем $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$). Итак, весь вывод можно преобразовать в вывод, не содержащий смешений.

3.113.32. Внешний знак $\mathfrak{M}$ есть $\vee$. Этот случай рассматривается симметрично предыдущему.

3.113.33. Внешний знак $\mathfrak{M}$ есть $\forall$. Тогда конец вывода имеет вид

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\ \text{AES} \qquad \cfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{b}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma_2 \to \Theta_2}\ \text{AEA}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{смешение.}$$

Он преобразуется в

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{b}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to \Theta_1^*, \Theta_2}\ \text{смешение,}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{возможно, несколько утончений и перестановок.}$$

Над левой верхней секвенцией смешения $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ пишется такая же часть вывода, какая раньше стояла над $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}$, но в ней всюду свободная предметная переменная $\mathfrak{a}$ заменяется на $\mathfrak{b}$. Из вспомогательного утверждения 3.103 и из 3.101 следует, что полученная таким образом над $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ часть вывода является правильной частью вывода. (Из 3.101 следует, что ни $\mathfrak{a}$, ни $\mathfrak{b}$ не могут быть собственными переменными некоторой фигуры заключения, входящей в эту часть вывода.) Такое рассуждение можно применить к части вывода до секвенции $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ включительно, так как последняя также является результатом подстановки $\mathfrak{b}$ вместо $\mathfrak{a}$ в $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}$. Действительно, в силу ограничения на переменные для AES, $\mathfrak{a}$ не может входить в Γ_1, Θ_1 или в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ получается в результате замены $\mathfrak{x}$ в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ на $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ получается в результате замены $\mathfrak{x}$ в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ на $\mathfrak{b}$. Поэтому и $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ получается в результате замены $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{b}$.

Формула смешения $\mathfrak{M}$ имеет в новом выводе степень, меньшую чем γ, так что по индукционному предположению смешение можно устранить.

---

*) Часть вывода, стоящая над правой верхней секвенцией UEA, и сама эта секвенция удаляются из вывода. — *Прим. перев.*

3.113.34. Внешний знак $\mathfrak{M}$ есть $\exists$. Этот случай рассматривается симметрично предыдущему.

3.113.35. Внешний знак $\mathfrak{M}$ есть $\neg$. Конец вывода имеет вид

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \neg \mathfrak{A}}\ \text{NES} \qquad \cfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}\ \text{NEA}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{смешение.}$$

Он преобразуется в

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_2, \Gamma_1^* \to \Theta_2^*, \Theta_1}\ \text{смешение,}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений.}$$

Новое смешение можно устранить по индукционному предположению.

3.113.36. Внешний знак $\mathfrak{M}$ есть $\supset$. Конец вывода имеет вид

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\ \text{FES} \qquad \cfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ \text{FEA}}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{смешение.}$$

Он преобразуется в

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \cfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}, \Gamma_1, \Delta^* \to \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{смешение,}}{\Gamma, \Gamma_1^*, \Delta^{**} \to \Theta^*, \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{смешение,}}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений.}$$

(Звездочки, естественно, означают, что Δ^* и Θ_1^* получаются из Δ и Θ_1 в результате удаления всех S-формул вида $\mathfrak{B}$; Γ_1^*, Δ^{**} и Θ^* получаются из Γ_1, Δ^* и Θ в результате удаления всех S-формул вида $\mathfrak{A}$.)

Мы имеем в этом случае два смешения, но в каждом из них формула смешения имеет степень, меньшую чем γ. Применяем индукционное предположение сначала к верхнему смешению (т. е. к той части вывода, для которой это смешение является самой нижней фигурой заключения). Оно устраняется. После этого мы можем также устранить нижнее смешение.

3.12. Пусть $\rho > 2$.

Мы различаем теперь два главных случая: правое ранговое число больше 1 (3.121), или правое ранговое число равно 1 и поэтому левое ранговое число больше 1 (3.122). Второй случай, по существу, можно рассматривать симметрично первому.

3.121. П р а в о е р а н г о в о е ч и с л о б о л ь ш е 1.

Это значит, что правая верхняя секвенция смешения является нижней секвенцией некоторой фигуры заключения, которую мы обозначим посредством $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$, и формула $\mathfrak{M}$ входит в антецедент по крайней мере одной из верхних секвенций $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$.

Основная идея преобразования следующая:

Если в случае, когда $\rho=2$, мы, вообще говоря, сводили задачу к преобразованию вывода меньшей степени, то теперь мы будем сводить задачу к преобразованиям вывода той же степени, но меньшего ранга, так что мы можем применить индукционное предположение относительно ρ.

Исключение составляет лишь первый из рассматриваемых ниже случаев: здесь возможно сразу совсем исключить смешение (3.121.1).

В остальных случаях сведéние к выводу с меньшим рангом достигается следующим образом: смешение перемещается вверх на одну ступень над фигурой заключения $\mathfrak{Sf}$; точнее говоря (как особенно ясный пример, можно рассмотреть случай 3.121.231), левая верхняя секвенция смешения (в дальнейшем всюду записываемая в виде $\Pi\to\Sigma$), стоящая сначала рядом с нижней секвенцией $\mathfrak{Sf}$, после преобразования оказывается написанной рядом с верхней секвенцией $\mathfrak{Sf}$, которая служит верхней секвенцией нового смешения, а нижняя секвенция этого нового смешения служит тогда верхней секвенцией новой фигуры заключения, появившейся на месте $\mathfrak{Sf}$, с помощью которой и, быть может, с использованием еще новых фигур заключения, мы получаем старую конечную секвенцию. Новое смешение, очевидно, имеет ранг, меньший чем ρ, так как левое ранговое число не изменяется, а правое уменьшается по крайней мере на 1.

При точном проведении в жизнь этой основной идеи встречаются различные особенности, требующие соответствующего деления на подслучаи и особого рассмотрения каждого из них.

3.121.1. $\mathfrak{M}$ входит в антецедент левой верхней секвенции смешения. Конец вывода имеет вид

$$\frac{\Pi\to\Sigma \quad \Delta\to\Lambda}{\Pi,\Delta^*\to\Sigma^*,\Lambda}\ \text{смешение; } \mathfrak{M} \text{ входит в } \Pi.$$

Преобразуем его так*):

$$\frac{\Delta\to\Lambda}{\Pi,\Delta^*\to\Sigma^*,\Lambda}\ \text{возможно, несколько утончений, перестановок и сокращений**).}$$

*) Когда $\mathfrak{M}$ не входит в Π, нельзя вывести секвенцию $\Pi, \Delta^*\to\Sigma^*, \Lambda$ из секвенции $\Delta\to\Lambda$ применением структурных фигур заключения (без сечения), так как формула $\mathfrak{M}$ входит в Δ и не входит при этом в Π, Δ^*, что невозможно ни для одной из перечисленных фигур заключения. — *Прим. перев.*

**) Часть первоначального вывода с конечной секвенцией $\Pi\to\Sigma$ удаляется. — *Прим. перев.*

3.121.2. $\mathfrak{M}$ не входит в антецедент левой верхней секвенции смешения. (Это условие будет впервые использовано в 3.121.222.)

3.121.21. Пусть $\mathfrak{Sf}$ — уточнение, сокращение или перестановка в антецеденте. Тогда конец вывода имеет вид

$$\dfrac{\Pi\to\Sigma \quad \dfrac{\Psi\to\Theta}{\Xi\to\Theta}\,\mathfrak{Sf}}{\Pi,\Xi^*\to\Sigma^*,\Theta}\ \text{смешение.}$$

Преобразуем его так:

$$\begin{array}{cl}
\Pi\to\Sigma \quad \Psi\to\Theta & \text{смешение,} \\ \hline
\Pi,\Psi^*\to\Sigma^*,\Theta & \text{возможно, несколько перестановок,} \\ \hline\hline
\Psi^*,\Pi\to\Sigma^*,\Theta & \text{см. ниже,} \\ \hline
\Xi^*,\Pi\to\Sigma^*,\Theta & \text{возможно, несколько перестановок.} \\ \hline\hline
\Pi,\Xi^*\to\Sigma^*,\Theta &
\end{array}$$

Если S-формулы, обозначенные в схеме $\mathfrak{Sf}$ посредством $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{C}$ (см. 1.21), не совпадают с $\mathfrak{M}$, то фигура заключения, название которой в написанной выше части вывода не указано, имеет тот же вид, что и $\mathfrak{Sf}$. Если $\mathfrak{D}$ или $\mathfrak{C}$ совпадает с $\mathfrak{M}$, то не названная фигура является тождественной фигурой заключения (Ψ^* совпадает с Ξ^*) *).

Вывод нижней секвенции нового смешения имеет то же самое левое ранговое число, что и старый вывод, а его правое ранговое число на 1 меньше. Таким образом, по индукционному предположению смешение может быть устранено.

3.121.22. Пусть $\mathfrak{Sf}$ — фигура заключения с одной верхней секвенцией, но не утончение, сокращение или перестановка в антецеденте.

Конец вывода имеет вид

$$\dfrac{\Pi\to\Sigma \quad \dfrac{\Psi,\Gamma\to\Omega_1}{\Xi,\Gamma\to\Omega_2}\,\mathfrak{Sf}}{\Pi,\Xi^*,\Gamma^*\to\Sigma^*,\Omega_2}\ \text{смешение.}$$

При этом посредством Γ обозначены те же S-формулы, которые в схеме соответствующей фигуры заключения обозначены посредством Γ (1.21, 1.22). Ψ или пусто или состоит из одной боковой формулы фигуры заключения. Ξ или пусто или состоит из главной формулы фигуры заключения.

*) В последнем случае одна из ее секвенций удаляется из вывода вместе с чертой (см. конец 3.1). — *Прим. перев.*

Преобразуем сначала этот конец вывода так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Pi, \Psi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_1}\ \text{смешение,}}{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений *).}}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}$$

Самая нижняя фигура заключения является, конечно, фигурой того же вида, что и $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ (считая, что Γ^*, Π совпадает с Γ данной фигуры заключения, а Σ^* совпадает с Θ этой фигуры).

Некоторого внимания требует лишь ограничение на переменные (если $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ есть AES или EEA): оно остается выполненным, так как в силу 3.101 собственная переменная фигуры $\mathfrak{S}$ не может входить ни в Π, ни в Σ.

Из нового вывода смешение устраняется по индукционному предположению.

Мы получим после этого вывод без смешения, последняя фигура заключения которого имеет вид

$$\dfrac{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}.$$

Конечная секвенция здесь, вообще говоря, отличается от той, которую надо было получить.

Далее поступаем следующим образом.

3.121.221. Ξ не содержит $\mathfrak{M}$.

В этом случае, применив по мере необходимости несколько перестановок, можно получить конечную секвенцию исходного вывода **).

3.121.222. Ξ содержит $\mathfrak{M}$. Тогда Ξ является главной формулой $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ и совпадает с $\mathfrak{M}$. В этом случае присоединяем к выводу следующее:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{M}, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}{\Pi, \Gamma^*, \Pi^* \to \Sigma^*, \Sigma^* \ \Omega_2}\ \text{смешение,}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\ \text{возможно, несколько сокращений и перестановок.}$$

Здесь уже получена конечная секвенция первоначального вывода.

(Над $\Pi \to \Sigma$ пишется еще раз весь ее вывод.)

*) Утончение (в антецеденте) понадобится в том случае, когда $\mathfrak{M}$ совпадает с Ψ (т. е. является боковой формулой $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$) и, следовательно, в результате применения нового смешения будет удалена из вывода. Тогда ее необходимо ввести в антецедент с помощью утончения, прежде чем применить фигуру вида $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$. — *Прим. перев.*

**) Так как в этом случае Ξ^* совпадает с Ξ. — *Прим. перев.*

Однако в выводе имеется смешение. Его левое ранговое число то же, что в первоначальном выводе. Правое ранговое число равно 1, так как непосредственно над правой верхней секвенцией стоит секвенция

$$\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1,$$

в антецедент которой $\mathfrak{M}$ уже не входит. Действительно, Γ^* не содержит $\mathfrak{M}$, Π — также, по 3.121.2, и Ψ содержит самое большее одну боковую формулу $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$, которая не может быть формулой $\mathfrak{M}$, так как главная формула $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ совпадает с $\mathfrak{M}$.

Таким образом, и это смешение можно устранить по индукционному предположению.

3.121.23. Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ — фигура заключения с двумя верхними секвенциями, т. е. UES, OEA или FEA.

Принимая во внимание интуиционистское применение (3.2), мы рассмотрим каждую из этих возможностей подробнее, чем это необходимо в классическом случае.

3.121.231. Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ есть UES. Тогда конец вывода имеет вид

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\ \text{UES}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\ \text{смешение}$$

($\mathfrak{M}$ входит в Γ). Он преобразуется в *)

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A}}\ \text{смешение} \quad \dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{B}}\ \text{смешение,}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\ \text{UES.}$$

Оба смешения можно удалить по индукционному предположению.

3.121.232. Пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ есть OEA. Тогда конец вывода имеет вид

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}\ \text{OEA}}{\Pi, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{смешение.}$$

($(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*$ или обозначает формулу $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ или пусто в зависимости от того, отлично $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ от $\mathfrak{M}$ или совпадает с $\mathfrak{M}$.)

$\mathfrak{M}$ непременно входит в Γ (ибо в противном случае $\mathfrak{M}$ должно совпадать с $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ и правое ранговое число будет равно 1, что противоречит 3.121).

*) Над каждой из двух секвенций $\Pi \to \Sigma$ пишется, разумеется, ее вывод, так же как и в двух следующих случаях. — *Прим. перев.*

Конец вывода сначала преобразуется в

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta}{\Pi,\ \mathfrak{A}^*,\ \Gamma^* \to \Sigma^*,\ \Theta}\ \text{смешение}}{\mathfrak{A},\ \Pi,\ \Gamma^* \to \Sigma^*,\ \Theta}\ \text{возможно несколько перестановок и утончений *)} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta}{\Pi,\ \mathfrak{B}^*,\ \Gamma^* \to \Sigma^*,\ \Theta}\ \text{смешение,}}{\mathfrak{B},\ \Pi,\ \Gamma^* \to \Sigma^*,\ \Theta}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},\ \Pi,\ \Gamma^* \to \Sigma^*,\ \Theta}\ \text{OEA.}$$

Оба смешения можно удалить по индукционному предположению.

После этого надо поступить так же, как в 3.121.221 и 3.121.222. Следовательно, мы рассматриваем два случая, в зависимости от того, отлично $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ от $\mathfrak{M}$ или совпадает с $\mathfrak{M}$; в первом случае мы добавляем по мере надобности несколько перестановок и получаем таким путем конечную секвенцию первоначального вывода; во втором случае мы присоединяем смешение с $\Pi \to \Sigma$ в качестве левой верхней секвенции и, сделав, если необходимо, несколько дополнительных сокращений и перестановок, также получаем конечную секвенцию первоначального вывода. Новое смешение можно устранить, так как соответствующее ему ранговое число равно 1. (Все, как в 3.121.222.)

3.121.233. $\mathfrak{Sf}$ есть FEA. Тогда конец вывода имеет вид

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \dfrac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta \to \Theta,\ \Lambda}\ \text{FEA,}}{\Pi,\ (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})^*,\ \Gamma^*,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Theta,\ \Lambda}\ \text{смешение.}$$

3.121.233.1. $\mathfrak{M}$ входит в Γ и Δ. Тогда конец вывода сначала преобразуется в

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}}{\Pi,\ \Gamma^* \to \Sigma^*,\ \Theta,\ \mathfrak{A}}\ \text{смешение,} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}{\Pi,\ \mathfrak{B}^*,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Lambda}\ \text{смешение,}}{\mathfrak{B},\ \Pi,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Lambda}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Pi,\ \Gamma^*,\ \Pi,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Theta,\ \Sigma^*,\ \Lambda}\ \text{FEA.}$$

Оба смешения устранимы по индукционному предположению. После этого поступают так же, как в 3.121.221 и 3.121.222. (Возможно лишь, что в первом случае, кроме перестановок, потребуется сделать еще и сокращения.)

3.121.233.2. $\mathfrak{M}$ не входит одновременно в Γ и в Δ. В один из этих рядов $\mathfrak{M}$ непременно входит в силу 3.121 **). Мы рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}$ входит в Δ и не входит в Γ; другой случай рассматривается аналогично.

Конец вывода преобразуется в

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}{\Pi,\ \mathfrak{B}^*,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Lambda}\ \text{смешение,}}{\mathfrak{B},\ \Pi,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Lambda}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Pi,\ \Delta^* \to \Theta,\ \Sigma^*,\ \Lambda}\ \text{FEA.}$$

Смешение можно устранить по индукционному предположению. После этого поступают так же, как в 3.121.221 и 3.121.222. (Во втором случае, т. е. когда $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ совпадает с $\mathfrak{M}$, правое ранговое число нового смешения, как и всегда, равно 1, так как $\mathfrak{M}$ не входит в $\mathfrak{B}$, Π, Δ^* на том же основании, что и раньше, а в Γ согласно условию рассматриваемого случая.)

3.122. Пусть п р а в о е р а н г о в о е ч и с л о р а в н о 1. Тогда л е в о е р а н г о в о е ч и с л о б о л ь ш е 1.

Этот случай, по существу, может быть рассмотрен зеркально-симметрично случаю 3.121. Надо обратить внимание лишь на фигуры заключения, не имеющие симметричных, т. е. на FES и FEA. Все фигуры заключения $\mathfrak{Sf}$, рассмотренные в 3.121.22, т. е. имеющие одну верхнюю секвенцию, мы включим в одну общую схему.

$$\dfrac{\Psi,\ \Gamma \to \Omega_1}{\Xi,\ \Gamma \to \Omega_2}.$$

Зеркально-симметричная схема будет такова:

$$\dfrac{\Omega_1 \to \Gamma,\ \Psi}{\Omega_2 \to \Gamma,\ \Xi},$$

а она включает в себя и FES. (Γ представляет здесь формулы, обозначенные в схемах 1.21, 1.22 посредством Θ.)

3.122.1. Напротив, случай, когда фигура заключения $\mathfrak{Sf}$ есть FEA, мы хотим рассмотреть особо. Хотя способ, который мы применим, очень сходен со способом, примененным в 3.121.233, он не вполне зеркально-симметричен ему.

Конец вывода имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta \to \Theta,\ \Lambda}\ \text{FEA} \quad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Lambda^*,\ \Pi}\ \text{смешение.}$$

3.122.11. $\mathfrak{M}$ входит в Λ и в Θ. Тогда конец вывода преобразуется в

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \Sigma \to \Pi}{\Gamma,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \mathfrak{A}^*,\ \Pi}\ \text{смешение}}{\Gamma,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Pi,\ \mathfrak{A}}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений,} \quad \dfrac{\mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda \quad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B},\ \Delta,\ \Sigma^* \to \Lambda^*,\ \Pi}\ \text{смешение.}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Sigma^*,\ \Delta,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Pi,\ \Lambda^*,\ \Pi}\ \text{FEA}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta,\ \Sigma^* \to \Theta^*,\ \Lambda^*,\ \Pi}\ \text{возможно, несколько перестановок и сокращений.}$$

*) Утончение здесь понадобится, если $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{A}$, а в соседней фигуре заключения — если $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{B}$. Аналогично и в случаях 3.121.233.1, 3.121.233.2. — *Прим. перев.*

**) Если $\mathfrak{M}$ не входит ни в Γ, ни в Δ, то правое ранговое число смешения в первоначальном выводе равно 1, так как $\mathfrak{M}$ тогда не входит в антецедент ни одной из верхних секвенций $\mathfrak{Sf}$. Действительно, $\mathfrak{M}$ не входит ни в Γ, ни в Δ; следовательно, $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ и в силу этого не может совпадать с $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

Оба смешения можно устранить по индукционному предположению.

3.122.12. $\mathfrak{M}$ не входит в Θ и в Λ одновременно. В один из этих рядов $\mathfrak{M}$ должно входить. Мы рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}$ входит в Λ и не входит в Θ, другой рассматривается аналогично. Конец вывода преобразуется в

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \quad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta, \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\ \text{смешение}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta, \Lambda^*, \Pi}\ \text{FEA.}$$

Смешение можно устранить по индукционному предположению.

3.2. Доказательство основной теоремы для LJ-выводов.

Для преобразования LJ-вывода в LJ-вывод без сечения мы применяем точно такой же способ, как для LK-выводов.

Так как LJ-вывод является частным случаем LK-вывода, то ясно, что все описанные преобразования могут быть выполнены. Мы должны лишь убедиться в том, что при каждом шаге преобразования из LJ-вывода получается также LJ-вывод, т. е. что Н-секвенции преобразованного вывода содержат в сукцеденте не более одной формулы, если так было до преобразования.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим отдельные шаги преобразования.

3.21. Замена сечений смешениями. LJ-сечение имеет вид

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Lambda},$$

где Λ содержит не более одной формулы. Оно преобразуется в

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Lambda}\ \text{смешение,}}{\Gamma, \Delta \to \Lambda}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений в антецеденте.}$$

При такой замене получается, как видно, снова LJ-вывод.

3.22. При переименовании свободных предметных переменных (3.10) LJ-вывод, очевидно, переходит в LJ-вывод.

3.23. Собственно преобразование (3.11 и 3.12).

Мы должны убедиться в том, что в каждом отдельном случае, начиная с 3.111 и до 3.122.12, в результате осуществленного там преобразования не появляется ни одной секвенции, содержащей более одной формулы в сукцеденте.

3.231. Сначала случаи пункта 3.11.

В случаях 3.111, 3.113.1, 3.113.31, 3.113.35 и 3.113.36 в сукцедент каждой секвенции нового вывода входят лишь формулы, входившие в сукцедент некоторой секвенции старого вывода.

В случае 3.113.33, по существу, имеет место то же самое, но здесь добавляется еще замена свободных предметных переменных, что не изменяет числа формул в сукцеденте секвенции.

Случаи 3.112, 3.113.2, 3.113.32 и 3.113.34 можно рассмотреть симметрично случаям 3.111, 3.113.1, 3.113.31 и 3.113.33. Следовательно, чтобы получить один случай из другого, надо прочитать схемы не слева направо, а справа налево (а также изменить логические знаки, что здесь не играет роли). Таким образом, в одном из этих случаев в антецеденте стоит в точности то же самое, что в другом случае стоит в сукцеденте. Но для антецедентов в случаях 3.111, 3.113.1, 3.113.31 и 3.113.33 имеет место то же самое, что для сукцедентов, а именно: в антецедент каждой секвенции нового вывода входят лишь те формулы, которые уже входили в антецедент некоторой секвенции старого вывода.

Этим исчерпаны зеркально-симметричные случаи 3.112, 3.113.2, 3.113.32 и 3.113.34.

3.232. Теперь случаи пункта 3.12.

3.232.1. В случаях 3.121 вообще Σ^* является пустым, так как в секвенции $\Pi \to \Sigma$ список Σ может содержать только одну формулу, которая должна быть формулой $\mathfrak{M}$.

Теперь легко увидеть, что и здесь в сукцедент каждой секвенции нового вывода входят только те формулы, которые уже входили в сукцедент некоторой секвенции старого вывода.

3.232.2. В случаях 3.122 не очевидно, что из LJ-вывода получается LJ-вывод. Надо обратить внимание на антецеденты в схемах 3.121. Рассмотрим следующие случаи.

3.232.21. Случай, зеркально-симметричный 3.121.1, тривиален, так как в антецедент каждой секвенции нового вывода (в 3.121.1) входят лишь формулы, входившие в антецедент некоторой секвенции старого вывода.

3.232.22. В случаях, зеркально- симметричных 3.121.2, смешение в конце вывода имеет вид

$$\dfrac{\Omega \to \mathfrak{M} \quad \Sigma \to \Pi}{\Omega, \Sigma^* \to \Pi},$$

где Π состоит не более, чем из одной S-формулы и $\Omega \to \mathfrak{M}$ есть нижняя секвенция некоторой LJ-фигуры заключения, по крайней мере одна из верхних секвенций которой содержит $\mathfrak{M}$ в сукцеденте. Если мы рассмотрим теперь схемы фигур заключения 1.21, 1.22, то легко заметим, что такой фигурой заключения может быть только утончение, сокращение или перестановка в антецеденте или одна из фигур: OEA, UEA, EEA, AEA, FEA. Оставим пока в стороне OEA и FEA; видим, что все остальные из перечисленных фигур заключения являются зеркально симметричными 3.121.22 и, как очевидно, Ψ и Ξ при этом всегда пусты. (Г соответствует в фигурах заключения Θ.) Таким образом мы имеем случай, зеркально-симметричный 3.121.221. Далее, если Г совпадает с $\mathfrak{M}$, то Г* пусто и П состоит не более, чем из одной формулы. Следовательно, в новом выводе в сукцедент каждой секвенции действительно входит не более одной формулы.

Случай OEA является зеркально-симметричным случаю 3.121.231. Снова, если Г совпадает с $\mathfrak{M}$, то Г* пусто и П содержит самое большее одну формулу, так что все в порядке.

Остается еще случай FEA, т. е. 3.122.1. Для исчисления LJ список Θ из этой схемы пуст (1.22). Поэтому может иметь место лишь случай, расмотренный в 3.122.12. Λ* также пусто и П содержит не более одной формулы, так что и здесь из LJ-вывода получается снова LJ-вывод.

РАЗДЕЛ IV

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Применения основной теоремы в логике высказываний

1.1. Тривиальным следствием основной теоремы является уже давно известная (см., например, Г.—А., стр. 117) непротиворечивость классической (и интуиционистской) логики предикатов: секвенция → (которая выводима из любой противоречивой секвенции → $\mathfrak{A}$& ⌉$\mathfrak{A}$ ср. 3.21) не может быть нижней секвенцией никакой фигуры заключения, кроме сечения, т. е. вообще невыводима.

1.2. Решение проблемы разрешения для интуиционистской логики высказываний.

Используя основную теорему, мы можем получить простой способ решения для любой формулы логики высказываний, т. е. формулы без предметных переменных, вопроса о том, является ли она классически, а также интуиционистски истинной или нет. (Для классической логики высказываний уже давно известно простое решение этой задачи, см., например, Г.—А., стр. 32.)

Секвенцию, в антецедент которой одна и та же формула не входит в качестве S-формулы более трех раз и в сукцедент которой также никакая формула не входит в качестве S-формулы более трех раз, мы называем *редуцированной.* Имеет место следующая лемма:

1.21. *Каждый* LJ-*вывод* (LK-*вывод*), *конечная секвенция которого является редуцированной, можно преобразовать в* LJ-*вывод (соответственно в* LK-*вывод) с той же конечной секвенцией, в котором все секвенции являются редуцированными* (*и который в случае, если первоначальный вывод не содержит сечения, тоже не содержит сечения*).

Доказательство этой леммы. Назовем *редукцией* данной секвенции любую секвенцию, которая получается из данной в результате следующего преобразования: если в антецеденте или в сукцеденте данной секвенции имеется несколько различных формально равных S-формул, мы вычеркиваем любые (возможно, и никакие) из них до тех пор, пока в антецеденте и независимо от этого в сукцеденте останется только одна, две или три такие S-формулы.

Очевидно, что из одной редукции данной секвенции можно вывести любую другую редукцию этой секвенции с помощью утончений, сокращений и перестановок, причем так, что будут использованы только редуцированные секвенции.

После этого предварительного замечания мы проведем следующее преобразование данного LJ-вывода (соответственно LK-вывода).

Все основные секвенции и конечная секвенция не изменяются; они все уже являются редуцированными.

Н-секвенции каждой из фигур заключения преобразуются в их редукции описанным выше способом.

Ввиду сделанного замечания не имеет особого значения, если одинаковые секвенции в двух различных Н-фигурах заключения заменяются при этом преобразовании различными редукциями, так как в этом случае одну из них легко вывести из другой с помощью утончений, сокращений и перестановок, получив в конце концов снова правильный вывод. (То же самое справедливо и для секвенции, которая одновременно входит в некоторую фигуру заключения и является основной секвенцией или конечной секвенцией, так как она, естественно, является редукцией самой себя.)

Преобразования фигур заключения производятся следующим образом.

Если в Г некоторая формула входит более, чем один раз, то она столько раз вычеркивается из Г в верхней и нижней секвенциях (на соответствующих местах), что входит после этого в Г только один раз. То же самое делается с Δ, Θ и Λ (т. е. с рядами формул, обозначенными так в схемах фигур заключения III, 1.21 и 1.22).

После описанных преобразований вывод состоит уже только из редуцированных секвенций. (Перестановка, в которой $\mathfrak{D}$ равна $\mathfrak{C}$, представляет исключение, но она является тождественной фигурой заключения и ее можно вообще удалить.)

Этим лемма доказана.

Из основной теоремы, дополнительной теоремы III, 2.513 и этой леммы (1.21) следует:

1.22. Для каждой интуиционистки (классически) истинной редуцированной секвенции существует ее LJ-вывод (соответственно LK-вывод) без сечения, состоящий только из редуцированных секвенций, причем все H-S-формулы этого вывода являются подформулами S-формул этой секвенции.

1.23. Пусть теперь имеется некоторая секвенция без предметных переменных. Мы хотим решить вопрос о том, является ли она интуиционистски (соответственно классически) истинной или нет. Прежде всего, вместо нее мы можем взять эквивалентную ей редуцированную секвенцию, которую мы обозначим посредством $\mathfrak{Sq}$.

Очевидно, что число всех редуцированных секвенций, S-формулы которых являются подформулами S-формул секвенции $\mathfrak{Sq}$, конечно. Поэтому разрешающую процедуру можно осуществить так.

Берем упомянутую конечную систему секвенций и выясняем сначала, какие из них являются основными секвенциями; такие секвенции выводимы. Относительно каждой из остальных по очереди выясняем, существует ли такая фигура заключения, для которой она может являться нижней секвенцией, в то время как верхними секвенциями (одной или двумя) являются какие-либо из секвенций, выводимость которых уже установлена. Если окажется, что такая фигура заключения существует, то исследуемая секвенция присоединяется к выводимым. (Все это, очевидно, разрешимо.) Так мы продолжаем до тех пор, пока или сама секвенция $\mathfrak{Sq}$ будет отнесена к выводимым, или окажется, что описанная процедура уже не дает никаких новых выводимых секвенций. В последнем случае согласно 1.22 секвенция $\mathfrak{Sq}$ вообще невыводима в соответствующем исчислении (LJ или соответственно LK). Этим вопрос об ее истинности решен.

1.3. Новое доказательство невыводимости закона исключенного третьего в интуиционистской логике

Разрешающей процедуре можно придать другой, гораздо более удобный для практических применений вид. Приведенное выше (1.2) описание такой процедуры предназначалось лишь для того, чтобы показать принципиальную возможность решения проблемы.

В качестве примера мы докажем невыводимость закона исключенного третьего в интуиционистской логике способом, не зависящим от описанной выше разрешающей процедуры (применяя которую, конечно, тоже можно было бы доказать это).

(Это уже доказано Гейтингом[1]) совершенно иным путем.)

Секвенция, о которой идет речь, имеет вид $\rightarrow A \vee \neg A$ *). Предположим, что существует LJ-вывод этой секвенции. Тогда согласно основной теореме существует ее вывод без сечения. Самой нижней фигурой заключения этого вывода может быть лишь OES, так как во всех остальных LJ-фигурах заключения или антецедент нижней секвенции непуст или в сукцеденте стоит формула с отличным от $\vee$ внешним знаком. Правда, рассматриваемая секвенция может быть нижней секвенцией утончения в сукцеденте, но тогда верхней секвенцией этой фигуры заключения была бы секвенция $\rightarrow$, а последняя невыводима согласно 1.1.

Итак, должна быть выводима (без сечения) одна из следующих секвенций: $\rightarrow A$ или $\rightarrow \neg A$.

(Такое рассуждение, вообще, приводит к следующему заключению: если $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ является интуиционистски истинной формулой, то или $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ является интуиционистски истинной формулой. В классической логике это не имеет места, что видно уже на примере $A \vee \neg A$.)

Но секвенция $\rightarrow A$, вообще, не может быть нижней секвенцией какой-либо LJ-фигуры заключения (кроме сечения), за исключением опять-таки утончения в сукцеденте с верхней секвенцией $\rightarrow$. Так как $\rightarrow A$, кроме того, не является и основной секвенцией, то она невыводима.

Секвенция $\rightarrow \neg A$ может быть выведена только с помощью NES из секвенции $A \rightarrow$ **), которая, ввиду того, что A не имеет внешнего знака, может быть выведена лишь из секвенции $A, A \rightarrow$. Продолжая так, мы будем получать лишь секвенции вида $A, \ldots, A \rightarrow$, но никогда не придем к основной секвенции.

Итак, $A \vee \neg A$ невыводима в интуиционистской логике предикатов.

§ 2. Усиление основной теоремы для классической логики предикатов

2.1. Мы даем следующее усиление основной теоремы:

Пусть имеется LK-*вывод со следующими свойствами конечной секвенции: каждая* S-*формула этой секвенции может содер-*

[1]) В работе, цитированной в примечании [3]), стр. 9.

*) Напомним, что A есть переменное высказывание (I, 1.2), а не обозначение произвольной формулы (в качестве метапеременных для произвольных формул в настоящей работе используются прописные готические буквы). Формула вида $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ LJ-выводима в том (и только в том) случае, когда выводима формула $\mathfrak{A}$ или формула $\neg \mathfrak{A}$. — *Прим. перев.*

**) Или опять-таки с помощью утончения из секвенции $\rightarrow$. — *Прим. перев.*

жать знаки всеобщности и существования только в начале, причем областью действия каждого из этих знаков является вся следующая за ним часть формулы.

Тогда этот вывод можно преобразовать в LK-*вывод с той же конечной секвенцией, имеющий следующие свойства*:

1) *он не содержит сечений*;

2) *в нем имеется некоторая* H-*секвенция, которую мы назовем «средней секвенцией», такая, что ее вывод (а следовательно, и она сама) не содержит знаков* $\forall$ *и* $\exists$, *а в остальной части вывода, включающей и среднюю секвенцию, нет других фигур заключения, кроме* AES, AEA, EES, EEA *и структурных.*

2.11. Средняя секвенция делит, так сказать, вывод на две части: верхнюю, относящуюся к логике высказываний, и нижнюю, состоящую лишь из введений знаков всеобщности и существования.

О ф о р м е п р е о б р а з о в а н н о г о в ы в о д а можно, очевидно, сказать еще следующее: нижняя часть его, от средней секвенции до конечной секвенции, состоит лишь из одной-единственной нити вывода, так как в нее входят только фигуры заключения с одной верхней секвенцией. S-формулы средней секвенции имеют следующую особенность.

Каждая из S-формул, стоящих в антецеденте средней секвенции, получается из одной из S-формул, стоящих в антецеденте конечной секвенции, в результате удаления знаков всеобщности и существования, которыми она начинается (вместе со следующими за этими знаками связанными предметными переменными), и замены в оставшейся части формулы связанных предметных переменных некоторыми определенными свободными предметными переменными. То же самое имеет место для сукцедента.

Это следует из такого же рассуждения, как в III, 2.512.

2.2. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы (2.1) [1]).

Преобразование вывода осуществляется в несколько шагов.

2.21. Сначала применяется основная теорема (III, 2.5), согласно которой можно преобразовать вывод в вывод без сечения.

---

[1]) Следующий частный случай теоремы 2.1 был доказан уже Эрбраном совершенно иным путем:

Если формула $\mathfrak{P}$, в которую знаки всеобщности и существования входят только в начале и имеют своей областью действия всю часть формулы, стоящую правее них (как известно, для каждой формулы существует классически эквивалентная ей формула описанного вида, см., например, Г.—А., стр. 112), классически выводима, то существует секвенция (называемая выше средней секвенцией) с пустым антецедентом такая, что каждая из

2.22. Преобразование основных секвенций, содержащих знак $\forall$ или $\exists$:

Ввиду свойства подформульности (III, 2.513) они могут иметь только вид $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ или $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Они преобразуются в

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}\,\mathrm{AEA}}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,\mathrm{AES} \quad \text{или, соответственно,} \quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,\mathrm{EES}}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,\mathrm{EEA},$$

где посредством $\mathfrak{a}$ обозначена некоторая свободная предметная переменная, не входящая в вывод.

Повторив это преобразование достаточное число раз, можно, очевидно, достичь того, чтобы знаки $\forall$ и $\exists$ не входили ни в одну из основных секвенций вывода.

2.23. Теперь мы проведем полную индукцию по «порядку» вывода, который определим следующим образом.

Логические фигуры заключения, относящиеся к знакам &, $\vee$, $\neg$ и $\supset$, мы назовем «пропозициональными фигурами заключения» *), а остальные, т. е. AES, AEA, EES и EEA, «предикатными фигурами заключения». Каждой предикатной фигуре заключения, входящей в вывод, сопоставим порядковое число следующим образом.

Рассмотрим часть нити вывода от нижней секвенции рассматриваемой фигуры заключения до конечной секвенции вывода (включительно) и подсчитаем входящие в нее нижние секвенции пропозициональных фигур заключения. Их число и есть определяемое порядковое число.

Сумма порядковых чисел всех предикатных фигур заключения, входящих в вывод, называется п о р я д к о м в ы в о д а.

Мы хотим уменьшать его шаг за шагом до тех пор, пока он не станет равен 0.

Докажем сперва, что после этого доказательство теоремы (2.1) легко может быть доведено до конца (шаг (2.232)

формул, входящих в ее сукцедент, может быть построена из формулы $\mathfrak{P}$ в результате опускания знаков всеобщности и существования (со стоящими за ними связанными предметными переменными) и замены связанных предметных переменных на свободные предметные переменные; эта секвенция выводима классически без применения знаков $\forall$ и $\exists$ и из нее можно вывести секвенцию $\to \mathfrak{P}$, пользуясь лишь фигурами заключения, обозначенными у нас посредством AES, EES, сокращениями в сукцеденте и перестановками в сукцеденте. (По теореме 2.1 надо бы еще добавить утончения в сукцеденте; легко видеть, что этого можно избежать.)

См. также J. H e r b r a n d, Sur le problème fondamental de la logique mathématique. C. r. de la Soc. des sciences et des lettres de Varsovie 24, (1931), Cl. III, стр. 31, замечание 1.

*) В оригинале «Aussagen-Schlußfiguren». — *Прим. перев.*

строится так, что полученные в 2.21 и 2.22 особенности сохраняются).

2.231. Предположим, что вывод уже имеет порядок, равный 0. Переходим постепенно от конечной секвенции к верхним секвенциям стоящих над ней фигур заключения. Мы останавливаемся, как только встретим нижнюю секвенцию некоторой пропозициональной фигуры заключения или основную секвенцию; эту секвенцию мы обозначим посредством $\mathfrak{Sq}$. (Она будет служить нам после указанных ниже преобразований в качестве «средней секвенции».)

Вывод секвенции $\mathfrak{Sq}$ мы преобразуем так.

Мы просто удаляем из него все H-S-формулы, которые еще содержат знак $\forall$ или $\exists$. При этом вывод секвенции $\mathfrak{Sq}$ остается правильным: основные секвенции не изменяются в силу 2.22. Далее, никакие из главных и боковых формул фигур заключения не удаляются, так как, если бы какая-нибудь из боковых формул содержала знак $\forall$ или $\exists$, то и главная формула содержала бы этот знак, что невозможно для пропозициональных фигур заключения ввиду свойства подформульности (III, 2.513) и условия теоремы 2.1, а предикатные фигуры заключения в рассматриваемый вывод не входят (так как в противном случае порядковое число этой фигуры заключения было бы больше 0). Но каждая фигура заключения при удалении из нее любой S-формулы, не являющейся ни главной, ни боковой формулой, остается той же фигурой заключения; это легко усматривается непосредственно из схем III, 1.21; III, 1.22. (Возможно, правда, появление тождественной фигуры заключения, но она, как и выше, удаляется.)

Секвенция $\mathfrak{Sq}^*$, в которую после описанного преобразования превратилась секвенция $\mathfrak{Sq}$, может отличаться от $\mathfrak{Sq}$ лишь тем, что в ней отсутствуют некоторые входящие в $\mathfrak{Sq}$ S-формулы. Но несколькими утончениями и перестановками мы можем преобразовать ее снова в секвенцию $\mathfrak{Sq}$ и присоединить к ней нижнюю часть вывода без изменений.

Итак, мы у цели: $\mathfrak{Sq}^*$ является средней секвенцией и удовлетворяет, очевидно, всем требованиям теоремы (2.1).

2.232. Теперь надо провести еще ш а г и н д у к ц и и, т. е., допустив, что порядок вывода больше 0, уменьшить его.

2.232.1. Мы начнем с п е р е и м е н о в а н и я с в о б о д н ы х п р е д м е т н ы х п е р е м е н н ы х способом, описанным в III, 3.10. Этим мы достигаем того, что вывод будет иметь следующее свойство (III, 3.101).

Собственная переменная каждой AES (соответственно EEA) входит в вывод только в секвенции, стоящие выше нижней секвенции этой фигуры, и не входит больше ни в какую другую

AES или EEA в качестве собственной переменной этой фигуры заключения.

Очевидно, порядок вывода в результате такого переименования не изменяется.

2.232.2. Теперь мы переходим к самому преобразованию.

Заметим, прежде всего, что в выводе найдется некоторая предикатная фигура заключения (мы будем называть ее $\mathfrak{Sf}1$), обладающая следующим свойством: если проследить часть нити вывода от ее нижней секвенции до конечной секвенции, то первая же встретившаяся нижняя секвенция логической фигуры заключения является нижней секвенцией п р о п о з и ц и о н а л ь н о й фигуры заключения (эту фигуру заключения мы обозначим посредством $\mathfrak{Sf}2$). Действительно, в противном случае порядок вывода был бы равен 0.

Наша цель состоит теперь в том, чтобы переместить фигуру заключения $\mathfrak{Sf}1$ на место, расположенное ниже фигуры заключения $\mathfrak{Sf}2$.

Это нетрудно выполнить следующим образом:

2.232.21. $\mathfrak{Sf}2$ имеет о д н у верхнюю секвенцию.

2.232.211. Пусть $\mathfrak{Sf}1$ есть AES. Тогда рассматриваемая часть вывода имеет вид

$$\begin{array}{ll}
\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}a & \\ \hline
\Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} & \text{AES,} \\ \hline\hline
\Delta \to \Lambda & \mathfrak{Sf}2 \text{ и, возможно, несколько предшествующих ей структурных фигур заключения.}
\end{array}$$

Мы преобразуем эту часть вывода так:

$$\begin{array}{ll}
\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}a & \\ \hline\hline
\Gamma \to \mathfrak{F}a,\ \Theta,\ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} & \text{возможно, несколько перестановок и утончений,} \\ \hline\hline
\Delta \to \mathfrak{F}a,\ \Lambda & \text{фигуры заключения того же вида, что выше, т. е. } \mathfrak{Sf}2 \text{ с предшествующими ей, возможно, структурными фигурами заключения,} \\ \hline\hline
\Delta \to \Lambda,\ \mathfrak{F}a & \text{возможно, несколько перестановок,} \\ \hline
\Delta \to \Lambda,\ \forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} & \text{AES,} \\ \hline\hline
\Delta \to \Lambda & \text{возможно, несколько перестановок и сокращений.}
\end{array}$$

Удаление в конце этой части вывода $\forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ с помощью сокращения возможно потому, что $\forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ необходимо входит в Λ в качестве S-формулы. (Дело в том, что S-формула $\forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ в первоначальном выводе не могла быть удалена из сукцедента в результате применения $\mathfrak{Sf}2$ и предшествовавших ей структурных фигур заключения; эта S-формула не могла быть боковой формулой $\mathfrak{Sf}2$ ввиду свойства подформульности III, 2.513 и условия теоремы 2.1 *).)

Ограничения на переменные для перемещенной AES выполнены на основании 2.232.1.

Порядок вывода, очевидно, понизился на 1.

2.232.212. Случай, когда $\mathfrak{Sf}1$ есть EES, рассматривается точно так же; надо лишь заменить $\forall$ на $\exists$.

2.232.213. Случаи, когда $\mathfrak{Sf}1$ является фигурой заключения AEA или EEA, могут быть рассмотрены зеркально-симметрично двум предыдущим.

2.232.22. Случаи, когда $\mathfrak{Sf}2$ имеет д в е верхние секвенции, т. е. является UES, OEA или FEA, могут быть рассмотрены совершенно аналогичным образом; во всех случаях могут понадобиться лишь дополнительные применения структурных фигур заключения.

2.3. Аналогично теореме 2.1 можно доказать дальнейшие усиления основной теоремы в том смысле, что на порядок следования логических фигур заключения в выводе накладываются те или иные ограничения. Фигуры заключения в выводе можно переставлять различными способами и в довольно широких пределах подобно тому, как это делалось выше (2.232.2).

Мы не будем углубляться в рассмотрение этого вопроса.

§ 3. Применение усиленной основной теоремы (2.1) к новому [1]) доказательству непротиворечивости арифметики без полной индукции

А р и ф м е т и к о й мы называем (элементарную, т. е. не пользующуюся средствами анализа) теорию натуральных чисел. Мы можем формализовать ее следующим образом, применяя наше логическое исчисление LK.

3.1. В арифметике обычно используются «функции», например, x' (обозначает $x+1$), $x+y$, $x \cdot y$. Так как в наших логических исследованиях мы не вводим никаких функциональных знаков, то для того, чтобы применить их результаты к арифметике, мы так формализуем арифметические высказывания, чтобы вместо функций в них фигурировали предикаты. Например, вместо функции x' мы используем предикат $x \,\mathrm{Vg}\, y$, который читается так: «x предшествует y», т. е. $y=x+1$. Далее, мы рассматриваем $[x+y=z]$ как предикат с тремя аргументными местами, в котором каждый из знаков $+$ и $=$ в отдельности не имеет смысла. Другим предикатом является $x=y$; знак равенства здесь не имеет ничего общего со знаком равенства в $[x+y=z]$.

*) По условию доказываемой теоремы конечная секвенция содержит лишь предваренные формулы; если бы формула $\forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ была боковой формулой фигуры заключения $\mathfrak{Sf}2$ (которая является пропозициональной фигурой заключения), то главная формула $\mathfrak{Sf}2$ оказалась бы непредваренной формулой. Вследствие свойства подформульности при этом и в конечной секвенции будут иметься непредваренные формулы. — *Прим. перев.*

[1]) Более ранние доказательства имеются в следующих работах: J. v o n N e u m a n n, Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeitschr. **26** (1927), стр. 1—46; J. H e r b r a n d, Sur la non-contradiction de l'arithmétique. J. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), стр. 1—8.

Далее, число 1 мы не можем писать как обозначение некоторого объекта, так как мы в нашем формализме пользуемся только предметными переменными и не имеем знаков для постоянных объектов. Мы поэтому вынуждены писать так: предикат «$\mathrm{Eins}\, x$» содержательно означает «x есть число 1».

Предложение «$x+1$ следует за x» мы можем, например, представить в нашем формализме так:

$$\forall x \forall y \forall z\, ((\mathrm{Eins}\, y \,\&\, [x+y=z]) \supset x \,\mathrm{Vg}\, z).$$

Остальные натуральные числа можно характеризовать предикатами

$$\mathrm{Eins}\, x \,\&\, x \,\mathrm{Vg}\, y, \quad \mathrm{Eins}\, x \,\&\, x \,\mathrm{Vg}\, y \,\&\, y \,\mathrm{Vg}\, z \ \text{ и т. д.}$$

Как же можно включить введенные только что п р е д и к а т н ы е з н а к и в наше исчисление, в котором мы допускали ранее только переменные высказывания *)? Чтобы сделать это, мы просто условимся, что предикатные знаки будут рассматриваться точно так же, как переменные высказывания. Точнее, мы рассматриваем выражения вида

$$\mathrm{Eins}\, \mathfrak{x}, \ \mathfrak{x} \,\mathrm{Vg}\, \mathfrak{y}, \ \mathfrak{x}=\mathfrak{y}, \ [\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{z}],$$

где посредством $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ обозначены некоторые предметные переменные, лишь как более понятную запись формул

$$A\mathfrak{x}, \ B\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \ C\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \ D\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}.$$

В этом смысле следующие аксиомы действительно являются ф о р м у л а м и в соответствии с нашим определением формулы.

(Число 1 нельзя рассматривать как обозначение некоторой предметной переменной, так как в нашем исчислении предметные переменные функционируют действительно как п е р е м е н н ы е, в то время как для переменных высказываний это не имеет места.)

В качестве «а к с и о м» а р и ф м е т и к и мы возьмем сначала приведенные ниже; позднее в связи с доказательством

*) См. сноску **) на стр. 12. — *Прим. перев.*

непротиворечивости (см. 3.3), мы укажем более общую точку зрения, в соответствии с которой можно будет строить новые допустимые аксиомы:

Равенство:	$\forall x\,(x = x)$	(рефлексивность),
	$\forall x \forall y\,(x = y \supset y = x)$	(симметричность),
	$\forall x \forall y \forall z\,((x = y \,\&\, y = z) \supset x = z)$	(транзитивность).
Единица:	$\exists x\, \mathrm{Eins}\, x$	(существование 1),
	$\forall x \forall y\,((\mathrm{Eins}\, x \,\&\, \mathrm{Eins}\, y) \supset x = y)$	(единственность 1).
Предшественник:	$\forall x \exists y\,(x\, \mathrm{Vg}\, y)$	(существование следующего за),

$\forall x \forall y\,(x\, \mathrm{Vg}\, y \supset \neg\, \mathrm{Eins}\, y)$ (1 не имеет предшественника),

$\forall x \forall y \forall z \forall u\,((x\, \mathrm{Vg}\, y \,\&\, z\, \mathrm{Vg}\, u \,\&\, x = z) \supset y = u)$ (единственность следующего за).

Формула $\mathfrak{B}$ называется *выводимой* в арифметике без полной индукции, если существует LK-вывод секвенции

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ являются аксиомами арифметики.

Нельзя *доказать*, что эта формальная арифметическая система дает возможность формализовать все обычные в содержательной арифметике доказательства (в которых не используется полная индукция), так как для содержательного изложения не существует точно очерченных рамок; нас может убеждать в этом только опыт отдельных содержательных доказательств.

3.2. Теперь мы докажем *непротиворечивость описанной формальной системы*. Сделать это с помощью усиленной основной теоремы (2.1) совсем просто.

3.21. «Противоречивая формула» $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$ выводима в системе тогда и только тогда, когда имеется LK-вывод некоторой секвенции с *пустым сукцедентом* и арифметическими аксиомами в антецеденте. Действительно, из $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$

можно получить $\Gamma \to$ так:

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\,\text{NEA}}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\,\text{UEA}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \to}\,\text{перестановка,}}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \to}\,\text{UEA}}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \to}\,\text{сокращение,}}{\Gamma \to}\,\text{сечение.}$$

Обратное утверждение доказывается путем построения вывода, состоящего из единственного утончения в сукцеденте.

Итак, если наша арифметика противоречива, то существует LK-вывод с конечной секвенцией

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to,$$

где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ являются арифметическими аксиомами.

3.22. Теперь мы применим усиление основной теоремы (2.1). Арифметические аксиомы удовлетворяют условиям, наложенным на S-формулы конечной секвенции в теореме 2.1. Следовательно, существует LK-вывод с той же конечной секвенцией, который имеет следующие особенности:

1) в него не входит сечение,

2) в нем имеется некоторая H-секвенция, называемая «средней секвенцией», вывод которой не содержит знаков $\forall$ и $\exists$ и из которой конечная секвенция получается с помощью следующих фигур заключения: AEA, EEA, уточнение, сокращение и перестановка в антецеденте. Средняя секвенция имеет пустой сукцедент (2.11).

3.23. Затем мы переименовываем свободные предметные переменные, как это делалось в III, 3.10, что не лишает вывод описанных выше особенностей и сообщает ему еще следующее свойство (III, 3.101): собственная переменная каждой EEA входит в вывод только в секвенции, стоящие выше нижней секвенции этой EEA.

3.24. После этого мы замещаем описываемым ниже способом каждую свободную предметную переменную везде, где она входит в вывод, одним и тем же натуральным числом. При этом получается некоторая фигура, которую мы уже не можем считать LK-выводом; в какой степени она все же имеет содержательный смысл, мы увидим позднее.

Замещение свободных предметных переменных числами производится в следующей последовательности:

3.241. Вначале заменяем числом 1 все свободные предметные переменные, не входящие в вывод в качестве собственной переменной какой-либо EEA. (Можно было бы взять любое другое число.)

3.242. Затем мы последовательно берем входящие в вывод фигуры заключения EEA, начиная с самой нижней, и заменяем их собственные переменные (всюду, где они входят в «вывод») числом, которое определяется следующим образом.

Фигура заключения EEA может иметь лишь один из следующих двух видов:

$$\frac{\text{Eins}\,\mathfrak{a},\ \Gamma \to \Theta}{\exists x\,\text{Eins}\,x,\ \Gamma \to \Theta} \quad \text{или} \quad \frac{\nu\,\text{Vg}\,\mathfrak{a},\ \Gamma \to \Theta}{\exists y \nu\,\text{Vg}\,y,\ \Gamma \to \Theta}$$

(на основании свойства подформульности III, 2.513; ν может быть только числом, в силу 3.241 и 3.23).

В первом случае $\mathfrak{a}$ заменяется на 1, во втором — на число, на 1 большее, чем ν.

3.25. Теперь рассмотрим полученную из вывода фигуру. Нас интересует в особенности вид (бывшей) средней секвенции. О ней можно сказать следующее: ее сукцедент пуст, а каждая из антецедентных S-формул имеет вид Eins 1 или вид $\nu\,\text{Vg}\,\nu'$, где ν — некоторое число и ν' — число, на 1 большее, чем ν, или, наконец, она получается из такой арифметической аксиомы, в начале которой стоят только знаки всеобщности, путем удаления этих знаков (и стоящих за ними связанных предметных переменных) и замены связанных предметных переменных в оставшейся части формулы ч и с л а м и. (Все это следует из рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в III, 2.512; см. также 2.11.)

Итак, S-формулы, стоящие в антецеденте средней секвенции, представляют с о д е р ж а т е л ь н о и с т и н н ы е а р и ф м е т и ч е с к и е в ы с к а з ы в а н и я. Далее, «в ы в о д» средней секвенции получен из «вывода», не содержащего знаков $\forall$ и $\exists$, в результате замены входящих в него свободных предметных переменных числами. Такой «вывод» содержательно представляет собой а р и ф м е т и ч е с к о е д о к а з а т е л ь с т в о, в к о т о р о м и с п о л ь з о в а н ы л и ш ь п р а в и л а в ы в о д а л о г и к и в ы с к а з ы в а н и й.

Тем самым мы получаем следующий результат:

Если наша арифметика противоречива, то, пользуясь лишь истинными арифметическими высказываниями и применяя лишь правила вывода логики высказываний, можно доказать противоречие.

Используемые при этом «истинные арифметические высказывания» являются высказываниями вида Eins 1, $\nu\,\text{Vg}\,\nu'$ или численными частными случаями арифметических аксиом, начинающихся только знаками всеобщности, например, $3=3$; $4=5 \supset 5=4$; $3\,\text{Vg}\,4 \supset \neg\,\text{Eins}\,4$.

То, что из таких высказываний средствами логики высказываний не может быть выведено противоречие, почти очевидно, и доказательство этого может быть лишь формальным описанием содержательно ясного существа дела. Поэтому мы не будем его проводить, а лишь укажем вкратце, как это обычно делают.

Устанавливают для всех числовых значений то, когда формулы Eins μ, $\mu=\nu$, $\mu\,\text{Vg}\,\nu$, $\mu+\nu=\rho$ и т. д. истинны и когда они ложны. Далее обычным образом определяют истинность или ложность высказываний вида $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\neg\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ как функций истинности или ложности их подформул (см., например, Г. — А., стр. 20). После этого показывают, что все численные частные случаи аксиом являются «истинными», а фигуры заключения логики высказываний приводят всегда от истинных формул только лишь к истинным формулам. Но формула, выражающая противоречие, не является истинной формулой.

3.3. Из замечаний, сделанных в 3.25, легко понять, в каком направлении можно расширять систему а р и ф м е т и ч е с к и х а к с и о м так, чтобы из них не было выводимо противоречие: мы можем допускать такие аксиомы, в которых знаки всеобщности стоят лишь в начале и имеют областью действия всю остальную часть формулы, а также такие, которые не содержат знака существования и для которых содержательно истинен каждый численный частный случай. (Мы можем также допускать в качестве аксиом и некоторые формулы, содержащие знак существования, а именно такие, которые ведут себя при доказательстве непротиворечивости аналогично двум описанным выше видам формул.)

Например, можно допустить следующие аксиомы сложения:

$\forall x \forall y (x\,\text{Vg}\,y \supset [x+1=y])$,

$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v ((x\,\text{Vg}\,y \& [z+x=u] \& [z+y=v]) \supset u\,\text{Vg}\,v)$,

$\forall x \forall y \forall z \forall u (([x+y=z] \& [x+y=u]) \supset z=u)$,

$\forall x \forall y \forall z ([x+y=z] \supset [y+x=z])$ и другие.

3.4. Так как полная индукция широко применяется в теории чисел, то арифметика без полной индукции имеет, конечно, лишь очень небольшое практическое значение. Однако для арифметики с полной индукцией до сих пор нет безупречного доказательства непротиворечивости *).

*) В настоящем сборнике помещены переводы более поздних работ Генцена, посвященных доказательству непротиворечивости арифметики с аксиомой полной индукции. Может ли математик считать это доказательство «безупречным», зависит от того, признает ли он трансфинитную индукцию до ε_0 «безупречным» методом доказательства математических суждений. — *Прим. перев.*

РАЗДЕЛ V

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОВЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ NJ, NK И LJ, LK НЕКОТОРЫМ ИСЧИСЛЕНИЯМ, КОТОРЫЕ МОЖНО ОТОЖДЕСТВИТЬ С ФОРМАЛИЗМОМ ГИЛЬБЕРТА

§ 1. Понятие эквивалентности

1.1. Мы вводим следующее понятие эквивалентности между формулами и секвенциями (оно согласуется с указаниями, сделанными в I, 1.1 и I, 2.4 относительно содержательного смысла знака $\curlywedge$ и секвенций):

равные формулы эквивалентны,

равные секвенции эквивалентны.

Две формулы эквивалентны, если одна может быть получена из другой в результате замены знака $\curlywedge$ всюду формулой $A \& \neg A$.

Секвенция $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ эквивалентна следующей формуле:

если все $\mathfrak{A}$ и все $\mathfrak{B}$ непусты, то

$$(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1)$$

(эта форма удобнее для доказательства эквивалентности, чем с $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$);

если все $\mathfrak{A}$ пусты, а $\mathfrak{B}$ непусты, то $\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1$;

если все $\mathfrak{B}$ пусты, а $\mathfrak{A}$ непусты, то $(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset (A \& \neg A)$;

если все $\mathfrak{A}$ и все $\mathfrak{B}$ пусты, то $A \& \neg A$.

Эквивалентность транзитивна.

1.2. (Разумеется, понятие эквивалентности можно было бы существенно расширить. Например, обычно считают две формулы эквивалентными, если одна из них выводима из другой и обратно. Мы ограничимся введенным определением, достаточным для нашего доказательства эквивалентности.)

Два вывода мы будем называть эквивалентными, если конечная формула или конечная секвенция одного эквивалентна таковой второго.

Два исчисления мы будем называть эквивалентными, если любой вывод в одном из них можно преобразовать в эквивалентный ему вывод в другом и обратно.

В § 2 этого раздела мы опишем некоторое исчисление, которое можно отождествить с гильбертовским формализмом (LHJ для интуиционистской, LHK для классической логики предикатов). В остальных параграфах этого раздела мы докажем эквивалентность исчислений LHJ, NJ и LJ (§ 3—5), а также исчислений LHK, NK и LK (§ 6) в определенном выше смысле. А именно, мы последовательно докажем следующее.

Каждый LHJ-вывод можно преобразовать в некоторый эквивалентный ему NJ-вывод (§ 3), каждый NJ-вывод можно преобразовать в некоторый эквивалентный ему LJ-вывод (§ 4) и каждый LJ-вывод можно преобразовать в некоторый эквивалентный ему LHJ-вывод (§ 5); отсюда, очевидно, следует эквивалентность всех трех исчислений; совершенно так же мы затем поступим с тремя классическими исчислениями в § 6 (6.1—6.3).

§ 2. Описание логистического исчисления Гильберта [1]) и Гливенко [2])

Сначала мы определим интуиционистскую форму исчисления: LHJ-вывод состоит из формул, расположенных в виде дерева, исходными формулами которого являются основные формулы.

Основные формулы и фигуры заключения строятся по следующим схемам путем таких же замещений, как в II, 2.21, а именно: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ замещаются произвольными формулами; $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ (соответственно $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$) — произвольной формулой, внешним знаком которой является $\forall$ (соответственно $\exists$), причем $\mathfrak{x}$ обозначает следующую за ним связанную предметную переменную; $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ замещается формулой, которая получается из $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ в результате замены связанной предметной переменной $\mathfrak{x}$ всюду, где она входит, на свободную предметную переменную $\mathfrak{a}$.

Схемы основных формул:

2.11. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$;

2.12. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$;

2.13. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$;

2.14. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$;

2.15. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$;

2.21. $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$;

2.22. $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$;

2.23. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C})))$;

2.31. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;

[1]) D. Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik, Abh. a. d. math., Sem. d. Hamburg. Univ. **6** (1928), стр. 65—85.

[2]) V. Glivenko, Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer, Acad. royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, 5-e série, t. XV (1929), стр.183—188.

2.32. $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$;

2.33. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}))$;

2.41. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg\mathfrak{B}) \supset \neg\mathfrak{A})$;

2.42. $(\neg\mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$;

2.51. $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}$;

2.52. $\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

(Некоторые из этих схем излишни, но их независимость для нас здесь неважна.)

Схемы фигур заключения:

$$\frac{\mathfrak{A}\quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\qquad \frac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}\supset\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\qquad \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}\supset\mathfrak{A}}{(\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x})\supset\mathfrak{A}}.$$

Ограничение на переменные: в фигурах заключения, получающихся по последним двум схемам, предметная переменная, обозначенная посредством $\mathfrak{a}$, не должна входить в нижнюю формулу (т. е. ни в $\mathfrak{A}$, ни в $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

(Исчисление LHJ, по существу, эквивалентно исчислению Гейтинга [1]).)

Исчисление LHK (классическая логика предикатов) получается в результате присоединения к исчислению LHJ схемы основных формул $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$.

(Оно, по существу, эквивалентно исчислению, описанному в Г. — А., стр. 96.)

§ 3. Преобразование LHJ-вывода в эквивалентный ему NJ-вывод

Из LHJ-вывода (V, 2) мы получаем NJ-вывод (II, 2) с той же конечной формулой в результате следующего преобразования LHJ-вывода (при этом все H-формулы этого вывода становятся H-формулами NJ-вывода, причем они не будут зависеть ни от каких допущений. Кроме них, в строящийся NJ-вывод будут входить некоторые другие H-формулы, зависящие от тех или иных допущений).

3.1. Все LHJ-основные формулы заменяются теперь выводами этих формул, построенными по следующим схемам:

(2.11)
$$\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}}\,\mathrm{FE1};$$

(2.12)
$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}}\,\mathrm{FE}}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})}\,\mathrm{FE}\,1;$$

[1]) См. сноску [3]) на стр. 9.

(2.13)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{2}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,\mathrm{FE}\,1}{(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}))\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}\,\mathrm{FE}\,2;$$

(2.14)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\mathfrak{B}}\quad\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{3}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{C}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}\,\mathrm{FE}\,1}{\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})}\,\mathrm{FE}\,2}{(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}))\supset(\mathfrak{B}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}))}\,\mathrm{FE}\,3;$$

(2.15)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{3}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{FB}\quad\overset{2}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}\,\mathrm{FE}\,1}{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})}\,\mathrm{FE}\,2}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}))}\,\mathrm{FE}\,3;$$

(2.21)
$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}}\,\mathrm{UB}}{(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A}}\,\mathrm{FE}\,1.$$

Совершенно аналогично 2.21 выводятся 2.22, 2.31, 2.32, 2.51 и 2.52.

(2.23)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{3}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{FB}\quad\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{2}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}}\,\mathrm{UE}}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})}\,\mathrm{FE}\,1}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}))}\,\mathrm{FE}\,2}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})))}\,\mathrm{FE}\,3;$$

(2.33)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\quad\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{4}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}\,\mathrm{FB}\quad\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{B}}\quad\overset{3}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}\,\mathrm{FB}}{\mathfrak{C}}\,\mathrm{OB}\,1}{(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}}\,\mathrm{FE}\,2}{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C})}\,\mathrm{FE}\,3}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset((\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}))}\,\mathrm{FE}\,4;$$

(2.41)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{3}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{FB}\quad\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad\overset{2}{\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B}}}{\neg\mathfrak{B}}\,\mathrm{FB}}{\curlywedge}\,\mathrm{NB}}{\neg\mathfrak{A}}\,\mathrm{NE}\,1}{(\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B})\supset\neg\mathfrak{A}}\,\mathrm{FE}\,2}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B})\supset\neg\mathfrak{A})}\,\mathrm{FE}\,3;$$

(2.42)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \overset{2}{\neg\mathfrak{A}}}{\curlywedge}\,\text{NB}}{\mathfrak{B}}\,\text{FE 1}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\,\text{FE 2.}}{(\neg\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}$$

3.2. Все LHJ-фигуры заключения заменяются теперь частями NJ-вывода, построенными по следующим схемам:

$$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$ остается без изменения, так как она есть уже FB;

$$\dfrac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}\supset\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}} \quad \text{заменяется на} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}\,\text{FB}}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,\text{AE}}{\mathfrak{A}\supset\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,\text{FE 1;}$$

$$\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}\supset\mathfrak{A}}{(\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x})\supset\mathfrak{A}} \quad \text{заменяется на} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}} \quad \dfrac{\overset{2}{\mathfrak{F}\mathfrak{a}} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{a}\supset\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\,\text{FB}}{\mathfrak{A}}\,\text{EB 2}}{(\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x})\supset\mathfrak{A}}\,\text{FE 1.}$$

Как легко увидеть, ограничение на переменные в фигурах заключения AE и EB выполнено вследствие существующего для LHJ-фигур заключения ограничения на переменные.

На этом преобразование LHJ-вывода в эквивалентный ему NJ-вывод заканчивается.

§ 4. Преобразование NJ-вывода в эквивалентный ему LJ-вывод

4.1. Это преобразование производится так: сначала каждая Н-формула NJ-вывода заменяется на секвенцию следующего вида (ср. III, 1.1): в сукценденте ее стоит только сама заменяемая формула, а в антецеденте стоят все допущения, от которых эта формула зависит, причем эти допущения располагаются слева направо в той последовательности, в которой они входят в NJ-вывод. (Пожалуй, не требует особых пояснений, как исходные формулы древовидной фигуры можно понимать расположенными слева направо.)

После этого мы заменяем знак $\curlywedge$ всюду, где он входит, формулой $A\,\&\,\neg A$. (Формулу, полученную при этом из формулы $\mathfrak{A}$, мы обозначим посредством $\mathfrak{A}^*$.)

4.2. Таким образом, мы уже получили систему секвенций, расположенных в виде дерева. Конечная секвенция имеет пустой антецедент (II, 2.2) и, очевидно, эквивалентна конечной формуле NJ-вывода. Исходные секвенции все имеют вид $\mathfrak{D}^*\to\mathfrak{D}^*$ (II, 2.2) *), т. е. уже являются основными секвенциями LJ-вывода.

Фигуры, полученные из NJ-фигур заключения, преобразуются в части LJ-вывода по следующим схемам:

4.21. Фигуры заключения OE, AE, EE при замещении уже превратились в LJ-фигуры заключения. (В случае AE LJ-ограничение на переменные выполняется в силу выполнения NJ-ограничения на переменные в исходном NJ-выводе.)

4.22. Фигура заключения UE приняла вид

$$\dfrac{\Gamma\to\mathfrak{A}^* \quad \Delta\to\mathfrak{B}^*}{\Gamma,\Delta\to\mathfrak{A}^*\,\&\,\mathfrak{B}^*}.$$

Ее перестраивают так:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\mathfrak{A}^*}{\Gamma,\Delta\to\mathfrak{A}^*}\ \text{возможно, несколько перестановок и утончений,} \qquad \dfrac{\Delta\to\mathfrak{B}^*}{\Gamma,\Delta\to\mathfrak{B}^*}\ \text{возможно, несколько утончений,}}{\Gamma,\Delta\to\mathfrak{A}^*\,\&\,\mathfrak{B}^*}\,\text{UES.}$$

4.23. Фигура заключения FE приняла вид

$$\dfrac{\Gamma_1,\mathfrak{A}^*,\Gamma_2,\ldots,\mathfrak{A}^*,\Gamma_\rho\to\mathfrak{B}^*}{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_\rho\to\mathfrak{A}^*\supset\mathfrak{B}^*}.$$

Ее перестраивают так:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1,\mathfrak{A}^*,\Gamma_2,\ldots,\mathfrak{A}^*,\Gamma_\rho\to\mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^*,\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_\rho\to\mathfrak{B}^*}}{\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_\rho\to\mathfrak{A}^*\supset\mathfrak{B}^*}\,\text{FES.}$$ возможно, несколько перестановок, сокращений, а если потребуется, утончений.

4.24. С фигурой заключения NE поступают так же, после чего надо рассмотреть фигуру $\dfrac{\mathfrak{A}^*,\Gamma\to A\,\&\,\neg A}{\Gamma\to\neg\mathfrak{A}^*}$.

Секвенцию $A\,\&\,\neg A\to$ выводим в исчислении LJ следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{\neg A, A\to}\,\text{NEA}}{A\,\&\,\neg A, A\to}\,\text{UEA}}{A, A\,\&\,\neg A\to}\,\text{перестановка,}}{A\,\&\,\neg A, A\,\&\,\neg A\to}\,\text{UEA}}{A\,\&\,\neg A\to}\,\text{сокращение.}$$

*) В NJ-выводе каждое допущение (исходная формула) $\mathfrak{D}$ зависит (согласно определению II, 2.2) от самого себя и не зависит ни от каких других допущений. Поэтому в результате первого шага описанного преобразования NJ-вывода допущение $\mathfrak{D}$ переходит в секвенцию $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$. В результате второго шага получается секвенция $\mathfrak{D}^*\to\mathfrak{D}^*$. — *Прим. перев.*

Присоединяя эту секвенцию, перестраиваем рассматриваемую фигуру следующим образом *):

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad A \,\&\, \neg A \to}{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\ \text{сечение}}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}^*}\ \text{NES.}$$

4.25. NJ-фигура заключения $\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$ примет после замещений (4.1) следующий вид:

$$\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}.$$

Делаем следующее ее преобразование:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad A \,\&\, \neg A \to}{\Gamma \to}\ \text{сечение.}}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}\ \text{утончение.}$$

При этом над секвенцией $A \,\&\, \neg A \to$ пишется ее вывод, приведенный в 4.24.

4.26. Фигура заключения АВ принимает вид

$$\dfrac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}^* \mathfrak{x}}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}.$$

Преобразуем ее так:

$$\dfrac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}^* \mathfrak{a} \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}{\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}\ \text{AEA}}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}\ \text{сечение.}$$

4.27. С фигурой заключения UB поступаем совершенно так же.

4.28. Фигура заключения FB принимает вид

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}.$$

Преобразуем ее так:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^* \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\ \text{NEA}}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\ \text{сечение}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}\ \text{возможно, несколько перестановок.}$$

4.29. Фигура заключения NB принимает вид

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \neg \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \to A \,\&\, \neg A}.$$

*) Над секвенцией $A \,\&\, \neg A \to$ пишется ее вывод, приведенный в 4.24.— *Прим. перев.*

Преобразуем ее так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \to \neg \mathfrak{A}^* \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^*}{\neg \mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\ \text{NEA}}{\Delta, \Gamma \to}\ \text{сечение,}}{\Gamma, \Delta \to}\ \text{возможно, несколько перестановок,}}{\Gamma, \Delta \to A \,\&\, \neg A}\ \text{утончение.}$$

4.210. Фигура заключения OB: сначала применяем, как это делалось для FE и NE, к обеим правым верхним секвенциям перестановки, сокращения и утончения (если это необходимо) таким образом, чтобы в результате получить секвенции, в которых формулы, обозначенные посредством $\mathfrak{A}^*$ и соответственно $\mathfrak{B}^*$, стоят в начале антецедента (в то время как из остальной части антецедента упомянутые только что допущения удалены). После этого следует

$$\dfrac{\Xi \to \mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^* \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{A}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\left\{\begin{array}{c}\text{возможно, несколько}\\ \text{утончений и пере-}\\ \text{становок,}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\mathfrak{B}^*, \Delta \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\left\{\begin{array}{c}\text{возможно, несколько}\\ \text{утончений и пере-}\\ \text{становок.}\end{array}\right.}{\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\ \text{OEA}}{\Xi, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\ \text{сечение.}$$

4.211. С фигурой заключения ЕВ поступаем совершенно аналогично; сначала формула $\mathfrak{F}^* \mathfrak{a}$ в правой верхней секвенции перемещается в начало антецедента (как в 4.23), а затем следует:

$$\dfrac{\Delta \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}^* \mathfrak{a}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}^* \mathfrak{x}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\ \text{EEA}}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\ \text{сечение.}$$

LJ-ограничение на переменные для фигуры заключения EEA выполнены ввиду выполнения NJ-ограничений на переменные.

Этим преобразование NJ-вывода в эквивалентный ему LJ-вывод завершено.

§ 5. Преобразование LJ-вывода в эквивалентный ему LHJ-вывод

Это преобразование проделать немного труднее, чем оба предыдущие. Мы проведем его последовательно в несколько шагов.

Предварительное замечание: в исчислении LJ нет сокращений и перестановок в сукцеденте, так как эти фигуры заключения имеют в сукцеденте не менее двух S-формул.

5.1. Прежде всего мы введем вместо фигур заключения UEA, OES, AEA, EES, NEA и FEA новые основные секвенции, которые строятся по следующим схемам (правила замещения те же, что в III, 1.2; это же имеет место всюду в дальнейшем; впрочем, мы будем употреблять для обозначения формул, кроме букв $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$, также буквы $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{J}$):

$$\mathfrak{Gf}1\colon\ \mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\qquad \mathfrak{Gf}2\colon\ \mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{Gf}3\colon\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\qquad \mathfrak{Gf}4\colon\ \mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{Gf}5\colon\ \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}\to\mathfrak{F}\mathfrak{a}\qquad \mathfrak{Gf}6\colon\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}\to\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{Gf}7\colon\ \neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\to\qquad \mathfrak{Gf}8\colon\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}.$$

Мы преобразуем соответствующие фигуры заключения в рассматриваемом LJ-выводе следующим образом:

UEA преобразуется в

$$\dfrac{\overset{\mathfrak{Gf}1}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}}\qquad \mathfrak{A},\ \Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B},\ \Gamma\to\Theta}\ \text{сечение.}$$

Соответственно мы преобразуем и другую форму UEA и каждую AEA.

Симметрично этому мы поступаем с OES или EES.

NEA преобразуется в

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\mathfrak{A}\qquad \dfrac{\overset{\mathfrak{Gf}7}{\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\to}}{\mathfrak{A},\ \neg\mathfrak{A}\to}\ \text{перестановка,}}{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A}\to}\ \text{сечение,}}{\neg\mathfrak{A},\ \Gamma\to}\ \text{возможно, несколько перестановок.}$$

(В схеме NEA Θ должна быть пустой (III, 1.22) вследствие LJ-ограничений на сукцеденты секвенций. То же имеет место для FEA.)

FEA преобразуется в

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\mathfrak{A}\qquad \dfrac{\overset{\mathfrak{Gf}8}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}\ \text{перестановка,}}{\Gamma,\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}\ \text{сечение,}\qquad \mathfrak{B},\ \Delta\to\Lambda}{\Gamma,\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\ \Delta\to\Lambda}\ \text{сечение,}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta\to\Lambda}\ \text{возможно, несколько перестановок.}$$

5.2. Теперь всем H-секвенциям, имеющим пустой сукцедент, мы напишем в сукцедент формулу $A\,\&\,\neg A$.

При этом остаются неизменными основные секвенции видов: $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$, $\mathfrak{Gf}1$ — $\mathfrak{Gf}6$ и $\mathfrak{Gf}8$, а также фигуры заключения UES, AES, FES. Остальные основные секвенции и фигуры заключения переходят в основные секвенции и фигуры заключения по

следующим схемам:

$$\mathfrak{Gf}9\colon\ \neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{H}$$

$$\mathfrak{Sf}1\colon\ \dfrac{\Gamma\to\mathfrak{H}}{\mathfrak{D},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}\qquad \mathfrak{Sf}2\colon\ \dfrac{\mathfrak{D},\ \mathfrak{D},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}{\mathfrak{D},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}\qquad \mathfrak{Sf}3\colon\ \dfrac{\Delta,\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}{\Delta,\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{D},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}4\colon\ \dfrac{\Gamma\to A\,\&\,\neg A}{\Gamma\to\mathfrak{D}}\qquad \mathfrak{Sf}5\colon\ \dfrac{\Gamma\to\mathfrak{D}\quad \mathfrak{D},\ \Delta\to\mathfrak{H}}{\Gamma,\ \Delta\to\mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}6\colon\ \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma\to\mathfrak{H}\quad \mathfrak{B},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}\qquad \mathfrak{Gf}7\colon\ \dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x},\ \Gamma\to\mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}8\colon\ \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma\to A\,\&\,\neg A}{\Gamma\to\neg\mathfrak{A}}$$

(для $\mathfrak{Sf}7$ существует ограничение на переменные: свободная предметная переменная, обозначенная посредством $\mathfrak{a}$, не должна входить в нижнюю секвенцию).

5.3. Далее фигуру заключения $\mathfrak{Sf}4$ можно заменить другими следующим образом (такая возможность, по существу, обусловлена общим содержанием схемы $\mathfrak{Gf}9$):

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to A\,\&\,\neg A\qquad \overset{\mathfrak{Gf}1}{A\,\&\,\neg A\to A}}{\Gamma\to A}\ \mathfrak{Sf}5\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to A\,\&\,\neg A\qquad \overset{\mathfrak{Gf}2}{A\,\&\,\neg A\to\neg A}}{\Gamma\to\neg A}\ \mathfrak{Sf}5\qquad \overset{\mathfrak{Gf}9}{\neg A,\ A\to\mathfrak{D}}}{\Gamma,\ A\to\mathfrak{D}}\ \mathfrak{Sf}5}{A,\ \Gamma\to\mathfrak{D}}\ \text{возможно, несколько}\ \mathfrak{Sf}3}{\dfrac{\Gamma,\ \Gamma\to\mathfrak{D}}{\Gamma\to\mathfrak{D}}\ \text{возможно, несколько}\ \mathfrak{Sf}2\ \text{и}\ \mathfrak{Sf}3.}\ \mathfrak{Sf}5$$

Подобным же образом мы заменяем фигуру заключения $\mathfrak{Sf}8$ (всюду, где она входит в вывод), но на этот раз применяется новая фигура заключения, построенная по схеме

$$\mathfrak{Sf}9\colon\ \dfrac{\Gamma,\ \mathfrak{A}\to A\qquad \Gamma,\ \mathfrak{A}\to\neg A}{\Gamma\to\neg\mathfrak{A}}.$$

Замена производится следующим образом: на место $\mathfrak{Sf}8$ ставится

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma\to A\,\&\,\neg A\qquad \overset{\mathfrak{Gf}1}{A\,\&\,\neg A\to A}}{\mathfrak{A},\ \Gamma\to A}\ \mathfrak{Sf}5}{\Gamma,\ \mathfrak{A}\to A}\ \text{возможно, несколько}\ \mathfrak{Sf}3\qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma\to A\,\&\,\neg A\qquad \overset{\mathfrak{Gf}2}{A\,\&\,\neg A\to\neg A}}{\mathfrak{A},\ \Gamma\to\neg A}\ \mathfrak{Sf}5}{\Gamma,\ \mathfrak{A}\to\neg A}\ \text{возможно, несколько}\ \mathfrak{Sf}3}{\Gamma\to\neg\mathfrak{A}}\ \mathfrak{Sf}9.$$

5.4. Введем теперь еще две новые схемы фигур заключения, именно:

$$\mathfrak{Sf}10\colon\ \dfrac{\Gamma,\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\Gamma\to\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}\ \text{и ее обращение,}\ \mathfrak{Sf}11\colon\ \dfrac{\Gamma\to\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\Gamma,\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}.$$

Мы вводим фигуры заключения этих двух видов для того, чтобы с их помощью заменить в выводе ряд других фигур заключения их частными случаями (в 5.42 и 5.43).

5.41. Прежде всего фигуру заключения FES можно удалить из вывода с помощью $\mathfrak{Sf}10$, преобразовав ее следующим образом:

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma,\ \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}\ \text{возможно, несколько } \mathfrak{Sf}3}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\ \mathfrak{Sf}10.$$

5.42. После этого преобразуем следующим образом фигуры заключения $\mathfrak{Sf}1$, $\mathfrak{Sf}2$, $\mathfrak{Sf}3$, $\mathfrak{Sf}5$, $\mathfrak{Sf}6$ и $\mathfrak{Sf}7$.

В качестве примера мы возьмем $\mathfrak{Sf}2$, которое мы преобразуем в следующую фигуру (считая, что Γ имеет вид $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\rho$):

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{D},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\rho \rightarrow \mathfrak{H} & \\
\hline
\mathfrak{D},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{\rho-1} \rightarrow \mathfrak{J}_\rho \supset \mathfrak{H} & \mathfrak{Sf}10, \\
\hline\hline
\mathfrak{D},\ \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J}_1 \supset (\mathfrak{J}_2 \supset \ldots (\mathfrak{J}_\rho \supset \mathfrak{H})) & \text{несколько раз } \mathfrak{Sf}10, \\
\hline
\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J}_1 \supset (\mathfrak{J}_2 \supset \ldots (\mathfrak{J}_\rho \supset \mathfrak{H})) & \mathfrak{Sf}13, \\
\hline\hline
\mathfrak{D},\ \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\rho \rightarrow \mathfrak{H} & \text{несколько раз } \mathfrak{Sf}11.
\end{array}$$

Совершенно аналогично мы поступаем с каждой из остальных перечисленных фигур заключения; в результате, используя $\mathfrak{Sf}10$ и $\mathfrak{Sf}11$, мы заменяем их фигурами заключения, построенными по следующим схемам:

$$\mathfrak{Sf}12\colon \frac{\rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}13\colon \frac{\mathfrak{D},\ \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}14\colon \frac{\Delta,\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}}{\Delta,\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}$$

$$\mathfrak{Sf}15\colon \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}16\colon \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}17\colon \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{C}}{\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{C}}$$

(для $\mathfrak{Sf}17$ имеется ограничение на переменные: свободная предметная переменная, обозначенная посредством $\mathfrak{a}$, не должна входить в нижнюю секвенцию).

5.43. Сходным образом заменяем мы далее фигуры заключения $\mathfrak{Sf}9$, $\mathfrak{Sf}13$ и $\mathfrak{Sf}15$ следующими (используя $\mathfrak{Sf}10$ и $\mathfrak{Sf}11$):

$$\mathfrak{Sf}18\colon \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset A \quad \Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \neg A}{\Gamma \rightarrow \neg \mathfrak{A}}$$

$$\mathfrak{Sf}19\colon \frac{\rightarrow \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}{\rightarrow \mathfrak{D} \supset \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}20\colon \frac{\Delta \rightarrow \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{E} \supset \mathfrak{C})}{\Delta \rightarrow \mathfrak{E} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}.$$

Таким же образом можно заменить основные секвенции $\mathfrak{Gf}8$ и $\mathfrak{Gf}9$ на $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$; эта форма подпадает под схему $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$; а также $\mathfrak{Gf}10$ на: $\neg \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{H}$.

5.5. После этого делаем последний шаг:

Заменяем каждую Н-секвенцию $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$ формулой $(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$. (Если все $\mathfrak{A}$ пусты, то этой формулой будет просто $\mathfrak{B}$. Сукцедент не может быть пустым согласно 5.2.)

В результате все основные секвенции (а именно, $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, $\mathfrak{Gf}1$ — $\mathfrak{Gf}6$, $\mathfrak{Gf}10$) становятся основными секвенциями исчисления LHJ.

Из фигур заключения фигуры AES и $\mathfrak{Sf}17$ также становятся фигурами заключения исчисления LHJ. (Для первой из них исключение составляет тот случай, когда Γ пуст. В этом случае мы сначала выводим (в исчислении LHJ) формулу $(A \supset A) \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ из $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ с помощью 2.12, а затем применяем фигуры заключения LHJ и получаем в конце концов с помощью 2.11 формулу $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.)

Фигуры, получившиеся в результате замены из остальных фигур заключения, преобразуются в части LHJ-вывода следующим образом.

UES превращается (если Γ не пуст) в

$$\frac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \quad \mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}.$$

Из этого мы строим

$$\cfrac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B} \qquad \cfrac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \quad \overset{(2.23)}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset ((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})))}}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}))}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})}.$$

Если Γ пусто, то мы поступаем так же, как выше поступили с AES.

С фигурами, полученными в результате замены из $\mathfrak{Sf}12$, 15, 16 и 19, можно поступить совершенно аналогично, используя основные формулы, построенные по схемам 2.12, 2.15, 2.33 и 2.13.

Сходным образом поступают с $\mathfrak{Sf}18$ и $\mathfrak{Sf}20$ с помощью 2.41 и 2.14 и с присоединением 2.15, 2.14 и 2.13.

Остается еще рассмотреть фигуры, полученные из $\mathfrak{Sf}10$ и $\mathfrak{Sf}11$. Оба случая тривиальны при пустом Γ, поэтому в дальнейшем будем считать, что Γ не пуст, и преобразуем эти фигуры в части LHJ-вывода следующим образом:

($\mathfrak{Sf}10$). Из $(\mathfrak{C} \& \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ нам надо вывести $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$. Прежде всего с помощью 2.23 и 2.11 имеем $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{C} \& \mathfrak{A}))$. Отсюда, используя $(\mathfrak{C} \& \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$, 2.15 и 2.14, получаем $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$. Из последней формулы и 2.12 и 2.15 получаем $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$ и, наконец, применив 2.14, имеем $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

($\mathfrak{Sf}11$). Из $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ мы выводим в исчислении LHJ формулу $(\mathfrak{C} \& \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ следующим образом: 2.21 и 2.22 дают $(\mathfrak{C} \& \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{C}$

и $(\mathfrak{C}\,\&\,\mathfrak{A})\supset\mathfrak{A}$, откуда вместе с $\mathfrak{C}\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ мы получаем (с помощью 2.15, 2.14, 2.15, 2.13) формулу $(\mathfrak{C}\,\&\,\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B}$.

На этом преобразование LJ-вывода в LHJ-вывод заканчивается. Эти выводы эквивалентны, так как конечная секвенция LJ-вывода подверглась лишь преобразованиям 5.2 и 5.5, в результате которых, очевидно, была получена эквивалентная ей (в соответствии с определением 1.1) формула.

Объединяя результаты §§ 3—5, можно заключить, что все три исчисления — LHJ, NJ и LJ — эквивалентны.

§ 6. Эквивалентность исчислений LHK, NK и LK

После того как доказана эквивалентность рассматриваемых интуиционистских исчислений, можно довольно легко провести такое доказательство для соответствующих классических исчислений.

6.1. Чтобы преобразовать данный LHK-вывод в эквивалентный ему NK-вывод, поступают точно так же, как в § 3. Входящие в него основные формулы, построенные по схеме $\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$, не изменяются и являются основными формулами NK-вывода.

6.2. Для того чтобы преобразовать данный NK-вывод в эквивалентный ему LK-вывод, сначала поступают так же, как в § 4. Входящие в NK-вывод основные формулы, построенные по схеме $\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$, превращаются при этом в секвенции вида $\rightarrow\mathfrak{A}^*\vee\neg\mathfrak{A}^*$. Последние заменяются их LK-выводами (в соответствии с III, 1.4). Этим преобразование NK-вывода в эквивалентный ему LK-вывод заканчивается.

6.3. Преобразование LK-вывода в LHK-вывод. Мы введем некоторое вспомогательное исчисление, отличающееся от исчисления LK следующим.

Фигуры заключения можно строить по схемам III, 1.21, 1.22, но со следующими ограничениями: сокращения и перестановки в сукцеденте вообще не допускаются; в остальных схемах знаки Θ и Λ не должны замещаться, т. е. эти места остаются пустыми.

Наконец, вводятся следующие две схемы фигур заключения (порядок замещения символов тот же, что выше в III, 1.2):

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}1\colon\ \frac{\Gamma\rightarrow\mathfrak{A},\ \Theta}{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A}\rightarrow\Theta}\quad\text{и ее обращение}\quad \mathfrak{S}\mathfrak{f}2\colon\ \frac{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A}\rightarrow\Theta}{\Gamma\rightarrow\mathfrak{A},\ \Theta}.$$

(В этих схемах список Θ не обязательно должен быть пустым).

6.31. Преобразование LK-вывода в вывод в вспомогательном исчислении.

(Способ сходен с примененным в 5.4.)

Все фигуры заключения, кроме сокращений и перестановок в сукцеденте, преобразуются следующим образом: к верхним секвенциям каждой из этих фигур заключения применяется несколько раз $\mathfrak{S}\mathfrak{f}1$, пока все формулы из Θ (соответственно из Λ) не будут перенесены с отрицаниями в антецедент направо от Γ (соответственно от Δ). После этого применяется фигура заключения того же вида, что преобразованная, но уже принадлежащая вспомогательному исчислению. (Формулы, перенесенные в антецедент, фигурируют в качестве Γ и соответственно в качестве Δ.) После этого, применяя фигуру заключения $\mathfrak{S}\mathfrak{f}2$, мы переносим Θ и Λ обратно в сукцедент. (Для фигур заключения FEA и сечения, возможно, понадобится сделать предварительные перестановки в антецеденте, но они являются допустимыми во вспомогательном исчислении фигурами заключения.)

Остается рассмотреть сокращения (соответственно перестановки) в сукцеденте. Сначала, как и ранее, все формулы, стоящие в сукцеденте верхней секвенции каждой из этих фигур заключения, переносятся с отрицаниями в антецедент. После этого делаются перестановки, одно сокращение и снова перестановки (соответственно одна перестановка) в антецеденте. Затем отрицаемые формулы переносятся обратно в сукцедент (применением фигуры заключения $\mathfrak{S}\mathfrak{f}2$).

6.32. Преобразование вывода во вспомогательном исчислении в вывод в исчислении LJ с присоединенной схемой основных секвенций $\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$.

Сначала все H-секвенции изменяются следующим образом.

$$\text{Вместо } \mathfrak{A}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{A}_\mu\rightarrow\mathfrak{B}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{B}_\nu \text{ пишется } \mathfrak{A}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{A}_\mu\rightarrow\mathfrak{B}_\nu,\ \ldots,\ \mathfrak{B}_1.$$

Если сукцедент пуст, то он остается пустым.

В результате этого все основные секвенции и фигуры заключения вспомогательного исчисления, кроме фигур заключения $\mathfrak{S}\mathfrak{f}1$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{f}2$, уже переведены в основные секвенции и соответственно в фигуры заключения исчисления LJ. Действительно, все фигуры заключения построены по схемам III, 1.21, 1.22 с пустым Θ и Λ (за исключением схем сокращения и перестановки в сукцеденте). Следовательно, в сукцедентах может стоять не более одной формулы.

Мы должны еще преобразовать фигуры, полученные в результате описанного выше изменения из фигур заключения $\mathfrak{S}\mathfrak{f}1$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{f}2$.

6.321. Начнем с $\mathfrak{S}\mathfrak{f}1$: если список Θ пуст, то мы заменим данную фигуру заключения на одно NEA и несколько перестановок в антецеденте. Если Θ непуст, то обозначим посредством Θ^*

формулу, полученную в результате соединения знаками $\vee$ всех формул, входящих в Θ и расположенных в обратном порядке.

Тогда после изменения сукцедентов фигура заключения принимает вид

$$\frac{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}.$$

Она преобразуется в часть LJ-вывода следующего вида:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Theta^* \to \Theta^*}{\neg\mathfrak{A},\ \Theta^* \to \Theta^*}\ \text{утончение,}}{\Theta^*,\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}\ \text{перестановка,} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to}\ \text{NEA}}{\mathfrak{A},\ \neg\mathfrak{A} \to}\ \text{перестановка,}}{\mathfrak{A},\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}\ \text{утончение,}}{\Theta^* \vee \mathfrak{A},\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}\ \text{OEA}}{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}\ \text{сечение.}$$

6.322. Фигура заключения $\mathfrak{S}\mathfrak{f}2$ после изменения сукцедентов принимает вид

$$\frac{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}},$$

где Θ^* обозначает то же, что в предыдущем случае. Если Θ пусто, то и Θ^* пусто, а $\Theta^* \vee \mathfrak{A}$ обозначает $\mathfrak{A}$.

Мы преобразуем ее в часть вывода следующего вида:

$$\dfrac{\to \mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \mathfrak{A}} \left\{ \begin{array}{l}\text{возможно, несколько}\\ \text{утончений и переста-}\\ \text{новок,}\end{array}\right.}{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\ \text{OES} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma,\ \neg\mathfrak{A} \to \Theta^*}{\neg\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta^*} \left\{ \begin{array}{l}\text{возможно, несколь-}\\ \text{ко перестановок}\end{array}\right.}{\neg\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\ \text{OES}}{\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\ \text{OEA}}{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\ \text{сечение.}$$

Легко видеть, что и при пустом Θ все в порядке.

6.33. Полученный в результате LJ-вывод с входящими в него дополнительно основными секвенциями вида $\to \mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ можно, так же как в § 5, преобразовать в LHJ-вывод с входящими в него дополнительно основными формулами вида $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ (см. 5.5), т. е. в LHK-вывод. На этом преобразование LK-вывода в LHK-вывод заканчивается. Конечная секвенция при этом превратилась согласно 6.32, 5.2 и 5.5 в эквивалентную ей (по определению 1.1) формулу.

Из результатов 6.1, 6.2 и 6.3 следует **эквивалентность всех трех исчислений классической логики предикатов**: LHK, NK и LK.

ДОБАВЛЕНИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Для определения понятия NJ-вывода нам понадобится понятие NJ-псевдофигуры заключения, которое мы определим независимо от понятия NJ-вывода следующим образом.

Схемами NJ-*псевдофигур заключения* назовем результаты вычеркивания из схем NJ-фигур заключения, приведенных в 2.21, всех выражений, заключенных в квадратные скобки. Наименование схем сохраним без изменения. Если в какой-либо схеме NJ-псевдофигур заключения сделать замещения, описанные в начале 2.21, соблюдая при этом ту часть ограничения на переменные, приведенного в конце 2.21, в которой не упоминается о «допущениях», то получим NJ-псевдофигуру заключения по рассматриваемой схеме.

Определим теперь индуктивно следующее отношение: «...*есть* NJ-*вывод из списка допущений... с конечной формулой ..., зависящей от списка допущений...*».

1. Если $\mathfrak{F}$ — формула, то $\mathfrak{F}$ есть NJ-вывод из списка допущений $\mathfrak{F}$ с конечной формулой $\mathfrak{F}$, зависящей от списка допущений $\mathfrak{F}$.

2. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая формула и при каждом i $(i=1, 2, 3)$ H_i есть вывод из списка допущений Δ_i с конечной формулой $\mathfrak{F}_i$, зависящей от списка допущений Θ_i; тогда

а) пусть $\dfrac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{N}}$ есть UB, или OE, или AB, или EE, или $\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$, или AE, причем в последнем случае собственная переменная AE не входит в Θ_1; тогда $\dfrac{H_1}{\mathfrak{N}}$ есть NJ-вывод из списка допущений Δ_1 с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от списка допущений Θ_1;

б) пусть $\dfrac{\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2}{\mathfrak{N}}$ есть UE, или FB, или NB; тогда $\dfrac{H_1\ H_2}{\mathfrak{N}}$ есть NJ-вывод из списка допущений Δ_1, Δ_2 с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от списка допущений Θ_1, Θ_2;

в) пусть $\dfrac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{N}}$ есть FE; тогда найдется формула $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{N}$ запишется в виде $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}_1)$; обозначим посредством Θ_1^* список формул, получающийся из списка Θ_1 в результате удаления из него всех членов вида $\mathfrak{A}$; тогда $\dfrac{H_1}{\mathfrak{N}}$ есть NJ-вывод из списка допущений Δ_1 с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от списка допущений Θ_1^*;

г) пусть $\dfrac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{N}}$ есть NE; тогда $\mathfrak{F}_1$ есть $\curlywedge$ и найдется формула $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{N}$ запишется в виде $\neg\mathfrak{A}$; обозначим посредством Θ_1^* список формул, получающийся из списка Θ_1 в результате удаления из него всех членов вида $\mathfrak{A}$; тогда $\dfrac{H_1}{\mathfrak{N}}$ есть вывод из списка допущений Δ_1 с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от списка допущений Θ_1^*;

д) пусть $\dfrac{\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2\ \mathfrak{F}_3}{\mathfrak{N}}$ есть OB; тогда найдутся формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что $\mathfrak{F}_1$ запишется в виде $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$; обозначим посредством Θ_2^* (посредством Θ_3^*) список формул, получающийся из списка Θ_2 (соответственно из списка Θ_3) в результате удаления из него всех членов вида $\mathfrak{A}$ (соответственно вида $\mathfrak{B}$);

тогда $\frac{H_1\ H_2\ H_3}{\mathfrak{N}}$ есть NJ-вывод из списка допущений Δ_1, Δ_2, Δ_3 с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от списка допущений Θ_1, $\overset{*}{\Theta}_2$, $\overset{*}{\Theta}_3$;

е) пусть $\frac{\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2}{\mathfrak{N}}$ есть ЕВ; тогда найдутся формула $\mathfrak{F}$ и связанная предметная переменная $\mathfrak{x}$ такие, что $\mathfrak{F}_1$ запишется в виде $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$; обозначим посредством $\overset{*}{\Theta}_2$ список формул, получающийся из списка Θ_2 в результате удаления из него всех членов вида $\mathfrak{F}a$, где a — некоторая свободная предметная переменная, не входящая в формулы $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ и ни в одну из формул списка Θ_2, отличную от $\mathfrak{F}a$; тогда $\frac{H_1\ H_2}{\mathfrak{N}}$ есть вывод из списка допущений Δ_1, Δ_2 с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от списка допущений Θ_1, $\overset{*}{\Theta}_2$.

Каков бы ни был список формул Δ и формула $\mathfrak{N}$, NJ-вывод из списка допущений Δ с конечной формулой $\mathfrak{N}$, зависящей от пустого списка допущений, будем называть NJ-*выводом*.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ЧИСТОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ *)

Герхард Генцен

«*Чистой теорией чисел*» я называю теорию натуральных чисел без применения вспомогательных средств из анализа, таких, например, как иррациональные числа или бесконечные ряды.

Цель настоящей статьи — доказать *непротиворечивость* чистой теории чисел или, точнее говоря, свести утверждение о ее непротиворечивости к суждениям более общего рода.

В разделе I рассматривается вопрос о том, возможно ли вообще такое доказательство непротиворечивости и по каким причинам оно необходимо или по меньшей мере очень желательно.

Всю статью можно читать без особой предварительной подготовки.

РАЗДЕЛ I

СООБРАЖЕНИЯ О СМЫСЛЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

В § 1 я рассматриваю вопрос о том, почему доказательства непротиворечивости *необходимы*, в § 2 — почему они *возможны*[1]). Я хочу при этом коротко изложить хорошо известное многим читателям состояние вопроса, особенно с той точки зрения, которая является основной в дальнейших разделах.

§ 1. Антиномии теории множеств и их значение для математики в целом[2])

1.1. Математика считается самой надежной из всех наук. Кажется, что невозможно, чтобы она могла привести к противоречащим друг другу результатам. Этой вере в безусловную

*) G. Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. **112**, № 4 (1936), 493—565.

[1]) Подробное и весьма заслуживающее чтения изложение этих вопросов содержится в статье D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. **95** (1926), 161—190. (Русский перевод: Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, стр. 338—364.)

[2]) Ср. также H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. **10** (1921), 39—79; A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre (или соответствующие разделы в учебнике Френкеля по теории множеств). (Русский перевод первой из этих работ см. Вейль, О философии математики, Сб., Гостехиздат, 1934, раздел III.)

надежность математических доказательств нанесли тяжелый удар открытые около 1900 г. «*антиномии* (или «парадоксы») теории множеств». А именно, оказалось, что в этой граничной области математики возникают противоречия, причем в доказательствах, приводящих к этим противоречиям, не замечено однозначно определимых ошибок. Особенно поучительна «*антиномия Рассела*», на которой я ниже остановлюсь несколько подробнее.

1.2. Множество — это совокупность каких-либо объектов («элементов этого множества»). Допускается также «пустое множество», которое вообще не имеет элементов. Разделим теперь множества на множества первого рода — это такие множества, которые содержат *себя* в качестве элементов, и множества второго рода — такие, которые *не* содержат себя в качестве элементов.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}$, которое содержит в качестве элементов все множества второго рода. К какому роду принадлежит само это множество $\mathfrak{M}$ — к первому или ко второму? Оба возможные ответа оказываются нелепыми. Если бы это множество принадлежало к первому роду, т. е. содержало бы себя в качестве элемента, то это противоречило бы его определению, так как согласно определению все элементы множества $\mathfrak{M}$ — это множества второго рода. Предположим теперь, что множество $\mathfrak{M}$ принадлежит ко второму роду, т. е. что оно не содержит себя в качестве элемента. Так как оно по своему определению содержит в качестве элементов все множества второго рода, то в этом случае $\mathfrak{M}$ должно было бы содержать в качестве элемента также самого себя. Тем самым мы вторично пришли к противоречию.

1.3. Это — *антиномия Рассела*, которая показывает, что очевидное противоречие можно получить в результате совсем небольшого числа заключений (правда, довольно сложных).

Какое *значение* имеет этот факт для *математики в целом*?

Можно попытаться сначала вообще не относить приведенное рассуждение к *математике* на том основании, что понятие «множество каких-либо элементов» слишком неопределенно, чтобы его можно было считать *математическим* понятием.

Чтобы отклонить это возражение, мы можем ограничиться весьма специальными чисто *математическими* объектами, приняв следующее соглашение:

В качестве элементов «множества» допускаются: 1) произвольные натуральные числа (1, 2, 3, 4 и т. д.); 2) произвольные множества, состоящие из допустимых элементов.

Пример. Следующие три элемента образуют допустимое множество: 1) число 4; 2) множество всех натуральных чисел;

3) множество, состоящее из двух элементов: числа 3 и множества всех натуральных чисел.

Используя это чисто *математическое* понятие множества, мы можем, рассуждая, как и выше (1.2), получить *то же самое противоречие*.

1.4. Очевидно, что при возникновении антиномии не играет никакой роли то, что в качестве исходных объектов мы взяли именно *натуральные числа*. Поэтому мы не сможем, например, сказать, что тем самым обнаружилось противоречие в области *натуральных чисел*. Скорее мы должны считать ошибочными примененные *логические заключения*.

1.5. В первую очередь надо попытаться найти *конкретный дефект* в ходе мысли, приведшем к антиномии. Скажем, например, так. Множество $\mathfrak{M}$ было определено со ссылкой на совокупность *всех* множеств (они были затем разделены на множества первого и второго рода и $\mathfrak{M}$ образовано из множеств второго рода). После этого оно само было причислено к этой совокупности, ибо был поставлен вопрос о том, к какому роду оно принадлежит — к первому или ко второму? Этот метод, однако, содержит «*порочный круг*»: нельзя определять объект с помощью некоторой совокупности, а затем причислять его самого к этой совокупности, так что он в известной степени участвует в своем собственном определении.

Правильная точка зрения на множество $\mathfrak{M}$ скорее такова: Если дана *определенная совокупность* множеств, то их можно разделить на множества первого и второго рода. Но если теперь множества второго рода (или первого рода) объединяются в некоторое множество $\mathfrak{M}$, то это $\mathfrak{M}$ является чем-то *совершенно новым*, что не может быть снова причислено к этой совокупности.

1.6. Причиной того, что способы заключения, ведущие к антиномии, кажутся сначала правильными, является представление о том, что понятие «множество» есть нечто определенное «*само по себе*» *) (и потому совокупность всех множеств представляет собой некоторую заранее определенную, замкнутую совокупность). Приведенная выше критика противопоставляет этому представление о том, что множества можно образовать только «*конструктивно*», надстраивая их друг над другом.

1.7. Можно подумать, что мы до некоторой степени справились с антиномией, но тут появляется новая трудность.

Объявленный только что недопустимым способ рассуждения (порочный круг) применяется в совершенно аналогичной форме уже *в анализе* даже при обычных доказательствах таких совсем

*) В подлиннике «an sich». — *Прим. перев.*

простых теорем, как теорема: «произвольная функция, непрерывная на замкнутом интервале и принимающая различные знаки на его противоположных концах, имеет корень в этом интервале».

Для обоснования нашего утверждения существенны следующие рассуждения, применяемые в доказательстве этой теоремы.

Совокупность точек интервала делят на точки первого и второго рода. Точка причисляется к первому роду, если функция не меняет знака вправо от нее вплоть до конца интервала, и ко второму роду, если это не имеет места. Граничная точка, определяемая этим делением, и является корнем. Она сама принадлежит множеству точек интервала. Тем самым мы получили «порочный круг». Упомянутое вещественное число определяется со ссылкой на *совокупность* вещественных чисел (в некотором интервале), а затем само *причисляется* к этой *совокупности*.

Несмотря на это, способы рассуждения, применяемые в анализе, считаются *правильными*, и это обосновывается, например, следующим образом. Ведь упомянутое число не *создано вновь* с помощью данного определения. Скорее оно уже дано *само по себе* внутри совокупности вещественных чисел и только *выделено* из нее с помощью объяснения, ссылающегося, правда, на эту совокупность.

Однако то же самое можно сказать и относительно приведенной выше антиномии: множество $\mathfrak{M}$ *само по себе* уже дано заранее внутри (определенной в 1.2) совокупности всех множеств и как раз выделено из этой совокупности с помощью объяснения, данного в 1.2.

Разумеется, несмотря на это, имеются значительные *различия* между способами заключения, приведшими к антиномии, и способами, применяемыми при доказательствах из анализа. Спрашивается только, следует ли считать, что этого достаточно, чтобы полагать последние надежными, — ведь в конце концов до сих пор в анализе не возникло никаких противоречий, — или следует считать, что аналогия с антиномией достаточна для того, чтобы объявить недопустимым соответствующее заключение из анализа. Здесь мнения математиков, занимавшихся этими вопросами, *расходятся*.

1.8. Можно *оспаривать* и *другие* применяемые в математике способы заключения на основе определенных отдаленных аналогий с заключениями, встречающимися в антиномиях. Особенно далеко в этом направлении идут *интуиционисты* (Брауэр). Они выдвигают возражения даже против способов заключения, встречающихся в *теории чисел*, не только потому, что эти заключения могли бы привести к *противоречиям*, но и потому, что получаемые с их помощью теоремы не имеют никакого объективного смысла и, следовательно, не имеют ценности. Я вернусь к этому вопросу и рассмотрю его подробно (см. § 9—11 и 17.3).

«*Логицисты*» (Рассел) идут не столь далеко. Они проводят границу между дозволенными и недозволенными способами заключения, причем антиномии отпадают, так как при их получении применяется недозволенный порочный круг. Приведенные выше аналогичные способы заключения из анализа первоначально также были объявлены недозволенными («разветвленная теория типов»), но позднее были снова разрешены.

1.9. Итак, открывается следующая картина:

Противоречия (антиномии), появившиеся в теории множеств, граничной области математики, дали повод сомневаться в справедливости определенных способов заключения, применяемых также и в других областях математики. Различные попытки провести разграничение между дозволенными и недозволенными способами заключения привели к различным результатам.

Чтобы покончить с этим неудовлетворительным состоянием, Гильберт выдвинул следующую *программу*:

Непротиворечивость математики в том объеме, в каком она окажется непротиворечивой, должна быть *доказана* точным математическим способом. Это доказательство должно быть проведено с применением только таких способов заключения, которые не подвержены никаким возражениям («финитные» способы заключения).

В какой форме вообще мыслимо такое доказательство непротиворечивости, я разъясню подробнее в § 2.

В дальнейшем я проведу в настоящей работе такое доказательство непротиворечивости для *чистой теории чисел*. Уже она содержит такие способы заключения, которые при строгой критике дают повод к сомнению. Подробнее об этом будет сказано в разделе III. Я хочу указать уже здесь на одно обстоятельство: во всяком случае, те способы заключения, которые оказываются сомнительными, *редко встречаются* фактически в теоретико-числовых доказательствах (11.4); все же нельзя на основе *большой наглядности этих доказательств* считать доказательство непротиворечивости излишним.

§ 2. В какой форме возможны доказательства непротиворечивости?

2.1. Общие соображения о доказательстве непротиворечивости.

2.11. Непротиворечивость *геометрий* доказывают обычно с помощью сведéния к *арифметической* модели. Следовательно, при этом *предполагается* непротиворечивость *арифметики.* Аналогичным образом можно отобразить некоторые части арифметики на другие, например, теорию комплексных чисел на теорию вещественных чисел.

Остается, наконец, доказать непротиворечивость теории *натуральных* чисел (чистая теория чисел) и теории *вещественных* чисел (анализ), которая содержит первую как часть. Наконец, та же задача стоит относительно теории множеств в том объеме, в каком она непротиворечива.

2.12. Эта задача труднее, чем упомянутые сведéния с помощью отображений объектов одной теории на объекты некоторой другой теории, и *принципиально отлична* от них. Рассмотрим несколько ближе, как обстоит дело с натуральными числами. Их, очевидно, уже нельзя отобразить на какую-либо *более простую область объектов.* Но речь идет вовсе не о том, чтобы доказать непротиворечивость самой *числовой области*, т. е. установленных с помощью аксиом (например, с помощью «аксиом Пеано» для теории чисел) основных отношений между числами. Кажется немыслимым доказать непротиворечивость этих аксиом, не предполагая предварительно чего-либо равносильного им. Речь идет скорее о непротиворечивости *логического вывода* при его применении к натуральным числам (*исходя* из *аксиом* для этих чисел) в *доказательствах* теории чисел. Дело в том, что именно логический вывод привел при его наиболее далеко идущем применении к антиномии (1.4). Мы, разумеется, не причисляем к *теории чисел* такие сложные общие понятия, как понятие произвольного множества множеств (1.3). К чистой теории чисел принадлежат только *конечные* множества (натуральных чисел, например). Присоединяя *бесконечные* множества натуральных чисел, мы придем к вещественным числам и тем самым к анализу. Это — принципиальное *разграничение между чистой теорией чисел и анализом.* Расширяя понятие «множество» еще дальше, придем затем к *теории множеств.*

Как же можно *доказать непротиворечивость арифметики*?

2.2. «Теория доказательств».

2.21. Утверждение о том, что некоторая математическая теория *непротиворечива*, представляет собой высказывание о *доказательствах*, возможных в этой теории. Действительно, оно означает, что ни одно из этих доказательств не ведет к противоречию. Следовательно, если мы хотим доказать непротиворечивость, нам нужно сделать сами доказательства, возможные в теории, объектами новой «метатеории». Теория, объектами которой являются произвольные математические доказательства, называется «*теорией доказательств*» или «*метаматематикой*».

2.22. *Примером теоремы теории доказательств* является «*принцип двойственности*» в проективной геометрии.

Он утверждает примерно следующее: из теоремы о точках и прямых на плоскости снова получится справедливая теорема, если заменить слово «точка» словом «прямая» и слово «прямая» словом «точка». Например, из теоремы: «Для любых двух различных прямых имеется ровно одна точка, инцидентная обеим этим прямым (т. е. лежащая на них)» получается двойственная теорема: «Для любых двух различных точек имеется ровно одна прямая, инцидентная обеим этим точкам (т. е. проходящая через них)».

Принцип двойственности *обосновывается* следующим образом. Аксиомы проективной геометрии плоскости таковы, что двойственное преобразование аксиомы дает каждый раз снова аксиому. Если теперь какая-либо теорема выведена из этих аксиом, то можно заменить во всем доказательстве слово «точка» словом «прямая» и слово «прямая» словом «точка» и получить в результате *доказательство двойственной* теоремы.

Это обоснование, очевидно, следует отнести к *теории доказательств*: ведь оно имеет в качестве объекта «доказательство теоремы». (Этот пример показывает также, что теория доказательств может продвинуть и собственно математику.)

2.23. «Формализация» математических доказательств.

Объектами теории доказательств должны быть *доказательства*, проводимые в самой математике. Обычно эти доказательства выражены *словами языка.* Они имеют тот недостаток, что для *одного и того же* высказывания имеется много различных оборотов речи, возможен произвол в расстановке слов, а иногда и *двусмысленность.*

Поэтому для того, чтобы сделать возможным точное рассмотрение доказательств, рекомендуется сначала придать им единую, точно определенную форму. Это осуществляется с помощью «формализации» доказательств: слова языка заменяются определенными *знаками*, логические способы заключения — формальными правилами образования новых формально представленных высказываний из уже доказанных.

В разделе II я проведу такую *формализацию для чистой теории чисел.*

Пример принципа двойственности отчетливо показывает трудности, возникающие в теории доказательств без формализации. Разговорное выражение теоремы «для любых двух различных прямых имеется ровно одна точка, инцидентная обеим этим прямым» пришлось искусственно выбирать таким образом, чтобы после замены «точка» на «прямая» и обратно снова получилось осмысленное утверждение. И при доказательстве принципа двойственности все время имеется ощущение, что это доказательство не является действительно строгим. Чтобы сделать его таким, как раз и нужна была бы точная формализация высказываний и доказательств (в области проективной геометрии).

2.3. Способы заключения, используемые при доказательстве непротиворечивости; теорема Гёделя.

2.31. Как же нужно проводить доказательство непротиворечивости, например, для чистой теории чисел, с помощью теории доказательств?

Сначала нужно точно указать, что следует понимать под формализованным «теоретико-числовым доказательством». Затем следует показать, что среди всевозможных таких доказательств не может оказаться ни одного, ведущего к «противоречию». (Это — простое свойство «доказательств», непосредственно проверяемое для каждого данного «доказательства».)

Такое доказательство непротиворечивости снова было бы *математическим доказательством*, где применялись бы определенные способы заключения и образования понятий. Мы должны заранее предполагать их надежность (в частности, непротиворечивость). Поэтому *невозможно «абсолютное доказательство непротиворечивости»*. Доказательство непротиворечивости может только *сводить* правильность одних способов заключения к правильности других способов заключения.

Поэтому надо потребовать, чтобы в доказательстве непротиворечивости использовались только такие способы заключения, которые можно считать существенно более *надежными*, чем способы заключения теории, непротиворечивость которой доказывается.

2.32. Особенно большое значение для этого вопроса имеет следующая *теорема* теории доказательств, доказанная К. Гёделем [1]).

Невозможно доказать непротиворечивость формально заданной (отграниченной) теории, содержащей чистую теорию чисел (в том числе ее самóй), с помощью вспомогательных средств самóй рассматриваемой теории (при условии, что эта теория действительно непротиворечива).

Поэтому отсюда вытекает, что для доказательства непротиворечивости чистой теории чисел не удастся обойтись не только частью средств доказательства, применяемых в чистой теории

[1]) K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, Monatsh. f. Math. und Phys. **38** (1931), 173—198.

чисел, но даже и всеми этими средствами доказательства. Возможно ли тогда вообще действительное *сведéние*?

Но ведь вполне вероятно, что можно доказать непротиворечивость чистой теории чисел с помощью вспомогательных средств, которые, хотя и не принадлежат уже частично к чистой теории чисел, но могут, несмотря на это, считаться более надежными, чем сомнительные составные части самóй чистой теории чисел.

2.4. Ниже (разделы II—IV) я проведу доказательство непротиворечивости для чистой теории чисел. При этом действительно будут применяться вспомогательные средства, не принадлежащие чистой теории чисел (16.2). В литературе уже имеются [1]) различные доказательства непротиворечивости, доведенные, по существу, до одного пункта: в них исчерпывающе рассматривается чистая теория чисел без правила «полной индукции», которое, как известно, является очень важным и часто применяемым в теории чисел способом заключения. Осуществляемое в моем доказательстве присоединение полной индукции вызывает определенные трудности (16.2).

РАЗДЕЛ II

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЧИСТОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Как я разъяснил в 2.23, для рассмотрения какой-либо математической теории в рамках теории доказательств нужно придать этой математической теории точный формально установленный вид. Поэтому для того, чтобы доказать непротиворечивость чистой теории чисел, я проведу сначала такую *формализацию чистой теории чисел* [2]).

Эта задача распадается на две части:

1. Формализация *высказываний*, встречающихся в чистой теории чисел (§ 3).

2. Формализация *средств доказательства*, применяемых в чистой теории чисел, т. е. способов заключения и способов построения понятий (§ 4—6).

[1]) W. Ackermann, Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Math. Ann. **92** (1925), 1—36; J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschr. **26** (1927), 1—46; J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, J. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), 1—8; G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Z. **39** (1935), 176—210, 405—431. (Русский перевод помещен в настоящем сборнике.)

[2]) Уже имеются различные такие формализации, к которым в большей или меньшей степени примыкает формализация, проведенная здесь.

§ 3. Формализация высказываний, встречающихся в чистой теории чисел

3.1. Предварительные пояснения.

3.11. Формализация математических высказываний не является чем-то принципиально новым и находящимся вне математики. Наоборот, в математике издавна происходит прогрессирующая формализация, т. е. замена разговорного языка математическими символами. Так, имеются высказывания, которые целиком записываются с помощью знаков, например $(a+b)\times\times(a-b)=a^2-b^2$. В словесном выражении это высказывание звучит приблизительно так: «Произведение суммы и разности чисел a и b равно разности квадратов этих чисел». Наоборот, высказывание «Если $a=b$, то $b=a$» обычно представляют еще с использованием слов. Полностью формализованное, оно запишется так: $a=b\supset b=a$.

3.12. Словесное соединение «если имеет место $\mathfrak{A}$, то имеет место $\mathfrak{B}$» (в формальной записи $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$), является примером *соединения высказываний* для образования нового высказывания. Другие *соединения высказываний* будут представлены с помощью знаков &, $\vee$, $\neg$, $\forall$ и $\exists$, смысл которых таков: $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ обозначает «имеет место $\mathfrak{A}$ *и* имеет место $\mathfrak{B}$», $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ — «имеет место $\mathfrak{A}$ *или* имеет место $\mathfrak{B}$» (т. е. имеет место *хотя бы одно* из этих двух высказываний), $\neg\mathfrak{A}$ — «$\mathfrak{A}$ *не* имеет места», $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ — «*для всех* $\mathfrak{x}$ имеет место $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$», $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ — «*существует* $\mathfrak{x}$ такой, что имеет место $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$».

3.13. В качестве *примера* я приведу формальную запись «теоремы Гольбаха» («каждое четное натуральное число представимо в виде суммы двух простых чисел»):

$$\forall x\,\{2\,|\,x\supset\exists y\exists z\,[y+z=x\,\&\,(\mathrm{Prim}\,y\,\&\,\mathrm{Prim}\,z)]\}.$$

При этом Prim a обозначает «a — простое число»; $a|b$ обозначает, как обычно, «a есть делитель b». Все *переменные* относятся только к натуральным (т. е. целым положительным) числам.

3.14. Знаки $=$, Prim, $|$ — это *предикатные знаки.* После заполнения числами «аргументных мест» такого знака он представляет *высказывание.*

Знак $+$ — это *функциональный знак.* После заполнения числами аргументных мест такого знака он снова представляет число.

Формальный образ высказывания мы обычно называем формулой. (Ведь и в математике, например, выражение $(a+b)\times\times(a-b)=a^2-b^2$ называется «формулой», правда, в более узком смысле.)

После этих пояснений я дам теперь точную характеристику тех формальных выражений, с помощью которых должны быть представлены высказывания в формализованной теории чисел.

3.2. Точное определение понятия «формула»[1]).

3.21. Для построения формул служат следующие виды *знаков*:

3.211. Знаки для *конкретных натуральных чисел*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., называемые короче «числовыми знаками» (знаки для *других* чисел нам не понадобятся).

3.212. *Переменные* для *натуральных чисел*: я делю их на свободные и связанные переменные (см. ниже). В качестве переменных могут служить произвольные знаки, не примененные еще по другому назначению; нужно только указать в каждом случае, какой переменной является такой знак: свободной или связанной.

3.213. Знаки для *конкретных функций*, называемые короче «функциональными знаками»: $+$, $\cdot$ и дальнейшие по мере необходимости (см. 6.1).

3.214. Знаки для конкретных предикатов, называемые короче «предикатными знаками»: $=$, $<$, Prim, $|$ и дальнейшие по мере необходимости (см. 6.1).

3.215. Знаки для *соединения высказываний*: &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.

3.22. Определение понятия *терм* (формальное выражение для некоторого, конкретного или неопределенного, числа):

3.221. *Числовые знаки* (3.211) и *свободные переменные* (3.212) являются термами.

3.222. Если $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ — термы, то $\mathfrak{s}+\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{t}$ — термы; аналогично можно образовывать новые термы с помощью *функциональных знаков*, вводимых в дальнейшем (3.213).

3.223. *Никакие другие* выражения, кроме тех, которые образованы согласно 3.221 и 3.222, не являются термами.

3.224. Пример терма. $[(a+2)^3\cdot b]+4$, где a и b — свободные переменные.

Скобки, как обычно, служат для того, чтобы избежать неоднозначностей относительно соединения отдельных знаков.

3.23. Теперь я определю понятие *формула* (формальный образ теоретико-числового *высказывания*):

3.231. Если заполнить «аргументные места» *предикатного* знака (3.214) какими-либо термами (3.22), то получается формула.

[1]) Поскольку термин «формула» употребляется вообще для формализованных высказываний, правильнее было бы называть поясняемый здесь частный случай «теоретико-числовой формулой». Так как в настоящей работе не встречаются никакие другие «формулы», можно пренебречь этой добавкой. Аналогичные замечания справедливы для понятий «терм», «функциональный знак» и т. д.

Пример. $(2+a)\cdot 4<b$.

3.232. Если $\mathfrak{A}$ — формула, то $\neg\mathfrak{A}$ — формула. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ также являются формулами.

3.233. Из формулы снова получится формула, если всюду заменить некоторую входящую в нее свободную переменную на какую-нибудь связанную переменную $\mathfrak{x}$, не входящую в первоначальную формулу, и одновременно приписать перед всей формулой $\forall\mathfrak{x}$ или $\exists\mathfrak{x}$

3.234. *Никакие другие* выражения, кроме построенных согласно 3.231, 3.232 и 3.233, не являются *формулами.*

3.24. С помощью *скобок* следует (точно так же, как и в случае термов) позаботиться о том, чтобы построение формулы согласно 3.232, 3.233 усматривалось бы однозначно*).

Примеры формул. См. 3.13, 3.11, 3.231.

Содержательный смысл формулы ясен из пояснений, данных в 3.1. Нужно лишь добавить, что формула со *свободными переменными* представляет «*неопределенное*» высказывание, которое превращается в «*определенное*» только тогда, когда вместо свободных переменных подставлены термы без свободных переменных, например, числовые знаки[1]).

Минимальным термом называется терм, состоящий из *одного* функционального знака с числовыми знаками на аргументных местах, например, $1+3$.

Минимальной формулой называется формула, состоящая из одного предикатного знака с *числовыми знаками* на аргументных местах, например, $4=12$.

Трансфинитной называется формула, в которую входит хотя бы один из знаков $\forall$ или $\exists$.

3.25. *Готические* и *греческие* буквы я применяю в качестве «информационных знаков», т. е. как переменные в теоретико-доказательственных рассуждениях относительно теории чисел.

3.3. Достаточно ли нашего понятия формулы для представления всех высказываний, встречающихся в чистой теории чисел?

Строго говоря, на этот вопрос следует ответить отрицательно. В чистой теории чисел встречаются высказывания, которые

*) Точнее было бы сразу сформулировать вторую фразу пункта 3.232 так: если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ — формулы. — *Прим. перев.*

[1]) Я не хочу, как это обычно принято в формальной логике, понимать такую формулу как «истинную для произвольных подставленных чисел», так как в математических доказательствах свободные переменные используются в более общем смысле; см., например, 4.53. Здесь, как и в случае связанных $\exists$-переменных, было бы осмысленнее говорить о «неопределенном», чем о «переменном», однако термин «переменное» стал общеупотребительным.

не могут непосредственно быть представлены описанными средствами. Однако мы могли бы спокойно оставить это без внимания, если бы в каждом случае можно было найти равнозначное высказывание, представимое в нашем формализме.

Поясним это несколькими важными *примерами.*

3.31. Я считаю *объектами* теории чисел только натуральные числа. Но ведь в теории чисел играют определенную роль и другие *целые числа*, а иногда и дроби. Однако нетрудно по какой-нибудь схеме *истолковать* высказывания о целых числах или о дробях как высказывания о натуральных числах, исходя при этом из того, что отрицательные числа можно сопоставить положительным, а дроби — парам целых чисел. (Пример: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ понимается как $a\cdot d=b\cdot c$.) Если далее добавить к объектам теории чисел *конечные множества* натуральных чисел, целых чисел или дробей (например, «полные системы вычетов»), то и в этом случае можно с помощью соответствующих переистолкований (хотя более сложных) свести все высказывания к высказываниям о натуральных числах. То же самое справедливо относительно диофантовых уравнений и т. п. объектов. Я не буду здесь далее углубляться в рассмотрение этих методов переистолкования; в них нет никаких принципиальных трудностей (в частности, для доказательства непротиворечивости). Каждый, кто несколько глубже занимался этими вещами, легко увидит, что их можно провести (см. также 17.2).

Если допустить *бесконечные множества* натуральных, целых или дробных чисел, то такое переистолкование станет, вообще говоря, невозможным; они являются уже объектами *анализа* (см. 2.12). Так, обычно сами вещественные числа определяются как некоторые бесконечные множества рациональных чисел.

3.32. *Функции и предикаты* встречаются в теории чисел в различных формах. Учитывая это, я в определении формулы (3.213 и 3.214) допустил «дальнейшие знаки по мере необходимости». Подробнее о введении произвольных функций и предикатов сказано в § 6.

3.33. Что касается, наконец, *соединений высказываний*, то имеются, например, следующие употребительные обороты речи:

«Высказывание $\mathfrak{A}$ имеет место *тогда и только тогда*, когда имеет место высказывание $\mathfrak{B}$». Это соединение мы, естественно, представляем так: $(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})\&(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$.

«Существует *ровно одно число* $\mathfrak{x}$ такое, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$». Вместо этого мы пишем $\exists\mathfrak{x}\,[\mathfrak{A}(\mathfrak{x})\,\&\,\forall\mathfrak{y}\,(\mathfrak{A}(\mathfrak{y})\supset\mathfrak{y}=\mathfrak{x})]$, что, очевидно означает то же самое. (В качестве $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ нужно выбрать подходящие связанные переменные; $\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$ — это выражение, получающееся из $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ подстановкой $\mathfrak{y}$ вместо $\mathfrak{x}$.)

«Существует *бесконечно много* чисел $\mathfrak{x}$ таких, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$». Это означает не что иное, как «Для каждого числа существует бо́льшее число такое, что $\mathfrak{A}$», а в этом виде высказывание представимо в нашем формализме.

«*Количество* чисел $\mathfrak{x}$ таких, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, равно n». Это высказывание (с неопределенным n) можно представить в нашем формализме лишь в существенно перефразированном виде, например, так. Присоединим *конечные множества* натуральных чисел в качестве объектов и скажем вместо упомянутого высказывания следующее: «Имеется множество натуральных чисел, количество элементов которого равно n, причем для каждого его элемента справедливо высказывание $\mathfrak{A}$, и любое число, для которого имеет место $\mathfrak{A}$, принадлежит этому множеству». При этом «количество элементов» — это *функция*, «принадлежать» — *предикат*, и оба должны быть предварительно определены. Наконец, понятие *конечного множества* можно снова *перефразировать* согласно 3.31.

Имеются и другие разнообразные обороты речи, которые можно свести к непосредственно формализуемым способам выражения.

3.34. Я вернусь к вопросу о полноте формализма уже в общем смысле в связи с доказательством непротиворечивости (17.1).

§ 4. Пример доказательства из чистой теории чисел

4.1. Я приступаю теперь к формализации *средств доказательства*, применяемых в чистой теории чисел. Иными словами, я должен по возможности полно перечислить все применяемые в доказательствах чистой теории чисел *способы заключения* и *методы образования понятий* и одновременно установить для них формально определенный вид, исключив таким путем все многообразие особенностей речевого представления.

Только тогда, когда мы на основании этого получим возможность дать точное формальное определение того, что следует понимать под чисто теоретико-числовым «*доказательством*», мы сможем приступить к *теории доказательства* чистой теории чисел.

Я приведу далее в этом параграфе пример теоретико-числового *доказательства* и выделю согласно определенной точке зрения отдельные *способы заключения*, примеры которых имеются в этом доказательстве. Затем в § 5 я точно сформулирую эти способы заключения.

Наконец, в § 6 я рассмотрю *методы образования понятий* и связанные с ними теоретико-числовые «*аксиомы*».

4.2. В качестве примера доказательства из чистой теории чисел я выберу общеизвестное *евклидово доказательство* теоремы: «Существует *бесконечно много простых чисел*».

Сначала я дам краткое словесное доказательство в изложении, приспособленном для поставленной цели.

В дальнейшем (во всем § 4) я применяю буквы a, b_1, b_2, c, d, l, m, n как *свободные переменные*, буквы z, y — как *связанные переменные* (для натуральных чисел).

Теорема, которую нужно доказать, гласит более точно: «Для каждого натурального числа имеется большее, которое является простым числом».

Итак, пусть a — произвольное натуральное число. Тогда нужно показать, что имеется простое число, большее, чем a. Мы рассмотрим число $a!+1$. Если оно *простое число*, то уже оно удовлетворяет утверждению теоремы. Если оно *не является простым числом*, то оно имеет делитель b_1 (отличный от 1 и от него самого). Последний больше, чем a, так как $a!+1$ не может делиться на числа от 2 до a, ибо деление всегда дает остаток 1. Если b_1 — простое число, то *оно* искомое. Если оно не является простым числом, то оно также имеет делитель b_2, отличный от 1 и от b_1. Число $a!+1$ делится на b_2, так как оно делится на b_1. Поэтому b_2 также больше, чем a. Повторяя это рассуждение, мы получаем ряд убывающих чисел: $a!+1$, b_1, $b_2, \ldots$ Этот ряд должен когда-то закончиться, и тогда последнее число — это *простое число*, являющееся делителем $a!+1$ и большее, чем a. Тем самым доказано существование простого числа, большего, чем a. Так как a было совершенно *произвольным* натуральным числом, отсюда следует, что для каждого натурального числа имеется бо́льшее, которое является простым числом. Это и требовалось доказать.

4.3. При доказательстве я предполагал, что уже *известны* различные простые теоремы. Их также можно было бы *свести* с помощью дальнейших доказательств к еще более простым фактам. Однако мне важно теперь не это, а прежде всего *заключения*, которые встречаются в самом ходе приведенного доказательства.

При этом следует учитывать, что в результате тренировки мы привыкли проводить *целые ряды заключений*, не осознавая каждого *отдельного* заключения, содержащегося в них. Поэтому для того, чтобы отыскать отдельные *элементарные заключения*, я хочу теперь еще раз просмотреть евклидово доказательство и выявить в отдельных частях доказательства *все содержащиеся в них элементарные заключения*. Одновременно я буду *формализовать* согласно § 3 отдельные идущие друг за другом *высказывания*.

4.4. Подробное расчленение евклидова доказательства.

Доказательство содержит в несколько завуалированной форме «полную индукцию» (см. место: «повторяя это рассуждение...»). Обычная *нормальная форма* способа заключения посредством полной индукции такова. Доказывают справедливость некоторого высказывания для числа 1; доказывают далее, что это высказывание, если оно справедливо для произвольного числа n, справедливо также и для $n+1$; тогда это высказывание справедливо для любого натурального числа.

Я хочу привести входящую сюда замаскированную полную индукцию к этой нормальной форме. Для этого я выберу в качестве «индукционного высказывания» следующее высказывание относительно числа m: «Либо среди чисел от 1 до m имеется простое число, которое больше, чем a, либо все эти числа, за исключением 1, не являются делителями $a!+1$». Формально

$$\{\exists z\,[z \leqslant m \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \& z > a)]\} \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant m) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

Доказательство протекает теперь так:

4.41. Сначала надо доказать индукционное высказывание для $m=1$. Здесь вторая часть выполнена сама по себе, так как вообще не бывает чисел, которые больше, чем 1, и меньше или равны 1. Подробнее: для произвольного c имеет место $\neg\,(c > 1 \,\&\, c \leqslant 1)$; мы предполагаем, что это известно. Тогда имеет место также $(c > 1 \,\&\, c \leqslant 1) \supset \neg\, c \,|\, (a! + 1)$, откуда, так как c было произвольным, $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$. Отсюда следует далее согласно смыслу $\vee$ (3.12) индукционное высказывание для $m=1$ в целом:

$$\{\exists z\,[z \leqslant 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

4.42. Теперь настает очередь *«индукционного шага»*. Мы предполагаем, что индукционное высказывание уже доказано для некоторого произвольного числа n, т. е. имеет место

$$\{\exists z\,[z \leqslant n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)];$$

тогда нужно доказать, что оно справедливо для $n+1$. Это осуществляется следующим образом.

На основе индукционного предположения возможны *два случая*:

1. $\exists z\,[z \leqslant n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$;
2. $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$.

В первом случае сразу получается (я не излагаю этого подробно) $\exists z\,[z \leqslant n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$. Тем самым в этом

случае уже доказано индукционное высказывание для $n+1$, а именно

$$\{\exists z\,[z \leqslant n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n + 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

Рассмотрим теперь второй случай

$$\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

Имеет место: $(n + 1) \,|\, (a! + 1) \vee \neg\,(n + 1) \,|\, (a! + 1)$. В соответствии с этим мы можем выделить *два подслучая*:

Подслучай 1. $(n+1) \,|\, (a!+1)$. Тогда получаем $\mathrm{Prim}\,(n+1) \,\&$ $\&\, (n+1) > a$. Я покажу это лишь вкратце, так как при этом применяются только такие способы заключения, примеры которых уже имеются в остальных частях доказательства.

$n+1$ — *простое число*, так как если бы оно имело делитель, отличный от 1 и от него самого, то этот делитель был бы меньше, чем $n+1$, и был бы также делителем числа $a!+1$, что противоречит нашему предположению $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$. Далее, $n+1$ *больше*, чем a, так как $a!+1$ не делится на числа от 2 до a, ибо деление всегда дает остаток 1. Поэтому действительно имеет место $\mathrm{Prim}\,(n+1) \,\&\, n+1 > a$; далее, $n+1 \leqslant n+1$, так что имеет место $n+1 \leqslant n+1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\,(n+1) \,\&\, n+1 > a)$, следовательно,

$$\exists z\,[z \leqslant n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)],$$

и тем самым

$$\exists z\,[z \leqslant n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)] \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n + 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

Подслучай 2. $\neg\,(n + 1) \,|\, (a! + 1)$. Пусть d — произвольное число такое, что $d > 1 \,\&\, d \leqslant n + 1$. Предполагается уже известным, что из $d \leqslant n+1$ следует $d \leqslant n \vee d = n+1$.

Пусть сначала $d \leqslant n$. Имеет место $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$, поэтому, в частности, $(d > 1 \,\&\, d \leqslant n) \supset \neg\, d \,|\, (a! + 1)$. Из $d > 1$ вместе с $d \leqslant n$ получается $d > 1 \,\&\, d \leqslant n$ и вместе с предыдущим это дает $\neg\, d \,|\, (a! + 1)$.

Если, наоборот, $d = n+1$, то в силу $\neg\,(n + 1) \,|\, (a! + 1)$ также получается $\neg\, d \,|\, (a! + 1)$.

Тем самым вообще имеет место $\neg\, d \,|\, (a! + 1)$ как следствие из допущения $d > 1 \,\&\, d \leqslant n + 1$. Поэтому мы можем написать $(d > 1 \,\&\, d \leqslant n + 1) \supset \neg\, d \,|\, (a! + 1)$ и далее, так как d было произвольным числом,

$$\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqslant n + 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)],$$

откуда снова

$$\{\exists z\,[z \leqslant n+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]\} \vee \vee\, \forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant n+1) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]\}.$$

Тем самым мы в обоих случаях получили индукционное высказывание для $n+1$ и *индукционный шаг закончен.*

4.43. Теперь можно быстро *закончить* доказательство.

Посредством полной индукции выявилась справедливость индукционного высказывания для *произвольных* чисел. Нам оно нужно лишь для числа $a!+1$:

$$\{\exists z\,[z \leqslant a!+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]\} \vee \vee\, \forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant a!+1) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]\}.$$

Второй случай*), в частности, дает

$$(a!+1 > 1\,\&\,a!+1 \leqslant a!+1) \supset \neg\,(a!+1)\,|\,(a!+1).$$

Имеет место $a!+1 > 1\,\&\,a!+1 \leqslant a!+1$; это мы предполагаем известным; поэтому получается $\neg\,(a!+1)\,|\,(a!+1)$. Так как, с другой стороны, конечно, справедливо $(a!+1)\,|\,(a!+1)$, мы получаем *противоречие*, т. е. второй случай не может иметь места; формально:

$$\neg\,\forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant a!+1) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)].$$

Следовательно, остается только первый случай, т. е. $\exists z\,[z \leqslant a!+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]$. Пусть l — одно из таких чисел. Тогда имеет место $l \leqslant a!+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,l\,\&\,l > a)$. В частности, имеет место $\mathrm{Prim}\,l\,\&\,l > a$, откуда следует $\exists z\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)$. Так как a было совершенно *произвольным* натуральным числом, то это имеет место для *всех* натуральных чисел, т. е. $\forall y \exists z\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > y)$. Это — *конечный результат* евклидова доказательства.

4.5. Классификация отдельных способов заключения, примеры которых имеются в евклидовом доказательстве.

Обратим теперь внимание на отдельные заключения, встречающиеся в приведенном доказательстве. Тогда почти само по себе появляется следующее их *подразделение*:

Для каждой из связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ имеются определенные *принадлежащие* ей способы заключения. Их можно, далее, подразделить на способы заключения, с помощью которых соответствующая связка *вводится*, и на такие способы заключения, с помощью которых та же самая связка *удаляется* из

*) То есть второй член дизъюнкции — *Прим. перев.*

высказывания. Я приведу в качестве *примера* для каждого отдельного случая некоторое заключение из евклидова доказательства.

4.51. $\forall$-введение имеется в конце доказательства, а именно: после того как для произвольного числа a было доказано $\exists z\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)$, отсюда было извлечено следствие $\forall y \exists z\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > y)$.

$\forall$-*удаление* применено в 4.42, подслучай 2, когда из $\forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant n) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]$ было выведено, что $(d > 1\,\&\,d \leqslant n) \supset \neg\, d\,|\,(a!+1)$.

4.52. $\&$-*введение* (из 4.42, подслучай 2): высказывания $d > 1$ и $d \leqslant n$ дают вместе высказывание $d > 1\,\&\,d \leqslant n$.

$\&$-*удаление* (из 4.43): из $l \leqslant a!+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,l\,\&\,l > a)$ заключили, что $\mathrm{Prim}\,l\,\&\,l > a$.

4.53. $\exists$-*введение* (из 4.43): из $\mathrm{Prim}\,l\,\&\,l > a$ мы вывели $\exists z\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)$.

$\exists$-*удаление* (из 4.43): справедливо высказывание

$$\exists z\,[z \leqslant a!+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)].$$

Отсюда заключили, что $l \leqslant a!+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,l\,\&\,l > a)$, где l обозначает некоторое число, которое существует в силу предыдущего высказывания.

4.54. $\vee$-*введение* (из 4.41): из

$$\forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant 1) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]$$

заключили, что

$$\{\exists z\,[z \leqslant 1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]\} \vee \vee\, \forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant 1) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]\}.$$

$\vee$-*удаление* (из 4.42): имеет место

$$\{\exists z\,[z \leqslant n\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]\} \vee \vee\, \forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant n) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]\}.$$

Отсюда получается *разбор случаев*.

Первый случай: $\exists z\,[z \leqslant n\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]$,

второй случай: $\forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant n) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]$.

Разбор случаев оканчивается тем, что в обоих случаях может быть в конце концов выведено одно и то же высказывание

$$\{\exists z\,[z \leqslant n+1\,\&\,(\mathrm{Prim}\,z\,\&\,z > a)]\} \vee \vee\, \forall y\,[(y > 1\,\&\,y \leqslant n+1) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]\}.$$

4.55. $\supset$-*введение* (из 4.42, подслучай 2): исходя из допущения $d > 1\,\&\,d \leqslant n+1$, мы пришли к результату $\neg\, d\,|\,(a!+1)$. Поэтому имеет место $(d > 1\,\&\,d \leqslant n+1) \supset \neg\, d\,|\,(a!+1)$.

$\supset$-*удаление* (из 4.42, подслучай 2): из $d > 1 \& d \leqslant n$ и $(d > 1 \& d \leqslant n) \supset \neg d \mid (a! + 1)$ заключаем, что $\neg d \mid (a! + 1)$.

4.56. Для *отрицания* ($\neg$) дело обстоит не так просто; а именно, имеется ряд различных способов заключения, которые трудно отчетливо разделить на $\neg$-введения и $\neg$-удаления. Я еще вернусь к этому (5.26). Приведем здесь только один важный пример из евклидова доказательства, а именно, заключение «*опровержением*» (из 4.43):

$\neg \forall y [(y > 1 \& y \leqslant (a! + 1)) \supset \neg y \mid (a! + 1)]$ было выведено из того, что допущение $\forall y [(y > 1 \& y \leqslant (a! + 1)) \supset \neg y \mid (a! + 1)]$ привело к *противоречию*, а именно, из него было выведено высказывание $\neg (a! + 1) \mid (a! + 1)$, в то время как высказывание $(a! + 1) \mid (a! + 1)$ тоже доказуемо.

§ 5. Формализация способов заключения, встречающихся в чистой теории чисел

5.1. Предварительные замечания

Теперь моя ближайшая задача — сформулировать в *общем виде* различные способы заключения, показанные на примерах.

Определение отдельных способов заключения не является вполне *однозначным*. Однако избранное мной определение, в основе которого лежит деление на *введения* и *удаления* отдельных логических *связок*, кажется мне особенно понятным и естественным.

Итак, какова же *общая форма* каждого из способов заключения?

Например, естественно было бы считать общим видом &-*удаления* просто следующее: если доказано некоторое высказывание вида $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ (где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные формулы), то имеет место также $\mathfrak{A}$ (соответственно $\mathfrak{B}$). Но здесь нужно принять во внимание еще кое-что, а именно: математическое доказательство обычно не просто переходит с помощью заключений от *истинных* высказываний ко все *новым* и новым истинным высказываниям. Наоборот, чаще бывает иначе: *допускается*, что некоторое высказывание истинно, и из этого *выводятся* другие высказывания, истинность которых *зависит*, следовательно, от истинности этого допущения. Примеры из евклидова доказательства: «опровержение» (4.56), $\supset$-введение (4.55), индукционный шаг полной индукции (4.42).

Поэтому для того, чтобы *полностью* охарактеризовать значение какого-либо *высказывания*, встречающегося в доказательстве, нужно каждый раз указывать, от каких из сделанных *допущений* оно зависит.

С этой целью я ввожу следующий способ записи: в формализованном доказательстве каждому (формализованному) высказыванию $\mathfrak{B}$ должны быть следующим образом *приписаны* (формализованные) *допущения* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$, от которых оно зависит:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B};$$

читается: при допущениях $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ имеет место $\mathfrak{B}$. Такое выражение я называю *секвенцией*[1]). Если нет ни одного допущения, то пишут $\to \mathfrak{B}$.

Пример из евклидова доказательства. Высказывание $\neg d \mid (a! + 1)$ из 4.42, подслучай 2, в своей зависимости от допущений представимо следующей *секвенцией*:

$$\forall y [(y > 1 \& y \leqslant n) \supset \neg y \mid (a! + 1)], \quad \neg (n + 1) \mid (a! + 1),$$
$$d > 1 \& d \leqslant n + 1 \to \neg d \mid (a! + 1).$$

Так как теперь в формализованном доказательстве *каждое высказывание* первоначального доказательства представлено некоторой *секвенцией*, то *способы заключения* можно сформулировать также и для *секвенций*.

Наш предыдущий пример, &-удаление, теперь нужно было бы сформулировать так: «Если доказана секвенция $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mu \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ $(\mu \geqslant 0)$, то имеют место также $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mu \to \mathfrak{A}$, соответственно $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mu \to \mathfrak{B}$.

В дальнейшем я аналогичным образом введу общие схемы и для остальных способов заключения.

5.2. Более точная общая формулировка отдельных способов заключения

5.21. Определение понятия *секвенция*[2]) (формальное выражение для значения некоторого *высказывания в доказательстве* *) в его зависимости от возможных допущений):

---

[1]) Можно было бы вместо этого писать только одну формулу вида $((\ldots(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2) \& \ldots) \& \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$. Однако тем самым была бы затушевана первоначальная структура математического доказательства. Ведь в это доказательство вообще явно не входит представляемое этой формулой высказывание «если имеет место $\mathfrak{A}_1$, и $\mathfrak{A}_2, \ldots,$ и $\mathfrak{A}_\mu$, то имеет место $\mathfrak{B}$», а входят только отдельные высказывания $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ в качестве допущений и высказывание $\mathfrak{B}$ в качестве следствия из этих допущений.

[2]) В моей работе «Исследования логических выводов» я пользовался словом «секвенция» в некотором более общем значении, которое, однако, мне здесь не понадобится. Для читавших упомянутую работу замечу еще, что развиваемый здесь формализм способов заключения отвечает, по существу, построенному там «исчислению NK». «Исчисление LK» также подходит для доказательства непротиворечивости. Последнее было бы при этом даже несколько проще, но менее «естественно».

*) То есть вхождения высказывания в доказательство. — *Прим. перев.*

Секвенция — это выражение вида

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные *формулы* (3.23). Формулы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ я называю *передними формулами*, $\mathfrak{B}$ — *задней формулой* секвенции. Допускается, чтобы вообще не было передних формул; секвенция тогда имеет вид $\to \mathfrak{B}$. Однако *задняя формула* всегда должна быть.

5.22. Определение понятия *вывод* (формальный образ *доказательства*):

Вывод состоит из некоторого числа следующих друг за другом секвенций, каждая из которых либо является «основной секвенцией», либо получается из каких-либо предыдущих секвенций «*структурным изменением*» или применением одного из «*правил заключения*». Определение отдельных понятий будет сейчас дано.

Последняя секвенция вывода не содержит ни одной передней формулы, а ее задняя формула называется *конечной формулой* вывода (она представляет *высказывание*, *доказанное* с помощью рассматриваемого доказательства).

5.23. Определение понятия *основная секвенция*:

Я различаю «логические» и «математические» основные секвенции.

Логическая основная секвенция — это секвенция вида $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — произвольная формула (такая секвенция появляется при формализации доказательства тогда, когда в ходе доказательства *вводится допущение* $\mathfrak{D}$).

Математическая основная секвенция — это секвенция вида $\to \mathfrak{C}$, где формула $\mathfrak{C}$ представляет «математическую аксиому». Что, в частности, следует понимать под теоретико-числовой «аксиомой», я поясняю в § 6.

5.24. Определение понятия *структурное изменение*:

Следующие виды преобразований секвенции называются *структурными изменениями* (так как они затрагивают только структуру секвенции независимо от значения отдельных формул):

5.241. *Перестановка* двух передних формул.

5.242. *Отбрасывание* передней формулы, которая совпадает с одной из остальных передних формул.

5.243. *Добавление* произвольной формулы к передним формулам.

5.244. Замена некоторой *связанной переменной* внутри некоторой формулы во всей области действия $\forall$- или $\exists$-знака на другую связанную переменную, еще не входящую в эту формулу.

Очевидно, что изменения, производимые согласно 5.241, 5.242 и 5.244, не меняют значения данной секвенции, так как для ее значения безразлично, в какой последовательности перечислять допущения, вводить ли одно и то же допущение один или несколько раз и, наконец, какой именно знак применяется в качестве связанной переменной. Поэтому все эти возможности изменения чисто *формальны* по существу и содержательно неважны. Они должны быть явно упомянуты здесь только из-за особенностей формализации.

Структурное изменение согласно 5.243 означает, что разрешается присоединять к высказыванию произвольное *допущение*, от которого наряду с другими, возможно, имеющимися допущениями это высказывание будет, следовательно, зависеть. Это кажется сначала несколько странным. Однако нельзя, например, не согласиться с тем, что если некоторое высказывание *истинно*, то оно имеет место и при *произвольном допущении*. (Если потребовать, чтобы это можно было утверждать лишь в случае «фактической зависимости», то возникли бы существенные трудности, связанные с тем, что возможны доказательства, в которых некоторое допущение используется лишь *кажущимся образом* *).

5.25. Определение понятия *правило заключения* (формальное изображение *способа заключения*).

Нам нужно всего тринадцать правил заключения.

5.250. Применяемые при этом греческие и готические буквы имеют следующие значения: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ обозначают произвольные формулы; $\forall \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ (соответственно $\exists \mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$) — произвольные формулы этого вида, причем $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$) означает формулу, получающуюся из $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ в результате замены связанной переменной $\mathfrak{x}$ на произвольную свободную переменную $\mathfrak{a}$ (соответственно на произвольный терм $\mathfrak{t}$); Γ, Δ, Θ обозначают произвольные, возможно пустые, списки формул, разделенных запятыми (являющихся передними формулами соответствующей секвенции).

Теперь *отдельные правила заключения*:

5.251. *&-введение*: из секвенций $\Gamma \to \mathfrak{A}$ и $\Delta \to \mathfrak{B}$ получается секвенция $\Gamma, \Delta \to (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$.

&-удаление: из $\Gamma \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ получается $\Gamma \to \mathfrak{A}$, соответственно $\Gamma \to \mathfrak{B}$.

---

*) Попытки формализации такой «фактической зависимости», правда, для логических, а не логико-математических систем, сделаны в ряде работ, посвященных исчислению строгой импликации В. Аккермана и близким исчислениям: W. Ackermann, Begründung einer strengen Implikation, J. Symb. Logic **21**, № 2 (1956), 113—128; N. Belnap, Entailment and relevance, J. Symb. Logic **25**, № 2 (1960), 144—146; В. В. Донченко, Некоторые результаты, относящиеся к исчислению строгой импликации Аккермана, диссертация, 1966. — *Прим. ред.*

$\vee$-*введение*: из $\Gamma \to \mathfrak{A}$ получается $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, соответственно $\Gamma \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

$\vee$-*удаление*: из $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}, \Theta \to \mathfrak{C}$ получается $\Gamma, \Delta, \Theta \to \mathfrak{C}$.

$\forall$-*введение*: из $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ получается $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ при условии, что свободная переменная $\mathfrak{a}$ не входит в Γ и $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\forall$-*удаление*: из $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ получается $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

$\exists$-*введение*: из $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ получается $\Gamma \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\exists$-*удаление*: из $\Gamma \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{C}$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}$ при условии, что свободная переменная $\mathfrak{a}$ не входит в Γ, Δ, $\mathfrak{C}$ и $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\supset$-*введение*: из $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ получается $\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

$\supset$-*удаление*: из $\Gamma \to \mathfrak{A}$ и $\Delta \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

5.252. Правило «*опровержение*»: из $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}, \Delta \to \neg \mathfrak{B}$ получается $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

«*Удаление двойного отрицания*»: из $\Gamma \to \neg \neg \mathfrak{A}$ получается $\Gamma \to \mathfrak{A}$.

5.253. Правило заключения «*полная индукция*»: из $\Gamma \to \mathfrak{F}(1)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ при условии, что свободная переменная $\mathfrak{a}$ не входит в Γ, Δ, $\mathfrak{F}(1)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

5.26. Некоторые пояснения к правилам заключения.

Формулировки отдельных правил заключения после рассмотрения примеров соответствующих заключений (4.5) должны бы в общем быть понятными.

Некоторые пункты все же нужно еще пояснить. Γ, Δ и Θ потребовались потому, что в самом общем случае нужно рассчитывать на *произвольно большое число допущений*.

Формулировка правила заключения с *принадлежащими ему допущениями*, которая напрашивается при $\supset$-введении, «опровержении» или полной индукции, возможно, покажется несколько искусственной при $\vee$- и $\exists$-удалении, если сравнить ее с соответствующими примерами (4.5). Однако для формулирования удобнее всего воспринимать обе возможности, встречающиеся при *разборе случаев* ($\vee$-удаление), просто как *допущения*, которые считаются исчерпанными, когда из них обеих получен один и тот же результат ($\mathfrak{C}$). При $\exists$-удалении дело обстоит аналогично: выведенное из $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ высказывание $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ является пока что лишь *допущением*, так как относительно входящей в него переменной $\mathfrak{a}$ допущено, что она представляет одно из существующих в силу $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ чисел со свойством $\mathfrak{F}$. Это допущение *исчерпано*, как только из него выведено следствие ($\mathfrak{C}$), в которое эта переменная $\mathfrak{a}$ уже не входит.

Одновременно я подошел к новому пункту, требующему краткого пояснения: это *ограничения на свободные переменные*, сформулированные в правилах заключения: $\forall$-введение, $\exists$-удаление и полная индукция. Ограничение означает в каждом из случаев, что свободная переменная $\mathfrak{a}$, принадлежащая рассматриваемому правилу заключения, может встречаться из всех формул, принадлежащих правилу заключения (включая допущения), только в формулах $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$. Легко пояснить на примерах, что это требование является, вообще говоря, необходимым и, по существу, само собой разумеющимся; в математических доказательствах оно выполняется само по себе. А именно, если иметь в виду цель применения переменной $\mathfrak{a}$, то ясно, что она совершенно не нужна в остальных формулах.

Относительно *правил заключения для отрицания* нужно сказать следующее: как уже упомянуто в 4.56, в этом случае имеется *более широкий* выбор элементарных способов заключения, чем в случае других логических связок. Я хотел бы упомянуть еще следующие относящиеся сюда простые *правила заключения*:

Из $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ и $\neg \mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{B}$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

Из $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ и $\Delta \to \neg \mathfrak{B}$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}$ (пример в 4.4).

Из $\Gamma \to \neg \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{B}$ получается $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

Из $\Gamma \to \neg \mathfrak{A}$ получается $\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ (пример в 4.41).

Из $\Gamma \to \mathfrak{A}$ и $\Delta \to \neg \mathfrak{A}$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

Далее, можно было бы принять в качестве *логических основных секвенций* для $\neg$-связки:

$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ — «закон исключенного третьего» (пример в 4.42);

$\to \neg (\mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A})$ — «закон противоречия».

Но двух выбранных мной правил заключения достаточно; как можно довольно легко доказать, в них содержатся (если добавить правила заключения, касающиеся остальных связок для высказываний) остальные приведенные здесь правила заключения и основные секвенции.

5.3. Достаточно ли наших правил заключения для представления всех заключений, встречающихся в чистой теории чисел.

5.31. Полнота чисто *логических* правил заключения, т. е. правил, *принадлежащих связкам* $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, в том смысле, что все истинные заключения того же рода представимы уже с помощью приведенных правил заключения, доказана специальными исследованиями [1]).

[1]) См. для «логики высказываний» ($\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$): Hilbert und Ackermann, Gründzüge der theoretischen Logik, S. 33; для «логики предикатов» (с добавлением $\forall$, $\exists$): K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. u. Phys. **37** (1930), 349—360. Можно без особых трудностей доказать, что использованные там формализации способов заключения эквивалентны выбранной здесь. (Ср. доказательство эквивалентности в разделе V моей работы Untersuchungen über das logische Schließen.)

Для *чистой теории чисел* к этим способам заключения добавляется «полная индукция». Здесь вопрос о полноте правил вывода становится действительно сложной проблемой; я вернусь к этому после доказательства непротиворечивости (17.1). Сейчас скажу лишь следующее: можно с довольно высокой степенью достоверности предположить, что в нашей системе представимы все заключения, встречающиеся в обычных теоретико-числовых доказательствах, не использующих вспомогательных средств из анализа. Это справедливо и относительно часто применяемых «наглядных» заключений, хотя непосредственно это может быть и не очевидно. Правда, чтобы доказать это в общем случае, нужно было бы пересмотреть все доказательства, что, естественно, было бы слишком долго.

5.32. Я ограничусь некоторыми особенно важными примерами.

Полная индукция часто встречается в некоторых измененных формах, которые можно следующим образом свести к нашей нормальной форме:

5.321. Начнем с «индукции спуска», которая формально гласит:

Из $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1), \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(1)$. Здесь $\mathfrak{a}$, как и ранее, не должна входить в Γ, Δ, $\mathfrak{F}(1)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

Она преобразуется так: $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ является основной секвенцией. Отсюда следует (5.243) $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1), \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, что вместе с $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1), \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ дает по правилу «опровержения» (5.252) $\Delta, \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$, а также (5.241) $\neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$. Если добавить основную секвенцию $\neg \mathfrak{F}(1) \to \neg \mathfrak{F}(1)$, то можно применить правило полной индукции в описанной выше форме (5.253) с $\neg \mathfrak{F}$ в качестве индукционного высказывания и получить $\neg \mathfrak{F}(1), \Delta \to \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Если добавить $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, то в силу 5.243 имеет место $\neg \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. По правилу «опровержение» получается $\Gamma, \Delta \to \neg\neg \mathfrak{F}(1)$, откуда по правилу «удаление двойного отрицания» (5.252) имеем $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(1)$.

5.322. Следующий пример — формально преобразованная полная индукция:

из $\Gamma \to \mathfrak{F}(1)$ и $\forall \mathfrak{x}\, [\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{a} \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x})], \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Снова $\mathfrak{a}$ не должна входить в Γ, Δ, $\mathfrak{F}(1)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$; $\mathfrak{x}$ — не входящая в $\mathfrak{F}(1)$ связанная переменная.

Из этого легко сделать нормальную полную индукцию (5.253) с индукционным высказыванием (записанным для произвольного числа m): $\forall \mathfrak{x}\, [\mathfrak{x} \leqslant m \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x})]$ (словами: «для всех чисел от 1 до m имеет место $\mathfrak{F}$»).

5.323. Соответствующая форма «спуска» гласит: из $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1), \Delta \to \exists \mathfrak{x}\, [\mathfrak{x} \leqslant a \,\&\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})]$ получается $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(1)$. Ее можно

свести к нормальной форме полной индукции аналогично тому, как это делалось в предыдущих примерах.

Заключение по индукции из евклидова доказательства имело сначала именно этот вид (4.2), а затем (4.4) было приведено к нормальной форме.

§ 6. Аксиомы и образование понятий чистой теории чисел

6.1. В доказательстве, кроме собственно *заключений*, могут встречаться и «*образования понятий*», т. е. введение новых объектов, функций или предикатов.

Какого рода образования понятий используются в теории чисел?

Введение новых *объектов*, таких как отрицательные числа, уже обсуждалось в 3.31, и там было указано, что в принципе можно обойтись без них.

Для введения новой *функции* или *предиката* обычно дается словесное определение.

Примеры. Функция a^b определяется как «число a, взятое сомножителем b раз»,

функция $a!$ определяется как «произведение чисел от 1 до a».

Функция (a, b) определяется как «наибольший общий делитель a и b».

Предикат «a — совершенное число» означает то же, что и «число a равно сумме своих собственных делителей».

Предикат $a \neq b$ означает то же, что и $\neg(a=b)$.

Предикат $a \mid b$ означает то же, что и $\exists z\, (a \cdot z = b)$.

Функция $\left(\frac{a}{b}\right)$ — «символ Лежандра» — определяется лишь для случая, когда b — нечетное простое число, следующим образом: $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$, если $b \mid a$; если же $\neg b \mid a$, то $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$, если число a является квадратичным вычетом по модулю b, $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, если a является квадратичным невычетом по модулю b.

Функцию $\mathrm{ak}(a, b, c)$ — «функцию Аккермана», важную для некоторых вопросов теории доказательства, — можно определить следующим образом[1]) («рекурсивно»):

$\mathrm{ak}(a, b, 0) = a+b$, $\mathrm{ak}(a, b, 1,) = a \cdot b$, $\mathrm{ak}(a, b, 2) = a^b$.

и далее для $c \geqslant 2$:

$\mathrm{ak}(a, 0, c+1) = a$, $\mathrm{ak}(a, b+1, c+1) = \mathrm{ak}[a, \mathrm{ak}(a, b, c+1), c]$.

[1]) См. W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reelen Zahlen, Math. Ann. 99 (1928), 118—133.

Я не буду устанавливать *никаких общих формальных схем* для этих и других методов образования понятий. Будет показано, что их и без этого можно включить в доказательство непротиворечивости некоторым единым способом. То же справедливо и относительно «аксиом», о которых я теперь хочу кое-что сказать.

6.2. При теоретико-числовых доказательствах исходят из определенных простых, непосредственно очевидных высказываний, которые не доказываются. Это «*аксиомы*». Они находятся в тесной связи с *понятиями*, поскольку аксиомы указывают основные факты о входящих в них предикатах и функциях. Новое понятие можно ввести формально, просто указав для него некоторые аксиомы («неявное определение»).

Пример. Функцию (a, b) можно полностью охарактеризовать аксиомами:

$$\forall x \forall y\, [(x, y) \mid x \,\&\, (x, y) \mid y]$$

и

$$\forall x \forall y\, \neg \exists z\, [z \mid x \,\&\, z \mid y \,\&\, z > (x, y)].$$

Выбор аксиом *не является однозначно определенным*. Можно задаться целью обойтись возможно меньшим числом возможно более простых аксиом[1]). Для *практического* проведения теоретико-числовых доказательств по большей части кладут в основу большее число аксиом и не заботятся о сводимости, взаимной независимости и т. п. Для моего *доказательства непротиворечивости* почти безразлично, что взять в качестве *аксиом*. Я ограничусь пока, как и для образований понятий, тем, что приведу несколько *примеров*, из которых можно увидеть, какого рода высказывания принимаются в качестве аксиом.

Некоторые аксиомы для предиката $=$ и функции $+$ в формализованной записи:

$$\forall x\, (x = x),$$
$$\forall x \forall y\, (x = y \supset y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z\, [(x = y \,\&\, y = z) \supset (x = z)],$$
$$\forall x\, \neg (x + 1 = 1),$$
$$\forall x \forall y\, (x + y = y + x),$$
$$\forall x \forall y \forall z\, [(x + y) + z = x + (y + z)].$$

---

[1]) Из такого стремления возникли «*аксиомы Пеано*» для натуральных чисел (см., например, E. Landau, Grundlagen der Analysis, 1930. [Русский перевод: Э. Ландау, Основы анализа, ИЛ, 1947. — *Прим. перев.*] Они содержат и полную индукцию, которую я отнес к способам заключения. Между способами заключения и аксиомами нет принципиального различия. Логические способы заключения можно сформулировать и как «логические аксиомы», например, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ для $\&$-удаления и т. д.

6.3. Понятие «тот, который».

Стоит напомнить еще следующий особый способ образования понятий:

Если доказано высказывание вида

$$\forall \mathfrak{x}_1 \forall \mathfrak{x}_2 \ldots \forall \mathfrak{x}_\nu \exists \mathfrak{y}\, \{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y}) \,\&$$
$$\&\, \forall \mathfrak{z}\, [\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{z}) \supset \mathfrak{z} = \mathfrak{y}]\},$$

словесно: «для каждого набора чисел $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu$ *существует* одно и только одно число $\mathfrak{y}$ такое, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y})$», то можно *ввести функцию*, которая *представляет* как раз эту величину ($\mathfrak{y}$) в ее зависимости от набора чисел $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu)$ («тот, который»). Формально так: в качестве функции используют, например, выражение (записанное для аргументов $a_1, \ldots, a_\nu$) $\iota_{\mathfrak{y}}\mathfrak{F}(a_1, \ldots, a_\nu, \mathfrak{y})$; для нее тогда имеет место следующее: $\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \iota_{\mathfrak{y}}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y}))$. Допускается, что иксов может не быть ($\nu = 0$), тогда ι-знак представляет некоторое число.

Такого рода образование понятий, которые, вообще говоря, не нужны в чистой теории чисел, так как могут быть заменены «определениями» указанного выше рода (6.1), не имеет значения для вопроса о *непротиворечивости*, ибо такие понятия всегда можно *элиминировать* из вывода[1]).

РАЗДЕЛ III

СОМНИТЕЛЬНЫЕ И ДОСТОВЕРНЫЕ СПОСОБЫ ЗАКЛЮЧЕНИЯ В ЧИСТОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ[2])

Задачей доказательства непротиворечивости должно быть (2.31) обоснование *сомнительных* способов заключения (включая аксиомы и образование понятий) с использованием *достоверных* заключений. Поэтому для правильного понимания моего доказательства непротиворечивости, приводимого в разделе IV, необходимо разъяснить, какие способы заключения и иные средства доказательства из чистой теории чисел являются *сомнительными*, а какие, наоборот, можно считать надежными. *Однозначное разграничение* этого невозможно (ср. 1.8); все же можно привести соображения, очень убедительно подтверждающие допустимость некоторых средств доказательства. С другой

---

[1]) Доказательство этой «теоремы о ι-элиминируемости» имеется в книге: Hilbert — Bernays, Grundlagen der Mathematik, 1, 1934, стр. 422—457.

[2]) Ср. работы Гильберта и Вейля, цитированные в примечаниях [1]) и [2]) на стр. 77.

стороны, другие средства доказательства могут казаться *сомнительными*, так как для них не удается получить соответствующее обоснование и имеется отдаленная аналогия с ложными заключениями, встречающимися в *антиномиях* теории множеств.

Я теперь изложу такие соображения. Для этого я буду исходить из рассмотрения математической теории *конечных* областей объектов (§ 7) и затем рассмотрю особенности и трудности, возникающие при обобщении на *бесконечные* области объектов (§ 8—11).

§ 7. Математика конечных областей объектов

7.1. Математическое рассмотрение некоторой *конечной* области объектов может происходить, например, следующим образом.

Объекты области *пересчитываются*; каждый получает при этом определенное, присущее ему одному *обозначение*.

Функция или *предикат* определяются так. Пусть число аргументных мест равно ν. Для каждого возможного набора ν объектов из рассматриваемой объектной области предписывается, какой объект является соответствующим значением функции, соответственно для предикатов: истинен предикат для этого набора объектов или нет.

(Можно было бы допустить, чтобы функции и предикаты для некоторых комбинаций объектов вообще не были определены, это было бы несущественным усложнением.)

Так как всегда имеется лишь *конечное число* наборов из ν объектов, каждую функцию и каждый предикат можно *полностью* определить некоторой такой «определяющей таблицей».

7.2. Далее, для произвольного *определенного высказывания* (3.24), которое построено из данных объектов, функций и предикатов с помощью логических связок согласно 3.22, 3.23, можно *вычислить*, *истинно* оно или *ложно*, в соответствии со следующим формальным предписанием.

Высказывание представлено некоторой формулой без свободных переменных. Если в нее входит знак $\forall$, заменить соответствующую часть $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ на $[[\ldots[[\mathfrak{F}(\mathfrak{g}_1) \& \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_2)] \& \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_3)] \& \ldots] \& \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_\rho)]$, где $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_\rho$ — перечень всех объектов из рассматриваемой объектной области. Так же поступить с *каждым* встречающимся $\forall$, а каждое $\exists$ заменяется на соответствующее выражение с $\vee$ вместо $\&$.

После этого каждый входящий в формулу *терм* «вычисляется» с помощью определяющих таблиц входящих в него функций, т. е. заменяется знаком объекта, который представляет его «значение». Там, где несколько функций входят одна в другую, это происходит постепенно, начиная изнутри.

Затем для каждой встречающейся *минимальной формулы* (3.24) устанавливают на основе определяющей таблицы соответствующего предиката, какое высказывание она представляет: истинное или ложное. *Далее* следует постепенное установление (начиная изнутри) истинности или ложности частей формулы, объединенных произвольными логическими связками, в соответствии со следующими инструкциями.

$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ истинно, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оба истинны, в остальных случаях ложно; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ истинно, если $\mathfrak{A}$ истинно или же если $\mathfrak{B}$ истинно, а ложно только тогда, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оба ложны; $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ложно, если $\mathfrak{A}$ истинно и $\mathfrak{B}$ ложно, в любом другом случае $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ истинно; $\neg \mathfrak{A}$ истинно, если $\mathfrak{A}$ ложно, и, наоборот, ложно, если $\mathfrak{A}$ истинно.

Описанный метод в целом вытекает непосредственно из *содержательного смысла*, который мы связываем с формальными знаками. Для нас при этом существен только тот основной факт, что в теории с конечной областью объектов *разрешимо* любое относящееся к ней высказывание, т. е. что можно с помощью определенной процедуры в конечное число шагов установить, истинно это высказывание или ложно.

7.3. Легко доказать, что *логические правила заключения* (5.2) *истинны* в применении к этой теории в том смысле, что истинна любая секвенция, выводимая с их помощью из истинных математических основных секвенций. При этом нужно следующим образом определить понятие «*истинности*» *секвенции* в соответствии с ее содержательным смыслом: секвенция без свободных переменных *ложна*, если все передние формулы истинны и задняя формула ложна; в любом другом случае она *истинна*. Секвенция со *свободными переменными истинна*, если она истинна при любой подстановке знаков объектов.

Такое доказательство означало бы не что иное, как *подтверждение* того, что мы действительно выбрали наши формальные правила заключения таким образом, что они находятся в *соответствии* с содержательным смыслом логических связок.

7.4. Надо заметить еще, что в *практике* математических теорий с *конечными* областями объектов в большинстве случаев не применяются описанные выше методы введения объектов, функций и предикатов и «вычисления» высказываний; при большом числе объектов они были бы слишком длительными. Чаще используются методы, аналогичные тем, которые находят применение для *бесконечной* области объектов и будут изложены ниже.

§ 8. Разрешимые понятия и высказывания в бесконечной области объектов

8.1. Что же изменится, если мы будем развивать теорию *бесконечной* области объектов, например теорию *натуральных чисел*?

8.11. Теперь уже невозможно *перечислить объекты*, чтобы *обозначить* их, так как их *бесконечно много.*

На место перечисления встает теперь *предписание для построения*, имеющее следующий вид: 1 обозначает натуральное число. Далее следуют $1+1$, $1+1+1$; в общем случае: из выражения, которое представляет натуральное число, получаем, добавляя $+1$, выражение для следующего натурального числа (знаки 2, 3, 4 и т. д. можно потом ввести как сокращения для $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ и т. д.; это не существенно).

Это предписание, сформулированное с помощью *конечного* числа слов, заключает в себе *возможность* все новых построений по одному и тому же *правилу* и порождает тем самым *бесконечный* числовой ряд («потенциальная бесконечность»).

8.12. Также и определение *функций* и *предикатов* нельзя дать с помощью перечисления всех отдельных значений, как для случая конечной области. Если, например, мы захотим дать определяющую таблицу для некоторой теоретико-числовой функции с одним аргументом, мы должны будем привести одно за другим ее значения для аргумента 1, 2, 3, 4 и т. д., т. е. *бесконечно много* значений. Это невозможно. Вместо этого дается *вычислительное предписание*, например, для функции $2 \cdot a$: $2 \cdot 1$ есть 2; $2 \cdot (b+1)$ есть $(2 \cdot b)+2$. Это предписание дает *возможность последовательно* вычислять значение функции для каждого натурального числа.

В общем случае функция или предикат считаются *разрешимо определенными*, если для них имеется *разрешающее предписание*, т. е. для каждого данного набора натуральных чисел соответствующее *значение функции* должно быть однозначно *вычислимо* на основе предписания, соответственно должно быть однозначно *разрешимо, истинен ли предикат* для этого набора чисел или *нет*.

Для всех определений функций и предикатов, приведенных в качестве примеров в 6.1, можно дать такие разрешающие предписания. Для образований понятий согласно 6.3 это, при некоторых обстоятельствах, может уже не иметь места. С помощью их *элиминации* связанная с этим *сомнительность* переносится на *логические способы заключения*; их я рассмотрю ниже (§ 9—11).

8.2. Рассмотрим теперь *высказывания* в теории бесконечной области натуральных чисел.

Для каждого данного определенного высказывания, в которое не входят связки *«все»* и *«существует»*, можно, как и в конечной области, *решить*, истинно оно или ложно. Правило здесь то же, что и в 7.2. Установление значений термов, а также истинности или ложности минимальных формул происходит теперь не на основе *определяющих таблиц*, а на основе *разрешающих предписаний* для соответствующих функций и предикатов.

Аналогично тому, как это сделано в конечной области, можно доказать допустимость применения *логических правил заключения* к таким высказываниям.

Напомним еще, что аналогичное утверждение имеет место также и для таких высказываний, в которых связки «для всех» и «существует» относятся *только к конечному множеству чисел.* Такие высказывания можно разрешить указанным выше способом, причем $\forall$ и $\exists$ заменяются на & и $\vee$ так же, как в 7.2. Кроме того, тем же способом можно доказать допустимость соответствующих способов заключения, т. е. $\forall$- и $\exists$-способов заключения (5.251) и полной индукции (5.253) при условии, что область изменения встречающихся при этом свободных и связанных переменных ограничена числами от 1 до некоторого фиксированного числа n.

§ 9. Понимание «в себе» трансфинитных высказываний[1])

9.1. Обратимся теперь к существенно *трансфинитным высказываниям*, т. е. к таким высказываниям, в которые входит связка «для всех» или «существует», относящаяся к совокупности всех натуральных чисел. Здесь мы сталкиваемся *с принципиально новым положением вещей.*

Прежде всего следует отметить, что *разрешающую процедуру* (7.2, 8.2), применимую в конечной области, уже не удается перенести на такие трансфинитные высказывания. Ведь, например, для высказывания о всех натуральных числах нужно было бы проверить *бесконечно много* отдельных случаев, что невозможно. И, вообще, нам неизвестно никакой разрешающей процедуры для произвольных трансфинитных высказываний и сомнительно, чтобы когда-нибудь ее можно было дать*). Имея такую процедуру, можно было бы согласно определенной

---

1) Ср. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. **95** (1926), 161—190.

*) В 1936 г., почти одновременно с этой работой Г. Генцена, появилось доказательство невозможности такой процедуры, принадлежащее А. Черчу (A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. **58** (1936), 345—363). — *Прим. перев.*

процедуре *вычислить*, например, для недоказанной сейчас великой теоремы Ферма (так же как и для теоремы Гольбаха и т. д.), истинна она или ложна.

Какой же *смысл* должны мы тогда связывать с высказыванием, истинность которого мы не в состоянии проверить?

9.2. Традиционная точка зрения такова: для каждого трансфинитного высказывания (например, для теоремы Ферма) заранее («в себе») определено, «истинно» оно или «ложно», независимо от того, знаем мы об этом или нет и узнаем ли когда-либо, какой из двух случаев имеет место. Каждое трансфинитное высказывание имеет определенный *смысл само по себе*. В частности, смысл $\forall$-высказывания таков: для *каждого* отдельного числа из бесконечного множества всех натуральных чисел справедливо соответствующее высказывание; смысл $\exists$-высказывания таков: в бесконечной совокупности натуральных чисел *где-то* имеется число, для которого справедливо соответствующее высказывание.

Исходя из такого понимания, заключают далее, что для *трансфинитных* высказываний имеют место те же *логические способы заключения*, что и в конечном, так как смысл «в себе» логических связок в бесконечном полностью соответствует их смыслу в конечном.

9.3. В этом пункте имеется уже достаточный повод для *критики*, поскольку мы решили сделать самые *крайние* выводы из результатов, полученных при рассмотрении *антиномий* теории множеств. Теперь я хочу сделать это, а именно, я хочу в качестве результата критического рассмотрения антиномии Рассела (1.6) сформулировать следующее *основное положение*.

Бесконечную совокупность нельзя рассматривать как нечто законченное, данное само по себе (актуальная бесконечность), а можно рассматривать лишь как нечто становящееся, нечто такое, что можно все дальше и дальше надстраивать над конечным (потенциальная бесконечность).

9.4. Приведенные в § 8 конструктивные *методы введения объектов, функций и предикатов* отвечают этому основному положению. Ведь там явным образом лежит в основе идея постепенного *построения* натурального ряда, исходя из начала, а не представление о *законченной* совокупности всех натуральных чисел. То же самое имеет место для высказываний, рассмотренных в 8.2; ведь они утверждают нечто не о *бесконечной* совокупности, а лишь о *конечном* числе объектов.

9.5. Напротив, воспроизведенное в 9.2 понимание «в себе» *трансфинитных высказываний не соответствует* этому основному положению, так как в его основе лежит представление о законченном бесконечном числовом ряде.

Одновременно следует *отвергнуть* точку зрения, согласно которой можно без дальнейших оговорок перенести логические *способы заключения* с конечных областей объектов на бесконечные.

Я напоминаю об *аналогичном*, разумеется, тривиальном, *случае* недопустимого обобщения с конечного на бесконечное, а именно об известном софизме: «Любое (конечное) множество натуральных чисел содержит наибольшее число; поэтому и множество (бесконечное) *всех* натуральных чисел содержит наибольшее число». А так как последнее неверно, отсюда получается противоречие.

9.6. Но после этого отказа от понимания «в себе» трансфинитных высказываний у нас остается лишь возможность *придать* им некоторый *«финитный» смысл*, т. е. *понимать* такое высказывание в каждом случае как отображение некоторого определенного *конечно*-представимого положения вещей.

Затем мы должны в каждом случае проверить, удовлетворяют ли соответствующие *логические способы заключения* этому пониманию *высказываний*.

В § 10 это будет проделано для значительной части трансфинитных высказываний и соответствующих способов заключения. Затем в § 11 я рассмотрю остальные формы высказываний и способы заключения; при этом метод наталкивается на трудности и выявляется значение *интуиционистского* (1.8) *разграничения* между разрешенными и запрещенными средствами заключения в теории чисел. Далее окажется также разумным другое, еще *более жесткое разграничение*.

§ 10. Финитное понимание связок $\forall$, &, $\exists$ и $\vee$ в трансфинитных высказываниях

Я представил себе сначала теорию чисел, которая выдвигает высказывания лишь о *конечном* количестве чисел. Теперь я буду постепенно добавлять определенные типы *трансфинитных* высказываний.

10.1. $\forall$-связка.

10.11. Начнем с простейшей формы трансфинитного высказывания: $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{F}$ еще не содержит ни $\forall$, ни $\exists$, так что *проверяема* истинность $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ для каждого *конкретного* натурального числа, подставленного вместо $\mathfrak{x}$ (8.2).

Истинными высказываниями этого вида являются, например,

$$\forall x (2 | x \vee \neg 2 | x); \qquad \forall x (x = x).$$

Такие высказывания рассматриваются как несомненно осмысленные и истинные. С этим $\forall$ совершенно не нужно связывать представление о *законченной* бесконечной совокупности отдельных высказываний. Его смысл можно «*финитно*» понимать следующим образом. «Если, начиная с 1, подставлять вместо $\mathfrak{x}$ по очереди следующие друг за другом числа, то, как бы далеко мы ни продвинулись в построении чисел, каждый раз будет получаться истинное высказывание».

10.12. Это понимание можно обобщить на случай произвольного высказывания $\mathfrak{F}$, которому уже придан финитный смысл. В этом случае про $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ можно сказать, что оно осмысленно, если $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ представляет осмысленное и истинное утверждение для любого из чисел, подставляемых одно за другим вместо $\mathfrak{x}$.

10.13. *Способы заключения*, соответствующие $\forall$-связке, т. е. $\forall$-введение и $\forall$-удаление (5.251), находятся в соответствии с этим пониманием. При $\forall$ *-введении* имеется доказательство того, что при определенных допущениях (Γ) (*трансфинитные* допущения сначала совершенно бессмысленны и временно не входят в рассмотрение) $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ истинно, и отсюда выводится, что при тех же допущениях имеет место $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Здесь все в порядке, так как для произвольного числа $\mathfrak{n}$ можно, подставив $\mathfrak{n}$ вместо $\mathfrak{a}$ во всем доказательстве, получить доказательство для $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ (из тех же допущений Γ: ведь согласно ограничению на переменные для $\forall$-введения эти допущения не содержат $\mathfrak{a}$ и потому не меняются в результате подстановки). При $\forall$-удалении из $\Gamma\rightarrow\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ выводится $\Gamma\rightarrow\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Терм $\mathfrak{t}$ после подстановки каких-либо натуральных чисел вместо входящих (возможно) в него свободных переменных представляет определенное натуральное число $\mathfrak{n}$. Высказывание $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ согласно своему финитному смыслу включает в себя и утверждение о том, что имеет место $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$; поэтому и с этим способом заключения все в порядке.

10.14. Обычные *теоретико-числовые аксиомы* можно сформулировать таким образом, чтобы они получились из высказываний, не содержащих ни $\forall$, ни $\exists$, добавлением нескольких $\forall$-связок, относящихся ко всему высказыванию (ср. 6.2). Утверждение о том, что эти аксиомы *истинны* в смысле финитного понимания $\forall$ и на основе разрешимых определений входящих в них функций и предикатов, столь *очевидно*, что не требует дальнейшего исследования. Едва ли возможно также свести это утверждение к чему-то принципиально более простому.

10.2. & - с в я з к а.

Относительно трансфинитного высказывания вида $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ можно утверждать, что оно осмысленно и истинно, если уже известно, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — осмысленные и истинные высказывания. Очевидно, что правила &-введения и &-удаления находятся в соответствии с этим пониманием (при этом, как и выше, случай трансфинитных допущений (Γ, Δ) пока исключается).

10.3. $\exists$ - с в я з к а.

У читателя могло сложиться впечатление, что «финитное понимание» приписывает трансфинитному высказыванию, по существу, тот же смысл, который с ним обычно связывают и без этого. Рассмотрение $\exists$ и $\vee$, которое последует сейчас, покажет, что это не совсем так (см. 10.6).

Какой смысл мы хотим придать высказыванию вида $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$? Понимание *в себе*: «*где-то* в бесконечном натуральном ряде имеется число со свойством $\mathfrak{F}$» мы считаем *бессмысленным.* Однако если бы было установлено, что высказывание $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ с некоторым *определенным* числом $\mathfrak{n}$ осмысленно и истинно, то отсюда мы могли бы заключить ($\exists$-введение) $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Против этого нечего возразить. Высказывание $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ представляет теперь лишь некоторое *ослабление* высказывания $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ («частное высказывание» у Гильберта, абстракт суждения у Вейля), а именно, оно утверждает только то, что мы нашли некоторое число $\mathfrak{n}$ со свойством $\mathfrak{F}$, но само это число в нем не дано. Тем самым $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ имеет финитный смысл.

Если при $\exists$-введении вместо $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ стоит $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ с *произвольным* термом $\mathfrak{t}$, ничто существенно не меняется. А именно, если подставить вместо входящих туда свободных переменных определенные числа (ведь именно их и обозначают свободные переменные), то $\mathfrak{t}$ перейдет в число $\mathfrak{n}$, вычислимое на основе разрешимых определений функций. Наличие нетрансфинитных допущений (Γ) при $\exists$-введении, по существу, не меняет дела.

Посмотрим теперь, как можно выводить с помощью $\exists$-удаления новые высказывания из некоторого уже доказанного высказывания вида $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ на основе его *финитного смысла*? Очевидно, что, в отличие от $\forall$ и &, уже нельзя *вновь получить* из $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ высказывание $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, которое послужило обоснованием для утверждения $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, так как непосредственно из $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ уже нельзя усмотреть величину $\mathfrak{n}$. Однако вполне возможно поступить следующим образом. Заключим, что имеет место $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — некоторая свободная переменная, представляющая число $\mathfrak{n}$, истинную величину которого нам не требуется знать в данный момент. Тогда, если удастся вывести отсюда какое-либо высказывание $\mathfrak{C}$, не содержащее $\mathfrak{a}$, то это высказывание истинно. Тем самым мы имеем $\exists$-удаление согласно 5.251.

В этом правиле заключения впервые появляется *принадлежащее ему допущение*, а именно $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$. Оно может быть *трансфинитным.* До сих пор мы приписывали смысл только *доказанным* трансфинитным высказываниям, но не трансфинитным высказываниям как *допущениям.* Здесь мы можем сказать: так как $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ осмысленно и доказано, то натуральное число $\mathfrak{n}$ уже было найдено и его можно реконструировать на основе доказательства $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, причем $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ также представляет осмысленное и истинное высказывание. Теперь мы *рассматриваем* допущение $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ совсем не как произвольное допущение, а как *вышеупомянутое* истинное высказывание $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, причем $\mathfrak{a}$ обозначает не что иное, как число $\mathfrak{n}$. Тогда доказательство $\mathfrak{C}$ из допущения $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ оказывается уже не *гипотетическим*, а обычным *прямым* доказательством; и именно в этом его *смысл*.

10.4. $\vee$-связку можно рассмотреть аналогично $\exists$ так же, как & аналогично $\forall$. Можно утверждать, что трансфинитное высказывание вида $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ осмысленно и истинно, если об одном из высказываний $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *уже известно*, что оно осмысленно и истинно. Правило $\vee$-*введения* вполне отвечает этому пониманию. $\vee$-*удаление* происходит так: если имеется $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ и как из допущения $\mathfrak{A}$, так и из допущения $\mathfrak{B}$ следует одно и то же высказывание $\mathfrak{C}$, то имеет место $\mathfrak{C}$. Здесь все в порядке, так как $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ заключает в себе утверждение о том, что уже была установлена истинность $\mathfrak{A}$ либо истинность $\mathfrak{B}$. Поэтому, как и при $\exists$-удалении, можно либо освободить доказательство $\mathfrak{C}$ из $\mathfrak{A}$ от допущения $\mathfrak{A}$, либо освободить доказательство $\mathfrak{C}$ из $\mathfrak{B}$ от допущения $\mathfrak{B}$ и сделать его прямым доказательством. При этом второе доказательство станет излишним и может считаться бессмысленным.

10.5. Отметим здесь коротко, как выясняется, что правило *полной индукции* согласовано с финитным пониманием. Пусть $\mathfrak{F}(1)$ — осмысленное истинное высказывание. Терм $\mathfrak{t}$ из окончательного результата $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ представляет после подстановки чисел вместо входящих, возможно, в него свободных переменных определенное число $\mathfrak{n}$. Тогда можно последовательно подставить в доказательство $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ из $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ вместо $\mathfrak{a}$ числа 1, 2, 3 до $\mathfrak{n}-1$ и построить таким образом *прямое* доказательство, исходя из истинного высказывания $\mathfrak{F}(1)$ и переходя к $\mathfrak{F}(2)$, $\mathfrak{F}(3)$ и т. д. до $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, так что $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ является истинным, осмысленным высказыванием. Это звучит тривиально. Существенно здесь то, что *бессмысленное вначале* (поскольку оно трансфинитно) допущение $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ *получает смысл* из-за возможности преобразования соответствующей части доказательства в *прямое доказательство*, в котором формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ *уже не* фигурирует *больше в качестве допущения*.

10.6. Описанное финитное понимание связок $\exists$ и $\vee$ *отлично* от их понимания «в себе» не только *понятийно*, но и по *практическим последствиям*, как показывают следующие *примеры*.

Высказывание: «Великая теорема Фермá либо истинна, либо не истинна» *истинно* при понимании «в себе». Однако в силу финитного смысла $\vee$ мы *не* можем утверждать этого. Для этого требовалось бы, чтобы относительно *одного* из этих двух высказываний было уже известно, что оно истинно. В настоящий момент это не так.

Соответствующий пример с $\exists$ дает высказывание

$$\exists x \{[\forall y \forall z \forall u \forall v (v > 2 \supset y^v + z^v \neq u^v)] \vee \\ \vee [\exists y \exists z \exists u (x > 2 \,\&\, y^x + z^x = u^x)]\},$$

словесно: «существует число x такое, что либо теорема Фермá истинна, либо существует контрпример с показателем x». Это высказывание истинно при понимании «в себе». Однако при финитном истолковании $\exists$ мы не можем утверждать, что оно истинно, так как в настоящее время такое число x неизвестно.

Оба эти высказывания не удается *доказать* с помощью рассмотренных *до сих пор способов заключения*, которые мы признали соответствующими финитному пониманию. Для их доказательства надо добавить способы заключения, относящиеся к $\neg$ (ср. 11.2).

10.7. Исследованное в этом параграфе финитное понимание трансфинитных высказываний со связками $\vee$, &, $\exists$ и $\vee$ и связанное с этим обоснование соответствующих способов заключения *неполно* в нескольких отношениях. В частности, нужно было бы подробнее остановиться на значении высказываний, в которых ряд таких связок входит *в область действия друг друга*. Я не делаю этого, так как меня интересуют лишь *основные идеи*.

Затем можно было бы, исходя из этих соображений, развить чисто формальное *доказательство непротиворечивости* для этой части теории чисел. Но оно имело бы небольшую ценность, так как в самом доказательстве пришлось бы *использовать* те самые трансфинитные высказывания и способы заключения, которые мы хотели «*обосновать*» с его помощью. Поэтому доказательство означало бы не подлинное *сведение*, а лишь *подтверждение финитного* характера формализованных правил заключения. Однако в вопрос о том, что же является *финитным*, нужно было внести ясность *заранее* (чтобы затем вести само доказательство непротиворечивости финитными средствами доказательства).

§ 11. Связки $\supset$ и $\neg$ в трансфинитных высказываниях; интуиционистское разграничение

11.1. $\supset$-связка.

Мы хотим теперь присоединить трансфинитные высказывания с $\supset$-связкой.

Что означает $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$? Пусть, например, дано *доказательство*, в котором, исходя из допущения $\mathfrak{A}$ с помощью заключений, уже признанных допустимыми, доказано высказывание $\mathfrak{B}$. Отсюда с помощью $\supset$-введения заключаем $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$. Это высказывание как раз и утверждает, что мы имеем в своем распоряжении *доказательство*, позволяющее, как только доказано суждение $\mathfrak{A}$, продолжить рассуждение и доказать суждение $\mathfrak{B}$. Способ заключения $\supset$-*удаление* находится в соответствии с этим пониманием: этим способом из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ *получают* $\mathfrak{B}$, что является совершенно правильным, так как $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ как раз и утверждает, что имеется доказательство для $\mathfrak{B}$ при условии, что $\mathfrak{A}$ уже доказано.

При этом понимании $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ я предполагал, что данное доказательство $\mathfrak{B}$ из допущения $\mathfrak{A}$ содержит лишь такие заключения, которые *уже признаны допустимыми*. Но такое доказательство также может снова содержать $\supset$-заключения и тогда наше истолкование *отказывает*. Действительно, мы совершили бы *порочный* круг, если бы стали обосновывать $\supset$-способы заключения на основе $\supset$-истолкования, в котором уже была использована допустимость *этих же* способов заключения. Поэтому пришлось бы *предварительно* обосновывать *уже входящие в доказательство* $\supset$-заключения. Это имеет свои трудности прежде всего в случае, когда допущение $\mathfrak{A}$ само имеет форму $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$, т. е. когда нет никакого доказательства $\mathfrak{D}$ из $\mathfrak{C}$, на основе которого $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ могло бы получить *смысл*.

Чтобы преодолеть эти трудности, нужно разработать более сложные правила истолкования. В этом и состоит одна из *основных задач доказательства непротиворечивости*, приводимого в разделе IV.

11.2. $\neg$-*связка* ставит на пути финитного истолкования еще больше препятствий, чем $\supset$. Ведь финитное истолкование всегда происходило таким образом, что трансфинитное высказывание объявлялось новым выражением для чего-то, признанного ранее истинным.

Согласно пониманию «в себе» $\neg\mathfrak{A}$ не утверждает, что нечто *истинно*, а чисто негативно утверждает, что нечто, а именно высказывание $\mathfrak{A}$, *не истинно*.

Все же кажется возможным следующее *позитивное* истолкование: $\neg\mathfrak{A}$ является истинным и осмысленным, если имеется доказательство того, что из допущения истинности $\mathfrak{A}$ следует нечто несомненно ложное.

При таком истолковании $\neg$-связка была бы *сведена* к $\supset$-связке, можно было бы просто объявить $\neg\mathfrak{A}$ равнозначным, например, с $\mathfrak{A} \supset 1 = 2$. Как можно показать чисто формально, способ заключения «*опровержение*» находится в *соответствии* с таким пониманием: из $\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \mathfrak{B} \supset 1 = 2$ можно вывести $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \supset 1 = 2$. Это происходит так: с помощью $\supset$-удаления получаем $\mathfrak{A}, \Gamma, \mathfrak{A}, \Delta \rightarrow 1 = 2$, поэтому (5.242) $\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta \rightarrow 1 = 2$, откуда с помощью $\supset$-введения $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \supset 1 = 2$. Тем самым «опровержение» было бы сведено к $\supset$-способам заключения.

Остается принять во внимание, что при этом сведении $\neg$ к $\supset$ *сомнения*, имеющиеся относительно $\neg$, естественно переносятся соответствующим образом на $\supset$-связку.

Но далее возникает еще новая трудность: вообще *не* удается доказать, что «*удаление двойного отрицания*» соответствует приведенному $\neg$-истолкованию. Совершенно не понятно, каким образом из истинности $(\mathfrak{A} \supset 1 = 2) \supset 1 = 2$ должна вытекать истинность $\mathfrak{A}$.

Вообще этот способ заключения существенно *выпадает* из круга остальных способов заключения. Для логических связок $\forall$, &, $\exists$, $\vee$ и $\supset$ мы всегда имеем правила *введения* и *удаления*, определенным образом соответствующие друг другу (см. обсуждение в § 10 и 11.1). Для $\neg$-связки правило «опровержение» можно рассматривать и как «введение» ($\neg$ в $\neg\mathfrak{A}$) и как «удаление» ($\neg$ из $\neg\mathfrak{B}$). Напротив, способ заключения «удаление двойного отрицания» представляет собой *дополнительное* $\neg$-удаление, которое не соответствует $\neg$-введению с помощью «опровержения». Он позволяет *доказывать положительное высказывание* ($\mathfrak{A}$) *непрямым* способом, путем опровержения противоположного. При этом может оказаться, что прямое доказательство этого высказывания вообще не может быть получено. В частности, именно этим способом можно доказать оба высказывания с $\vee$ и $\exists$, приведенные в 10.6 в качестве примеров (там же указано, что их истинность нельзя утверждать при финитном истолковании).

Отсюда вытекает, что способ заключения «удаление двойного отрицания» вообще никаким образом нельзя включить в такое финитное истолкование, которое мы выбирали для $\vee$ и $\exists$.

11.3. *Интуиционистское разграничение в теории чисел* состоит в запрещении способа заключения «удаление двойного отрицания» для *трансфинитных* высказываний $\mathfrak{A}$. Часто оно формулируется как запрещение «закона исключенного третьего» $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ для трансфинитных высказываний $\mathfrak{A}$, что сводится к тому же[1]).

Представленное в §10 «*финитное* понимание» связок $\forall$, &, $\exists$ и $\vee$ в трансфинитных высказываниях совпадает в существенных чертах с пониманием *интуиционистов*. Однако они допускают *более общее* применение $\supset$-связки. $\neg$-связка истолковывается

[1]) Ср. A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte d. Preuß Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl., 1930, 42—56.

с помощью сведе́ния к $\supset$, как в 11.2. Этому соответствует способ чтения «$\mathfrak{A}$ *абсурдно*» вместо «$\mathfrak{A}$ не имеет места» для $\neg\mathfrak{A}$.

Именно те причины, которые привели к тому, что мы отвергли «удаление двойного отрицания», выделяют его среди остальных способов заключения. Я считаю однако, что с не меньшим правом можно отстаивать еще более *далеко идущие сомнения*, которые могут касаться, в частности, общего применения $\supset$ (11.1).

Теорема Гёделя о равнозначности интуиционистской и полной теории чисел.

Как впервые доказал К. Гёдель[1]), с помощью особого истолкования трансфинитных высказываний можно добиться того, чтобы из любого чисто теоретико-числового доказательства был *элиминирован* способ заключения *«удаление двойного отрицания» с трансфинитным* $\mathfrak{A}$. Тем самым любое такое доказательство становится интуиционистски допустимым.

Тем самым *полная* теория чисел (при понимании «в себе») сведена к *интуиционистской* теории чисел. В частности, если последняя *непротиворечива*, то и первая тоже.

Соответствующее истолкование таково: связки &, $\forall$, $\supset$ и $\neg$ получают их *интуиционистский* смысл. Иначе обстоит дело с $\vee$ и $\exists$; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ истолковывается как $\neg[(\neg\mathfrak{A}) \,\&\, \neg\mathfrak{B}]$, $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ как $\neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Ведь $\vee$ и $\exists$ не могут получить своего интуиционистского значения, так как примеры высказываний, приведенные в 10.6, доказуемы в теории чисел, основанной на понимании «в себе», но недоказуемы в интуиционистской теории чисел *). Если же в этих примерах заменить указанным способом

[1]) K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eine math. Koll., Heft **4** (1933), 34—38. — Упомянутый в тексте результат был несколько позднее независимо от Гёделя доказан П. Бернайсом и мной. — Гёдель заменяет дополнительно $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ на $\neg(\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{B})$. Это не нужно при моей системе правил, так как я не применяю переменных для высказываний.

*) Утверждение о недоказуемости примеров из 10.6 в формальной системе, называемой интуиционистской теорией чисел, не доказано, и может, вообще говоря, оказаться неверным, если будет найдено доказательство теоремы Ферма́ или ее отрицания в рамках интуиционистской (или хотя бы классической) теории чисел. Цель, которую преследует автор, может быть достигнута так: в силу теоремы Гёделя о неполноте (см. 2.32) имеется замкнутая формула $\mathfrak{A}$, такая, что как $\mathfrak{A}$ так и $\neg\mathfrak{A}$ недоказуемы в интуиционистской теории чисел. Из теоремы Р. Харропа о том, что дизъюнкция замкнутых формул выводима в интуиционистской теории чисел тогда и только тогда, когда выводим хотя бы один из членов (R. Harrop, On disjunctions and existential statements in intuitionistic systems of logic, Math. Annalen **132** (1956), 347—361) следует, что в интуиционистской теории чисел невыводима формула $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$. Формула

$$\exists x\,((x = 0 \supset \mathfrak{A}) \,\&\, (x \neq 0 \supset \neg\mathfrak{A}))$$

эквивалентна формуле $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ и потому также невыводима в интуиционистской теории чисел. — *Прим. перев.*

$\vee$ и $\exists$ с помощью &, $\forall$ и $\neg$, то получаются *интуиционистски* доказуемые высказывания.

В моем доказательстве непротиворечивости «удаление двойного отрицания» также не доставляет существенных трудностей (13.93).

11.4. Что касается *доказательств, встречающихся практически в теории чисел*, то *можно считать*, что там *не встречаются* способы заключения, которые мы сочли сомнительными, так как не смогли до сих пор обосновать их с помощью финитного истолкования. В силу наших рассмотрений таковы прежде всего «удаление двойного отрицания» (и «закон исключенного третьего») в применении к трансфинитным высказываниям, а также применение трансфинитных высказываний с несколькими слоями связок $\supset$ и $\neg$.

Едва ли вообще на практике встречаются трансфинитные высказывания сложного строения. Например, в *евклидовом доказательстве*, проведенном в § 4, единственными существенно трансфинитными высказываниями являются встречающиеся в конце $\exists z(\mathrm{Prim}\,z \,\&\, z > 0)$ и $\forall y \exists z(\mathrm{Prim}\,z \,\&\, z > y)$. Доказательство в целом совершенно *финитно*. Все остальные встречающиеся в нем трансфинитные (т. е. содержащие $\forall$ или $\exists$) высказывания таковы, что связанные переменные в них ограничены *конечной* частью числового ряда.

В качестве примера более сложного доказательства я просмотрел доказательство «квадратичного закона взаимности»[1]), данное Целлером. И здесь я тоже не нашел ни одного «сомнительного заключения».

Совершенно естественно, что эти и аналогичные доказательства производят впечатление *неоспоримой правильности*. В них имеется в виду скорее финитное понимание трансфинитных высказываний, а не их понимание «в себе».

Поэтому задачей *доказательства непротиворечивости* для *чистой теории чисел* является в большей степени обоснование *возможных при понимании в себе*, чем действительно встречающихся заключений.

РАЗДЕЛ IV

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Я докажу теперь непротиворечивость всей формализованной в разделе II чистой теории чисел.

Согласно 2.31 нужно следить за тем, чтобы способы заключения и образования понятий, используемые в *самом* доказа-

[1]) См., например, P. Bachmann, Die Elemente der Zahlentheorie, III, 10.

тельстве непротиворечивости, были *достоверными* или по крайней мере существенно более надежными, чем сомнительные способы заключения чистой теории чисел. В силу соображений, изложенных в разделе III, можно считать, что это требование выполнено, если применяемые средства доказательства являются *финитными* (в смысле § 9—11). Насколько это так, будет более подробно исследовано в разделе V (16.1).

§ 13—15 содержат ядро доказательства непротиворечивости, в то время как § 12 посвящен сравнительно простым *приготовлениям.*

§ 12. Устранение знаков $\vee$, $\exists$ и $\supset$ из данного вывода

Пусть дан какой-нибудь теоретико-числовой вывод (5.22). Нужно доказать, что он непротиворечив, т. е. что его конечная формула не может иметь вид $\mathfrak{A}\,\&\neg\mathfrak{A}$.

Я начну с некоторого предписания о *преобразовании данного вывода.* С помощью этого преобразования мы добьемся того, чтобы связки $\vee$, $\exists$ и $\supset$ *не входили больше* в вывод.

12.1. В той логике, с которой мы имеем дело в неограниченной теории чисел*), различные *логические связки* могут быть разными способами *выражены через другие* связки. С помощью *трех связок*, а именно, с помощью $\neg$, любой из связок $\&$, $\vee$, $\supset$ и любой из связок $\forall$ и $\exists$ можно выразить все остальные связки. Я использую это для облегчения доказательства непротиворечивости, а именно, я *сохраню* знаки $\&$, $\forall$ и $\neg$ и с их помощью *заменю* знаки $\vee$, $\exists$ и $\supset$.

Сомнительность, связанная с $\supset$ (11.1), не исчезает в результате этого; она будет перенесена на $\neg$.

Замена происходит так:

вместо $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ подставляется $\neg((\neg\mathfrak{A})\,\&\neg\mathfrak{B})$;

вместо $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ подставляется $\neg(\mathfrak{A}\,\&\neg\mathfrak{B})$;

вместо $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ подставляется $\neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

Этим способом заменяются все входящие в вывод знаки $\vee$, $\exists$ и $\supset$. Очевидно, что безразлично, в какой *очередности* это происходит.

12.2. Теперь мы должны выяснить, насколько *корректным остался* данный *вывод* после этих замен, и *преобразовать* его соответствующим образом там, где это не имеет места. Возможность такого преобразования весьма правдоподобна, так как при понимании «в себе» те новые способы записи, которые под-

*) То есть в теории чисел без интуиционистских ограничений. — *Прим. перев.*

ставляются в случаях $\vee$, $\exists$ и $\supset$, *эквивалентны* первоначальным. Поэтому нетрудно дать и более точное формальное доказательство.

Логические основные секвенции (5.23) переходят в логические основные секвенции.

То же имеет место для *математических основных секвенций*, при условии, что любая математическая аксиома, в которую входят связки $\vee$, $\exists$ и $\supset$, снова переходит в математическую аксиому после замены этих связок с помощью $\neg$, $\&$ и $\forall$. Это условие легко выполнить; простейший способ — с самого начала формулировать аксиомы, не используя $\vee$, $\exists$ и $\supset$.

Очевидно, что останутся корректными *структурные изменения* (5.24) и *применения всех правил заключения* (5.25), за исключением правил заключения, принадлежащих знакам $\vee$, $\exists$ или $\supset$. Последние нужно заменить применениями *других* правил согласно следующим предписаниям:

$\vee$-*введение* «из $\Gamma\to\mathfrak{A}$ получается $\Gamma\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$» после замены гласит: «из $\Gamma^*\to\mathfrak{A}^*$ получается $\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*)$». Здесь $\mathfrak{A}^*$ обозначает формулу, которая получается из $\mathfrak{A}$ в результате замены; $\mathfrak{B}^*$ и Γ^* следует понимать соответствующим образом.

Словесно новая формулировка с помощью способов заключения для $\&$ и $\neg$ гласит следующее: при допущениях Γ^* имеет место $\mathfrak{A}^*$. Если бы имело место $(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*$, то, в частности, имело бы место $\neg\mathfrak{A}^*$, что противоречило бы $\mathfrak{A}^*$, поэтому при допущениях Γ^* имеет место $\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*)$.

Этому соответствует следующее *формальное* предписание. Рассматриваемое место вывода изменяется так: $(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*\to$ $\to(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*$ является основной секвенцией; с помощью $\&$-удаления получается $(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*\to\neg\mathfrak{A}^*$, что вместе с секвенцией $(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*,\ \Gamma^*\to\mathfrak{A}^*$, которая получается из $\Gamma^*\to\mathfrak{A}^*$ в соответствии с 5.243, дает по правилу «опровержение» $\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*)$.

Со второй формой $\vee$-введения поступают совершенно аналогично.

$\vee$-*удаление* гласит после замены: «Из $\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*)$ и $\mathfrak{A}^*,\ \Delta^*\to\mathfrak{C}^*$ и $\mathfrak{B}^*,\ \Theta^*\to\mathfrak{C}^*$ получается $\Gamma^*,\ \Delta^*,\ \Theta^*\to\mathfrak{C}^*$». Это изменяется так: $\neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{C}^*$ дает $\mathfrak{A}^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{C}^*$; это вместе с $\mathfrak{A}^*,\ \Delta^*\to\mathfrak{C}^*$ дает по правилу «опровержение» $\Delta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{A}^*$; таким же образом $\mathfrak{B}^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{C}^*$ дает вместе с $\mathfrak{B}^*,\ \Theta^*\to\mathfrak{C}^*$ секвенцию $\Theta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{B}^*$; из обоих результатов с помощью $\&$-введения получается $\Delta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*,\ \Theta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*$, поэтому (5.242, 5.241) $\neg\mathfrak{C}^*,\ \Delta^*,\ \Theta^*\to(\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*$; из $\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\,\&$ $\&\neg\mathfrak{B}^*)$ получается $\neg\mathfrak{C}^*,\ \Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\,\&\neg\mathfrak{B}^*)$, откуда с помощью «опровержения» получаем $\Delta^*,\ \Theta^*,\ \Gamma^*\to\neg\neg\mathfrak{C}^*$, и, наконец, с помощью «удаления двойного отрицания» $\Delta^*, \Theta^*, \Gamma^* \to \mathfrak{C}^*$, откуда (5.241) $\Gamma^*, \Delta^*, \Theta^* \to \mathfrak{C}^*$.

$\exists$-*введение* ($\exists$-*удаление*) рассматривается совершенно аналогично $\vee$-введению (соответственно $\vee$-удалению); при изменении рассматриваемого места вывода вместо $\exists$-удаления появляется $\forall$-введение и вместо $\exists$-введения появляется $\forall$-удаление*). Это легко провести.

$\supset$-введение после замены гласит: «Из $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{B}^*$ получается $\Gamma^* \to \neg(\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*)$». Это изменяется так: $\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*$ дает как $\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$, так и $\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \neg\mathfrak{B}^*$, а потому и $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \neg\mathfrak{B}^*$; это вместе с $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{B}^*$ дает $\Gamma^*, \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \neg\mathfrak{A}^*$, следовательно, $\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \neg\mathfrak{A}^*$. Вместе с $\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ отсюда получается $\Gamma^* \to \neg(\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*)$.

$\supset$-*удаление* после замены гласит: «Из $\Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ и $\Delta^* \to \neg(\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*)$ получается $\Gamma^*, \Delta^* \to \mathfrak{B}^*$». Это изменяется так: $\Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ и $\neg\mathfrak{B}^* \to \neg\mathfrak{B}^*$ дает $\Gamma^*, \neg\mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*$, поэтому $\neg\mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*$; вместе с $\neg\mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \neg(\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*)$ отсюда получается $\Gamma^*, \Delta^* \to \neg\neg\mathfrak{B}^*$, откуда $\Gamma^*, \Delta^* \to \mathfrak{B}^*$.

12.3. Тем самым удалось преобразовать данный вывод в вывод, в который *не входят больше* знаки $\vee$, $\exists$ и $\supset$. Заметим, что *конечная формула* вывода изменяется только тогда, когда она содержит $\vee$, $\exists$ или $\supset$.

12.4. Следует отметить, что в силу теоремы, упоминавшейся в 11.3, данный вывод теперь уже, по существу, является *интуиционистски* допустимым теоретико-числовым выводом, ибо «удаление двойного отрицания», если оно еще применяется, можно заменить другими правилами заключения.

§ 13. Редукция секвенций

Определяемое ниже понятие «наличия *редукционного предписания»* служит нам в качестве формальной замены содержательного *понятия истинности*; оно дает *особое финитное истолкование* высказываний, которое заменяет их *понимание «в себе»* (ср. § 9—11).

*) В подлиннике в этом месте имеется ошибка: буквальный перевод гласит: «появляется $\forall$-удаление вместо &-удаления, соответственно $\forall$-введение вместо &-введения».

Приводим поэтому более подробно измененный вывод.

$\exists$-*введение*: «Из $\Gamma^* \to \mathfrak{F}^*(\mathfrak{t})$ получается $\Gamma^* \to \neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x})$». Из $\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x}) \to \forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x})$ с помощью $\forall$-удаления получаем $\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x}) \to \neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{t})$. Вместе с $\Gamma^* \to \mathfrak{F}^*(\mathfrak{t})$ это дает с помощью структурных изменений и «опровержения» $\Gamma^* \to \neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x})$.

$\exists$-*удаление*: «Из $\Gamma^* \to \neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x})$ и $\mathfrak{F}^*(\mathfrak{a}), \Delta^* \to \mathfrak{C}^*$ получается $\Gamma^*, \Delta^* \to \mathfrak{C}^*$». Из $\neg\mathfrak{C}^* \to \neg\mathfrak{C}^*$ и $\mathfrak{F}^*(\mathfrak{a}), \Delta^* \to \mathfrak{C}^*$ получаем с помощью структурных изменений и «опровержения» $\neg\mathfrak{C}^*, \Delta^* \to \neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{a})$, откуда с помощью $\forall$-введения $\neg\mathfrak{C}^*, \Delta^* \to \forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x})$. Вместе с $\Gamma^* \to \neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}^*(\mathfrak{x})$ это дает $\Gamma^*, \Delta^* \to \neg\neg\mathfrak{C}^*$ (опровержение и структурные изменения). Удаляя двойное отрицание, получаем $\Gamma^*, \Delta^* \to \mathfrak{C}^*$. — *Прим. перев.*

Отдельный *редукционный шаг* над секвенцией, в которую не входят знаки $\vee$, $\exists$ и $\supset$, может быть проведен следующим образом (13.11—13.53):

13.11. Секвенция содержит хотя бы одну *свободную переменную*. Тогда заменяют свободную переменную всюду, где она входит в секвенцию, на один и тот же числовой знак, выбираемый произвольным образом.

13.12. Секвенция не содержит свободных переменных и в какую-либо из ее формул входит *минимальный терм* (3.24) (например, как часть более длинного терма). Тогда вместо него подставляют *соответствующее «значение функции»*, т. е. тот числовой знак, который в соответствии с определением рассматриваемой функции (см. 8.12) представляет ее значение для данных чисел в качестве аргументов.

Поэтому я предполагаю здесь относительно *функций*, что они *разрешимо определены* в смысле 8.12.

13.21. Секвенция не содержит ни свободных переменных, ни минимальных термов; ее *задняя формула* (5.21) имеет вид $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Тогда эту формулу заменяют на некоторую формулу $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, т. е. на формулу, которая получается из $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ в результате подстановки вместо $\mathfrak{x}$ *произвольно выбираемого числового знака* $\mathfrak{n}$.

13.22. Секвенция не содержит ни свободных переменных, ни минимальных термов; ее задняя формула имеет вид $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$. Тогда эту формулу заменяют, по выбору, формулой $\mathfrak{A}$ или формулой $\mathfrak{B}$.

13.23. Секвенция не содержит ни свободных переменных, ни минимальных термов; ее задняя формула имеет вид $\neg\mathfrak{A}$. Тогда эту формулу заменяют формулой $1=2$[1]) и добавляют $\mathfrak{A}$ к передним формулам секвенции в качестве последней формулы (ср. 11.2).

13.3. Если не имеет места ни один из названных до сих пор случаев, *задняя формула* секвенции должна быть *минимальной формулой* (3.24).

Я предполагаю теперь относительно *предикатов*, как выше относительно функций, что они *разрешимо определены* в смысле 8.12.

Вследствие этого можно на основе определения соответствующего предиката установить относительно данной минимальной

[1]) Я мог бы воспользоваться здесь также любой другой ложной минимальной формулой.

формулы, какое высказывание она представляет — *истинное или ложное*.

13.4. Секвенция не содержит ни свободных переменных, ни минимальных термов. Ее задняя формула является *истинной минимальной формулой*; или же задняя формула является *ложной минимальной формулой* (например, $1=2$) и одна из *передних формул* также является *ложной минимальной формулой*.

Для такой очевидным образом истинной секвенции (ср. 7.3) *не будет определен никакой редукционный шаг*.

13.5. Секвенция не содержит ни свободных переменных, ни минимальных термов; ее задняя формула есть ложная минимальная формула. Тогда допустимы следующие три различных вида редукционных шагов (двойственные к 13.2).

13.51. Одна из *передних формул* имеет вид $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Дописываем за ней переднюю формулу $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, т. е. формулу, которая получается из $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ подстановкой некоторого числового знака $\mathfrak{n}$ вместо переменной $\mathfrak{x}$. При этом формулу $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ можно оставить, а можно и отбросить.

13.52. Одна из передних формул имеет вид $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$. Дописываем за ней либо формулу $\mathfrak{A}$, либо формулу $\mathfrak{B}$. При этом формулу $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ можно оставить, а можно и отбросить.

13.53. Одна из передних формул имеет вид $\neg\mathfrak{A}$. Тогда заднюю формулу заменяют на $\mathfrak{A}$. При этом формулу $\neg\mathfrak{A}$ можно оставить, а можно и отбросить.

13.6. *Редукционное предписание* для секвенции, в которую не входят знаки $\vee$, $\exists$ и $\supset$, — это предписание, на основе которого секвенция всегда может быть «редуцирована» за *конечное число отдельных редукционных шагов* (согласно 13.11—13.53) к одной из истинных *конечных форм* (13.4), в частности и тогда, когда встречается редукционный шаг со «свободой выбора», т. е. один из таких шагов, описанных в 13.11, 13.21 и 13.22, при которых можно *выбирать* применяемый числовой знак $\mathfrak{n}$ (соответственно *можно выбирать* одну из формул $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$).

13.7. Там, где имеется несколько возможностей при *других* редукционных шагах (например, в случаях 13.5), там нет никакой *свободы выбора*. Напротив, предписание должно определять, какой вид редукционного шага должен применяться, а также, например, какой числовой знак $\mathfrak{n}$ следует применить при добавлении передней формулы $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ и следует при этом отбрасывать формулу $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ или нет.

13.8. Пояснения к понятию редукции.

13.81. Редукция истинных секвенций, не содержащих никаких переменных.

Для пояснения понятия редукции я покажу сначала, что для секвенции без переменных и без знаков $\vee$, $\exists$ и $\supset$ понятие наличия *редукционного предписания* совпадает с понятием истинности в соответствии с *процедурой вычисления* (7.2, 7.3).

Такую «истинную» секвенцию следует редуцировать к конечной форме согласно следующему предписанию: сначала заменить встречающиеся термы на их «числовые значения» (13.12). Затем, если еще не получена конечная форма (13.4), провести редукционный шаг, в результате которого эта секвенция перейдет в истинную секвенцию, в которую, однако, входит *меньше логических связок*, чем раньше. Это всегда возможно. Действительно, при редукциях согласно 13.22 и 13.23 это требование всегда выполнено. Если представился случай 13.5, то следующим образом выбирают, какой из возможных редукционных шагов нужно применить:

Если имеется ложная передняя формула вида $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, то либо $\mathfrak{A}$, либо $\mathfrak{B}$ должна быть ложной; тогда $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ заменяют на $\mathfrak{A}$ (соответственно на $\mathfrak{B}$). Если имеется ложная формула вида $\neg\mathfrak{A}$, то ее отбрасывают и заменяют заднюю формулу на $\mathfrak{A}$.

Очевидно, что при каждом из описанных редукционных шагов снова получается *истинная* секвенция, содержащая *меньше логических связок*, чем раньше. Следовательно, за конечное число шагов мы, продолжая эту процедуру, придем к конечной форме.

Обратно, любая секвенция без переменных, для которой имеется *редукционное предписание*, истинна. Это вытекает из того, что, как легко установить, любая ложная секвенция в результате любого допустимого редукционного шага снова переходит в ложную секвенцию (соответственно, что в случае редукционного шага согласно 13.22 *выбор* $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ можно сделать таким образом, чтобы результат редукционного шага был ложной секвенцией).

13.82. Эти соображения легко распространить на случай, когда рассматриваемая секвенция содержит $\forall$-знак, относящийся к *конечному* количеству чисел. Тогда $\forall$ рассматривается аналогично &.

13.83. Если теперь перейти к *бесконечной* области всех натуральных чисел, то, вообще говоря, уже не так просто дать редукционное предписание для какой-либо выводимой секвенции. Из-за того, что здесь уже не все формулы *разрешимы*, оказывается, например, необходимым иногда при редукционных шагах в соответствии с 13.51, 13.52 и 13.53 пользоваться возможностью *оставлять* изменяемые передние формулы. В то же время в конечной области (13.81, 13.82) в таких случаях эти формулы всегда можно было *отбрасывать*.

В качестве примера я дам редукционное предписание для приведенного в 10.6 высказывания «большая теорема Ферма́ истинна или не истинна» (это высказывание не является истинным при описанном там финитном истолковании). После замены $\vee$ в записи в виде секвенции оно гласит:

$$\to \neg \{[\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \,\&\, \\ \&\, [\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)]\}.$$

Ее редуцируют следующим образом: сначала получается (13.23)

$$[\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \,\&\, \\ \&\, [\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \to 1 = 2.$$

Двумя редукциями согласно 13.52 получаем

$$\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u),$$

$$\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u) \to 1 = 2;$$

далее (13.53)

$$\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u) \to \\ \to \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u).$$

Эту *логическую основную секвенцию* следует редуцировать до конца общим методом, описанным в 13.92.

13.90. В дальнейшем я докажу, что, каков бы ни был вывод, построенный согласно § 12, можно дать *редукционные предписания* для всех входящих в него секвенций.

Отсюда немедленно следует *непротиворечивость.*

Действительно, если бы была выводима некоторая секвенция вида $\to \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$, то была бы выводима, например, также и секвенция $\to 1 = 2$. Дело в том, что из $\to \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ получаются с помощью &-удаления как $\to \mathfrak{A}$, так и $\to \neg \mathfrak{A}$, откуда в силу 5.243 $\neg 1 = 2 \to \mathfrak{A}$ и $\neg 1 = 2 \to \neg \mathfrak{A}$; с помощью «опровержения» получаем $\neg \neg 1 = 2$ и с помощью «удаления двойного отрицания» $\to 1 = 2$. (Тем же способом из противоречия можно вывести любое высказывание). Но для секвенции $\to 1 = 2$ нельзя дать никакого редукционного предписания: ведь к ней не применим ни один редукционный шаг и она не имеет конечной формы (13.4), так как $1 = 2$ ложно.

13.91. Относительно *математических основных секвенций* я предполагаю, что для них *даны* редукционные предписания, в которых не используется разрешение *сохранять* изменяемые передние формулы, имеющееся в описании редукционных шагов 13.5.

Легко дать такие предписания для всех обычных теоретико-числовых аксиом. Рассмотрим примеры, приведенные в 6.2. Их нужно записать в виде секвенций и заменить $\supset$ через & и $\neg$. Затем их можно редуцировать так: сначала сбросить согласно 13.21 все $\forall$-знаки и заменить соответствующие переменные произвольными числовыми знаками; затем поступить так, как описано в 13.81: ведь получающиеся формулы «истинны».

13.92. *Логические основные секвенции* нужно редуцировать согласно следующему простому предписанию.

Пусть дана секвенция $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Заменить сначала свободные переменные на произвольные числовые знаки (13.11), затем минимальные термы — на *те* числовые знаки, которые представляют их значения (13.12). Последнее следует продолжать до тех пор, пока не останется минимальных термов (ведь при вычислении могут появиться новые минимальные термы). После этого секвенция примет вид $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$.

Теперь следует проводить над задней формулой $\mathfrak{A}^*$ редукционные шаги согласно 13.21, 13.22 и в случае необходимости 13.12, до тех пор, пока задняя формула не станет формулой вида $\neg \mathfrak{C}$ или минимальной формулой. При редукциях согласно 13.21 (соответственно 13.22) можно *произвольным образом выбирать* подставляемый числовой знак (соответственно формулу).

Если теперь задняя формула превратилась в *истинную минимальную формулу*, то редукционная процедура уже закончена (13.4).

Если она является *ложной минимальной формулой*, то следует проводить согласно 13.51, 13.52 и 13.12 такие редукционные шаги, при которых *передняя формула* $\mathfrak{A}^*$ претерпевала бы *в точности те же* изменения и в той же последовательности, что раньше *задняя формула* $\mathfrak{A}^*$. Например, если передняя формула приняла вид $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, то ее нужно заменить формулой $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, причем подставляемый при этом числовой знак *должен совпадать* с тем, который был *выбран* при редукции задней формулы. Аналогично поступают при редукции согласно 13.52. Итак, в конце концов передняя формула совпадает с задней формулой и процедура снова окончится тем, что будет достигнута конечная форма 13.4.

Если же задняя формула приняла вид $\neg \mathfrak{C}$, то ее нужно сначала редуцировать согласно 13.23. Тогда секвенция имеет вид $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{C} \to 1 = 2$. Ее редуцируют теперь, как и в предыдущем случае, таким образом, чтобы передняя формула $\mathfrak{A}^*$ изменялась *точно так же*, как раньше задняя формула, так что в конце концов на ее месте будет стоять $\neg \mathfrak{C}$. Теперь секвенция гласит

$\neg\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \to 1=2$. Ее редуцируют согласно 13.53 к секвенции $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$. Это снова *логическая основная секвенция*; формула $\mathfrak{C}$ содержит по крайней мере на одну логическую связку меньше, чем $\mathfrak{A}^*$. Следовательно, продолжая эту процедуру, мы в конечное число шагов доберемся до конца. Тем самым дано редукционное предписание для произвольной логической основной секвенции.

13.93. Аналогичным способом можно редуцировать и произвольные секвенции видов $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, или $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, или $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, или $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, или $\mathfrak{A}, \neg\mathfrak{A} \to 1=2$, или $\neg\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Ниже я воспользуюсь этим.

Действительно, сначала заменяют, как и раньше, свободные переменные и минимальные термы согласно 13.11 и 13.12. После этого секвенция $\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ имеет вид, который встречается и при редукции логической *основной секвенции* $\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*$ согласно 13.92; поэтому ее можно редуцировать дальше до конца точно так же, как там. То же имеет место для $\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$ и соответственно для $(\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^* \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{t}))^*$; здесь нужно воспользоваться основной секвенцией $(\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^* \to \to (\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^*$. Для $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*$ следует произвести редукцию согласно 13.2; получится, в зависимости от выбора, $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ или $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$. Дальнейшая редукция протекает точно так же, как для основных секвенций $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$ (соответственно $\mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$); на дополнительную переднюю формулу не обращают внимания: она ничего не портит. Для $\mathfrak{A}^*$, $\neg\mathfrak{A}^* \to 1=2$ редукционный шаг согласно 13.53 дает $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$, т. е. снова основную секвенцию.

Для $\neg\neg\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$ проводят редукционные шаги над задней формулой до тех пор, пока она не превратится в формулу вида $\neg\mathfrak{C}$ или в минимальную формулу. Если она стала истинной минимальной формулой, то редукция окончена. Если она приняла вид $\neg\mathfrak{C}$, то ее редуцируют согласно 13.23 к $\neg\neg\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{C} \to 1=2$, далее (13.53) к $\mathfrak{C} \to \neg\mathfrak{A}^*$, потом (13.23) к $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}^* \to 1=2$. Так же поступают в случае, когда задняя формула стала ложной минимальной формулой; тогда получают сначала $\to \neg\mathfrak{A}^*$, после чего $\mathfrak{A}^* \to 1=2$.

Теперь мы в обоих случаях получили секвенцию, которая встречается также и при редукции *логической основной секвенции* $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$ согласно процедуре, приведенной в 13.92 (соответветственно *несущественно* отличающуюся). Поэтому опять нужно лишь следовать описанной *там* процедуре, чтобы редуцировать секвенцию до конца.

Заметим, что в любой из редукционных процедур, описанных в 13.92 и 13.93, при редукционных шагах согласно 13.5 затрагиваемая передняя формула никогда не *сохраняется*.

§ 14. Редукционные шаги над выводом [1])

Для того чтобы редуцировать произвольную выведенную секвенцию, придется описать процедуру, при которой определенные редукционные шаги выполняются над всем *выводом* рассматриваемой секвенции. С этой целью я несколько *изменю* понятие вывода по сравнению с тем, которое было дано раньше (14.1), а затем поясню, как выполняется отдельный *редукционный шаг* над некоторым таким *выводом* (14.2).

14.1. Изменение понятия вывода

Новое понятие вывода следующим образом получается из старого (5.2):

Пункт 5.22 сохраняется, однако теперь «конечная секвенция» вывода может содержать также и *передние формулы* (чтобы можно было говорить о «выводе секвенции»). Знаки $\vee$, $\exists$ и $\supset$ не должны входить в вывод. Каждая секвенция вывода *) должна использоваться для получения (посредством применения некоторого правила заключения) не более, чем *одной* новой секвенции.

Легко видеть, что каждый вывод в старом смысле можно преобразовать в вывод в новом смысле с той же конечной секвенцией. Для этого нужно только, двигаясь от конца к началу, вписывать каждую многократно используемую секвенцию нужное число раз вместе со всеми секвенциями, используемыми в ее выводе.

Математические основные секвенции должны удовлетворять требованию 13.91. Вместе с ними должны считаться математическими основными секвенциями и все их редукции, т. е. все секвенции, которые могут встретиться при проведении данной редукционной процедуры.

Логическими основными секвенциями считаются произвольные секвенции вида $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, или $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, или $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, или $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, или $\mathfrak{A}, \neg\mathfrak{A} \to 1=2$, или $\neg\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ а также все секвенции, которые могут встретиться при редуцировании упомянутых секвенций согласно 13.92, 13.93.

Структурные изменения в их старой форме больше не допускаются.

Из *правил заключения* сохраняются правила $\forall$-введения и «полной индукции» с добавлением: если фигура представляет собой допустимое применение $\forall$-введения или полной индукции и в принадлежащие ей секвенции не входит никакая свободная

[1]) Замечание при корректуре: пункты 14.1—16.11 вставлены на место прежнего текста в феврале 1936 г.

*) Под секвенцией вывода автор подразумевает вхождение секвенции в вывод. — *Прим. перев.*

переменная, отличная от $\mathfrak{a}$, то она останется допустимым применением того же правила, если заменять все минимальные термы, входящие в эти секвенции, за исключением секвенции, содержащей переменную $\mathfrak{a}$, на их «числовые значения» до тех пор, пока не исчезнут все минимальные термы (цель см. 14.22).

Вновь добавляется следующее правило заключения.

«$\neg$-*введение*»: Из $\Gamma, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ получается $\Gamma \to \neg \mathfrak{A}$.

Далее, добавляется еще следующее правило заключения — «*цепное заключение*»: из ряда секвенций (по крайней мере одной) произвольного вида строится секвенция следующего вида: в качестве *задней формулы* она содержит заднюю формулу какой-либо из секвенций ряда, причем, если речь идет о ложной минимальной формуле, можно взять любую другую ложную минимальную формулу. В качестве *передних формул* выписывают в произвольном порядке все передние формулы той же секвенции и *предшествующих* ей в рассматриваемом ряде секвенций. Однако при этом можно выбрасывать формулы, для которых имеет место следующее: та же формула уже *встречается* среди выписанных (и не выброшенных) или формула совпадает с *задней формулой* какой-либо из секвенций, *предшествующих* в рассматриваемом ряде той секвенции, из числа передних формул которой взята рассматриваемая формула. Далее могут *добавляться* и совершенно новые передние формулы. И, наконец, в готовой секвенции разрешается один или несколько раз *заменять* согласно 5.244 любую *связанную переменную*.

Тем самым «цепное заключение» сформулировано столь широко, что оно содержит в себе все, что еще требуется для того, чтобы можно было, не меняя конечной секвенции, *преобразовать* любой вывод в старом смысле, освобожденный уже согласно § 12 от знаков $\vee$, $\exists$ и $\supset$ (и удовлетворяющий условиям 13.12, 13.3, 13.91, наложенным на функции, предикаты и аксиомы), в вывод в новом смысле.

Действительно, все *структурные изменения* являются частными случаями «цепного заключения». Отпавшие правила вывода можно заменить с помощью «*цепного заключения*», вставшими на их место новыми основными секвенциями. Например, &-введение: $\Gamma \to \mathfrak{A}$, $\Delta \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ дают посредством «цепного заключения» $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$; $\forall$-удаление: $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ и $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ дают посредством «цепного заключения» $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Соответствующим образом заменяют &-удаление и «удаление двойного отрицания». Наконец, «опровержение»: из $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \Delta \to \neg \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}, \neg \mathfrak{B} \to 1 = 2$ получают посредством цепного заключения $\Gamma, \Delta, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ и посредством $\neg$-введения $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

Тем самым доказано, что *новое* понятие вывода не уже, чем *старое*, и при доказательстве того, что можно дать редукционные предписания для любых входящих в вывод секвенций, мы без ограничения общности можем допустить, что для соответствующей секвенции дан вывод в *новом* смысле.

В дальнейшем я называю «*посылками*» применения правила заключения те секвенции, из которых получается новая секвенция, называемая «результатом». Легко убедиться, что «цепное заключение» представляет, согласно своему содержательному значению, «*истинное*» заключение. Можно также показать, что оно может быть заменено старыми правилами заключения и структурными изменениями.

При «цепном заключении» допускается, чтобы некоторые посылки в действительности вообще не использовались; это оказывается полезным для редукционной процедуры. При этом удобна также замена правил заключения комбинациями из основных секвенций и «цепного заключения»:

она превращает первоначальное расположение заключений *друг за другом* в расположение рядом *друг с другом*.

Я буду также предполагать, что для каждой секвенции данного вывода *указано*, является ли она *основной секвенцией* и какого *рода*, или из *каких* предыдущих секвенций и по *какому* правилу заключения она получается; и вообще, *каким образом* отдельные секвенции, формулы и т. д., встречающиеся при применении какого-либо правила заключения, *соответствуют* обозначениям, применяемым в соответствующей общей схеме. Поэтому не нужно разбираться в возможных *неоднозначностях*.

14.2. Редукционные шаги над выводами

Я буду теперь определять понятие редукционного шага над выводом и одновременно доказывать следующее утверждение. Каждый такой шаг переводит вывод снова в некоторый *вывод*; при этом его *конечная секвенция* преобразуется следующим образом. Входящие в нее свободные переменные заменяются на произвольно выбираемые числовые знаки; минимальные термы, которые могут возникнуть после этого, заменяются их «числовыми значениями» до тех пор, пока остается хотя бы один минимальный терм; и далее над этой секвенцией осуществляется *не более, чем один* редукционный шаг согласно 13.2 или соответственно 13.5 (следовательно, конечная секвенция без свободных переменных и термов *может* остаться совершенно неизменной).

Редукционный шаг над выводом *однозначен*, за исключением случаев, когда конечная секвенция претерпевает одно или несколько изменений согласно одному из редукционных шагов над секвенциями, связанному со *свободой выбора* (13.11, 13.21, 13.22), тогда можно делать выбор *произвольно*; однако, если это уже произошло, то и *тогда* редукционный шаг определен однозначно.

Если конечная секвенция вывода имеет конечную форму согласно 13.4, то для вывода не определяется *никакого* редукционного шага. Однако во всех остальных случаях имеется редукционный шаг, рекурсивное определение которого приводится ниже. Ввиду сказанного в дальнейшем предполагается, что конечная секвенция *не* имеет конечной формы.

14.21. Если конечная секвенция вывода является *основной секвенцией*, то редукционный шаг над ней производится согласно редукционным предписаниям 13.91—13.93; ведь они охватывают все основные секвенции в теперешнем смысле. Точнее, следует провести замену свободных переменных и термов, а после этого ровно один шаг согласно 13.2 или соответственно 13.5 (или же никакого шага, если уже достигнута конечная форма). Очевидно, что приведенные выше утверждения о редукционном шаге над выводами в этом случае выполнены.

14.22. Пусть теперь конечная секвенция вывода является результатом применения некоторого *правила заключения*. Будем считать, что для выводов посылок уже определено понятие редукционного шага и доказано, что выполнены соответствующие утверждения.

Редукционный шаг для вывода в целом начинается со следующих *приготовлений* (замена свободных переменных и минимальных термов).

Сначала заменяют все входящие в конечную секвенцию свободные переменные на произвольно выбираемые числовые знаки. После этого во всем выводе заменяют *эти* переменные (точнее: те переменные, которые заменяются в конечной секвенции) на те же числовые знаки, а *остальные* входящие в вывод числовые переменные на 1. При этом имеется важное исключение: встречающуюся в $\forall$-введении (соответственно в «полной индукции») свободную переменную, которая в 5.25 обозначена через $\mathfrak{a}$, *не* заменяют ни в соответствующей посылке $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$), ни в секвенциях, принадлежащих *выводу* этой посылки.

Затем все входящие в вывод *минимальные термы* заменяются один за другим на свои «числовые значения». При этом имеется важное исключение: замены *не* производятся ни в содержащих $\mathfrak{a}$ посылках $\forall$-введения или «полной индукции», ни в секвенциях, принадлежащих выводам этих посылок.

Можно убедиться, что при обеих этих процедурах замены вывод остается корректным. Здесь при замене свободных переменных существенно, во-первых, сформулированное в 5.25 особое ограничение на переменную $\mathfrak{a}$ при $\forall$-введении и «полной индукции» и, во-вторых, требование (14.1), чтобы каждая секвенция вывода была посылкой не более, чем *одного* применения правила заключения. Действительно, эти два факта дают возможность полностью отделить заменяемые переменные от остающихся таким образом, что при этом не возникает ошибок ни в каком применении правила заключения.

При замене термов важно особое определение $\forall$-введения и «полной индукции», сформулированное в 14.1 (именно для этого оно и введено), так как при замене могла нарушиться прежняя нормальная форма (5.25).

После этих «приготовлений» следует собственно редукционный шаг согласно приводимым ниже предписаниям. Однако если конечная секвенция имеет *конечную форму*, то редукционный шаг уже окончен.

14.23. Конечная секвенция есть результат *$\forall$-введения* или *$\neg$-введения*. Тогда ее отбрасывают и берут в качестве новой конечной секвенции *посылку* применения правила. При этом в первом случае во всем выводе этой посылки следует заменить (с теми же ограничениями, что и в 14.22) переменную $\mathfrak{a}$ на произвольно выбранный числовой знак и минимальные термы на их «числовые значения»; однако те термы, в которые раньше входила переменная $\mathfrak{a}$, не *заменяются.*

Очевидно, что вывод остается корректным и конечная секвенция переходит в свою редукцию согласно 13.21 (соответственно 13.23).

14.24. Конечная секвенция есть результат *«полной индукции»*. Пусть числовое значение терма $\mathfrak{t}$ дается числовым знаком $\mathfrak{n}$ и пусть $\mathfrak{m}$—числовой знак для числа, которое на 1 меньше (в случае, если $\mathfrak{n}$ не равно 1). Заменим теперь в выводе посылки $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ переменную $\mathfrak{a}$ (с теми же ограничениями, что и в 14.22) последовательно на 1, 2, 3 и т. д. вплоть до $\mathfrak{m}$ и в каждом случае заменим после этого все возникшие *минимальные термы* на их «числовые значения» (с тем же ограничением, что и в 14.22). Теперь весь вывод заканчивается с помощью *«цепного заключения»*, которое позволяет снова получить конечную секвенцию $\Gamma, \Delta \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{n}))^*$ из $\Gamma \to (\mathfrak{F}(1))^*$ и выведенных выше секвенций $(\mathfrak{F}(1))^*, \Delta \to (\mathfrak{F}(2))^*$, $(\mathfrak{F}(2))^*, \Delta \to (\mathfrak{F}(3))^*$ и т. д. до $(\mathfrak{F}(\mathfrak{m}))^*, \Delta \to (\mathfrak{F}(\mathfrak{n}))^*$. Звездочка в каждом случае обозначает изменения, происшедшие в результате замены минимальных термов. На основе подготовительных (14.22) и осуществленных теперь замен термов удалены все минимальные термы, так что связанные друг с другом $\mathfrak{F}^*$-выражения в действительности всегда *совпадают* друг с другом, даже если раньше они и не совпадали. Если $\mathfrak{n}$ равно 1, то вместо $\mathfrak{a}$ подставляют только 1 и с помощью «цепного заключения» получают из

$\Gamma \to (\mathfrak{F}(1))^*$ и $(\mathfrak{F}(1))^*, \Delta \to (\mathfrak{F}(1))^*$ конечную секвенцию $\Gamma, \Delta \to (\mathfrak{F}(1))^*$.

14.25. Последний случай, который остается рассмотреть: конечная секвенция является результатом *«цепного заключения»*. Это самый трудный случай редукции вывода, так как именно цепное заключение как бы соединяет в себе трудности, связанные со всеми заключениями.

«Главной посылкой» я назову ту посылку, задняя формула которой порождает заднюю формулу конечной секвенции. Если задняя формула конечной секвенции является ложной минимальной формулой, то сделаем главной посылкой первую из посылок (в заданной их последовательности), задняя формула которой также является ложной минимальной формулой. Это не нарушает корректности «цепного заключения» даже в случае, если раньше главной посылкой была одна из посылок, следующих за новой главной посылкой. В этом случае определенные передние формулы следует рассматривать не как взятые из *посылок*, а как вновь *добавленные*.

После этой подготовки оказывается, что главная посылка не может иметь *конечной формы* (13.4). Очевидно, что иначе и конечная секвенция имела бы конечную форму, что было исключено. Следовательно, достаточно произвести *редукционный шаг* над выводом главной посылки. С этой целью я выделяю четыре случая, которые будут рассмотрены отдельно (14.251—14.254).

14.251. При редукционном шаге над выводом главной посылки она претерпевает изменение согласно 13.2. В этом случае над конечной секвенцией проделывают соответствующий редукционный шаг согласно 13.2, причем возможный *выбор* делается произвольно. Далее проводят редукционный шаг над выводом главной посылки и в случае свободы выбора делают при этом *тот же* выбор. Теперь задние формулы обеих секвенций снова совпадают (с точностью до переименования связанных переменных) и «цепное заключение» снова корректно. Тем самым в этом случае закончен редукционный шаг для вывода в целом,

14.252. При редукционном шаге над выводом главной посылки она претерпевает изменение согласно 13.5 и затрагиваемая передняя формула — одна из тех, которые были *причислены* к передним формулам конечной секвенции (при ее образовании по правилу «цепного заключения») или были отброшены из-за того, что такая формула уже *имеется* среди передних формул. Тогда выполняют редукционное предписание для вывода главной посылки, а для того, чтобы «цепное заключение» снова стало корректным, изменяют конечную секвенцию согласно *соответствующему* редукционному шагу для секвенций (13.5). Таким образом, если *сама* соответствующая формула была включена в конечную секвенцию, то над *ней* и производят тот же редукционный шаг. Если же она была отброшена из-за совпадения с одной из уже *имеющихся* формул, то редукционный шаг производят над этой формулой, при этом ее *оставляют* (отбрасывают) тогда и только тогда, когда соответствующая формула была оставлена (отброшена) при редукции *посылки*.

14.253 (*основной случай*). Главная посылка (запишем ее в виде $\Delta \to \mathfrak{C}$) претерпевает при редукционном шаге изменение согласно 13.5 и затрагиваемая передняя формула $\mathfrak{B}$ не была присоединена к передним формулам конечной секвенции из-за ее совпадения с задней формулой одной из предшествующих посылок. *Эта* посылка, запишем ее в виде $\Gamma \to \mathfrak{B}$, при редукционном шаге над ее выводом претерпевает *изменение*, которое необходимо происходит согласно 13.2 (ведь $\mathfrak{B}$ не может быть минимальной формулой). Запишем конечную секвенцию всего вывода в виде $\Theta \to \mathfrak{D}$. Я различаю три частных случая в соответствии с тем, какой из видов*), $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}_1$ или $\neg \mathfrak{A}$, имеет $\mathfrak{B}$. Рассуждения во всех трех случаях различаются несущественно.

Пусть сначала $\mathfrak{B}$ имеет вид $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Тогда при редукционном шаге над $\Delta \to \mathfrak{C}$ согласно 13.51 добавляется передняя формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ и $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ сохраняется или отбрасывается. При редукционном шаге над $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, который должен происходить согласно 13.21, можно выбрать в качестве подставляемого числового знака *тот же* знак $\mathfrak{n}$, так что возникнет $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$. Теперь строим три «цепных заключения». Посылками первого являются посылки первоначального цепного заключения, однако вместо $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ стоит $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$; результатом является $\Theta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$. Это «цепное заключение» корректно. Посылками второго «цепного заключения» являются посылки первоначального «цепного заключения», однако вместо секвенции $\Delta \to \mathfrak{C}$ стоит результат ее редукции согласно 13.51; результатом является $\Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{D}$. И это — *корректное* «цепное заключение». Третье «цепное заключение» снова дает конечную секвенцию $\Theta \to \mathfrak{D}$ из $\Theta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ и $\Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{D}$. Естественно, что к каждой из используемых секвенций должен быть приписан весь ее *вывод*, так что в общем снова получается корректный вывод.

Если $\mathfrak{B}$ имеет вид*) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}_1$, то при редукционном шаге над $\Delta \to \mathfrak{C}$ согласно 13.52 добавляется передняя формула $\mathfrak{A}$ или*) $\mathfrak{B}_1$. Секвенция*) $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}_1$ переходит, по выбору, в $\Gamma \to \mathfrak{A}$ или*) $\Gamma \to \mathfrak{B}_1$; сделаем выбор так, чтобы появилась та же формула, что

*) В оригинале вместо $\mathfrak{B}_1$ написано $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

и при редукции $\Delta \to \mathfrak{C}$. Дальше поступают так же, как и в предыдущем случае.

Если $\mathfrak{B}$ имеет вид $\neg\mathfrak{A}$, то $\Delta \to \mathfrak{C}$ редуцируется в $\Delta^* \to \mathfrak{A}$ и $\Gamma \to \neg\mathfrak{A}$ в $\Gamma, \mathfrak{A} \to 1=2$. Теперь строим, как и раньше, два «цепных заключения» с результатами Θ, $\mathfrak{A} \to 1=2$ и $\Theta \to \mathfrak{A}$. С помощью третьего «цепного заключения» эти две секвенции (в измененном порядке) снова дают $\Theta \to \mathfrak{D}$, так как $\mathfrak{D}$, так же как $\mathfrak{C}$ и $1=2$, являются ложными минимальными формулами.

14.254. Остаются еще следующие возможности: главная посылка *не меняется* при редукционном шаге над ее выводом или она изменяется согласно 14.253 и посылка $\Gamma \to \mathfrak{B}$ *не меняется* при редукционном шаге над ее выводом. В обоих случаях проводят редукционный шаг над выводом той из посылок, которая не меняется, и тем самым все закончено. Однако если, в частности, этот редукционный шаг *над выводом посылки* является редукционным шагом согласно 14.253 (причем конечная секвенция, т. е. эта посылка, *не меняется*), то следует поступать несколько иначе. Следует произвести этот редукционный шаг, но не строить предписываемого там третьего «цепного заключения». Вместо этого следует вставить обе посылки этого «цепного заключения» на место его результата в ряд посылок *того* «цепного заключения», которым заканчивается весь вывод. Легко видеть, что оно при этом останется корректным, а конечная секвенция не изменится.

На этом определение *редукционного шага над выводом* заканчивается.

§ 15. Порядковые числа и доказательство конечности

Теперь остается еще показать, что если производить все новые и новые *редукционные шаги* над данным доказательством, то всегда, т. е. при любых выборах в случае свободы выбора, *после конечного числа шагов* получится *конечная форма* (конечной секвенции). Тем самым будет дано и *редукционное предписание* (13.6) для произвольной выведенной *секвенции*; ведь нужно лишь редуцировать вывод этой секвенции (согласно § 14) и *секвенция* автоматически редуцируется вместе с ним.

Чтобы доказать конечность процедуры, нужно доказать, что каждый редукционный шаг *«упрощает»* вывод в некотором определенном смысле. С этой целью я сопоставлю каждому выводу некоторое *«порядковое число»*, которое представляет собой *меру «сложности»* вывода (15.1, 15.2). Действительно, тогда можно будет показать, что при каждом редукционном шаге над выводом его порядковое число (в общем) *уменьшается* (15.3).

Однако это не обеспечивает сразу *конечности* редукционной процедуры, поскольку упорядочение выводов (в соответствии с упорядочением их порядковых чисел по величине) — это упорядочение особого рода: может оказаться, что некоторому выводу предшествует по сложности *бесконечно много* других выводов. Например, вывод, в конце которого с помощью «полной индукции» и $\forall$-введения получается конечная секвенция вида $\to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, считается более сложным, чем все его частные случаи (их бесконечное число), получающиеся в результате подстановки определенного числового знака вместо $\mathfrak{x}$ и разложения «полной индукции» (14.24). Такое положение может встречаться и в многократно повторенном виде. Вследствие этого «порядковые числа» имеют характер «трансфинитных порядковых чисел» (см. примечание на стр. 142) и нельзя индуктивно охватить их совокупность с помощью обычной полной индукции. Это можно сделать лишь с помощью *«трансфинитной индукции»*, истинность которой требует особого доказательства (15.4).

15.1. Определение порядковых чисел (рекурсивно). В качестве «порядковых чисел» я использую определенные положительные *конечные десятичные дроби*, которые строятся согласно следующему предписанию:

Порядковые числа с целой частью 0 — это следующие числа: 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111, т. е. в общем случае: любое число с целой частью 0 и мантиссой, состоящей из конечного числа единиц, а также число 0,2.

Здесь, как и ниже, не допускается добавление нулей в конце; способ записи должен быть однозначным. Я считаю, что одна мантисса *меньше*, чем другая, если в этом отношении находятся числа, получающиеся приписыванием впереди 0.

Мантисса порядкового числа с целой частью $\rho+1$ $(\rho \geqslant 0)$ получается следующим образом: берут некоторое число (по крайней мере одно) попарно различных порядковых чисел с целой частью ρ, упорядочивают их мантиссы по величине, так что меньшие стоят за бо́льшими, а затем приписывают их друг к другу по порядку, причем каждый раз между следующими друг за другом мантиссами вставляется $\rho+1$ нуль. Порядковыми числами с целой частью $\rho+1$ являются все числа, получаемые таким образом из порядковых чисел с целой частью ρ, и только они.

Примеры порядковых чисел: 0,1111; 1,1101; 1,2; 2,111; 2,2010011010011; 3,2010020001.

Очевидно, что для каждого данного числа с целой частью $\rho+1$ можно однозначно узнать, из *каких* чисел с целой частью ρ оно построено согласно приведенному выше предписанию. Действительно, очевидно, что в число с целой частью σ не может входить подряд более чем σ следующих друг за другом нулей.

Более подробно об *упорядочении* порядковых чисел говорится в 15.4.

15.2. Сопоставление порядковых чисел выводам.

По каждому данному выводу (в смысле 14.1) можно согласно следующему рекурсивному предписанию однозначно вычислить сопоставляемое ему порядковое число.

При этом всегда имеет место (следует проследить за этим) следующее: наибольшее число (ν) нулей, следующих друг за другом в мантиссе, больше, чем 1; все *части*, разделенные последовательностями из ν нулей, кроме последней, начинаются цифрой 2; *последняя* часть состоит только из единиц.

Если конечная секвенция вывода является основной секвенцией, то вывод получает порядковое число вида 2,2001 ... 1, где число единиц на 1 больше, чем *число знаков логических связок**), имеющихся в секвенции.

Пусть теперь конечная секвенция является результатом некоторого применения *правила заключения* и для выводов посылок уже известны соответствующие порядковые числа. Исходя из этих данных, порядковое число вывода в целом вычисляется следующим образом:

Если конечная секвенция есть результат $\forall$- или $\neg$-введения, то добавляют единицу к концу порядкового числа вывода посылки. В силу приведенных свойств порядковых чисел, сопоставленных произвольным выводам, очевидно, что это снова корректное порядковое число согласно 15.1.

Если конечная секвенция есть результат «цепного заключения», рассмотрим мантиссы порядковых чисел, сопоставленных выводам посылок. Пусть ν — наибольшее число следующих друг за другом нулей во всех этих числах. Если среди них встречаются *равные* мантиссы, то их различают тем, что добавляют к первой ν+1 нулей и одну единицу, к следующей ν+1 нулей и две единицы и т. д.; таким образом поступают *каждый* раз, когда встречаются равные мантиссы. Полученные теперь мантиссы *попарно* различны. Выпишем их друг за другом по величине (бо́льшие впереди), вставляя каждый раз ν+2 нуля между соседними мантиссами. Далее, добавим в конце ν+2 нуля и одну единицу. Тем самым получена мантисса для порядкового числа всего вывода. В качестве *целой части* возьмем наименьшее натуральное число, *избыток* которого над наибольшим числом нулей, следующих друг за другом в мантиссе, ⩾0, причем этот избыток, *во-первых*, не более, чем на 2, меньше соответствующего избытка в любом из порядковых чисел, сопоставленных

*) То есть число вхождений таких знаков. — *Прим. перев.*

выводам посылок, и, *во-вторых*, не меньше, чем удвоенное число *логических связок* в задней формуле любой из посылок, предшествующих главной посылке (14.25).

Если конечная секвенция есть результат «*полной индукции*», то порядковое число всего вывода получает мантиссу вида 201...10..01. При этом число следующих друг за другом единиц на 1 больше, чем число следующих друг за другом единиц в *наибольшей* из мантисс порядковых чисел, соответствующих выводам посылок (соответственно в *какой-либо*, если они *равны*). Иными словами: если она (наибольшая из мантисс) начинается с 200, то нужно написать *одну* единицу; в противном случае она должна начинаться с 201...10, тогда увеличивают число единиц на одну. Число следующих друг за другом нулей должно быть равно ν+2, где ν обозначает наибольшее число нулей, следующих друг за другом в обеих этих мантиссах. В качестве *целой части* для порядкового числа берут наименьшее натуральное число, *избыток* которого над наибольшим числом нулей, следующих друг за другом в мантиссе, ⩾0, причем этот избыток, *во-первых*, не более, чем на 2, меньше, чем соответствующий избыток в любом из обоих использованных порядковых чисел, и, *во-вторых*, не меньше, чем удвоенное число логических связок в формуле $\mathfrak{F}$ (1).

Всегда можно убедиться, что вновь построенное число снова является корректным порядковым числом (15.1) и, кроме того, обладает указанными выше особыми свойствами.

15.3. Уменьшение порядкового числа при проведении редукционного шага.

Теперь нужно доказать, что при каждом редукционном шаге над выводом согласно 14.2 порядковое число у вновь полученного вывода *меньше*, чем у старого. Я покажу следующее: *целая часть* не увеличивается; *мантисса* уменьшается, за исключением случаев, когда конечная секвенция после замены свободных переменных и термов (14.21, 14.22) принимает *конечную форму*. Далее, наибольшее число нулей, следующих друг за другом в мантиссе, *не меняется,* за исключением случая редукции согласно 14.253; и в этом случае оно увеличивается ровно на 2.

Я снова буду действовать рекурсивно, т. е. докажу это утверждение с помощью полной индукции.

Для выводов, конечные секвенции которых являются основными секвенциями, все следует из способа сопоставления им порядковых чисел, а также из того факта, что при редукционном шаге происходит изменение секвенции согласно 13.2 (соответственно 13.5), причем *уменьшается* количество входящих в нее логических связок. (Если уже до этого возникла *конечная форма*, то порядковое число не меняется.) При этом важно, что при изменениях согласно 13.5 изменяемая формула всегда отбрасывается (см. 13.91—13.93).

Допустим теперь, что конечная секвенция является результатом применения некоторого *правила заключения* и что для выводов посылок наше утверждение уже доказано.

Подготовительный шаг (14.22) явно никак не влияет на порядковое число вывода. Если уже при этом конечная секвенция принимает *конечную форму,* то порядковое число не меняется. Если это не так, то имеет место следующее.

Если конечная секвенция есть результат $\forall$- или $\neg$-введения, то наше утверждение непосредственно следует из способа сопоставления порядковых чисел таким выводам.

Истинность нашего утверждения легко доказывается и в случае, когда конечная секвенция есть результат *«полной индукции»*. Ведь полная индукция превращается в «цепное заключение». Целая часть порядкового числа при этом не увеличивается, однако мантисса может стать *гораздо длиннее.* Несмотря на это, она *уменьшается*, так как *в ее начале* всегда стоит мантисса порядкового числа одного из двух первоначальных выводов посылок. Наибольшее число ($\nu+2$) следующих друг за другом нулей сохраняется.

Пусть, наконец, конечная секвенция является результатом «цепного заключения». Предварительное перенесение главной посылки (14.25) не меняет мантиссы порядкового числа. Однако *целая часть* может при этом уменьшиться из-за того, что задние формулы некоторых посылок лишаются права голоса при ее вычислении.

Редукционный шаг происходит теперь согласно 14.251 или 14.252. При этом одна из мантисс порядковых чисел, сопоставленных выводам *посылок*, уменьшается без изменения наибольшего *числа нулей*, входящих в нее. Очевидно, что в результате этого *уменьшается* и порядковое число всего вывода. Число нулей $\nu+2$ сохраняется. Уменьшившаяся мантисса сдвигается, смотря по обстоятельствам, на *более далекое* место в ряде, упорядоченном по величине. Если она была одной из нескольких *равных*, то ведь к другим приписывается на единицу *меньший* довесок.

В любом случае первая из ставших неровными мантисс, отделенных друг от друга $\nu+2$ нулями, должна быть *меньшей*, чем раньше. Тем самым мантисса в целом наверняка уменьшается. *Целая* часть не увеличивается.

При редукционном шаге согласно 14.253 порядковое число вывода изменяется следующим образом. Рассмотрим сначала порядковые числа выводов, заканчивающихся вновь построенным первым (соответственно вторым) «цепным заключением».

Для них обоих дело обстоит *точно так же*, как и в *предыдущем* случае. Точнее, каждая из мантисс *меньше*, чем мантисса порядкового числа первоначального вывода; наибольшее число ($\nu+2$) следующих друг за другом нулей осталось *тем же*; целые части не увеличились. Теперь добавим *третье* «цепное заключение» и построим порядковое число всего нового вывода. Мантисса начинается с одной из старых мантисс и следующих за ней $\nu+3$ (в общем случае $\nu+4$) нулей, следовательно, она снова меньше, чем мантисса первоначального порядкового числа. Наибольшее число следующих друг за другом нулей равно $\nu+4$, т. е. на 2 больше, чем раньше. Наконец, *целая часть* не может увеличиться ввиду следующего. Число логических связок в задней формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ (соответственно $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}_1$ *), соответственно $\mathfrak{A}$) меньше, чем в формуле $\mathfrak{B}$, т. е. в $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ (соответственно $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}_1$ *), соответственно в $\neg\mathfrak{A}$) **). Следовательно, сумма $\nu+4$ и удвоенного *первого* числа, которая определяет новую целую часть, не больше, чем сумма $\nu+2$ и удвоенного *последнего* числа. Порядковое число *первоначального* вывода не может быть больше, чем вторая из этих сумм, так как $\mathfrak{B}$ принадлежит к числу задних формул, имеющих голос при его вычислении.

При редукционном шаге согласно 14.254, если не имеет места *особый случай*, положение такое же, как при 14.251 и 14.252. Однако и особый случай без труда исчерпывается аналогично предыдущим рассмотрениям. При этом одна из мантисс порядковых чисел, сопоставленных выводам посылок, заменяется не *одной*, как выше, а *двумя* меньшими мантиссами, но результат оказывается в нужном отношении тем же самым. Целая часть не увеличивается. Ее «избыток» до редукции должен быть не более, чем на 2, меньше удвоенного числа логических связок в $\mathfrak{B}$, поэтому из-за участия $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ (соответственно $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}_1$ *), соответственно $\mathfrak{A}$) *после* редукции не может возникнуть увеличения.

Тем самым *доказано*, что при редукционном шаге происходит (в общем случае) уменьшение порядкового числа. *Важнейшим пунктом* были рассуждения о *целой части* при рассмотрении редукционных шагов 14.253 и 14.254. Именно с помощью этой идеи удалось установить *упрощение* вывода при таких редукционных шагах, несмотря на кажущееся увеличение его сложности. Упрощение состоит как раз в том, что посылки «третьего цепного заключения» *в меньшей мере «зацеплены» между собой* (а именно, в соответствии с количеством логических

*) В оригинале вместо $\mathfrak{B}_1$ написано $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

**) Здесь применяются обозначения, введенные в первом абзаце пункта 14.253. — *Прим. перев.*

связок в задней формуле первой посылки, которая одновременно является передней формулой второй посылки), чем были зацеплены посылки первого, второго и первоначального «цепного заключения». С этой точкой зрения связан способ сопоставления порядковых чисел при «цепном заключении» (15.2); все остальное получается затем более или менее само собой.

15.4. Доказательство конечности редукционной процедуры. Приведем некоторые используемые впоследствии факты об *упорядочении* порядковых чисел по величине.

Я сопоставлю каждому числу α с целой частью ρ ($\rho \geqslant 0$) систему $\mathfrak{S}(\alpha)$ тех чисел с целой частью $\rho+1$, при образовании которых согласно 15.1 наибольшим из используемых порядковых чисел с целой частью ρ является число α.

Любое порядковое число с целой частью $\rho+1$ однозначно принадлежит к одной из таких систем $\mathfrak{S}(\alpha)$. Если α_1 меньше, чем α_2, то каждое число из $\mathfrak{S}(\alpha_1)$ также меньше, чем каждое число из $\mathfrak{S}(\alpha_2)$. Упорядочение систем $\mathfrak{S}(\alpha)$ соответствует поэтому упорядочению чисел α. Для упорядочения чисел (с целой частью $\rho+1$) *внутри* какой-нибудь из систем $\mathfrak{S}(\alpha)$ имеет место следующее. *Наименьшим* числом в $\mathfrak{S}(\alpha)$ является число $\alpha+1$. *Остальные* числа из $\mathfrak{S}(\alpha)$ следующим образом соответствуют (с изоморфным порядком) совокупности чисел с целой частью $\rho+1$, *меньших*, чем $\alpha+1$: любое число из $\mathfrak{S}(\alpha)$, за исключением $\alpha+1$, получается из $\alpha+1$ добавлением $\rho+1$ нулей и затем мантиссы какого-либо числа с целой частью $\rho+1$, меньшего, чем $\alpha+1$. Упорядочение при этом переносится.

Истинность всех этих утверждений легко усматривается из определения порядковых чисел. С их помощью полезно сделать наглядным, например, упорядочение порядковых чисел с целой частью 1, 2 и 3[1]).

[1]) Заметим для тех, кто знаком с теорией множеств, следующее. Система используемых мной «порядковых чисел» *вполне упорядочена* отношением $<$, а именно, числа с целой частью 0, 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. соответствуют трансфинитным порядковым числам $2^{\omega+1}=\omega+\omega$, $2^{\omega+\omega}=\omega\cdot\omega$, $2^{\omega\cdot\omega}=\omega^{\omega}$, $2^{(\omega^{\omega})}=\omega^{(\omega^{\omega})}$, $2^{\left[\omega^{(\omega^{\omega})}\right]}=\omega^{\left[\omega^{(\omega^{\omega})}\right]}$ и т. д. Система в целом соответствует «первому ε-числу». (Для доказательства следует заметить, что описанный в тексте переход от чисел с целой частью ρ к числам с целой частью $\rho+1$ соответствует определению степеней 2, и учесть правила вычислений для трансфинитных порядковых чисел.) «Теорема о трансфинитной индукции» утверждает не что иное, как допустимость трансфинитной индукции для этого отрезка II числового класса. Естественно, что сомнительные места общей теории множеств не встречаются при доказательстве непротиворечивости, так как здесь соответствующие понятия и теоремы развиваются совершенно независимо и гораздо более элементарным способом, чем в теории множеств, где они об-

Я утверждаю теперь (*теорема о «трансфинитной индукции»*): *Все порядковые числа* (15.1) *при их пробегании в порядке возрастания величины «достижимы» в следующем смысле. Первое число* 0,1 *считается «достижимым»; если для всех чисел, меньших, чем некоторое число* β, *установлено, что они «достижимы», то* β *также считается достижимым.*

Доказательство. Сначала достижимо 0,1, поэтому также 0,11, поэтому также 0,111 и т. д. В общем случае с помощью полной индукции получается, что любое число, меньшее, чем 0,2, достижимо. Следовательно и 0,2 достижимо и тем самым достижимы все числа с целой частью 0. Теперь я применю *полную индукцию*, т. е. предположу, что уже доказана достижимость всех чисел с целыми частями вплоть до ρ ($\rho \geqslant 0$), и нужно доказать достижимость всех чисел с целыми частями $\rho+1$. *Первое* из этих чисел, т. е. число с мантиссой 1, достижимо. Теперь примем во внимание следующее: пробегание чисел с целой частью ρ уже выполнено. Каждому такому числу α отвечает система $\mathfrak{S}(\alpha)$ чисел с целой частью $\rho+1$. Эта система состоит из числа $\alpha+1$ и системы, изоморфной по упорядочению системе тех чисел с целой частью $\rho+1$, которые меньше, чем $\alpha+1$. Пробегание чисел с целой частью $\rho+1$ является теперь не чем иным, как пробеганием систем $\mathfrak{S}(\alpha)$, которое происходит так же, как происходило пробегание чисел α с целой частью ρ. Действительно, если уже доказано, что число $\alpha+1$ достижимо, то очевидно, что вместе с ним достижимы и все остальные числа системы $\mathfrak{S}(\alpha)$: ведь нужно только пробегать эту систему *точно тем же способом*, что *изоморфную* ей систему чисел (с целой частью $\rho+1$), *меньших*, чем $\alpha+1$, а эта система уже пробегалась. Так можно пробежать все числа с целой частью $\rho+1$ на основе уже выполненного пробегания чисел с целой частью ρ. Совокупности чисел α (с целой частью ρ), меньших, чем некоторое число α_0, соответствует при числе α_0+1 (с целой частью $\rho+1$) совокупность чисел, *принадлежащих к системам* $\mathfrak{S}(\alpha)$ (с $\alpha<\alpha_0$).

Заключение. Из «теоремы о трансфинитной индукции» непосредственно следует *конечность редукционной процедуры* для произвольных выводов. Действительно, если конечность редукционной процедуры уже доказана для всех выводов с порядковым числом, меньшим, чем β, то она имеет место и для

ладают существенно большей общностью. Аналогичные сопоставления между математическими доказательствами (соответственно теоремами) и теорией полного упорядочения, в частности, чисел II числового класса, имеются в A. Church, A proof of freedom from contradiction, Proc. Nat. Acad. of Sci. **21** (1935), 275—281 и E. Zermelo, Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme I, Fund. Math. **25** (1935), 136—146.

любого вывода с порядковым числом β: ведь *один* редукционный шаг переводит его в вывод с *меньшим* порядковым числом или в конечную форму. (Если вывод уже имел конечную форму, то вообще больше нечего доказывать.) Тем самым факт конечности редукционной процедуры переносится с совокупности выводов, порядковые числа которых *меньше*, чем β, на выводы с порядковым числом β. Следовательно, по теореме о трансфинитной индукции он имеет место для *всех* выводов с произвольными порядковыми числами. Тем самым доказательство непротиворечивости *закончено.*

РАЗДЕЛ V

СООБРАЖЕНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

§ 16. Способы заключения, используемые при доказательстве непротиворечивости

В дальнейшем я буду рассматривать заключения и образования понятий, использованные при доказательстве непротиворечивости, *с двух точек зрения.* Во-первых, нужно исследовать, до какой степени они могут считаться *достоверными* (16.1). Во-вторых, в связи с теоремой Гёделя (2.32) — в какой степени они соответствуют средствам доказательства, принадлежащим формализованной чистой теории чисел, и насколько они *выходят* за ее рамки (16.2).

16.1. Вопрос о *достоверности* используемых средств доказательства — это критическая точка *доказательства конечности* (15.4). Вернемся сначала к нему. Все остальные средства доказательства, использованные при доказательстве непротиворечивости, можно с определенностью считать финитными в смысле раздела III. Однако этого уже нельзя доказать, так как понятие «финитный» не является однозначно формально отграниченным и едва ли его можно отграничить. Поэтому нужно рассмотреть каждое отдельное заключение и попытаться выяснить, согласовано ли оно с финитным смыслом встречающихся понятий и не основывается ли оно на каком-либо недопустимом понимании «в себе» этих понятий. Я коротко рассмотрю важнейшие в этом отношении места доказательства непротиворечивости.

Объектами доказательства непротиворечивости, так же как и теории доказательства вообще, являются определенные *знаки* и *выражения*, например термы, формулы, секвенции, выводы, порядковые числа, а также натуральные числа. Определения всех этих объектов даются (3.2, 5.2, 14.1, 15.1) посредством *предписаний для построения* аналогично определению натуральных чисел (8.11). Такое предписание указывает в каждом случае, каким образом можно шаг за шагом строить все больше и больше таких объектов. При этом предполагается, что в формализованной чистой теории чисел установлены *определенные* «функции», «предикаты» и «аксиомы», удовлетворяющие наложенным на них требованиям (13.12, 13.3, 13.91). Ввиду этого предположения в доказательство непротиворечивости, по существу, входит трансфинитно применяемое «если... , то...». Очевидно, однако, что оно безвредно, так как доказательство вообще нужно считать осмысленным только в том случае, когда эти функции, предикаты и аксиомы в действительности установлены и доказано, что они удовлетворяют упомянутым условиям.

К этим объектам применяется далее ряд *функций* и *предикатов*, которые *разрешимо определены* в смысле 8.12. Например, *функция* «конечная формула вывода», *предикат* «содержать по крайней мере один $\forall$-знак или $\exists$-знак» и многие другие. Как нетрудно доказать, разрешимыми являются также функции: «вывод, получающийся из данного вывода в результате *преобразования* согласно § 12»; «вывод, получающийся из данного вывода в результате одного *редукционного шага* при определенном выборе параметров, относительно которых имеется свобода выбора» (14.2); «*порядковое число* вывода» (15.2).

Далее с помощью *полной индукции* доказываются высказывания «для *всех* секвенций», «для *всех* выводов» и т. п., истинность которых разрешима для любой *отдельной* секвенции или *отдельного* вывода, например, «фигура, получающаяся из вывода в результате редукционного шага, снова является выводом и изменение конечной секвенции удовлетворяет определенным условиям» (14.2); «при проведении редукционного шага порядковое число уменьшается» (15.3).

При использовании понятия «все» в доказательстве непротиворечивости мне не был нужен подробный финитный способ выражения, описанный в 10.11; здесь различие между пониманием «в себе» и финитным пониманием несущественно для рассуждений.

Отрицание трансфинитного высказывания встречается из всего доказательства лишь в 13.90, и то в безвредной форме; рассматриваемое высказывание приводит к совершенно элементарному противоречию. Кроме того, его можно и совсем *избежать*, если использовать для «непротиворечивости» положительное выражение: «Каждый вывод имеет конечную формулу, не имеющую вида $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$». Это «не» не является больше трансфинитным.

16.11. Как, наконец, обстоит дело *с доказательством конечности* (15.4)?

Понятие «*достижимо*» в теореме о трансфинитной индукции — это понятие совершенно особого рода. Ни в коем случае нельзя утверждать, что для любого данного числа заранее *разрешимо*, удовлетворяет ли оно этому понятию. Поэтому с точки зрения, которая была объяснена в § 9, нельзя утверждать заранее, что любое высказывание о достижимости осмысленно: ведь «смысл в себе» отвергается. Наоборот, высказывание о том, что определенное число достижимо, приобретает *смысл* только одновременно *с доказательством его истинности*. Это вполне допустимо; ведь таково же положение вещей для *всех трансфинитных высказываний*, если им хотят придать финитный смысл (ср. § 10). Определение понятия «достижимо» сформулировано уже в соответствии с этим пониманием с помощью предложения «если все числа, меньшие, чем β, уже *признаны* достижимыми, то β также достижимо». Естественно, что в этой формулировке нет, например, *круга*; наоборот, определение вполне конструктивно. Число β объявляется допустимым только *тогда*, когда *предварительно* признаны допустимыми все числа, меньшие, чем β. При этом, естественно, встречающиеся здесь «*все*» следует понимать *финитно* (10.11); речь все время идет о некоторой совокупности с единым *конструктивным* предписанием для построения всех ее элементов.

Относительно *доказательства* теоремы о трансфинитной индукции нужно сказать следующее. Из вида определения понятия «достижимо» следует, что при доказательстве должно происходить «пробегание» совокупности всех порядковых чисел в порядке возрастания величины. При рассмотрении чисел с целой частью 0 нужно заметить следующее: *бесконечная* совокупность чисел, меньших, чем 0,2, преодолевается посредством *одной* идеи: доказательство можно продвигать *произвольно* далеко в эту совокупность. Поэтому можно считать, что *вся* совокупность исчерпана. Этого «потенциального» понимания «пробегания» бесконечной совокупности надо придерживаться во *всем доказательстве.*

Трансфинитное индукционное предположение при полной индукции по ρ следует понимать в смысле 10.5; поэтому оно надежно. В заключение «если число $\alpha+1$ признано достижимым, то достижимы и все остальные числа из системы $\mathfrak{S}(\alpha)$» входит трансфинитное «если... , то...». Относительно этого понятия в 11.1 были высказаны сомнения. Но они не относятся к рассматриваемому случаю уже потому, что предположение здесь не следует понимать *гипотетически*. Наоборот, имеется в виду следующее: когда достижение числа $\alpha+1$ уже *закончено, тогда* удается пробежать и числа из $\mathfrak{S}(\alpha)$ (а именно, совершенно аналогично законченному пробеганию чисел, предшествующих $\alpha+1$).

Рассмотрим теперь индукционный шаг в *целом*, т. е. сведе́ние пробегания $\rho+1$-системы к пробеганию ρ-системы. Это, пожалуй, критический пункт обоснования трансфинитной индукции. Однако я думаю, что если мы постараемся представить возможно нагляднее использованные рассуждения, то они окажутся весьма очевидными. Рассмотрим, например, подробно начальные случаи с целой частью 1, 2, 3. С возрастанием номера не добавляется ничего принципиально нового; способ продвижения вперед остается тем же. Разумеется, происходит сильное возрастание сложности многократно наслаивающихся бесконечностей, которые каждый раз приходится «пробегать»; пробегание следует всегда понимать как «потенциальное», подобно тому, как это происходило при целой части 0. Трудность состоит в том, что хотя в начальных случаях *точный финитный смысл* «пробегания» ρ-чисел в некоторой степени обозрим, в общем случае он столь *сложен*, что о нем можно составить лишь некоторое неопределенное представление. Его следует рассматривать как достаточное для того, чтобы разумным образом обосновать с его помощью пробегание $\rho+1$-чисел.

Наконец, «заключение» не добавляет ничего существенно нового. Высказывание о том, что редукционная процедура для вывода *конечна*, каким бы способом ни делались возможные *выборы*, содержит трансфинитное «существует» относительно *количества* редукционных шагов. Это высказывание того же рода, что и высказывание о «достижимости». Оно точно так же получает определенный смысл только в каждом отдельном случае в силу того, что *доказана* его истинность для этого случая. Это соответствует финитному пониманию (10.3). Впрочем, для самого доказательства *непротиворечивости* понятие «свободы выбора» излишне. Ведь речь идет лишь о редукции некоторого вывода с конечной секвенцией $\rightarrow 1=2$ и все редукционные шаги *однозначны* и не зависят от выбора. Число шагов нельзя теперь определить заранее; можно лишь делать о нем некоторые высказывания, которые становятся тем более *неопределенными*, чем больше порядковое число вывода. (На место прямого указания встает «возможность указания».) Это еще вполне можно считать находящимся в соответствии с финитным пониманием.

В целом я считаю, что и *доказательство конечности* (15.4) еще вполне можно причислить к достоверному, если проводить принципиальное различение достоверных и сомнительных средств доказательства, так что доказательство непротиворечивости действительно представляет собой *подтверждение* сомнительных частей чистой теории чисел.

16.2. Чтобы исследовать доказательство непротиворечивости на *соответствие с теоремой Гёделя* (2.32), нужно было бы сначала аналогично тому, как это сделал Гёдель в своей работе, цитированной в примечании[1]) на стр 84, *сопоставить натуральные числа* объектам теории доказательств (формулам, выводам и т. д.), а также ввести нужные функции и предикаты для этих объектов как функции и предикаты для соответствующих натуральных чисел. Тем самым доказательство непротиворечивости превратилось бы в доказательство с натуральными числами в качестве объектов. Оставленные мной открытыми возможности определения функций и предикатов пришлось бы ограничить определенными схемами, чтобы получить отграниченный формализм. Их легко можно выбрать таким образом, чтобы обеспечить определение всех функций и предикатов, необходимых в теории доказательств (см., например, изложение Гёделя).

Тогда способы заключения, используемые в доказательстве непротиворечивости, оказываются в *точности теми же*, что и приведенные в формализованной теории чисел. *Лишь* доказательство конечности (15.4) снова занимает особое место. Не видно, каким образом оно могло бы быть представлено с помощью средств чистой теории чисел. Отсюда следует, что доказательство непротиворечивости находится в соответствии с теоремой Гёделя.

В связи с этим представляют интерес следующие два факта, на доказательстве которых я не останавливаюсь, так как это завело бы слишком далеко.

1. Если удалить из формализованной чистой теории чисел правило *полной индукции*, то можно без существенных изменений изложить доказательство непротиворечивости таким образом, что (после описанного выше переистолкования его как доказательства над натуральными числами) для его проведения можно обойтись средствами чистой теории чисел (*включая* полную индукцию).

2. Доказательство непротиворечивости для чистой теории чисел *в целом* можно (после переистолкования для натуральных чисел в качестве объектов) представить с помощью средств *анализа*[1]).

[1]) См. также K. Gödel, Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 3 (1932), 12—13.

Особое положение правила *полной индукции* основывается на следующем обстоятельстве. Если его *отбросить*, то можно указать *определенную верхнюю границу* для *числа редукционных шагов*, необходимых для редукции любой определенной секвенции. Если же присоединить правило полной индукции, то это число, в зависимости от *выборов*, становится как угодно большим. Действительно, при рассмотрении этого правила заключения (14.24) очевидно, что число редукционных шагов, необходимых для редукции секвенции $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, зависит от числа $\mathfrak{n}$ (значения терма $\mathfrak{t}$). Это число может при известных обстоятельствах зависеть от *выбора*. Например, если $\mathfrak{t}$ — это *свободная переменная*, то впоследствии она должна быть заменена произвольно *выбираемым* числовым знаком $\mathfrak{n}$. В этом случае нет никакой общей границы для количества редукционных шагов при редукции секвенции $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

С этим обстоятельством можно связать тот факт, что в имевшиеся ранее доказательства непротиворечивости не удавалось включить правило полной индукции (2.4).

§ 17. Значение доказательства непротиворечивости

Я рассмотрю сначала вопрос о том, насколько применимым остается доказательство непротиворечивости, если *расширить* сформулированную в разделе IV «чистую теорию чисел», добавив новые понятия и методы (17.1). Затем я укажу, как *перенести* его на дальнейшие части математики (17.2), и, наконец, остановлюсь на определенных *возражениях* интуиционистов относительно *значения* доказательств непротиворечивости вообще (17.3).

17.1. Для решения вопроса о ценности доказательства непротиворечивости весьма существенно, действительно ли положенный в основу формализм *полностью* охватывает рассматриваемую математическую теорию, в нашем случае — чистую теорию чисел (ср. 3.3, 5.3). Но применяемая практически чистая теория чисел не нуждается ни в каких формальных ограничениях. Ее можно снова и снова *расширять* с помощью новых способов образования понятий, а также, возможно, и с помощью новых способов заключения. Как тогда обстоит дело с доказательством непротиворечивости? *Нужно лишь при каждом выходе за нынешние рамки одновременно распространять доказательство непротиворечивости на все вновь появившееся.* Доказательство непротиворечивости рассчитано на то, чтобы это было возможно произвести без затруднений в самой широкой мере.

Если, например, вводятся новые *функции* или *предикаты* для натуральных чисел, то для них следует давать *разрешающие* *предписания* согласно 8.12. Если вводятся соответствующие математические *аксиомы*, то для них следует давать *редукционные предписания* согласно 13.91 (ср. § 6 и 10.14). *Неразрешимые* образования понятий согласно 6.3 также не представляют трудностей, так как их можно *элиминировать* упомянутыми там методами. Все эти требования легко выполнить, если только введения «корректны» в общепринятом смысле и аксиомы «истинны».

Могут встретиться также *заключения* нового рода, не представимые в теперешнем формализме. Более того, *любая формально отграниченная* система, содержащая чистую теорию чисел, *обязательно неполна* в том смысле, что имеется теоретико-числовая теорема элементарного характера, истинность которой может быть доказана посредством очевидных финитных заключений, но не посредством средств доказательства, принадлежащих самой теории[1]). Это обстоятельство считается аргументом против ценности доказательств непротиворечивости[1]). Однако для моего доказательства непротиворечивости оно не играет никакой роли. Здесь можно сказать в самом общем случае следующее: если удалось доказать чисто теоретико-числовую теорему с помощью заключений, которые не принадлежат моему формализму, то следует дать для этой теоремы *редукционное предписание* согласно 13.91, и тем самым она будет включена в доказательство непротиворечивости.

Теорема, приведенная Гёделем в качестве примера, имеет совершенно элементарную структуру $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{P}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{P}$ представляет *разрешимый предикат* для натуральных чисел. Из результата о финитной истинности этого высказывания получается, следовательно, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{n})$ истинно для *любого определенного* $\mathfrak{n}$, а отсюда немедленно следует *редуцируемость секвенции* $\rightarrow \forall \mathfrak{x} \mathfrak{P}(\mathfrak{x})$ согласно 13.21, 13.4.

Понятие *редукционного предписания* сформулировано уже настолько *общо*, что оно не связано с каким-либо определенным формализмом правил заключения, а соответствует общему понятию «истинности», во всяком случае настолько, насколько последнее имеет ясный смысл (ср. 13.8).

Если мы захотим присоединить к теперешней чистой теории чисел некоторый *способ заключения* как таковой, нужно попытаться включить его в редукционную процедуру. (Можно, например, рассмотреть в этой связи «трансфинитную индукцию» до фиксированного «числа из II числового класса».)

---

[1]) См. P. Finsler, Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Zeitschr. **25** (1926), 676—682 и названную в примечании [1]) на стр. 84 работу К. Гёделя.

Однако если мы захотим присоединить к чистой теории чисел образование понятий и способы заключения *анализа* (ведь они используются при доказательствах теоретико-числовых теорем), то, вообще говоря, уже не удается непосредственно распространить на них доказательство непротиворечивости. Здесь имеются еще трудности, которые нужно преодолеть.

17.2. Однако можно без особых трудностей *перенести доказательство непротиворечивости для чистой теории чисел* на ряд других *областей* математики. Это верно в общем виде для таких математических теорий, *объекты* которых задаются посредством *предписания к построению* аналогично натуральным числам (8.11). Особенно простой и применимый во всех случаях тип предписания таков. Сначала задается определенное количество основных знаков, а затем полагают по определению: любой из этих знаков обозначает объект; если к обозначению объекта приписать основной знак, снова получается обозначение объекта. (Короче: «Любая конечная последовательность основных знаков обозначает объект теории».)

В таких теориях вводят затем посредством разрешимых определений (8.12) *функции* и *предикаты* и применяют те же логические *способы заключения*, что и в чистой теории чисел. *Доказательство непротиворечивости* переносится на такие теории непосредственно, только на место «числовых знаков» встают «знаки для объектов» теории; при этом *по существу* ничего не меняется.

Такими областями математики являются, например, существенные части *алгебры* (ведь *полиномы*, как объекты, являются конечными комбинациями знаков); из области геометрии — *комбинаторная топология*. Таким же образом можно представить и большие *части анализа*, не используя понятие вещественного числа во *всей его общности*. Наконец, сюда относятся и существенные части теории доказательств (ср. 16.1).

Присоединение отрицательных чисел, дробных чисел, диофантовых уравнений и т. д. к чистой теории чисел (3.31) можно *тем же способом* включить в доказательство непротиворечивости. Разумеется, *можно*, как упомянуто в 3.31, *переистолковать* все высказывания об этих объектах в высказывания о натуральных числах, надлежащим образом сопоставляя натуральные числа новым объектам. То же справедливо и относительно всех остальных теорий указанного рода: ведь «конечным комбинациям знаков» всегда можно взаимно однозначно сопоставить натуральные числа («перечислимость»). Однако это затруднительно, неестественно и не необходимо для потребностей доказательства непротиворечивости.

17.3 (ср. § 9). Со стороны *интуиционистов* против *значения* доказательств непротиворечивости было выдвинуто следующее возражение [1]). Даже если доказано, что сомнительные способы заключения не могут привести к противоречивым результатам, эти результаты все равно являются *бессмысленными* высказываниями, а занятие ими — игрой.

Подлинное *познание* может быть получено лишь с помощью достоверных, интуиционистских (соответственно финитных, если угодно) средств заключения.

Рассмотрим в качестве примера приведенное в 10.6 высказывание о существовании, для которого невозможно *указать* число, существование которого утверждается [*]). Это высказывание по указанной причине является *бессмысленным* при интуиционистском понимании, так как высказывание о существовании может быть осмысленным только в случае, когда можно *указать* некоторый числовой пример.

Что можно на это сказать?

Имеет ли такое высказывание какую-либо *познавательную ценность*? Ну, прежде всего, определенная *практическая ценность* таких высказываний состоит в следующей возможности их применения, на которую указывают противники интуиционистского понимания: эти высказывания могут при случае служить для выведения из них простых (например, представимых минимальными формулами (3.24)) высказываний, которые снова являются финитно и интуиционистски осмысленными и должны быть *истинными* в силу доказательства непротиворечивости.

Далее, высказывание о существовании $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ без указания примера все же полезно в том отношении, что уже не требуется больше искать доказательства для высказывания $\forall \mathfrak{x} \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$: такое доказательство невозможно, так как иначе возникло бы противоречие.

По этим причинам, независимо от «эстетической ценности» математических исследований вообще, *не* следует считать *совершенно бесцельным* доказательство теорем с помощью средств заключения, основанных на понимании «в себе».

Тем самым высказывания математики «в себе» имеют определенную ценность, хотя все же они еще не имеют никакого *смысла*. Но ведь существенная часть моего доказательства непротиворечивости состоит как раз в том, что высказываниям

[1]) См., например: L. E. J. Brower, Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.—math. Kl. (1928), 48—52; и A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung — Intuitionismus — Beweistheorie, Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete **3** (1935), Heft 4.

[*]) См. примечание переводчика в конце пункта 11.3.

«в себе» *приписывается финитный смысл*. Действительно, для произвольного высказывания, как только оно доказано, *можно указать редукционное предписание* согласно 13.6. Этот факт как раз и устанавливает финитный смысл рассматриваемого высказывания, полученный посредством доказательства непротиворечивости.

Разумеется, этот «финитный смысл» может быть весьма *сложным* уже для высказываний простого вида; он находится в более слабой связи с (определяемой пониманием «в себе») *формой* высказывания, чем это имеет место в области финитного вывода.

Например, приведенное выше высказывание о существовании получает таким образом финитный смысл, однако он *слабее*, чем финитный смысл доказанных высказываний о существовании, так как он не *утверждает*, что можно указать пример.

Другой вопрос — какое *значение* может все же иметь смысл высказываний «*в себе*»? Во всяком случае, из доказательства вытекает, что можно непротиворечиво рассуждать так, «как будто» в бесконечных областях объектов все точно так же определено «в себе», как в конечных областях (§ 9). *Доказательство непротиворечивости не* отвечает, однако, на вопрос, соответствует ли и до какой степени что-либо «*действительное*» смыслу высказывания «в себе», за исключением того, что утверждается его ограниченным *финитным* смыслом.

НОВОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ДЛЯ ЧИСТОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ*)

Герхард Генцен

Ниже я даю новое изложение доказательства непротиворечивости, проведенного в разделе IV предыдущей работы[1]); на этот раз главное внимание будет уделено тому, чтобы развить основные мысли и по возможности облегчить понимание отдельных шагов доказательства. С этой целью я буду в отдельных местах отказываться от подробного изложения всех деталей. Это будет делаться там, где детали неважны для понимания общей связи и где, с другой стороны, читатель может восстановить их без особого труда.

Для того чтобы следить за ходом доказательства непротиворечивости, не обязательно знакомство с соображениями, содержащимися в разделах I и III предыдущей работы, но знакомство с ними необходимо для понимания цели доказательства. В разделе II я развил в довольно подробном изложении некоторую формализацию чистой теории чисел, тесно примыкающую к математической практике. Как и раньше, я придаю этому большое значение. Можно было бы, конечно, описать готовую формальную систему; однако мне кажется, что при этом существенная часть взаимных связей выпала бы из поля зрения. К этому добавляется то обстоятельство, что непосредственно сравнимое с практикой формальное представление способов заключения (§ 5 предыдущей работы) с характеристическим понятием «секвенция» оказалось вполне подходящим для математических исследований и, как я считаю на основании собственного опыта, подходит для большинства целей лучше, чем те способы представления, которые вообще были обычными до сих пор.

Тем не менее, нельзя утверждать, что даже «самое натуральное» исчисление способов заключения является наиболее подходящим для исследований в теории исчислений только потому, что оно наиболее точно соответствует заключениям, которые применяются в действительности. В частности, для доказательства непротиворечивости оказалось еще более пригодным другое изложение, которое я поэтому и положу в основу в дальнейшем. Это — то самое формальное представление логических способов заключения, которое я разработал еще в моей диссертации[1]) под названием «исчисление LK». Я, однако, не предполагаю у читателя знакомства с упомянутой работой. Из раздела II предыдущей работы о непротиворечивости также будет заимствовано только несколько основных понятий, что всюду особо оговорено.

Конец доказательства непротиворечивости (конструктивное доказательство «теоремы о трансфинитной индукции» до ε_0) (пункт 15.4 предыдущей работы) остается неизменным и не получает пока нового изложения; см. заключительные замечания в конце настоящей работы.

*) Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Heft 4 (1939), Leipzig (Hirzel), 19—44.

[1]) G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. **112** (1936), 493—565. (Перевод: Г. Генцен, Непротиворечивость чистой теории чисел; см. настоящий сборник.)

§ 1. Новое формальное представление теоретико-числовых доказательств

Я формулирую отдельные понятия, а затем, по мере надобности, даю некоторые пояснения.

1.1. «Формула». Определение понятия формулы будет перенесено из предыдущей работы (пункт 3.2) со следующими упрощениями:

В качестве числового знака будет применяться только 1. Функции не допускаются (см., однако, заключительные замечания) за исключением одной, которая обозначается посредством штриха: $\mathfrak{a}'$ содержательно обозначает то же, что и $\mathfrak{a}+1$. С помощью этого функционального знака можно теперь представить натуральные числа выражениями 1, 1′, 1″, 1‴ и т. д. Поэтому термы теперь всегда имеют вид 1, или 1′, или 1″ и т. д., или $\mathfrak{a}$, или $\mathfrak{a}'$, или $\mathfrak{a}''$ и т. д., где $\mathfrak{a}$ обозначает произвольную свободную переменную. Первые мы называем числовыми термами (они соответствуют, таким образом, прежним числовым знакам); последние — переменными термами. Как и раньше, допускаются любые предикатные знаки; требуется

[1]) G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Z. **39** (1935), 176—210, 405—431. [Перевод: Г. Генцен, Исследования логических выводов (см. настоящий сборник).]

В разделе IV работы, цитированной в примечании[1]) на стр. 154, также был введен формализм, несколько измененный по сравнению с формализмом, введенным в разделе II. Он был построен специально для проводимого там доказательства и не имеет никакого общего значения.

лишь (пункт 13,3 предыдущей работы), чтобы вводимые предикаты были разрешимыми, т. е. чтобы для любых фиксированных натуральных чисел можно было решить, удовлетворяют они данному предикату или нет. На основе этих понятий терма и предиката сохраняется старое определение формулы (пункт 3.23), однако следует исключить еще связку $\supset$. Это не означает какого-либо существенного ограничения, ибо, как известно, $\supset$ можно заменить с помощью & и $\neg$ или с помощью $\vee$ и $\neg$. Можно было бы элиминировать также $\vee$ и $\exists$, как я это сделал тогда (§ 12); однако мы можем не делать этого, так как эти связки вообще не доставляют трудностей в «исчислении LK»: они совершенно аналогичны связкам & и $\forall$.

Пример формулы.

$$\forall x(x > 1' \,\&\, \exists y(y''' = a)),$$

где a — какая-либо свободная переменная, x и y — связанные переменные.

В дальнейшем нам будут нужны еще три простых вспомогательных понятия.

Элементарной формулой мы будем называть формулу, в которую не входят логические связки.

Пример. $a''' = 1'$.

Внешней связкой формулы, не являющейся элементарной, мы назовем ту логическую связку, которая вводится последней при построении (согласно пункту 3.23 предыдущей работы) этой формулы.

Степенью формулы назовем число входящих в нее логических связок.

Примеры. Элементарная формула имеет степень 0. Формула $\forall x(x > 1' \& \exists y(y''' = a))$ имеет степень 3 и ее внешней связкой является $\forall$.

1.2. «Секвенция». Секвенция — это выражение вида

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

где $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ — произвольные формулы. Формулы $\mathfrak{A}$ называются передними формулами, формулы $\mathfrak{B}$ — задними формулами секвенции. Обе системы могут быть и пустыми.

Пусть секвенция не содержит свободных переменных и относительно каждой ее передней и задней формулы известно, является ли эта формула «истинной» или «ложной». Тогда она считается «ложной», если все передние формулы истинны и все задние формулы ложны. (В частности, и тогда, когда не имеется ни передних, ни задних формул.) В любом другом случае она считается «истинной».

Пояснения. Мы будем пользоваться определением «истинности» и «ложности» только для понятия «основной секвенции». В этом случае $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются элементарными формулами без свободных переменных, т. е. непосредственно разрешимыми формулами. В общем случае понятие «истинности» формулы формально не определено. Однако это определение может послужить нам в общем случае для разъяснения содержательного смысла секвенции, причем мы должны добавить, что секвенция со свободными переменными считается истинной тогда и только тогда, когда в результате любой подстановки числовых знаков вместо ее свободных переменных получается истинная секвенция. Содержательный смысл секвенции без свободных переменных можно коротко выразить следующим образом: «Если имеют место допущения «$\mathfrak{A}_1$», ..., «$\mathfrak{A}_\mu$», то имеет место хотя бы одно из высказываний «$\mathfrak{B}_1$»; ..., «$\mathfrak{B}_\nu$».

В предыдущей работе я ввел понятие секвенции с единственной задней формулой в непосредственной связи с естественным представлением математических доказательств (§ 5). Исходя из этой точки зрения, можно прийти к новому, симметричному понятию секвенции, если стремиться к особенно естественному представлению разбора случаев (см. § 4 предыдущей работы и особенно 5.26). А именно, в этом случае $\vee$-удаление может быть представлено просто следующим образом: из $\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ заключаем, что $\to \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (читается: «имеются две возможности: $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$»). Однако следует отметить, что, вообще говоря, уже это новое понятие секвенции представляет собой отступление от «естественности» и его введение оправдывается в первую очередь большими формальными преимуществами описываемого ниже представления способов заключения, которое делается возможным с помощью этого понятия.

Укажем теперь, как понимается содержательный смысл секвенции в соответствии с данным определением в случаях, когда у секвенции нет передних или задних формул. Если нет ни одной передней формулы, то секвенция означает, что имеет место одно из высказываний «$\mathfrak{B}_1$», ..., «$\mathfrak{B}_\nu$», теперь уже независимо от каких-либо допущений. Если нет ни одной задней формулы, то секвенция означает, что при допущениях $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ не остается больше никаких возможностей, т. е. допущения несовместны, они приводят к противоречию. Секвенция без передних и задних формул, «пустая секвенция», обозначает, следовательно, что без каких-либо допущений получается противоречие, т. е. если эта секвенция выводима в некоторой системе, то сама эта система противоречива.

Пример секвенции.

$$\forall x(x' > 1) \to a > 1 \vee a = 1,\ 1' > 1,\ 1'' = b,$$

где a и b — свободные переменные, x — связанная переменная.

1.3. «Фигура заключения». Фигура заключения (формальный образ умозаключения) состоит из черты заключения, стоящей под ней нижней секвенции и стоящих над ней верхних секвенций (одной или нескольких). При этом нижняя секвенция обозначает результат заключения, который выводится из посылок, представленных верхними секвенциями.

В нашем формализме допускаются только такие фигуры заключения, которые получаются из приводимых ниже схем фигур заключения в результате подстановок следующего вида:

Вместо $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ могут подставляться произвольные формулы; вместо $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ (соответственно $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$) — произвольная формула этого вида, причем вместо $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$) следует подставлять ту формулу, которая получается из $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ в результате замены связанной переменной $\mathfrak{x}$ на произвольную свободную переменную $\mathfrak{a}$ (соответственно на произвольный терм). Вместо Γ, Δ, Θ и Λ можно подставлять произвольные, возможно пустые, ряды формул, отделенных друг от друга запятыми.

Наконец, должно соблюдаться следующее ограничение на переменные: свободная переменная, обозначаемая через $\mathfrak{a}$ (мы называем ее собственной переменной соответствующей фигуры заключения), не должна входить в нижнюю секвенцию этой фигуры заключения.

Схемы фигур заключения

1.31 Схемы структурных фигур заключения:

утончение: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}\qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$;

сокращение: $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}\qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$;

перестановка: $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}\qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Delta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Delta}$;

сечение: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$.

Обе формулы последней схемы, обозначенные через $\mathfrak{D}$, называются формулами сечения и их степенью — степенью сечения.

1.32. Схемы логических фигур заключения

$$\&\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \quad \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \end{array}\right. \qquad \vee\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \quad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \end{array}\right.$$

$$\forall\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a})}{\Gamma \to \Theta, \forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{t}), \Gamma \to \Theta}{\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \to \Theta} \end{array}\right. \qquad \exists\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \to \Theta}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \to \Theta} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{t})}{\Gamma \to \Theta, \exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \end{array}\right.$$

$$\neg\left\{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\mathfrak{A}} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}\right.$$

Та из формул схемы, которая содержит логическую связку, называется главной формулой соответствующей логической фигуры заключения.

1.33. Схема для VJ-фигур заключения (формальные образы полной индукции):

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{t})}.$$

Степень формулы, обозначенной в схеме через $\mathfrak{F}(1)$ (эта степень, разумеется, равна степени формул $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}')$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$), называется степенью VJ-фигуры заключения.

Пример фигуры заключения.

$$\frac{\to a' = 1,\ 1 < 1'' \,\&\, a = 1''}{\to a' = 1,\ \exists z\,(1 < z \,\&\, a = 1'')},$$

где a — свободная переменная, z — связанная переменная.

Пояснения к схемам фигур заключения будут даны ниже, при определении понятия вывода.

1.4. «Основная секвенция». Мы различаем «логические» и «математические» основные секвенции.

Логическая основная секвенция — это секвенция вида $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — произвольная формула.

Математическая основная секвенция — это секвенция, состоящая только из элементарных формул, которая переходит в истинную секвенцию при любой подстановке числовых термов вместо входящих в нее свободных переменных.

«Истинность» элементарной формулы без свободных переменных всегда проверяема вследствие предположения о разрешимости всех предикатов. Разумеется, вопрос о том, является ли секвенция, содержащая свободные переменные, основной секвенцией, не является, вообще говоря, разрешимым, но этого (т. е. разрешимости) и не требуется.

Примеры основных секвенций:

$$\forall x \exists y\,(x'' = a \mathbin{\&} y > x) \to \forall x \exists y\,(x'' = a \mathbin{\&} y > x);$$
$$a = b,\quad b = c \to a = c;\quad a < 1 \to;\quad \to 1' > 1;$$
$$a = b \to a = b;\quad \to a' > a;\quad \to 1''' \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 1'').$$

1.5. «В ы в о д». В ы в о д — это древовидная фигура, состоящая из некоторого числа секвенций, с самой нижней к о н е ч н о й с е к в е н ц и е й и несколькими в е р х н и м и с е к в е н ц и я м и, которые должны быть основными секвенциями; связь между ними устанавливается посредством фигур заключения.

Что это означает, представляется достаточно очевидным; однако выразим это еще раз более точно: пусть сначала дана нижняя секвенция. Она либо уже является верхней секвенцией — тогда весь вывод состоит из нее одной, — либо она является нижней секвенцией некоторой фигуры заключения. Каждая верхняя секвенция этой фигуры заключения снова является либо верхней секвенцией вывода, либо нижней секвенцией следующей фигуры заключения и т. д.

Читатель мог бы всегда представлять себе вывод вполне наглядно как древовидный объект; тогда преобразования вывода, которые будут производиться в § 3, станут особенно ясными.

П р и м е р в ы в о д а.

$$\dfrac{\to 1 = 1 \qquad \dfrac{a = a \to a' = a'}{1 = 1 \to b = b}\ \text{VJ-фигура заключения,}}{}\ \text{сечение,}$$

$$\dfrac{\dfrac{\to b = b}{\to \forall x\,(x = x)} \qquad \dfrac{1''' = 1''' \to 1''' = 1'''}{\forall x\,(x = x) \to 1''' = 1'''}\ \text{∀-логические фигуры заключения,}}{\to 1''' = 1'''}\ \text{сечение.}$$

Дальнейший пример см. в 1.6.

Еще одно вспомогательное понятие, употребляемое в дальнейшем.

Н и т ь вывода — это, коротко говоря, цепь секвенций, которую проходят, когда спускаются, начиная от некоторой верхней секвенции, до конечной секвенции. При этом каждый раз переходят от верхней секвенции некоторой фигуры заключения к нижней секвенции этой фигуры.

Без дальнейших пояснений понятно, что имеется в виду, когда говорится, что секвенция стоит над (соответственно под) какой-либо другой секвенцией, принадлежащей той же нити вывода [т. е., например, не только непосредственно над ней (соответственно под ней), но и на произвольном расстоянии]. Во всех случаях, когда употребляется понятие «выше» или «ниже», следует подразумевать, что секвенции, о которых идет речь, принадлежат общей нити; в противном случае это понятие бессмысленно.

1.6. П о я с н е н и е к н о в о й ф о р м а л и з а ц и и т е о р е т и к о - ч и с л о в ы х д о к а з а т е л ь с т в.

С помощью нового понятия вывода дается новая формализация теоретико-числовых доказательств, которая отличается от моего предыдущего «натурального» изложения прежде всего в двух пунктах. В о - п е р в ы х: все правила заключения, соответствующие логическим связкам (правила «введения» и «удаления» логических связок), изменены таким образом, что н и ж н я я с е к в е н ц и я всегда содержит «главную формулу», в то время как верхняя секвенция содержит подформулы этой формулы. Прежнему «введению» логического знака теперь соответствует вхождение этого знака в одну из з а д н и х ф о р м у л нижней секвенции и «удалению» логического знака — его вхождение в одну из п е р е д н и х ф о р м у л нижней секвенции. Можно убедиться, например, для случая ∀-правил заключения, что старое и новое изложения эквивалентны друг другу (наличием нескольких задних формул пока пренебрегаем). При этом следует использовать «сечение» и логические основные секвенции. Ср. приведенный в качестве примера вывод с ∀-введением слева и стоящим рядом с ним ∀-удалением.

Эта часть перехода от старых правил заключения к новым сводится к тому, что мы освобождаемся от е с т е с т в е н н о г о в арифметическом доказательстве п о р я д к а в ы с к а з ы в а н и й и заменяем его искусственным упорядочением их, продиктованным особенной точкой зрения, а именно таким упорядочением, при котором в заключениях, соответствующих логическим связкам, теперь всегда с н а ч а л а встречаются б о л е е п р о с т ы е высказывания и только з а т е м — более сложные, т. е. содержащие дополнительную связку. Эта перестройка оказывается практически полезной для доказательства непротиворечивости по той причине, что в этом доказательстве важную роль играет понятие сложности вывода и в связи с этим — понятие с л о ж н о с т и отдельной формулы (сложность формулы возрастает с ее с т е п е н ь ю).

Второе важное отличие от старого понятия вывода состоит в симметризации понятия секвенции путем введения секвенций с произвольным числом задних формул. Однако из-за этого стало несколько труднее понимать содержательный смысл отдельных схем заключения и пояснять правдоподобность их «истинности». Для этой цели представим себе сначала, что имеется только одна задняя формула, а затем убедимся, что заключение остается правильным как в случае, когда имеется большее число задних формул, так и в случае, когда задних формул совсем нет. После того как мы немного ознакомились с этим понятием вывода, можно установить, что с ним особенно легко производить преобразования вывода и другие исследования по теории доказательства. Решающие преимущества таковы.

Имеется полная симметрия между & и $\vee$, $\forall$ и $\exists$. Все логические связки: &, $\vee$, $\forall$, $\exists$ и $\neg$ — совершенно равноправны в нашей системе; ни одна из них не выделена чем-либо существенным по сравнению с другими. Прежде всего, почти как по волшебству, полностью устраняется особое положение отрицания, которое в натуральном исчислении представляет собой досадное исключение (ср. пункты 4.56 и 5.26 предыдущей работы). Я осмеливаюсь выражаться так, потому что я сам, когда я в первый раз описал «исчисление LK», был чрезвычайно поражен этим его свойством. «Закон исключенного третьего» и «удаление двойного отрицания» запрятаны в новых схемах заключения — читатель может убедиться в этом, выведя обе эти формулы в новом исчислении!, — но они становятся совершенно безвредными и не играют в дальнейшем доказательстве непротиворечивости никакой особой роли.

Если мы представим себе, что из схем фигур заключения удалены Γ, Δ, Θ, Λ, то мы увидим, что схемы весьма просты и однородны, ибо в них каждый раз входит только то, что безусловно необходимо, а Γ, Δ, Θ, Λ — это балласт, который означает только, что д о п о л н и т е л ь н ы е передние и задние формулы переносятся без изменения из верхних секвенций в нижнюю секвенцию.

Новая формулировка понятия математической основной секвенции нуждается еще в некотором разъяснении. В предыдущей работе это понятие понималось по-другому (пункты 5.23 и 10.14). Оказывается, однако, что основные секвенции в смысле предыдущей работы в ы в о д и м ы в новой системе. Поясним это на примере, с помощью которого можно уяснить общую точку зрения.

«Математическую основную секвенцию» в старом смысле

$$\to \forall x \forall y \neg (x = y \,\&\, \neg y = x)$$

можно вывести следующим образом:

$$\begin{array}{c}
a = b \to b = a \\ \hline
a = b \,\&\, \neg b = a \to b = a \\ \hline
\neg b = a,\ a = b \,\&\, \neg b = a \to \\ \hline
a = b \,\&\, \neg b = a,\ a = b \,\&\, \neg b = a \to \\ \hline
a = b \,\&\, \neg b = a \to \\ \hline
\to \neg (a = b \,\&\, \neg b = a) \\ \hline
\to \forall y \neg (a = y \,\&\, \neg y = a) \\ \hline
\to \forall x \forall y \neg (x = y \,\&\, \neg y = x)
\end{array}$$

Аналогично можно вывести все обычные «математические основные секвенции» в старом смысле из содержательно равнозначных им математических основных секвенций в новом смысле[1]). То, что новое понятие вывода э к в и в а л е н т н о понятию вывода предыдущей работы (если отвлечься от ограничения, которое возникает в новой системе из-за первоначального ограничения в допущении ф у н к ц и й), можно (я не буду дальше вдаваться в это) доказать без особенно больших трудностей, пользуясь сделанными выше замечаниями[2]).

§ 2. Обзор доказательства непротиворечивости

Следует показать, что любой вывод н е п р о т и в о р е ч и в[3]), вместо чего можно просто сказать: никакой вывод не имеет п у с т о й п о с л е д н е й с е к в е н ц и и. Действительно, из противоречия, $\to \mathfrak{A}$ и $\to \neg \mathfrak{A}$, можно сначала вывести $\to \neg \mathfrak{A}$ и $\neg \mathfrak{A} \to$ а затем с помощью сечения — пустую секвенцию. (Обратно, из пустой секвенции с помощью «утончений» можно вывести произвольную секвенцию.)

Очевидно, что сначала следует доказывать непротиворечивость п р о с т ы х выводов, затем непротиворечивость б о л е е с л о ж н ы х, используя непротиворечивость более простых, и так далее. Переход, следовательно, происходит «индуктивно». Далее, весьма правдоподобно, что при таком способе доказательства мы каждый раз должны будем исчерпать б е с к о н е ч н ы й ряд выводов прежде, чем перейти к более сложному классу выводов; например, сначала все выводы, которые состоят только из одной секвенции, затем все, которые состоят из двух секвенций, и т. д. Это означает не что иное, как применение «трансфинитной индукции». Разумеется, последовательность шагов будет в действительности существенно более запутанной, чем в случае, приведенном в качестве примера.

Мы делим ход доказательства на три части.

1. Непротиворечивость произвольного вывода будет сведена к непротиворечивости некоторого «более простого вывода». Это произойдет в результате того, что для произвольного «вывода противоречия», т. е. вывода, п о с л е д н я я с е к в е н ц и я

[1]) Упомяну при этом, что все л о г и ч е с к и е основные секвенции также выводимы в новой системе, так что я, собственно, больше не нуждаюсь в том, чтобы их допускать. Их сохранение дает, однако, определенные формальные преимущества.

[2]) Бо́льшая часть доказательства эквивалентности уже дана в проведенном в разделе V моей диссертации доказательстве эквивалентности исчислений NK и LK.

[3]) В предыдущей работе я доказал, более общо, «редуцируемость» последней секвенции любого вывода. Здесь я ограничусь доказательством непротиворечивости: в результате станут возможными различные упрощения.

которого пуста, будет однозначно определен редукционный шаг, который превращает такой вывод в «более простой» вывод с той же последней секвенцией. Определение этого редукционного шага составляет содержание § 3.

2. После этого каждому выводу будет сопоставлено некоторое трансфинитное порядковое число и будет доказано, что в результате редукционного шага рассматриваемый вывод противоречия переходит в вывод с меньшим порядковым числом. Тем самым приобретает свой точный смысл понятие «простоты», которое вначале было определено интуитивно: чем больше порядковое число вывода, тем больше его «сложность» в смысле приводимого доказательства непротиворечивости. Это — содержание § 4.

3. Отсюда затем следует очевидным образом с помощью «трансфинитной индукции» непротиворечивость всех выводов. Правило трансфинитной индукции, как изначально очень «сомнительное» правило, не должно предполагаться при доказательстве непротиворечивости или должно быть доказано, как в теории множеств. Точнее, необходимо особое обоснование этого правила посредством «конструктивных» средств заключения, не являющихся сомнительными. Относительно этого мы в заключительных замечаниях в конце § 4 сошлемся непосредственно на предыдущую работу.

§ 3. Редукционный шаг над выводом противоречия

3.1. Основные идеи. Пусть дан вывод, последняя секвенция которого является пустой секвенцией. Требуется описать его преобразование в некоторый, в определенном смысле более простой, вывод с той же последней секвенцией. О том, что́ значит «проще», пока можно судить лишь на основе эвристических соображений. Впоследствии это будет уточнено с помощью порядковых чисел.

На основании чего можно вообще предполагать, что если дано доказательство какого-нибудь противоречия, то это противоречие должно быть доказуемо также и более простым путем? Противоречие означает высказывание совершенно простой структуры, например «1=2». Если настолько простое высказывание можно доказать с помощью сложного доказательства, то естественно предположить, что это доказательство можно упростить. Можно, например, привести следующие соображения: где-то в доказательстве должно встретиться высказывание максимальной сложности. Но тогда следует предположить, что должна иметься возможность как-нибудь «редуцировать» эту «вершину сложности» (при формализации это обычно формула, имеющая максимальную встречающуюся в выводе степень). Вхождение этого высказывания в общем случае мыслимо лишь таким образом, что оно вводится с помощью правила «введения» его внешней связки и затем используется дальше с помощью правила «удаления» той же связки. Но если связка сначала вводится, а затем снова устраняется, то ее можно вообще отбросить, переходя непосредственно от предшествующих подформул к следующим за ними соответствующим подформулам[1]).

Это — основная идея приводимой ниже «редукции связки». Разумеется, оказывается, что дело обстоит не так просто, как предполагается в приведенном выше наброске хода мыслей. Так, с одной стороны, трудности может вызвать вхождение в вывод полной индукции, а именно тогда, когда рассматриваемое высказывание с наибольшим числом связок доказывается не непосредственно с помощью правила «введения», а с помощью полной индукции. В этом случае требуется новый, особый вид редукционного шага, который мы будем называть «VJ-редукцией». Форма этого редукционного шага чрезвычайно проста и напрашивается сама собой без дальнейших пояснений: если терм $\mathfrak{t}$ в VJ-фигуре заключения является числовым термом, т. е. представляет определенное число, то, естественно, можно заменить полную индукцию рядом применений обычных правил вывода (в нашей формализации — рядом «сечений»). В этом и состоит «VJ-редукция».

Если в вывод входит VJ-фигура заключения, в которой $\mathfrak{t}$ является переменным термом (а это, собственно, нормальный случай), то, естественно, эту фигуру нельзя сразу редуцировать описанным образом. Но правило редукции можно устроить таким образом, чтобы при проведении все новых и новых шагов редукции все больше и больше переменных термов постепенно заменялось на числовые термы, так, чтобы очередь в конце концов доходила до тех VJ-фигур, которые вначале были нередуцируемыми. Об этом упомянуто лишь между прочим. Ведь здесь речь идет у нас только о том, чтобы определить один-единственный редукционный шаг, т. е. о том, чтобы в данном выводе противоречия найти хотя бы одно место, где можно было бы осуществить редукцию.

Итак, предположим, что нет ни одной возможности осуществить VJ-редукцию. В этом случае, как будет показано ниже, при точном проведении доказательства всегда осуществима «редукция связки». Конечно, нельзя ожидать, что во всех случаях

[1]) Впрочем, тот же ход мыслей лежит в основе доказательства «основной теоремы» моей диссертации.

окажется доступной формула наибольшей степени. Дело в том, что она, как уже сказано, могла быть введена с помощью VJ-фигуры с переменным $\mathfrak{t}$. Однако в каждом случае можно отыскать в выводе формулу, представляющую собой «относительную вершину», а именно, формулу, которая вводится посредством правила введения своего внешнего логического знака и удаляется из вывода посредством правила удаления того же знака и потому редуцируема. Почему такая формула всегда должна найтись, лучше всего можно понять в ходе приводимого ниже доказательства (3.43).

Следует указать еще на одно особое обстоятельство. Может, например, случиться, что формула, которая должна быть сделана объектом редукции связки, используется дальше в выводе не один, а несколько раз. (*Пример*. Формула имеет вид $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ и от нее переходят к $\mathfrak{F}(1)$, $\mathfrak{F}(1''')$, а на другом месте, возможно, даже к $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{A}$.) В общем случае наибольшее, чего можно достичь, — это то, чтобы формула использовалась с помощью правила удаления ее внешней связки на одном из мест своего применения. Об остальных местах ничего сказать нельзя. Поэтому в этом общем случае нельзя совсем удалить формулу с помощью редукции, а можно лишь провести упрощение *в рассматриваемом месте ее применения* таким образом, чтобы срезать *здесь* окольный путь за счет данной формулы. Однако на остальных местах применения она сохранится. Оказывается, что этого достаточно.

Эти предварительные пояснения проводились на основе представления о «*натуральном доказательстве*» с естественной последовательностью отдельных высказываний. Для применения нашего формализма, определенного в § 1, следует произвести соответствующий перевод. «Введение» логической связки отвечает здесь ее вхождению в заднюю формулу нижней секвенции, «удаление» связки — ее вхождению в переднюю формулу нижней секвенции логической фигуры заключения. Все дальнейшие детали будут приведены при следующем ниже точном формальном проведении доказательства; предварительные пояснения могут и должны служить лишь для того, чтобы довести до читателя в поверхностной форме основные идеи метода и тем самым облегчить понимание хода доказательства.

3.2. *Устранение лишних свободных переменных как подготовка редукционного шага. «Конечный кусок»*.

Начнем определение «редукционного шага над выводом противоречия» с того, что предпишем, чтобы перед собственно редукционным шагом выполнялись следующие простые преобразования.

Все свободные переменные в выводе заменяются цифрой 1; исключение составляют, однако, все вхождения собственной переменной (1.3) каждой из фигур заключения во все секвенции вывода, стоящие выше нижней секвенции этой фигуры заключения.

Что значит эта подготовка? Свободная переменная в *нормальном случае* служит собственной переменной некоторой фигуры заключения и для нее может найтись применение только выше нижней секвенции этой фигуры заключения; входить в саму нижнюю секвенцию ей даже запрещено ограничением на переменные (1.3). Значит, во всех остальных случаях, где свободные переменные еще входят, они совершенно *излишни* и могут быть с тем же успехом заменены на 1. Легко убедиться, что вывод при этом остается корректным. Пустая секвенция остается, естественно, без изменения. Нам понадобится в дальнейшем одно простое вспомогательное понятие — *конечный кусок вывода*, которое определяется следующим образом: к конечному куску причисляются все те секвенции вывода, которые мы пробегаем, когда прослеживаем каждую отдельную нить вывода (1.5) от нижней секвенции наверх и останавливаемся, как только встречаем черту какой-либо логической фигуры заключения. Нижняя секвенция этой фигуры заключения каждый раз принадлежит конечному куску, а верхняя секвенция — уже нет. Если нить вообще не проходит через черту никакой логической фигуры заключения, то эта нить, естественно, целиком причисляется к конечному куску.

Конечный кусок содержит из фигур заключения только структурные и VJ-фигуры заключения.

Мы различаем теперь два случая:

1. Конечный кусок нашего вывода противоречия содержит по меньшей мере одну VJ-фигуру. Тогда будет проведена VJ-*редукция*; см. 3.3.

2. Конечный кусок не содержит VJ-фигур заключения. Тогда после описанного ниже подготовительного шага (3.4) будет проведена *редукция связки* (3.5).

3.3. VJ-*редукция*. Если после проведения над данным выводом противоречия упомянутого подготовительного шага в конечный кусок этого вывода входит хотя бы одна VJ-фигура заключения, то собственно шаг редукции состоит в описываемом ниже преобразовании вывода.

Выберем в конечном куске такую VJ-фигуру заключения, которая не стоит *над* какой-либо другой VJ-фигурой заключения (т. е. часть нити вывода, проходящей через нижнюю секвенцию выбранной VJ-фигуры заключения от этой секвенции до конечной секвенции, не должна проходить через черту никакой

VJ-фигуры заключения). Чтобы редукционный шаг был однозначным, нужно еще указать какое-нибудь правило для однозначного определения выбираемой VJ-фигуры; это можно сделать простым способом.

VJ-фигура имеет вид

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(\mathfrak{n})},$$

где $\mathfrak{n}$ обозначает некоторый числовой терм. Так как переменный терм не может здесь стоять в результате проделанных предварительных приготовлений, то нижняя секвенция вообще не может содержать никакой свободной переменной. Ведь после подготовительного шага свободную переменную можно указать только выше фигуры заключения, обладающей собственной переменной, а такие фигуры не встречаются ниже нашей VJ-фигуры заключения. С другой стороны, часть нити, проходящей от ее (VJ-фигуры) нижней секвенции до конечной секвенции, проходит только через черты структурных фигур заключения.

Теперь мы заменим эту VJ-фигуру системой структурных фигур заключения следующего вида:

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1')\qquad \mathfrak{F}(1'),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma\to\Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}\ \text{сечение,}$$

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma\to\Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}\ \text{возможно, несколько перестановок и сокращений,}$$

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1'')\qquad \mathfrak{F}(1''),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma\to\Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}\ \text{сечение,}$$

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma\to\Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}\ \text{возможно, перестановки и сокращения,}$$

$$\vdots$$

$$\frac{}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(\mathfrak{n})}\ \text{и т. д. совершенно аналогично.}$$

Над секвенциями $\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\mathfrak{F}(1')$ и $\mathfrak{F}(1'),\Gamma\to\Theta,\mathfrak{F}(1'')$ и т. д. надпишем каждый раз ту часть вывода, которая ранее стояла над $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}')$, причем во всей этой части заменим свободную переменную (за исключением тех случаев, когда она случайно должна применяться в качестве собственной переменной одной из входящих туда фигур заключения) на числовой терм 1, соответственно $1'$, соответственно $1''$ и т. д. Наконец, снизу к секвенции (1), $\Gamma\to\Theta$, $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{n}$) снова подписываем без изменений оставшуюся часть старого вывода. Говоря точнее: все нити вывода, которые не проходят через эту секвенцию, сохраняются без изменений, а те, которые проходят через нее,

остаются неизменными от конечной секвенции до рассматриваемого места.

Если $\mathfrak{n}$ равно 1, то редукция проходит несколько иначе: нижняя секвенция VJ-фигуры гласит тогда: $\mathfrak{F}(1),\ \Gamma\to\Theta,\ \mathfrak{F}(1)$. Мы выводим ее из логической основной секвенции $\mathfrak{F}(1)\to\mathfrak{F}(1)$ с помощью утончений и перестановок, если необходимо. То, что раньше стояло в выводе над ней, удаляется; все остальное, как и в общем случае, сохраняется без изменений.

Легко уяснить себе, что при VJ-редукции данный вывод противоречия перейдет в вывод противоречия, корректный во всех его частях. Для этого нужно, по существу, только сообразить, что подстановка вместо $\mathfrak{a}$ какого-либо числового терма переводит любую фигуру заключения снова в корректную фигуру заключения.

Больше не требуется пояснений к способу проведения редукционного шага; его содержательное значение, как указано в 3.1, чрезвычайно просто: полная индукция, которая простирается только до определенного числа, заменяется обычными сечениями, количество которых соответствует величине этого числа.

3.4. Предварительные рассмотрения и подготовительный шаг к редукции связки.

Теперь следует рассмотреть случай, когда вывод противоречия после проведения подготовительных шагов 3.2 не содержит в своем конечном куске ни одной VJ-фигуры.

Проводимая в этом случае «редукция связки» начинается с описанного ниже подготовительного шага (3.42), смысл которого состоит в том, чтобы устранить все входящие в конечный кусок утончения и логические основные секвенции, которые в противном случае послужили бы причиной утомительных исключений при самой редукции связки.

С этой целью, а также для дальнейшего использования нам придется сначала немного разъяснить отдельные детали структуры конечного куска.

3.41. Конечный кусок нашего вывода содержит только структурные фигуры заключения. Его верхние секвенции — это или верхние секвенции всего вывода или нижние секвенции логических фигур заключения. Конечный кусок не содержит свободных переменных (так как он не содержит фигур заключения с собственными переменными). Все это очевидно без дальнейших пояснений.

Введем теперь два простых вспомогательных понятия.

Равные соответствующие друг другу согласно схеме фигуры заключения формулы, входящие в качестве членов в верхнюю секвенцию и в нижнюю секвенцию структурной фигуры заключения, назовем *связанными*.

Связаны друг с другом, например, три формулы, обозначенные через $\mathfrak{D}$ в схеме сокращения, точно так же, как первая из формул верхней секвенции, обозначенных через Г, с первой из формул нижней секвенции, обозначенных через Г, а также вторая со второй и т. д.; обе формулы сечения связаны друг с другом и т. д.

Связкой формул назовем совокупность всех формул в конечном куске вывода, которые мы получим, если, исходя из какой-либо *одной формулы*, присоединим все *связанные* с ней формулы, затем все формулы, связанные с этими формулами, и т. д.; мы можем говорить также «*связка, принадлежащая* данной исходной формуле».

О структуре связки можно сказать следующее:

Каждой связке *принадлежит некоторое сечение* в том смысле, что его формулы сечения принадлежат связке. Это следует из того, что формула, встречающаяся где-либо в конечном куске вывода, всегда связана, что легко увидеть, просмотрев схемы структурных фигур заключения, с некоторой формулой в ближайшей нижестоящей секвенции, за исключением случая, когда рассматриваемая формула является формулой сечения. Так как конечная секвенция пуста, то при прослеживании связки сверху вниз мы обязательно дойдем до такого сечения.

Теперь мы исходим из этого сечения и прослеживаем ход связки снизу вверх в связи с обеими принадлежащими связке формулами сечения. Тогда оказывается, что часть связки, примыкающая к *левой* формуле сечения, — мы называем ее *левой стороной связки* — является *древовидной*; *разветвление* наступает, когда, идя снизу, мы доходим до *сокращения*, формула которого принадлежит связке; ветвь может *окончиться* на некотором месте, если мы приходим к формуле $\mathfrak{D}$ какого-либо утончения или к верхней секвенции конечного куска; тогда мы говорим о *верхней формуле связки*. Все формулы левой стороны связки являются *задними формулами* соответствующих секвенций. Вполне аналогичные утверждения справедливы для *правой стороны связки*, примыкающей к *правой* формуле сечения; она также имеет древовидную форму и т. д.; все ее формулы являются *передними формулами*. Далее оказывается, что никакая новая *формула сечения*, кроме двух, из которых мы исходили, не принадлежит связке; поэтому однозначно определено *сечение, принадлежащее связке*, а тем самым и понятия левой и правой сторон связки. Связке не

принадлежат также никакие формулы, входящие в это сечение, кроме формул сечения. Все формулы, принадлежащие связке, стоят над нижней секвенцией сечения (т. е. все *секвенции*, которые содержат формулы из связки, стоят над ней). Следовательно, левая и правая стороны вместе образуют всю связку.

В справедливости всех этих утверждений легко убедиться, если мысленно проследить связку от формул сечения наверх и выяснить при помощи схем структурных фигур заключения, каким единственным способом можно добираться до все более удаленных связанных формул.

3.42. Теперь мы можем обратиться к *подготовительному шагу для редукции связки*, который, как уже сказано, должен обеспечить *удаление всех входящих в конечный кусок утончений и логических основных секвенций*. Очевидно, что это возможно. Действительно, утончение представляет собой лишь ослабление содержательного смысла секвенции; если можно вывести противоречие из ослабленной секвенции, то же самое можно сделать из более сильной верхней секвенции; также и логическая основная секвенция, как чистая тавтология, является излишней при наличии одних структурных преобразований.

Прием получается почти сам собой. Начнем с утончений. Выберем такое утончение, *над которым* не стоит (в конечном куске) никакое другое утончение. Мы просто вычеркиваем его нижнюю секвенцию и дальше применяем вместо нее верхнюю секвенцию. Чтобы вывод остался корректным, мы вычеркиваем, спускаясь ниже, в следующей нижней секвенции формулу, связанную с формулой утончения $\mathfrak{D}$, точно так же, как и *связанную* с этой формулой формулу в ближайшей следующей нижней секвенции, и т. д. Могут ли при этом появиться трудности? Ну, может, например, встретиться сокращение, формулу $\mathfrak{D}$ которого нужно вычеркнуть из верхней секвенции. Тем лучше; тогда верхняя секвенция будет *равна* нижней секвенции; можно выбросить сокращение, и готово. Также и в других случаях нижняя и верхняя секвенции некоторой фигуры заключения могут случайно стать равными, тогда, естественно, такую фигуру заключения просто выбрасывают и пишут эту секвенцию только один раз. Если встречается *сечение*, для которого вычеркиваемая формула является *формулой сечения*, то вычеркивается его вторая верхняя секвенция со всем, что над ней стоит, и нижняя секвенция выводится из оставшейся верхней секвенции с помощью одних только утончений и перестановок (если требуется).

Вновь возникающие при этом утончения будут устранены снова тем же приемом. То, что этот процесс заканчивается, т. е.

приводит к полному освобождению конечного куска от утончений, следует из того, что мы внутри вывода все время продвигаемся вниз (считая, например, по числу сечений до конечной секвенции).

Читателю предоставляется точно доказать возможность осуществления намеченного предписания и сделать его однозначным; при этом не встретится никаких существенных затруднений.

В заключение устраним логические основные секвенции. Такая секвенция может теперь входить в конечный кусок только в качестве верхней секвенции некоторого сечения, так как к ней не применимы ни сокращение, ни перестановка; тогда, как легко видеть, нижняя секвенция этого сечения равна другой его верхней секвенции. Следовательно, можно просто удалить сечение, и все уже готово.

В результате мы получаем, наконец, вывод противоречия, конечный кусок которого обладает теми же свойствами, которые указаны выше, с дополнением, что в него не входят больше утончения и логические основные секвенции (как верхние секвенции вывода).

3.43. Дальнейшие предварительные соображения к редукции связки.

Я утверждаю теперь:

В конечном куске найдется хотя бы одна связка формул, имеющая и в правой и в левой стороне по крайней мере одну верхнюю формулу, которая является главной формулой логической фигуры заключения.

В этом месте видна связь нашего формального подхода с намеченными в 3.1 основными идеями: понятие связки формул дает нам возможность обозревать сразу всю совокупность вхождений «высказывания» в «доказательство» (или, что то же, формулы в вывод). Главная формула, являющаяся верхней формулой с левой стороны, соответствует месту введения самой внешней связки рассматриваемого высказывания; главная формула с правой стороны, которая всегда является передней формулой, соответствует месту, где эта связка снова удаляется. Сечение, принадлежащее связке, обозначает не что иное, как формальное установление связи между обоими местами, обусловленное особой структурой нашего формализма. Разветвление связки соответствует трудности, отмеченной в конце 3.1: разветвление в правой стороне означает, например, многократное применение высказывания. То, что разветвления могут появляться как слева, так и справа, обусловлено общей симметрией нашего формализма и затрудняет применение основных идей к

каждой детали проведения редукции. Однако будет достаточно иметь только приблизительное представление об основных идеях и в дальнейшем просто руководствоваться формальными аналогиями; именно так я делал при построении доказательства непротиворечивости.

Теперь нужно доказать высказанное утверждение, которое по своему смыслу означает существование в нашем выводе места, пригодного для редукции связки. Для этого сначала следует установить, что наш вывод должен содержать хотя бы одну логическую фигуру заключения. Если бы это не имело места, то конечный кусок охватывал бы весь вывод. Это означало бы, что из математических основных секвенций, которые не содержат свободных переменных и которые, следовательно, являются «истинными» секвенциями, выведена некоторая «ложная» секвенция путем применений одних только структурных фигур заключения, отличных от утончения. При этом в весь вывод входили бы только элементарные формулы без свободных переменных, т. е. разрешимые формулы, так что относительно каждой секвенции можно было бы решить, истинна она или ложна. (Формула, содержащая логические связки, не может встретиться, так как ни одна такая формула не входит в основные секвенции и не может быть введена с помощью какой-либо из возможных фигур заключения.) Это означало бы, что имеется хотя бы одна фигура заключения, нижняя секвенция которой «ложна», в то время как ее верхние секвенции «истинны». Последнее, как легко установить, невозможно.

Для доказательства приведенного утверждения рассмотрим все те нити конечного куска, верхние секвенции которых являются нижними секвенциями логических фигур заключения. Эти нити мы пробегаем сверху вниз и наблюдаем за тем, входит ли в пробегаемые секвенции формула, которая принадлежит той же связке, что и стоящая над ней главная формула (или которая сама является главной формулой). Это имеет место для верхних секвенций наших нитей; при пробегании вниз это свойство в общем случае наследуется дальше. Оно тривиальным образом сохраняется при пробегании сокращений и перестановок (из-за связанности). Если мы доходим до сечения, в котором встречаются две нити рассматриваемого вида, то может, правда, случиться, что это свойство не будет перенесено на нижнюю секвенцию; однако, очевидно, это может произойти лишь тогда, когда именно связка, соответствующая формулам сечения, содержит главные формулы в обеих сторонах. Это как раз случай, описанный в упомянутом утверждении. Так как пустая секвенция не обладает рассматриваемым свойством, то это утверждение доказано, если только данный случай действительно является единственно возможным, при котором это свойство может не переноситься на нижнюю секвенцию при пробегании рассматриваемой нити сверху вниз. Для этого мы должны добавить еще только один случай, а именно тот, при котором, идя сверху, мы пробегаем сечение, вторая верхняя секвенция которого не принадлежит ни одной из рассматриваемых нами нитей и, следовательно, принадлежит только таким нитям конечного куска, которые ограничены математическими основными секвенциями. Тогда эта верхняя секвенция может содержать только элементарные формулы, следовательно, формулы сечения — также элементарные формулы. Входящая в пробегаемую секвенцию формула, принадлежащая той же связке, что и главная формула, не может быть формулой сечения, так как ее степень больше 0, и потому она связана с некоторой формулой, обладающей тем же свойством и находящейся в нижней секвенции.

Тем самым закончено доказательство существования формульной связки, пригодной для редукции связки.

Приведем еще одно, последнее, вспомогательное понятие, которое будет иметь центральное значение для определения «меры сложности» вывода.

Высотой секвенции вывода*) мы назовем самую высокую степень какого-либо сечения или VJ-фигуры, нижняя секвенция которого (соответственно которой) стоит под рассматриваемой секвенцией. Если такой фигуры заключения нет, то высота равна 0.

Пояснения о значении этого понятия помещены значительно ниже.

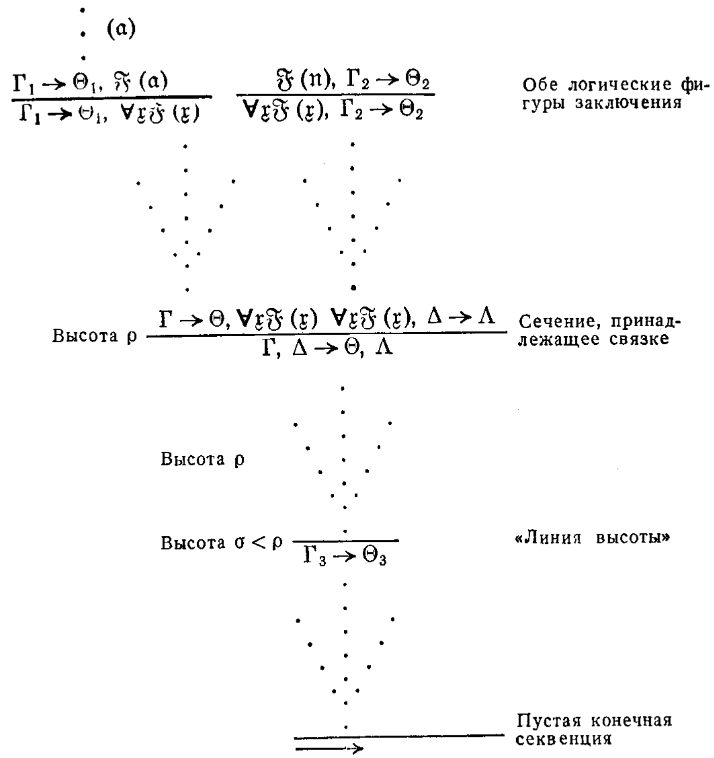
3.5. Редукция связки. Теперь можно определить собственно редукцию связки. Пусть дан вывод противоречия, конечный кусок которого содержит хотя бы одну формульную связку, каждой стороне которой принадлежит по меньшей мере одна главная формула логической фигуры заключения. Мы выбираем одну из таких формульных связок и по одной из таких верхних формул этой связки. Чтобы этот шаг был однозначным, нужно установить какой-либо способ выбора; это нетрудно.

Мы рассмотрим сначала случай, когда внешним логическим знаком формул, входящих в связку, является $\forall$. Остальные случаи рассматриваются почти так же и впоследствии их можно будет исчерпать с помощью немногих замечаний.

---

*) То есть высотой вхождения секвенции в вывод. — *Прим. перев.*

Итак, вывод выглядит следующим образом:



Пояснения. Точки означают, что в отмеченную нить могут с обеих сторон произвольным образом впадать другие нити. Аналогично, над обеими логическими фигурами заключения могут стоять целые части вывода какой-нибудь структуры. Терм $\mathfrak{n}$ может быть только числовым термом, так как под ним не может находиться никакая фигура заключения с собственной переменной (3.2, 3.41). Пусть $\Gamma_3 \to \Theta_3$ — первая секвенция, имеющая меньшую высоту, чем верхние секвенции сечения, принадлежащего связке, из тех, которые встречаются, если пробегать нить от $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ до конечной секвенции. (Такую секвенцию всегда можно указать, так как высота конечной секвенции равна 0, а высота верхних секвенций этого сечения по меньшей мере 1, потому что уже степень самого сечения равна по меньшей мере 1.) При некоторых обстоятельствах это может быть уже сама секвенция $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$; тогда эскиз следует понимать соответствующим образом. Точно так же при некоторых обстоятельствах верхняя секвенция сечения может, естественно, уже сама быть нижней секвенцией логической фигуры заключения; и наконец, секвенция $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$ может также совпадать с конечной секвенцией; все это безразлично для редукции.

Шаг редукции состоит теперь в преобразовании вывода в форму, указанную в эскизе на стр. 177.

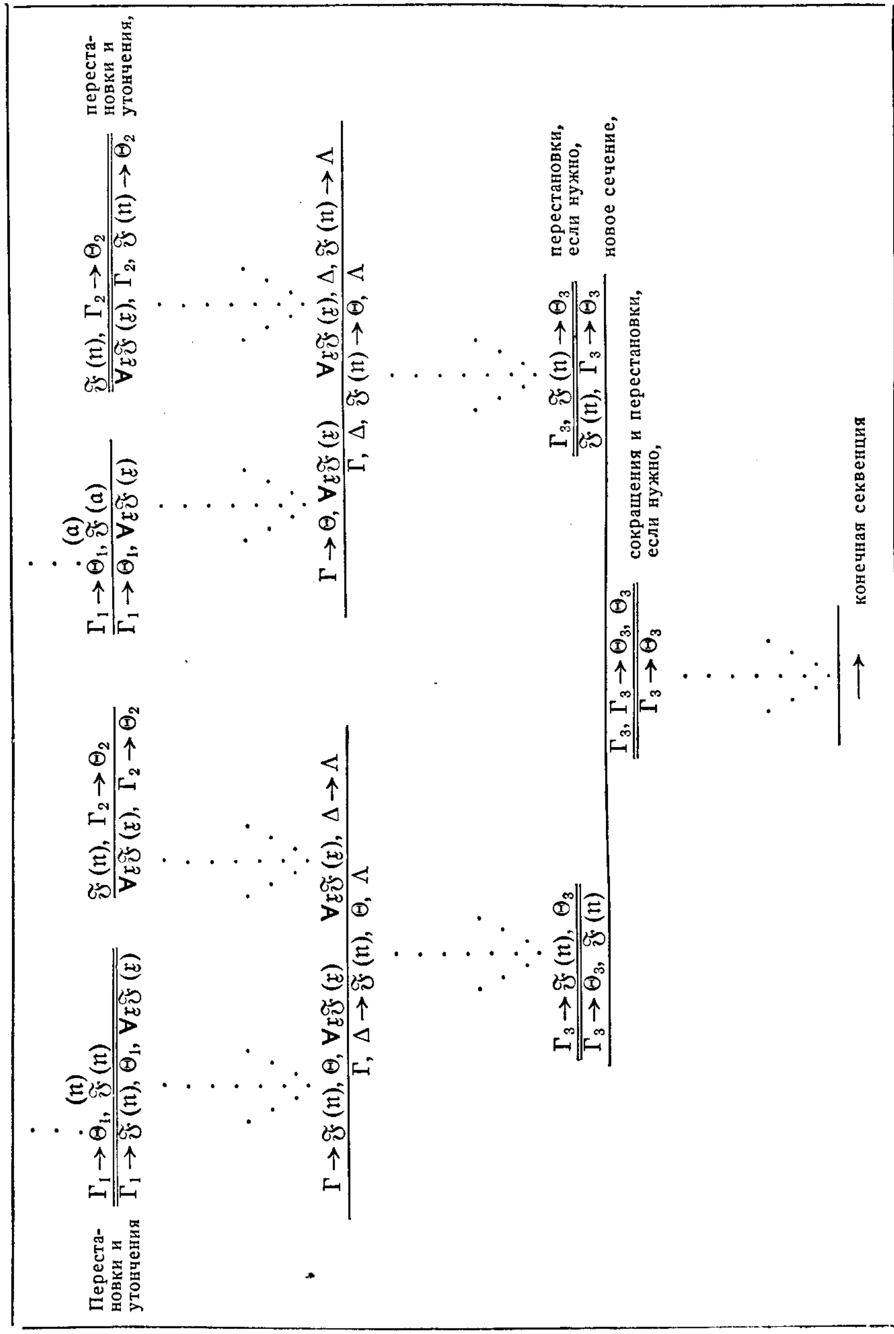
Как следует понимать эскиз, должно быть в основном очевидно. Старый вывод секвенции $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$ надписывается дважды рядом друг с другом и первый раз изменяется следующим образом: отбрасывается левая логическая фигура заключения и при этом в стоящей над ней части вывода переменная $\mathfrak{a}$ всюду заменяется на числовой терм $\mathfrak{n}$, за исключением, как и раньше, тех случаев, когда она случайно применяется в секвенциях, стоящих над нижней секвенцией некоторой фигуры заключения из этой части вывода, собственной переменной которой является $\mathfrak{a}$. Далее, несмотря на это, формула $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ вводится снова, на этот раз, однако, с помощью утончения; и все остальное остается точно так же, как и раньше, с единственным изменением: формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ присоединяется в качестве дополнительной задней формулы во всех нитях, проходящих через $\Gamma_1 \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta_1, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Просматривая схемы фигур заключения, легко убедиться, что при этом все фигуры заключения остаются в порядке; то же и при подстановке $\mathfrak{n}$ вместо $\mathfrak{a}$. При втором надписывании старого вывода секвенции $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$ следует поступать соответствующим образом. На этот раз отбрасывается правая логическая фигура заключения; при этом не нужна подстановка вместо переменной и формула $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ присоединяется в качестве дополнительной передней формулы.

Из обеих выведенных таким образом секвенций $\Gamma_3 \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n}), \Theta$ и $\Gamma_3, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \rightarrow \Theta_3$ получаем затем посредством нового сечения с помощью перестановок и сокращений старую секвенцию $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$; остаток старого вывода переписывается без изменений.

Нетрудно убедиться, что определенный таким образом шаг редукции переводит данный вывод снова в корректный во всех частях вывод в смысле нашего формализма.

Пояснение значения этого редукционного шага.

Вспомним об основных идеях редукции связки (3.1) и сравним с ними проведенное теперь формальное исполнение! Обе логические фигуры заключения представляют собой введение и удаление $\forall$ в $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Согласно первоначальным основным идеям обе они должны были быть исключены и формула $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ заменена на «более простую» $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, степень которой на 1 меньше; вместо сечения с формулами сечения $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ должно было появиться новое сечение с формулами сечения $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$. Здесь, однако,



встречается уже упомянутая трудность: формула $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ может иметь много других мест применения и даже мест введения, т. е. формульная связка может быть разветвленной с обеих сторон и иметь несколько верхних формул. Поэтому необходимо как в связи с вычеркиванием левой логической фигуры заключения, так и в связи с вычеркиванием правой все же сохранить старое сечение по $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$; при этом, правда, в каждом из случаев достигается некоторое «упрощение» за счет того, что теперь выпадает логическая фигура заключения над этим сечением. (Хотя на ее место встают перестановки и утончение, они «не считаются» при определении «сложности» вывода.

Новое введение $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ с помощью утончения производится лишь из соображений удобства, так как и без того ниже пришлось бы учитывать вхождения этой формулы, а новая форма вывода в этом случае получается из старой наиболее удобным способом.)

Далее, ниже в новом выводе имеется «новое сечение» с формулой сечения $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$. Почему оно помещено как раз под «линией высоты»? Само по себе это сечение могло бы быть помещено на любое место в выводе ниже обоих $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$-сечений. Нужно было бы только, как и раньше, дважды надписать часть, находящуюся между этими сечениями и новым, а также снабдить ее формулой $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ в качестве добавочной передней (соответственно задней) формулы; при этом часть, находящаяся под новым сечением, осталась бы без изменения.

Тем самым мы приходим к цели понятия высоты вообще. Оно введено для того, чтобы при проведении редукции достигалось «упрощение» вывода в том смысле, который будет уточнен в следующих параграфах с помощью порядковых чисел. На первый взгляд, новая форма вывода выглядит сложнее, чем старая: одна и та же часть вывода входит теперь дважды, правда, в обоих случаях в несколько более простом, чем раньше, виде из-за исчезновения логической фигуры заключения. Поэтому при установлении меры сложности вывода легко достичь того, чтобы каждая в отдельности из частей, стоящих над новым сечением, оценивалась несколько ниже, чем соответствующая часть старого вывода. Однако теперь добавляется новое сечение, и как достичь того, чтобы вся часть вывода до $\Gamma_3 \to \Theta_3$ была оценена ниже, чем старый вывод вплоть до той же секвенции? Новое сечение имеет более низкую степень, чем старое; за это обстоятельство мы и должны зацепиться. Новое сечение поставлено под областями действия всех сечений той же степени, что и старое сечение, для того, чтобы все эти сечения больших степеней не только не приобрели в результате редукции больших областей действия, чем раньше, но наоборот, имели бы те же или «упрощенные» области действия. Разумеется, новое сечение и все, что стоит под ним, распространяется теперь на большую область, чем раньше. Однако это компенсируется тем, что все эти сечения меньшей степени, чем старое сечение. Удастся ли добиться уменьшения порядкового числа вывода при редукции, зависит только от того, правильно ли использовано такое положение вещей при назначении порядковых чисел? Следовательно, при этом нужно придать особенно большой вес степени сечения.

В этом рассуждении молчаливо предполагалось, что в нормальном случае сечения более высоких степеней стоят, вообще говоря, выше сечений меньших степеней. Так как в действительности такое положение вещей, естественно, не обязательно имеет место, вместо «степени» фигурирует понятие «высоты». Это означает не что иное, как то, что с сечениями низших степеней, находящимися над сечениями высших степеней, поступают так, как будто бы они тоже обладают высшей степенью; тогда можно без труда применить приведенные выше основные идеи.

При установлении высоты для произвольных секвенций вывода VJ-фигуры заключения рассматриваются как сечения, так как при их редукции они расщепляются на сечения той же степени.

Форма редукционного шага для других связок.

Мы должны еще добавить, как следует модифицировать шаг редукции, когда внешней связкой формул из рассматриваемой формульной связки является не $\forall$, как в детально рассмотренном выше случае, а &, $\exists$, $\vee$ или $\neg$. Различия будут незначительны.

Если формулы связки имеют вид $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, то представим себе данный выше эскиз измененным соответствующим образом.

Вместо $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ стоит $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$; логические фигуры заключения имеют вид

$$\frac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \quad \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$$

и

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2} \quad \text{соответственно} \quad \frac{\mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2}.$$

Аналогично, в новом выводе вместо $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ стоит теперь $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, вместо $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ стоит $\mathfrak{A}$ (соответственно $\mathfrak{B}$), в зависимости от того, какую из двух возможных форм имеет правая логическая фигура заключения (фигура «&-удаления»). Над тем местом, где отпадает левая логическая фигура заключения, будет сохранен только вывод секвенции $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A}$ (соответственно секвенции $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}$), а вывод другой секвенции вычеркивается. (Это соответствует подстановке $\mathfrak{n}$ вместо $\mathfrak{a}$ в $\forall$-случае.) В остальном все происходит точно так же, как выше; отмеченные отличия проявляются сами собой.

Если внешний знак формул из формульной связки — это $\exists$ или $\vee$, то редукция происходит вполне симметрично случаям $\forall$ и &. Правая и левая стороны меняются при этом местами.

Если, наконец, формулы из формульной связки имеют вид $\neg\mathfrak{A}$, то ничто существенно не изменяется: формуле $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ в новом выводе соответствует тогда формула $\mathfrak{A}$. Теперь она появляется при устранении левой логической фигуры заключения как добавочная передняя формула и соответственно при устранении правой логической фигуры заключения как добавочная задняя формула. В обоих случаях она, точно так же как и раньше, добавляется к секвенциям вплоть до $\Gamma_3 \to \Theta_3$; новое состоит лишь в том, что левую и правую верхние секвенции «нового сечения», т. е. стоящие над ними части вывода, нужно переставить.

На этом закончено определение редукционного шага над доказательством противоречия.

§ 4. Порядковые числа. Заключительные замечания

4.1. Трансфинитные порядковые числа до ε_0. Я определяю теперь применяемые порядковые числа. Я не буду записывать их в виде десятичных дробей, как в предыдущей работе, а буду придерживаться способа обозначения, общепринятого в теории множеств. (Тем не менее, все определения и доказательства этого параграфа, так же как и соответствующие части прежнего доказательства, совершенно «финитны» и даже имеют в этом отношении особенно элементарный вид. Трансфинитную же индукцию мы не будем здесь обсуждать; см. ниже.)

Одновременное рекурсивное определение порядковых чисел, равенства и отношения порядка ($<$) между ними:

Система $\mathfrak{S}_0$ состоит из числа 0. Имеет место $0=0$ и неверно, что $0<0$.

Пусть уже определены числа системы $\mathfrak{S}_\rho$ (ρ — натуральное число или 0), равно как и отношения $=$ и $<$ между ними.

Тогда имеет место утверждение:

Произвольное число из системы $\mathfrak{S}_{\rho+1}$ имеет вид

$$\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_\nu},$$

где α — число из системы $\mathfrak{S}_\rho$, причем $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_\nu$; ν — натуральное число. Число 0 также принадлежит системе $\mathfrak{S}_{\rho+1}$.

$\mathfrak{S}_{\rho+1}$-число β равно $\mathfrak{S}_{\rho+1}$-числу γ, если их представления совпадают. Число β меньше (соответственно больше) γ, если первый несовпадающий «показатель» α в представлении β меньше (соответственно больше), чем соответствующий показатель в представлении γ. Если $\beta=\gamma+\ldots$, то $\beta>\gamma$. Считается, что 0 меньше, чем любое другое число. $\beta>\gamma$ обозначает, естественно, то же, что и $\gamma<\beta$.

На этом определение закончено. Легко убедиться, что любая система содержит все предыдущие системы и что отношения «меньше» и «равно» между двумя числами не зависят от того, принадлежащими к какой из систем мы их считаем. Далее, легко убедиться, что по любому данному выражению всегда можно узнать, является оно порядковым числом или нет, а также, что по любым двум данным порядковым числам можно узнать (простым способом), равны ли они, а если нет, то которое больше. (Тем самым установлено, что эти понятия «финитны».)

Входящие в представление чисел знаки «0», «+» и «ω», так же как и «возведение в степень», можно для наших целей воспринимать совершенно формально. Нет необходимости думать о каком-либо их смысле, например о том, что ω — это «некоторое бесконечное число» и что знак «+» соответствует сложению. Такие представления полезны только для понимания контекста. Следующие утверждения об объеме отдельных систем, об использовании понятий и законов теории множеств приводятся только для сравнения.

Система $\mathfrak{S}_1$ состоит из чисел 0, ω^0, $\omega^0+\omega^0$, ..., т. е. в обычной записи: 0, 1, 2, ..., следовательно, из нуля и натуральных чисел.

Предельным числом этой системы является ω.

$\mathfrak{S}_2$ содержит уже все числа до ω^ω, а именно:

$$0,\ \omega^0,\ \omega^0+\omega^0,\ \ldots,\ \omega^{\omega^0},\ \omega^{\omega^0}+\omega^0,\ \ldots,\ \omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0},$$
$$\omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0,\ \omega^{\omega^0+\omega^0},\ \ldots,\ \omega^{\omega^0+\omega^0+\omega^0},\ \ldots,$$

следовательно, 0, 1, 2, ..., ω, $\omega+1$, ..., $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 2+1$, ..., ω^2, ..., ω^3, ... и вообще всевозможные полиномы $\omega^{\nu_1}\cdot\mu_1+\ldots$ $\ldots+\omega^{\nu_\sigma}\cdot\mu_\sigma$; здесь ν и μ — натуральные числа или 0; $\nu_1 >$

$>\nu_2>\ldots>\nu_\sigma$. $\mathfrak{S}_3$ состоит из всех чисел до ω^{ω^ω} (т. е. $\omega^{(\omega^\omega)}$; многократные возведения в степень следует и ниже воспринимать соответствующим образом). $\mathfrak{S}_4$ содержит все числа до $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ и т. д.

Предельным числом всех систем вместе является число ε_0, «первое ε-число».

Мы будем применять знак 1 как *сокращение* для ω^0. Далее, нам нужно понятие «*натуральной суммы*» двух (отличных от 0) порядковых чисел, которое определяется следующим образом[1]). Пусть

$$\alpha=\omega^{\gamma_1}+\omega^{\gamma_2}+\ldots+\omega^{\gamma_\mu} \quad \text{и} \quad \beta=\omega^{\delta_1}+\omega^{\delta_2}+\ldots+\omega^{\delta_\nu}$$

($\mu\geqslant 1$, $\nu\geqslant 1$). Тогда «натуральная сумма $\alpha\#\beta$» получается, если упорядочить $\mu+\nu$ членов ω^γ и ω^δ по величине, а затем снова объединить их с помощью знака «+», бóльшие — в начале, меньшие — в конце, равные члены, естественно, рядом друг с другом. Очевидно, что таким образом снова возникает корректное порядковое число.

Пример. Если

$$\alpha=\omega^{\omega^1+1}+1 \quad \text{и} \quad \beta=\omega^{\omega^{\omega^{1+1+1}}+1}+\omega^{\omega^1+1}+\omega^1,$$

то

$$\alpha\#\beta=\omega^{\omega^{\omega^{1+1+1}}+1}+\omega^{\omega^1+1}+\omega^{\omega^1+1}+\omega^1+1.$$

Всегда имеет место $\alpha\#\beta=\beta\#\alpha$. Аналогично, натуральная сумма произвольного количества порядковых чисел не зависит от порядка отдельных сложений: $\alpha\#\beta>\alpha$. Если $\alpha^*<\alpha$, то $\alpha^*\#\beta<\alpha\#\beta$. Эти факты легко доказать.

4.2. *Сопоставление порядковых чисел выводам.*

Пусть дан произвольный вывод. Чтобы вычислить его *порядковое число*, следует спускаться, начиная от самых верхних секвенций, вниз и назначать каждой секвенции из вывода и каждой черте заключения некоторое порядковое число (>0) на основе следующих положений.

Каждая верхняя секвенция получает порядковое число 1 (т. е. ω^0).

Пусть уже найдены порядковые числа верхних секвенций некоторой фигуры заключения. Тогда порядковое число *черты заключения* получается следующим образом:

[1]) Ср. Gr. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, Sonderdruck a. d. Abh. d. Friesschen Schule, N. F., Bd. 1, Heft 4, S. 478—706), Göttingen, 1906. (См. также Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1937. — *Прим. перев.)*

Если речь идет о *структурной фигуре заключения*, то переносится без изменения порядковое число верхней секвенции, а в случае *сечения* образуется *натуральная сумма* порядковых чисел обеих верхних секвенций. Если речь идет о *логической фигуре заключения*, то к порядковому числу верхней секвенции присоединяют сзади $+1$; если же она имеет *две* верхние секвенции, то выбирают большее из порядковых чисел обеих секвенций и к нему присоединяют $+1$.

Если, наконец, дана *VJ-фигура заключения*, причем порядковое число верхней секвенции равно $\omega^{\alpha_1}+\ldots+\omega^{\alpha_\nu}$ ($\nu\geqslant 1$), то в качестве порядкового числа черты заключения принимают ω^{α_1+1}. Если $\alpha_1=0$, то подразумевается, естественно, ω^1.

Порядковое число *нижней секвенции* фигуры заключения получается из порядкового числа черты заключения, принадлежащей этой фигуре (обозначим его через α), следующим образом:

Если *высота* нижней секвенции равна высоте верхних секвенций, то ее порядковое число равно α. Если ее высота на 1 ниже, то ее порядковое число — это ω^α. Если она на 2 ниже, то порядковое число — это ω^{ω^α}, если на 3 — то $\omega^{\omega^{\omega^\alpha}}$ и т. д.

Порядковое число, которое получает в результате *конечная секвенция* вывода, это и есть *порядковое число вывода*.

Легко убедиться, что при описанных операциях возникают настоящие порядковые числа, согласно определению последних. Я не даю предварительно никаких объяснений по поводу приписывания порядковых чисел; само оно очень просто; единственными особенностями являются оценка VJ-фигур заключения и различение высот; понять их будет легче в дальнейшем, когда станет ясным их назначение.

4.3. *Уменьшение порядкового числа при проведении редукционного шага над доказательством противоречия.*

Остается *показать*, что порядковое число доказательства противоречия *уменьшается* при проведении редукционного шага в соответствии с § 3. Это не представляет теперь никаких особых трудностей. Нам не нужно делать ничего, кроме как пунктуально проверять справедливость утверждения для каждого отдельного случая.

Подготовительный шаг 3.2, очевидно, не влияет вообще на порядковое число. Как обстоит дело при VJ-редукции (3.3)?

Пусть порядковое число верхней секвенции VJ-фигуры заключения есть $\omega^{\alpha_1}+\ldots+\omega^{\alpha_\nu}$ ($\nu\geqslant 1$). Тогда порядковое число черты заключения есть ω^{α_1+1}. Оно уже равно порядковому числу нижней секвенции, высота которой не может быть меньше, чем высота верхней секвенции. Дело в том, что ниже в выводе должны встретиться сечения, принадлежащие связкам, членами которых являются $\mathfrak{F}(1)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, а эти сечения имеют ту же степень, что и рассматриваемая VJ-фигура заключения. Рассмотрим теперь фигуру, вводимую в качестве заменителя VJ-фигуры заключения при редукции (сначала для $\mathfrak{n}$, не равного 1). Каждая из ее верхних секвенций получает, очевидно, в новом выводе то же порядковое число $\omega^{\alpha_1}+\ldots+\omega^{\alpha_\nu}$. Все секвенции фигуры-заменителя имеют одинаковую высоту, а именно ту, которую раньше имели обе секвенции VJ-фигуры заключения. (Вновь введенные сечения имеют ту же степень, которую имела VJ-фигура заключения.) Поэтому порядковое число нижней секвенции этой фигуры равно, очевидно, натуральной сумме всех чисел $\omega^{\alpha_1}+\ldots+$ $+\omega^{\alpha_\nu}$. Оно начинается, следовательно, $\omega^{\alpha_1}+\ldots$ Поэтому оно меньше, чем ω^{α_1+1}, согласно определению отношения «меньше» для порядковых чисел.

Теперь отсюда легко следует, что уменьшается также и порядковое число всего вывода. Действительно, дальнейший ход вывода (если прослеживать его вниз) не меняется; все высоты там также остаются без изменения. Происшедшее на каком-либо месте уменьшение сохраняется при дальнейшем вычислении порядкового числа вплоть до конечной секвенции. Существенно, что при этом мы проходим только структурные фигуры заключения и что имеет место следующее. Если $\alpha^*<\alpha$, то $\omega^{\alpha^*}<\omega^{\alpha}$ и $\alpha^*\#\beta<\alpha\#\beta$ (здесь α, α^* и $\beta\neq 0$). Оба эти утверждения вытекают непосредственно из определений.

Теперь проясняется и цель ω^{α_1+1} при оценке VJ-фигуры заключения. При редукции эта фигура распадается на несколько сечений; одна и та же часть вывода вводится как бы в n экземплярах. Чтобы достигнуть уменьшения порядкового числа, нужно выбрать в качестве порядкового числа части первоначального вывода вплоть до VJ-фигуры заключения «предельное число» всех «n-кратных» порядкового числа верхней секвенции, т. е. $\omega^{\alpha_1+1}=\omega^{\alpha_1}\cdot\omega$. (Взятые в кавычки выражения служат, разумеется, только для пояснений; они для нас даже не определены.)

Остается еще рассмотреть случай, когда $\mathfrak{n}$ равно 1. Секвенция $\mathfrak{F}(1), \Gamma\to\Theta, \mathfrak{F}(1)$ получает в новом выводе порядковое число 1. В старом выводе ее порядковое число было равно по меньшей мере ω^1. Следовательно, имеется очевидное уменьшение, которое также переносится на порядковое число вывода в целом.

Тем самым доказано, что при VJ-редукции порядковое число доказательства противоречия уменьшается. Осталось еще рассмотреть редукцию связки. Для этого нужно сначала установить, что при следующем подготовительном шаге (3.42) порядковое число не может увеличиться. Это утверждение не совсем легко доказать, несмотря на совершенно очевидное упрощение вывода при этом шаге. Я только коротко намечу, какие соображения следует использовать при этом. Читатель, интересующийся лишь самым существенным, может пропустить этот абзац.

Удаление, добавление и другие изменения среди структурных фигур заключения, отличных от сечения, не оказывают никакого влияния на порядковое число. Другое дело — вычеркивание сечения при опускании одной из его верхних секвенций вместе со всем, что стоит над ней. Если мы сначала не будем обращать внимания на возникающие изменения высоты, то порядковое число уменьшается из-за того, что натуральная сумма двух чисел заменяется на одно из них. Но теперь к этому добавляется еще то обстоятельство, что в результате выпадения сечения целый ряд секвенций, расположенных над этим сечением, может больше или меньше потерять в высоте' (и не только в конечном куске, но и во всем выводе). Чтобы выяснить, что и это довольно трудно обозримое изменение не может вызвать увеличения порядкового числа вывода в целом, мы рассуждаем так. Представим себе, что мы можем приписывать высоты совершенно произвольно. Мы начинаем со старого вывода, выбрасываем сечение и сохраняем сначала старые высоты. Затем с помощью отдельных шагов описываемого ниже рода постепенно переделываем высоты в величины, которые они должны иметь в измененном выводе согласно определению высоты. Каждый раз высота верхних секвенций фигуры заключения, нижняя секвенция которой имеет меньшую высоту, чем верхние, будет уменьшаться на 1. Как легко усмотреть, из таких операций действительно можно составить все изменение высот в целом (начиная снизу). Что же происходит с порядковыми числами при отдельном таком изменении высоты? Пусть порядковые числа верхних секвенций (если верхняя секвенция одна, то вторую мысленно отбросим) до изменения были α и β. Тогда после изменения они превратятся в ω^{α} и ω^{β} (за исключением случая, когда какая-либо из верхних секвенций является самой верхней в выводе: тогда ее порядковое число было и осталось равным 1, и последующие рассмотрения еще более упрощаются). Порядковое число черты заключения до изменения было равно, в зависимости от того, о какой фигуре заключения идет речь, α, или $\alpha\#\beta$, или $\alpha+1$, соответственно $\beta+1$, или ω^{α_1+1}

(в случае VJ-фигуры заключения с $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots$). После изменения оно равно ω^{α}, или $\omega^{\alpha} \# \omega^{\beta}$, или $\omega^{\alpha+1}$, соответственно $\omega^{\beta+1}$, или $\omega^{\alpha+1}$. Теперь *о нижней секвенции*. Если разница в высоте между ней и верхними секвенциями была раньше равна 1 и, следовательно, после изменения стала равна 0, то ее порядковое число изменяется с ω^{α} до ω^{α}, или с $\omega^{\alpha \# \beta}$ до $\omega^{\alpha} \# \omega^{\beta}$, или с $\omega^{\alpha+1}$ до $\omega^{\alpha}+1$, соответственно с $\omega^{\beta+1}$ до $\omega^{\beta}+1$, или, в заключение, с $\omega^{\omega^{\alpha_1+1}}$ до $\omega^{\omega^{\alpha_1+\ldots+1}}$. *В каждом случае порядковое число либо остается тем же, либо уменьшается*, как можно проверить во всех случаях на основе определения отношения «меньше». Если разница в высоте между нижней и верхними секвенциями была больше, чем 1, то ничто существенно не изменяется: к названным числам применяется еще одно и то же в каждом из случаев число возведений в степень с основанием ω.

Свойство «быть не больше» переносится на порядковое число *вывода в целом*, которое, следовательно, не может увеличиться ни при отдельном таком шаге изменения высоты, ни при подготовительном шаге к редукции связки в целом.

Теперь мы переходим к *собственно редукции связки* (3.5). Мы должны доказать, что при этой редукции порядковое число *уменьшается*. Мы снова положим в основу подробно представленный выше случай (с $\forall$ в качестве редуцируемой связки).

Порядковые числа *черт заключения*, стоящих в новом выводе непосредственно над секвенциями $\Gamma_3 \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, Θ_3 и Γ_3, $\mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \rightarrow \Theta_3$ (мы обозначим их соответственно через α_1 и α_2), *меньше*, чем порядковое число α «линии высоты» в старом выводе. Так как стоящие над ними части выводов в основном соответствуют друг другу, в частности, все высоты те же, что и в старом выводе, то высоты секвенций, стоящих непосредственно под названными чертами заключения, повсюду равны ρ. В каждом из случаев *одна из логических фигур заключения выбрасывается* и заменяется структурными фигурами заключения, которые никак не влияют на порядковое число. Поэтому на этом месте происходит уменьшение порядкового числа, которое *сохраняется* при прохождении через последующие структурные фигуры заключения вплоть до упомянутых черт заключения. Далее секвенция $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$, естественно, имеет в новом выводе ту же высоту σ, что и в старом; $\sigma < \rho$. Секвенция Γ_3, $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$, Θ_3, конечно, также имеет высоту σ. Для высоты τ *верхних секвенций* «нового сечения» имеет место $\rho > \tau \geqslant \sigma$. Вторая часть очевидна; в том, что $\rho > \tau$, убеждаемся так. По определению высоты τ равно наибольшему из чисел σ и «степень $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$». Если $\tau = \sigma$, то $\tau < \rho$, так как $\sigma < \rho$. Если τ равно степени $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, то $\tau < \rho$, так как степень $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ меньше, чем степень $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, а ρ по меньшей мере равно последней.

Предположим сначала на минуту, что разности между высотами ρ, τ и σ принимают *наименьшие значения*, т. е. что $\rho = \tau + 1$ и $\tau = \sigma$. Тогда наше доказательство завершается следующим образом. В старом выводе линия высоты имела порядковое число α, следовательно, секвенция $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$ имела порядковое число ω^{α}. Черты заключения, соответствующие в новом выводе линии высоты, имеют порядковые числа α_1 и α_2, оба меньшие, чем α. Поэтому верхние секвенции нового сечения имеют порядковые числа ω^{α_1} и ω^{α_2}; секвенция $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$ получает порядковое число $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}$ (пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$, что не уменьшает общности). *Оно, очевидно, меньше, чем* ω^{α}. Тем самым все готово, так как это уменьшение переносится на основе уже неоднократно примененного соображения на порядковое число конечной секвенции и тем самым на порядковое число всего вывода. (Ведь ниже $\Gamma_3 \rightarrow \Theta_3$ ничто не меняется.)

Если расстояния между высотами ρ, τ и σ *больше*, то ничего существенно в наших рассмотрениях не меняется. Лишь на место неравенства

$$\omega^{\alpha} > \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} \qquad (\alpha > \alpha_1 \geqslant \alpha_2)$$

встает неравенство

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}} > \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1}}}}}} + \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_2}}}}}},$$

а оно, как легко видеть, также справедливо.

Теперь выясняется, как с помощью определения порядкового числа в связи с понятием высоты преодолеваются трудности, связанные с кажущимся увеличением сложности при редукции связки. Основная идея такова: при редукции одна и та же часть вывода встречается дважды, хотя каждый раз в несколько упрощенном виде. Однако в общем случае $\alpha < \alpha_1 + \alpha_2$, причем α_1 и α_2 меньше, чем α. Тем не менее, для *степеней* имеет место $\omega^{\alpha} > \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}$ (как для натуральных чисел, если взять в качестве ω число $\geqslant 3$). Тем самым достигается «упрощение» фигуры в целом, поскольку всегда можно вставить одно потенцирование. А это возможно ввиду того обстоятельства, что степень нового сечения меньше, чем *степень* старого $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$-сечения. Для оценки этого обстоятельства служит общее понятие высоты и ссылка на него при приписывании порядковых чисел.

Случаи, когда редуцируемая связка — это одна из связок &, $\exists$, $\vee$ или $\neg$, исчерпываются настолько сходно, что особое углубление в них оказывается излишним.

Тем самым доказано, что при любом редукционном шаге уменьшается порядковое число доказательства противоречия.

4.4. *Заключительные замечания.* Если бы мы в нашем формализме не допускали *VJ-фигур заключения*, то было бы возможно обойтись *натуральными числами* в *качестве порядковых чисел*. Чтобы выявить это, следует выбросить 4.1 и в 4.2 подставить всюду 3 вместо ω и просто «сумма» вместо «натуральная сумма». Сумму и степень следует понимать в их обычном значении для натуральных чисел. Тогда, как легко проверить, 4.3 остается полностью справедливым; при этом, естественно, следует опустить VJ-редукцию. Следовательно, доказательство непротиворечивости можно завершить тогда с помощью обычной полной индукции вместо трансфинитной индукции.

При допущении VJ-фигур заключения, т. е. для нашего формализма, имеется следующая замечательная *связь* между величиной *порядкового числа* вывода и наивысшей степенью формул, входящих в этот вывод: порядковое число вывода, в который входят только формулы степени 0, меньше, чем ω^ω (т. е. ω^{ω^1} в наших обозначениях). Если наибольшая степень формул равна 1, то порядковое число меньше, чем ω^{ω^ω}, если она равна 2, то оно меньше, чем $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, и т. д. Доказать это нетрудно.

Эти утверждения, естественно, справедливы только при нашем особом способе назначения порядковых чисел. Все же следует предполагать, что эти утверждения в общем и целом довольно *оптимальны*, т. е. что *нельзя* обойтись *существенно более низкими* порядковыми числами. В частности, с совокупностью наших выводов нельзя справиться с помощью порядковых чисел, меньших некоторого числа, меньшего, чем ε_0. Дело в том, что трансфинитную индукцию до такого числа можно доказать в самом нашем формализме. Поэтому наше предположение вместе с проведенным доказательством непротиворечивости противоречили бы *теореме Гёделя* (естественно, в предположении, что остальные примененные средства доказательства, в частности, приписывание порядковых чисел, не принимают формы, выходящей за пределы представимости в арифметическом формализме). На том же обходном пути, вероятно, можно также показать, что с определенными частичными классами выводов нельзя справиться с помощью порядковых чисел ниже определенного $\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}$. Вероятно, найдется и прямой путь для доказательства таких теорем о невозможности.

Если мы присоединим к нашему формализму *произвольные функции*, то доказательство непротиворечивости, с несущественными добавлениями, остается справедливым. Нужно лишь, например, при редукции, в дополнение к первому подготовительному шагу, вычислить все термы, не содержащие свободных переменных, и заменить их на их числовые значения. Предполагается вычислимость всех функций для всех *конкретных* значений аргументов. Некоторые формальные трудности возникают из-за того обстоятельства, что терм может быть вычислимым на одном месте, в то время как соответствующее ему выражение на другом месте в той же самой фигуре заключения еще содержит переменную (ср. 14.22 предыдущей работы). Эти трудности, однако, не затрагивают существа дела.

Содержание раздела V предыдущей работы остается справедливым также и для нового изложения доказательства непротиворечивости. Я не доказываю заново, что произвольная выводимая секвенция «редуцируема», я также не придаю этому никакого особенного значения. (Я привлек это утверждение тогда в качестве аргумента против радикального интуиционизма — пункт 17.3, — однако оно не особенно существенно для этой цели.)

Трансфинитная индукция. Я не обосновываю снова трансфинитную индукцию, которой заканчивается доказательство непротиворечивости, так как я намерен когда-нибудь позже дать отдельное изложение связанных с ней вопросов. Поэтому пока для окончания предложенного доказательства следует перенести из предыдущей работы доказательство «теоремы о трансфинитной индукции» (пункты с 15.1 до 15.4). Для этой цели надо отобразить новые порядковые числа на применявшиеся тогда десятичные дроби; это не представляет особых трудностей. (Обе системы обладают одним и тем же «порядковым типом ε_0».)

Трансфинитная индукция занимает особое место в доказательстве непротиворечивости. В то время как все остальные примененные способы заключения совершенно элементарны, если их рассматривать с точки зрения «финитности», — это справедливо для нового доказательства точно так же, как и для старого, — для трансфинитной индукции этого нельзя утверждать. Поэтому здесь представляется *задача совершенно иного сорта*: существенно не просто доказать ее, это не особенно трудно и возможно различными способами, а доказать ее на *финитной* основе, т. е. ясно установить, что она является способом заключения, согласованным с принципом *конструктивного понимания* бесконечности. Эта задача не является чисто математической, но она имеет значение и при доказательстве непротиворечивости.

Иногда склонны сомневаться в финитном характере «трансфинитной» индукции, и все это из-за ее подозрительного имени. По этому поводу сошлемся здесь только на то, что часть авторов, являющихся в какой-то степени конструктивистами, придают особое значение тому, чтобы конструктивно построить какой-либо начальный кусок трансфинитного числового ряда из «II числового класса» (например, до ω^{ω}). Также и при доказательстве непротиворечивости и его будущих возможных расширениях речь идет во всяком случае только о некотором начальном куске, об «отрезке» II числового класса, хотя и о сравнительно более протяженном, а для доказательства непротиворечивости анализа потребуется, вероятно, значительно больший начальный кусок. Я, однако не в состоянии указать, на каком «месте» при этом кончается, несомненно, допустимая с конструктивной точки зрения и начинается сомнительная трансфинитная индукция. Вернее, я думаю, что достоверность всей области, нужной для доказательства непротиворечивости, относится к достоверности ее первых начальных кусков, например, до ω^2, так же как достоверность числового подсчета длиной в сто страниц к достоверности вычисления в несколько строчек. Дело только в том, что проверка — это весьма громоздкое дело. Подробное рассмотрение этих вопросов (их изложение в предыдущей работе, пункт 16.11, кажется мне теперь слишком кратким) последует, как сказано, когда-нибудь позже.

МЕТОД СЕМАНТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ*)

Э. В. Бет

Оставшиеся разделы этой главы будут посвящены некоторым эвристическим рассмотрениям, которые явятся введением в формальный подход, излагаемый в следующей главе. Рассмотрим две конкретные задачи, а именно:

(I) Является ли формула**) $\exists z\,[P(z)\,\&\,\neg S(z)]$ логическим следствием формул:

$$\exists x\,[P(x)\,\&\,\neg M(x)] \text{ и } \exists y\,[M(y)\,\&\,\neg S(y)]?$$

(II) Является ли формула $\exists z\,[S(z)\,\&\,\neg P(z)]$ логическим следствием формул

$$\forall x\,[P(x) \supset \neg M(x)] \text{ и } \exists y\,[S(y)\,\&\,M(y)]?$$

(Атом $P(x)$ обозначает фразу «x обладает свойством P»; аналогично и для других атомов.)

Для того чтобы решить такую задачу, мы пытаемся показать, строя подходящий контрпример***), что первая формула не является логическим следствием второй и третьей. Если такой контрпример найден, то мы получаем отрицательный ответ на наш вопрос. Но если получается так, что подходящий контрпример не может быть найден, то мы имеем утвердительный ответ; в этом случае, однако, мы должны быть уверены, что никакого подходящего контрпримера не может быть. Поэтому нам следует искать контрпримеры не бессистемно, а пытаться построить контрпример каким-либо систематическим процессом. Систематический метод построения контрпримера в случае, когда это возможно, действительно имеется: он состоит в выписывании

*) Ниже приводятся выдержки из параграфов 67, 68, 70, 92 книги Beth E. W., The foundations of mathematics, Amsterdam, 1959.

**) В порядке унификации символики произведены следующие изменения обозначений автора: знак «‾» заменен на знак «$\neg$», знак «→» на знак «$\supset$», знаки (Ex) и (x) заменены соответственно на $\exists x$ и $\forall x$. — *Прим. перев.*

***) Говоря о контрпримере, автор, по-видимому, имеет в виду соответствующее понятие традиционной теоретико-множественной логики. Ниже метод семантических таблиц получает точное оформление, по отношению к которому излагаемые здесь соображения, относящиеся к построению контрпримеров, являются наводящими. — *Прим. ред.*

семантической таблицы. Рассмотрим таблицы, которые соответствуют сформулированным выше задачам (I) и (II).

(I) Нижеследующая таблица выясняет, что в этом случае мы на самом деле можем найти подходящий контрпример; отсюда следует, что (в согласии с силлогистикой Аристотеля) первая формула не является логическим следствием второй и третьей.

Истинно	Ложно
(1) $\exists x\,[P(x) \,\&\, \neg M(x)]$	(3) $\exists z\,[P(z) \,\&\, \neg S(z)]$
(2) $\exists y\,[M(y) \,\&\, \neg S(y)]$	(7) $M(a)$
(4) $P(a) \,\&\, \neg M(a)$	(11) $S(b)$
(5) $P(a)$	(12) $P(a) \,\&\, \neg S(a)$
(6) $\neg M(a)$	
(8) $M(b) \,\&\, \neg S(b)$	
(9) $M(b)$	
(10) $\neg S(b)$	
(i) | (ii)	(i) (13) $P(a)$ | (ii) (14) $\neg S(a)$
(ii) (15) $S(a)$	(ii) (16) $P(b) \,\&\, \neg S(b)$
(iii) | (iv) (19) $S(b)$	(iii) (17) $P(b)$ | (iv) (18) $\neg S(b)$

Построение таблицы происходит следующим образом. Строки (1)—(3) просто констатируют, каким условиям должен удовлетворять любой подходящий контрпример. Как следует из строки (1), должен иметься некоторый индивид, удовлетворяющий условию $P(x) \,\&\, \neg M(x)$; *обозначим этот индивид посредством a*; тогда мы имеем строку (4) и, следовательно, строки (5)—(7). Как следует из строки (2), должен иметься индивид, который удовлетворяет условию $M(y) \,\&\, \neg S(y)$; обозначив этот индивид посредством b, мы получим строки (8)—(11). С другой стороны, вследствие (3) ни индивид a, ни индивид b не должны удовлетворять условию $P(z) \,\&\, \neg S(z)$; это выражается строками (12) и (16).

Теперь, если формула (12) не истинна, то или (i) $P(a)$, или (ii) $\neg S(a)$ не должна быть истинной. В связи с этим, *наша таблица расщепляется на две подтаблицы* (i) и (ii), в которых появляются соответственно строки (13) и (14). Ясно, как строка (15) получается из строки (14). Но строка (13), очевидно, противоречит строке (5), и потому *подтаблица* (i) *закрылась*, ибо она не может привести к нужному контрпримеру. Остается только подтаблица (ii). Она расщепляется на две подтаблицы (iii) и (iv) вследствие строки (16), а так как строка (18) противоречит строке (10), то подтаблица (iv) закрывается.

Так как мы учли все условия (1)—(3), то нет причин вводить дополнительные индивиды. Так как подтаблица (iii) не закрыта, то мы можем считать наше построение успешно завершенным. Каждому из атомов $P(a)$, $P(b)$, $M(a)$, $M(b)$, $S(a)$ и $S(b)$ эта подтаблица приписывает определенное *«истинностное значение»*. Таким образом, контрпример, даваемый подтаблицей (iii), может быть описан следующим образом: область допустимых значений состоит из двух индивидов, обозначенных посредством a и b; свойство P выполняется для a, но не для b, то же и для свойства S; свойство M, наоборот, выполняется для b, но не для a.

(II) В этом случае наша таблица отражает другую ситуацию: наши систематические попытки (а фактически любые попытки) построить подходящий контрпример оказываются тщетными.

Появление строки (7) приводит к первому расщеплению таблицы; так как строка (8) противоречит строке (5), то подтаблица (i) тотчас же оказывается закрытой. Второе расщепление происходит после появления строки (11) и каждая из получающихся в результате этого подтаблиц (iii) и (iv) оказывается закрытой.

Поэтому каждая модель для формул (1) и (2) должна быть также моделью для формулы (3); а это и есть то, что мы выражаем словами «формула (3) является логическим следствием формул (1) и (2)». Собственно говоря, этот результат соответствует аристотелевскому правилу для силлогизма по модусу FESTINO.

Истинно	Ложно
(1) $\forall x\,[P(x) \supset \neg M(x)]$	(3) $\exists z\,[S(z) \,\&\, \neg P(z)]$
(2) $\exists y\,[S(y) \,\&\, M(y)]$	(7) $S(a) \,\&\, \neg P(a)$
(4) $S(a) \,\&\, M(a)$	(i) (8) $S(a)$ | (ii) (9) $\neg P(a)$
(5) $S(a)$	
(6) $M(a)$	
(i) | (ii) (10) $P(a)$	(iii) (12) $P(a)$ | (iv) (14) $M(a)$
(11) $P(a) \supset \neg M(a)$	
(iii) | (iv) (13) $\neg M(a)$	

. . . .

Давайте переделаем нашу таблицу для задачи (II) следующим образом: не изменяя левой колонки, расширим ее, добавив снизу все формулы правой колонки в обратном порядке; в результате получим

(1)	$\forall x\,[P(x) \supset \neg M(x)]$	(пос.)
(2)	$\exists y\,[S(y) \,\&\, M(y)]$	(пос.)
(4)	$S(a) \,\&\, M(a)$	(+доп. 1)
(5)	$S(a)$	(4)
(6)	$M(a)$	(4)
(10)	$P(a)$	(+доп. 2)
(11)	$P(a) \supset \neg M(a)$	(1)
(13)	$\neg M(a)$	(10), (11)
(9)	$\neg P(a)$	(—доп. 2)
(7)	$S(a) \,\&\, \neg P(a)$	(5), (9)
(3)	$\exists z\,[S(z) \,\&\, \neg P(z)]$	(закл.)

Это оказывается приятным сюрпризом! Ибо мы получили формальный вывод... Рассмотрим это формальное доказательство более подробно.

В строке (4) мы вводим, помимо «*данных посылок*» (1) и (2), дополнительное допущение. Часть вывода сделана «*при допущении* 1»; это отмечено *одинарными* горизонтальными линиями в начале и в конце. Заключения (5) и (6) не требуют объяснений.

В строке (10) вводится второе допущение. Та часть вывода, которая сделана «при допущении 2», отмечена *двойными* горизонтальными линиями. В строке (13) мы применяем *modus ponens* *). Оказывается, что допущение 2 приводит к формальному противоречию; соответствующее заключение по правилу *приведения к противоречию* записано в строке (9); оставшаяся часть вывода больше не зависит от допущения 2. Заключение в строке (7) снова не требует объяснений.

А теперь в строке (3) производится другой важный шаг. Могло бы показаться, что утверждение, стоящее в этой строке, а именно, $\exists z\,[S(z) \,\&\, \neg P(z)]$, должно еще зависеть «от допущения» $S(a) \,\&\, M(a)$, ибо контекст предполагает, что в выводе формулы $\exists z\,[S(z) \,\&\, \neg P(z)]$ некоторую роль может играть специальный выбор индивида a. Однако это не так, ибо ни в посылках (1) и (2), ни в заключении (3) индивид a не упоминается. Следовательно, любой другой индивид, скажем, y, так же хорошо мог бы служить для нашей цели, если только он удовлетворяет условию $S(y) \,\&\, M(y)$. Отсюда следует, что заключение может быть получено, если имеется некоторый элемент y такого рода, и эта идея выражена в строке (3).

*) То есть правило $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$. — *Прим. ред.*

. . . .

Вывод, рассмотренный нами, обладает несколькими замечательными свойствами, которые я хотел бы подчеркнуть.

(a) Он очень похож на способ рассуждений, которым мы обычно пользуемся, если только мы не пытаемся действовать в некоторой заранее выбранной логической системе. Систематизация принципов, лежащих в основе нашего и всех ему подобных выводов, привела бы к *системе натуральной дедукции* в том виде, в каком она впервые была сформулирована Генценом [3] и позже различными другими авторами. (Я лишь упомяну Карри [2]; Шютте [8]; Клини [4].) Довольно любопытно, что эти авторы руководствовались в своих построениях скорее формальными, нежели содержательными соображениями. Семантический подход можно найти у Карнапа [1], Поппера [5], Куайна [6] и Шольца [7].

(b) Он полностью согласуется с семантической интерпретацией формул, так как фактически он порождается таблицей, которая строилась на основе чисто семантических соображений.

(c) Для него автоматически выполнен генценовский *принцип подформулы*, ибо при построении первоначальной таблицы как посылки, так и заключение разбивались на более мелкие подформулы. Поэтому такие знаменитые и глубокие результаты, как теорема Лёвенгейма — Сколема — Гёделя, теорема Эрбрана или теорема Генцена о подформулах, могут быть (относительно) легко получены при нашем подходе. В то же время наш подход в значительной степени осуществляет идеал чисто аналитического метода, сыгравшего столь важную роль в философии.

(d) Тем не менее, наш вывод является чисто формальным в следующем смысле: каждый переход можно рассматривать как применение *формального правила*, т. е. правила, которое может быть сформулировано в «типографских» терминах, без всяких ссылок на значение рассматриваемых терминов.

Таким образом, кажется, что перспектива весьма простого рассмотрения проблем логики является очень обнадеживающей. Давайте примем приведенные выше задачи (I) и (II) и решения, которые мы нашли, в качестве образцов. Тогда оказывается, что по отношению к любым задачам такого рода (не может вызвать больших сомнений тот факт, что рассмотрение таких задач является отправным пунктом, если не самой сутью, логического исследования) ситуация довольно проста и может быть описана следующим образом. Проблема выяснения того, является ли данная формула V логическим следствием данных формул U_1, U_2, ... , может быть рассмотрена двумя разными способами.

(I) Мы пытаемся построить подходящий контрпример для доказательства того, что V не является логическим следствием U_1, U_2,... Если (как в случае задачи (I)) подходящий контрпример найден, то V не является логическим следствием U_1, U_2, ..., а если (как в случае задачи (II)) наш метод построения терпит неудачу, то V является логическим следствием U_1, U_2, ...

(II) Мы пытаемся найти непосредственный вывод V из U_1, U_2, ... , применяя правила некоторой системы натуральной дедукции. Если (как в случае задачи (II)) такой вывод найден, то V является логическим следствием U_1, U_2, ..., а если (как в случае задачи (I)), такой вывод не может быть найден, то V не является логическим следствием U_1, U_2, ...

Эти два метода эквивалентны. Действительно, если семантическая таблица показывает, что наш метод построения терпит неудачу, то мы можем переделать ее так, чтобы получить непосредственный вывод, и, наоборот, всякий вывод в подходящей системе натуральной дедукции дает нам таблицу, показывающую, что нельзя построить никакой контрпример.

Это описание в основном корректно отражает ситуацию; однако надо быть весьма осторожным, ибо ситуация более сложна, чем может показаться читателю. Действительно, до сих пор наше рассуждение было весьма фрагментарным и в нем надлежит заполнить много пробелов. Прежде всего, нам следует сформулировать точные правила построения наших таблиц (затем эти правила можно было бы так переформулировать, чтобы сразу получить правила подходящей системы натуральной дедукции); мы уже знаем, что в определенных случаях эти правила требуют расщепления таблицы в подтаблицы. Во-вторых, может случиться, что нельзя завершить построение подходящего контрпримера за конечное число шагов. Фактически, сочетание этих двух трудностей делает построение нашей таблицы столь сложным, что весьма ослабляет практический интерес к методу (I); конечно, этот факт повышает практическую важность метода (II) и формальных методов вообще. С теоретической точки зрения метод (I) остается столь же интересным, как прежде.

. . . .

Теперь я, как и намеревался, сформулирую точные правила для построения и закрытия наших семантических таблиц.

(i) Если одна и та же формула находится в обоих столбцах одной и той же (под)таблицы, то эта (под)таблица замкнута; если две подтаблицы некоторой (под)таблицы замкнуты, то эта (под)таблица тоже замкнута.

(ii[a]) Если $\neg U$ появляется в левом столбце, то U вводится в *сопряженный* правый столбец (т. е. в правый столбец той же самой (под)таблицы), и (ii[b]) если $\neg U$ появляется в правом столбце, то U вводится в сопряженный левый столбец.

(iii[a]) Если $U \& V$ появляется в левом столбце, то как U, так и V вводятся в тот же самый столбец; (iii[b]) если $U \& V$ появляется в правом столбце, то (под)таблица расщепляется на две подтаблицы, в правые столбцы которых мы вводим соответственно U и V (говорят, что подтаблица *подчинена* тем (под)таблицам, от расщепления которых она произошла; считается, что формулы в обоих столбцах (под)таблицы помещаются в соответствующих столбцах *каждой* подтаблицы, которая ей подчинена).

(iv[a]) Если $U \vee V$ появляется в левом столбце, то данная (под)таблица расщепляется на две подтаблицы, в левые столбцы которых мы вводим соответственно U и V; (iv[b]) если $U \vee V$ появляется в правом столбце, то как U, так и V вводятся в тот же самый столбец.

(v[a]) Если $U \supset V$ появляется в левом столбце, то (под)таблица расщепляется; в правый столбец одной подтаблицы мы вводим U, а в левый столбец другой V; (v[b]) если $U \supset V$ появляется в правом столбце, то V вводится в тот же самый, а U в сопряженный, левый столбец.

(vi[a]) Если $\forall x U(x)$ появляется в левом столбце, то в тот же самый столбец мы помещаем $U(p)$ для каждого параметра p, который был или будет введен*); (vi[b]) если $\forall x U(x)$ появляется в правом столбце, то мы вводим новый параметр p и помещаем $U(p)$ в тот же самый столбец.

(vii[a]) Если $\exists x U(x)$ появляется в левом столбце, то мы вводим новый параметр p и помещаем $U(p)$ в тот же самый столбец; (vii[b]) если $\exists x U(x)$ появляется в правом столбце, то в тот же самый столбец мы помещаем $U(p)$ для каждого параметра p, который был или будет введен.

В левый и в правый столбец мы можем поместить произвольные *исходные формулы* U_1, U_2,... и V_1, V_2,...; может случиться, что невозможно ввести первый индивидный параметр p по правилу (vi[b]) или (vii[a]); в такой ситуации вводится первый

*) Имеется в виду следующее: как только в рассматриваемой (под)таблице появляется новый параметр p, в рассматриваемый столбец помещается формула $U(p)$. — *Прим. ред.*

индивидный параметр, чтобы позволить нам применять правила (vi^{a}) и (vii^{b}).

. . . .

Теперь мы возвращаемся к проблеме: так переформулировать приведенные выше правила, чтобы получить правила некоторой системы натуральной дедукции. Эта проблема легко решается следующим образом:

Формальный вывод заключения V из посылок U_1, U_2, ... в системе F есть замкнутая семантическая таблица, исходными формулами которой в левом столбце являются формулы U_1, $U_2, \ldots$, а в правом — формула V.

. . . .

Семантической таблицей для *секвенции*

$$\text{(f)}\quad U_1, U_2, \ldots, U_m \to V_1, V_2, \ldots, V_n$$

является семантическая таблица, в которой замкнутые формулы $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и $V_1, V_2, \ldots, V_n$ находятся соответственно в левом и в правом столбце в качестве исходных формул и которая строится по правилам (i)—(vii), приведенным выше.

. . . .

Теперь введем следующее определение: *выводом* секвенции (f) *в формальной системе* F является замкнутая семантическая таблица для этой секвенции.

. . . .

В заключение я хочу показать, что метод семантических таблиц не только дает удобную замену генценовским методам, но на самом деле нашей формальной системе F можно придать вид регулярной системы L *(исчисление секвенций)* или регулярной системы N *(система натуральной дедукции)**). Наша система L (которая тесно связана с системой Клини G3) содержит аксиому (i) и правила (ii)—(vii).

$$\text{(i)}\quad K', Z, K'' \to L', Z, L''$$

$$(\text{ii}^{a})\ \frac{K \to L, \text{У}}{\neg \text{У}, K \to L} \qquad (\text{ii}^{b})\ \frac{K, \text{У} \to L}{K \to \neg \text{У}, L}$$

$$(\text{iii}^{a})\ \frac{K, \text{У}, Z \to L}{\text{У} \,\&\, Z, K \to L} \qquad (\text{iii}^{b})\ \frac{K \to L, \text{У} \ \textit{и}\ K \to L, Z}{K \to \text{У} \,\&\, Z, L}$$

$$(\text{iv}^{a})\ \frac{K, \text{У} \to L \ \textit{и}\ K, Z \to L}{\text{У} \vee Z, K \to L} \qquad (\text{iv}^{b})\ \frac{K \to L, \text{У}, Z}{K \to \text{У} \vee Z, L}$$

$$(\text{v}^{a})\ \frac{K \to L, \text{У} \ \textit{и}\ K, Z \to L}{\text{У} \supset Z, K \to L} \qquad (\text{v}^{b})\ \frac{K, \text{У} \to L, Z}{K \to \text{У} \supset Z, L}$$

$$(\text{vi}^{a})\ \frac{K, \text{У}(a), \ldots, \text{У}(t) \to L}{\forall x \text{У}(x), K \to L} \qquad (\text{vi}^{b})\ \frac{K \to L, \text{У}(p)}{K \to \forall x \text{У}(x), L}$$

$$(\text{vii}^{a})\ \frac{K, \text{У}(p) \to L}{\exists x \text{У}(x), K \to L} \qquad (\text{vii}^{b})\ \frac{K \to L, \text{У}(a), \ldots, \text{У}(t)}{K \to \exists x \text{У}(x), L}$$

*) Описание системы N опущено. — *Прим. перев.*

В правилах (vi^{b}) и (vii^{a}) параметр p не должен входить в K, L или $\forall x \text{У}(x)$ [или $\exists x \text{У}(x)$]. Относительный порядок формул перед (или после) знака $\to$ можно изменять *(перестановка)*, повторение одной и той же формулы можно убрать *(сокращение повторений)*, и можно вводить произвольную формулу как перед, так и после знака $\to$ *(утончение)*.

Сейчас давайте построим для секвенции

$$\forall x [A \vee B(x)] \to \neg A \supset \forall x B(x)$$

как семантическую таблицу, так и соответствующий вывод в формальной системе L.

<table>
<tr><th colspan="2">Истинно</th><th>Ложно</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\forall x [A \vee B(x)]$
$\neg A$
$A \vee B(a)$</td><td rowspan="2">$\neg A \supset \forall x B(x)$
$\forall x B(x)$
A
$B(a)$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$B(a)$</td></tr>
</table>

$$\text{(i)}\quad A \to A, B(a)$$

$$(\text{ii}^{a})\quad A, \neg A \to B(a) \qquad B(a) \to B(a) \qquad \text{(i)}$$

$$(\text{iv}^{a})\quad A \vee B(a), \neg A \to B(a)$$

$$(\text{vi}^{a})\quad \forall x [A \vee B(x)], \neg A \to B(a)$$

$$(\text{vi}^{b})\quad \forall x [A \vee B(x)], \neg A \to \forall x B(x)$$

$$(\text{v}^{b})\quad \forall x [A \vee B(x)] \to \neg A \supset \forall x B(x)$$

Ясно, что, несмотря на различное представление, мы получили, по существу, два различных варианта одного и того же доказательства. Можно было бы перейти от одной системы к другой при помощи относительно простых механических преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Carnap R., Studies in Semantics, I—II, Cambridge, Mass., 1942, 1943.

[2] Curry H. B., A theory of Formal Deducibility, Notre-Dame, Ind., 1950.

[3] Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Zeit. **39** (1934), 176—210. [Русский перевод: Генцен Г., Исследования логических выводов, наст. сборник.]

[4] Kleene S. C., Introduction to metamathematics, Amsterdam — Groningen, 1952. [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.]

[5] Popper K. R., Functional logic without axioms or primitive rules of inference, Indag. Math. **9** (1947).

[6] Quine W. V., Methods of Logic, N. Y., 1950.

[7] Scholz H., Vorlesungen über Grundzüge der mathematischen Logik, I—II, Münster (1949); II, 2nd ed., Münster (1950).

[8] Schütte K., Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik, Math. Ann. **122** (1950).

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЛОГИКИ*)

Стиг Кангер

Широко известно, что существуют полные эффективные методы доказательства для элементарной логики **). Другими словами, имеется (и не один) такой эффективный метод M, что каждый раз, когда формула F является логическим следствием формулы или списка формул Γ (имеются в виду формулы в языке элементарной логики), этот факт может быть установлен при помощи метода M. И поскольку M — эффективный метод, мы можем (по крайней мере, в принципе) запрограммировать на вычислительную машину использование метода M. Следовательно, имеется возможность использования вычислительной машины для доказательства теорем любой элементарной аксиоматической теории. Для того чтобы доказать теорему F в теории с аксиомами Γ, мы должны заставить вычислительную машину показать, что F есть логическое следствие списка Γ.

Однако, все предложенные к настоящему времени эффективные методы доказательства для элементарной логики, по-видимому, требуют в общем случае слишком много машинного времени и слишком большого объема машинной памяти, чтобы быть пригодными даже для самых мощных и быстродействующих вычислительных машин.

Наименее пригодным методом, так сказать, с точки зрения вычислительной машины является так называемый метод Британского музея. Пусть даны формула F и список формул Γ, и пусть мы хотим показать, что F логически следует из Γ. Мы упорядочиваем класс всевозможных списков формул, каждый из которых начинается с Γ и кончается F, и перебираем эти списки один за другим. Если F является логическим следствием

*) Kanger Stig, A simplified proof method for elementary logic (Stockholm, Computer Programming and Formal Systems, Studies in Logic and the Fonndations of Mathematics), North-Holland, Publ. C°, Amsterdam, 1963, pp. 87—93. В порядке унификации символики произведены следующие изменения обозначений автора: знак $\Rrightarrow$ заменен на $\rightarrow$, U — на $\forall$, E — на $\exists$, $\sim$ — на $\neg$. — *Прим. перев.*

**) Имеются в виду алгорифмы поиска вывода для исчисления предикатов, т. е. алгорифмы, которые выдают ответ «формула F выводима из списка формул Γ» тогда и только тогда, когда F выводима из Γ, и могут не кончать работу, когда F из Γ не выводима. — *Прим. перев.*

Γ, то мы рано или поздно наткнемся на список, являющийся выводом F из Γ, например, в варианте исчисления предикатов Гильберта — Аккермана *). Легко видеть, что этот метод очень скоро исчерпает возможности любой вычислительной машины. Можно получить менее плохие методы, если добавить различные «эвристические» соображения, которые иногда дают некоторое сокращение рассуждений, а иногда не дают. Использование эвристических соображений было предложено Ньюэлом и Саймоном [6] и Гелернтером и Рочестером [2]. Введение эвристики может привести к значительному упрощению данного метода доказательства, но, по моему впечатлению, было бы мудрее отложить эвристику до тех пор, пока мы не будем иметь удовлетворительного метода доказательства в качестве основы для введения эвристических соображений.

Наиболее подходящими методами являются, по-видимому, те, которые основаны на исчислениях генценовского типа, например, на исчислении, предложенном Кангером [4], или на семантических таблицах Бета **). Пригодные для программирования методы доказательства этого рода (или, по существу, этого рода) были даны Гилмором [3], Хао Ваном [9], Правицами и Вогерой [7] и другими. Но насколько мне известно, эти методы все еще требуют слишком больших затрат времени, чтобы представлять хоть какой-нибудь практический интерес. Для программы Правицов — Вогеры, например, мы можем легко указать очень простые формулы, для которых построение машиной вывода потребовало бы астрономического числа лет.

Итак, в чем мы нуждаемся, так это в радикальном упрощении обычного, так сказать, шаблона методов доказательства генценовского типа.

В этой статье я предложу упрощение этих методов. Упрощенный метод, который я опишу, идентичен с методом доказательства для элементарной логики, предложенным в моей книге «Handbook i logik», и подобен методу, недавно предложенному Правицом [8].

Для начала я опишу исчисление генценовского типа.

Будем использовать буквы F и G для обозначения формул элементарной логики или, более точно, формул исчисления

*) См. Hilbert D. und Ackermann W., Grundzüge der theoretischen Logic, Berlin (Springer), 1928 г., (2-е изд., 1938). [Имеется русский перевод: Гильберт и Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, 1947.] — *Прим. перев.*

**) См., например, Beth E. W., The Foundations of Mathematics, North-Holland Publ. C°, Amsterdam, 1959. (Соответствующие разделы монографии Бета см. в статье «Метод семантических таблиц» наст. сборника.) — *Прим. перев.*

предикатов первой ступени с равенством и функциональными знаками для операций, переводящих наборы индивидов в индивиды. В этой связи удобно предположить, что связанные переменные формул графически отличны от свободных переменных, которые мы будем также называть параметрами. Мы будем употреблять букву x для обозначения связанных переменных и буквы c и d для обозначения параметров, констант и термов, формируемых из параметров и констант посредством функциональных знаков. Мы будем использовать греческие заглавные буквы Γ, Δ, Z и Λ для обозначения конечных (возможно, пустых) последовательностей формул. Выражение Γ_d^c будет обозначать результат замены каждого вхождения c в каждой формуле из Γ вхождением d. Мы будем использовать выражения вида $\Gamma \to Z$ для обозначения того факта, что Z является логическим следствием Γ. Выражения этого вида будем называть секвенциями. (Мы говорим, что Z логически следует из Γ, если для каждой непустой области индивидов и любого выбора на этой области возможной интерпретации нелогических символов для индивидов, операций, классов и отношений некоторая формула из Z истинна или некоторая формула из Γ ложна *).)

Мы можем предположить, что символы $=$ (равенство), $\neg$ (отрицание), & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\supset$ (импликация), $\equiv$ (эквивалентность), $\forall$ (квантор всеобщности) и $\exists$ (квантор существования) являются единственными логическими символами. Примем в качестве постулатов исчисления следующие две схемы аксиом и восемнадцать правил вывода:

P.1 $\Gamma,\ F,\ \Delta \to Z,\ F,\ \Lambda$

P.2 $\Gamma \to Z,\ (c = c),\ \Lambda$

P.3 $\dfrac{\Gamma_d^c,\ (c=d),\ \Delta_d^c \to Z_d^c}{\Gamma,\ (c=d),\ \Delta \to Z}$

P.4 $\dfrac{\Gamma_d^c,\ (d=c),\ \Delta_d^c \to Z_d^c}{\Gamma,\ (d=c),\ \Delta \to Z}$

P.5 $\dfrac{F,\ \Gamma \to Z,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ \neg F,\ \Lambda}$

P.6 $\dfrac{\Gamma,\ \Delta \to F,\ Z}{\Gamma,\ \neg F,\ \Delta \to Z}$

P.7 $\dfrac{\Gamma \to Z,\ F,\ \Lambda \quad \Gamma \to Z,\ G,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ (F \,\&\, G),\ \Lambda}$

*) Утверждение «Z логически следует из Γ» можно понимать как утверждение о выводимости формульного образа (см. § 3 статьи «Теорема Эрбрана» наст. сборника) секвенции $\Gamma \to Z$, например, в исчислении $LK^=$. — *Прим. перев.*

P.8 $\dfrac{\Gamma,\ F,\ G,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ (F \,\&\, G),\ \Delta \to Z}$

P.9 $\dfrac{\Gamma \to Z,\ F,\ G,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ (F \vee G),\ \Lambda}$

P.10 $\dfrac{\Gamma,\ F,\ \Delta \to Z \quad \Gamma,\ G,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ (F \vee G),\ \Delta \to Z}$

P.11 $\dfrac{F,\ \Gamma \to Z,\ G,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ (F \supset G),\ \Lambda}$

P.12 $\dfrac{\Gamma,\ \Delta \to F,\ Z \quad \Gamma,\ G,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ (F \supset G),\ \Delta \to Z}$

P.13 $\dfrac{F,\ \Gamma \to Z,\ G,\ \Lambda \quad G,\ \Gamma \to Z,\ F,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ (F \equiv G),\ \Lambda}$

P.14 $\dfrac{\Gamma,\ \Delta \to F,\ G,\ Z \quad \Gamma,\ F,\ G,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ (F \equiv G),\ \Delta \to Z}$

P.15 $\dfrac{\Gamma \to Z,\ F_i^x,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ \forall x F x,\ \Lambda}$,

где i — параметр, не встречающийся в заключении.

P.16 $\dfrac{\Gamma,\ F_c^x,\ \forall x F x,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ \forall x F x,\ \Delta \to Z}$

P.17 $\dfrac{\Gamma \to Z,\ F_c^x,\ \exists x F x,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ \exists x F x,\ \Lambda}$

P.18 $\dfrac{\Gamma,\ F_i^x,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ \exists x F x,\ \Delta \to Z}$,

где i — параметр, не встречающийся в заключении.

Теперь, если мы желаем получить вывод секвенции $\Gamma \to Z$, то мы начинаем, выбирая эту секвенцию в качестве нижней, строить дерево стоящих выше секвенций посредством применения снизу вверх правил вывода. Если нам удастся построить такое дерево, в котором вершина каждой ветви является аксиомой вида P.1 или P.2, то вывод будет получен. И если $\Gamma \to Z$ *), то мы всегда будем в состоянии построить такое дерево, предполагая, что мы следуем некоторому определенному шаблону (и предполагая, конечно, что мы имеем в своем распоряжении достаточное количество времени и места). Следовательно, если мы задаем такой шаблон, то мы получаем эффективный метод доказательства для элементарной логики.

Основной трудностью является следующая. Предположим, мы уже поднялись до некоторой секвенции в некоторой ветви

*) Имеется в виду, если секвенция $\Gamma \to Z$ выводима. — *Прим. перев.*

дерева. Часто случается, что мы можем продолжить ветвь более чем одним способом. И может случиться, что некоторые из этих способов более благоприятны, чем другие, с точки зрения простоты *). Следовательно, наша процедура должна включать некоторые соображения для выбора благоприятных путей продолжения ветвей дерева вывода. Без хороших соображений этого сорта метод доказательства будет требовать слишком больших затрат времени. Нехватка таких соображений была источником затруднений с программой Правица — Вогеры.

С целью предложить процедуру, которая включает соображения этого рода, мы опишем некоторые видоизменения правил вывода.

Будем говорить, что параметры и константы являются термами ранга нуль и что терм $f(c_1, \ldots, c_n)$ является термом ранга $r+1$, где r — максимальный из рангов термов $c_1, \ldots, c_n$. Ограничим теперь правила Р.3 и Р.4 для равенства требованиями, чтобы ранг c был не меньше ранга d в Р.3 и чтобы ранг c был больше ранга d в Р.4. Тогда при применениях правил Р.3 и Р.4 снизу вверх мы никогда не заменяем терм c термом d большего ранга.

Мы говорим, что секвенция $\Gamma \to Z$ непосредственно выводима, если она выводима при помощи одних лишь постулатов Р.1—Р.4, ограниченных, как указано выше. Отметим, что всегда можно разрешить вопрос: выводима ли данная секвенция непосредственно или не выводима.

Мы также ограничим правила Р.16 и Р.17, потребовав, чтобы терм c встречался в заключении ниже черты **) или, если в заключении вообще не содержится термов, чтобы c являлся первым в алфавитном порядке параметром. Мы изменим также формулировку этих правил. Когда мы применяем правило, мы не должны выбирать терм c немедленно. Вместо этого мы заменяем x временной переменной α и делаем заметку на полях, что α стоит вместо одного из термов заключения ***). Итак, правила принимают следующую формулу:

$$\text{Р.16} \quad \frac{\Gamma,\ F^x_\alpha,\ \forall x\, Fx,\ \Delta \to Z}{\Gamma,\ \forall x\, Fx,\ \Delta \to Z} \qquad \alpha/c_1, \ldots, c_n,$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — термы, встречающиеся в заключении; если таких термов нет, то α — первый параметр.

$$\text{Р.17} \quad \frac{\Gamma \to Z,\ F^x_\alpha,\ \exists x Fx,\ \Lambda}{\Gamma \to Z,\ \exists x\, Fx,\ \Lambda} \qquad \alpha/c_1, \ldots, c_n,$$

*) Имеется в виду простота окончательного вывода. — *Прим. перев.*

**) Здесь не исключается случай, когда c входит в заключение в качестве подтерма некоторого терма заключения. — *Прим. перев.*

***) В оригинале вместо термина «вре́менная переменная» стоит термин «dummy». — *Прим. перев.*

где $c_1, \ldots, c_n$ — термы, встречающиеся в заключении; если таких термов нет, то α — первый параметр.

Выражение $\alpha/c_1, \ldots, c_n$ мы будем называть подстановочным списком для вре́менной переменной α, а термы $c_1, \ldots, c_n$ — значениями α *).

Теперь я опишу процедуру поиска доказательства. Предположим, что мы хотим вывести секвенцию $\Gamma \to Z$. Мы начинаем снизу с секвенции $\Gamma \to Z$ и, поднимаясь наверх, строим дерево секвенций, применяя правила вывода **). Мы разбиваем построение дерева на этапы. Внутри каждого этапа мы применяем лишь правила для логических связок и кванторов, т. е. правила Р.5—Р.18. В конце каждого этапа мы испытываем каждую из секвенций, стоящих в вершинах ветвей. Если испытание приводит к положительному результату, то мы прекращаем построение дерева, в противоположном случае мы переходим к новому этапу.

Внутри каждого этапа мы предпочитаем применения правил Р.15 и Р.18 применениям правил для логических связок, т. е. применениям правил Р.5—Р.14 и предпочитаем применения правил для логических связок применениям Р.16 или Р.17. Если мы применяем Р.16 или Р.17 и в заключении встречается более одного терма, то мы обязательно должны ввести новую вре́менную переменную, которая еще не вводилась в дерево, и указать подстановочный список для этой переменной. Более того, когда мы применяем Р.16 и Р.17, мы должны предпочесть расщепление формулы G расщеплению формулы, которая расщеплялась большее число раз, чем G, в предыдущих применениях Р.16 и Р.17 в рассматриваемой ветви дерева вывода. Когда мы применяем правила Р.15 или Р.18, вводимый параметр должен быть обязательно новым и, разумеется, отличным от значений вре́менных переменных заключения.

В конце каждого этапа мы ненадолго останавливаемся и проверяем, нельзя ли выбрать такие значения для вре́менных переменных из подстановочных списков для этих переменных, чтобы все секвенции, стоящие в вершинах, были бы непосредственно выводимы после замены вре́менных переменных выбранными значениями.

Если можно сделать такой выбор значений, то вывод успешно завершается. Если же такого выбора значений нет, то мы сохраняем вре́менные переменные и развертываем новый этап построения дерева вывода, продолжая каждую ветвь, кроме закрытых (ветвь закрыта в том смысле, что секвенция, стоящая

*) Отметим, что вре́менные переменные (отличные от α) могут встречаться в списке $c_1, \ldots, c_n$.

**) Здесь и ниже имеются в виду применения правил снизу вверх. — *Прим. перев.*

в ее вершине, непосредственно выводима при любых значениях вре́менных переменных *).

Осталось фиксировать объем каждого этапа. Мы считаем этап завершенным, если каждая ветвь этого этапа имеет своей вершиной такую секвенцию $\Delta \to \Lambda$, что (1) каждая формула в Δ или является атомарной, или начинается квантором всеобщности, и каждая формула из Λ или является атомарной, или начинается квантором существования; (2) все неатомарные формулы из Δ и из Λ расщеплялись в рассматриваемой ветви одно и то же число раз при предыдущих применениях Р.16 или Р.17.

Описание метода доказательства закончено. Для иллюстрации метода я приведу вывод секвенции $\to \exists x \forall y ((x = f(x)) \supset (f(f(y)) = y))$. Формулу из этой секвенции обозначим посредством $\exists x F$. Вывод следует читать снизу.

$$\text{Непосредственный вывод}\left\{\begin{array}{ll} (j=f(j)),\ (i=f(i)) \to (j=j),\ (f(f(k))=k),\ \exists xF & \\ \hline (j=f(j)),\ (i=f(i)) \to (f(j)=j),\ (f(f(k))=k),\ \exists xF & \text{P.4;} \\ \hline (j=f(j)),\ (i=f(i)) \to (f(f(j))=j),\ (f(f(k))=k),\ \exists xF & \text{P.4.} \end{array}\right.$$

Выбор значения: α/j

$$\begin{array}{ll} (\alpha=f(\alpha)),\ (i=f(i)) \to (f(f(j))=j),\ (f(f(k))=k),\ \exists xF & \\ \hline (i=f(i)) \to (f(f(j))=j),\ (\alpha=f(\alpha)) \supset (f(f(k))=k),\ \exists xF & \text{P.11;} \\ \hline (i=f(i)) \to (f(f(j))=j),\ \forall y((\alpha=f(\alpha)) \supset (f(f(y))=y)),\ \exists xF & \text{P.15;} \\ \hline (i=f(i)) \to (f(f(j))=j),\ \exists x\forall y((x=f(x)) \supset (f(f(y))=y)) & \text{P.17**;} \\ \hline \to ((i=f(i)) \supset (f(f(j)=j)),\ \exists xF & \text{P.11;} \\ \hline \to \forall y((i=f(i)) \supset (f(f(y))=y)),\ \exists xF & \text{P.15;} \\ \hline \to \exists x\forall y((x=f(x)) \supset (f(f(y))=y)) & \text{P.17.} \end{array}$$

Сравним этот вывод с выводами секвенций

$$\to \forall y \exists x ((x=f(x)) \supset (f(f(y))=y))$$

и

$$\to (\forall x (x=f(x)) \supset \forall y (f(f(y))=y)).$$

---

*) Эту фразу можно понимать в следующих двух смыслах: (1) ветвь закрыта, если ее верхняя секвенция непосредственно выводима при любых значениях вре́менных переменных из их подстановочных списков; (2) ветвь закрыта, если ее верхняя секвенция непосредственно выводима при любых значениях вре́менных переменных. Проверка условия (2) осуществляется попыткой непосредственно вывести секвенцию, считая вре́менные переменные обычными переменными, отличными друг от друга и от других переменных, встречающихся в секвенции. Для проверки условия (1) требуется, как правило, бо́льшая работа (причем во многих случаях результаты этих двух проверок будут совпадать), однако часто (особенно для таких ветвей, в которых подстановочные списки не очень велики) использование условия (1) позволяет закрывать ветви намного раньше, чем мы смогли бы это сделать, пользуясь лишь условием (2). — *Прим. перев.*

**) α/i, $f(i)$, j, $f(j)$, $f(f(j))$.

Эти выводы проще приведенного выше, хотя формулы в этих секвенциях логически эквивалентны формуле из приведенного примера. Теперь требуется лишь два этапа, поскольку константа j, которую мы подставляем вместо α, оказывается допустимой в качестве значения вре́менной переменной уже при первом применении Р.17 или Р.16. Простейшим выводом является вывод последней секвенции:

$$\text{Непосредственный вывод}\left\{\begin{array}{ll} (j=f(j)),\ \forall x(x=f(x)) \to (j=j) & \\ \hline (j=f(j)),\ \forall x(x=f(x)) \to (f(j)=j) & \text{P.4;} \\ \hline (j=f(j)),\ \forall x(x=f(x)) \to (f(f(j))=j) & \text{P.4;} \end{array}\right.$$

выбор значения: α/j

$$\begin{array}{lll} \text{этап 2} & (\alpha=f(\alpha)),\ \forall x(x=f(x)) \to (f(f(j))=j) & \\ \hline & \forall x(x=f(x)) \to (f(f(j))=j) & \text{P.16 *)} \\ \hline \text{этап 1} & \forall x(x=f(x)) \to \forall y(f(f(y))=y) & \text{P.15;} \\ \hline & \to (\forall x(x=f(x)) \supset \forall y(f(f(y))=y)) & \text{P.11.} \end{array}$$

Итак, чтобы получать более простые выводы, обычно выгодно не расширять области действия кванторов более, чем необходимо.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beth E. W., Formal methods, Dordrecht, 1962.

[2] Gelernter H. and Rochester N., Intelligent behavior in problem-solving machines, IBM J. of Research and Development **2** (1958), 336—345.

[3] Gilmore P. C., A proof method for quantification theory: its justification and realization, IBM J. of Research and Development **4** (1960), 28—35.

[4] Kanger S., Provability in logic, Stockholm, 1957.

[5] Kanger S., Handbook i logic, Stockholm, 1959 (Mimeographed).

[6] Newell A. and Simon H., The logic theory machine, IRE Transactions on Information Theory, vol. IT-2, no 3 (1956), 61—79.

[7] Prawitz D., Prawitz H. and Vogera N., A mechanical proof procedure and its realization in an electronic computer, J. Ass. Comp. Mach. **7** (1960), 102—128.

[8] Prawitz D., An improved proof procedure. Theoria **26** (1960), 102—139.

[9] Wang Hao, Towards mechanical mathematics, IBM J. of Research and Development **4** (1960), 2—22. (Русский перевод: Хао Ван, На пути к машинной математике, Кибернетический сборник **5**, ИЛ, 1962.)

[10] Wang Hao, Proving theorems by pattern recognition, Part I, Communications of the Association for Computer Machinery **3** (1960), 220—234; Part II, Bell System Technical J. **40** (1961), 1—41.

---

*) α/j, $f(j)$, $f(f(j))$.

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЙ ПРАВИЛ В ГЕНЦЕНОВСКИХ ИСЧИСЛЕНИЯХ LK И LJ[1])

С. К. Клини

«2.3. Аналогично теореме 2.1, можно доказать дальнейшие усиления основной теоремы в том смысле, что на порядок следования логических фигур заключения в выводе накладываются те или иные ограничения. Фигуры заключения в выводе можно переставлять различными способами и в довольно широких пределах, подобно тому как это делалось выше (2.232.2).
Мы не будем углубляться в рассмотрение этого вопроса».

Генцен [10], стр. 412.

При изучении выводимости в исчислении предикатов или в аксиоматических теориях, основанных на исчислении предикатов (первого порядка, классическом или интуиционистском), часто надо глубже вникнуть в ситуацию, что обеспечивается применением одной из нескольких основных теорем, таких, как теорема Эрбрана [14] или гильбертовское определение кванторов в терминах ε-символа с теорией устранения ε-символа по Аккерману [1] и Гильберту — Бернайсу [18], § 1—3, или генценовское сведéние обычных формулировок исчисления предикатов к исчислениям LK и LJ с его основной теоремой*) для последнего. Оказывается, что для многих проблем несущественно, какая из этих теорем выбирается. Как показали Гильберт и Бернайс

[1]) Kleene S. C., Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ. Memoirs of the American Mathematical Society, Number 10, 1—26.

Получена редакцией 11 июня 1951 г. Представлена Американскому математическому о-ву 4 сентября 1951 г. Получена в исправленном виде 20 февраля 1952 г.

Библиография расположена в конце этого мемуара после второй статьи (см. следующую статью настоящего сборника. — *Прим. ред.*).

Часть I (и § 6 части II) второй статьи независима от первой статьи.

*) Здесь и в последующем под термином «основная теорема» понимается «основная теорема об устранимости сечения» (теорема 2.5 раздела III работы [10]) (см. наст. сборник). — *Прим. перев.*

[18], первая выводится из второй. Доказательство и применения генценовской основной теоремы распадаются на довольно большое число случаев, каждый из которых сам по себе легко рассматривается. Генцен использовал свою основную теорему, чтобы получить обобщенную основную теорему для классического исчисления LK и проиллюстрировал использование последней для доказательства непротиворечивости аксиоматической теории[1]). В цитированном выше отрывке Генцен ссылается на возможность дальнейшего обобщения его основной теоремы. Для части II второй статьи этого мемуара нужны некоторые результаты из той области, которую Генцен указал без исследования. В настоящей статье результаты исследования собраны в виде нескольких лемм и общей теоремы о перестановочности как для классической, так и для интуиционистской систем (теорема 2), которая включает генценовскую классическую обобщенную основную теорему как частный случай. Исследования этой статьи независимы, хотя их применения зависят от результатов статьи Генцена [10], которые резюмированы в виде теоремы 1 (они доказаны также в §77 и 78 книги автора [22][2])).

Когда эта статья уже была написана, автор узнал, что Карри опубликовал резюме статьи [7], где рассматривается перестановочность применений правил вывода в классических системах генценовского типа[3]).

§ 1. Формальная система *G*

Термами G являются индивидные переменные (из данного бесконечного списка), индивидные символы (из данного списка, пустого или непустого) и выражения, которые строятся, исходя из них, синтаксически с использованием функциональных символов (из данного списка, пустого или непустого; каждый член этого списка имеет одно или более аргументных мест). *Элементарными формулами* являются предикатные символы (из данного списка, пустого или непустого; каждый член этого списка

[1]) Легко перейти от генценовского пояснения к формулировке общей теоремы о непротиворечивости такой, как теорема Бернайса [2], стр. 98—99 и Гильберта — Бернайса [18], стр. 36—38, основанной на элиминации ε-символа. Это сделано автором в [22], § 79.

[2]) Другие изложения даны Кетоненом [19] (известно автору из сообщения Бернайса), Фейсом [8] и [9] и в монографии Карри [6]. Монография Карри и последующие статьи составляют весьма обширное исследование систем генценовского типа.

[3]) Свойством правил, сформулированном в резюме Карри (третья фраза), обладают не все логические правила LK; исключение составляют два правила, в которых имеется ограничение на переменные (см. § 1 ниже).

имеет нуль или более аргументных мест[1])) с термами в качестве аргументов. *Формулами* являются элементарные формулы и выражения, построенные синтаксически с помощью пропозициональных связок $\supset$ (если ..., то ...), & (и), $\vee$ (или), $\neg$ (не) и кванторов $\forall x$ (для всякого x) и $\exists x$ (существует x такое, что). *Логические символы* — это $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Логический символ, введенный последним при построении сложных (т. е. не элементарных) формул, назовем *внешним символом*; в его области действия находятся все остальные логические символы, если такие имеются. *Секвенцией* будем называть формальное выражение вида $A_1, \ldots, A_\chi \to B_1, \ldots, B_m$, где $A_1, \ldots, A_\chi, B_1, \ldots, B_m$ — формулы ($\chi, m \geqslant 0$); здесь $A_1, \ldots, A_\chi$ — *антецедент*, а $B_1, \ldots, B_m$ — *сукцедент*.

В обычном исчислении предикатов (формулируемом без предикатных переменных с помощью схем аксиом[2])) аксиомы являются формулами и переходы по правилам вывода совершаются от одной или двух формул (посылок) к некоторой формуле (заключению). В системе G генценовского типа аксиомы — это секвенции, и переходы по правилам вывода совершаются от одной или двух секвенций (посылок) к некоторой секвенции (заключению). Другими словами, в G секвенции играют роль тех объектов, которые обычно называются формулами системы. Но вместо того, чтобы использовать термин «формула» в двух смыслах, мы сохраним этот термин для формул из обычных систем и будем применять термин «секвенция» к объектам (содержащим обычные формулы, как составляющие), играющим роль формул в G.

Можно считать, что интерпретация секвенции $A_1, \ldots, A_\chi \to B_1, \ldots, B_m$ дается соответствующей формулой в теореме 1, приводимой ниже (при соглашениях, сформулированных перед этой теоремой).

Дедуктивными постулатами G являются схемы аксиом и правила вывода, перечисленные ниже, где для каждого применения A, B и C — формулы, Γ и Θ — конечные последовательности формул, x — переменная, $A(x)$ — формула, t — терм, свободный для x в $A(x)$, b — переменная, также свободная для x в $A(x)$ и не входящая свободно в $A(x)$, если только b не равно x, а $A(t)$ и $A(b)$ — результаты подстановки t и b соответственно вместо свободных вхождений x в $A(x)$.

Правила вывода обозначим посредством «$\supset \to$», «У $\to$» и т. д. Эти обозначения записаны справа от черты, отделяющей посылку от заключения.

---

[1]) Сюда включаются пропозициональные символы как 0-местные предикатные символы. Мы могли бы аналогично рассматривать индивидные символы как 0-местные функциональные символы.

[2]) Как было впервые сделано фон Нейманом в [24].

Ограничение на переменные для двух из постулатов ($\to \forall$ и $\exists \to$): переменная b не входит свободно ни в какую формулу заключения. В случае, когда $A(x)$ не содержит x свободно, $A(b)$ есть $A(x)$ для любого b, и мы выбираем b так, чтобы оно удовлетворяло этому ограничению.

Различие между классической и интуиционистской системами G достигается следующим ограничением: для интуиционистской системы Θ пусто в двух постулатах ($\to \neg$ и $\to$ У) и Θ, отмеченное знаком °, пусто в другом постулате ($\supset \to$).

Логические правила — это *введения* логического символа в сукцедент или в антецедент (отсюда наши обозначения правил «$\to \supset$», «$\supset \to$», «$\to$&», «&$\to$» и т. д.). Структурными правилами являются *утончение* и *сокращение* в сукцеденте или антецеденте (отсюда наши обозначения «$\to$ У», «У $\to$», «$\to$ С», «С $\to$»). Мы будем применять правила, не учитывая порядка формул внутри антецедентов и сукцедентов[1]).

Постулаты формальной системы G

Аксиома:

$$C \to C.$$

Логические правила вывода:

$$\frac{A,\ \Gamma \to \Theta,\ B}{\Gamma \to \Theta,\ A \supset B} \to \supset \qquad \frac{\Gamma \to \Theta^{\circ},\ A \qquad B,\ \Gamma \to \Theta}{A \supset B,\ \Gamma \to \Theta} \supset \to,$$

где Θ° — это Θ для классической системы и пустая последовательность для интуиционистской системы.

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ A \qquad \Gamma \to \Theta,\ B}{\Gamma \to \Theta,\ A \,\&\, B} \to \& \qquad \frac{A,\ \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B,\ \Gamma \to \Theta} \& \to \qquad \frac{B,\ \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B,\ \Gamma \to \Theta} \& \to$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ A}{\Gamma \to \Theta,\ A \vee B} \to \vee \qquad \frac{\Gamma \to \Theta,\ B}{\Gamma \to \Theta,\ A \vee B} \to \vee \qquad \frac{A,\ \Gamma \to \Theta \qquad B,\ \Gamma \to \Theta}{A \vee B,\ \Gamma \to \Theta} \vee \to$$

$$\frac{A,\ \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ \neg A} \to \neg, \qquad \frac{\Gamma \to \Theta,\ A}{\neg A,\ \Gamma \to \Theta} \neg \to$$

где Θ пусто для интуиционистской системы.

---

[1]) Таким образом мы освобождаемся от двух генценовских правил перестановки. Система G отличается от системы «$G2$ без смешения» в [22], § 78 только в этом отношении; от генценовских исчислений LK (классическое) или LJ (интуиционистское) она отличается в этом и следующих двух отношениях. Мы используем другое правило $\supset$-введения в антецедент, которое для классической системы ввел Кетонен [19]. Дополнительное структурное правило

$$\frac{\Delta \to \Lambda,\ C \qquad C,\ \Gamma \to \Theta}{\Delta,\ \Gamma \to \Lambda,\ \Theta} \text{ сечение},$$

называемое «сечением», везде опущено, так как по основной теореме оно лишнее в LK или LJ.

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ A(b)}{\Gamma \to \Theta,\ \forall x A(x)} \to \forall \qquad \frac{A(t),\ \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x),\ \Gamma \to \Theta} \forall \to$$

с ограничением на переменные

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ A(t)}{\Gamma \to \Theta,\ \exists x A(x)} \to \exists \qquad \frac{A(b),\ \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x),\ \Gamma \to \Theta} \exists \to$$

с ограничением на переменные.

Структурные правила вывода:

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ C} \to \text{У}, \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{C,\ \Gamma \to \Theta} \text{У} \to$$

где Θ пусто для интуиционистской системы.

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ C,\ C}{\Gamma \to \Theta,\ C} \to \text{C} \qquad \frac{C,\ C,\ \Gamma \to \Theta}{C,\ \Gamma \to \Theta} \text{C} \to$$

Доказательства в G строятся в форме дерева, начинающегося с аксиом и продолжающегося вниз путем применений правил вывода до конечной секвенции, о которой говорят, что она *доказуема* в G.

Дерево, построенное аналогично, за исключением того, что на вершинах ветвей могут быть, кроме аксиом, еще секвенции из данного списка $\Gamma_1 \to \Theta_1, \ldots, \Gamma_k \to \Theta_k$, называется *выводом* в G конечной секвенции *из* секвенций $\Gamma_1 \to \Theta_1, \ldots, \Gamma_k \to \Theta_k$.

Теперь приведем два примера доказательств секвенции $A,\ (A \vee B) \supset C \to B \supset C$ в интуиционистской системе G. Штрихи и индексы указаны, чтобы помочь дальнейшему рассмотрению.

Пример 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A'}{A \to A \vee_1 B'} \to \vee_1 \qquad \dfrac{C' \to C''}{A,\ C' \to C''} \text{У} \to}{A,\ A \vee_1 B \supset_2 C' \to C''} \supset_2 \to}{B'',\ A,\ A \vee_1 B \supset_2 C' \to C''} \text{У} \to}{A,\ A \vee_1 B \supset_2 C' \to B \supset_3 C''} \to \supset_3$$

Пример 2

$$\dfrac{\dfrac{A \to A'}{A \to A \vee_1 B'} \to \vee_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{C' \to C''}{B'',\ C' \to C''} \text{У} \to}{C' \to B \supset_3 C''} \to \supset_3}{A,\ C' \to B \supset_3 C''} \text{У} \to}{A,\ A \vee_1 B \supset_2 C' \to B \supset_3 C''} \supset_2 \to$$

Лемма 1. *Если $A_1, \ldots, A_\chi \to B_1, \ldots, B_m$ доказуема в интуиционистской системе G, то $m=0$ или $m=1$.*

Доказательством с *чистыми переменными* *) в G называется доказательство, в которое никакая переменная не входит одновременно и свободно и связанно и в котором для каждого применения $\to\forall$ или $\exists\to$ переменная b этого применения встречается только в секвенциях, расположенных выше заключения этого применения (b выбирается удовлетворяющим этому условию всякий раз, когда $A(x)$ не содержит x свободно[1])).

Лемма 2. *Доказательство с чистыми переменными в G остается доказательством с чистыми переменными, если повсюду мы подставим вместо переменной c, входящей свободно в его конечную секвенцию, другую переменную b, не входящую в это доказательство.*

Сущность генценовского сведе́ния обычных систем («гильбертовского типа») исчисления предикатов к системам LK и LJ и его основная теорема для последних содержится в следующей теореме.

Чтобы включить все случаи в одно утверждение, будем предполагать здесь, что «$A_1 \& \ldots \& A_\chi$» для $\chi=1$ обозначает A_1 и для $\chi=0$ обозначает $F \supset F$, где F — некоторая фиксированная замкнутая формула; «$B_1 \vee \ldots \vee B_m$» для $m=1$ означает B_1 и для $m=0$ означает $\neg(F \supset F)$. (Тогда для $\chi=0$ $A_1 \& \ldots \& A_\chi \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ эквивалентна $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ и для $m=0$ эквивалентна $\neg(A_1 \& \ldots \& A_\chi)$.)

Теорема 1. (a) *Если секвенция $A_1, \ldots, A_\chi \to B_1, \ldots, B_m$ доказуема в G, то формула $A_1 \& \ldots \& A_\chi \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ выводима в исчислении предикатов.*

(b) *Если формула $A_1 \& \ldots \& A_\chi \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$, не содержащая никакой переменной как свободно, так и связанно, выводима в исчислении предикатов и для интуиционистских систем, если $m=0$ или $m=1$, то можно построить доказательство с чистыми переменными секвенции $A_1, \ldots, A_\chi \to B_1, \ldots, B_m$ в G.*

---

*) Для этого понятия употребляется также термин «доказательство, обладающее свойством чистоты переменных». — *Прим. перев.*

[1]) В силу [22], § 78, леммы 37 и 38, всякое доказательство в G секвенции, не содержащей никакой переменной одновременно и связанно и свободно, можно перестроить, заменяя только переменные, в доказательство с чистыми переменными той же самой секвенции. (Этот результат применяется в доказательстве теоремы 1.) В различных случаях мы можем одинаково легко (1) заметить, что изменение, которое мы совершаем в доказательстве, сохраняет свойство чистоты переменных (если оно имелось), или (2) доказать на основании только что указанного результата, что если свойство чистоты переменных не сохраняется, то можно восстановить его, не портя другие свойства, которые мы желаем иметь В таких случаях мы выбираем (1).

§ 2. Отношения родства в доказательстве в системе G

Рассмотрим, например, правило $\rightarrow\supset$. В применении этого правила мы называем A *первой боковой формулой*, B — *второй боковой формулой*, $A\supset B$ — *главной формулой*, вхождение символа $\supset$ в $A\supset B$, введенное этим применением (т. е. внешнее вхождение логического символа), — *главным вхождением логического символа* (*главным символом*) и формулы из Γ и Θ — *добавочными* (или *параметрическими*) *формулами*.

В применении правила из G каждое вхождение формулы в посылку (т. е. в посылку или одну из двух посылок) порождается вхождением формулы в заключение. Последнее является вхождением той же самой формулы, за исключением случая применения логического правила, для которого первая является боковой формулой, а вторая — главной формулой. Если имеется повторение формул в одной из рассматриваемых секвенций, то любая двусмысленность в отношении того, какое именно вхождение данной формулы в заключение представляет данное вхождение в посылку, устраняется при помощи конкретного *анализа* применения правила. Например, в применении правила $P, P, P, Q\rightarrow Q/P, Q, P\rightarrow P\supset Q$, где P и Q — различные формулы, следует уточнить, которое из трех P в посылке является первой боковой формулой и какое из остальных двух P представлено каждым из двух P в заключении.

Вхождение формулы в заключение, которое так представляет вхождение формулы в посылку, мы называем *непосредственным потомком* этого вхождения формулы в посылку.

Теперь, если мы имеем доказательство или вывод в G, и если мы начинаем с данного вхождения формулы в одну из этих секвенций, то это последовательно приводит нас к конкретному *потомку* вхождения в каждой секвенции, расположенной ниже исходной. В противоположность обычному языку, мы будем называть само вхождение его *потомком* в его собственной секвенции; так, например, данное вхождение формулы всегда имеет потомка в конечной секвенции. Потомок этого вхождения формулы в его секвенции является *несобственным*, другие потомки — *собственными*.

В последовательности потомков данного вхождения формулы, начинающейся с несобственного потомка, каждый последующий потомок является вхождением той же самой формулы, что и формула предыдущего потомка, за исключением случая, когда применение правила, разделяющее эти два потомка, является применением логического правила с предыдущим потомком в качестве боковой формулы, о боковой формуле которого мы говорим, что она *преобразуется* этим применением в главную формулу. Если данное вхождение формулы отделено от потомка в расположенной ниже секвенции применениями логических правил по линии происхождения, т. е. с потомками данного вхождения в качестве главных формул, то мы говорим, что эти применения логических правил *преобразуют* первое вхождение во второе. Так, в примерах 1 и 2 применения правил $\rightarrow\vee_1$ и $\supset_2\rightarrow$ преобразуют отмеченную штрихом формулу A из левой аксиомы в формулу $A\vee B\supset C$ из последней секвенции.

Чтобы сказать, что некоторое вхождение формулы имеет в качестве потомка другое (или то же самое) вхождение формулы, мы обычно просто говорим, что первое *принадлежит* второму. Так, в примерах 1 и 2 формулы, не снабженные штрихом (снабженные одним штрихом, соответственно снабженные двумя штрихами), принадлежат первой (второй, соответственно третьей) формуле конечной секвенции.

Если дано вхождение формулы в посылку применения правила, то мы можем очевидным образом различить, какая именно часть его непосредственного потомка порождает данное вхождение, и эту часть потомка мы называем *непосредственным образом* данного вхождения. Затем, если даны доказательство или вывод в G и вхождение формулы в одну из секвенций этого доказательства или вывода, то это приводит нас к *образу* в каждом из потомков этого вхождения. Само вхождение является *несобственным* образом, другие — *собственными* образами. Образ в данной секвенции совпадает со всем потомком в этой секвенции, за исключением случая, когда расположенные между данным вхождением и его потомком применения логических правил преобразуют данное вхождение в его потомка. Образ состоит из той же самой последовательности символов, что и данное вхождение, кроме случая, когда между вхождением и потомком расположены применения *предикатных правил вывода* ($\rightarrow\forall$, $\forall\rightarrow$, $\rightarrow\exists$, $\exists\rightarrow$); в этом случае образ может отличаться от вхождения заменой терма на переменную (включая замену переменной на другую переменную).

Когда дано вхождение логического символа в посылку применения правила, мы можем очевидным образом опознать конкретное вхождение того же самого логического символа в заключение, как его *непосредственного потомка*. Затем, если дано вхождение логического символа в секвенцию из доказательства или вывода, то это приводит нас к *потомку* этого вхождения логического символа в его секвенции (*несобственный* потомок) и в каждой секвенции, расположенной ниже (*собственный* потомок). Потомок в данной секвенции данного вхождения логического символа в некоторое вхождение формулы является соответствующим образом расположенным вхождением логического символа в образ этого вхождения формулы. Как и раньше, мы говорим обычно, что одно вхождение логического символа *принадлежит* другому (или тому же самому) вхождению, если второе является потомком первого.

В этой статье мы будем изучать некоторые преобразования доказательств и выводов в G. Обычно каждому вхождению формулы в преобразованный вывод будет соответствовать очевидным образом вхождение той же самой формулы (или иногда вхождение формулы, из которой она получается путем подстановки термов вместо свободных переменных) в первоначальный вывод. Важно отметить, что для каждого из преобразований, которые будут рассмотрены, вхождение формулы в преобразованную фигуру и соответствующее ему вхождение формулы в первоначальную фигуру будут оба принадлежать одному и тому же вхождению формулы в конечную секвенцию или, если конечная секвенция преобразуется, соответствующим друг другу вхождениям формул. Кроме того, образы двух вхождений формул в соответствующих конечных секвенциях будут одинаковыми частями их соответствующих потомков, по той причине, что каждое вхождение формулы будет преобразовано в свой образ в последней секвенции одинаковой последовательностью применений логических правил без изменений ролей двух боковых формул при применениях правил с двумя боковыми формулами.

В то время как данное вхождение формулы в посылку применения правила всегда имеет ровно одного непосредственного потомка в заключении, может оказаться нуль, одно или два вхождения формулы в посылку (посылки), непосредственным потомком которых является данное вхождение формулы в заключение и которые называются *непосредственными предками* последнего. В данном доказательстве или выводе мы называем вхождение формулы *предком* (*собственным* или *несобственным* предком) другого вхождения формулы, если первое является потомком (соответственно собственным или несобственным потомком) второго.

Вхождение формулы в секвенцию из доказательства или вывода является *прослеживаемым* до секвенции, расположенной не ниже данной секвенции, если эта секвенция содержит предка данного вхождения (следовательно, данное вхождение прослеживаемо до его собственной секвенции).

Лемма 3. *Доказательство (доказательство с чистыми переменными) в системе G останется доказательством (соответственно доказательством с чистыми переменными), если вычеркнуть все вхождения формул, принадлежащие некоторому вхождению формулы в конечную секвенцию, которое не прослеживаемо до аксиом, и опустить получающиеся в результате тождественные переходы.*

Доказательство. Любое конкретное применение правила останется применением правила или перейдет в тождественный переход, если вычеркнуть формулы, принадлежащие данной формуле из его заключения. Следовательно, доказательство в целом остается доказательством (за исключением того, что некоторые применения правил станут тождественными переходами), когда этот процесс проводится последовательно, начиная с некоторой формулы в конечной секвенции, при условии, что эта процедура не ведет к вычеркиванию в аксиомах.

Когда мы говорим, что утончение «непосредственно предшествует» некоторой секвенции или «вводит» некоторое вхождение формулы в эту секвенцию, мы подразумеваем, что между этим утончением и указанной секвенцией расположены разве лишь другие утончения.

Лемма 4. *Доказательство в системе G можно перестроить, опуская утончения вниз (без изменения конечной секвенции, без нарушения свойства чистоты переменных, если доказательство этим свойством обладало, и без изменения порядка применений логических правил, за исключением того, что некоторые из них могут быть вычеркнуты) так, что в получающееся доказательство утончения могут входить только следующим образом:* (a) *непосредственно предшествуя конечной секвенции*; (b) *вводя боковую формулу некоторого применения правила $\to\supset$, вторая боковая формула которого не вводится утончением*; (c) *вводя некоторую формулу из Γ или Θ в одну из посылок применения двухпосылочного правила (но не в Θ интуиционистского варианта правила $\supset\to$), причем эта формула не вводится при помощи утончения соответственно в Γ или Θ другой посылки (значит, любая формула, которая не вводится непосредственно утончением, прослеживаема до аксиом)* [1]).

Доказательство проводим индукцией по высоте данного доказательства. Доказательство высоты 1 является аксиомой и не содержит утончений. Если данное доказательство имеет высоту $n+1$, то, по индукционному предположению, доказательство (доказательства) посылки (посылок) его последнего применения правила, входящее в качестве части данного доказательства, может быть преобразовано так, чтобы оно обладало свойством, описанным в лемме. Теперь мы рассмотрим несколько случаев, соответствующих типу самого последнего применения правила. Случай 1: утончение. Тогда все

[1]) Наоборот, при обосновании системы $G3$ в [22], § 80, утончения поднимаются наверх.

доказательство уже обладает свойством, описанным в лемме. Случай 2: применяется логическое правило, у которого боковая формула или обе боковые формулы в случае правила $\rightarrow\supset$ вводятся утончением. Тогда это применение логического правила можно вычеркнуть и использовать утончение для введения главной формулы. (При этом в случае применения двухпосылочного правила опускается все доказательство другой посылки.) Случай 3: применяется правило сокращения, одна из формул C которого непосредственно вводится утончением. Тогда опускаются как утончение, так и сокращение. Случай 4: остальные. Во всех оставшихся вариантах последнего применения любое утончение, непосредственно предшествующее рассматриваемому применению и не принадлежащее видам (b) и (c), может быть перенесено ниже последнего применения правила.

Мы говорим, что данное применение логического (структурного) правила *принадлежит* тому вхождению формулы в конечную секвенцию, которому принадлежат его главная и боковая формулы (соответственно его формула C). Данное применение логического правила принадлежит тому вхождению символа в конечную секвенцию, которому принадлежит вхождение главного логического символа этого применения. В примерах 1 и 2 это указывается индексами. Аналогично можно рассматривать вместо конечной секвенции любую другую секвенцию, расположенную не выше заключения этого применения правила.

Чтобы узнать, какие формулы могут принадлежать данному вхождению формулы E из антецедента последней секвенции вывода или доказательства в системе G, мы можем образовать таблицу с двумя столбцами, соответствующими антецеденту и сукцеденту. Мы помещаем саму формулу в первую строку антецедентного столбца. В каждой последующей строке мы помещаем в соответствующие столбцы формулы, которые могут служить боковыми формулами для применения правила системы G, у которого главной формулой в антецеденте (сукцеденте) является формула из последней полученной строки и из антецедентного (соответственно сукцедентного) столбца. Формулы в антецедентном (сукцедентном) столбце этой таблицы мы называем *антецедентными* (соответственно *сукцедентными*) *подформулами* данной формулы E как антецедентной формулы. Можно легко дать формулировку этого определения индукцией по числу вхождений логических символов в E. Аналогично можно определить антецедентные (сукцедентные) подформулы данной формулы E как сукцедентной формулы. Сама формула E является *несобственной* подформулой, другие подформулы — *собственными* подформулами.

Пример 3. Подформулами формулы $\forall_1 x(\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(x))\supset_4\mathcal{B}\vee_5\mathcal{D}$ как антецедентной формулы будут ниже следующие формулы [1]:

Антецедентные подформулы.	Сукцедентные подформулы*)
$\forall_1 x(\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(x))\supset_4\mathcal{B}\vee_5\mathcal{D}$,	
$\mathcal{B}\vee_5\mathcal{D}$,	$\forall_1 x(\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(x))$,
$\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$	$\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(t)$ для любого терма t,
$\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}$	$\mathcal{A}(t)$ для любого терма t.
$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.	

Лемма 5. (a) *Если вхождение формулы D в антецедент (сукцедент) секвенции из доказательства или вывода в системе G принадлежит вхождению формулы E в антецедент конечной секвенции, то D должна быть антецедентной (соответственно сукцедентной) подформулой формулы E как антецедентной формулы. Аналогично, с заменой слова «антецедент» на слово «сукцедент».* (b) *Данному вхождению логического символа в конечную секвенцию доказательства или вывода в системе G могут принадлежать применения логических правил лишь одного вида.*

Доказательство пункта (b). Пусть дано вхождение логического символа в E. Тогда главной формулой применения правила должна быть подформула формулы E, внешний логический символ которой принадлежит данному вхождению логического символа в E. Такая подформула будет антецедентной или сукцедентной подформулой формулы E в зависимости от положения этого вхождения логического символа внутри E и от того, является ли формула E антецедентной или сукцедентной формулой последней секвенции. (В действительности, если E входит в антецедент, то применение правила должно вводить логический символ в антецедент или сукцедент, в зависимости от того, входит ли этот логический символ в формулу A четного или нечетного числа частей формулы E, имеющих вид

---

[1]) Используемые здесь буквы другого шрифта (рукописного) рассматриваются скорее как конкретные переменные и предикатные символы, чем как синтаксические имена для неопределенных переменных и формул.

*) Формулы $\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{A}(t)$ являются сукцедентными подформулами формулы

$$\forall_1 x(\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(x))\supset_4\mathcal{B}\vee_5\mathcal{D}$$

как антецедентной формулы не при всяком терме t. Они будут таковыми, только если t — переменная, не входящая свободно в $\forall_1 x(\mathcal{B}\,\&_2\,\mathcal{C}\supset_3\mathcal{A}(x))$. — *Прим. перев.*

$A \supset B$ или $\neg A$ *). Аналогично, с перестановкой слов «антецедент» и «сукцедент».)

Пример 3 (окончание). Для формулы $\forall_1 x(\mathscr{B} \&_2 \mathscr{C} \supset_3 \supset_3 \mathscr{A}(x)) \supset_4 \mathscr{B} \vee_5 \mathscr{D}$ в антецеденте конечной секвенции все применения логических правил, которые принадлежат $\supset_3$, должны быть применениями правила $\rightarrow\supset$, но не применениями правила $\supset\rightarrow$.

В дальнейшем мы иногда будем писать просто S вместо секвенции $\Gamma \rightarrow \Theta$. В этом случае S^- будет Γ и S^+ будет Θ. Далее, выражение «S пуста» означает, что Γ и Θ оба пусты. *Антецедентными (сукцедентными) подформулами* секвенции S являются антецедентные (соответственно сукцедентные) подформулы всех вхождений формул в S, т. е. вхождений в S^- как антецедентных формул и вхождений в S^+ как сукцедентных формул. Если через T обозначена другая секвенция $\Delta \rightarrow \Lambda$, то мы будем обозначать через «ST» *произведение* $\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda$ секвенций S и T и аналогично для большего числа сомножителей. Теперь верна [1])

Лемма 6. *Если S и T — секвенции, не содержащие общих предикатных символов (или, более общо, если антецедентные подформулы S не имеют общих формул с сукцедентными подформулами T и наоборот), то в любом доказательстве в системе G, обладающем свойством, полученным в лемме 4, с последней секвенцией ST или все формулы из S, или все формулы из T не прослеживаемы до аксиом.*

Доказательство. По предположению, в каждой аксиоме $C \rightarrow C$ из данного доказательства или обе формулы принадлежат S (т. е. вхождению формулы в S), или обе принадлежат T. Предположим (вопреки условию леммы), что в конечной секвенции ST некоторая формула из S и также некоторая формула из T прослеживаемы до аксиом. Тогда над конечной секвенцией должны найтись аксиомы обоих упомянутых видов, и среди секвенций, выше которых в доказательстве будут аксиомы обоих видов, найдется самая высокая. Эта секвенция будет заключением двухпосылочного правила, выше первой посылки которого будут только аксиомы первого вида, а выше другой посылки — второго вида. Однако в этом случае одна из боковых формул не будет прослеживаема до аксиом, так как иначе аксиомы будут одного и того же типа. Мы получили противоречие со свойством из леммы 4.

*) То есть в зависимости от того, входит ли этот логический символ положительно или отрицательно в E (см. Г. Е. Минц, Теорема Эрбрана, § 3, наст. сборник). — *Прим. перев.*

[1]) Для применения в части II второй статьи этого мемуара (см. следующую статью настоящего сборника. — *Прим. ред.*).

§ 3. Перестановка смежных применений логических правил

Мы будем изучать возможность перестановки применений логических правил в доказательстве в системе G. Например, в примере 1 применение, принадлежащее символу $\supset_3$ из конечной секвенции, ниже, чем применение, принадлежащее символу $\supset_2$; в примере 2 перестановка совершена таким образом, что первое применение стало выше второго.

В этой части мы начнем изучение с рассмотрения возможности перестановки в доказательстве с чистыми переменными двух применений, которые отделены друг от друга только применениями структурных правил. Два таких применения логических правил называем *смежными*. Затем в § 4 мы будем рассматривать перестройки всего доказательства, которые могут быть получены повторением таких перестановок.

Рассмотрим теперь два смежных применения логических правил. Пусть они принадлежат соответствующим вхождениям логических символов L_1 и L_2 в заключение самого нижнего из них. Для наших двух лемм о перестановочности будем предполагать, что эти вхождения символов находятся в разных вхождениях формул. Мы также используем «L_1» и «L_2» для обозначения любых применений правил, принадлежащих этим вхождениям символов.

Если самое нижнее (пусть это будет L_2) из двух данных применений правил L_1 и L_2 является применением двухпосылочного правила, то L_1 может стоять над любой из двух посылок L_2. В первой из лемм о перестановочности мы рассмотрим возможности для подъема этого L_2 над L_1, не считаясь с происхождением другой посылки (как аксиомы или как заключения применения правила вывода).

Чтобы сформулировать это, рассмотрим изолированно исследуемую часть доказательства. Она представляет собой вывод заключения L_2 из посылки (посылок) L_1 и из другой посылки L_2, если L_2 является применением двухпосылочного правила. В таком случае, говоря о *перестановке* двух применений правил L_1 и L_2, мы имеем в виду вставку вместо исследуемой части нового вывода ее последней секвенции из ее исходных секвенций, в котором L_2 (или несколько L_2) находятся над L_1. Если L_1 является применением двухпосылочного правила, то, вообще говоря, L_2 придется вставить над каждой посылкой [1]), и в том случае, когда L_2 является применением двухпосылочного

[1]) Исключения встречаются в шести интуиционистских случаях, указанных в конце доказательства леммы 7.

правила, вставка вызывает удвоение доказательства другой посылки L_2.

Будут рассматриваться различные случаи в соответствии с видом каждого из применений правил L_1 и L_2. Безразлично, какая из двух разновидностей правила $\& \rightarrow$ или из двух разновидностей правила $\rightarrow \vee$ рассматривается, и для классической системы несущественно, над какой из посылок двухпосылочного правила стоит L_1. Поэтому для классической системы мы имеем 144 случая. Для интуиционистской системы, когда L_2 является применением правила $\supset \rightarrow$, различается, над какой посылкой стоит L_1, мы увеличиваем число случаев до 156.

Лемма 7. *Рассмотрим в доказательстве в системе G два смежных применения логических правил L_1 и L_2 (L_1 расположено над L_2), принадлежащие различным вхождениям формул в заключение (самого нижнего) L_2. Предположим, что доказательство обладает свойством чистоты переменных и для случая интуиционистской системы обладает свойством, полученным в лемме 4*[1]). *Тогда эти два применения можно переставить (сохраняя свойство чистоты переменных), за исключением следующих случаев, которые задаются путем выписывания над чертой видов правил для L_1 и под чертой — для L_2 (4 исключения для классической системы и 15 для интуиционистской).*

Исключения для классической системы G: $\dfrac{\forall \rightarrow \text{ или } \rightarrow \exists}{\rightarrow \forall \text{ или } \exists \rightarrow}$.

Исключения для интуиционистской системы G: $\dfrac{\forall \rightarrow}{\rightarrow \forall}$,

$$\frac{\forall \rightarrow \text{ или } \rightarrow \exists}{\exists \rightarrow}, \qquad \frac{\supset \rightarrow \text{ или } \neg \rightarrow}{\rightarrow \supset \text{ или } \rightarrow \neg},$$

$$\frac{\rightarrow \supset,\ \supset \rightarrow,\ \rightarrow \&,\ \rightarrow \vee,\ \rightarrow \neg,\ \neg \rightarrow,\ \rightarrow \forall \text{ или } \rightarrow \exists}{\vee \rightarrow}.$$

Доказательство для классической системы *G*. 144 случая могут быть сгруппированы в соответствии с числом посылок L_1 и L_2.

1 посылка/1 посылка (81 случай). Данный вывод расположен слева, преобразованный вывод — справа (объяснения следуют ниже):

$$\begin{array}{cl} S_1\overline{S}_2T_1U_1 & \\ \hline S_2\overline{S}_2T_1U_1 & L_1 \\ \hline\hline S_2T_2U_2 & \\ \hline S_2T_3U_2 & L_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cl} S_1\overline{S}_2T_1U_1 & \\ \hline\hline S_1\overline{S}_2T_2U_2 & \\ \hline S_1\overline{S}_2T_3U_2 & L_2 \\ \hline S_2\overline{S}_2T_3U_2 & L_1 \\ \hline\hline S_2T_3U_2 & \end{array}.$$

[1]) Если мы в определении перестановки не исключаем возможность того, что данный вывод заменяется выводом, в котором из логических правил используется только L_1, то последнее предположение становится излишним.

Конечная секвенция данного вывода рассматривается как произведение трех секвенций: S_2, T_3 и U_2, где S_2 состоит из вхождения главной формулы применения L_1, T_3 является вхождением главной формулы применения L_2 и U_2 состоит из вхождений формул, добавочных для обоих применений логических правил. Боковые формулы применения L_1 обозначаются через S_1, а применения L_2 — через T_2. Двойная линия означает нуль или более применений структурных правил. $\overline{S}_2$ означает нуль или более вхождений главной формулы L_1, которые сокращаются с этой главной формулой при следующих за L_1 применениях структурных правил, в то время как T_1 переходит в T_2 и U_1 в U_2 в результате этих применений структурных правил. Новая фигура является выводом; мы сможем это доказать, проверив, что выполняются ограничения на переменные для применений правил $\rightarrow \forall$ или $\exists \rightarrow$. Предположим, что L_2 является применением правила $\rightarrow \forall$ или применением правила $\exists \rightarrow$. Тогда в данном выводе в силу ограничения на переменные для L_2 переменная b этого применения не может входить в заключение L_2 в данной фигуре. Таким образом*), $b \notin U_2$, также $b \notin S_2$ (следовательно, $b \notin \overline{S}_2$), и поэтому $b \in S_1$ только в случае, когда L_1 является применением правил $\rightarrow \forall$, $\forall \rightarrow$, $\rightarrow \exists$ или $\exists \rightarrow$. Но $(\forall \rightarrow$ или $\rightarrow \exists)/(\rightarrow \forall$ или $\exists \rightarrow)$ приведены в качестве исключений в формулировке леммы. Таким образом, мы должны рассмотреть только случаи $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$. Но в этих случаях переменная b применения L_1 не входит ниже ее посылки, так как данный вывод обладает свойством чистоты переменных, и, следовательно, она не может совпадать с переменной b применения L_2. Таким образом, ограничение на переменные выполняется и для нового применения L_2. Если L_1 является применением правила $\rightarrow \forall$ или применением правила $\exists \rightarrow$, то в силу того, что данный вывод обладает свойством чистоты переменных, ограничение на переменные выполняется и для нового L_1. Замена данного вывода новым выводом сохранит свойство чистоты переменных.

2 посылки/1 посылка (27 случаев).

$$\begin{array}{cl} S_1\overline{S}_2T_1U_1 \quad S\overline{S}_2T_1U_1 & \\ \hline S_2\overline{S}_2T_1U_1 & L_1 \\ \hline\hline S_2T_2U_2 & \\ \hline S_2T_3U_2 & L_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cl} \begin{array}{c} S_1\overline{S}_2T_1U_1 \\ \hline\hline S_1\overline{S}_2T_2U_2 \\ \hline S_1\overline{S}_2T_3U_2 \end{array} L_2 \quad \begin{array}{c} S\overline{S}_2T_1U_1 \\ \hline\hline S\overline{S}_2T_2U_2 \\ \hline S\overline{S}_2T_3U_2 \end{array} L_2 & \\ \hline S_2\overline{S}_2T_3U_2 & L_1 \\ \hline\hline S_2T_3U_2 & \end{array}$$

*) Здесь и ниже выражение $b \in S$ (выражение $b \notin S$) означает, что переменная b входит свободно (соответственно не входит свободно) в секвенцию S. — *Прим. перев.*

1 посылка/2 посылки (27 случаев).

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{S_1\overline{S}_2T_1U_1}{S_2\overline{S}_2T_1U_1}\,L_1 \\ \hline\hline S_2T_2U_2 \end{array} \quad S_2TU_2}{S_2T_3U_2}\,L_2 \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}S_1\overline{S}_2T_1U_1\\ \hline\hline S_1S_2\overline{S}_2T_2U_2\end{array} \quad \begin{array}{c}S_2TU_2\\ \hline\hline S_1S_2\overline{S}_2TU_2\end{array}}{S_1S_2\overline{S}_2T_3U_2}\,L_2}{S_2S_2\overline{S}_2T_3U_2}\,L_1 \\ \hline\hline S_2T_3U_2 \end{array}$$

Несущественно, стоит ли L_1 над левой посылкой применения L_2 (как показано) или над правой посылкой. Утончения используются для введения S_2 в первую посылку и $S_1\overline{S}_2$ во вторую посылку применения L_2 в новой фигуре.

2 посылки/2 посылки (9 случаев) *).

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{S_1\overline{S}_2T_1U_1 \quad S\overline{S}_2T_1U_1}{S_2\overline{S}_2T_1U_1}\,L_1 \\ \hline\hline S_2T_2U_2 \end{array} \quad S_2TU_2}{S_2T_3U_2}\,L_2$$

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}S_1\overline{S}_2T_1U_1\\ \hline\hline S_1S_2\overline{S}_2T_2U_2\end{array} \quad \begin{array}{c}S_2TU_2\\ \hline\hline S_1S_2\overline{S}_2TU_2\end{array}}{S_1S_2\overline{S}_2T_3U_2}\,L_2 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}S\overline{S}_2T_1U_1\\ \hline\hline SS_2\overline{S}_2T_2U_2\end{array} \quad \begin{array}{c}S_2TU_2\\ \hline\hline SS_2\overline{S}_2TU_2\end{array}}{SS_2\overline{S}_2T_3U_2}\,L_2}{S_2S_2\overline{S}_2T_3U_2}\,L_1 \\ \hline\hline S_2T_3U_2 \end{array}$$

Доказательство для интуиционистской системы G.

1 посылка/1 посылка (81 случай). Мы преобразуем данный вывод, как в случае классической системы G, и заметим, что ограничение на переменные выполняется для $\rightarrow\forall$ и $\exists\rightarrow$, за исключением случаев $\forall\rightarrow/\rightarrow\forall$, $\rightarrow\exists/\rightarrow\forall$, $\forall\rightarrow/\exists\rightarrow$ и $\rightarrow\exists/\exists\rightarrow$; но здесь мы можем вычеркнуть случай $\rightarrow\exists/\rightarrow\forall$ из списка исключений, потому что по лемме 1 этот случай не может иметь места для интуиционистской системы G. Теперь мы должны проверить, что применения правил $\rightarrow$У и $\rightarrow\neg$ в преобразованной фигуре удовлетворяют интуиционистскому ограничению: список Θ является пустым. По нашему предположению, утончения входят только так, как указано в лемме 4. Поэтому применения правила $\rightarrow$У могут входить в данный вывод в переходах от T_1 к T_2 только в случае, когда L_2 является применением правила $\rightarrow\supset$ и в T_1 не хватает второй боковой формулы B (но не первой боковой формулы A). В этом случае из-за того, что в этом применении правила $\rightarrow$У в данной фигуре выполняется интуиционистское ограничение, S_2^+ (и, следовательно, $\overline{S}_2^+$) и U_2^+ пусты[1]). Далее (поскольку S_2^+ пуст), S_1^+ пуст, за исключением случая, когда L_1 является применением правила $\neg\rightarrow$. Таким образом, во всех случаях, кроме случая $\neg\rightarrow/\rightarrow\supset$, приведенного в лемме 7 в качестве исключения, структурные переходы $T_1//T_2$ допустимы в новой фигуре. По лемме 4 утончение не входит в переходы $U_1//U_2$. Оно также не входит в переходы $S_2\overline{S}_2//S_2$, которые состоят только из сокращений. Теперь предположим, что L_2 является применением правила $\rightarrow\neg$. Тогда в данной фигуре S_2^+ (и, следовательно, $\overline{S}_2^+$) и U_2^+ пусты. Затем (поскольку S_2^+ пуст) S_1^+ пуст, за исключением случая, когда L_1 является применением правила $\neg\rightarrow$. Таким образом, во всех случаях, кроме случая $\neg\rightarrow/\rightarrow\neg$, приведенного в качестве исключения, L_2 допустимо в новой фигуре. Аналогично, если L_1 является применением правила $\rightarrow\neg$, то $\overline{S}_2^+$ пуст и (по лемме 1, поскольку S_2^+ не пуст) T_3^+ и U_2^+ пусты. Таким образом, L_1 допустимо в новой фигуре.

2 посылки/1 посылка (27 случаев), 1 посылка/2 посылки (36 случаев), 2 посылки/2 посылки (12 случаев). Аналогично мы можем оправдать интуиционистски классическое преобразование, за исключением случая, когда используется правило $\supset\rightarrow$. В этом случае требуются изменения. В качестве примера мы рассмотрим случай применения правила $\neg\rightarrow$ над правой посылкой $\supset\rightarrow$.

$$\dfrac{\neg A,\ \Gamma\rightarrow P \qquad \begin{array}{c} \dfrac{Q,\ \overline{Q},\ \overline{\neg A},\ \Gamma_1\rightarrow A}{Q,\ \overline{Q},\ \neg A,\ \overline{\neg A},\ \Gamma_1\rightarrow}\,\neg\rightarrow \\ \hline\hline Q,\ \neg A,\ \Gamma\rightarrow \end{array}}{P\supset Q,\ \neg A,\ \Gamma\rightarrow}\,\supset\rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg A,\ \Gamma\rightarrow P\\ \hline\hline \neg A,\ \overline{\neg A},\ \Gamma\rightarrow P\end{array} \quad \begin{array}{c}Q,\ \overline{Q},\ \overline{\neg A},\ \Gamma_1\rightarrow A\\ \hline\hline Q,\ \neg A,\ \overline{\neg A},\ \Gamma\rightarrow A\end{array}}{P\supset Q,\ \neg A,\ \overline{\neg A},\ \Gamma\rightarrow A}\,\supset\rightarrow}{P\supset Q,\ \neg A,\ \neg A,\ \overline{\neg A},\ \Gamma\rightarrow}\,\neg\rightarrow \\ \hline\hline P\supset Q,\ \neg A,\ \Gamma\rightarrow \end{array}$$

Согласно лемме 4 список Θ данного применения правила $\supset\rightarrow$ пуст, и формула Q должна входить в заключение данного применения правила $\neg\rightarrow$. В случаях $\supset\rightarrow$ над $\rightarrow\&$, $\rightarrow\vee$, $\neg\rightarrow$, $\rightarrow\forall$, $\rightarrow\exists$ или над левой посылкой $\supset\rightarrow$ новый вывод имеет L_2 только над правой посылкой L_1.

В следующей лемме мы рассматриваем дополнительные возможности в интуиционистской системе G для подъема L_2 над L_1,

*) Здесь и ниже сначала приводится данный вывод, а затем — преобразованный. — *Прим. перев.*

[1]) Здесь и ниже используются обозначения, введенные непосредственно перед леммой 6.

которые получаются благодаря введению в рассмотрение применений правил (с возможным введением структурных правил), ведущих к другой посылке применения L_2, и благодаря попыткам подъема L_2 не только над L_1, но и одновременно над этими другими применениями правил. В соответствии с этим теперь *перестановка* будет обозначать замену части данного доказательства, начинающейся с обеих посылок данного L_1 и с посылок другого рассматриваемого применения правила и кончающейся заключением применения L_2, где, кроме того, в одном случае должна быть произведена подстановка в посылке этого другого применения правила и выше (т. е. во всю часть доказательства над посылкой).

Лемма 8. *Перестановка применений логических правил L_1/L_2 (сохраняющая свойство чистоты переменных) возможна в интуиционистской системе G в случаях*

$$\frac{\rightarrow\supset,\ \rightarrow\&,\ \rightarrow\neg \text{ или } \rightarrow\forall}{\vee\rightarrow},$$

где в дополнение к обстоятельствам, описанным в лемме 7, над другой посылкой L_2 применяется любое из следующих правил (эти применения отделены от L_2 только применениями структурных правил и мы включаем их в перестановку): (a) $\rightarrow$У *с главной формулой применения L_1 в качестве C*; (b) *еще одно применение L_1 при условии, что в случае $\rightarrow\forall$ мы, кроме того, повсюду в доказательстве второго $\rightarrow\forall$ подставим вместо переменной b этого применения переменную b первого применения.*

Доказательство: ($\rightarrow\forall$ и $\rightarrow\forall$)/$\vee\rightarrow$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P,\overline{P},\Gamma_1\rightarrow A(b)}{P,\overline{P},\Gamma_1\rightarrow\forall xA(x)}\rightarrow\forall}{P,\Gamma\rightarrow\forall xA(x)}\qquad\dfrac{\dfrac{Q,\overline{Q},\Gamma_2\rightarrow A(c)}{Q,\overline{Q},\Gamma_2\rightarrow\forall xA(x)}\rightarrow\forall}{Q,\Gamma\rightarrow\forall xA(x)}}{P\vee Q,\Gamma\rightarrow\forall xA(x)}\vee\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P,\overline{P},\Gamma_1\rightarrow A(b)}{P,\Gamma\rightarrow A(b)}\qquad\dfrac{Q,\overline{Q},\Gamma_2\rightarrow A(b)}{Q,\Gamma\rightarrow A(b)}}{P\vee Q,\Gamma\rightarrow A(b)}\vee\rightarrow}{P\vee Q,\Gamma\rightarrow\forall xA(x)}\rightarrow\forall$$

В силу леммы 2 и свойства чистоты переменных всего доказательства подстановка переменной b вместо переменной c в доказательстве с чистыми переменными секвенции $Q, \overline{Q}, \Gamma_2\rightarrow A(c)$ дает доказательство с чистыми переменными секвенции $Q, \overline{Q}, \Gamma_2\rightarrow A(b)$. Если мы заменим данный вывод новым, одновременно произведя эту подстановку, то свойство чистоты переменных всего доказательства сохранится. ($\rightarrow\forall$ и $\rightarrow$У)/$\vee\rightarrow$. Мы получим фигуры для этого случая, если изменим две приведенные выше фигуры так, чтобы правые посылки каждого применения правила $\vee\rightarrow$ получались утончениями из секвенции $Q, \Gamma_2\rightarrow$.

Лемма 9. *По данному доказательству в системе G можно найти другое доказательство с той же самой последней секвенцией, в любой аксиоме $C\rightarrow C$ которого формула C является элементарной. Это можно сделать, сохранив свойство чистоты переменных и свойство, описанное в лемме 4 (если доказательство ими обладало).*

Доказательство. При использовании индукции нам нужно только доказать, что данная аксиома, содержащая логические символы, может быть выведена из другой (или других) аксиом, имеющих меньше вхождений логических символов. Генцен сделал это для кванторов; это можно сделать аналогичным методом и для пропозициональных связей, например,

$$A\supset B\rightarrow A\supset B,\qquad \dfrac{\dfrac{A\rightarrow A\qquad \dfrac{B\rightarrow B}{A,\ B\rightarrow B}}{A,(A\supset B)\rightarrow B}\supset\rightarrow}{A\supset B\rightarrow A\supset B}\rightarrow\supset$$

§ 4. Перестановочность применений логических правил

Предполагается, что теорема о перестановочности, которую мы установим ниже, будет полезна в тех случаях, когда мы изучаем возможность построения доказательства в G определенной секвенции $\Delta\rightarrow\Lambda$ или некоторой секвенции $\Delta\rightarrow\Lambda$ определенного вида. Может оказаться, что наше исследование упростится, если мы сможем предполагать, что применения в этом доказательстве логических правил, принадлежащие некоторым вхождениям логических символов в конечную секвенцию $\Delta\rightarrow\Lambda$ (пусть эти вхождения логических символов составляют класс C_1), стоят самыми верхними в доказательстве, в то время как их взаимное расположение безразлично; применения логических правил, принадлежащие некоторым другим вхождениям логических символов (составляющим класс C_2), идут следующими и т. д. Теорема дает условия, при которых, если существует какое-нибудь доказательство секвенции $\Delta\rightarrow\Lambda$, существует и такое ее доказательство, которое удовлетворяет указанному предположению.

Теорема 2. *Пусть $\Delta\rightarrow\Lambda$ — какая-нибудь секвенция, в которую никакая переменная не входит и свободно и связанно. Выберем классификацию вхождений логических символов в $\Delta\rightarrow\Lambda$ на k классов $C_1, \ldots, C_k$ (будем говорить, что C_i «выше», чем C_j, если $i<j$), которая удовлетворяет следующим двум ограничениям*:

(a) *Если L_1 — вхождение логического символа, находящееся внутри области действия вхождения L_2, то L_1 находится в том же самом или в более высоком классе, чем L_2.*

(b) *Если L_1/L_2 входит в приведенный ниже список исключенных пар правил, то L_1 находится в том же самом или в более высоком классе, чем L_2 (если только L_2 не находится в области действия L_1). (Здесь «L_1» и «L_2» обозначают не только применения правил, но и виды правил, применения которых принадлежат вхождениям соответствующих логических символов L_1 и L_2.)*

Исключения для классической системы G: $\dfrac{\forall\to \text{ или } \to\exists}{\to\forall \text{ или } \exists\to}$.

Исключения для интуиционистской системы G: $\dfrac{\forall\to}{\to\forall}$ $\dfrac{\forall\to \text{ или } \to\exists}{\exists\to}$,

$$\frac{\supset\to \text{ или } \neg\to}{\to\supset \text{ или } \to\neg}, \quad \frac{\supset\to,\ \to\vee,\ \neg\to \text{ или } \to\exists}{\vee\to}.$$

Предположим, что дано доказательство с чистыми переменными[1]) *секвенции $\Delta\to\Lambda$ в G, обладающее свойством, описанным в лемме 4. Тогда применения логических правил в этом доказательстве можно переставить (не изменяя конечной секвенции и сохраняя свойство чистоты переменных и свойство, описанное в лемме 4, а также свойство из леммы 9, если оно имелось) так, что для любых двух классов C_i и C_j с $i<j$ во всякой ветви доказательства применения логических правил, принадлежащие вхождениям логических символов из более высокого класса C_i, будут выше применений логических правил, принадлежащих вхождениям логических символов из более низкого класса C_j.*

Пример 4. Чтобы получить генценовскую обобщенную основную теорему, рассмотрим классическую систему G; пусть формулы Δ, Λ находятся в предваренной форме и не содержат никакой переменной и свободно и связанно; и пусть $k=2$ с C_1, состоящим из всех пропозициональных связок в $\Delta\to\Lambda$, и C_2 — из всех кванторов. Поскольку формулы предваренные, то ограничение (a) выполнено. Так как система — классическая G, то выполнено и ограничение (b). Теперь предположим, что дано доказательство с чистыми переменными секвенции $\Delta\to\Lambda$ в системе G; применяя леммы 4 и 9, получаем доказательство, обладающее свойствами из этих лемм. Затем, применяя только что сформулированную теорему, это доказательство можно перестроить так, чтобы все применения пропозициональных правил были выше всех применений предикатных правил. Кроме того, в силу свойств, описанных в леммах 4 и 9, окончательное доказательство должно содержать ниже применений пропозициональных правил секвенцию без кванторов, называемую «средней секвенцией». Мы видим теперь, что обобщенная основная теорема имеет место также для интуиционистской системы для случая, когда данное доказательство секвенции $\Delta\to\Lambda$ не содержит пар L_1/L_2 вида $\to\exists/\vee\to$.

[1]) Но если имеется какое-нибудь доказательство в G секвенции $\Delta\to\Lambda$, то согласно сноске [1]) на стр. 213, найдется и доказательство с чистыми переменными.

Доказательство теоремы для классической системы G. *Степенью* данного доказательства секвенции $\Delta\to\Lambda$ будем называть число таких применений логических правил L_2, выше которых имеются применения логических правил L_1, которые «должны быть» ниже, т. е. L_1 выше L_2, но L_1 принадлежит более низкому классу, чем L_2. Мы доказываем теорему индукцией по степени. Если данное доказательство имеет степень 0, то оно уже обладает желаемым свойством. Если степень равна $d+1$, то должно найтись по крайней мере одно наивысшее L_2, т. е. такое, что над ним нет другого такого L_2. Тогда мы можем следующим образом выполнить (один или) два шага так, чтобы получить новое доказательство секвенции $\Delta\to\Lambda$ со степенью d или меньше. Во-первых, по приводимой ниже лемме мы можем заменить доказательство заключения этого самого высокого из таких L_2 (как часть доказательства в целом) другим доказательством, в котором уже нет таких L_2 и которое содержит только применения логических правил, принадлежащие тем же вхождениям логических символов в $\Delta\to\Lambda$, которым принадлежат применения правил в заменяемом доказательстве. Во-вторых (если необходимо), мы можем восстановить свойство из леммы 4; для этого не нужно никаких перестановок или повторений применений логических правил, а нужны разве лишь вычеркивания. После этого, по индукционному предположению, применения логических правил можно переставить в желаемом порядке.

Лемма 10. *Если дано доказательство в G (как часть доказательства, описанного в теореме), в котором только самое нижнее применение правила L_2, возможно, имеет выше себя некоторое L_1, которое должно быть ниже, то можно найти доказательство в G той же самой секвенции, в котором все применения правил будут расположены в желаемом порядке и которое содержит только применения правил, принадлежащие тем же самым вхождениям символов в $\Delta\to\Lambda$, что и в данном доказательстве (и такое, что замена этого доказательства, как части доказательства в целом, сохраняет свойство чистоты переменных последнего, а также и свойство из леммы 9, если оно имелось).*

Доказательство леммы для классической системы G. Назовем *рангом* данного доказательства число применений логических правил L_1, находящихся над L_2, которые должны быть ниже L_2. Мы доказываем лемму индукцией по рангу. Если ранг равен $g+1$, то рассмотрим самое нижнее из тех L_1, которые находятся над L_2, а должны быть ниже него. По условию леммы, относящемуся к L_2, это применение смежно с L_2. Согласно ограничению (a) из теоремы, эти L_1 и L_2 должны принадлежать различным формулам в заключении. В силу (b) теперь исключены все пары L_1/L_2, которые были исключены в лемме 7. Поэтому по лемме 7 применения правил L_1 и L_2 могут быть переставлены и тогда можно восстановить свойство из леммы 4, после чего часть (или каждая часть) доказательства; заканчивающегося заключением нового L_2 или любого из новых L_2, удовлетворяет условиям леммы с рангом g или меньше. Таким образом, в силу предположения индукции по рангу, все применения правил можно переставить в желаемом порядке в этой части (этих частях), который будет также желаемым порядком в доказательстве конечной секвенции первоначального L_2.

Доказательство теоремы для интуиционистской системы G. Сперва мы применим лемму 9 к данному доказательству, после чего мы могли бы рассуждать как и раньше, если бы не четыре случая ($\to\supset$, $\to\&$, $\to\neg$ или $\to\forall$)/$\vee\to$, которые упоминались как исключения в лемме 7, но не в теореме. Допустим, что при индукционном шаге в доказательстве леммы 10 L_1 проведенного выше рассмотрения расположено над первой посылкой L_2 (когда L_2 — применение правила $\vee\to$ и L_1 — применение одного из правил $\to\supset$, $\to\&$, $\to\neg$ или $\to\forall$). Теперь в силу последнего утверждения леммы 4 главная формула применения L_1 или должна вводиться во вторую посылку L_2 утончением (случай 1) или должна быть прослеживаема до аксиом (случай 2). В случае 1 по лемме 8 применения правил можно переставить, уменьшая тем самым ранг. В случае 2 в силу свойства из леммы 9 над второй посылкой должны найтись некоторые L_1, которые участвуют в преобразовании элементарных формул C из аксиом в рассматриваемую главную формулу. Далее, самым нижним применением правила над второй посылкой L_2 может быть L_1 (случай 2.1) или применение другого правила L_1' (случай 2.2). В случае 2.1, снова используя лемму 8, эти применения правил можно переставить, уменьшая тем самым ранг. В случае 2.2 L_1' должно принадлежать тому же самому или более низкому классу, чем L_1, иначе мы получили бы противоречие с выбором L_2, как самого высокого из тех применений правил, которые имеют выше себя какое-нибудь применение, которое должно быть ниже. Тогда мы можем уменьшить ранг, переставив L_1' с L_2 (случай 2.2.1), кроме случая, когда L_1' является применением одного из пра-

вил $\to\supset$, $\to\&$, $\to\neg$ или $\to\forall$ и его главная формула в первой посылке прослеживаема до аксиом (случай 2.2.2), так что из соображений симметрии выше того L_1, которое стоит непосредственно над первой посылкой, имеются применения L_1', откуда следует, что L_1 принадлежит тому же самому или более высокому классу, чем L_1', т. е. что L_1 и L_1' — различные применения правил, принадлежащие одному и тому же классу. Таким образом, нам удалось уменьшить ранг, за исключением случая 2.2.2.

Лемма 11. *Доказываемая теорема справедлива для доказательств в интуиционистской системе G, в которых нет двух различных применений правил L_1 и L_1', принадлежащих одному и тому же классу, каждое из которых является применением одного из правил $\to\supset$, $\to\&$, $\to\neg$ или $\to\forall$ и стоит выше некоторого применения правила $\vee\to$ (оно играет роль L_2), ниже которого оно должно быть.*

Теперь мы используем эту лемму, чтобы рассмотреть случай 2.2.2. Рассмотрим доказательство второй посылки L_2 (самое низкое применение логического правила в нем обозначим через L_1'). Пусть $C_1', \ldots, C_\chi' (\chi \leqslant k)$ получаются из $C_1, \ldots, C_k$ путем вычеркивания тех вхождений логических символов, которые не встречаются в этой второй посылке*); оба L_1 и L_1' принадлежат самому низкому C_χ' из этих классов. Теперь удалим L_1 из C_χ', отнеся его еще к более низкому классу. Ограничение (a) теоремы выполнено, так как L_1 — внешний логический символ некоторой формулы из конечной секвенции рассматриваемого в данный момент доказательства; и (b) выполнено, так как L_1 является применением одного из правил $\to\supset$, $\to\&$, $\to\neg$ или $\to\forall$, которые не могут быть верхними членами ни одной из исключенных в теореме пар применений правил. Итак, лемма 11 применима, и доказательство (второй посылки L_2 для шага индукции в доказательстве леммы 10 в общем случае) можно перестроить, перенеся L_1 вниз, после чего вместо случая 2.2.2 применяется случай 2.1.

Этим заканчивается доказательство леммы 10 и теоремы.

Иногда бывает возможна перестановка применений правил, которая не удовлетворяет ограничениям теоремы. Так, пример 2 является результатом перестройки примера 1, в котором мы поставили $\to\supset$ выше $\supset\to$ в интуиционистской системе,

*) Точнее, каждый класс $C_j' (j \leqslant \chi)$ состоит из вхождений логических символов во вторую посылку, принадлежащих вхождениям из некоторого класса $C_i (i \leqslant k)$. — *Прим. ред.*

несмотря на то, что $\supset\to/\to\supset$ является одним из исключений в пункте (b) теоремы 2 [1]).

Легко оценить, до какой степени необходимо ограничение (a). Пусть L_1 входит в область действия L_2 в конечной секвенции. Тогда для каждого применения правил L_1 в доказательстве можно найти ниже него единственное применение правила L_2 такое, что это L_1 принадлежит главной формуле в заключении этого L_2; мы говорим, что это конкретное L_1 принадлежит рассматриваемому L_2. Если в какой-нибудь паре L_1/L_2 применение правила L_1 принадлежит не этому L_2 (а некоторому другому L_2), то L_1 и L_2 из этой пары принадлежат различным формулам в заключении L_2 (хотя в результате некоторого сокращения, находящегося ниже L_2, они принадлежат одной и той же формуле в конечной секвенции); таким образом, применимы леммы 7 и 8 (или мы можем применить теорему 2 к доказательству заключения L_2, вместо того, чтобы применять ее к доказательству в целом [2])).

Лемма 12. *Доказательство в G можно перестроить, передвигая вниз сокращения (а также утончения) (без изменения конечной секвенции, без нарушения свойства чистоты переменных и свойства из леммы* 9, *если доказательство этим свойством обладало, и, за исключением повторений и вычеркиваний участков вывода, без изменения порядка применений логических правил, принадлежащих вхождениям различных логических символов в конечной секвенции, и поэтому без нарушения свойства теоремы* 2, *если доказательство этим свойством обладало*) *так, что доказательство обладало бы свойством из леммы* 4 *и сокращения входили бы в него только как применения правил, непосредственно предшествующие* *): (a) *конечной секвенции*, (b)

[1]) $\supset\to/\to\supset$ может быть переставлено в интуиционистской системе, когда первая боковая формула $\to\supset$ вводится утончением; $\neg\to/\vee\to$ — когда Θ применения правила $\vee\to$ пусто; $\supset\to/\vee\to$ — когда Θ применения правила $\vee\to$ или пусто или вводится в другую посылку утончением; ($\neg\to$ и $\neg\to$)/$\vee\to$; ($\supset\to$ и $\supset\to$)/$\vee\to$ [в двух последних случаях имеется в виду, что главные формулы применений правил, примыкающих к посылкам рассматриваемого $\vee\to$, совпадают. — *Прим. ред.*];

$$(\to\vee \text{ и } \to У)/\vee\to;\ (\to\exists \text{ и } \to У)/\vee\to;\ (\to\vee \text{ и } \to\vee)/\vee\to,$$

когда боковые формулы применений правил $\to\vee$ совпадают; $\forall\to/\to\forall$ (для классической и для интуиционистской системы), когда терм t применения правила $\forall\to$ не содержит переменной b применения правила $\to\forall$ и аналогично $\forall\to/\exists\to$, $\to\exists/\exists\to$ и (для классической системы) $\to\exists/\to\forall$.

[2]) Лемма 12 дополняет это рассмотрение, но не требуется ни для теоремы 3, ни для следующей статьи.

*) Когда мы говорим, что сокращение «непосредственно предшествует» некоторой секвенции или «вводит» некоторое вхождение формулы в эту секвенцию, мы подразумеваем, что между этим сокращением и указанной секвенцией расположены разве лишь утончения и другие сокращения. — *Прим. перев.*

применению правила $\exists\to$ *или для классической системы* $\to\forall$, *для которого формула C сокращения является боковой формулой, или* (c) *для интуиционистской системы или* $\to\neg$, *для которого формула C сокращения — боковая формула, или* $\to\supset$, *для которого формула C сокращения является первой боковой формулой.*

Доказательство. Поступаем, как в доказательстве леммы 4, но делаем следующие дополнительные перестройки в случае 4, когда самое нижнее применение правила — это применение логического правила L и сокращения (помимо возможных утончений) непосредственно предшествуют ему.

После перенесения утончений, не имеющих вида (b) и (c) из леммы 4, вниз через L, мы опустим вниз также все такие сокращения, формулы C которых принадлежат одной из дополнительных формул Γ и Θ из L. При этом пара сокращений с одним и тем же C, принадлежащих соответствующим формулам в Γ (или в Θ) из соответствующих посылок применения двухпосылочного правила, переносится вниз и переходит в одно сокращение ниже L. Для того чтобы перенести вниз сокращение, находящееся над одной из посылок, для которого нет такого парного сокращения над другой посылкой, требуется утончение (которое подпадает под пункт (c) из леммы 4), чтобы ввести дубликат C в другую посылку (за исключением случая Θ интуиционистского $\supset\to$).

Остается рассмотреть сокращения, в которых C — боковая формула применения L, когда L отлично от $\exists\to$ и $\to\forall$, и для интуиционистской системы от $\to\neg$ и $\to\supset$ (для этих случаев сокращения боковой формулы применения L подпадают под пункт (b) или (c) данной леммы). Мы покажем с помощью индукции по числу таких сокращений, что вывод, состоящий из них с последующими утончениями и L, можно преобразовать (сохраняя свойство из леммы 4) в вывод, состоящий из ряда применений правила L и уточнений, с последующими сокращениями главной формулы применения L в качестве формулы C.

Если имеется $n+1$ таких сокращений, то рассмотрим самое низкое (или любое из самых низких) из них. Если оно отделено от L утончениями, то мы можем перенести его вниз через утончения так, чтобы оно стало непосредственно над L. Тогда это сокращение можно перенести ниже L, которое в результате этого процесса превратится в два L, как мы иллюстрируем теперь для типичных случаев, записывая данный вывод слева и (первый) новый вывод справа.

$$\dfrac{\dfrac{A,\ A,\ \Gamma\to\Theta}{A,\ \Gamma\to\Theta}\ C\to}{A\,\&\,B,\ \Gamma\to\Theta}\ \&\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A,\ A,\ \Gamma\to\Theta}{A\,\&\,B,\ A,\ \Gamma\to\Theta}\ \&\to}{A\,\&\,B,\ A\,\&\,B,\ \Gamma\to\Theta}\ \&\to}{A\,\&\,B,\ \Gamma\to\Theta}\ C\to.$$

Следующая иллюстрация — только для классической системы G; $\to$У в новой фигуре подпадает под пункт (b) леммы 4.

$$\cfrac{\cfrac{A,\ A,\ \Gamma\to\Theta,\ B}{A,\ \Gamma\to\Theta,\ B}\ C\to}{\Gamma\to\Theta,\ A\supset B}\ \to\supset \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A,\ A,\ \Gamma\to\Theta,\ B}{A,\ \Gamma\to\Theta,\ A\supset B}\ \to\supset}{A,\ \Gamma\to\Theta,\ A\supset B,\ B}\ \to У}{\Gamma\to\Theta,\ A\supset B,\ A\supset B}\ \to\supset}{\Gamma\to\Theta,\ A\supset B}\ \to C.$$

В следующей иллюстрации применения правила У$\to$ подпадают под пункт (c) леммы 4.

$$\cfrac{\cfrac{A,\ A,\ \Gamma\to\Theta}{A,\ \Gamma\to\Theta}\ C\to \qquad B,\ \Gamma\to\Theta}{A\vee B,\ \Gamma\to\Theta}\ \vee\to$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A,\ A,\ \Gamma\to\Theta \qquad \cfrac{B,\ \Gamma\to\Theta}{B,\ A,\ \Gamma\to\Theta}\ У\to}{A\vee B,\ A,\ \Gamma\to\Theta}\ \vee\to \qquad \cfrac{B,\ \Gamma\to\Theta}{A\vee B,\ B,\ \Gamma\to\Theta}\ У\to}{A\vee B,\ A\vee B,\ \Gamma\to\Theta}\ \vee\to}{A\vee B,\ \Gamma\to\Theta}\ C\to.$$

Для $n=0$ все уже сделано. Если $n>0$, то в первых двух иллюстрациях по индукционному предположению мы можем перенести n сокращений (считая, что каждое из C является боковой формулой нового верхнего L) вниз через верхнее из новых L (которое в результате этого процесса превратится в группу применений L) так, что они оказываются над следующим из (первых) новых L (самое большее с утончениями между ними). Тогда их формулы C являются главными формулами более высоких применений правил L (т. е. применений правил L, заменивших верхнее L в первом новом выводе) и одновременно являются добавочными формулами более низких новых применений L; поэтому их также можно перенести вниз. В третьей иллюстрации предположим, что $n=n_1+n_2$, где n_1+1 — число сокращений боковой формулы B первоначального L. В (первом) новом выводе верхнее новое L имеет $n_1+n_2=n$ сокращений над собой; таким образом, по индукционному предположению они могут быть перенесены ниже L (которое переходит в группу новых L) и затем, как сокращения добавочных формул, их можно перенести ниже следующего L (которое остается одиночным L). После этого вывод нижнего L имеет $n_2<n$ сокращений над собой (над его первой посылкой нет сокращений); таким образом, по индукционному предположению эти сокращения можно перенести ниже этого L (которое переходит в группу L).

Т е о р е м а 3. *Теорема 2, вообще говоря, становится неверной, если опущено ограничение* (a) *или один из случаев ограничения* (b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как любое применение правила, принадлежащее вхождению L_1, расположенному внутри области действия вхождения L_2, принадлежит применению правила L_2, расположенному ниже него, то контрпример для теоремы без (a) обеспечивается любой доказуемой секвенцией, которая не может быть доказана применением только таких правил, которые принадлежат верхним логическим символам ее формул, например [1]) $\to\mathcal{A}\supset\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$.

Контрпримеры для каждой пары правил, помещенной в (b), приведены ниже. В каждом случае легко построить доказательство в G с применением правил рассматриваемых видов в указанном порядке; то же справедливо относительно недоказуемости с применениями рассматриваемых правил в обратном порядке. Удобный путь доказать последнее — использовать систему $G3$ генценовского типа из работы К л и н и [22], § 80, указанным там методом. Тем не менее, для иллюстрации мы рассмотрим первый контрпример без использования $G3$.

И н т у и ц и о н и с т с к о е (а с л е д о в а т е л ь н о, к л а с с и ч е с к о е) д о к а з а т е л ь с т в о $\forall x\mathcal{A}(x)\to\forall x(\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B})$ с $\forall\to$ н а д $\to\forall$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(b)\vee\mathcal{B}}\ \to\vee}{\forall x\mathcal{A}(x)\to\mathcal{A}(b)\vee\mathcal{B}}\ \forall\to}{\forall x\mathcal{A}(x)\to\forall x(\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B})}\ \to\forall$$

Д о к а з а т е л ь с т в о к л а с с и ч е с к о й (а с л е д о в а т е л ь н о, и н т у и ц и о н и с т с к о й) н е д о к а з у е м о с т и $\forall x\mathcal{A}(x)\to\forall x(\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B})$ с $\to\forall$ н а д $\forall\to$. Если читать вверх от предложенной конечной секвенции, то всякая последовательность применений правил $\forall\to$ и применений структурных правил ведет к секвенции, в которую входят в антецеденте только $\forall x\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{A}(t)$ с различными термами t и в сукцеденте только $\forall x(\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B})$. Тогда применения правил $\to\forall$, $\to\vee$ и применения структурных правил, которые будут использованы выше этого, могут ввести в сукцедент также вхождения формул $\mathcal{A}(b)\vee\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(b)$ и $\mathcal{B}$ для различных переменных b (без расширения класса формул, входящих в антецедент). Однако ввиду ограничения на переменные для $\to\forall$ каждое применение правила (если читать его снизу вверх) сохраняет следующее свойство секвенции: никакая свободная переменная из сукцедента не входит ни в какой терм t в антецеденте. Таким образом, нельзя достигнуть аксиом, так как ни одна из $\mathcal{A}(t)$ в антецеденте не может совпадать ни с одной $\mathcal{A}(b)$ в сукцеденте, и

---

[1]) См. сноску на стр. 219.

очевидно, что все другие пары формул, первые члены которых могут встретиться в антецеденте, а вторые в сукцеденте, различны.

Исключения как для классической, так и для интуиционистской систем:

$$\begin{array}{ll}
\forall\to/\to\forall & \forall x\mathcal{A}(x)\to\forall x(\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B}) \\
\forall\to/\exists\to & \forall x\mathcal{A}(x),\ \exists x\neg\mathcal{A}(x)\to \\
\to\exists/\exists\to & \exists x(\mathcal{A}(x)\,\&\,\mathcal{B})\to\exists x\mathcal{A}(x).
\end{array}$$

Исключения только для классической системы:

$$\begin{array}{ll}
\to\exists/\to\forall & \to\exists x\mathcal{A}(x),\quad \forall x\neg\mathcal{A}(x).
\end{array}$$

Исключения только для интуиционистской системы:

$$\begin{array}{ll}
\supset\to/\to\supset & \mathcal{A}\supset\neg\mathcal{A}\to\mathcal{A}\supset\mathcal{B} \\
\neg\to/\to\supset & \neg\mathcal{A}\to\mathcal{A}\supset\mathcal{B} \\
\supset\to/\to\neg & \mathcal{A}\supset\neg\mathcal{A}\to\neg\mathcal{A} \\
\neg\to/\to\neg & \neg\mathcal{A}\to\neg(\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{A}) \\
\supset\to/\vee\to & \mathcal{A}\vee\mathcal{B},\ \mathcal{A}\supset\mathcal{B}\to\mathcal{B} \\
\to\vee/\vee\to & \mathcal{A}\vee\mathcal{B}\to\mathcal{B}\vee\mathcal{A} \\
\neg\to/\vee\to & \mathcal{A}\vee\mathcal{B},\ \neg\mathcal{A}\to\mathcal{B} \\
\to\exists/\vee\to & \mathcal{A}(a)\vee\mathcal{A}(b)\to\exists x\mathcal{A}(x)\ ^{1)}.
\end{array}$$

Невозможно, вообще говоря, переставить применение правила L_2 выше другого L_1, если (a) и (b) из теоремы 2 выполняются только для этой пары L_1/L_2. Контрпример $\forall x\mathcal{A}(x)$, $\neg\forall x(\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B})\to$ может быть доказан с $\forall\to$ над $\neg\to$, но не с $\neg\to$ над $\forall\to$.

[1]) Этот пример был дан в работе [22], § 79 (пример 1) в качестве контрпримера к генценовской обобщенной основной теореме для интуиционистской системы.

КОНЕЧНАЯ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ ТЕОРИЙ В ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ С ПОМОЩЬЮ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ СИМВОЛОВ [1])

С. К. Клини

В любом формальном символизме или символическом предметном языке имеется специальный класс объектов, называемых («правильно построенными» или «синтаксически построенными») *формулами*. Относительно определенного списка символов формулы должны быть описаны «конструктивно», т. е. так, чтобы для любой данной конечной последовательности символов можно было решить, является ли эта последовательность формулой. Если символизм имеет интерпретацию, то формулы суть формальные объекты, выражающие предложения или предикаты.

Формальная система (или «символическая логика», или «логистическая система») с данным символизмом получается, если, кроме того, заданы непустой класс формул, называемых *аксиомами*, и отношение между одной или несколькими формулами и другой формулой, причем последняя называется *непосредственным следствием* из первых. Классом *доказуемых формул* или *формальных теорем* такой системы называется наименьший класс, содержащий аксиомы и замкнутый относительно отношения непосредственного следования. Правила, определяющие отношение непосредственного следования, называются *правилами вывода*; они представляют собой операции, которые формулы, называемые *посылками*, перерабатывают в формулу, называемую *заключением*. Правила, определяющие, какие формулы являются аксиомами, вместе с правилами вывода мы назовем (*дедуктивными*) *постулатами.*

[1]) S. C. Kleene, Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols, Memoirs of the American Mathematical Society, № 10, pp. 27—66.

Получено издателями 8 ноября 1951 г. Представлено Американскому математическому обществу 26 декабря 1951 г. Исправленный вариант поступил 20 февраля 1952 г.

Идея, развитая в настоящей статье, возникла у автора в декабре 1949 г., когда он находился в творческом отпуске, поддержанном Школой аспирантов при Висконсинском университете и Мемориальным обществом Джона Саймона Гуггенхейма.

Мы ограничимся лишь случаем, когда класс аксиом и отношение непосредственного следования «конструктивны». Это означает, что заранее предписанным методом можно решить в каждом частном случае, является ли данная формула аксиомой или же непосредственным следствием нескольких данных формул. Это должно иметь место для любой формальной системы, которая может быть применена непосредственно как инструмент для доказательства, но это ограничение исключает из рассмотрения так называемые «неконструктивные» логики, изучавшиеся некоторыми авторами.

Класс C формул называется *аксиоматизируемым*, если имеется формальная система, доказуемые формулы которой составляют в точности класс C.

Если бы мы не налагали никаких ограничений на то, что мы называем формальной системой, тогда любой класс C формул можно было бы аксиоматизировать тривиально, например, взяв в качестве множества аксиом системы сам класс C и в качестве отношения непосредственного следования отношение совпадения, так что не было бы проблемы аксиоматизируемости.

Таким образом, ограничение типа «конструктивности», которое мы предположили, является для нас решающим. (Аксиоматизируемость может также рассматриваться и при других ограничениях, но это ограничение имеет для нас первостепенный интерес.)

Для того чтобы употреблять в математических рассуждениях наше предположение о «конструктивности», необходимо заменить смутное интуитивное понятие «конструктивное» некоторым математически сформулированным понятием, которое удовлетворительно описывало бы это интуитивное понятие. Исследователи в общем согласились отождествлять «конструктивность» с общерекурсивностью в эрбран — гёделевском смысле (или же с некоторыми другими понятиями, для которых была доказана эквивалентность их с общерекурсивностью [1])).

Общерекурсивность определяется прямо для отношений и функций над натуральными числами, а также для классов этих чисел [2]). Но объектам любой данной формальной системы можно присвоить номера при помощи метода Гёделя или же его модификации, предложенной Гильбертом и Бернайсом [3]). В этом

[1]) Отождествление «конструктивности» с общерекурсивностью было впервые предложено в 1936 г. Чёрчем [3]. Затем Тьюринг [31] в 1936—1937 гг. привел рассуждения, поддерживающие аналогичный тезис; в дальнейшем была доказана эквивалентность его понятия вычислимости с общерекурсивностью. Обоснования тезиса суммированы в нашей работе [22], § 62.

[2]) [13]; [20] — [22], § 55.

[3]) [12]; [18], стр. 205 и след.; или [22], §§ 50, 52, 56.

случае класс формальных объектов или отношение между ними называется *общерекурсивным*, если соответствующий класс их гёделевых номеров или соответствующее отношение между их гёделевыми номерами общерекурсивны. Класс формальных объектов *рекурсивно перечислим*, если гёделевы номера этих объектов образуют рекурсивно перечислимый класс, т. е. составляют множество значений общерекурсивной функции [1]).

Наше ограничение на формальные системы заключается теперь в общерекурсивности класса аксиом и отношения непосредственного следования (так же, как и класса формул).

Из этого следует, что класс доказуемых формул рекурсивно перечислим (так же, как и любой непустой класс, полученный пересечением класса доказуемых формул и данного рекурсивного или рекурсивно перечислимого класса формул [2])).

Таким образом, необходимым условием того, чтобы класс формул был аксиоматизируем (при нашем ограничении на формальную систему), является:

(1) Класс C рекурсивно перечислим.

Интуитивно это просто означает, что элементы из C могут быть последовательно выписаны при помощи некоторого «конструктивного» процесса. Для того чтобы сделать «аксиоматизируемость» нетривиальной, мы наложили следующее ограничение: класс аксиом и отношений непосредственного следования рекурсивен. Формальные системы с таким ограничением представляют интерес потому, что не все рекурсивно перечислимые классы общерекурсивны [3]), в противном случае каждый класс C можно было бы аксиоматизировать тривиально, например, взяв в качестве множества аксиом все C, а в качестве отношения непосредственного следования — отношение совпадения.

Как заметил Гермес [4]), условие (1) является также достаточным для аксиоматизируемости C. При этом достаточно использовать единственное правило вывода (которое является однопосылочным правилом), а в качестве единственной аксиомы взять любую формулу из C. Правило Гермеса похоже на обычно используемые правила вывода лишь в том отношении, что оно общерекурсивно, так что доказательства в этой системе

[1]) [20]; [25]; [22], конец § 60. Рекурсивно перечислимые классы — это то же самое, что и непустые классы, представимые в виде $\hat{x}(Ey)\,R(x, y)$ с рекурсивным R. [Выражение $\hat{x}A(x)$ следует читать: «Множество тех x, для которых имеет место $A(x)$»; выражение $(Ey)A(y)$ следует читать: «существует y такой, что $A(y)$». — *Прим. перев.*]

[2]) Например, [20], утверждение II.

[3]) [20], утверждение XV; [21], теорема II; [22], § 60.

[4]) [15]. Эта статья Гермеса была замечена автором тогда, когда настоящее исследование было почти закончено.

весьма мало похожи на то, что обычно понимают под доказательством.

Проблема аксиоматизируемости приобретает дополнительное содержание, когда мы еще более ограничиваем характер формальных систем. Важную роль в математике играют такие теории, как аксиоматическая теория множеств или арифметика натуральных чисел Пеано, которые, будучи формализованы, имеют в качестве своей логической основы исчисление предикатов первого порядка. Поэтому мы вернемся к тем формальным системам, логической основой которых является это исчисление.

Рассмотрим затем формулы, построенные в логическом символизме исчисления предикатов (первого порядка) без предикатных переменных с данным конечным списком $P_1, \ldots, P_s$ $(s \geqslant 1)$ различных предикатных символов, имеющих соответственно $n_1, \ldots, n_s$ $(\geqslant 0)$ аргументов. Назовем эти формулы P-формулами. Мы говорим, что класс C P-формул *аксиоматизируем в исчислении предикатов*, если C совпадает с классом доказуемых формул формальной системы, имеющей своими формулами P-формулы и своими постулатами постулаты исчисления предикатов плюс рекурсивный класс «нелогических» аксиом. Класс всех аксиом рекурсивен в этом и только в этом случае, так как «логические аксиомы», т. е. P-формулы, являющиеся аксиомами исчисления предикатов, составляют рекурсивный класс. Под «постулатами исчисления предикатов» мы будем понимать или множество, задающее классическое исчисление предикатов, или множество, задающее интуиционистское исчисление предикатов, исключая случаи, когда мы ограничиваемся одним из двух [1]).

Так как теперь формальная система должна включать дедуктивные постулаты исчисления предикатов, то мы теперь имеем в качестве очевидного необходимого условия того, чтобы класс C P-формул был аксиоматизируем в исчислении предикатов, кроме условия (1), также следующее условие [2]):

(2) Класс C дедуктивно замкнут в исчислении предикатов.

Как заметил Крейг [3]), эти два необходимых условия, (1) и (2), вместе являются достаточными.

Для «аксиоматизируемости в исчислении предикатов» от класса нелогических аксиом требуется только рекурсивность.

[1]) Например, [16]; [18], стр. 375 и след.; [10]; [2] или [22], §§ 19, 23.

[2]) Подробнее: C — наименьший класс P-формул, который и содержит аксиомы исчисления предикатов и замкнут относительно отношения непосредственного следования в исчислении предикатов.

[3]) Это содержится в [5]. Результат для классического исчисления предикатов был первоначально получен в октябре 1950 г. посредством комбинирования теоремы из диссертации Крейга [4] с излагаемыми результатами автора. Но в [5] дается гораздо более простое доказательство, применимое непосредственно к более широкому классу формальных систем.

Однако он может быть как конечным, так и бесконечным. Когда он конечен, мы говорим о *конечной аксиоматизируемости в исчислении предикатов*. Вопрос о том, будет ли теория, выраженная классом C формул в символизме исчисления предикатов с предикатными символами, конечно аксиоматизируемой, был поставлен в недавней работе Тарского о проблеме разрешения для таких теорий [1]). Тарский ранее построил некоторые примеры теорий, которые аксиоматизируемы в исчислении предикатов лишь с использованием бесконечного числа нелогических аксиом [2]). Для некоторых важных теорий нелегко ответить на этот вопрос. Ван Хао опубликовал доказательство того, что аксиоматическая теория множеств Цермело (с аксиомой выделения в качестве схемы аксиом) не является конечно аксиоматизируемой в исчислении предикатов [3]). Рылль-Нардзевский показал то же для арифметики Пеано [4]).

Если мы при построении формальной системы используем бесконечное множество нелогических аксиом, то это делается для того, чтобы остаться в границах определенного символизма и логического аппарата. Так, в обычной системе арифметики Пеано бесконечная совокупность аксиом индукции могла бы быть заменена одной аксиомой, если бы мы использовали свободные предикатные переменные и добавили бы правило подстановки.

В действительности, в силу цитированного выше замечания Гермеса, если мы отбросим все ограничения на характер дедуктивных аппаратов, кроме «конструктивности», то всегда можно обойтись одной аксиомой.

Теперь возникает вопрос, до какой степени просто расширение символики и логики, которое было бы достаточно для того, чтобы дать конечную аксиоматизируемость, если мы уже имеем аксиоматизируемость в исчислении предикатов. Ниже показано, что во всех случаях мы можем получить конечную аксиоматизируемость в рамках исчисления предикатов первого порядка (без предикатных переменных), добавляя конечное число предикатных символов.

Пусть может быть построена формальная система S, имеющая своими формулами формулы в символике исчисления предикатов, с использованием, кроме предикатных символов $P_1, \ldots$

[1]) [30]; [22], конец § 76.

[2]) [29], часть II, § 5.

[3]) [32]; см. также реферат Россера [27] и ответ Ван Хао [33].

[4]) [28]. Мостовский впоследствии в [23] получил несколько более сильный результат, а именно, доказал, что в арифметике Пеано может быть доказана непротиворечивость каждой конечно аксиоматизируемой подтеории этой арифметики.

..., P_s, также конечного списка дополнительных предикатных символов, имеющая своими постулатами постулаты исчисления предикатов и конечный класс нелогических аксиом. Пусть система S такова, что в ней P-формула доказуема тогда и только тогда, когда она принадлежит классу C.

В этом случае мы говорим, что класс C P-формул *конечно аксиоматизируем в исчислении предикатов с использованием дополнительных предикатных символов.*

Так как P-формулы являются рекурсивным подклассом класса всех формул системы S, то условие (1), так же как и условие (2), необходимо для того, чтобы класс C P-формул был конечно аксиоматизируем в исчислении предикатов с использованием дополнительных предикатных символов [1]).

Результат, который мы хотим получить в этой статье, состоит в том, что условия (1) и (2) вместе являются достаточными.

Для простоты мы начали со случая, когда теория имеет своими нелогическими символами (константами) лишь предикатные символы P_1, ..., P_s. Однако принадлежащий Гильберту и Бернайсу метод замены индивидных и функциональных символов посредством предикатных символов может быть включен в наше изложение [2]), так что мы получаем тот же результат и для случая, когда вместо списка P_1, ..., P_s предикатных символов для построения P-формул используется список, состоящий из s символов, содержащий предикатные символы (по меньшей мере один), индивидные символы (нуль или более) и функциональные символы (нуль или более).

Вместо того, чтобы начать с рекурсивно перечислимого класса C, дедуктивно замкнутого в исчислении предикатов, мы могли бы начать с любого рекурсивно перечислимого класса B P-формул, затем получить класс C, дедуктивно замкнув B в исчислении предикатов [3]).

За исключением § 6, где мы даем короткое альтернативное доказательство непротиворечивости для случая, когда рассматривается классическое исчисление предикатов и предикатные символы являются базисом для P-формул, все наши рассуждения являются финитными или метаматематическими [4]).

---

[1]) Для (2) термин «выводимость в исчислении предикатов» для P-формул можно понимать так же, как и для понятия формулы. По методу из работы [22], § 34, замечание 1, для данного вывода P-формулы из P-формул можно всегда найти вывод, содержащий только P-формулы.

[2]) [17], стр. 460 и след.; [22], конец § 74.

[3]) Например, при помощи простого обобщения утверждения II работы [20].

[4]) Например, [17], стр. 1—44; [22], § 15.

ЧАСТЬ I

ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ

§ 1. *H*-номера

Мы должны теперь показать, как по любому данному классу C P-формул, удовлетворяющему условиям (1) и (2), построить формальную систему S, которая аксиоматизирует C в исчислении предикатов с дополнительными предикатными символами. Мы переходим теперь к построению системы S для случая, когда базисом P-формул является список P_1, ..., P_s предикатных символов. Затем в § 5 мы укажем, что делать, если имеются также индивидные и функциональные символы.

Назовем две P-формулы *конгруэнтными*, если они совпадают с точностью до алфавитного переименования связанных переменных (причем соответствующие связанные вхождения переменных связаны соответствующими кванторами), и *подобными*, если их замыкания конгруэнтны.

Формулируя условие (1), мы использовали известные гёделевские номера (или «G-числа») P-формул. Теперь мы введем другой сорт сопоставления чисел P-формулам, которые мы называем «H-номерами».

Каждый H-номер a открытой P-формулы E будет сопоставлен формуле E с определенным упорядочением $y_1, \ldots, y_n$ различных свободных переменных из E и выделенной одной из них y_i в качестве *отмеченной переменной*; другими словами, номер a связывается с тройкой объектов (E; y_1, ..., y_n; y_i). Если формула E записана в виде $E(y_1, \ldots, y_n)$, то мы говорим, что a есть H-номер объекта $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n)$. В общем случае относительно P-формул, открытых или замкнутых, мы можем использовать те же самые обозначения, т. е. если E замкнута, то $n=0$ и y_i не существует.

Если при подстановке $y'_1, \ldots, y'_n$ вместо $y_1, \ldots, y_n$ формула E заменяется на подобную формулу E', то мы называем тройку (E; $y_1, \ldots, y_n$; y_i) и тройку (E'; $y'_1, \ldots, y'_n$; y'_i) *подобными.* Как мы увидим, подобные тройки будут иметь одни и те же H-номера. Данная тройка будет иметь, вообще говоря, бесконечно много H-номеров.

Прежде чем дать определение, которое будет устанавливать, когда натуральное число a есть H-номер тройки (E; $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$; y_i), мы определим четыре операции над парами ($y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$; y_i) или $y_1 \ldots \bar{y}_i \ldots y_n$ для $n>1$. Операция R («вправо») определяется только для $i<n$ и заменяет $y_1 \ldots \bar{y}_i\ y_{i+1} \ldots y_n$

на $y_1 \dots y_i\bar{y}_{i+1} \dots y_n$. Аналогично L («влево») для $i>1$ заменяет $y_1 \dots y_{i-1}\bar{y}_i \dots y_n$ на $y_1 \dots \bar{y}_{i-1}y_i \dots y_n$; I («перестановка») для $i<n$ меняет $y_1 \dots \bar{y}_i y_{i+1} \dots y_n$ на $y_1 \dots \bar{y}_{i+1}y_i \dots y_n$, и C («сокращение») для $i>1$ меняет $y_1 \dots y_i\bar{y}_{i+1} \dots y_n$ на $y_1 \dots \bar{y}_i \dots y_n$.

Операции R и L обратны друг другу, I обратна сама себе, и C имеет обратную, определенную с точностью до подобия для любого i и $n \geqslant 1$.

Лемма 1. *Для любого списка $y_1 \dots \bar{y}_i \dots y_n$ различных переменных с i-й отмеченной и для любой данной перестановки $y_{k_1} \dots \bar{y}_{k_j} \dots y_{k_n}$ тех же n переменных с j-й отмеченной имеется последовательность операций R, L и I, которая переводит $y_1 \dots \bar{y}_i \dots y_n$ в $y_{k_1} \dots \bar{y}_{k_j} \dots y_{k_n}$.*

Лемма 2. *Пусть дан некоторый список $z_1 \dots \bar{z}_j \dots z_m$ $(m>1)$ различных переменных с j-й отмеченной, и пусть список $u_1 \dots u_m$ переменных получается из $z_1, \dots, z_m$ заменой некоторых из этих переменных на другие из тех, которые не заменяются, и пусть $y_1 \dots \bar{y}_i \dots y_n$ $(n<m)$ — некоторый список различных переменных, взятых из списка $u_1 \dots u_m$, с i-й отмеченной. Тогда имеется последовательность операций R, L, I и C, которая переводит $z_1 \dots \bar{z}_j \dots z_m$ в $y_1 \dots \bar{y}_i \dots y_n$ с теми же заменами, что и при переходе от списка $z_1 \dots z_m$ к списку $u_1 \dots u_m$.*

Пример 1. Пусть дана последовательность $\bar{z}_1z_2z_3z_4$; пусть $u_1u_2u_3u_4$ — это $z_1z_2z_3z_1$ и $\bar{y}_1y_2y_3$ — это $\bar{z}_1z_2z_3$. Тогда $\bar{z}_1z_2z_3z_4$ переводится в $\bar{y}_1y_2y_3$ заменой z_4 на z_1.

Таким образом,

$$\bar{z}_1z_2z_3z_4Rz_1\bar{z}_2z_3z_4Rz_1z_2\bar{z}_3z_4Iz_1z_2\bar{z}_4z_3Lz_1\bar{z}_2z_4z_3Iz_1\bar{z}_4z_2z_3C\bar{z}_1z_2z_3.$$

Для ссылок мы сопоставим H-номера операциям и символам следующим образом (это сопоставление и будет служить ключом к определению H-номеров P-формул):

R	L	I	C	$\supset$	&	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$P_1 \dots P_s$
1	2	3	4	5, 6	7, 8	9, 10	11	12, 13	14, 15	$16 \dots s+15$

Натуральное число a является *H-номером* P-формулы $E(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$ только тогда, когда оно является таковым в силу следующих ниже $s+20$ пунктов[1]). В этих пунктах мы говорим все время об H-номерах для формул, в обозначении которых выписанные явно переменные (если они есть) являются различными свободными переменными этих формул; в случае, когда ничего не выписано, формула является замкнутой.

(P_r). Для $r=1, \dots, s$ число 2^{15+r} является *H-номером* объекта $P_r(\bar{z}_1, \dots, z_{n_r})$.

(R). Для $1 \leqslant i<n$, если a есть *H-номер* объекта $E(y_1, \dots, \bar{y}_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$, то $2^1 \cdot 3^a$ является *H-номером* объекта $E(y_1, \dots, y_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, y_n)$.

(L). Для $1<i \leqslant n$, если a есть *H-номер* объекта $E(y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{y}_i, \dots, y_n)$, то $2^2 \cdot 3^a$ является *H-номером* объекта $E(y_1, \dots, \bar{y}_{i-1}, y_i, \dots, y_n)$.

(I). Для $1 \leqslant i<n$, если a есть *H-номер* объекта $E(y_1, \dots, \bar{y}_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$, то $2^2 \cdot 3^a$ является *H-номером* объекта $E(y_1, \dots, \bar{y}_{i+1}, y_i, \dots, y_n)$.

(C). Для $1<i \leqslant n$, если a есть *H-номер* объекта $E(y_1, \dots, y_i, \bar{y}_{i+1}, \dots, y_n)$ и $F(y_1, \dots, y_n)$ — результат подстановки переменной y_i вместо (свободных вхождений) y_{i+1} в формулу E, т. е. формулу $E(y_1, \dots, y_i, y_i, \dots, y_n)$, и y_i свободна для y_{i+1} на этих местах подстановки в E, то $2^4 \cdot 3^a$ — *H-номер* объекта $F(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$.

$(\supset 1)$. Для $p, q>0$, если a есть *H-номер* объекта $A(y_1, \dots, \bar{y}_p)$ и b — *H-номер* объекта $B(\bar{z}_1, \dots, z_q)$, то $2^5 \cdot 3^a \cdot 5^b$ является *H-номером* объекта $C(y_1, \dots, y_p, \bar{z}_1, \dots, z_q)$, где $C(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q)$ — это $A(y_1, \dots, y_p) \supset B(z_1, \dots, z_q)$.

$(\supset 2)$ Для $q>0$, если a есть *H-номер* A и b — *H-номер* $B(\bar{z}_1, \dots, z_q)$, то $2^5 \cdot 3^a \cdot 3^b$ является *H-номером* $C(\bar{z}_1, \dots, z_q)$, где $C(z_1, \dots, z_q)$ — это $A \supset B(z_1, \dots, z_q)$.

$(\supset 3)$. Для $n \geqslant 0$, если a есть *H-номер* объекта $A(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$ и b есть *H-номер* B, то $2^6 \cdot 3^a \cdot 5^b$ — *H-номер* $C(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$, где $C(y_1, \dots, y_n)$ — это $A(y_1, \dots, y_n) \supset B$.

Три пункта (& 1) — (& 3) для знака & и три пункта $(\vee 1)$ — $(\vee 3)$ для знака $\vee$ формулируются аналогично.

$(\neg)$ Для $n \geqslant 0$, если a есть *H-номер* объекта $A(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$, то $2^{11} \cdot 3^a$ — *H-номер* объекта $C(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$, где $C(y_1, \dots, y_n)$ — это $\neg A(y_1, \dots, y_n)$.

$(\forall 1)$. Для $p>0$, если a есть *H-номер* объекта $A(\bar{x}, y_1, \dots, y_p)$, то $2^{12} \cdot 3^a$ является *H-номером* $C(\bar{y}_1, \dots, y_p)$, где $C(y_1, \dots, y_p)$ — это $\forall x A(x, y_1, \dots, y_p)$.

$(\forall 2)$. Если a есть *H-номер* объекта $A(\bar{x})$, то $2^{12} \cdot 3^a$ является *H-номером* формулы $\forall x A(x)$.

$(\forall 3)$. Для $n \geqslant 0$, если a есть *H-номер* объекта $A(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$, то $2^{13} \cdot 3^a$ является *H-номером* объекта $C(y_1, \dots, \bar{y}_i, \dots, y_n)$, где $C(y_1, \dots, y_n)$ — это $\forall x A(y_1, \dots, y_n)$.

[1]) Это определение является индуктивным определением, но его также можно рассматривать как определение рекурсией по числу a, ср. [22], § 53.

Три пункта ($\exists$1)—($\exists$3) формулируются аналогично для знака $\exists$.

Лемма 3. *Для каждой P-формулы E, каждого списка $y_1, \ldots, y_n$ ее различных свободных переменных и (при $n>0$) для каждого $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ существует H-номер объекта $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n)$.*

Доказательство. Мы воспользуемся индукцией по числу вхождений логических символов в E.

Базис. Пусть E не содержит логических символов. В этом случае E— это $P_r(u_1, \ldots, u_r)$ для некоторых r $(1 \leqslant r \leqslant s)$ и некоторых переменных $u_1, \ldots, u_{n_r}$. Если $u_1, \ldots, u_{n_r}$ различны, то *H-номер* получается в силу пункта (P_r), когда вместо переменных $y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n$ взяты $\bar{u}_1, \ldots, u_{n_r}$, а затем и при любом другом выборе $y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n$ использованием пунктов (R), (L), (I) и леммы 1. Если же $u_1, \ldots, u_{n_r}$ не все различны, то мы можем для применения леммы 2 выбрать список различных переменных $z_1, \ldots, z_{n_r}$ (с $m=n_r$, $j=1$ и $u_1, \ldots, u_{n_r}$ в качестве $u_1, \ldots, u_m$) и воспользоваться пунктом (P_r), а затем рядом применений пунктов (L), (R), (I) и (C), соответствующим ряду операций, который дается этой леммой, переводящему список $\bar{z}_1 \ldots z_{n_r}$ в нужный нам список $y_1 \ldots \bar{y}_i \ldots y_n$.

Индукционный шаг. Пусть E содержит $\chi+1$ вхождений логических символов. Рассмотрим случай, когда E имеет вид $F \supset G$, где каждая из формул F и G содержит не более чем χ логических символов. Тогда по индукционному предположению и F и G имеют H-номера при любом выборе списка их свободных переменных с отмеченной переменной. Если G — незамкнутая формула, не имеющая общих свободных переменных с F, то мы получаем H-номер формулы $F \supset G$ для некоторого определенного списка $y_1 \ldots \bar{y}_i \ldots y_n$ по пункту ($\supset$1), если F незамкнута, и по пункту ($\supset$2), если F замкнута; затем мы можем получить H-номер для любого другого списка, используя пункты (R), (L) и (I) и лемму 1. В случае, когда G и F имеют общие свободные переменные, мы можем применить ($\supset$1), используя в качестве $z_1, \ldots, z_q$ список, полученный из списка свободных переменных формулы G заменой каждой переменной, входящей свободно в F, на новую переменную, не входящую свободно в F, и затем получить H-номер для формулы $F \supset G$ и нужного нам списка $y_1 \ldots \bar{y}_i \ldots y_n$ при помощи пунктов (R), (L), (I) и (C) и леммы 2. В случае, когда формула G замкнута, мы воспользуемся пунктом ($\supset$3). Случаи, когда главным логическим знаком формулы E является &, $\vee$, $\neg$, $\forall$ или $\exists$, рассматриваются аналогично.

Пример 2. Предположим, что P_1 — это P, n_1 — это 1, P_2 — это Q и $n_2=2$. Мы следующим образом найдем H-номер a_7 для формулы $\exists x \forall y\,[P(x) \supset Q(x, y)]$.

Формула	Переменные	H-номер	Пункт
$P(x)$	$\bar{x}$	$a_1 = 2^{16}$	(P_1)
$Q(z, y)$	$\bar{z}y$	$a_2 = 2^{17}$	(P_2)
$P(x) \supset Q(z, y)$	$x\bar{z}y$	$a_3 = 2^5 \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2}$	($\supset$ 1)
$P(x) \supset Q(x, y)$	$\bar{x}y$	$a_4 = 2^4 \cdot 3^{a_3}$	(C)
$P(x) \supset Q(x, y)$	$\bar{y}x$	$a_5 = 2^3 \cdot 3^{a_4}$	(I)
$\forall y\,[P(x) \supset Q(x, y)]$	$\bar{x}$	$a_6 = 2^{12} \cdot 3^{a_5}$	($\forall$1)
$\exists x \forall y\,[P(x) \supset Q(x, y)]$		$a_7 = 2^{14} \cdot 3^{a_6}$	($\exists$2)

Каждая формула $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n)$, т. е. каждая тройка $(E;\ y_1, \ldots, y_n;\ y_i)$, будет иметь бесконечно много H-номеров, вследствие того, что возможны различные последовательности применений R, L, I и C, исключая случай, когда в E нет подформул, содержащих более чем одно свободное вхождение переменной.

Нетрудно установить «конструктивные» соглашения (неважно, какие точно), регламентирующие последовательность операций R, L, I и C, необходимую для получения H-номера объекта $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n)$ и исключающие другой порядок использования этих операций. Таким образом, будет определен некоторый выделенный H-номер. В случае $n=0$ мы назовем такой номер *главным H-номером* формулы E.

§ 2. Примитивно-рекурсивный пересчет *H*-номеров

Примитивно-рекурсивная функция — это такая функция, которую можно определить посредством последовательности определений, каждое из которых является частным случаем одной из следующих ниже схем явного определения ((I)—(IV)) или примитивной рекурсии ((Va), (Vb)). В этих схемах φ — определяемая функция, $'$ — это операция $+1$, q — данное натуральное число, $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m, \chi$ — ранее определенные функции, $n, m \geqslant 1$ и $1 \leqslant i \leqslant n$ [1]):

(I) $\varphi(x) = x'$,

(II) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = q$,

(III) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$,

(IV) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$,

1)) Например, [12]; [13]; [20]; [21]; [22], § 43 и след.

$$\text{(Va)} \begin{cases} \varphi(0) = q, \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)), \end{cases}$$

$$\text{(Vb)} \begin{cases} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n), \\ \varphi(y', x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Обозначим константные функции, определяемые схемой (II), посредством C_q^n, и тождественные функции, определяемые по схеме (III), посредством U_i^n.

По предположению, нам дан класс C P-формул, удовлетворяющий условиям (1) и (2). Но условие (1) означает, что G-номера формул из C рекурсивно перечислимы.

Все формулы класса C выводимы в исчислении предикатов из замкнутых формул класса C.

Свойство быть замкнутой формулой рекурсивно, так что G-номера замкнутых формул из C рекурсивно перечислимы.

Для любого данного числа g мы можем «конструктивно» решить, является ли g G-номером замкнутой P-формулы E, и если является, то найти эту формулу, а следовательно, и ее главный H-номер h (если не является, то положим $h=0$). Таким образом, мы можем ожидать, что h есть общерекурсивная функция от g *). В действительности нетрудно показать (при подходящем выборе выделения того, какой из H-номеров является главным H-номером h), что h является примитивно-рекурсивной функцией от g.

Поэтому главные H-номера замкнутых формул из C рекурсивно перечислимы, откуда в силу замечания Россера[1]) следует

Лемма 4. *Главные H-номера замкнутых P-формул, принадлежащих C (для данного класса C P-формул, удовлетворяющего условию (1)), составляют множество значений некоторой примитивно-рекурсивной функции $\xi(z)$.*

§ 3. Система S_1

Схема (II) из § 2 может быть заменена на схему

$$\text{(II}'\text{)} \quad \varphi(x) = 0,$$

которая определяет функцию C_0^1, так как константные функции C_q^n для $q \neq 0$ или $n \neq 1$ могут быть определены, исходя из C_0^1, при помощи (I), (III) и (IV).

*) См. сноску [1]) на стр. 238. — *Прим. ред.*

[1]) [26], стр. 88; [21], стр. 57; [22], конец § 60.

Мы можем также заменить (III) двумя схемами[1]):

$$\text{(III}'\text{)} \quad \varphi(x, y) = x,$$

определяющей U_1^2, и

$$\text{(III}''\text{)} \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = U_1^2(x_i, U_1^2(x_1, \ldots, U_1^2(x_{n-1}, x_n) \ldots)),$$

определяющей тождественные функции U_i^n для $n \neq 2$ или $i \neq 1$.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — список примитивно-рекурсивных функций, каждая из которых определена ab initio (т. е. является исходной) или получается из предыдущих функций списка по одной из схем (I), (II′), (III′), (III″), (IV), (Va) и (Vb). Пусть в него входят функции $+$, $\cdot$, 2^a, 3^a и 5^a, а φ_k — это функция ξ из леммы 4.

Теперь мы следующим образом построим формальную систему S_1, имеющую логическим базисом исчисление предикатов. S_1 будет иметь предикатный символ $=$, выражающий равенство и отличный от $P_1, \ldots, P_s$. В ее символизме будет также индивидный символ 0, выражающий число 0, и попарно различные функциональные символы $'$, $f_1, \ldots, f_k$, выражающие соответственно $'$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Мы обозначаем f_k также посредством f; если же φ_p есть одна из функций $+$, $\cdot$, 2^a, 3^a, 5^a, то мы иногда будем использовать для f_p соответствующее обозначение из списка $+$, $\cdot$, 2^a, 3^a, 5^a.

Здесь и далее, когда мы имеем некоторый список функций и предикатных символов $=$, $g_1, \ldots, g_\chi$, $Q_1, \ldots, Q_m$ ($\chi, m \geqslant 0$), причем первый из этих символов играет роль равенства, то мы будем называть *аксиомами равенства для* $=$, $g_1, \ldots, g_\chi$, $Q_1, \ldots, Q_m$ следующую совокупность формул:

$$\text{(i)} \quad x = x, \quad x = y \supset (x = z \supset y = z)$$

для некоторых попарно различных переменных x, y, z; для каждого n-местного функционального символа g n формул вида

$$\text{(ii)} \quad x = y \supset g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

для некоторых попарно различных переменных $x_1, \ldots, x_n, x, y$ ($i = 1, \ldots, n$); и аналогично для каждого n-местного предикатного символа Q, отличного от $=$, n формул вида

$$\text{(iii)} \quad x = y \supset (Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \supset Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)).$$

[1]) Несколько отклонений от простейших процедур нужны для того, чтобы упростить доказательство непротиворечивости в § 8.

Нелогическими аксиомами S_1 будут следующие конечные совокупности: аксиомы равенства для символов $=$, $'$, $f_1, \ldots, f_k$ и аксиомы, которые следующим образом выражают определения функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$: они являются, за исключением аксиом для функций, вводимых по схемам (II′) и (III′), результатами перевода в формализм уравнений, входящих в неформальные схемы [1]).

В случае применения (II′), когда вводимой функцией является φ_p, мы берем в качестве аксиом пару формул [1])

$$\text{(a)}\quad f_p(0)=0 \qquad f_p(x)=0 \supset f_p(x')=0,$$

а в случае применения (III′) аналогично

$$\text{(b)}\quad f_q(x, 0)=x \qquad f_q(x, y)=x \supset f_q(x, y')=x.$$

Пусть $N(a)$ — сокращение для формулы

$$\exists z(f(z)=a \,\&\, 0\cdot a=0).$$

Для любого натурального числа a пусть $\boldsymbol{a}$ означает *соответствующую цифру* $0'^{\cdots''}$ с a штрихами.

Подстановка термов вместо индивидных переменных является выводимым правилом в исчислении предикатов [2]). Кроме того, при помощи подстановок в аксиомы (a) и применений правила сокращения посылки (modus ponens) мы можем доказать формулу $f_p(\boldsymbol{a})=0$, т. е. результат подстановки любой цифры $\boldsymbol{a}$ вместо переменной x в формулу $f_p(x)=0$ — непосредственный перевод схемы (II′), аналогично для (b) и (III′).

Описанные аксиомы равенства достаточны также для вывода свойства замены для равенства [3]).

Предположим, что h — главный H-номер замкнутой формулы из C. Тогда по лемме 4 для некоторого z имеем $\xi(z)=h$. Следовательно, средствами формальной теории рекурсивных функций с аксиомами для $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (где φ_k — это ξ) и с учетом замечания о том, что имеют место правила подстановки и замены, в S_1 доказуема формула $f(z)=\boldsymbol{h}$ [4]). Точно так же доказуема формула $0\cdot\boldsymbol{h}=0$, а значит, и формула $N(\boldsymbol{h})$.

При интерпретации функциональных символов теории S_1 каждый постоянный терм t из S_1 выражает некоторое натуральное число h.

---

[1]) Ср. [22], § 54.

[2]) Терм — это выражение, синтаксически построенное из переменных, индивидных символов и функциональных символов; постоянный терм — это терм, не содержащий переменных. (В описываемой системе имеются только индивидные переменные.)

[3]) [17], стр. 373 и след.; [22], § 73.

[4]) [21]; [22], § 54.

Средствами формальной теории рекурсивных функций с использованием аксиом для $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ в теории S_1 доказуема формула $t=\boldsymbol{h}$ при условии, что t — постоянный терм и h — число, выражаемое термом t.

По определению H-номеров в § 1 каждый H-номер P-формулы получается из H-номеров операций, логических символов и предикатных символов посредством многократной композиции функций $\cdot$, 2^a, 3^a и 5^a. Когда мы пишем $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$, мы будем подразумевать $(2^a\cdot 3^b)\cdot 5^c$ для того, чтобы избежать двусмысленности относительно способа группировки множителей. Таким образом, если мы выразим H-номера операций и символов их цифрами и параллельно воспроизведем конструкцию H-номеров P-формул, используя при этом формальные функциональные символы $\cdot$, 2^a, 3^a, 5^a, то мы придем для каждого H-номера $\boldsymbol{h}$ P-формулы к определенному постоянному терму h, который назовем термом, *связанным* с $\boldsymbol{h}$, и который, разумеется, выражает $\boldsymbol{h}$.

Если формулы $N(\boldsymbol{h})$ и $t=\boldsymbol{h}$ обе доказуемы в S_1, то по правилу замены доказуема и $N(t)$. Комбинируя эти замечания с h в качестве t, имеем:

Лемма 5. *Если $\boldsymbol{h}$ — главный H-номер замкнутой P-формулы из C и h — терм, связанный с $\boldsymbol{h}$, то $N(h)$ доказуема в S_1.*

§ 4. Системы S_2, S_3

Пусть M — бинарный предикатный символ, отличный от $=$, $P_1, \ldots, P_s$. Формальная система S_2 будет иметь индивидные и функциональные символы системы S_1, предикатные символы $=$ и M и в качестве нелогической аксиомы следующую (с некоторой переменной a):

$$\text{(N)}\quad N(a) \supset M(a, 0).$$

Теперь мы опишем третью систему S_3, которая будет иметь те же самые индивидные и функциональные символы, что и S_1 (и S_2), предикатные символы $M, P_1, \ldots, P_s$ и $s+20$ нелогических аксиом, список которых будет вскоре приведен.

Мы пользуемся формулой $A\sim B$ в качестве сокращения для $(A\supset B)\&(B\supset A)$ и говорим, что A эквивалентна B в некоторой формальной системе, если формула $A\sim B$ доказуема в этой системе. В аксиомах символы 1, 2, 3, ... будут сокращениями для $0', 0'', 0''', \ldots$ и $r\cdot s\cdot t$ — для $(r\cdot s)\cdot t$.

Если $u_1, \ldots, u_n$ $(n\geqslant 0)$ — термы, то выражения $[u_1, \ldots, u_n|$ и $|u_1, \ldots, u_n]$ будут обозначать термы, определяемые по индукции следующим образом[1]) $[|$ — это 0, $[u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}|$ — это $3^{[u_1, \ldots, u_n|} \cdot 2^{u_{n+1}}$, $||$ — это 0, а $|u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}]$ — это $2^{u_1} \times \times 3^{|u_2, \ldots, u_{n+1}]}$. Теперь пусть $[u_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, u_n]$ будет 0 для $n=0$ и $2^{[u_1, \ldots, u_{i-1}|} \cdot 3^{u_i} \cdot 5^{|u_{i+1} \ldots u_n]}$ для $n>0$.

Следующие $s+20$ нелогических аксиом системы S_3 соответствуют пунктам в определении H-номеров в § 1. Почему выбраны именно эти аксиомы, станет ясно из леммы 6 и примера 3:

$$(\mathrm{P}_r) \quad M(2^a, [\bar{b}_1, \ldots, b_{n_r}]) \sim P_r(b_1, \ldots, b_{n_r}),$$

где $a=r+15$ и $b_1, \ldots, b_{n_r}$ — некоторые различные переменные ($r=1, \ldots, s$). В оставшихся 20 аксиомах a, b, c, d, e, f и x — некоторые различные переменные.

(R) $M(2^1 \cdot 3^a, 2^{3^b \cdot 2^c} \cdot 3^d \cdot 5^e) \sim M(a, 2^b \cdot 3^c \cdot 5^{2^d \cdot 3^e})$.

(L) $M(2^2 \cdot 3^a, 2^b \cdot 3^c \cdot 5^{2^d \cdot 3^e}) \sim M(a, 2^{3^b \cdot 2^c} \cdot 3^d \cdot 5^e)$.

(I) $M(2^3 \cdot 3^a, 2^b \cdot 3^c \cdot 5^{2^d \cdot 3^e}) \sim M(a, 2^b \cdot 3^d \cdot 5^{2^c \cdot 3^e})$.

(C) $M(2^4 \cdot 3^a, 2^b \cdot 3^c \cdot 5^d) \sim M(a, 2^{3^b \cdot 2^c} \cdot 3^c \cdot 5^d)$.

($\supset$1) $M(2^5 \cdot 3^a \cdot 5^b, 2^{3^c \cdot 2^d} \cdot 3^e \cdot 5^f) \sim M(a, 2^c \cdot 3^d \cdot 5^0) \supset M(b, 2^0 \cdot 3^e \cdot 5^f)$

($\supset$2) $M(2^5 \cdot 3^a \cdot 5^b, 2^0 \cdot 3^e \cdot 5^f) \sim M(a, 0) \supset M(b, 2^0 \cdot 3^e \cdot 5^f)$.

($\supset$3) $M(2^6 \cdot 3^a \cdot 5^b, c) \sim M(a, c) \supset M(b, 0)$.

(& 1) — (& 3), ($\vee$ 1) — ($\vee$ 3) аналогично ($\supset$1) — ($\supset$3).

($\neg$) $M(2^{11} \cdot 3^a, b) \sim \neg M(a, b)$.

($\forall$1) $M(2^{12} \cdot 3^a, 2^0 \cdot 3^b \cdot 5^c) \sim \forall x M(a, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^{2^b \cdot 3^c})$.

($\forall$2) $M(2^{12} \cdot 3^a, 0) \sim \forall x M(a, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^0)$.

($\forall$3) $M(2^{13} \cdot 3^a, b) \sim \forall x M(a, b)$.

($\exists$1) — ($\exists$3) аналогично ($\forall$1) — ($\forall$3).

Л е м м а 6. *Если* $\boldsymbol{h}$ — *H-номер P-формулы* $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n)$, h — *терм, связанный с* $\boldsymbol{h}$, *а* $u_1, \ldots, u_n$ — *термы, которые свободны на местах подстановки соответственно для переменных* $y_1, \ldots, y_n$ *в формуле* $E(y_1, \ldots, y_n)$, то $M(h, [u_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, u_n])$ *эквивалентна в* S_3 *формуле* $E(u_1, \ldots, u_n)$.

В частности, если E — замкнутая P-формула, $\boldsymbol{h}$ — ее главный H-номер и h — терм, связанный с $\boldsymbol{h}$, то $M(h, 0)$ эквивалентно в S_3 формуле E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукцию мы можем вести или по числу применений пунктов (P_r) — ($\exists$3) в § 1, в результате ко-

[1]) Здесь мы интересуемся случаем, когда переменные $u_1, \ldots, u_n$ не обязательно различны.

торых получается, что число $\boldsymbol{h}$ есть H-номер, или же по самому $\boldsymbol{h}$. Случаи соответствуют применениям пунктов. В каждом случае мы пользуемся эквивалентностью, полученной путем подстановки в соответствующую аксиому (после изменения связанной переменной x, если это необходимо), а также свойствами подстановочности и транзитивности эквивалентности.

П р и м е р 3. Пусть $a_1, \ldots, a_7$ — термы, связанные с H-номерами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_7$ из примера 2 § 1. Тогда $M(a_7, 0)$ эквивалентна в S_3 каждой формуле, приведенной ниже (в левом столбце), включая P-формулу $\exists x \forall y [P(x) \supset Q(x, y)]$, для которой $\boldsymbol{a}_7$ является H-номером. Каждая формула, содержащая M, преобразуется в следующую за ней формулу при помощи эквивалентности, полученной из указанной аксиомы (правый столбец); например, четвертая переводится в пятую при помощи эквивалентности, которая получается из аксиомы ($\supset$1) при подстановке $a_1, a_2, 0, x, x, 2^y \cdot 3^0$ вместо a, b, c, d, e, f:

$$\begin{array}{lll}
M(a_7, 0) & \boldsymbol{a}_7 \; 2^{14} \cdot 3^{\boldsymbol{a}_6} & (\exists 2) \\
\exists x M(a_6, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^0) & \boldsymbol{a}_6 \; 2^{12} \cdot 3^{\boldsymbol{a}_5} & (\forall 1) \\
\exists x \forall y M(a_5, 2^0 \cdot 3^y \cdot 5^{2^x \cdot 3^0}) & \boldsymbol{a}_5 \; 2^3 \cdot 3^{\boldsymbol{a}_4} & (\mathrm{I}) \\
\exists x \forall y M\left(a_4, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^{2^y \cdot 3^0}\right) & \boldsymbol{a}_4 \; 2^4 \cdot 3^{\boldsymbol{a}_3} & (\mathrm{C}) \\
\exists x \forall y M\left(a_3, 2^{3^0 \cdot 2^x} \cdot 3^x \cdot 5^{2^y \cdot 3^0}\right) & \boldsymbol{a}_3 \; 2^5 \cdot 3^{\boldsymbol{a}_1} \cdot 5^{\boldsymbol{a}_2} & (\supset 1) \\
\exists x \forall y \left[M(a_1, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^0) \supset M\left(a_2, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^{2^y \cdot 3^0}\right)\right] & \boldsymbol{a}_2 \; 2^{17} & (\mathrm{P}_2) \\
\exists x \forall y [M(a_1, 2^0 \cdot 3^x \cdot 5^0) \supset Q(x, y)] & \boldsymbol{a}_1 \; 2^{16} & (\mathrm{P}_1) \\
\exists x \forall y [P(x) \supset Q(x, y)]. & &
\end{array}$$

Под S_{123} мы будем подразумевать формальную систему $S_1+S_2+S_3$, которая имеет те же символы и нелогические аксиомы, что S_1, S_2 и S_3 вместе взятые. (Аналогично ниже под S_{0123} подразумевается $S_0+S_1+S_2+S_3$, под S'_{123} подразумевается $S'_1+S'_2+S'_3$.)

Л е м м а 7. *Каждая P-формула из C доказуема в* S_{123}.

§ 5. Системы S_0, S

Пусть S_0 имеет те же символы, что и S_{123}, и еще добавлен бинарный предикатный символ $\doteq$, играющий роль равенства[1]). Нелогическими аксиомами системы S_0 будут аксиомы равенства

[1]) Мы используем символ $\doteq$, отличный от символа равенства $=$ в S_1, для облегчения доказательства непротиворечивости в § 7—11.

для ее функциональных и предикатных символов $\doteq$, $'$, f_1, ..., f_k, $=$, M, P_1, ..., P_s (§ 3).

Начав с системы S_{123} из леммы 7, присоединяем S_0 для того, чтобы получить систему S_{0123}, в которой все свойства равенства имеют место для $\doteq$ в качестве символа для равенства. От этой системы мы можем перейти при помощи метода Гильберта и Бернайса к другой системе S, в которой вместо индивидных и $k+1$ функциональных символов имеется соответствующее число новых предикатных символов и в которой любая формула системы S_{0123}, не содержащая ни одного индивидного и функционального символа, доказуема тогда и только тогда, когда она доказуема в S_{0123} [1]). При переходе от S_{0123} к S число аксиом остается конечным. Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Система S, построенная, как описано выше, для данного класса C P-формул, удовлетворяющего условиям* (1) *и* (2), *имеет, кроме нелогических символов, участвующих в построении P-формул, лишь конечное число предикатных символов; она имеет конечное число нелогических аксиом. В S доказуема каждая P-формула из C.*

Второе утверждение теоремы состоит в том, что S «полна» относительно доказуемости P-формул из C. Нам осталось показать, что S также «непротиворечива» относительно доказуемости P-формул из C, т. е. что P-формула доказуема в S только тогда, когда она принадлежит классу C.

Однако мы сначала укажем то изменение в конструкции системы S, которое потребуется в случае, когда в список символов, из которых построены P-формулы, входят индивидные и функциональные символы.

Пусть $\doteq$ — бинарный предикатный символ, не входящий в этот список.

Пусть E — система, состоящая из исчисления предикатов с $\doteq$ и имеющая в качестве нелогических символов индивидные, функциональные и предикатные символы, фигурирующие в P-формулах, и пусть аксиомы равенства для $\doteq$ и функциональных и предикатных символов, встречающихся в P-формулах, являются ее нелогическими аксиомами.

Пусть C_1 — замыкание C относительно выводимости в E. Тогда

(α) Если P-формула $A \in C$, то $A \in C_1$.

Пусть C' состоит из тех формул, которые получаются из формул класса C, если из последних исключить методом Гильберта

[1]) [17], стр. 460 и след. Формулировка, данная автором в [22], § 74, теорема 43 (b) (случай VIIIa), подходит точно к нашему случаю, если ее применять последовательно шаг за шагом для каждого из $k+2$ устраняемых символов, взятых в некотором фиксированном порядке.

и Бернайса индивидные и функциональные символы при помощи предикатных символов [1]). Назовем *P'-формулами* формулы, построенные с использованием предикатных символов, встречающихся в P-формулах, и предикатных символов, заменяющих индивидные и функциональные символы, встречающиеся в P-формулах.

Пусть E' — система, состоящая из исчисления предикатов с $\doteq$ и имеющая предикатные символы, встречающиеся в P'-формулах, в качестве своих нелогических символов, а своими нелогическими аксиомами — аксиомы равенства для $\doteq$ и предикатных символов, встречающихся в P'-формулах, а также аксиомы существования и единственности (выражаемые с $\doteq$ в качестве символа равенства) для каждого символа, заменяющего индивидный или функциональный символ, встречающийся в P-формулах.

Пусть C_1' будет замыканием C' относительно дедукции в E'. Тогда

(β) Любая формула $A \in C_1$ тогда и только тогда, когда ее преобразование $A' \in C_1'$.

Если $A \in C_1$, т. е. A выводима в E из некоторого конечного подмножества Γ формул из C, то A' выводима в E' из соответствующего подмножества Γ' формул из C' [2]); таким образом, $A' \in C_1'$. Обратно, если $A' \in C_1'$, т. е. A' выводима в E' из некоторого конечного подмножества Γ формул из C_1', то A выводима в E из конечной совокупности Γ^0 формул из класса C [3]), таким образом, $A \in C_1$.

Теперь, начиная с C_1' (как прежде с C) и используя метод, описанный выше, построим системы S_1', S_2' и S_3', выбирая в качестве индивидных и функциональных символов S_1' символы, отличные от символов, встречающихся в P-формулах.

Пусть S_4' — система с символами как для P-формул, так и для P'-формул и имеющая аксиомы $F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ для каждого n-местного функционального символа f или (для $n=0$) индивидного символа f, содержащегося в P-формулах, с соответствующим предикатным символом F, содержащимся в P'-формулах [4]). Аксиомы системы E' содержатся в C_1' и, следо-

[1]) Скажем, из главных f-несодержащих форм при последовательном применении теоремы 43 из [22], § 74.

[2]) При помощи последовательного применения теоремы 43 (a) (VIIa) из [22], § 74, с E в качестве S_2 первого применения.

[3]) Так же, как и в предыдущем примечании, но вместо (VIIa) используется $\{\Gamma \vdash_1 E'\} \to \{\Gamma^0 \vdash_2 E\}$, получающееся из (VIIb) и (VIb).

[4]) Обозначенных посредством (ii) в [22], § 74, теорема 42.

вательно, по лемме 7′ (т. е. по лемме 7 для C_1', S_1', S_2', S_3' вместо C, S_1, S_2, S_3) доказуемы в S_{123}'. Следовательно[1]),

(γ) Для каждой P-формулы A формула $A \sim A'$ доказуема в S_{1234}'.

Теперь построим систему S_0' для S_{1234}' так же, как мы построили систему S_0 для S_{123}, и перейдем от S_{01234}' к системе S' так же, как раньше от S_{0123} к системе S, заменяя теперь лишь функциональные и индивидные символы из S_1' (но не из S_4'). Таким образом,

(δ) P- или P'-формула доказуема в S_{01234}' тогда и только тогда, когда она доказуема в системе S'.

Допустим теперь, что $A \in C$, тогда в силу (α) $A \in C_1$; следовательно, в силу (β) $A' \in C_1'$; поэтому по лемме 7′ формула A' доказуема в S_{123}' и тем более в S_{1234}', а тогда A доказуема в S_{1234}' и тем более в S_{01234}' и наконец, по (δ) A доказуема в S'.

В данном случае система S' и будет играть роль системы S.

ЧАСТЬ II

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

§ 6. Неконструктивное доказательство непротиворечивости для классического случая

В этом параграфе мы даем короткое доказательство свойства непротиворечивости для системы S (теорема 2, § 11), использующее методы теоретико-множественной логики предикатов, применимое только в случае классического, но не интуиционистского исчисления предикатов, с предикатными символами $P_1, \ldots, P_s$ в качестве базиса для P-формул.

Ввиду отношения между системами S и S_{0123} (предыдущая теорема 1) будет достаточно показать, что P-формула A доказуема в S_{0123} только тогда, когда $A \in C$. Для этого будет достаточно показать, что A недоказуема в S_{0123}, если $A \notin C$, и воспользоваться правилом контрапозиции и законом двойного отрицания. Так как любая формула выводима или невыводима в исчислении предикатов одновременно со своим замыканием и так как и класс C и множество доказуемых формул системы S_{0123}

[1]) При помощи последовательных применений теоремы 42 (II) из [22], § 74, с E' в качестве S_1 для первоначального применения. После каждого применения лемма 27 из [22], § 74 дает доказуемость в S_2 аксиомы равенства для нового f.

замкнуты относительно выводимости в исчислении предикатов, то мы можем рассматривать замыкание B формулы A вместо формулы A.

Поэтому пусть B — произвольная замкнутая формула, которая $\notin C$. Мы покажем, что B недоказуема в S_{0123}.

Предположим, что формула B истинна для каждого распределения теоретико-числовых предикатов $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$, являющихся значениями для $P_1, \ldots, P_s$, которое делает все замкнутые формулы из C истинными, когда область изменения переменных — это натуральные числа. Отсюда следовало бы по теореме Гёделя о полноте для классического исчисления предикатов в форме, применимой к бесконечным классам формул[1]), что B выводима в исчислении предикатов из множества замкнутых формул класса C, и, следовательно, в силу условия (2), что $B \in C$, в противоречие с нашим допущением о том, что $B \notin C$.

Поэтому должно найтись такое распределение теоретико-числовых предикатов $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ для символов $P_1, \ldots, P_s$, при котором все замкнутые формулы из C делаются истинными, а B ложной.

Отправляясь от этого распределения для $P_1, \ldots, P_s$, мы опишем распределение в области натуральных чисел для других индивидов, функций и предикатных символов системы S_{0123} таким образом, чтобы при результирующем значении всех нелогических символов системы S_{0123} замыкания нелогических аксиом этой системы были истинными или, другими словами, чтобы аксиомы выполнялись.

Из этого будет следовать, что B недоказуема в S_{0123}, так как B ложно[2]).

Символам 0, $'$, $f_1, \ldots, f_k$, $=$, $\doteq$ мы придадим значения $0'$, $'$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $=$, $=$ соответственно.

Пусть $[u_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, u_n]$ — натуральное число, выражаемое термом $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_i, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$, где $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$—цифры для чисел $u_1, \ldots, u_n$. Любое натуральное число может быть представлено в форме $[u_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, u_n]$ не более, чем для одного n и (для $n>0$) не более, чем для одного i и одного набора $u_1, \ldots, u_n$.

Мы определяем предикат $M(t, u)$, являющийся значением для M, индукцией по t, используя $s+20$ взаимно исключающих

[1]) [11], теорема IX; наш вывод может быть сделан непосредственно из [22], § 72, теорема 37, следствие 1, как отмечено в § 75, перед абзацем «Аксиоматическая теория множеств».

[2]) Например, в силу [22], § 37, теорема 21, как отмечено и в § 75, перед «Аксиоматической теорией множеств», но с теоремой [21], расширенной так, чтобы включить индивидные и функциональные символы в определение общезначимости.

случаев, соответствующих аксиомам системы S_3, используя интуитивно символы $\equiv$, $\to$, &, $\vee$, $-$, (x) и (Ex) как логические интерпретации символов $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall x$, $\exists x$; например,

$$(\mathrm{P}_r) \qquad M(2^{r+15}, [\overline{b}_1, \ldots, b_{n_r}]) \equiv P_r(b_1, \ldots, b_{n_r})$$

при $r=1, \ldots, s$;

$$(\supset 1) \qquad M(2^5 \cdot 3^a \cdot 5^b, 2^{3^c \cdot 2^d} \cdot 3^e \cdot 5^f) \equiv \equiv M(a, 2^c \cdot 3^d \cdot 5^0) \to M(b, 2^0 \cdot 3^a \cdot 5^f).$$

$s+21$-м случаем будет случай, когда ни один из предыдущих неприменим; в этом случае $M(t, u)$ будет ложно.

При распределении, определение которого теперь закончено, аксиомы системы S_{0123} выполняются. Выполняется также аксиома (N) системы S_2 потому, что при данной интерпретации символов системы S_1 формула $N(\boldsymbol{a})$ истинна только тогда, когда a является H-номером некоторой замкнутой P-формулы E, принадлежащей классу C'. В то же время при заданном распределении для 0, $'$, M, $P_1, \ldots, P_s$ формула $M(\boldsymbol{a}, 0)$ истинна, если истинна эта формула E; но E истинна, потому что наше распределение для $P_1, \ldots, P_s$ делает все замкнутые формулы из C истинными. При таком доказательстве непротиворечивости мы можем упростить конструкцию системы S, рассматривая (II) и (III) так же, как и другие схемы при построении системы S_1, опуская $\&0 \cdot a=0$ в определении $N(a)$ и используя $=$ вместо $\doteq$ для системы S_0.

В случае, когда в P-формулах имеются индивидные и функциональные символы, это доказательство позволяет нам следующим образом избежать многого из того, что имеется в следующем параграфе. Если формула A доказуема в S', то по (δ) A доказуема в S'_{01234}; следовательно, по (γ) формула A' доказуема в S'_{01234} и, значит, в S'_{0123} [1]); поэтому из приведенного выше результата (для класса C'_1 вместо класса C) следует $A' \in C'_1$; следовательно, по (β) $A \in C_1$; и окончательно по (ζ) § 11 (который зависит от леммы 9 § 7) $A \in C$.

§ 7. Эффект от аксиом равенства для нового символа равенства

В оставшейся части статьи мы приводим метаматематическое доказательство непротиворечивости для системы S (т. е. для S относительно C), пригодное как для классического, так и для интуиционистского исчисления предикатов.

[1]) Последовательными применениями теоремы 42 (V) и леммы 27 из [22], § 74.

Идея этого доказательства состоит в том, что любое данное доказательство формулы A в системе S мы можем последовательно преобразовать таким образом, чтобы отделить применения правил, связанные только с какой-нибудь одной из различных групп аксиом системы S, показывая каждый раз при этом, что аксиомы из отделенной группы имеют именно тот эффект, который мы намеревались получить от них, когда вводили их для того, чтобы получить свойство полноты в части I при построении системы S.

Преобразования доказательства формулы A в системе S основаны в конечном счете на генценовской основной теореме [1]) и в большинстве случаев непосредственно на теореме о перестановочности, установленной в первой части этого мемуара. Мы предполагаем теперь знакомство с этой статьей, и при ссылках на леммы и теоремы из нее приписываем им префикс «Р».

В двух случаях (леммы 8 и 10), когда мы имеем дело с изолированной группой аксиом, допускающей финитную интерпретацию, мы пользуемся общей теоремой о непротиворечивости, сформулированной впервые Бернайсом (и которая может также быть обоснована при помощи генценовской основной теоремы [2])). В дополнение к финитной интерпретации аксиом (которая в случае леммы 8 известна алгебраистам) она дает метаматематическое доказательство того, что применения логических правил, ведущих от аксиом к формуле A, не могут нарушить эту интерпретацию.

Лемма 8. *Рассмотрим формальную систему, основанную на исчислении предикатов с определенными индивидными и функциональными символами и некоторым бинарным предикатом* $=$, *имеющую своими нелогическими аксиомами аксиомы равенства для* $=$ *и своих функциональных символов, т. е. аксиомы* (i) *и* (ii) § 3.

(a) *В этой системе формула* $r_1=s_1 \vee \ldots \vee r_m=s_m$ $(m \geqslant 1)$ *доказуема только тогда, когда для некоторого* $j (1 \leqslant j \leqslant m)$ r_j *и* s_j *являются одним и тем же термом*; (b) *следовательно, эта система непротиворечива.*

Доказательство. Для того чтобы применить теорему о непротиворечивости Бернайса, или Гильберта — Бернайса, или автора [2]), мы опишем некоторый процесс оценки, применяемый к формулам рассматриваемой системы с присоединенным к ней

[1]) [10] или [22], § 78, теорема 48.

[2]) [2], стр. 98—99; [18], стр. 36—38; [22], § 79, теорема 51. Доказательство этой теоремы сохраняется и для случая, когда в формальной системе имеется бесконечное число индивидных и функциональных символов (вместо конечного числа их) или же (как здесь) они присоединяются в процессе оценки.

бесконечным перечислимым множеством новых индивидных символов. Для этого процесса различные постоянные термы будут эффективно интерпретироваться как термы, выражающие различные индивиды из области, а $=$ будет выражать равенство; таким образом, $r^*=s^*$ истинно для постоянных термов r^* и s^* тогда и только тогда, когда r^* и s^* являются одним и тем же термом.

Все формулы (i) и (ii) истинны при этой интерпретации (или эффективно истинны по терминологии [22], § 79). Следовательно, по теореме о непротиворечивости должна быть истинна формула $r_1=s_1 \vee \ldots \vee r_m=s_m$.

Пусть вместо различных свободных переменных подставлены различные индивидные символы из числа тех, которые мы присоединили к первоначальной системе. Получившаяся формула $r_1^*=s_1^* \vee \ldots \vee r_m^*=s_m^*$ должна быть истинной, что возможно только тогда, когда для некоторого j формула $r_j^*=s_j^*$ истинна, т. е. r_j^* и s_j^* — один и тот же терм. Но r_j^* может быть тем же самым термом, что и s_j^*, только тогда, когда r_j — тот же самый терм, что и s_j. (b) имеет место в силу (a), в частности, недоказуема любая формула вида $a=b$, где a и b — различные переменные.

Лемма 9. *Пусть дана формальная система, основанная на исчислении предикатов с индивидными, функциональными и предикатными символами и нелогическими аксиомами. Пусть другая система получается из первой добавлением нового двуместного предикатного символа $=$ и аксиом, являющихся аксиомами равенства для функциональных и предикатных символов первоначальной системы, т. е. аксиом* (i), (ii) *и* (iii) § 3.

Тогда формула A, не содержащая $=$, доказуема в расширенной системе только в случае, когда она доказуема в исходной системе.

Доказательство. Пусть дано доказательство формулы A в расширенной системе. Это доказательство содержит вхождения конечного числа аксиом. Тогда, используя дедукционную теорему и свойства конъюнкции и кванторов, получаем, что в исчислении предикатов доказуема формула вида

$$L_1 \& \ldots \& L_p \& M_1 \& \ldots \& M_q \& N_1 \& \ldots \& N_r \supset K,$$

в которую никакая переменная не входит свободно и связанно. Здесь $L_1, \ldots, L_p$ — это формулы, конгруэнтные замыканиям тех аксиом вида (i) и (ii), которые входят в данное доказательство формулы A; формулы $M_1, \ldots, M_q$ и $N_1, \ldots, N_r$ получаются аналогично, если исходить из аксиомы вида (iii) и аксиом первоначальной системы соответственно, а K конгруэнтна формуле A.

Теперь по теореме P1 (b) (которая включает в себя генценовскую основную теорему) существует доказательство в системе G секвенции $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q, N_1, \ldots, N_r \rightarrow K$ с чистыми переменными.

Применения правил системы G, принадлежащие вхождениям логических символов в формулы $L_1, \ldots, L_p$ из этой секвенции (ср. с § P2) — это применения правил $\supset\rightarrow$ и $\forall\rightarrow$; поместим их в класс C_1.

Применения правил вывода, принадлежащие $M_1, \ldots, M_q$ в порядке их положения*) в аксиомах (iii), считая изнутри, — это $\supset\rightarrow$, принадлежащее второму $\supset$-символу любой аксиомы, $\supset\rightarrow$, принадлежащее первому $\supset$-символу, и $\forall\rightarrow$; поместим их в классы C_2, C_3 и C_4 соответственно. Поместим в класс C_5 вхождения логических символов, происходящие от $N_1, \ldots, N_r$. Тогда выполнены условия теоремы P2 (теоремы о «перестановочности»); поэтому, применяя леммы P4 и P9 и теорему P2, мы можем перестроить вывод секвенции

$$L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q, N_1, \ldots, N_r \rightarrow K$$

в G таким образом, чтобы применения правил, принадлежащие логическим символам, входящим в классы C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, встречались именно в этом порядке, считая сверху вниз, и доказательство обладало бы свойствами, описанными в этих двух леммах.

Рассмотрим некоторую самую нижнюю секвенцию в этом доказательстве, ни над, ни под которой нет применений правил из C_1, C_2, C_3 или C_4. Любая такая секвенция или является конечной секвенцией (когда нет применений правил из C_1, C_2, C_3 или C_4) или же посылкой какого-нибудь применения двухпосылочного правила, над другой посылкой которого имеется применение правила из C_1, C_2, C_3 или C_4. В эту секвенцию не может входить никакая собственная подформула какой-нибудь формулы из $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$ потому, что нет таких применений правил вывода из C_1, C_2, C_3 или C_4, при помощи которых можно было бы преобразовать ее в соответствующую формулу из $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$ в последней секвенции. В силу свойства, описанного в лемме P4, те формулы из списка $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$, которые входят в эту секвенцию, вводятся утончением, так как в силу свойства, описанного в лемме P9, ни одна из них не прослеживаема до аксиом потому, что сами они не элементарны и над ними нет применений правил,

*) Имеется в виду порядок тех вхождений логических символов в конечную секвенцию, которым принадлежат рассматриваемые применения правил. — *Прим. ред.*

принадлежащих им. За каждым самым нижним применением правила из C_2 следуют применения правил из C_3, за которыми в свою очередь следуют применения правил из C_4 (ср. замечания, предшествующие лемме P12).

Если бы нашлось самое нижнее применение правила, принадлежащее C_1, такое, что ниже него нет применений правил из C_2, C_3 и C_4, то заключение этого применения правила не могло бы содержать подформул формул $M_1, \ldots, M_q$. Действительно, в силу свойства, описанного в лемме P9, такие подформулы могли бы входить только, если бы они были прослеживаемы до аксиом. Но тогда в силу свойства, описанного в лемме P9, эти подформулы должны быть элементарными, а по предположению ниже нет применений правил, которые могли бы их преобразовать в $M_1, \ldots, M_q$ последней секвенции.

Таким образом, заключение этого применения правила имело бы форму ST из леммы P6, где S состоит из некоторого подсписка Λ списка $L_1, \ldots, L_p$, стоящего в антецеденте, а T — из подформул $N_1, \ldots, N_r, K$. Тогда по этой лемме или S или T будет состоять из формул, не прослеживаемых до аксиом. Но главная формула того применения правила из класса C_1, о котором идет речь, должна быть прослеживаема до аксиом по лемме P4. Следовательно, получалось бы, что именно T состоит из формул, не прослеживаемых до аксиом. Таким образом, по лемме P3 S была бы доказуема, т. е. была бы доказуема $\Lambda \rightarrow$, в противоречие с леммой 8 (b) (достаточно получить с помощью утончения $\Lambda \rightarrow K \mathbin{\&} \neg K$ и использовать теорему P1(a)).

Таким образом, нижняя часть данного доказательства секвенции

$$L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q, N_1, \ldots, N_r \rightarrow K$$

представляет собой вывод конечной секвенции из самых нижних секвенций, не имеющих ни над, ни под собой применений правил вывода, принадлежащих классам C_1, C_2, C_3 или C_4, и из (вхождений секвенций в качестве) заключений самых нижних применений правил из C_4. Как мы отметили, имеющиеся в этой части вывода вхождения формул $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$ вводятся утончением. Таким образом, если доказательства последних секвенций (входящие как части доказательства в целом) можно было бы заменить на доказательства, в которые формулы $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$ вводятся с помощью утончения, то мы имели бы новое доказательство секвенции $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q, N_1, \ldots, N_r \rightarrow K$, в котором ни одна из формул $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$ не прослеживалась бы до аксиом. Тогда по лемме P3 $N_1, \ldots, N_r \rightarrow K$ была бы доказуема в G, откуда в силу теоремы P1 следовало бы, что формула K, а значит, и A

доказуемы в первоначальной формальной системе настоящей леммы. Это мы и должны показать.

Поэтому рассмотрим какое-нибудь заключение самого нижнего применения правила из C_4. Оно должно иметь вид

(a) $$\Lambda, \Pi, \Gamma \rightarrow \Theta,$$

где Λ — список из нуля или более формул $L_1, \ldots, L_p$, Π — список, состоящий из одной или более формул $M_1, \ldots, M_q$, а (в силу свойств, описанных в леммах P4 и P9) Γ и Θ состоят из элементарных подформул формул $N_1, \ldots, N_r, K$.

Достаточно будет показать, что Γ и Θ имеют общую формулу. Действительно, тогда (a) будет доказана с помощью утончений из $C \rightarrow C$, где C — это общая формула, так что формулы $L_1, \ldots, L_p, M_1, \ldots, M_q$ вводятся только утончением.

Следуя вверх в данном доказательстве от секвенции (a) по применениям правил из C_4, являющимся применениями правила $\forall \rightarrow$ и сокращения (в силу свойства, описанного в лемме P4, утончения не встречаются), мы придем к некоторой секвенции вида

(b) $$\Lambda, \overline{\Lambda}, r_1 = s_1 \supset (Q_1(r_1) \supset Q_1(s_1)), \ldots, r_m = s_m \supset (Q_m(r_m) \supset Q_m(s_m)), \Gamma, \overline{\Gamma} \rightarrow \Theta, \overline{\Theta},$$

где $m \geqslant 1$ (так как имеется по меньшей мере одно применение правила, принадлежащее классу C_4), «$Q_j(r_j)$» — это сокращение для $Q_j(t_1, \ldots, t_{i_j-1}, r_j, t_{i_j+1}, \ldots, t_{n_j})$ и т. д. и каждая черта показывает, что каждая формула, находящаяся под чертой, может входить нуль или более раз. В силу свойств, описанных в леммах P4 и P9, ни одна формула из списка Π не может вводиться лишь утончением или же быть прослеживаема до аксиом таким образом, чтобы не встречались применения правил вывода из класса C_4. Затем, следуя вверх от секвенции (b) по применениям правил из C_3, т. е. правил $\supset \rightarrow$, которые по леммам P4 и P9 должны расщеплять каждую из формул $r_1 = s_1 \supset \supset (Q_1(r_1) \supset Q_1(s_1)), \ldots, r_m = s_m \supset (Q_m(r_m) \supset Q_m(s_m))$, и выбирая все время ветвь, которая содержит первую посылку, до тех пор, пока все применения правил из C_3 не останутся ниже, мы придем к некоторой секвенции вида

(c) $$\overline{\Lambda}, \overline{\Gamma} \rightarrow \overline{\Theta}, \overline{r_1 = s_1, \ldots, r_m = s_m}.$$

Применяя лемму P6 с $\overline{\Lambda} \rightarrow \overline{r_1 = s_1, \ldots, r_m = s_m}$ в качестве S и $\overline{\Gamma} \rightarrow \overline{\Theta}$ в качестве T и используя лемму P3, получаем, что одна из этих двух секвенций должна быть доказуема.

Если доказуема $\overline{\Gamma} \to \overline{\Theta}$, то из-за того, что Γ и Θ — списки элементарных формул, Γ и Θ должны иметь некоторую общую формулу, что и нужно было показать.

Поэтому рассмотрим случай, когда доказуема первая секвенция. Если мы упорядочим запись так, чтобы первые $m_1 (m_1 \geqslant 0)$ равенств, показанные под чертой в (с), были бы как раз теми, которые входят в эту секвенцию, то в G доказуема секвенция

$$(c_1) \qquad \overline{\Lambda} \to r_1 = s_1, \ldots, r_{m_1} = s_{m_1}.$$

Но если $m_1 = 0$, то это противоречит лемме 8 (b). Поэтому по лемме 8 (a) и теореме P1 для некоторого $j (1 \leqslant j \leqslant m_1)$ r_j и s_j совпадают. Пусть обозначения выбраны так, что именно первые m_2 пар r_j и s_j из секвенции (b) являются парами, в которых r_j и s_j $(1 \leqslant m_2 \leqslant m)$ совпадают.

Теперь, если мы проследуем вверх от секвенции (b) при другом выборе посылок до тех пор, пока применения правил из C_3 не останутся ниже, то мы получим секвенцию вида

$$(c') \qquad \overline{\Lambda}, \overline{Q_1(r_1) \supset Q_1(s_1), \ldots, Q_{m_2}(r_{m_2}) \supset Q_{m_2}(s_{m_2})}, \overline{\Gamma} \to$$
$$\to \overline{\Theta}, \overline{r_{m_2+1} = s_{m_2+1}, \ldots, r_m = s_m}.$$

Но тогда по леммам P6 и P3 доказуема одна из секвенций

$$\overline{\Lambda} \to \overline{r_{m_2+1} = s_{m_2+1}, \ldots, r_m = s_m},$$

или

$$(c_1') \qquad \overline{Q_1(r_1) \supset Q_1(s_1), \ldots, Q_{m_2}(r_{m_2}) \supset Q_{m_2}(s_{m_2})}, \overline{\Gamma} \to \overline{\Theta}.$$

Но первая недоказуема по лемме 8(b), если сукцедент пуст, и по лемме 8(a) в противоположном случае (так как r_j и s_j различны для $j = m_2 + 1, \ldots, m$). Таким образом, (c_1') доказуема.

Теперь, вспоминая, что r_j и s_j одинаковы для $j = 1, \ldots, m_2$, получаем, что формулы $Q_1(r_1) \supset Q_1(s_1), \ldots, Q_{m_2}(r_{m_2}) \supset Q_{m_2}(s_{m_2})$ доказуемы в исчислении предикатов. Поэтому, используя теорему P1 сначала в одном направлении, удаляя таким образом доказуемые формулы, а затем в другом направлении, мы получаем, что секвенция $\overline{\Gamma} \to \overline{\Theta}$ доказуема в G.

Таким образом, Γ и Θ снова имеют общую формулу.

§ 8. Эффект от аксиом системы S_1

Лемма 10 (a). *Предположим, что формула $N(t_1) \vee \ldots \vee N(t_n)$ доказуема в S_1 для некоторых термов $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geqslant 1)$. Тогда для некоторого $i (1 \leqslant i \leqslant n)$ t_i — постоянный терм, выражающий натуральное число $\mathbf{t}_i$, и это число $\mathbf{t}_i$ является главным H-номером замкнутой P-формулы из класса C.*
(b). *Следовательно, система S_1 непротиворечива.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 8, мы применяем теорему о непротиворечивости. Теперь наш процесс оценки будет определен для формул в символизме, получающемся путем добавления к символам системы S_1 нового индивидного символа ω. Областью индивидов для этой интерпретации термов будет 0, 1, 2, ... (натуральные числа) и ω. Предикатный символ = будет выражать равенство. Индивидные символы 0 и ω будут выражать обозначенные так же объекты 0 и ω. Каждый функциональный символ $f_i (i = 1, \ldots, k)$ будет интерпретирован функцией φ_i, полученной посредством расширения функции φ_i, определенной над натуральными числами, следующим образом: значение φ_i полагается равным ω, когда хотя бы один из ее аргументов принимает значение ω; аналогично для $'$ полагаем $\omega' = \omega$.

При этой интерпретации каждая аксиома системы S_1 верифицируема. Предположим теперь, что формула $N(t_1) \vee \ldots \vee N(t_n)$ доказуема в S_1. Тогда, используя определение $N(a)$ и вынося кванторы, получаем, что формула

$$\exists z \, [(f(z) = t_1 \& 0 \cdot t_1 = 0) \vee \ldots \vee (f(z) = t_n \& 0 \cdot t_n = 0)]$$

доказуема.

Подставим теперь ω вместо каждого свободного вхождения переменной в эту формулу. Тогда должен найтись постоянный терм u (выражающий некоторый объект из области) такой, что формула

$$((f(u) = t_1^* \& 0 \cdot t_1^* = 0) \vee \ldots \vee (f(u) = t_n^* \& 0 \quad t_n^* = 0))$$

истинна, где $t_1^*, \ldots, t_n^*$ получаются из $t_1, \ldots, t_n$ посредством описанной подстановки.

Тогда формула $f(u) = t_i^* \& 0 \cdot t_i^* = 0$ истинна при некотором i.

Но если бы терм t_i содержал переменную, то t_i^* содержал бы ω, $0 \cdot t_i^*$ имел бы своим значением ω и формула $0 \cdot t_i^* = 0$ была бы ложна.

Следовательно, t_i — постоянный терм, t_i^* совпадает с t_i, а $f(u) = t_i$ истинна. Но тогда u должно выражать некоторое натуральное число $\mathbf{u}$, точно так же, как t_i выражает натуральное число $\mathbf{t}_i$, потому что если бы u выражало ω, то $f(u)$ выражало бы ω, а тогда $f(u) = t_i$ была бы ложна.

Таким образом, существует такое натуральное число $\mathbf{u}$, что $\xi(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_i$. А тогда по лемме 4 $\mathbf{t}_i$ является главным H-номером замкнутой P-формулы из класса C.

§ 9. Эффект от аксиом системы S_2

Лемма 11. *Если P-формула A доказуема в S_{123}, то существует конечная последовательность постоянных термов $t_1, \ldots, t_m (m \geqslant 0)$ таких, что:* (a) *числа* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_m$, *выражаемые термами* $t_1, \ldots, t_m$, *являются главными H-номерами замкнутых формул* $A_1, \ldots, A_m$ *из C.* (b) *Существует доказательство с чистыми переменными в системе G секвенции вида* $M(t_1, 0), \ldots, M(t_m, 0), \Sigma \to K$, *где* Σ — *список формул, конгруэнтных замыканиям аксиом системы* S_3, *и K — формула, конгруэнтная замыканию формулы A.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 9, мы можем заключить, что существует доказательство в системе G с чистыми переменными секвенции $\Xi, \forall x(N(x) \supset M(x, 0)), \Sigma \to K$, где Ξ — это список формул, конгруэнтных замыканиям аксиом системы S_1.

Типами применений правил, которые могут принадлежать вхождениям логических символов в формулы из Ξ, являются $\supset\to$ и $\forall\to$; поместим их в C_1. Типы применений правил, которые могут принадлежать формуле $\forall x(N(x) \supset M(x, 0))$ — это $\supset\to$ и $\forall\to$ (где $\supset$ находится в области действия $\forall$ *)); поместим их соответственно в классы C_2 и C_3. Применения правил, принадлежащие вхождениям логических символов в K и Σ, поместим в класс C_4.

По теореме P2 мы можем так перестроить доказательство, чтобы применения правил из классов **) C_1, C_2, C_3 и C_4 встречались именно в этом порядке, считая сверху вниз, и в то же самое время мы можем сделать так, чтобы оно обладало свойствами, перечисленными в леммах P4 и P9.

В силу свойства, описанного в лемме P4, в любой самой нижней секвенции, над и под которой нет применений правил из C_1, C_2 или C_3, все вхождения формул из списка Ξ и формулы $\forall x(N(x) \supset M(x, 0))$ вводятся посредством утончения. Дело в том, что ни одна из них, не являющаяся элементарной, по лемме P9 не может быть прослеживаема до аксиом. Далее, элементарные формулы из Ξ являются равенствами и если бы одна из таких формул C была прослеживаема до аксиомы вида $C^- \to C^+$ (где «C^-» и «C^+» обозначают различные вхождения формулы C [1])), то в секвенции, о которой идет речь, не нашлось бы такой формулы D, которой могла бы принадлежать C^+, так как тогда D содержала бы знак $=$, не входящий ни в Σ, ни в K, а по предположению, ниже этой секвенции нет применений правил из классов C_1, C_2 или C_3, которые могли бы преобразовать такую формулу D в формулу $\forall x(N(x) \supset M(x, 0))$ или в какую-нибудь формулу из Ξ.

Как и прежде, за любым самым нижним применением правила из C_2 *) должно следовать применение правила, принадлежащее C_3. Далее, мы опять можем использовать леммы P4, P9, P6, P3, а теперь и 10(b) для того, чтобы показать, что за любым самым нижним применением правила из C_1 должны следовать применения правил из C_2 и C_3.

Таким образом, нижняя часть данного доказательства секвенции $\Xi, \forall x(N(x) \supset M(x, 0)), \Sigma \to K$ представляет собой вывод конечной секвенции из самых нижних секвенций, не имеющих ни над, ни под собой применений правил, относящихся к C_1, C_2 или C_3 (в эти секвенции формула $\forall x(N(x) \supset M(x, 0))$ и каждый из членов Ξ вводится непосредственно утончениями), и из заключений самых нижних применений правил вывода, принадлежащих классу C_3.

Рассмотрим теперь любое из этих заключений. Оно должно иметь следующий вид:

$$\text{(a)} \qquad \Xi, \forall x(N(x) \supset M(x, 0)), \overline{\forall x(N(x) \supset M(x, 0))}, \Gamma \to \Theta,$$

где Γ и Θ — элементарные подформулы формул Σ, K.

Случай 1. Γ и Θ имеют общую формулу. Тогда $\Gamma \to \Theta$ доказуема из аксиом с помощью утончений, а следовательно, доказуема и (a) при помощи утончений, которые вводят

$$\Xi, \forall x(N(x) \supset M(x, 0)), \quad \overline{\forall x(N(x) \supset M(x, 0))}.$$

Случай 2. Γ и Θ не имеют общих формул. Идя вверх по применениям правил, относящимся к классу C_3 (как раньше по применениям правил из C_4), мы приходим к секвенции вида

$$\text{(b)} \qquad \overline{\Xi}, N(s_1) \supset M(s_1, 0), \ldots, N(s_n) \supset M(s_n, 0), \Gamma, \overline{\Gamma} \to \Theta, \overline{\Theta}.$$

*) Здесь автор упускает из виду, что этой формуле могут принадлежать также применения правил $\to\exists$ и $\to\&$ (напомним, что $N(x)$ — это сокращение для $\exists z(f(z) = x \& 0 \cdot x = 0)$). В связи с этим обстоятельством приводимое доказательство леммы 11 нуждается в некоторых изменениях. Первое из них состоит в том, что применения $\to\exists$ и $\to\&$, принадлежащие формуле $\forall x(N(x) \supset M(x, 0))$, помещаются в новый класс C_0. Дальнейшие изменения будут отмечаться в ходе доказательства. — *Прим. ред.*

**) В связи со сказанным выше для применения теоремы P2 следует взять классификацию C_0, C_1, C_2, C_3, C_4. — *Прим. ред.*

[1]) Когда используются верхние индексы «$^-$» и «$^+$», то знаком «—» («+») помечаются вхождения в антецедент (сукцедент) или далее (в § 10) образы таких вхождений.

*) И тем более за каждым применением правила из класса C_0. — *Прим. ред.*

Пусть теперь ровно первые $n_1 (n_1 \geqslant 0)$ из формул $M(s_1, 0), \ldots, M(s_n, 0)$ принадлежат списку Θ. Идя вверх от (b) по применениям правил вывода, принадлежащим C_2, с главными формулами $N(s_j) \supset M(s_j, 0)$ и выбирая каждый раз посылку, которая содержит боковую формулу $N(s_j)$, если $j \leqslant n_1$, и $M(s_j, 0)$, если $j > n_1$, мы приходим к секвенции вида

(c) $$\overline{\Xi}, \overline{M(s_{n_1+1}, 0), \ldots, M(s_n, 0)}, \overline{\Gamma} \to \overline{\Theta}, \overline{N(s_1), \ldots, N(s_{n_1})}.$$

Теперь в силу лемм P6 и P3 должна быть доказуема или

$$\overline{\Xi} \to \overline{N(s_1), \ldots, N(s_{n_1})}, \quad \text{или} \quad \overline{M(s_{n_1+1}, 0), \ldots, M(s_n, 0)}, \ \overline{\Gamma} \to \overline{\Theta}.$$

Но последняя не может быть доказуема, так как ее антецедент и сукцедент являются списками элементарных формул, не имеющими общих формул. Итак, доказуема первая, следовательно, выбирая обозначения таким образом, чтобы именно первые n_2 из формул $N(s_1), \ldots, N(s_{n_1})$, написанных под чертой в секвенции (c), входили бы в эту секвенцию, мы получаем, что доказуема секвенция

(d) $$\overline{\Xi} \to N(s_1), \ldots, N(s_{n_2}),$$

но $n_2 = 0$ противоречило бы непротиворечивости системы S_1 (лемма 10 (b)).

Таким образом, используя лемму 10 (a) и теорему P1, получаем, что для некоторого $i (1 \leqslant i \leqslant n_2)$ s_i является постоянным термом, выражающим главный H-номер s_i некоторой замкнутой P-формулы из класса C.

Для каждого из заключений самых нижних применений правил, принадлежащих классу C_3, для которых имел место случай 2, мы сделаем следующие изменения во всем доказательстве. Замечая, что $M(s_i, 0)$ входит в Θ (так как $i \leqslant n_2 \leqslant n_1$), мы заменяем участок доказательства сверху вплоть до секвенции (a) на фигуру

$$\frac{M(s_i, 0) \to M(s_i, 0)}{M(s_i, 0), \ \Xi, \ \forall x (N(x) \supset M(x, 0)), \ \overline{\forall x (N(x) \supset M(x, 0))}, \ \Gamma \to \Theta} \ У.$$

После этого допишем формулу $M(s_i, 0)$ к антецедентам всех секвенций, стоящих ниже секвенции (a), одновременно вводя ее утончениями во вторые посылки всех встретившихся применений двухпосылочных правил вывода. Окончив эти изменения, мы все еще будем иметь доказательство; в частности, дописывания формулы $M(s_i, 0)$ не нарушают ограничения на переменные для $\to \forall$ и $\exists \to$ потому, что $M(s_i, 0)$ не содержит переменных.

Если же имел место случай 1, то мы заменяем первоначальное доказательство секвенции (a) на ее доказательство, использующее лишь утончения.

Таким образом, мы получили доказательство секвенции

$$M(t_1, 0), \ \ldots, \ M(t_m, 0), \ \Xi, \ \forall x (N(x) \supset M(x, 0)), \Sigma \to K,$$

где $t_1, \ldots, t_m$ — это s_i для всевозможных самых нижних применений правил из C_3, для которых имеет место случай 2. Таким образом, часть (a) леммы установлена. В полученном доказательстве ни одна формула из списка Ξ, $\forall x (N(x) \supset M(x, 0))$ не прослеживаема до аксиом, значит, в силу леммы P3 в системе G доказуема секвенция $M(t_1, 0), \ldots, M(t_m, 0), \Sigma \to K$. Таким образом, (b) также имеет место.

§ 10. Эффект от аксиом системы S_3

Мы будем изучать доказательства секвенции $\Delta, \Sigma \to K$ в системе G, обладающие свойством чистоты переменных, где Δ — это список формул $M(t_1, 0), \ldots, M(t_m, 0)$ для некоторых термов $t_1, \ldots, t_m$, Σ — конечная последовательность формул, конгруэнтных замыканиям аксиом системы S_3, а K — это P-формула. Кроме того, доказательства будут обладать свойством, описанным в лемме P9.

Мы можем классифицировать вхождения формул, содержащих M, в такое доказательство. Так как K не содержит M, то каждое вхождение такой формулы принадлежит вхождению $M(t_j, 0)$ в список Δ или подформуле одной из формул S, принадлежащих списку Σ. В первом случае — это вхождение $M(t_j, 0)$ в антецедент. Изучая вид формул S, входящих в антецедент, мы найдем возможности, которые могут представиться в последнем случае. Идя отсюда вверх по применениям правила $\forall \to$, для того чтобы удалить начальные кванторы $\forall$, мы придем к стоящей в антецеденте формуле (или, если есть сокращения, к нескольким формулам) вида $R \sim Q$, т. е. вида $(R^+ \supset Q^-) \& (Q^- \supset R^-)$, где $^+$ и $^-$ определяют различные вхождения одной и той же формулы[1]). Затем, используя $\& \to$, мы получаем в антецеденте формулы $R^+ \supset Q^-$ и $Q^+ \supset R^-$, а используя правила $\supset \to$, получаем R^- и Q^- в антецеденте и R^+ и Q^- в сукцеденте. Из вида аксиом системы S_3 следует, что каждая формула R элементарна и имеет вид $M(r, s)$, где r и s — термы, в то время как Q не обязательно элементарна. Если Q не элементарна, то, идя вверх по применениям правил, принадлежащим вхождениям логических

---

[1]) См. сноску [1]) на стр. 267.

символов в Q^- и Q^+, мы приходим к элементарным подформулам последних. Каждое вхождение формулы, содержащей M, мы сможем в соответствии с его положением в доказательстве и логической структуре или анализу доказательства отнести ровно к одному из упомянутых типов.

Для леммы 14 мы поместим вхождения формул, содержащих M, в две категории. Отнесем к *низшей категории* $R^+ \supset Q^-$ и $Q^+ \supset R^-$ и все вхождения, построенные из них в процессе преобразования в формулы S из Σ; к *высшей категории* отнесем те, которые принадлежат списку Δ или являются формулами вида R или Q или же являются собственными подформулами формул Q.

Первым шагом на пути установления того, что аксиомы системы S_3 дают только тот эффект, для достижения которого они были предназначены в части I, будет устранение всех аксиом вида $R^- \to R^+$, где R^- — это помеченная знаком «$^-$» подформула какой-либо формулы S из Σ, а R^+ — это помеченная знаком «$^+$» подформула другой или же той же самой формулы S из списка Σ. Это будет сделано в леммах 12 и 13.

Формула, которая входит в качестве R, т. е. в качестве R^+ или R^-, в некоторую формулу S, полностью определяет соответствующее ей Q, т. е. единственную формулу, которая может входить в качестве Q^+ или Q^- в ту же самую S. Из вида аксиом системы S_3 видно, что подстановки в эти аксиомы термов вместо свободных переменных не могут дать двух эквивалентностей с одинаковыми левыми частями и различными правыми.

Под рангом формулы $M(r, s)$, где r и s — термы, мы подразумеваем число вхождений функциональных символов в терм r. Под рангом аксиомы вида $R^- \to R^+$ мы подразумеваем ранг формулы R. Под рангом доказательства в системе G секвенции $\Delta, \Sigma \to K$ мы подразумеваем максимальный из рангов его аксиом вида $R^- \to R^+$, если такие аксиомы есть, и 0 — в противном случае. Под рангом формулы, имеющей собственные подформулы вида $M(r, s)$, мы подразумеваем максимальный из рангов таких подформул.

Данная формула может встретиться лишь в одном из двух видов $R^+ \supset Q^-$ и $Q^+ \supset R^-$, потому что R имеет более высокий ранг, чем соответствующая ей формула Q.

Л е м м а 12. *Пусть Δ — список формул $M(t_1, 0), \ldots, M(t_m, 0)$, где $t_1, \ldots, t_m$ — термы; пусть Σ — конечная последовательность формул, конгруэнтных замыканиям аксиом системы S_3, и пусть K — это P-формула. Допустим, что дано некоторое доказательство ранга $r+1$ в системе G секвенции $\Delta, \Sigma \to K$ с чистыми переменными, обладающее свойствами из лемм* P4 *и* P9. *Тогда существует другое такое доказательство не большего ранга, в котором каждая аксиома (если таковые имеются) вида $R^- \to R^+$, имеющая ранг $r+1$, входит в фигуру следующего вида (где по лемме* P1 Θ *пуста для интуиционистской системы G*[1])):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta,\ R^{+0},\ Q^+ \qquad \dfrac{R^- \to R^+}{R^-, \Gamma \to \Theta, R^+}\ \text{У}}{Q^+ \supset R^-,\ \Gamma \to \Theta,\ R^+}\supset\to}{Q^+ \supset R^-,\ \Gamma_1 \to \Theta_1^0,\ R^+} \qquad Q^-,\ Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1}{R^+ \supset Q^-,\ Q^+ \supset R^-,\ \Gamma_1 \to \Theta_1}\supset\to.$$

При этом нижнее применение правила $\supset \to$ не является верхним применением $\supset \to$ для другой такой аксиомы и обратно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В приведенной фигуре все R^- и R^+ являются вхождениями одной и той же формулы R (хотя они могут принадлежать различным формулам S из Σ), потому что $R^- \to R^+$ — аксиома. Тогда в силу сделанного выше замечания о том, что R однозначно определяет соответствующее Q, Q^+ из $Q^+ \supset R^-$ и Q^- из $R^+ \supset Q^-$ являются вхождениями одной и той же формулы Q. Таким образом, обозначения в этой фигуре корректны.

Далее, в силу сделанного выше замечания о том, что формула может встречаться лишь в одном из двух видов $R^+ \supset Q^-$ и $Q^+ \supset R^-$, последнее утверждение теоремы будет установлено, когда будет доказано остальное.

Ни одно из тех преобразований, которые будут выполняться шаг за шагом, не введет никакой новой аксиомы $R^- \to R^+$ какого-нибудь ранга, отличной от уже встречавшейся, поэтому ранг доказательства не возрастет. В случае применения леммы P4 мы не будем пытаться исключить возможность уменьшения ранга. Если это произойдет, мы получим требуемое доказательство.

В оставшейся части доказательства этой леммы будут рассматриваться лишь такие R и такие $R^- \to Q^+$, которые имеют ранг $r+1$.

Мы начнем с рассмотрения всех применений правил вывода в данном доказательстве, которые преобразуют R^- из какой-нибудь аксиомы $R^- \to R^+$ в $Q^+ \supset R^-$. Эти применения правил можно поднимать вверх до тех пор, пока каждое из них не встанет непосредственно под своей аксиомой, как в трех верхних строчках нашей фигуры. Для того чтобы убедиться в этом, мы говорим, что некоторое $\supset \to$ (назовем его L_2), находящееся ниже некоторого применения логического правила L_1, «должно быть»

[1]) Относительно смысла «^{0}» ср. формулировку правила $\supset \to$ в § P1.

выше L_1, если это L_2 преобразует R^- хотя бы одной из аксиом $R^- \to R^+$, в то время как L_1 стоит между правой посылкой L_2 и этой аксиомой $R^- \to R^+$. Теперь, так же как в классическом доказательстве теоремы P2 с леммой P10 индукцией по параметрам, которые там были названы степенью и рангом, используя леммы P7, P4 и приводимые ниже соображения, мы можем пронести применения L_2 вверх на желаемые места, так как $\supset\to$ не является L_2 ни для какой из исключительных пар L_1/L_2 в лемме P7.

Пусть L_1 — это $\supset\to$, которое преобразует R^- в $Q^+ \supset R^-$ для некоторой аксиомы $R^- \to R^+$ и которое уже стоит на желаемом месте, как в трех верхних строках в нашей фигуре, а L_2, стоящее прямо под ним (отделенное только применениями структурных правил), — это $\supset\to$, которое преобразует R'^- (входящее в Γ правила L_1) в $Q'^+ \supset R'^-$ для некоторой другой аксиомы $R'^- \to R'^+$, стоящей над левой посылкой L_1. Тогда L_2 можно поменять местами с L_1, оставляя L_1 в прежнем положении, как если бы оно было применением однопосылочного правила (с посылкой $\Gamma \to \Theta$, R^{+0}, Q^+ и заключением $Q^+ \supset R^-$, $\Gamma \to \Theta$, R^+). Дело в том, что при перестановке L_2 с L_1 по лемме P7 и при последующем восстановлении свойства из леммы P4 оказывается, что L_2, введенное над правой посылкой L_1 при этой перестановке, исчезает при восстановлении, так как его вторая боковая формула R'^- вводится утончением.

Далее мы увидим, что можно так поднять применения правила $\supset\to$, преобразующие R^+ из аксиом вида $R^- \to R^+$ в $R^+ \supset Q^-$, что эти применения станут непосредственно под теми применениями правила $\supset\to$, которые преобразуют R^- в $Q^+ \supset R^-$, не нарушая при этом тех свойств, которые уже приобретены последними.

Как уже отмечалось, любое применение правила $\supset\to$, преобразующее R'^+ (такие применения мы теперь собираемся поднимать вверх), отлично от всех $\supset\to$, преобразующих какие-либо R^- (и находящихся уже на месте).

Более того, если мы хотим переставить какое-нибудь из таких правил (обозначим его через L_1), находящееся уже на месте около своей аксиомы $R^- \to R^+$, с находящимся ниже него применением L_2 правила $\supset\to$, которое преобразует R'^+ (входящее в Θ) из другой аксиомы $R'^- \to R'^+$, то мы можем считать, что L_1 является применением следующего однопосылочного правила ($\Gamma \to \Theta$, R^{+0}, $R^+ / Q^+ \supset R^-$, $\Gamma \to \Theta$, R^+). Эта ситуация может возникнуть только в классическом случае, так как в интуиционистском случае Θ пуста.

Таким же образом фигуру, состоящую из находящегося уже на месте $\supset\to$, преобразующего R^-, и из $\supset\to$, преобразующего R^+ из той же аксиомы $R^- \to R^+$, можно рассматривать как применение двухпосылочного правила (с посылками $\Gamma \to \Theta$, R^{+0}, Q^+ и Q^-, $Q^+ \supset R^-$, $\Gamma_1 \to \Theta_1$, и заключением $R^+ \supset Q^-$, $Q^+ \supset R^-$, $\Gamma_1 \to \Theta_1$), когда мы хотим переставить ее с применением правила $\supset\to$, стоящим непосредственно под ней и преобразующим R'^+ (из Θ_1) другой аксиомы $R'^- \to R'^+$ [1]. Наконец, если мы имеем дело с классической системой G, то может случиться, что $\supset\to$, преобразующее R^+ из аксиомы $R^- \to R^+$, относительно которой оно уже стоит на месте, преобразует также R^+ из другой аксиомы $R^- \to R^+$ (с той же самой R), находящейся над левой посылкой верхнего $\supset\to$ в этой фигуре. Точнее, это происходит, когда R^{+0} (что означает R^+ классически) прослеживается до такой аксиомы. В этом случае мы можем изменить старую фигуру следующим образом: сначала ввести дополнительные R^+ с помощью $\to$У в каждую посылку верхнего $\supset\to$, а затем заменить нижнее $\supset\to$ на два $\supset\to$ с правыми посылками, полученными из старой правой посылки по правилам $\to$У, которые вводят в одну из них R^+, а в другую $R^+ \supset Q^-$, затем применить С$\to$*). Выберем такой анализ, в котором именно среднее (самое нижнее) из трех $\supset\to$ преобразует добавочное R^+ из левой (правой) посылки верхнего $\supset\to$. Тогда, как и в предыдущей ситуации, самое нижнее из этих трех $\supset\to$ может быть поднято вверх, причем остальные два остаются на своем месте и рассматриваются, как если бы фигура, состоящая из них, была применением двухпосылочного правила.

---

[1]) Для интуиционистского случая эту ситуацию ср. с последним утверждением из доказательства леммы P7.

*) Здесь у автора неточность. В действительности, правая посылка нижнего нового $\supset\to$ получается из правой посылки старого нижнего $\supset\to$ добавлением $R^+ \supset Q^-$ к антецеденту, а не к сукцеденту. Приведем измененную фигуру:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{D}{Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1, R^+, R^+} \quad \dfrac{Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1}{Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1, R^+}\to\text{У}}{R^+ \supset Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1, R^+}\supset\to \quad \dfrac{Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1}{Q^-, R^+ \supset Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1}\text{У}\to}{R^+ \supset Q^-, R^+ \supset Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1}\supset\to}{R^+ \supset Q^-, Q^+ \supset R^-, \Gamma_1 \to \Theta_1}\text{С}\to,$$

где D обозначает фигуру:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta,\ R^+,\ Q^+}{\Gamma \to \Theta,\ R^+,\ R^+,\ Q^+}\to\text{У} \quad \dfrac{R^- \to R^+}{R^-,\ \Gamma \to \Theta,\ R^+,\ R^+}\to\text{У},\ \text{У}\to}{Q^+ \supset R^-,\ \Gamma \to \Theta,\ R^+,\ R^+}\supset\to$$

— *Прим. ред.*

Используя эти наблюдения, мы можем теперь провести индукции по параметрам, которые в доказательстве леммы P10 назывались степенью и рангом, чтобы показать, что все $\supset\to$, преобразующие R^+, могут быть перемещены на желаемые места.

Лемма 13. *Пусть* Δ, Σ *и* K *удовлетворяют условию леммы* 12. *Если существует в системе* G *доказательство с чистыми переменными секвенции* $\Delta, \Sigma\to K$, *обладающее свойствами, описанными в леммах* P4 *и* P9, *то существует такое доказательство, не содержащее аксиом типа* $R^-\to R^+$.

Доказательство. Мы используем индукцию по рангу данного доказательства секвенции $\Delta, \Sigma\to K$. Если этот ранг равен $r+1$, то мы применим лемму 12 и используем индукцию по числу аксиом $R^-\to R^+$ ранга $r+1$ в полученном доказательстве секвенции $\Delta, \Sigma\to K$; назовем это число *весом*.

Пусть вес равен $w+1$. Тогда должна найтись аксиома вида $R^-\to R^+$ ранга $r+1$ такая, что две секвенции $\Gamma\to\Theta, R^{+0}, Q^+$ и $Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1$ в фигуре из леммы 12 не имеют над собой других таких аксиом; назовем такую аксиому *наивысшей* из аксиом $R^-\to R^+$ ранга $r+1$.

Дело в том, что иначе имелась бы бесконечная последовательность секвенций $R^+\supset Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1$, расположенных друг над другом и принадлежащих аксиомам $R^-\to R^+$ ранга $r+1$, так как в силу последнего замечания из леммы 12 нижнее применение правила $\supset\to$ в фигуре из леммы 12 не может быть верхним применением этого же правила ни для какой $R'^-\to R'^+$.

Рассмотрим теперь наивысшую из аксиом $R^-\to R^+$ ранга $r+1$. Для классической системы фигуру из леммы 12 можно следующим образом заменить новым выводом в системе G с добавленным генценовским правилом, называемым «сечением»[1] (здесь R^{+0} — это R^+, а Θ_1^0 — это Θ_1):

$$
\begin{array}{c}
\Gamma\to\Theta, R^+, Q^+ \qquad Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1 \\
\hline
Q^+\supset R^-, \Gamma, \Gamma_1\to\Theta, R^+, \Theta_1 \\
\hline\hline
Q^+\supset R^-, \Gamma_1, \Gamma_1\to\Theta_1, R^+, \Theta_1 \\
\hline\hline
\end{array}
\begin{array}{l} \text{сечение} \\ \\ \text{С}\to, \to\text{С} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1, R^+ \qquad Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1 \\
\hline
R^+\supset Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1
\end{array}
\ \supset\to.
$$

[1] [10]; [22], § 77, или же первая статья этого мемуара (см. сноску [1]) на стр. 211 данной книги).

Для интуиционистской системы мы вместо этого имеем

$$
\begin{array}{c}
\Gamma\to Q^+ \qquad Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1 \\
\hline
Q^+\supset R^-, \Gamma, \Gamma_1\to\Theta_1 \\
\hline\hline
Q^+\supset R^-, \Gamma_1, \Gamma_1\to\Theta_1 \\
\hline
R^+\supset Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1
\end{array}
\begin{array}{l} \text{сечение} \\ \\ \\ \text{С}\to, \text{У}\to. \end{array}
$$

В доказательстве в системе G с сечением или с аналогичным правилом, называемым «смешением»[1]), вхождение данной формулы уже не обязательно имеет потомка и образ в конечной секвенции (ср. § P2). Вместо этого может иметься ряд потомков, оканчивающийся формулой C, исчезающей при сечении или смешении.

Наша классификация вхождений формул, содержащих M (введенная перед леммой 12), относится к доказательствам секвенции $\Delta, \Sigma\to K$ в системе G. Мы теперь так распространим эту классификацию на доказательства в системе G с сечением или смешением, чтобы она стала классификацией только тех вхождений формул, содержащих M, которые имеют образы в конечной секвенции $\Delta, \Sigma\to K$.

Используя в данном доказательстве секвенции $\Delta, \Sigma\to K$ новый вывод секвенции $R^+\supset Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1$ вместе с первоначальными доказательствами его верхних секвенций $\Gamma\to\Theta, R^{+0}, Q^+$ и $Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1$ вместо старого вывода, мы получим доказательство секвенции $\Delta, \Sigma\to K$ в системе G с сечением, имеющее только w аксиом $R^-\to R^+$ ранга $r+1$. Дело в том, что над секвенцией $R^+\supset Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1$, где прежде была одна такая аксиома (наивысшая), теперь нет таких аксиом, а в оставшейся части доказательства, так же как и прежде, имеется w таких аксиом (в фигуре из леммы 12 каждая из них расположена в нужном положении относительно своих двух $\supset\to$).

По основной теореме Генцена мы можем исключить сечение, что дает новое доказательство секвенции $\Delta, \Sigma\to K$ в самой системе G. Процедура исключения изменяет только часть вывода, находящуюся над секвенцией $R^+\supset Q^-, Q^+\supset R^-, \Gamma_1\to\Theta_1$.

Допустим, что после исключения сохраняется свойство из леммы P9, и над только что упомянутой секвенцией не появляются аксиомы вида $R^-\to R^+$, имеющие ранг $r+1$. В этом

[1]) Оно формулируется следующим образом (здесь Φ и Ψ содержат C, а Φ_C и Ψ_C — результаты вычеркивания всех вхождений C в Φ и Ψ соответственно):

$$
\frac{\Pi\to\Phi \qquad \Psi\to\Omega}{\Pi, \Psi_C\to\Phi_C, \Omega}\ \text{смешение.}
$$

случае потребуется лишь применение леммы Р4 для того, чтобы восстановить свойство из леммы 12, а при этом не может увеличиться число аксиом $R^- \to R^+$ ранга $r+1$. Таким образом, окончательно мы получим новое доказательство секвенции $\Delta, \Sigma \to K$ в системе G, обладающее свойством из леммы 12, имеющее вес $\leqslant w$; поэтому применимо индукционное предположение.

Остается оправдать наше допущение. При обосновании мы будем ссылаться на генценовское или аналогичное доказательство основной теоремы [1]).

В процедуре, которая дана в этом доказательстве, сначала сечение заменяется на смешение, а затем доказательство в системе G со смешением преобразуется шаг за шагом до тех пор, пока смешения не исчезнут. Свойство из леммы Р9 очевидным образом сохраняется.

На шаге перехода от сечения к смешению и на любом последующем шаге каждому вхождению формулы в измененную фигуру, полученную на этом шаге, некоторым способом, который может быть зафиксирован в каждом случае, можно сопоставить определенное вхождение формулы в исходную фигуру.

Рассматривая доказательство основной теоремы, мы можем проверить, что если какое-нибудь вхождение формулы F в исходную фигуру и сопоставленное ему вхождение F' в измененную фигуру, полученную в результате некоторого шага, имеют образы в конечной секвенции, то они имеют один и тот же образ.

Может случиться, что у F отсутствует образ в конечной секвенции, в то время как у F' есть такой образ [2]), и обратно [3]). Но лишь подформула (собственная или несобственная) формулы сечения или смешения может не иметь образа в конечной секвенции.

На шаге перехода от сечения к смешению формула сечения становится формулой смешения. На каждом шаге исключения смешения каждая формула смешения преобразованной фигуры является подформулой формулы смешения первоначальной фигуры.

Теперь сечение, которое мы должны исключить, имеет своей формулой сечения формулу Q из первоначальной наивысшей секвенции $R^- \to R^+$. (Заметим, что в фигуре с сечением, заменяющей фигуру из леммы 12, вхождения Q^+ и Q^- как формул сечения не являются вхождениями в качестве Q^+ и Q^- в смысле классификации, введенной перед леммой 12.)

Таким образом, в процессе замены сечения на смешение и исключения смешения только подформулы формул Q могут изменять свой статус относительно классификации, введенной перед леммой 12. Новые аксиомы вида $R^- \to R^+$ могли бы появиться лишь в результате переклассификации одной из этих подформул в R. Такие аксиомы имели бы ранг $\leqslant r$, потому что каждая подформула формулы Q имеет ранг, меньший $r+1$ — ранг первоначальной формулы R, которой соответствует формула Q.

Таким образом, после исключения над секвенцией $R^+ \supset Q^-$, $Q^+ \supset R^-$, $\Gamma_1 \to \Theta_1$ не остается аксиом вида $R^- \to R^+$ ранга $r+1$.

Лемма 14. *Рассмотрим доказательство секвенции $\Delta, \Sigma \to K$, обладающее свойством из леммы* 13. *Рассмотрим произвольную формулу T, содержащую M и имеющую вхождение высшей категории* [1]) *в это доказательство. Существует некоторая конечная последовательность $T_1, \ldots, T_\chi$ $(\chi \geqslant 1)$ формул, входящих в это доказательство, такая, что T_1 — одна из формул Δ, T_χ — это T, и для каждого h $(h=1, \ldots, \chi-1)$ или T_h входит как P, и T_{h+1} как Q в некоторую формулу $(R^+ \supset Q^-) \& (Q^+ \supset R^-)$, или же T_h входит как Q, а T_{h+1} — как боковая формула некоторого применения правила вывода, имеющего это Q в качестве главной формулы.*

Доказательство. Пусть q — это максимум рангов всех формул, содержащих M и входящих в наше доказательство. Назовем *индексом* (в доказательстве) любой формулы ранга r, содержащей M и входящей в наше доказательство, число $q-r$. Мы докажем лемму индукцией по индексу формулы T.

Выберем некоторое вхождение формулы T, принадлежащее высшей категории.

Если это вхождение принадлежит одной из формул Δ в последней секвенции (случай 1), то лемма имеет место с $\chi=1$.

Если это вхождение формулы T является собственной подформулой некоторого Q (случай 2), то соответствующее R имеет меньший индекс, чем T. Тогда по индукционному предположению существует последовательность $T_1, \ldots, T_{\chi_1}$, где T_{χ_1} совпадает с R. Берем $\chi=\chi_1+2$ с Q в качестве T_{χ_1+1} и T в качестве T_{χ_1+2}.

Если рассматриваемое вхождение формулы T является вхождением в качестве Q (случай 3), то мы получаем $T_1, \ldots, T_{\chi_1}$ для соответствующего R и берем $\chi=\chi_1+1$.

[1]) Работа [10], или [22], § 78.

[2]) Например, в [22], § 78, лемма 39, случай 1a, формулы M из Σ, которые не обладают собственными потомками в первоначальной фигуре, заимствуют потомков у формул M из Π в преобразованной фигуре.

[3]) Например, в том же случае 3; формулы A в наивысшем Π обладают собственными потомками в данной фигуре, которых они теряют в преобразованной фигуре.

[1]) «Высшая категория» была определена перед леммой 12.

Если же вхождение T — это вхождение в качестве R (случай 4), то это R должно быть прослеживаемо до C^- или до C^+ из некоторой аксиомы $C^- \to C^+$, где C^- — это T. Тогда в силу свойства из леммы 13 C^+ (соответственно C^-) не есть R. Поэтому если выбрать это вхождение формулы T вместо первоначального вхождения, то можно применить один из случаев 1—3.

Лемма 15. *Пусть Δ, Σ и K такие же, как в лемме* 12, *где $t_1, \ldots, t_m$ являются теперь постоянными термами, выражающими главные H-номера $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_m$ замкнутых формул $A_1, \ldots, A_m$ из C. Тогда, если существует доказательство в системе G секвенции $\Delta, \Sigma \to K$, обладающее свойством чистоты переменных, то формула K принадлежит классу C.*

Доказательство. Используя леммы Р4, Р9 и 13, рассмотрим некоторое доказательство секвенции $\Delta, \Sigma \to K$, обладающее свойствами, описанными в леммах 13 и 14.

Мы начнем с изучения формул, содержащих M и имеющих вхождения высшей категории в это доказательство. Каждая из этих формул представляет собой некоторое T для леммы 14. Поэтому имеется последовательность $T_1, \ldots, T_\chi$. Теперь T — это $M(t_j, 0)$ для некоторого t_j, выражающего главный H-номер $\boldsymbol{t}_j$ некоторой замкнутой формулы A_j из C, где A_j определяется числом $\boldsymbol{t}_j$, а значит, термом t_j или формулой T_1 с точностью до конгруэнтности.

По $T_1, \ldots, T_\chi$ мы определим последовательность $D_1, \ldots, D_\chi$ P-формул и одновременно следующим образом по индукции докажем некоторое предложение о них:

Определение. D_1 будет формулой A_j. Если T_h входит в качестве R с T_{h+1} в качестве соответствующего Q, то D_{h+1} будет совпадать с D_h. Если T_h входит в качестве Q, а T_{h+1} — собственная подформула этого Q, то D_{h+1} будет соответствующей подформулой формулы D_h (которая существует согласно предложению).

Предложение. Имеет место следующее: (случай 1) T_1 — элементарная формула, имеющая вид $M(r,[u_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, u_n])$, где r — постоянный терм, выражающий некоторый H-номер $\boldsymbol{r}$ какой-то формулы $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_m)$, и $u_1, \ldots, u_n$ — термы, свободные для переменных $y_1, \ldots, y_n$ в формуле $E(y_1, \ldots, y_n)$, а D_h является формулой $E(u_1, \ldots, u_n)$, или (случай 2) T_h содержит ровно один логический символ, D_h имеет своим внешним логическим символом тот же самый логический символ, и соответствующие части или каждая из двух пар соответствующих частей формул T_h и D_h, которые находятся внутри области действия этого символа, таковы, что для них имеет место случай 1 (где в роли T_h и D_h выступают упомянутые части).

Теперь, так как H-номер $\boldsymbol{r}$ определяет формулу $E(y_1, \ldots, \bar{y}_i, \ldots, y_n)$ с точностью до подобия, а $\boldsymbol{r}$ определяет r, то r и $[u_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, u_n]$ вместе определяют формулу $E(u_1, \ldots, u_n)$ с точностью до конгруэнтности.

Следовательно, по любой данной формуле T, имеющей вхождение высшей категории, формула D_χ определяется с точностью до конгруэнтности, хотя, выбирая различным образом вхождения формулы T в начале доказательства леммы 14, мы придем, вообще говоря, к различным χ, $T_1, \ldots, T_{\chi-1}$, $D_1, \ldots, D_{\chi-1}$.

Пусть для каждой формулы T, входящей таким образом, мы выбираем из класса конгруэнтности, которому принадлежит ее формула D_χ, конкретную формулу, не содержащую связанных вхождений переменных, входящих свободно в доказательство; обозначим выбранную формулу посредством D.

Одновременно для каждой такой формулы T заменим все ее вхождения высшей категории на соответствующую формулу D сразу во всем рассматриваемом доказательстве секвенции $\Delta, \Sigma \to K$.

Тогда каждая аксиома остается аксиомой, а все применения правил вывода остаются применениями правил вывода того же самого вида, за исключением применений с главными формулами Q^- или Q^+, или $R^+ \supset Q^-$, или $Q^+ \supset R^-$. В частности, ограничения на переменные не нарушаются ни для одного из применений правил $\to\forall$ или $\exists\to$, так как для любого T соответствующая формула D имеет те же свободные переменные, что и T.

Применения правил вывода, имеющие Q^- или Q^+ в качестве главной формулы, будут портиться, когда в формулах D, подставляемых вместо формулы Q и ее элементарных частей, соответствующие связанные переменные выбраны по-разному. Но эти применения правил вывода становятся правильными применениями, если мы расширим постулаты системы G, допустив, что любое применение каждого постулата остается правильным применением, когда формулы в нем заменяются на конгруэнтные; назовем такую систему *системой G с конгруэнтностью.*

Теперь посмотрим, что случится с применением правила $\supset\to$, имеющим своей главной формулой $R^+ \supset Q^-$ или $Q^+ \supset R^-$; рассмотрим лишь случай, когда такой формулой является $R^+ \supset Q^-$, так как другой случай рассматривается аналогично. Первоначальная фигура имеет вид

(a) $$\frac{\Gamma \to \Theta^0, R^+ \quad Q^-, \Gamma \to \Theta}{R^+ \supset Q^-, \Gamma \to \Theta} \supset\to.$$

Сделанная подстановка изменяет боковые формулы R^+ и Q^- на формулы E и F, конгруэнтные друг другу и играющие роль D соответственно для R и для Q, выступающих в качестве T. Кроме того, могут измениться и добавочные формулы. Итак, фигура (a) заменяется на фигуру

(b) $$\frac{\Gamma^* \to \Theta^{*0}, E \quad F, \Gamma^* \to \Theta^*}{R^+ \supset Q^-, \Gamma^* \to \Theta^*},$$

не являющуюся более применением правила.

Все дерево после подстановки будет доказательством в системе G с конгруэнтностью, исключая испорченные применения правила $\supset \to$ вида (b); пусть имеется k таких применений.

Рассмотрим любое из них (оно имеет вид (b)) и заменим его на фигуру

(c) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma^* \to \Theta^{*0}, E \quad F, \Gamma^* \to \Theta^*}{E \supset E, \Gamma^* \to \Theta^*} \supset \to}{\forall (E \supset E), \Gamma^* \to \Theta^*} \forall \to}{\forall (E \supset E), R^+ \supset Q^-, \Gamma^* \to \Theta^*} \text{У} \to,$$

где $\forall (E \supset E)$ является замыканием формулы $E \supset E$. Затем в антецедент каждой секвенции, находящейся ниже заключения правила (b), мы вставим $\forall (E \supset E)$, вводя одновременно $\forall (E \supset E)$ утончениями в антецеденты других посылок каждого двухпосылочного правила вывода, лежащего ниже этого применения правила $\supset \to$.

Такие изменения не портят применений правил вывода, в частности, не нарушаются ограничения на переменные для $\to \forall$ и $\exists \to$; кроме того, эти изменения уменьшают число испорченных применений правила $\supset \to$ на единицу.

Повторяя этот процесс, мы в конце концов получим доказательство секвенции вида

$$A_1, \ldots, A_m, \forall (E_1 \supset E_1), \ldots, \forall (E_k \supset E_k), \Sigma \to K$$

в системе G с конгруэнтностью. Формулы $A_1, \ldots, A_m$ — это формулы, в которые переходят формулы из Δ (т. е. $M(t_1, 0), \ldots, M(t_m, 0)$) в результате подстановки формул D вместо формул T.

В этом доказательстве ни одна формула Σ не прослеживается до аксиом. Поэтому по лемме P3 (для системы G с конгруэнтностью) это доказательство может быть перестроено в доказательство секвенции

$$A_1, \ldots, A_m, \forall (E_1 \supset E_1), \ldots, \forall (E_k \supset E_k) \to K.$$

Мы можем также восстановить свойство из леммы P9 (которое, вообще говоря, было утеряно при подстановке формул D вместо формул T), используя различные новые свободные переменные для каждого нового применения правил $\to \forall$ или $\exists \to$.

Пусть теперь связанные переменные заменены во всем доказательстве над конечной секвенцией таким образом, чтобы каждый квантор $\forall$ или $\exists$ имел ту же самую переменную, что и квантор $\forall$ или $\exists$ в конечной секвенции, которому он принадлежит. Каждое применение правила становится применением правила в самой системе G в силу того, что доказательство секвенции $\Delta, \Sigma \to K$, получаемое применением леммы 13, обладает свойством чистоты переменных, а также в силу нашего выбора связанных переменных в формулах D и свободных переменных при восстановлении свойства леммы P9. В силу этого свойства каждая аксиома была и остается аксиомой системы G. Таким образом, рассматриваемое доказательство становится доказательством секвенции

$$A_1, \ldots, A_m, \forall (E_1 \supset E_1), \ldots, \forall (E_k \supset E_k) \to K$$

в самой системе G.

Теперь по теореме P1 (a) формула

$$A_1 \& \ldots \& A_m \& \forall (E_1 \supset E_1) \& \ldots \& \forall (E_k \supset E_k) \supset K$$

доказуема в исчислении предикатов[1]), а следовательно, доказуема и формула $A_1 \& \ldots \& A_m \supset K$, так как формула $\forall (E \supset E)$ доказуема при любом E. Но, по предположению, формулы $A_1, \ldots, A_m$ принадлежат классу C. Следовательно, в силу замкнутости (свойство (2) из введения к этой статье) K также принадлежит C.

§ 11. Окончание доказательства непротиворечивости

Теорема 2. *P-формула доказуема в системе S, построенной по данному классу C P-формул, удовлетворяющему условиям* (1) *и* (2), *так, как описано в части* I, *только тогда, когда эта формула принадлежит классу C.*

Доказательство. По лемме 9 (с $\dot{=}$ в качестве $=$ из леммы) присоединение S_0 к S_{123} не увеличивает класса доказуемых формул, не содержащих $\dot{=}$, в частности, класса доказуемых P-формул.

Поэтому, так как класс доказуемых P-формул не изменяется при переходе от S_{0123} к S, достаточно установить следующую лемму.

Лемма 16. *P-формула A доказуема в S_{123} только тогда, когда A принадлежит классу C.*

---

[1]) Вместо замены связанных переменных мы могли бы проверить, что доказательство теоремы P1 (a) ([10], или [22], § 77, теорема 47) имеет место для системы G с конгруэнтностью.

Доказательство. По леммам 11 и 15, замечая, что в силу условия (2), если формула K, конгруэнтная замыканию формулы A, принадлежит классу C, то и A принадлежит C.

Для того чтобы доказать непротиворечивость в том случае, когда индивидные и функциональные символы включаются в список символов, входящих в P-формулу, мы рассуждаем следующим образом.

(ε) Если некоторая P-формула доказуема в S'_{01234}, то она доказуема и в S'_{1234}.

По лемме 9 (с $\doteq$ в качестве $=$).

(ζ) Если некоторая *P-формула* $A \in C_1$, то $A \in C$.

Если $A \in C_1$, то для некоторого конечного подмножества Γ формул из класса C формула A выводима из списка Γ в системе E, т. е. A доказуема в системе, имеющей своими аксиомами формулы из Γ и аксиомы системы E. Но по лемме 9 (с $\doteq$ в качестве $=$) A в этом случае доказуема в системе, имеющей в качестве аксиом лишь Γ, следовательно, $A \in C$, так как класс C замкнут относительно выводимости в исчислении предикатов.

(η) Если P'-формула B доказуема в S'_{1234}, то B выводима из формул, принадлежащих классу C'_1, и аксиом системы S'_4 в исчислении предикатов.

Чтобы доказать это, мы следующим образом установим леммы 10'—16'. Для леммы 10' в лемме 10 заменяем «C» на «C'_1», «P» на «P'», «S_1» на «S'_1» с индивидными и функциональными символами для P-формул (добавленными к ее символизму) и «постоянный терм» на «постоянный терм без индивидных или функциональных символов для P-формул». В ее доказательстве индивидные символы для P-формул интерпретируются посредством ω, а функциональные символы для P-формул — посредством функций, принимающих значение ω для всех множеств аргументов. Для леммы 11' в лемме 11 заменяем «C» на «C'_1», «P» на «P'», «A» на «B», «S_{123}» на «S'_{1234}», «постоянный терм» на «постоянный терм без индивидных или функциональных символов для P-формул», а в определении списка Σ заменяем «S_3» на «S'_{34}». Чтобы получить леммы 12'—16', сделаем аналогичные изменения в леммах 12—16. При доказательстве леммы 15' мы освобождаемся от формул из Σ, которые конгруэнтны замыканиям аксиом системы S'_3, но могут остаться формулы, конгруэнтные замыканиям аксиом системы S'_4. Поэтому заключение леммы 15' состоит в том, что формула K (конгруэнтная замыканию формулы B) выводима в исчислении предикатов из формул $A_1, \ldots, A_m$, принадлежащих классу C'_1, и из формул, конгруэнтных замыканиям аксиом системы S'_4. Тогда лемма 16' совпадает с (η).

Теперь допустим, что P-формула A доказуема в S'. Тогда в силу (δ) из § 5 формула A доказуема в S'_{01234} и, следовательно, в силу (ε) — в системе S'_{1234}. Поэтому в силу (γ) формула A' доказуема в S'_{1234}. Следовательно, в силу (η) формула A' выводима в исчислении предикатов из аксиом системы S'_4 и некоторого конечного множества Γ формул, принадлежащих классу C'_1; пусть множество Γ включает все аксиомы системы E'. Тогда, используя теорию элиминации[1]), мы получаем, что формула A выводима в исчислении предикатов из множества Γ, т. е. $A' \in C'_1$. Следовательно, в силу (β) $A \in C_1$, а следовательно, в силу (ζ) $A \in C$.

Комбинируя теоремы 1 и 2, мы получаем (что и требовалось показать) следующую теорему.

Теорема 3. *Любой класс C P-формул, удовлетворяющий условиям* (1) *и* (2), *конечно аксиоматизируем в исчислении предикатов с использованием дополнительных предикатных символов.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ackermann Wilhelm, Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Math. Ann. **93** (1924—5), 1—36.

[2] Bernays Paul, Logical Calculus, Notes on lectures at the Institute for Advanced Study 1935—36, prepared with the assistance of F. A. Ficken, Mimeographed, Princeton, N. J., 1936.

[3] Church Alonzo, An insolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. **58** (1936), 345—363.

[4] Craig William, A theorem about first order functional calculus with identity, and two applications, Ph. D. thesis, Harvard University, 1951.

[5] Craig William, On axiomatizability within a system, J. Symb. Logic **18** (1953).

[6] Curry Haskell B., A theory of formal deducibility, Notre Dame mathematical lectures, no. 6, Univ. of Notre Dame, Ind., 1950.

[7] Curry Haskell B., The permutability of rules in the classical inferential calculus. J. Symb. Logic **17** (1952); Abstract 49—3—199t, Bull. Amer. Math. Soc. N 3 (1949).

[8] Feys Robert, Les methodes recentes de deduction naturelle, Revue philosophique de Louvain **44** (1946), 370—400.

[9] Feys Robert, Note complementaire sur les methodes de deduction naturelle, там же **45** (1947), 60—72.

[10] Gentzen Gerhard, Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Z. **39** (1934—35), 176—210, 405—431. (Русский перевод: Генцен Г., Исследования логических выводов, см. наст. сборник.)

---

[1]) Например, последовательно применяя теорему 42 (V) из [22], § 74.

[11] Gödel Kurt, Die Vollständigkeit der Axioms des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. Math. Phys. **37** (1930), 349—360.
[12] Gödel Kurt, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, там же **38** (1931), 173—198.
[13] Gödel Kurt, On undecidable propositions of formal mathematical Systems, Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study 1934, Mimeographed, Princeton, N. J.
[14] Herbrand Jacques, Recherches sur la théorie de la demonstration, Travaux de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, sciences mathématiques et physiques **33** (1930).
[15] Hermes Hans, Zum Begriff der Axiomatisierbarkeit, Math. Nachrichten **4** (1950—1), 343—347.
[16] Hilbert David, Ackermann Wilhelm, Grundzüge der theoretischen Logik, 3-е изд., Berlin—Göttingen—Heidelberg (Springer), 1949. (Русский перевод второго издания: Гильберт и Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, 1947.)
[17] Hilbert David, Bernays Paul, Grundlagen der Mathematik, Bd. 1, Berlin (Springer), 1934.
[18] Hilbert David, Bernays Paul, Grundlagen der Mathematik, Bd. 2, Berlin (Springer), 1939.
[19] Ketonen Oiva, Untersuchungen zum Prädikatenkalkül, Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A., I, Mathematica-phisica **23**, Helsinki (1944); реферат Бернайса в J. Symb. Logic **10** (1945), 127—130.
[20] Kleene Stephen C., General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. **112** (1936), 727—742.
[21] Kleene Stephen C., Recursive predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 41—73.
[22] Kleene Stephen C., Introduction to metamathematics, New York (Van Nostrand); Amsterdam (North Holland Pub. Co.) and Groningen (Noordhoff), 1952. (Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.)
[23] Mostowski Andrzey, Models of axiomatic systems, Fund. Math. **39** (1952), 133—158.
[24] Neumann John von, Zur Hilbertschen Beweisteorie, Math. Z. **26** (1927), 1—46.
[25] Post Emil L., Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 284—316.
[26] Rosser Barkley, Extensions of some theorems of Gödel and Church, J. Symb. Logic **1** (1936), 87—91.
[27] Rosser Barkley, Review of Wang's «The non-finitizability of impredicative principles», там же **16** (1951), 143—144.
[28] Ryll-Nardzewski Czeslaw, The role of the axiom of induction in the elementary arithmetic, Fund. Math. **39** (1952), 239—263.
[29] Tarski Alfred, Grundzüge des Systemenkalküle, Part I, Fund. Math. **25** (1935), 503—526; Part II, там же **26** (1936), 283—301.
[30] Tarsky Alfred, On essential undecidability, Abstract in J. Symb. Logic **14** (1949), 75—76.
[31] Turing Alan Mathison, On computable numbers, with an application to Entscheidungsproblem, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2 **42** (1936—7), 230—265; исправления там же **43** (1937), 544—546.
[32] Wang Hao, The non-finitizability of impredicative principles, Proc. Nat. Acad. Sci. **36** (1950), 479—484.
[33] Wang Hao, Reply to Professor Rosser, J. Symb. Logic **18** (1953).

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ*)

К. Шютте

1. Введение

Интерполяционная теорема Крейга гласит: для всякой выводимой формулы

$$A \to C$$

классической логики предикатов существует формула B, в которую входят лишь те свободные индивидные и предикатные переменные, которые встречаются одновременно и в A, и в C, и такая, что выводимы формулы $A \to B$ и $B \to C$.

Эта теорема нашла многочисленные применения. Например, теорема об определениях Бета [1] непосредственно следует из нее (см. Крейг [3]).

Кроме первоначального доказательства интерполяционной теоремы для классической логики предикатов, принадлежащего Крейгу, имеются доказательства этой теоремы (до сих пор не опубликованные), полученные различными другими методами. Доказательство соответствующей теоремы для одного из вариантов классического исчисления предикатов с бесконечно длинными формулами дано Маехара и Такеути [4].

Интерполяционная теорема имеет место также и для *интуиционистской логики предикатов*. Доказательство, которое я провел по инициативе профессора Г. Крайсела, опирается на одно интуиционистское исчисление, в основе которого лежит основная теорема Генцена. (Упомянутое исчисление приведено в [6], § 7 и независимо от этого для логики высказываний — в [5], § 144.)

Для нашего индуктивного доказательства существенно сформулировать интерполяционную теорему в таком виде, чтобы полученное утверждение было инвариантно по отношению к определенным структурным правилам вывода. Но такая общая формулировка использована лишь для доказательства по индукции. Результат эквивалентен интерполяционной теореме в обычной формулировке.

*) Schütte K., Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik, Math. Ann. **148** (1962), 192—200.

Из интерполяционной теоремы для интуиционистской логики следует соответствующая теорема для классической логики. Действительно, если формула

$$A \to C$$

логики предикатов классически выводима, то, как известно, из формулы $A \to C$, надлежащим образом преобразуя логические операторы, можно получить интуиционистски выводимую формулу

$$A^0 \to C^0.$$

При этом A^0 и C^0 содержат те же самые свободные переменные, что и соответственно A и C, и классически выводимы эквивалентности

$$A^0 \leftrightarrow A \quad \text{и} \quad C^0 \leftrightarrow C.$$

В силу интерполяционной теоремы для интуиционистской логики по формуле $A^0 \to C^0$ можно построить интерполяционную формулу B такую, что интуиционистски выводимы

$$A^0 \to B \quad \text{и} \quad B \to C^0.$$

Тогда формулы

$$A \to B \quad \text{и} \quad B \to C$$

классически выводимы. Таким образом, B является интерполяционной формулой для классического случая.

Теорема об определениях Бета для интуиционистской логики получается из соответствующей интерполяционной теоремы так же, как для классической логики.

2. Формальная система

В качестве исходных логических знаков для интуиционистской логики предикатов мы используем следующие:

$$\perp \text{ («ложь»)}, \ \wedge \text{ («и»)}, \ \vee \text{ («или»)}, \ \to \text{ («влечет»)},$$
$$\forall \text{ («для всех»)}, \ \exists \text{ («существует»)}.$$

Формулы строятся обычным образом из пропозициональных переменных, свободных предикатных переменных, свободных и связанных индивидных переменных и исходных логических знаков. *Элементарными формулами* являются основной логический знак $\perp$, пропозициональные переменные и выражения вида $p(a_1, \ldots, a_n)$, где p — n-местная свободная предикатная переменная и $a_1, \ldots, a_n$ — свободные индивидные переменные.

Выражение

$$\Gamma \to C,$$

где Γ обозначает список формул $C_1, \ldots, C_n$, используется как сокращение для

$$C_1 \to (C_2 \to (\ldots \to (C_n \to C) \ldots)).$$

Если Γ пусто, то $\Gamma \to C$ совпадает с C. Формулы $C_1, \ldots, C_n$ мы называем *передними звеньями* формулы $\Gamma \to C$, а формулу C — ее *задним звеном*. При этом C может в свою очередь содержать передние звенья. Наименьшее заднее звено формулы F, т. е. то заднее звено F, которое не является импликацией, называется *конечным звеном* F. В каждой формуле однозначно выделяется список передних звеньев, который может быть пустым, и конечное звено.

Исчисление задается *аксиомами* и *основными правилами вывода*. Основное правило вывода с *посылкой* F, соответственно F_1 и F_2, и *заключением* G мы записываем в виде

$$F \Rightarrow G, \text{ соответственно } F_1, F_2 \Rightarrow G.$$

Аналогично интуиционистскому исчислению секвенций Генцена имеем для интуиционистской логики предикатов следующее исчисление.

(I) *Аксиомы*: всякая формула вида

$$\text{(I. 1)} \quad P \to P$$

и

$$\text{(I. 2)} \quad \perp \to P,$$

где P — элементарная формула.

(II) *Основные правила вывода логики высказываний с одной посылкой*:

(II. 1) $\Gamma \to (A \to (B \to C)) \Rightarrow \Gamma \to (B \to (A \to C))$,
(II. 2) $A \to (A \to C) \Rightarrow A \to C$,
(II. 3) $C \Rightarrow A \to C$,
(II. 4) $A \to C \Rightarrow (A \wedge B) \to C$,
(II. 5) $B \to C \Rightarrow (A \wedge B) \to C$,
(II. 6) $\Gamma \to A \Rightarrow \Gamma \to (A \vee B)$,
(II. 7) $\Gamma \to B \Rightarrow \Gamma \to (A \vee B)$.

(III) *Основные правила вывода логики высказываний с двумя посылками*:

(III. 1) $\Gamma \to A,\ \Gamma \to B \Rightarrow \Gamma \to (A \wedge B)$,
(III. 2) $A \to C,\ B \to C \Rightarrow (A \vee B) \to C$,
(III. 3) $\Gamma \to A,\ B \to C \Rightarrow \Gamma \to ((A \to B) \to C)$.

(IV) *Основные правила вывода логики предикатов*:

(IV. 1) $\Gamma \to A(a) \Rightarrow \Gamma \to \exists x A(x)$,

(IV. 2) $A(a) \to C \Rightarrow \forall x A(x) \to C$,

(IV. 3) $\Gamma \to A(a) \Rightarrow \Gamma \to \forall x A(x)$,

(IV. 4) $A(a) \to C \Rightarrow \exists x A(x) \to C$ } с ограничением на переменные.

К правилам (IV. 3) и (IV. 4) относится следующее ограничение на переменные: свободная индивидная переменная a не должна входить в заключение правила.

В приведенных выше правилах список формул Γ и формула C образуют *боковые звенья* этих правил, остальные передние и задние звенья образуют главные звенья этих правил. Γ может быть пустым. Все главные звенья заключения являются передними или конечными звеньями этого заключения. Переменную, обозначенную посредством a в правилах группы (IV), мы называем *собственной переменной* упомянутых правил.

Отдельным звеньям заключения каждого правила вывода будем сопоставлять *соответствующие* звенья посылки следующим образом:

1. Тем элементам заключения, которые обозначены посредством Γ и C, будем сопоставлять так же обозначенные элементы посылки.

2. Главному звену заключения будем сопоставлять главное звено посылки, причем в правиле (II. 1) главному звену заключения A, соответственно B, должны будем сопоставить так же обозначенное главное звено посылки. Главному звену заключения A в правиле (II. 2) будем сопоставлять *оба* главных звена посылки, а главному звену заключения A в правиле (II. 3) не будем сопоставлять *никакого* звена посылки. Все остальные правила вывода имеют по одному главному звену в заключении и в точности одно сопоставленное звено во всякой посылке.

Аналогично основной теореме Генцена, в нашей дедуктивной системе допустимо «правило сечения»

$$\Gamma \to A, \quad A \to C \Rightarrow \Gamma \to C,$$

что показывает полноту правил нашего исчисления для интуиционистской логики. (Доказательство «теоремы об устранимости сечения» для рассматриваемой системы приведено в [6], § 8, для случая исчисления высказываний в [5], § 150.)

Из формулы F посредством *вычеркивания* некоторых передних звеньев формулы F можно получить формулу

$$\Gamma \to E,$$

в которой список Γ состоит из невычеркнутых передних звеньев формулы F и E является конечной формулой из F (Γ может быть пустым.)

3. Доказательство интерполяционной теоремы

Для индуктивного доказательства мы сформулируем интерполяционную теорему следующим образом:

Интерполяционная теорема. *Пусть из выводимой формулы F вычеркиванием некоторых передних звеньев получена формула F^*. Пусть Φ — список вычеркнутых передних звеньев. Тогда существует формула U со следующими свойствами*:

(a) *U содержит лишь те свободные переменные, которые входят как в Φ, так и в F^*.*

(b) *Формулы*

$$\Phi \to U \quad \text{и} \quad U \to F^*$$

являются выводимыми.

Для краткости множество свободных переменных, входящих в U, соответственно в Φ, мы обозначаем посредством $[U]$, соответственно $[\Phi]$. Тогда посредством

$$[U] \subset [\Phi] \cap [F^*]$$

мы выразим то, что U удовлетворяет условию (a) интерполяционной теоремы. Мы говорим, что U является *интерполяционной формулой* для Φ и F^*, если U удовлетворяет условиям (a) и (b).

В случае, когда Φ пусто, т. е. когда F^* совпадает с F, интерполяционная теорема тривиальна, так как в этом случае

$$\curlywedge \to \curlywedge$$

является интерполяционной формулой.

Доказательство интерполяционной теоремы проводим индукцией по выводу формулы F.

1. F является аксиомой $P \to P$ или $\curlywedge \to P$.

Непустым списком Φ передних звеньев формулы F может быть лишь P или $\curlywedge$. В обоих случаях в роли F^* выступает P. Интерполяционной формулой в этом случае является P или соответственно $\curlywedge$.

2. F является заключением основного правила вывода логики высказываний (II) с посылкой F_0.

Списку Φ передних звеньев из F соответствует некоторый (возможно, пустой) список Φ_0 передних звеньев формулы F_0. Вычеркивая из F_0 передние звенья, входящие в Φ_0, получаем

F_0^*. По индукционному предположению существует формула U такая, что

$$[U] \subset [\Phi_0] \cap [F_0^*],$$

и выводимы формулы

$$\Phi_0 \to U \quad \text{и} \quad U \to F_0^*. \tag{2.1}$$

Из структуры правил (II) видно, что $[\Phi_0] \subset [\Phi]$ и $[F_0^*] \subset [F^*]$, следовательно,

$$[U] \subset [\Phi] \cap [F^*].$$

Формулы

$$\Phi \to U \quad \text{и} \quad U \to F^* \tag{2.2}$$

совпадают с формулами (2.1) или следуют из них по правилам (II). Поэтому U является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

3. F является заключением основного правила вывода логики высказываний (III) с двумя посылками.

Здесь мы различаем три случая.

3.1. Рассматривается одно из правил (III. 1)—(III. 3), причем главные звенья заключения не содержатся в Φ.

Пусть Φ_1, Φ_2 — списки передних звеньев посылок F_1, F_2, которые соответствуют списку Φ передних звеньев формулы F. Вычеркивая в F_1, F_2 передние звенья, соответствующие Φ_1 и Φ_2, мы получаем F_1^* и F_2^*. По индукционному предположению, существуют формулы U_1 и U_2 такие, что

$$[U_1] \subset [\Phi_1] \cap [F_1^*] \quad \text{и} \quad [U_2] \subset [\Phi_2] \cap [F_2^*]$$

и выводимы формулы

$$\Phi_1 \to U_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2 \to U_2, \tag{3.1.1}$$

равно как и формулы

$$U_1 \to F_1^* \quad \text{и} \quad U_2 \to F_2^*. \tag{3.1.2}$$

Имеем $[\Phi_1, \Phi_2] \subset [\Phi]$ и $[F_1^*, F_2^*] \subset [F^*]$, следовательно,

$$[U_1 \wedge U_2] \subset [\Phi] \cap [F^*].$$

Из (3.1.1) по правилам (II. 1), (II. 3) и (III. 1) получаем

$$\Phi \to (U_1 \wedge U_2). \tag{3.1.3}$$

Из (3.1.2) по правилам (II. 4) и (II. 5) получаем

$$(U_1 \wedge U_2) \to F_1^* \quad \text{и} \quad (U_1 \wedge U_2) \to F_2^*. \tag{3.1.4}$$

Правилу вывода $F_1, F_2 \Rightarrow F$ соответствует правило вывода $F_1^*, F_2^* \Rightarrow F^*$. Таким же путем, с помощью того же правила (возможно, с применением правил (II. 1) и (II. 2)) из формул (3.1.4) получаем формулу

$$(U_1 \wedge U_2) \to F^*. \tag{3.1.5}$$

Как следует из (3.1.3) и (3.1.5), $U_1 \wedge U_2$ оказывается интерполяционной формулой для Φ и F^*.

3.2. F является заключением

$$(A \vee B) \to C$$

правила (III. 2), главное звено $A \vee B$ которого входит в Φ.

Тогда Φ имеет вид $A \vee B, \Psi$ (причем Ψ может быть пустым), и F^* получается из C вычеркиванием передних звеньев, входящих в Ψ. Посылка этого правила выглядит так:

$$A \to C \quad \text{и} \quad B \to C.$$

По индукционному предположению существуют формулы U_1 и U_2 такие, что

$$[U_1] \subset [A, \Psi] \cap [F^*] \quad \text{и} \quad [U_2] \subset [B, \Psi] \cap [F^*]$$

и выводимы формулы

$$A \to (\Psi \to U_1) \quad \text{и} \quad B \to (\Psi \to U_2), \tag{3.2.1}$$

равно как и формулы

$$U_1 \to F^* \quad \text{и} \quad U_2 \to F^*. \tag{3.2.2}$$

Очевидно, что

$$[U_1 \vee U_2] \subset [\Phi] \cap [F^*].$$

Из (3.2.1) по правилам (II. 6) и (II. 7) следует

$$A \to (\Psi \to (U_1 \vee U_2)) \quad \text{и} \quad B \to (\Psi \to (U_1 \vee U_2)). \tag{3.2.3}$$

Из (3.2.3) и (3.2.2) по правилу (III. 2) следует

$$\Phi \to (U_1 \vee U_2) \quad \text{и} \quad (U_1 \vee U_2) \to F^*.$$

Таким образом, $U_1 \vee U_2$ является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

3.3. F является заключением

$$\Gamma \to ((A \to B) \to C)$$

правила (III. 3), главное звено $A \to B$ которого входит в Φ.

Посылками этого правила являются

$$\Gamma \to A \quad \text{и} \quad B \to C.$$

Φ имеет вид

$$\Phi_1,\ A \to B,\ \Phi_2,$$

причем Φ_1 и Φ_2 состоят из передних звеньев списка Φ, содержащихся соответственно в Γ и C (Φ_1, Φ_2 могут быть пустыми). Вычеркнув из Γ и C те передние звенья, которые принадлежат соответственно Φ_1 и Φ_2, получаем Γ^* и C^*. (Γ^* может быть пустым.) Тогда F^* является формулой

$$\Gamma^* \to C^*.$$

Вычеркиванием из посылки $\Gamma \to C$ передних звеньев, принадлежащих Γ^*, получаем $\Phi_1 \to A$, и вычеркиванием из посылки $B \to C$ переднего звена B и передних звеньев, принадлежащих Φ_2, получаем C^*. По индукционному предположению, существуют такие формулы U_1 и U_2, что

$$[U_1] \subset [\Gamma^*] \cap [\Phi_1 \to A] \quad \text{и} \quad [U_2] \subset [B,\ \Phi_2] \cap [C^*],$$

и выводимы следующие формулы:

$$\Gamma^* \to U_1, \tag{3.3.1}$$

$$U_1 \to (\Phi_1 \to A), \tag{3.3.2}$$

$$B \to (\Phi_2 \to U_2), \tag{3.3.3}$$

$$U_2 \to C^*. \tag{3.3.4}$$

Так как

$$[\Phi_1 \to A,\ B,\ \Phi_2] \subset [\Phi] \quad \text{и} \quad [\Gamma^*,\ C^*] \subset [F^*],$$

то

$$[U_1 \to U_2] \subset [\Phi] \cap [F^*].$$

Из (3.3.2) и (3.3.3) по правилу (III. 3) получаем

$$U_1 \to (\Phi_1 \to ((A \to B) \to (\Phi_2 \to U_2)));$$

по правилу (II. 1) имеем

$$\Phi \to (U_1 \to U_2). \tag{3.3.5}$$

Из (3.3.1) и (3.3.4) по правилу (III. 3) следует

$$\Gamma^* \to ((U_1 \to U_2) \to C^*),$$

а по правилу (II. 1) следует

$$(U_1 \to U_2) \to F^*. \tag{3.3.6}$$

Итак, $U_1 \to U_2$ является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

4. F является заключением одного из основных правил вывода логики предикатов (IV) с собственной переменной a.

4.1. Главное звено заключения не входит в Φ.

Вычеркнув из посылки F_0 передние звенья, входящие в Φ, получим формулу F_0^*. По индукционному предположению, существует формула U_0 такая, что

$$[U_0] \subset [\Phi] \cap [F_0^*]$$

и выводимы формулы

$$\Phi \to U_0 \tag{4.1.1}$$

и

$$U_0 \to F_0^*. \tag{4.1.2}$$

Кроме собственной переменной a, F_0^* содержит лишь те свободные переменные, которые входят в F^*.

4.1.1. Переменная a не содержится в U_0.

Тогда

$$[U_0] \subset [\Phi] \cap [F^*],$$

и из (4.1.2) с помощью одного из правил (IV) (возможно с применением правила (II. 1)) следует формула

$$U_0 \to F^*.$$

В этом случае U_0 является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

4.1.2. U_0 является формулой $U(a)$, в которую входит переменная a.

Вследствие того, что $[U_0] \subset [\Phi]$, a должна содержаться в Φ. Это возможно лишь тогда, когда рассматриваемое правило совпадает с правилом (IV. 1) или (IV. 2) без ограничений на переменные. В этом случае из (4.1.2) по тому же правилу (возможно, с применением правила (II. 1)) следует формула

$$U(a) \to F^*. \tag{4.1.3}$$

Если a содержится также и в F^*, то $U(a)$ является интерполяционной формулой для Φ и F^*. В противном случае из (4.1.1) и (4.1.3) по правилам (IV. 1) и (IV. 4) следует

$$\Phi \to \exists x U(x) \quad \text{и} \quad \exists x U(x) \to F^*.$$

Тогда $\exists x U(x)$ является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

4.2. Главное звено заключения содержится в Φ.

В этом случае F совпадает с одной из формул

$$\forall x A(x) \to C \quad \text{и} \quad \exists x A(x) \to C,$$

и посылка рассматриваемого правила выглядит так:

$$A(a) \to C.$$

Пусть Ψ — список (возможно, пустой) тех передних звеньев C, которые входят в Φ. Формула F^* получается из C вычеркиванием передних звеньев, содержащихся в Ψ. По индукционному предположению, существует формула U_0 такая, что

$$[U_0] \subset [A(a), \Psi] \cap [F^*],$$

и выводимы формулы

$$A(a) \to (\Psi \to U_0) \tag{4.2.1}$$

и

$$U_0 \to F^*. \tag{4.2.2}$$

4.2.1. Переменная a не входит в U_0.
Тогда

$$[U_0] \subset [\Phi] \cap [F^*],$$

и из (4.2.1) по одному из правил (IV) следует формула

$$\Phi \to U_0.$$

В этом случае U_0 является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

4.2.2. U_0 является формулой $U(a)$, в которую входит переменная a.

Вследствие того, что $[U_0] \subset [F^*]$, a должна содержаться также и в F^*. Это возможно лишь тогда, когда рассматриваемое правило не имеет никаких ограничений на переменные, т. е. является правилом (IV. 2) с заключением

$$\forall x A(x) \to C.$$

Из (4.2.1) по правилу (IV. 2) следует

$$\Phi \to U(a). \tag{4.2.3}$$

Если a содержится в Φ, то $U(a)$ является интерполяционной формулой для Φ и F^*. В противном случае из (4.2.3) и (4.2.2) по правилам (IV. 3) и (IV. 2) следует

$$\Phi \to \forall x U(x) \quad \text{и} \quad \forall x U(x) \to F^*.$$

Тогда $\forall x U(x)$ является интерполяционной формулой для Φ и F^*.

Итак, индуктивное доказательство окончено. Очевидно, это доказательство дает способ построения интерполяционной формулы для Φ и F^*, коль скоро имеется вывод формулы F.

Построенная по приведенному выше доказательству интерполяционная формула U обладает еще такими свойствами:

1. Если в F не входит знак дизъюнкции $\vee$, то он не входит и в U.

2. Если в F не входит квантор всеобщности $\forall$, то он не входит и в U.

3. Если F не содержит ни квантора $\forall$, ни квантора $\exists$, то U тоже не содержит кванторов.

Рассмотренное выше исчисление переходит в минимальное исчисление, если из него удалить схему аксиом (1.2). (Ср. [6], §§ 7, 8 или формулировку деривативного исчисления высказываний в [5], § 144, 150.) Доказательство интерполяционной теоремы для интуиционистского исчисления непосредственно переносится на минимальное исчисление.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beth E. W., On Padoa's method in the theory of definition, Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., ser. A**56** (1953), 330—339.

[2] Craig W., Linear reasoning. A new form of the Herbrand — Gentzen theorem, J. Symb. Logic **22** (1957), 250—268.

[3] Craig W., Three uses of the Herbrand — Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, J. Symb. Logic **22** (1957), 269—285.

[4] Maehara S. and Takeuti G., A formal system of first order predicate calculus with infinitely long expressions, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 357—370.

[5] Schmidt H. Arnold, Mathematische Gesetze der Logik I, Vorlesungen über Aussagenlogik, Berlin—Göttingen—Heidelberg (Springer), 1960.

[6] Schütte K., Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik, Math. Ann. **122** (1950), 47—65.

СОЕДИНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ПОЛНЫХ ИНДУКЦИЙ В ОДНУ-ЕДИНСТВЕННУЮ *)

Герхард Генцен [1])

Ниже будет показано, что любое математическое доказательство, в котором многократно применяется способ заключения «полная индукция», можно с помощью определенных простых соединений умозаключений и понятий преобразовать таким образом, чтобы в него входило только одно-единственное применение полной индукции.

Для этого не обязательно опираться на какой-либо определенный способ формализации математических доказательств. Нужно только предположить, что понятие «математического доказательства» включает в качестве допустимых способов заключения все способы заключения «логики предикатов», а также, естественно, сам способ заключения «полная индукция». Относительно остальных теоретико-числовых составных частей нужно предположить лишь, что допускается основной предикат = и относящиеся к нему основные формулы (аксиомы) $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}$ и $\neg(\mathfrak{m}=\mathfrak{n})$ для произвольных числовых знаков $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ таких, что $\mathfrak{m}$ отличен от $\mathfrak{n}$. С другой стороны, могут допускаться произвольные дополнительные математические понятия и относящиеся к ним аксиомы. Конечно, доказываемая теорема имеет значение в первую очередь для области «чистой теории чисел». Если ее распространить на анализ, то, как показал Дедекинд, полная индукция сводима к другим способам заключения и тем самым утверждение доказываемой теоремы является беспредметным.

Доказательство протекает следующим образом.

Пусть дан некоторый вывод (т. е. формализованное доказательство), в котором многократно применяется в формализованной форме способ заключения «полная индукция». Любое применение этого способа заключения логически равнозначно

*) G. Gentzen, Zusammenfassung von mehreren vollständingen Induktionen zu einer einzigen, Arch. für math. Logik und Grundlagenforsch. 2, № 1 (1954), 81—83.

[1]) Г. Генцен посвятил эту небольшую статью «с уважением и благодарностью» Генриху Шольцу к его шестидесятилетию (17 декабря 1944 г.). Ее опубликование — это выполнение долга чести по отношению к автору, умершему в 1945 г.

применению «аксиомы индукции» к какому-нибудь конкретному высказыванию о натуральных числах, т. е. его можно формально представить в виде утверждения об истинности некоторой формулы следующего вида:

$$\{\mathfrak{F}_\nu(1) \,\&\, \forall\mathfrak{x}\,[\mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{x}+1)]\} \supset \forall\mathfrak{y}\mathfrak{F}(\mathfrak{y}).$$

При этом $\mathfrak{F}_\nu$ означает произвольную формулу с пустым местом для числовых знаков, обозначающих натуральные числа, т. е. формальный образ некоторого высказывания о натуральных числах. Индекс ν служит нам для различения различных полных индукций, встречающихся в выводе; следовательно, он пробегает числа 1, 2, ..., ρ, где ρ обозначает общее число встречающихся полных индукций ($\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ обозначают произвольные связанные переменные; формулы $\mathfrak{F}_\nu$ могут, разумеется, содержать свободные переменные).

Мы выведем теперь все эти ρ аксиом индукции, применив одну-единственную формализованную полную индукцию, соединяющую в себе их все. Это происходит следующим образом. Мы образуем формулу:

$$[\mathfrak{b}=1 \supset \mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})] \,\&\, [\mathfrak{b}=2 \supset \mathfrak{F}_2(\mathfrak{a})] \,\&\, \ldots \,\&\, [\mathfrak{b}=\rho \supset \mathfrak{F}_\rho(\mathfrak{a})],$$

кратко обозначаемую посредством $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$. (При этом $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ обозначают две свободные переменные, не входящие в рассматриваемый вывод.) Теперь *одно-единственное* применение полной индукции дает формулу

$$\{\mathfrak{H}(1) \,\&\, \forall\mathfrak{x}\,[\mathfrak{H}(\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{H}(\mathfrak{x}+1)]\} \supset \forall\mathfrak{y}\mathfrak{H}(\mathfrak{y}).$$

(При этом безразлично, каким образом формализована полная индукция: допускаются ли аксиомы упомянутого вида или выбрана какая-либо иная формулировка, например, в виде фигуры заключения. В последнем случае написанную формулу можно легко вывести.)

Из этой формулы все ρ введенных выше аксиом полной индукции выводимы чисто логическим путем, т. е. без новых применений полной индукции. Установив это, мы достигнем цели. Чтобы доказать эту выводимость, достаточно показать формальный ход рассуждения в общих чертах. Например, чтобы вывести аксиому индукции для $\mathfrak{F}_1$ из такой же формулы для $\mathfrak{H}$, следует, исходя из последней, подставить сначала 1 вместо $\mathfrak{b}$. (Если в рассматриваемом формализме не предусмотрено, что прямая подстановка является допустимой фигурой заключения, то формально это можно осуществить, например, с помощью $\forall$-введения и последующего $\forall$-удаления.) Тогда из $\mathfrak{H}(1)$ получается, например,

$$[1=1 \supset \mathfrak{F}_1(1)] \,\&\, [1=2 \supset \mathfrak{F}_2(1)] \,\&\, \ldots \,\&\, [1=\rho \supset \mathfrak{F}_\rho(1)],$$

т. е. формула, относительно которой можно уже средствами чистой логики высказываний с привлечением истинности формулы $1=1$ и ложности формул $1=2, \ldots, 1=\rho$ показать, что она равнозначна формуле $\mathfrak{F}_1(1)$. То же имеет место для $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$ с произвольным $\mathfrak{a}$. Поэтому рассматриваемую аксиому индукции в целом можно, применяя формализованные чисто логические способы заключения, преобразовать таким образом, чтобы в конце концов всюду вместо $\mathfrak{H}$ стояло $\mathfrak{F}_1$, что и требовалось показать.

Могут возразить, что мы добились лишь того, что одна и та же формализованная полная индукция встречается теперь снова на ρ различных местах в выводе, так что снова имеется ρ отдельных, хотя и одинаковых полных индукций. Однако это возражение не касается сути дела. А именно, можно не только мысленно, но и чисто формально тривиальным образом соединить все эти совпадающие друг с другом заключения по индукции так, что и в действительности останется только единственная формализованная индукция. С этой целью следовало бы связать знаками всеобщности, распространенными на всю формулу, все свободные переменные, имеющиеся в приведенной выше аксиоме индукции для $\mathfrak{H}$. Если полученную формулу обозначить через $\mathfrak{I}$, а конечную формулу вывода через $\mathfrak{D}$, то получится чисто логический вывод с несколькими формулами вида $\mathfrak{I}$ в качестве исходных формул (кроме того, в качестве исходных могут выступать другие математические аксиомы; последние в нашем рассмотрении ничего не меняют). Такой вывод, как известно, можно преобразовать в (чисто логический) вывод *без* исходных формул вида $\mathfrak{I}$ и с формулой $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{D}$ в качестве конечной формулы («дедукционная теорема», соответственно утверждение, тривиальное в секвенциальном исчислении).

Отсюда, присоединяя *один-единственный вывод формулы* $\mathfrak{I}$, снова получаем вывод первоначальной конечной формулы $\mathfrak{D}$.

Наш результат показывает, что число полных индукций, входящих в некоторое теоретико-числовое доказательство, не является мерой «сложности» этого доказательства при его метаматематическом рассмотрении. Хотя полные индукции, несмотря на сказанное, существенны для определения сложности, важно не их число, а их «степень», т. е. сложность индукционного высказывания.

ОБ ОДНОМ ЕЩЕ НЕ ИСПОЛЬЗОВАННОМ РАСШИРЕНИИ ФИНИТНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ*)

Курт Гёдель

П. Бернайс неоднократно указывал[1]), что из-за недоказуемости непротиворечивости системы с помощью лишь тех средств доказательства, которые содержит сама система, необходимо выйти за рамки математики, финитной в гильбертовом смысле, чтобы доказать непротиворечивость классической математики, и даже для того, чтобы доказать непротиворечивость классической теории чисел. Ввиду того, что финитная математика определяется как *наглядная* очевидность[2]), это означает (как явно сформулировал также П. Бернайс в L'enseignement mathematique **34** (1935), стр. 62 и 69), что для доказательства непротиворечивости теории чисел нужны определенные *абстрактные* понятия. При этом под абстрактными (или не наглядными) понятиями следует понимать понятия, существенно принадлежащие второй или более высокой ступени. Это значит, что они охватывают не свойства и отношения *конкретных объектов* (например, комбинаций знаков), а относятся к *мысленным образам* (например, к доказательствам, осмысленным высказываниям и т. д.), причем при рассмотрении доказательств используется такое понимание последних, которое получается не из комбинаторных (пространственно-временны́х) свойств представляющих их знаковых комбинаций, а из их смысла.

Хотя ввиду отсутствия точного понятия наглядной и абстрактной очевидности не имеется строгого доказательства для утверждения Бернайса, практически не может быть никакого сомнения в его истинности, особенно после того, как Генцен доказал формализуемость всех рекурсий до порядковых чисел $<\varepsilon_0$ в теории чисел. Дело в том, что истинность рекурсии до ε_0

*) Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Von Kurt Gödel, Princeton. Dialectica **12**, N 3/4 (1958), 280—287.

В порядке унификации символики произведены следующие изменения обозначений автора: $\wedge$ заменено на &, $(\exists x)$ — на $\exists x$, (x) — на $\forall x$. — *Прим. перев.*

[1]) Ср., например: Entretiens de Zurich (herausgeg. von F. Gonseth, 1941), p. 144, 147; далее: Hilbert—Bernays, Grundlagen der Mathematik **2** (1939), § 5, и Rev. Internat. Phil. Nr. 27—28 (1954), fasc. 1—2, p. 2.

[2]) Ср. гильбертовскую формулировку в Math. Ann. **95** (1925), 171—173.

безусловно нельзя сделать непосредственно наглядно очевидной, что возможно, например, для ω^2. Точнее, это значит, что мы не можем больше обозреть все различные структурные возможности, которые представляются для убывающих последовательностей, и не имеем поэтому никакой возможности наглядно убедиться в необходимости обрыва любой такой последовательности. В частности, при постепенном переходе от меньших ко все бо́льшим порядковым числам может реализоваться не такое *наглядное познание*, а лишь абстрактное познание при помощи понятий высших ступеней. Последнее дается абстрактным понятием «достижимости»[1]), которое определяется через содержательную доказуемость истинности определенных способов заключения. В рамках наглядной для нас математики невозможно также свести индукцию до достаточно большого порядкового числа к цепи других переборов. Наоборот, любая попытка сделать это приводит, по существу, к индукции того же порядка. Мы не можем сразу решить, обусловлена ли необходимость абстрактных понятий только практической невозможностью наглядно представить[2]) связи, слишком сложные комбинаторно, или эта необходимость имеет принципиальные основы. Во втором случае, после уточнения понятий, о которых идет речь, должно было бы оказаться возможным более строгое доказательство того, что эта необходимость действительно имеется.

---

[1]) В. Аккерман объясняет, однако, в Math. Z., Bd 53, p. 407, что «достижимость» имеет наглядный смысл, когда доказуемость понимается как формальная доказуемость по определенным правилам. На это можно возразить, что допустимость трансфинитной индукции для данного свойства следует из этого наглядного факта лишь с помощью абстрактных понятий (или с помощью трансфинитной индукции в метаматематике). Правда, понятие «достижимость», по крайней мере для индукций до ε_0, можно заменить более слабыми абстрактными понятиями (ср. Hilbert — Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. 2).

[2]) Заметим, что адекватная теоретико-доказательственная характеристика *идеализированной* наглядной очевидности, возникающей в результате выхода за эти рамки, будет содержать способы заключения, которые не являются для нас наглядными и которые, весьма возможно, позволили бы осуществить редукцию индуктивных заключений к индуктивным заключениям некоторого существенно меньшего порядка.

Другая возможность (для которой справедливо то же самое) расширить первоначальную финитную точку зрения состоит в том, чтобы причислить к финитной математике абстрактные понятия, в которых используются лишь финитные понятия и объекты и притом комбинаторно-финитным образом, а затем итерировать этот процесс. Таковы, например, понятия, применяемые для отражения содержания уже построенного финитного формализма. Формализм, соответствующий этой идее, был разработан Г. Крайзелем (G. Kreisel). Ср. его доклад на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге, 1958. Заметим, что при этом способе расширения финитизма абстрактный элемент появляется в существенно более слабой форме, чем при обсуждаемом ниже способе или чем в интуиционистской логике.

Во всяком случае, замечание Бернайса учит различать две составные части в финитной установке. Во-первых, конструктивный элемент, который состоит в том, что речь о математических объектах может идти лишь постольку, поскольку они могут быть предъявлены или фактически построены. Во-вторых, специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания и которые служат исходными данными построений и получаются в результате, были «наглядными», что означает, в конце концов, пространственно-временно́е сопоставление им элементов, все особенности которых, за исключением равенства и различия, несущественны. (В противоположность этому объектами интуиционистской логики являются осмысленные высказывания и доказательства.)

Именно от второго требования и приходится отказаться. До сих пор этот факт учитывался тем, что к финитной математике присоединялись части интуиционистской логики и теории порядковых чисел. Ниже показано, что для доказательства непротиворечивости теории чисел можно вместо этого использовать понятие вычислимой функции конечного типа над натуральными числами и определенные, весьма элементарные принципы построения таких функций. При этом понятие «вычислимая функция типа t» определяется следующим образом:

1. Вычислимые функции типа 0 — это натуральные числа.

2. Если уже определены понятия «вычислимая функция типа t_0», «вычислимая функция типа t_1», ..., «вычислимая функция типа t_k» (причем $k \geqslant 1$), то вычислимая функция типа $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ определяется как всегда выполнимая (причем это свойство установлено конструктивно) операция, которая сопоставляет каждой k-членной системе вычислимых функций типов $t_1, t_2, \ldots, t_k$ вычислимую функцию типа t_0. Это понятие[1]) следует считать непосредственно понятным[2]) при условии, что

---

[1]) Можно сомневаться, имеем ли мы достаточно отчетливые представление о содержании этого понятия, но не в том, справедливы ли для него приведенные ниже аксиомы. То же кажущееся парадоксальным положение вещей имеет место и для лежащего в основе интуиционистской логики понятия содержательно истинного доказательства. Как показывают приводимые ниже соображения и интуционистски интерпретируемая теория рекурсивных функций и функционалов, эти два понятия в определенных границах взаимозаменяемы в качестве основных понятий. При этом следует отметить, что хотя понятие вычислимой функции должно неявно содержать понятие доказательства, выполнимость операции должна быть непосредственно ясной из цепи определений, как это имеет место для всех функций приводимой ниже системы T.

[2]) Как известно А. М. Тьюринг дал определение понятия вычислимой функции первой ступени с помощью понятия вычислительной машины. Но если бы это понятие не было понятным раньше, вопрос о том, адекватно ли определение Тьюринга, был бы бессмысленным.

понятия «вычислимая функция типа t_i» ($i=0, 1, \ldots, k$) уже поняты. Рассматривая затем тип t как переменную, получаем нужное для доказательства непротиворечивости понятие вычислимой функции конечного типа t.

В качестве очевидных аксиом нужны, кроме аксиом равенства (также и для функций [1])), третьей и четвертой аксиом Пеано и правила подстановки вместо свободной переменной, лишь аксиомы, позволяющие, во-первых, определять функции путем приравнивания некоторому терму, построенному из переменных и ранее определенных констант и путем простой индукции по числовой переменной, и, во-вторых, применять правило полной индукции по числовой переменной. Это означает, что аксиомы этой системы (назовем ее T) формально почти те же [2]) что и аксиомы примитивно-рекурсивной теории чисел; лишь переменные (за исключением тех, к которым применяется индукция), а также определяемые константы могут иметь произвольный конечный тип над натуральными числами. Для простоты в дальнейшем добавлено двузначное исчисление высказываний применительно к уравнениям, хотя истинностные функции можно заменить теоретико-числовыми функциями. Система T дедуктивно равносильна системе рекурсивной теории чисел, в которой допускается полная индукция для всех порядковых чисел $<\varepsilon_0$ (в обычном представлении).

Сведе́ние непротиворечивости классической теории чисел к непротиворечивости системы T достигается с помощью следующей интерпретации гейтинговской теории чисел, к которой, как известно, сводима классическая [3]).

Каждой формуле F интуиционистской теории чисел [4]) (совокупность свободных переменных которой обозначается через x) сопоставляется некоторая формула F' вида $\exists y \forall z A(y, z, x)$, где y и z — конечные ряды переменных некоторых типов и $A(x, y, z)$ — бескванторное выражение, в которое входят лишь переменные, входящие в x, y, z. Переменные из рядов x, y, z, число которых может быть равно и 0, попарно различны. Посредством xy обозначается ряд, составленный из x и y, взятых в этой последовательности.

[1]) Равенство между функциями следует понимать интенсионально или как равенство по определению.

[2]) При определении путем приравнивания терму появляется различие, поскольку функцию P высшего типа можно определять также через $[P(x_1, x_2, \ldots, x_n)](y_1, y_2, \ldots, y_m)=E$. Но это различие пропадает, если многоместные функции заменить одноместными по методу А. Чёрча.

[3]) Ср. Ergebnisse eines math. Kolloquiums, herausg. von K. Menger, Heft **4** (1933), p. 34.

[4]) Теория чисел должна быть формализована так, чтобы в ней не встречались пропозициональные или функциональные переменные. Аксиомы исчисления высказываний следует рассматривать как схемы для всех возможных подстановок.

Далее применяются следующие обозначения:

1. v, w — конечные ряды переменных каких-либо типов, s, t — числовые переменные; u — ряд из числовых переменных.

2. V — ряд переменных, количество и типы которых определяются тем, что каждая из них может применяться к набору аргументов y и что ряд, составленный из полученных таким образом значений (который обозначается посредством $V(y)$), совпадает с рядом V по числу и по типам членов.

3. Аналогично ряд переменных Y (Z, $\bar{Z}$) определяется относительно количества и типов членов набором аргументов s (соответственно yw, соответственно y) и рядом y (соответственно z, соответственно z), однотипным с рядом значений.

Функции с 0 пустых мест и со значениями типа τ отождествляются с объектами типа τ, одночленные ряды переменных — с переменными.

Сопоставление формулы F' формуле F осуществляется индукцией по числу k входящих в F логических операций. (Условия, которые следует соблюдать при выборе символов для связанных переменных, и эвристическое обоснование определений будут приведены после формул.)

I. Для $k=0$ $F'=F$.

II. Пусть

$$F' = \exists y \forall z A(y, z, x)$$

и

$$G' = \exists v \forall w B(v, w, u)$$

уже определены.

Тогда, *по определению*,

1. $(F \& G)' = \exists yv \forall zw [A(y, z, x) \& B(v, w, u)]$.
2. $(F \vee G)' = \exists yvt \forall zw [(t=0 \& A(y, z, x)) \vee (t=1 \& B(v, w, u))]$.
3. $[\forall sF]' = \exists Y \forall sz A(Y(s), z, x)$.
4. $[\exists sF]' = \exists sy \forall z A(y, z, x)$.
5. $(F \supset G)' = \exists VZ \forall yw [A(y, Z(yw), x) \supset B(V(y), w, u)]$.
6. $(\neg F)' = \exists \bar{Z} \forall y \neg A(y, \bar{Z}(y), x)$,

s — произвольная числовая переменная.

Перед применением правил 1—5 следует в случае необходимости так переименовать связанные переменные формул F' и G', чтобы они стали отличны друг от друга, от переменных из рядов x, u, а также от s. Далее, следует таким образом выбирать переменные t, Y, V, Z, $\bar{Z}$, вводимые вновь применениями правил 2, 3, 5, 6, чтобы они были отличны друг от друга и от переменных, уже входящих в соответствующие формулы.

Заметим, что 6 следует из 5, если $\neg p$ определить через $p \supset (0=1)$. Мы приходим к правилу 5, отождествляя (для появляющихся частных случаев) высказывание $\exists x H(x) \supset \exists y R(y)$ (соответственно $\forall y R(y) \supset \forall x H(x)$) с существованием вычислимой функции, определенной для всех наборов аргументов, однотипных с набором x, которая любому примеру для посылки (соответственно контрпримеру для заключения) сопоставляет пример для заключения (соответственно контрпример для посылки).

Здесь, разумеется, не утверждается, что определения 1—6 воспроизводят смысл введенных Брауэром и Гейтингом логических частиц. Вопрос о том, насколько они могут заменить эти частицы, нуждается в более тщательном исследовании. Легко показать, что *если F доказуема в гейтинговской системе Z теории чисел, то можно определить в T функции Q, для которых в T доказуемо* $A(Q(x), z, x)$. А именно, легко проверить, что это утверждение справедливо для аксиом системы Z и его истинность переносится при применениях правил вывода системы Z от посылок к заключению.

Проверка особенно проста, если положить в основу следующую систему аксиом для интуиционистской логики [1]).

Аксиомы: Taut, Add, Perm, двойственные им аксиомы для &, $0=1 \supset p$ ($\neg p$ определяется через $p \supset (0=1)$).

Правила вывода: modus ponens, правило подстановки вместо свободной числовой переменной, Syll (с двумя посылками), Sum, Exp, Imp, правила введения и удаления знака всеобщности (соответственно существования) в заключении (соответственно в посылке) доказанной импликации.

Для доказательства непротиворечивости классической теории чисел можно удалить аксиомы и правила вывода, содержащие $\vee$ и $\exists$. Для всех правил, следующих за Sum, оказывается, что утверждение, которое требуется доказать в T, по существу, совпадает с уже доказанным на основе посылок.

Ясно, что, исходя из той же основной идеи, можно построить системы, существенно более сильные, чем T, допуская, например, трансфинитные типы или способы заключения, использованные Брауэром при доказательстве «теоремы о веерах» [2]).

[1]) Относительно обозначений, ср.: Principia Mathematica, 2 Aufl., p. XII. Те же обозначения применяются и для правил вывода, соответствующих формулам.

[2]) Ср.: A. Heyting, Intuitionism, 1956, p. 42. (Русский перевод: А. Гейтинг, Интуиционизм, «Мир», 1965.)

Резюме

П. Бернайс указал, что для доказательства непротиворечивости классической теории чисел следует расширить гильбертовскую финитную точку зрения, допуская наряду с комбинаторными понятиями, относящимися к символам, также определенные абстрактные понятия. Абстрактные понятия, применявшиеся для этой цели до сих пор, — это понятия конструктивной теории порядковых чисел и интуиционистской логики. Показано, что вместо этого можно использовать понятие вычислимой функции конечного простого типа над натуральными числами, причем в качестве способов построения для таких функций нужны лишь простая рекурсия по числовой переменной и подстановка функций друг в друга (с тривиальными функциями в качестве исходного пункта).

ДОБАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

1. Система постулатов для гейтинговской теории чисел.
Схемы аксиом.
Аксиомы исчисления высказываний:

(Taut)	$(F \vee F) \supset F$	(Taut′)	$F \supset (F \& F)$
(Add)	$F \supset (F \vee G)$	(Add′)	$(F \& G) \supset F$
(Perm)	$(F \vee G) \supset (G \vee F)$	(Perm′)	$(F \& G) \supset (G \& F)$

$$0 = 1 \supset F$$

Арифметические аксиомы:

$$\sigma(a) = \sigma(b) \supset a = b \qquad \sigma(a) = 0 \supset 0 = 1 \qquad a = b \supset \sigma(a) = \sigma(b)$$
$$a + 0 = a \qquad a + \sigma(b) = \sigma(a + b) \qquad a = b \supset (a = c \supset b = c)$$
$$a \cdot 0 = 0 \qquad a \cdot \sigma(b) = a \cdot b + a.$$

Схемы правил вывода.
Правила исчисления высказываний:

(Modus ponens) $F,\ F \supset G \Rightarrow G$

(Syll) $F \supset G,\ G \supset H \Rightarrow F \supset H$

(Sum) $F \supset G \Rightarrow (H \vee F) \supset (H \vee G)$

(Exp) $(F \& G) \supset H \Rightarrow F \supset (G \supset H)$

(Imp) $F \supset (G \supset H) \Rightarrow (F \& G) \supset H.$

Кванторные правила (x обозначает переменную, не входящую свободно в C, t — терм, свободный для x в $A(x)$):

$$C \supset A(x) \Rightarrow C \supset \forall x A(x) \qquad B \supset \forall x A(x) \Rightarrow B \supset A(t)$$
$$A(x) \supset C \Rightarrow \exists x A(x) \supset C \qquad \exists x A(x) \supset B \Rightarrow A(t) \supset B.$$

Правило полной индукции: $A(0),\ A(x) \supset A(\sigma(x)) \Rightarrow A(x)$.

2. Докажем, что построенное исчисление (обозначим его через Z) равнообъемно интуиционистской логико-арифметической системе H, описанной в § 19 книги С. К. Клини «Введение в метаматематику» (ИЛ, 1957). Используя теоремы, доказанные в этой книге, легко проверить, что все аксиомы исчисления Z выводимы в системе H и все правила этого исчисления производны в системе H. Отсюда следует, что все формулы, выводимые в Z, выводимы в H.

«Переводом» формулы, содержащей знак $\neg$, будем называть результат замены каждой ее подформулы вида $\neg A$ на $A \supset (0=1)$. Докажем, что «перевод» любой формулы, выводимой в H, выводим в Z. Все правила системы H являются также правилами исчисления Z. Приведем выводы некоторых формул в исчислении Z.

Применяя правило Exp к аксиоме Add′, получаем аксиому 1a системы H. Применяя правило Syll к аксиомам Add и Taut, получаем $F \supset F$.

Применяя к формуле $(F \& G) \supset (F \& G)$ правило Exp, получаем аксиому 3 исчисления H. Аксиома 4a этого исчисления совпадает с Add′, а аксиома 4b получается из Perm′ и 4a с помощью правила Syll. Аналогично обосновывается выводимость в Z аксиом 5a и 5b.

Докажем производность в исчислении Z некоторых правил, которые понадобятся нам для окончания доказательства равнообъемности H и Z.

(a) $F \supset G,\ F \supset (G \supset H) \Rightarrow F \supset H$.

(1) $F \supset G$; (2) $F \supset (G \supset H)$; (3) $(G \& F) \supset (F \& G)$; (4) $G \supset (F \supset (F \& G)$ [3, Exp]; (5) $F \supset (F \supset (F \& G))$ [1, 4, Syll]; (6) $(F \& F) \supset (F \& G)$ [5, Imp]; (7) $F \supset (F \& G)$ [Taut′, 6, Syll]; (8) $(F \& G) \supset H$ [2, Imp]; (9) $F \supset H$ [7, 8, Syll].

(б) $F \supset (G \supset H),\ F \supset (H \supset R) \Rightarrow F \supset (G \supset R)$.

(1) $F \supset (G \supset H)$; (2) $F \supset (H \supset R)$; (3) $(F \& G) \supset H$ [1, Imp]; (4) $H \supset (F \supset R)$ [2, Imp, Perm′, Syll, Exp]; (5) $(F \& G) \supset (F \supset R)$ [3, 4, Syll]; (6) $(F \& G) \supset R$ [Add′, 5, правило (a)]; (7) $F \supset (G \supset R)$ [6, Exp].

Правила (а) и (б) позволяют обычным образом обосновать дедукционную теорему для выводов, в которых применяются только импликативные правила исчисления Z. С помощью этой теоремы легко установить, что в Z доказуема формула $(F \supset G) \supset ((F \supset (G \supset H)) \supset (F \supset H))$, т. е. аксиома 1b исчисления H, а также формулы

$$(F \supset G) \supset ((H \supset F) \supset (H \supset G)),\quad F \supset ((F \supset G) \supset (H \supset G)),$$
$$F \supset (G \supset ((F \supset H) \supset H)). \qquad (*)$$

Отметим, что «перевод» аксиомы 7 исчисления H является частным случаем аксиомы 1b этого исчисления.

(в) $F \supset H,\ G \supset H \Rightarrow (F \vee G) \supset H$.

(1) $F \supset H$; (2) $G \supset H$; (3) $(G \vee F) \supset (H \vee G)$ [1, Sum, Perm, Syll]; (4) $(H \vee G) \supset H$ [2, Sum, Taut, Syll]; (5) $(F \vee G) \supset H$ [3, 4, Syll, Perm, Syll].

Формула $(F \supset H) \supset ((G \supset H) \supset ((F \vee G) \supset H))$, т. е. аксиома 6 исчисления H, выводится с использованием формул (*) и правила (в).

Отметим, что «перевод» аксиомы 8^{I} исчисления H (см. стр. 94 книги Клини) имеет вид $(F \supset (0=1)) \supset (F \supset G)$. Для доказательства последней формулы достаточно применить Modus ponens к аксиоме $0 = 1 \supset G$ исчисления Z и первой из формул (*).

Все арифметические аксиомы системы Z, за исключением аксиомы полной индукции, совпадают с соответствующими аксиомами системы H. Аксиома индукции легко выводится в Z с помощью правила полной индукции. Кванторные правила системы H являются также правилами исчисления Z. Кванторные аксиомы системы H выводятся в исчислении Z из формул вида $F \supset F$ путем однократного применения соответствующих правил.

3. Доказательство основной теоремы.

Теорема. *Пусть F — произвольная формула, выводимая в гейтинговской арифметике. Запишем F' в виде $\exists y \forall z A(y, z, x)$. Тогда можно построить такие функции Q, что формула $A(Q(x), z, x)$ будет выводима в системе T.*

Доказательство проводится индукцией по длине вывода рассматриваемой формулы в гейтинговской арифметике.

Пусть F, G, H — произвольные формулы. Запишем F', G', H' соответственно в виде

$$\exists y \forall z A(y, z, x),\quad \exists v \forall w B(v, w, u),\quad \exists m \forall n C(m, n, l).$$

1. Taut. Формула $((F \vee F) \supset F)'$ имеет вид

$$\exists Y Z Z_1 \forall y y_1 t z\, ((t = 0 \& A(y, Z(y, y_1, t, z), x)) \vee$$
$$\vee (t = 1 \& A(y_1, Z_1(y, y_1, t, z), x)) \supset A(Y(y, y_1, t), z, x)).$$

Нужные функции определяются равенствами:

$$Q_Y(x)(y, y_1, t) = y\overline{\mathrm{sg}}(t) + y_1 \mathrm{sg}(t),$$
$$Q_Z(x)(y, y_1, z, t) = z,$$
$$Q_{Z_1}(x)(y, y_1, z, t) = z.$$

2. Add. Формула $(F \supset (F \vee G))'$ имеет вид

$$\exists Y V T Z \forall y z w\, (A(y, Z(y, z, w), x) \supset$$
$$\supset ((T(y) = 0 \& A(Y(y), z, x)) \vee (T(y) = 1 \& B(V(y), w, u)))).$$

Нужные функции определяются равенствами:

$$Q_Y(X)(y) = y;\quad Q_Z(X)(y, z, w) = z,\quad Q_T(X)(y) = 0;$$

в качестве Q_V можно взять любые функции соответствующего типа; X обозначает результат удаления повторений из списка x, u.

3. Perm. Формула $((F \vee G) \supset (G \vee F))'$ имеет вид

$$\exists V Y T Z W \forall y v t z w\, ([(t = 0 \& A(y, Z(y, v, t, z, w), x)) \vee$$
$$\vee (t = 1 \& B(v, W(y, v, t, z, w), u))] \supset [(T(y, v, t) = 0 \& B(V(y, v, t), w, u)) \vee$$
$$\vee (T(y, v, t) = 1 \& A(Y(y, v, t), z, x))]).$$

Нужные функции определяются равенствами:

$$Q_V(X)(y, v, t) = v,\quad Q_Y(X)(y, v, t) = y,\quad Q_T(X)(y, v, t) = \overline{\mathrm{sg}}(t),$$
$$Q_Z(X)(y, v, t, z, w) = z,\quad Q_W(X)(y, v, t, z, w) = w,$$

где X обозначает результат удаления повторений из списка x, u.

4. Taut′. Формула $(F \supset (F \& F))'$ имеет вид

$$\exists Y_1 Y_2 Z \forall y z_1 z_2\, (A(y, Z(y, z_1, z_2), x) \supset (A(Y_1(y), z_1, x) \& A(Y_2(y), z_2, x)).$$

Индукцией по построению рассматриваемой формулы можно доказать, что найдутся такая бескванторная арифметическая формула $M(\alpha, x)$ (где α — список числовых переменных) и такой список U термов типа 0, что

$A(y, z, x)$ (т. е. бескванторная часть формулы F') совпадает с формулой $M(U, x)$. Известным способом построим функцию ψ такую, что в T выводима эквивалентность $M(\alpha, x) \equiv \psi(\alpha, x) = 0$. Обозначим через U_1 (через U_2) список, получаемый из U заменой z на z_1 (соответственно на z_2). Отметим, что в T выводимы эквивалентности:

$$A(y, z_1, x) \equiv \psi(U_1, x) = 0$$

и

$$A(y, z_2, x) \equiv \psi(U_2, x) = 0.$$

Нужные функции определяются следующим образом:

$$Q_{Y_1}(x)(y) = Q_{Y_2}(x)(y) = y,$$

$$Q_Z(x)(y, z_1, z_2) = \begin{cases} z_2, & \text{если } \operatorname{sg}(\psi(U_1, x)) + \overline{\operatorname{sg}}(\psi(U_2, x)) = 0, \\ z_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

5. Add'. Формула $((F \,\&\, G) \supset F)'$ имеет вид

$$\exists YZW \forall yvz \left((A(y, Z(y, v, z), x) \,\&\, B(v, W(y, v, z), u)) \supset A(Y(y, v), z, x) \right).$$

Нужные функции определяются следующим образом:

$$Q_Y(X)(y, v) = y, \quad Q_Z(X)(y, v, z) = z;$$

в качестве Q_W можно взять произвольную функцию соответствующего типа.

6. Perm'. Формула $((F \,\&\, G) \supset (G \,\&\, F))'$ имеет вид

$$\exists VYZW \forall yvwz \left((A(y, Z(y, v, w, z), x) \,\&\, B(v, W(y, v, w, z), u)) \supset \right.$$
$$\left. \supset (B(V(y, v), w, u) \,\&\, A(Y(y, v), z, x)) \right).$$

Нужные функции определяются равенствами:

$$Q_V(X)(y, v) = v,$$
$$Q_Y(X)(y, v) = y,$$
$$Q_Z(X)(y, v, w, z) = z,$$
$$Q_W(X)(y, v, w, z) = w.$$

7. Формула $(\neg(0 = 1) \supset F)'$ имеет вид

$$\exists y \forall z \left((0 = 1) \supset A(y, z, x) \right).$$

В качестве Q_y можно взять любую функцию соответствующего типа.

8. Аксиомы арифметики. Результат применения операции $'$ к любой бескванторной формуле, не содержащей $\vee$, совпадает с этой формулой.

Правила вывода. (Будут рассмотрены правила: modus ponens, Syll, Sum и «полная индукция».)

9. Modus ponens: $F, F \supset G \Rightarrow G$.

По индукционному предположению, имеются такие функции Q_y, Q_Z, Q_V, что в T выводимы формулы:

$$A(Q_y(x), z, x), \quad A(y, Q_Z(X)(y, w), x) \supset B(Q_V(X)(y), w, u),$$

где X обозначает результат удаления повторений из списка x, u.

Обозначим через X_0 (через x_0) результат замены нулями тех членов списка X (соответственно списка x), которые не входят в u. Нужные функ-

ции определяются равенствами:

$$Q_v(u) = Q_V(X_0)(Q_y(x_0)).$$

10. Syll. По индукционному предположению, имеются такие функции Q_M, Q_W, Q_V, Q_Z, что в T выводимы формулы:

$$A(y, Q_Z(X)(y, w), x) \supset B(Q_V(X)(y), w, u),$$
$$B(v, Q_W(L)(v, n), u) \supset C(Q_M(L)(v), n, l),$$

где X (соответственно L) обозначает результат удаления повторений из списка x, u (соответственно из списка u, l).

Формула $(F \supset H)'$ имеет вид

$$\exists M_1 Z_1 \forall yn \left(A(y, Z_1(y, n), x) \supset C(M_1(y), n, l) \right).$$

Нужные функции определяются равенствами:

$$Q_{M_1}(X_1)(y) = Q_M(L_0)(Q_V(X_0)(y)),$$
$$Q_{Z_1}(X_1)(y, n) = Q_Z(X_0)(y, Q_W(L_0)(Q_V(X_0)(y), n)),$$

где X_1 обозначает результат удаления повторений из списка x, l, а X_0 (соответственно L_0) обозначает результат замены нулями тех членов списка X (соответственно списка L), которые не входят в X_1.

11. Sum. По индукционному предположению, имеются такие функции Q_V и Q_Z, что в T выводима формула:

$$A(y, Q_Z(X)(y, w), x) \supset B(Q_V(X)(y), w, u).$$

Формула $((H \vee F) \supset (H \vee G))'$ имеет вид

$$\exists MV_1 TNZ_1 \forall mytnw \left([(t = 0 \,\&\, C(m, N(m, y, t, n, w), l)) \vee \right.$$
$$\vee (t = 1 \,\&\, A(y, Z_1(m, y, t, n, w), x))] \supset [(T(m, y, t) =$$
$$\left. = 0 \,\&\, C(M(m, y, t), n, l)) \vee (T(m, y, t) = 1 \,\&\, B(V_1(m, y, t), w, u))] \right).$$

Нужные функции определяются равенствами:

$$Q_M(U)(m, y, t) = m, \quad Q_{V_1}(U)(m, y, t) = Q_V(X)(y),$$
$$Q_T(U)(m, y, t) = t, \quad Q_N(U)(m, y, t, n, w) = n,$$
$$Q_{Z_1}(U)(m, y, t, n, w) = Q_Z(X)(y, w),$$

где U обозначает результат удаления повторений из списка l, x, u.

12. Правило индукции: $F(0, x_1)$, $F(s, x_1) \supset F(\sigma(s), x_1) \Rightarrow F(s, x_1)$.

Формула $(F(s, x_1) \supset F(\sigma(s), x_1))'$ имеет вид

$$\exists YZ \forall yz \left(A(y, Z(y, z), s, x_1) \supset A(Y(y), z, \sigma(s), x_1) \right).$$

По индукционному предположению, можно построить функции Q_{y_0}, Q_Y и Q_Z такие, что в T выводимы формулы:

$$A(Q_{y_0}(x_1), z, 0, x_1), \quad A(y, Q_Z(s, x_1)(y, z), s, x_1) \supset$$
$$\supset A(Q_Y(s, x_1)(y), z, \sigma(s), x_1).$$

Определим функции Q_y примитивной рекурсией:

$$Q_y(0, x_1) = Q_{y_0}(x_1),$$
$$Q_y(\sigma(s), x_1) = Q_Y(s, x_1)(Q_y(s, x_1)).$$

Применяя правило подстановки вместо свободной переменной, получаем, что в T выводимы формулы:

$$A(Q_y(0, x_1), z, 0, x_1), \quad A(Q_y(s, x_1), Q_Z(s, x_1)(Q_y(s, x_1), z), s, x_1) \supset$$
$$\supset A(Q_y(\sigma(s), x_1), z, \sigma(s), x_1).$$

Формула $A(Q_y(s, x_1), z, s, x_1)$ получается из них по правилу сильной индукции:

$$D(0, v), \; D(s, r(s, v)) \supset D(\sigma(s), v) \Rightarrow D(s, v).$$

Допустимость этого правила в системе T доказана в работе: M. J a s u g i, Intuitionistic analysis and Gödel's interpretation, J. Math. Soc. Japan 15, N 2 (1963), 101—112.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Г. Е. Минц

Введение

В своей работе [1], напечатанной в 1930 г., Ж. Эрбран сформулировал теорему, позволяющую сводить процесс поиска вывода произвольной формулы A классического исчисления предикатов (без равенства) к процессу поиска формулы, выводимой средствами классического исчисления высказываний, среди членов некоторой последовательности бескванторных формул, структура которых тесно связана со структурой формулы A.

Эта теорема лежит в основе многих методов машинного поиска логического вывода, предложенных в настоящее время (см., например, [2]—[4]).

Однако сравнительно недавно (1963 г.) в печати появилась работа [5], в которой выяснено, что в доказательстве Ж. Эрбрана имеется существенная ошибка. В [5] указан метод исправления этой ошибки и обещано полное доказательство теоремы Эрбрана методом, близким к методу самого Эрбрана.

Целью настоящей статьи является формулирование и доказательство обобщения теоремы Эрбрана на классическое исчисление предикатов с равенством и функциональными символами. При доказательстве мы будем использовать основную теорему Г. Г е н ц е н а [6] об устранимости сечения в исчислении LK.

Для понимания настоящей статьи необходимо знакомство с содержанием первой части работы [6] и пункта 5.25 работы [10]. В последнем параграфе используются также сведения из § 1 раздела IV работы [6] и из работы [9]. Все остальные сведения из теории логического вывода, используемые в статье, сообщаются в тексте статьи. В частности, все сведения, изложенные в первых трех параграфах, можно найти в литературе. Исключение составляет, пожалуй, формулировка теоремы о монотонной замене для языков с двумя сортами переменных.

Мы будем использовать секвенциальные варианты классического исчисления предикатов с равенством и функциональными символами. Отметим, что в работе [6] описан секвенциальный вариант классического исчисления предикатов без равенства и без функциональных символов. В работе Г. Генцена [11] приведены модификации правил введения существования в сукцедент и всеобщности в антецедент, соответствующие случаю, когда в языке рассматриваемой теории имеются функциональные символы. В работе [10] приведены аналогичные модификации соответствующих правил исчисления натурального типа: правила $\exists$-введения и правила $\forall$-удаления. Модифицированные правила приведены в § 1 настоящей статьи.

В § 1 описаны также два варианта классического исчисления предикатов с равенством: исчисление натурального типа (расширение исчисления NK) и исчисление логистического типа (расширение исчисления LK). Автор не встретил в литературе описания этих исчислений в форме, удобной для ссылок.

В § 2 установлена эквивалентность исчислений LK= и NK=, а также описано известное преобразование, служащее для «исключения» равенства, и доказано, что это преобразование позволяет сводить выводимость в LK= к выводимости средствами исчисления LK (т. е. без применения постулатов для равенства).

В § 3 описан метод сведéния выводимости секвенций к выводимости формул и соответствующий метод получения производных правил в построенных исчислениях. Определяются положительные и отрицательные вхождения формул в формулы и секвенции и доказываются теоремы о монотонной и эквивалентной замене. Кроме того, доказывается теорема о «вынесении вперед» кванторных комплексов, позволяющая установить теорему о предваренной форме и придать наглядный смысл понятиям положительного и отрицательного кванторного комплекса.

В § 4 формулируются некоторые достаточные условия допустимости подстановки терма вместо терма. Теоремы этого параграфа принадлежат автору.

В § 5 описан принадлежащий Т. Сколему метод элиминации положительных кванторов с помощью функциональных символов. Приведено доказательство допустимости применения этого метода к кванторному комплексу $\exists x$ в секвенции

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n \exists x A,\ \Gamma \to \Delta.$$

Это доказательство получается путем несущественного изменения доказательства соответствующего утверждения в [13]. Обоснование сколемовского метода в общем случае проведено в § 6.

В § 7 сформулировано и доказано утверждение, названное там первой формой теоремы Эрбрана. Для случая классического исчисления предикатов без равенства и секвенций вида $\to A$ это утверждение отличается от основной теоремы Ж. Эрбрана лишь тем, что термы, содержащие функциональные символы, не заменяются на переменные.

В § 8 доказаны утверждения, еще более близкие к основной теореме Эрбрана, чем теорема 7.1. В частности, теорема 8.1 для секвенций вида $\to A$ отличается от теоремы Эрбрана лишь тем, что детерминирован выбор переменных, на которые заменяются термы. Там же приводится вариант теоремы Эрбрана для предваренных формул.

Наконец, в § 9 изложена схема алгорифма установления выводимости формул с помощью теоремы Эрбрана.

§ 1. Описание рассматриваемых исчислений

Свободными предметными переменными назовем выражения $a_1, a_2, \ldots$, *связанными предметными переменными* — выражения $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ Свободные предметные переменные и связанные предметные переменные назовем *переменными.* При любом k $(k \geqslant 0)$ выражения $P_1^k, P_2^k, \ldots$ назовем *k-местными предикатными символами*, а выражения $\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots$ — *k-местными функциональными символами.* Символ равенства $=$ считается двуместным предикатным символом.

Будем говорить, что φ_i^k предшествует φ_j^k в алфавитном порядке, если $i<j$.

Буквы a, b, c, возможно, с индексами, будут применяться в качестве обозначений свободных предметных переменных, буквы x, y, z, возможно, с индексами, — в качестве обозначений связанных предметных переменных, буквы f, g, h — в качестве обозначений функциональных символов.

Напомним индуктивные определения *термов* и *формул.*

Все свободные переменные и все 0-местные функциональные символы являются термами. Если $t_1, \ldots, t_k$ — термы $(k>0)$ и f — k-местный функциональный символ, то $f(t_1, \ldots, t_k)$ — терм.

Термы мы обычно будем обозначать буквами r, s, t, u, v, возможно, с индексами.

Все 0-местные предикатные символы и все выражения вида $r=s$, где r и s — термы, являются *элементарными формулами.*

Если $t_1, \ldots, t_k$ — термы $(k>0)$ и F — k-местный предикатный символ, то $F(t_1, \ldots, t_k)$ — элементарная формула. Всякая элементарная формула является формулой. Если A и B — формулы, то $(A \vee B)$, $(A \& B)$, $(A \supset B)$, $\urcorner A$ — также формулы. Если x — связанная переменная, a — свободная переменная, A — формула и x не входит в A, то $\forall x [A]^a_x$ и $\exists x [A]^a_x$ — формулы [1]).

Выражения $\forall x$, $\exists x$, где x — произвольная связанная переменная, называются кванторными комплексами. Переменная, входящая в кванторный комплекс, называется его собственной переменной.

В дальнейшем изложении, наряду с термами и формулами, важную роль будут играть объекты, отличающиеся от термов или формул только тем, что в них имеются вхождения связанных переменных, не связанные кванторами. Точнее, слово E назовем *квазитермом* [2]) (*квазиформулой*), если найдется такой терм (соответственно такая формула) F, такие свободные переменные $c_1, \ldots, c_p$ и такие связанные переменные $z_1, \ldots, z_p$, не входящие в F, что E совпадает с $[F]^{c_1 \ldots c_p}_{z_1 \ldots z_p}$. В частности, любой терм (любая формула) является квазитермом (соответственно квазиформулой). Определим индуктивно *степени* квазитермов и квазиформул. Степень предметной переменной, 0-местного функционального символа, равно как и степень элементарной квазиформулы (т. е. квазиформулы, не содержащей логических связок), равна нулю. Если $t_1, \ldots, t_k$ — квазитермы и f — k-местный функциональный символ, то степень квазитерма $f(t_1, \ldots, t_k)$ на единицу больше наибольшей из степеней квазитермов $t_1, \ldots, t_k$. Если A и B — произвольные квазиформулы, то степени любой из квазиформул $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ на единицу больше суммы степеней формул A и B. Степень любой из квазиформул $\urcorner A$, $\forall x A$, $\exists x A$ на единицу больше степени квазиформулы A.

Иными словами, степень квазитерма — это максимальная глубина имеющихся в нем суперпозиций функциональных символов, а степень квазиформулы — это число вхождений в нее логических связок.

---

[1]) Выражение $[E]^r_s$, где E, r, s — любые формальные выражения, причем различные вхождения r в E не налегают друг на друга, будет обозначать результат подстановки s вместо всех вхождений r в E. Выражение

$$[E]^{r_1 \ldots r_k\, r_{k+1}}_{s_1 \ldots s_k\, s_{k+1}} \text{ будет обозначать то же, что и } \left[[E]^{r_1 \ldots r_k}_{s_1 \ldots s_k} \right]^{r_{k+1}}_{s_{k+1}}.$$

[2]) Необходимость введения квазитермов (квазиформул), наряду с термами (формулами), вызвана тем, что в нашем языке (в отличие, например, от языка исчисления $G1$ из [12]) имеются предметные переменные двух сортов: свободные и связанные.

Выражение $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} A_i$, называемое *кратной конъюнкцией*, будет при $n > 1$ обозначать то же, что и выражение

$$(\ldots((A_1 \& A_2) \& A_3) \& \ldots \& A_n).$$

В случае $n = 1$ это выражение обозначает A_1. Аналогичный смысл имеют *кратные дизъюнкции*.

Секвенции определяются так же, как в [6].

Опишем «логистический» вариант классического исчисления предикатов с равенством, который мы будем обозначать через $LK^=$. *Аксиомами* этого исчисления являются все секвенции видов $A \to A$ и $\to r = r$, где A — произвольная формула, r — произвольный терм. *Правилами вывода* этого исчисления являются:

1) все правила исчисления LK, за исключением правил введения всеобщности в антецедент и существования в сукцедент [1]);

2) следующие правила введения всеобщности в антецедент и существования в сукцедент:

$$\text{AEA}\ \frac{[A]^x_r,\ \Gamma \to \Theta}{\forall x A,\ \Gamma \to \Theta}, \qquad \text{EES}\ \frac{\Gamma \to \Theta,\ [A]^x_r}{\Gamma \to \Theta,\ \exists x A},$$

где r — произвольный терм (этот терм будем называть *собственным термом* правила);

3) правила для равенства:

$$\frac{r = s,\ [\Gamma]^a_r \to [\Delta]^a_r}{r = s,\ [\Gamma]^a_s \to [\Delta]^a_s}, \qquad \frac{s = r,\ [\Gamma]^a_r \to [\Delta]^a_r}{s = r,\ [\Gamma]^a_s \to [\Delta]^a_s}, \tag{1}$$

где r, s — произвольные термы, a — произвольная свободная переменная [2]).

Опишем «натуральный» вариант классического исчисления предикатов с равенством, который мы будем обозначать через $NK^=$.

---

[1]) Ввиду отличия нашей символики для подстановки от символики Г. Генцена приведем схемы правил введения всеобщности в сукцедент и существования в антецедент:

$$\text{AES}\ \frac{\Gamma \to \Theta,\ [A]^x_b}{\Gamma \to \Theta,\ \forall x A}, \qquad \text{EEA}\ \frac{[A]^x_b,\ \Gamma \to \Theta}{\exists x A,\ \Gamma \to \Theta},$$

где b — произвольная переменная, не входящая в нижнюю секвенцию.

[2]) Эти правила для равенства не являются независимыми. Однако они становятся независимыми, если удалить правило сечения из списка правил рассматриваемого исчисления.

В отличие от принятого в [6] способа «неявного» запоминания допущений, мы будем применять принятый в [10] способ записи формулы вместе с допущениями, от которых она зависит в выводе, в виде секвенции, в антецеденте которой записаны допущения, а в сукцеденте — сама формула.

Аксиомы исчисления NK= те же, что аксиомы исчисления LK=.

Правила вывода исчисления NK=:

1) структурные правила и правила введения и удаления логических связок, т. е. знаков &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, формулируются точно так же, как формулируются соответствующие правила в пункте 5.25 работы [10];

2) правило для равенства

$$\frac{\Gamma \to r = s \quad \Sigma \to [A]_r^a}{\Gamma,\ \Sigma \to [A]_s^a}. \tag{2}$$

Здесь Γ и Σ обозначают произвольные (возможно, пустые) списки формул, A — произвольную формулу, a — произвольную свободную переменную, r и s — произвольные термы.

Будем говорить, что секвенция S *выводима средствами* исчисления LK (средствами исчисления NK), если можно построить такой вывод секвенции S в исчислении LK= (соответственно в исчислении NK=), в котором не применяются постулаты для равенства, т. е. схема аксиом $\to r=r$ и правила вывода (1) и (2).

Будем говорить, что секвенция S LK-*выводима* (LK=-*выводима*), если она выводима средствами исчисления LK (соответственно, если она выводима в исчислении LK=).

Будем говорить, что *формула A* I-*выводима*, где I обозначает любое из выражений LK, LK=, если I-выводима секвенция $\to A$.

В дальнейшем будет систематически применяться следующее утверждение, представляющее собой несущественную модификацию основной теоремы Г. Генцена (теорема 2.5 из раздела III работы [6]).

Теорема 1.1. *Для всякой* LK-*выводимой секвенции имеется ее вывод средствами исчисления* LK *без сечения* (т. е. такой вывод, в котором не применяются ни схема аксиом $\to r=r$, ни правила для равенства, ни сечение).

Доказательство этого утверждения получается из доказательства основной теоремы Г. Генцена об устранимости сечения, если в пунктах 3.11, 3.33 (§ 3 раздела III работы [6]) заменить всюду $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{t}$.

§ 2. Связь между введенными исчислениями

Теорема 2.1. *Исчисления* LK= *и* NK= *эквивалентны*[1]. *Секвенция, сукцедент которой содержит не более одной формулы, выводима средствами исчисления* NK *тогда и только тогда, когда она выводима средствами исчисления* LK.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству эквивалентности исчислений LK и NK, приведенному в разделе V работы [6]. Следует лишь расширить исчисление гильбертовского типа LHK, введенное там, до исчисления LHK= путем добавления к языку исчисления функциональных символов и предикатного символа =, понятия терма и нового понятия формулы, модификации схем аксиом, соответствующих правилам $\forall$-удаления и $\exists$-введения, и добавления схем аксиом: $r=r$ и $(r=s \supset ([A]_r^a \supset [A]_s^a))$, где обозначения те же, что и в § 1.

Введем терминологию, необходимую для формулировки одного известного утверждения о связи между выводимостью в классическом исчислении предикатов и в классическом исчислении предикатов с равенством. При любых натуральных i и k $(i, k>0)$ выражение $\mathrm{Eq}(P_i^k)$ обозначает формулу

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k \Big(\mathop{\&}_{j=1}^{k} x_j = y_j \supset$$
$$\supset (P_i^k(x_1, \ldots, x_k) \supset P_i^k(y_1, \ldots, y_k))\Big),$$

а выражение $\mathrm{Eq}(\varphi_i^k)$ обозначает формулу

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k \Big(\mathop{\&}_{j=1}^{k} x_j = y_j \supset \varphi_i^k(x_1, \ldots, x_k) =$$
$$= \varphi_i^k(y_1, \ldots, y_k)\Big),$$

Пусть A — произвольная формула. Запишем список всех более чем нульместных предикатных символов, входящих в A, в виде $Q_1, \ldots, Q_n$, а список всех более чем нульместных функциональных символов, входящих в A, в виде $f_1, \ldots, f_m$. Выражение $\mathrm{Eq}(A)$ будет обозначать список

$$\mathrm{Eq}(Q_1), \ldots, \mathrm{Eq}(Q_n), \mathrm{Eq}(f_1), \ldots, \mathrm{Eq}(f_m).$$

Аналогично, если t — произвольный терм, то $\mathrm{Eq}(t)$ обозначает список $\mathrm{Eq}(f_1), \ldots, \mathrm{Eq}(f_m)$, где $f_1, \ldots, f_m$ — список всех более чем нульместных функциональных символов, входящих в t.

[1]) Эквивалентность исчислений понимается так же, как в § 1 раздела V работы [6].

Если $A_1, \ldots, A_p$ — произвольные формулы, то $\mathrm{Eq}(A_1, \ldots, A_p)$ обозначает то же, что и $\mathrm{Eq}\left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{p} A_i\right)$.

Пусть S — произвольная секвенция. Обозначим ее антецедент через Γ и сукцедент через Δ. Тогда $\mathrm{Eq}(S)$ обозначает $\mathrm{Eq}(\Gamma, \Delta)$.

Если E — предикатный или функциональный символ, терм, формула, список формул или секвенция, то $\mathrm{Eq}^+(E)$ обозначает список

$$\forall x_1 (x_1 = x_1), \quad \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset (x_2 = x_3))), \ \mathrm{Eq}(E).$$

Если S — произвольная секвенция, то $S^=$ обозначает результат приписывания списка $\mathrm{Eq}^+(S)$ справа к антецеденту секвенции S.

Лемма 1. *В* $\mathrm{LK}^=$ *выводимы секвенции*:

$$\to \forall x_1 (x_1 = x_1), \quad \to \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset (x_2 = x_3))),$$
$$\to \mathrm{Eq}(P_i^k), \quad \to \mathrm{Eq}(\varphi_i^k) \qquad (i, k \geqslant 1). \tag{3}$$

Первая из этих секвенций легко выводится из аксиомы $\to a_1 = a_1$ с помощью правила введения всеобщности в сукцедент. Выводы остальных секвенций также строятся без труда. В них используются, кроме аксиом, лишь правила для равенства и правила введения $\supset$ и $\forall$ в сукцедент.

Лемма 2. *Какова бы ни была секвенция S, если $S^=$ LK-выводима, то S* $\mathrm{LK}^=$*-выводима.*

Действительно, если $S^=$ LK-выводима, то она и $\mathrm{LK}^=$-выводима. Остается применить лемму 1 для того, чтобы с помощью сечений устранить «лишние» члены секвенции $S^=$.

Лемма 3. *Каковы бы ни были терм t и свободная переменная a, секвенция*

$$\mathrm{Eq}^+(t) \to \forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \supset [t]^a_{x_1} = [t]^a_{x_2}\right) \tag{4}$$

LK*-выводима.*

Если a не входит в t, то секвенция (4) получается из аксиомы $t = t \to t = t$ с помощью утончений и правил введения $\forall$ в антецедент и в сукцедент и $\supset$ в сукцедент. Будем считать, что a входит в t. Лемму докажем индукцией по степени терма t. Если степень терма t есть 0, то секвенция (4) легко получается из аксиомы $t = t \to t = t$. Предположим, что t имеет вид $f(t_1, \ldots, t_k)$. По индукционному предположению, при любом i ($i = 1, \ldots, k$) LK-выводима секвенция

$$\mathrm{Eq}^+(t_i) \to \forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \supset [t_i]^a_{x_1} = [t_i]^a_{x_2}\right).$$

Список $\mathrm{Eq}^+(t)$ включает списки $\mathrm{Eq}^+(t_i)$ при любом i ($i = 1, \ldots, k$). Поэтому при любом i LK-выводима секвенция

$$\mathrm{Eq}^+(t) \to \forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \supset [t_i]^a_{x_1} = [t_i]^a_{x_2}\right). \tag{5}$$

Выберем две различные свободные переменные b и c, не входящие в t. Из того, что список $\mathrm{Eq}(t)$ содержит формулу $\mathrm{Eq}(f)$, следует, что секвенция

$$\mathrm{Eq}^+(t) \to \left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} [t_i]^a_b = [t_i]^a_c \supset f\left([t_1]^a_b, \ldots, [t_k]^a_b\right) = f\left([t_1]^a_c, \ldots, [t_k]^a_c\right)\right) \tag{6}$$

LK-выводима. С помощью (5) и (6) получаем, что LK-выводима секвенция

$$\mathrm{Eq}^+(t) \to \left(b = c \supset [t]^a_b = [t]^a_c\right).$$

Секвенция (4) получается из этой секвенции по правилу введения $\forall$ в сукцедент.

Лемма 4. *Каковы бы ни были формула A, свободная переменная a и термы r и s, LK-выводима секвенция*

$$\mathrm{Eq}^+(A),\ r = s \to \left([A]^a_r \supset [A]^a_s\right). \tag{7}$$

Лемму докажем индукцией по степени формулы A. Если a не входит в A, то секвенция (7) получается из аксиомы $A \to A$ с помощью правила введения $\supset$ в сукцедент и утончений в антецеденте. Будем считать, что a входит в A. Базис индукции: рассматриваемая формула элементарная. Если она имеет вид $P_i^k(t_1, \ldots, t_k)$ ($i, k \geqslant 1$), то антецедент секвенции (7) содержит формулу $\mathrm{Eq}(P_i^k)$. Доказательство секвенции (7) имеет в этом случае следующий вид. Сначала с помощью леммы 3 и правила введения & в сукцедент получаем секвенцию

$$\mathrm{Eq}^+(A),\ r = s \to \mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} [t_i]^a_r = [t_i]^a_s. \tag{8}$$

Затем, используя тот факт, что $\mathrm{Eq}^+(A)$ содержит $\mathrm{Eq}(P_i^k)$, получаем секвенцию

$$\mathrm{Eq}^+(A) \to \left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} [t_i]^a_r = [t_i]^a_s \supset \left([A]^a_r \supset [A]^a_s\right)\right). \tag{9}$$

Секвенция (7) получается из (8) и (9) очевидным образом.

Предположим теперь, что рассматриваемая элементарная формула имеет вид $t_1=t_2$. С помощью леммы 3 получаем секвенции

$$\mathrm{Eq}^+(A),\ r=s\to[t_i]^a_r=[t_i]^a_s \qquad (i=1,\ 2). \tag{10}$$

С помощью второго члена списка $\mathrm{Eq}^+(A)$ получаем секвенции:

$$\mathrm{Eq}^+(A)\to([t_1]^a_r=[t_2]^a_r\supset([t_1]^a_r=[t_1]^a_s\supset[t_2]^a_r=[t_1]^a_s)), \tag{11}$$

$$\mathrm{Eq}^+(A)\to([t_2]^a_r=[t_1]^a_s\supset([t_2]^a_r=[t_2]^a_s\supset[t_1]^a_s=[t_2]^a_s)). \tag{12}$$

Секвенция (7) получается из секвенций (10)—(12).

Для обоснования индукционного перехода достаточно заметить, что LK-выводимы любые секвенции следующих типов:

$$(B\supset C)\,\&\,(D\supset E)\to(B\,\&\,D)\supset(C\,\&\,E),$$
$$(B\supset C)\,\&\,(D\supset E)\to(B\vee D)\supset(C\vee E),$$
$$(C\supset B)\,\&\,(D\supset E)\to(B\supset D)\supset(C\supset E),$$
$$C\supset B\to\neg B\supset\neg C,$$
$$\forall x(B\supset C)\to\forall xB\supset\forall xC,$$
$$\forall x(B\supset C)\to\exists xB\supset\exists xC.$$

При использовании последних двух секвенций следует применить правило введения $\forall$ в сукцедент к секвенции, выводимой по индукционному предположению.

Лемма 5. *По всякому выводу в исчислении* LK$^=$ *можно построить вывод в том же исчислении с той же последней секвенцией, в который входят лишь те функциональные и предикатные символы, которые входят в последнюю секвенцию, и, возможно, символ равенства, и в котором не применяются правила, не применявшиеся в первоначальном выводе.*

Доказательство. Пусть D — произвольный вывод в LK$^=$. Обозначим его нижнюю секвенцию через S. Выберем произвольную свободную предметную переменную, не входящую в D, и обозначим ее через a. Заменим все квазитермы, входящие в D и начинающиеся с функциональных символов, не входящих в S, на переменную a. После этого вычеркнем из полученной фигуры все вхождения кванторных комплексов, ставшие «вырожденными» (т. е. такие вхождения кванторных комплексов, в области действия которых не входят «связываемые» ими переменные). Полученную фигуру обозначим через D_1. В результате произведенных преобразований последняя секвенция не изменится и формулы перейдут снова в формулы. Аксиомы перейдут в аксиомы. Применения структурных и пропозициональных правил (т. е. правил введения &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ в антецедент и в сукцедент) перейдут в применения тех же правил. Применения кванторных правил (т. е. правил введения $\forall$ и $\exists$ в антецедент и в сукцедент) переходят либо в фигуры вида

$$\frac{T}{T} \tag{13}$$

(если вводимый кванторный комплекс стал вырожденным в результате произведенной замены), либо в применения тех же правил. Наконец, применения правил для равенства переходят либо в фигуры вида (13), либо в применения тех же правил.

Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что, вычеркивая верхние секвенции вместе с чертой из фигур вида (13), мы перестроим D_1 в вывод, в который входят лишь функциональные символы, входящие в последнюю секвенцию. Обозначим этот вывод через D_2.

Перейдем к устранению предикатных символов, не входящих в S. Выберем свободную переменную, не входящую в D_2, и обозначим ее через b. Обозначим через E формулу $b=b$, если знак $=$ входит в S, и формулу $F(b,\ b,\ \ldots,\ b)$, где F — первый слева предикатный символ, входящий в S, если $=$ не входит в S. Остается лишь заменить на E все элементарные формулы, начинающиеся с предикатных символов, отличных от равенства и не входящих в S, и затем удалить вырожденные вхождения кванторных комплексов.

Теорема 2.2. *Секвенция S LK$^=$-выводима тогда и только тогда, когда LK-выводима секвенция $S^=$.*

Доказательство. Пусть D — произвольный вывод секвенции S в исчислении LK$^=$. В силу леммы 5 можно считать, что все функциональные и предикатные символы (за исключением, возможно, символа $=$), входящие в D, входят в S. Поэтому для любой секвенции T, входящей в D, список $\mathrm{Eq}^+(T)$ содержится в списке $\mathrm{Eq}^+(S)$. Припишем список $\mathrm{Eq}^+(S)$ справа к антецедентам всех секвенций, входящих в D, и докажем, что все секвенции, входящие в полученную фигуру, выводимы. Аксиомы вида $A\to A$ перейдут в LK-выводимые секвенции $A,\ \mathrm{Eq}^+(S)\to A$. Аксиомы вида $\to t=t$ перейдут в секвенции вида $\mathrm{Eq}^+(S)\to t=t$, которые LK-выводимы, так как $\mathrm{Eq}^+(S)$ содержит формулу $\forall x_1(x_1=x_1)$. Каждое применение правила, за исключением правил для равенства, перейдет в применение того же правила. «Вставки» в фигуры, получившиеся из применений правил для равенства, пишутся с помощью леммы 4.

§ 3. Формульные образы секвенций. Теоремы о монотонной и эквивалентной замене. Очищенные секвенции. Предваренная форма

Для установления связи между выводимостью формул и выводимостью секвенций полезно определить формульные образы секвенций. *Формульным образом* секвенции

$$A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n \qquad (m, \ n \geqslant 0)$$

будем называть формулу $\left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} A_i \supset \bigvee\limits_{j=1}^{n} B_j\right)$, если $m>0$ и $n>0$; формулу $\bigvee\limits_{j=1}^{n} B_j$, если $m=0$, $n>0$; формулу $\neg \mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} A_i$, если $m>0$, $n=0$, и формулу $\neg(P_1^0 \supset P_1^0)$, если $m=n=0$. Формульный образ секвенции S будем обозначать через $[S^\Phi$.

Будем говорить, что правило

$$\frac{S_1 \ldots S_k}{S}$$

LK$^=$-*производно* (LK-*производно*), если секвенция S выводима в исчислении LK$^=$ (соответственно средствами исчисления LK) из секвенций $S_1, \ldots, S_k$. Иными словами, производность правила в исчислении означает возможность написать «вставку» в этом исчислении, ведущую от посылок правила к его заключению. В дальнейшем будет часто использоваться тот очевидный факт, что любое LK-производное правило также LK$^=$-производно.

Теорема 3.1. *Пусть S — произвольная секвенция. Тогда* LK-*производны правила*:

$$\frac{S}{\to [S^\Phi}, \tag{1}$$

$$\frac{\to [S^\Phi}{S}. \tag{2}$$

Доказательство. «Вставка» для правила (1) пишется следующим образом. Если S — пустая секвенция, то (1) — применение правила утончения. Если S непуста, то по правилу введения конъюнкции в антецедент получают конъюнкцию всех антецедентных членов; затем по правилу введения дизъюнкции в сукцедент получают дизъюнкцию всех сукцедентных членов. Затем по правилу введения импликации (или $\neg$, если сукцедент пуст) в сукцедент получают формульный образ верхней секвенции.

Докажем производность правила (2). Заметим сначала, что LK-выводима секвенция $[S^\Phi, \Gamma \to \Delta$, где через Γ обозначен антецедент секвенции S, а через Δ — ее сукцедент. Теперь «вставку» для правила (2) можно записать так:

$$\dfrac{\to [S^\Phi \qquad \dfrac{D}{[S^\Phi, \Gamma \to \Delta}}{\Gamma \to \Delta} \text{ сечение,}$$

где через D обозначен вывод секвенции $[S^\Phi, \Gamma \to \Delta$.

Приводимое ниже следствие 3.2 теоремы 3.1 будет нами часто использоваться.

Теорема 3.2. *Секвенция* LK-*выводима* (LK$^=$-*выводима*) *тогда и только тогда, когда* LK-*выводим* (*соответственно* LK$^=$-*выводим*) *ее формульный образ.*

В дальнейшем будет использовано также следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Если* LK-*выводима* (LK$^=$-*выводима*) *формула*

$$\left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} [S_i^\Phi\right) \supset [S^\Phi, \tag{3}$$

то LK-*производно* (*соответственно* LK$^=$-*производно*) *правило*

$$\frac{S_1 \ldots S_n}{S}. \tag{4}$$

Доказательство. «Вставка» для правила (4) пишется следующим образом. Сначала, применяя (1), переводим каждую из секвенций S_i ($i=1, \ldots, n$) в ее формульный образ. Затем, применяя $n-1$ раз правило введения & в сукцедент, получаем секвенцию $\to \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} [S_i^\Phi$. Из этой секвенции и из (3) получаем секвенцию $\to [S^\Phi$. Остается применить правило (2).

Теоремы 3.1 и 3.2 подсказывают следующие определения эквивалентности секвенций.

Будем говорить, что секвенции S и T LK-*эквивалентны* (LK$^=$-*эквивалентны*), если формула[1]) $[S^\Phi \equiv [T^\Phi$ LK-выводима (соответственно LK$^=$-выводима).

Приведем доказательство теоремы о монотонной замене. Введем несколько вспомогательных определений. Определим сначала *положительные* и *отрицательные вхождения* квазиформул в квазиформулы, в списки формул и в секвенцию. Вхождение

[1]) $(A \equiv B)$ обозначает $((A \supset B) \& (B \supset A))$.

квазиформулы в себя считается положительным. Всякое вхождение квазиформулы в квазиформулу $\neg A$, происходящее от ее положительного (отрицательного) вхождения в квазиформулу A, является отрицательным (соответственно положительным). Иными словами, связка $\neg$ *меняет* знак вхождения на противоположный. Связки &, $\vee$, $\exists$, $\forall$ *сохраняют* знак вхождения. Знак вхождения в квазиформулу $A \supset B$ вычисляется так же, как знак вхождения в квазиформулу $\neg A \vee B$. Знак вхождения в список формул совпадает со знаком соответствующего вхождения в член списка. Знак вхождения квазиформулы в секвенцию, происходящего от вхождения в сукцедент (в антецедент), совпадает со знаком соответствующего вхождения в сукцедент (соответственно противоположен знаку соответствующего вхождения в антецедент). Иначе говоря, знак вхождения в секвенцию вычисляется по тем же правилам, что и знак вхождения в ее формульный образ.

Пример 1. В этом примере под каждым вхождением логической связки поставлен знак того вхождения квафизормулы в написанную формулу, главной связкой которого оно является. Под вхождениями предикатных символов поставлены знаки соответствующих вхождений элементарных квазиформул:

$$\underset{+}{\neg}(\underset{-}{\forall} x_1(\underset{+}{\neg}\underset{-}{P^1_1}(x_1) \underset{-}{\supset} (\underset{-}{P^1_2}(x_1) \underset{-}{\&} \underset{-}{P^1_3}(x_1))) \underset{-}{\vee} \underset{-}{\neg}(\underset{+}{P^1_1}(a_1) \underset{+}{\vee} \underset{+}{\neg}\,\underset{-}{\neg}\,\underset{+}{\neg}\underset{-}{P^1_1}(a_2))).$$

Пример 2. В этом примере поставлены знаки вхождений в написанную секвенцию:

$$\underset{-}{\forall} x_1 \underset{-}{\neg}(\underset{-}{P^1_1}(x_1) \underset{+}{\supset} (\underset{+}{P^1_2}(x_1) \underset{+}{\&} \underset{+}{\neg}\underset{-}{P^1_3}(x_1))) \to \underset{-}{P^0_1} \underset{+}{\supset} \underset{+}{P^0_1}.$$

Введем еще определение. Пусть A — произвольная квазиформула. Запишем в виде $c_1, \ldots, c_p$ $(p \geqslant 0)$ полный список свободных переменных, входящих в A, и в виде $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ — полный список связанных переменных, имеющих в A вхождения, не находящиеся в области действия кванторного комплекса с той же собственной переменной («свободные» вхождения). Тогда $\tilde{\forall} A$ будет обозначать формулу

$$\forall z_1 \ldots \forall z_p \forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_q [A]^{c_1 \ldots c_p}_{z_1 \ldots z_p},$$

где $z_1, \ldots, z_p$ — первые p связанных переменных, не входящих в A.

Теорема 3.4 (теорема о монотонной замене). *Пусть A и B — произвольные квазиформулы, C — произвольная формула,*

и формула C^* получается в результате подстановки в C квазиформулы B вместо некоторого положительного (отрицательного) вхождения квазиформулы A. Тогда LK-*выводима секвенция*

$$\tilde{\forall}(A \supset B) \to \tilde{\forall}(C \supset C^*)$$

[*соответственно секвенция*

$$\tilde{\forall}(A \supset B) \to \tilde{\forall}(C^* \supset C)].$$

Теорема доказывается индукцией по числу вхождений логических связок, в области действия которых находится заменяемое вхождение. Базис индукции тривиален. Для обоснования индукционного перехода достаточно заметить, что LK-выводимы любые секвенции следующих типов (здесь $\Box$ обозначает любой из знаков &, $\vee$):

$$\tilde{\forall}(D \supset E) \to \tilde{\forall}(\neg E \supset \neg D), \quad \tilde{\forall}(D \supset E) \to \tilde{\forall}((F \Box D) \supset (F \Box E)),$$

$$\tilde{\forall}(D \supset E) \to \tilde{\forall}((D \Box F) \supset (E \Box F)), \quad \tilde{\forall}(D \supset E) \to$$
$$\to \tilde{\forall}((F \supset D) \supset (F \supset E)),$$

$$\tilde{\forall}(D \supset E) \to \tilde{\forall}((E \supset F) \supset (D \supset F)),$$

$$\tilde{\forall}(D \supset E) \to \tilde{\forall}(\forall x D \supset \forall x E), \quad \tilde{\forall}(D \supset E) \to \tilde{\forall}(\exists x D \supset \exists x E).$$

Непосредственным следствием теоремы 3.4 является приводимое ниже утверждение.

Теорема 3.5 (теорема об эквивалентной замене). *Если формула C^* получается из формулы C путем подстановки квазиформулы B вместо некоторого вхождения квазиформулы A в C, то* LK-*выводима секвенция* $\tilde{\forall}(A \equiv B) \to \tilde{\forall}(C \equiv C^*)$.

Определим *положительные* и *отрицательные вхождения* кванторных комплексов в квазиформулы и в секвенции. Вхождение $\forall$-комплекса ($\exists$-комплекса) имеет тот же знак, что и (соответственно знак, противоположный знаку, который имеет) вхождение квазиформулы, начинающееся с рассматриваемого вхождения кванторного комплекса. Как будет показано ниже, вхождение кванторного комплекса в формулу является положительным (отрицательным) тогда и только тогда, когда в результате «вынесения» кванторов вперед при приведении формулы к предваренной форме оно переходит во вхождение $\forall$-комплекса (соответственно во вхождение $\exists$-комплекса).

Выписанные ниже LK-выводимые эквивалентности используются для «вынесения» кванторов вперед (см. теорему 3.7) (здесь A, C — произвольные квазиформулы, x — произвольная связанная переменная, не входящая в C, y — произвольная связанная переменная):

$$\forall yC \equiv \forall x\,[C]^y_x, \qquad \exists yC \equiv \exists x\,[C]^y_x, \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(\exists xA \,\&\, C) \equiv \exists x(A \,\&\, C), & (C \,\&\, \exists xA) \equiv \exists x(C \,\&\, A),\\
(\forall xA \,\&\, C) \equiv \forall x(A \,\&\, C), & (C \,\&\, \forall xA) \equiv \forall x(C \,\&\, A),\\
(\forall xA \vee C) \equiv \forall x(A \vee C), & (C \vee \forall xA) \equiv \forall x(C \vee A),\\
(\exists xA \vee C) \equiv \exists x(A \vee C), & (C \vee \exists xA) \equiv \exists x(C \vee A),\\
(\forall xA \supset C) \equiv \exists x(A \supset C), & (C \supset \forall xA) \equiv \forall x(C \supset A),\\
(\exists xA \supset C) \equiv \forall x(A \supset C), & (C \supset \exists xA) \equiv \exists x(C \supset A).
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Секвенции (5) дают возможность заменять связанные переменные на другие связанные переменные, не входящие в рассматриваемую формулу. Этим бывает удобно воспользоваться для того, чтобы сделать различными собственные переменные разных вхождений кванторных комплексов. Будем называть формулу (секвенцию) *очищенной*, если в ней нет двух различных вхождений кванторных комплексов с одной и той же собственной переменной.

Таким образом, если S — очищенная секвенция, то имеет смысл говорить об *S-положительных* связанных переменных (т. е. о собственных переменных тех кванторных комплексов, единственное вхождение которых в S положительно) и об *S-отрицательных* переменных.

Теорема 3.6. *По всякой секвенции можно построить LK-эквивалентную ей очищенную секвенцию.*

Эта теорема доказывается с помощью теоремы об эквивалентной замене и эквивалентностей (5).

Пусть S — произвольная очищенная формула или секвенция, K и K_1 — произвольные кванторные комплексы, входящие в S. Говорят, что *комплекс K управляет комплексом K_1*, если (единственное) вхождение комплекса K_1 в S находится в области действия (единственного) вхождения комплекса K в S. Говорят, что связанная *переменная x*, входящая в S, *управляет* связанной *переменной y*, входящей в S, если комплекс с собственной переменной x управляет комплексом с собственной переменной y.

Сформулируем теперь теорему о «вынесении» кванторных комплексов. Введем обозначения: если Q — квантор, то Q^+ обозначает Q, а Q^- — противоположный квантор, т. е. $\forall^-$ обозначает $\exists$ и $\exists^-$ обозначает $\forall$.

Теорема 3.7. *Пусть A — произвольная очищенная формула, Qx — произвольный кванторный комплекс, входящий в A. Запишем в виде*

$$Q_1z_1, \ \ldots, \ Q_nz_n$$

полный список кванторных комплексов из A, управляющих комплексом Qx, в порядке их вхождений в A. При каждом i ($i=1, \ldots, n$) через σ_i обозначим знак комплекса Q_iz_i, а через σ обозначим знак комплекса Qx в формуле A. Тогда LK-выводима формула

$$A \equiv \forall^{\sigma_1} z_1 \ldots \forall^{\sigma_n} z_n \forall^{\sigma} x A^-,$$

где через A^- обозначен результат вычеркивания из A комплексов $Q_1z_1, \ldots, Q_nz_n, Qx$.

Теорема доказывается индукцией по количеству вхождений пропозициональных связок (т. е. &, $\vee$, $\supset$, $\neg$) в A, в области действия которых находится (единственное) вхождение комплекса Qx. Базис индукции тривиален. Индукционный переход обосновывается с помощью теоремы об эквивалентной замене и эквивалентностей (6).

Будем говорить, что формула находится в *предваренной форме* (или что она является *предваренной формулой*), если никакое вхождение в нее кванторного комплекса не находится в области действия пропозициональной связки. Очевидно, что любая предваренная формула имеет вид

$$Q_1z_1 \ldots Q_nz_nM \qquad (n \geqslant 0),$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ — кванторы, $z_1, \ldots, z_n$ — связанные переменные и M — бескванторная квазиформула, называемая *матрицей* рассматриваемой предваренной формулы. Часть предваренной формулы, остающаяся после вычеркивания матрицы, называется ее *префиксом*.

Простым следствием теоремы 3.7 является следующее утверждение.

Теорема 3.8. *По всякой формуле можно построить LK-эквивалентную ей предваренную формулу.*

Приведем еще ряд утверждений, которые будут полезны в дальнейшем.

Теорема 3.9. *Пусть Γ, Δ — произвольные списки формул, A — произвольная формула. Тогда LK-производны правила*

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \ \neg A}{A, \ \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\neg A, \ \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \ A}.$$

Это утверждение легко доказывается с помощью теоремы 3.3.

Теорема 3.10 (правило подстановки вместо свободной предметной переменной). LK-*производно правило*

$$\frac{S}{[S]^{a}_{t}}, \qquad (7)$$

где a — произвольная свободная переменная, t — произвольный терм.

Доказательство. Пусть S — произвольная секвенция, a — произвольная свободная переменная, t — произвольный терм. Выберем связанную переменную x, не входящую в S. Вставка для правила (7) пишется следующим образом. По теореме 3.1 из S получаем $\rightarrow [S^{\Phi}$. Вводя $\forall$ в сукцедент, получаем $\rightarrow \forall x\,[[S^{\Phi}]^{a}_{x}$. Производя сечение с секвенцией

$$\forall x\,[[S^{\Phi}]^{a}_{x} \rightarrow [[S^{\Phi}]^{a}_{t},$$

которая получается из аксиомы по правилу введения $\forall$ в антецедент, получаем секвенцию $\rightarrow [[S^{\Phi}]^{a}_{t}$. Остается применить теорему 3.1.

§ 4. Подстановка термов вместо термов

Цель настоящего параграфа — доказать аналог теоремы 3.10, относящийся к подстановке термов вместо термов. Выясним условия, при которых такая подстановка «не портит» применений правил исчисления LK$^{=}$.

Лемма 1. *Пусть r и s — произвольные термы, π — произвольное применение некванторного правила исчисления* LK$^{=}$, *отличного от правил для равенства. Тогда $[\pi]^{r}_{s}$ — применение того же правила*[1]).

Лемма доказывается просмотром правил исчисления LK$^{=}$.

Лемма 2. *Пусть r и s — произвольные термы, причем r не является переменной, π — произвольное применение кванторного правила. Обозначим через x собственную переменную кванторного комплекса, вводимого применением π, и через t собственный терм*[2]) *применения π. Пусть выполнены условия:* (a) *если π — применение правила* AES *или* EEA, *то t не входит в s;* (b) *в главную формулу π не входит никакой квазитерм r', содержащий переменную x, отличный от этой переменной и такой, что r совпадает с $[r']^{x}_{t}$.*

[1]) Напомним, что $[\pi]^{r}_{s}$ обозначает результат подстановки терма s вместо всех вхождений терма r в π.

[2]) Определение этого термина приведено в § 1 после описания правил AEA и EES.

Тогда $[\pi]^{r}_{s}$ — это применение того же правила, что и π.

Доказательство. Пусть r, s, t, x и π удовлетворяют условию леммы. Рассмотрим случай, когда π — это правило введения квантора в сукцедент (антецедентный случай рассматривается симметрично). Запишем π в виде

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta,\ [A]^{x}_{t}}{\Gamma \rightarrow \Delta,\ QxA}. \qquad (1)$$

Тогда $[\pi]^{r}_{s}$ запишется в виде

$$\frac{[\Gamma]^{r}_{s} \rightarrow [\Delta]^{r}_{s},\ [A]^{x\,r}_{t\,s}}{[\Gamma]^{r}_{s} \rightarrow [\Delta]^{r}_{s},\ Qx\,[A]^{r}_{s}}. \qquad (2)$$

Обозначим $[t]^{r}_{s}$ через v и докажем, что $[A]^{x\,r}_{t\,s}$ совпадает с $[A]^{r\,x}_{s\,v}$, т. е. что (2) — это применение того же правила, что и (1). Запишем квазиформулу A в виде $[B]^{b}_{r}$, где B — квазиформула, в которую не входит r, и b — свободная переменная, не входящая ни в A, ни в r, ни в v. Заметим, что r не входит в B, так как B совпадает с $[A]^{r}_{b}$. Кроме того, каждое вхождение терма r в $[B]^{x}_{t}$ находится внутри некоторого вхождения терма t, так как иначе было бы нарушено условие (b) теоремы. Поэтому $[B]^{b\,r}_{r\,s}$ совпадает с $[B]^{b}_{s}$ и $[B]^{x\,b\,r}_{t\,r\,s}$ совпадает с $[B]^{x\,b}_{v\,s}$. Далее, из того, что b не входит в v и x не входит в s, следует, что $[B]^{x\,b}_{v\,s}$ совпадает с $[B]^{b\,x}_{s\,v}$. Отсюда и следует, что $[A]^{x\,r}_{t\,s}$ совпадает с $[A]^{r\,x}_{s\,v}$. Поэтому (2) можно записать в виде

$$\frac{[\Gamma]^{r}_{s} \rightarrow [\Delta]^{r}_{s},\ [C]^{x}_{v}}{[\Gamma]^{r}_{s} \rightarrow [\Delta]^{r}_{s},\ QxC},$$

где C обозначает $[A]^{r}_{s}$. Ограничения на переменные в случае, если π — правило введения $\forall$ в сукцедент или $\exists$ в антецедент, выполнено и для фигуры $[\pi]^{r}_{s}$, что следует из условия (a) теоремы.

Доказанные теоремы позволяют сформулировать некоторые достаточные условия допустимости подстановки терма вместо терма. Введем одно вспомогательное понятие.

Будем говорить, что *квазитерм r' можно совместить с квазитермом r путем подстановки термов вместо связанных переменных, если можно указать такие связанные переменные $z_1, \ldots, z_k$*

($k \geqslant 1$), *входящие в* r', *и такие термы* $u_1, \ldots, u_k$, *что* r *совпадает с термом*

$$[r']^{z_1 \ldots z_k}_{u_1 \ldots u_k}.$$

Заметим, что никакой терм нельзя совместить ни с каким термом путем подстановки термов вместо связанных переменных.

Теорема 4.1. *Пусть* r — *произвольный терм,* T — *произвольная секвенция и никакой квазитерм, входящий в* T, *нельзя совместить с* r *путем подстановки термов вместо связанных переменных. Тогда, каков бы ни был терм* s, *из* LK-*выводимости секвенции* T *следует* LK-*выводимость секвенции* $[T]^r_s$.

Доказательство. Пусть r и T удовлетворяют условию теоремы, D — произвольный вывод секвенции T в исчислении $\mathrm{LK}^=$, в котором не применяются ни правила для равенства, ни схема аксиом $\rightarrow t=t$ (т. е. вывод секвенции T средствами исчисления LK). В силу основной теоремы Генцена (см. теорему 1.1) можно считать, что в D не применяется сечение. Пусть s — произвольный терм. Заменяя все вхождения собственных переменных правил AES и EEA в секвенции, находящиеся выше заключений этих правил, на новые свободные переменные, добьемся того, чтобы в полученном выводе никакая переменная, входящая в s, не была бы собственной переменной правила AES или EEA. Тогда для любого применения любого из этих правил будет выполнено условие (a) леммы 2. Условие (b) этой леммы выполнено для некоторого применения π правила, если никакой квазитерм, входящий в заключение π, нельзя совместить с термом r путем подстановки термов вместо связанных переменных. Это условие выполнено для всех применений правил в D, так как для любого квазитерма u', входящего в D и содержащего связанные переменные, найдется такой квазитерм u, входящий в T, что u можно совместить с u' путем подстановки термов вместо связанных переменных. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть* r — *произвольный терм, отличный от переменной,* S — *произвольная секвенция и любой квазитерм, входящий в* S *и начинающийся с того же функционального символа, что и* r, *является термом (т. е. не содержит связанных переменных). Тогда, каков бы ни был терм* s, *из* LK-*выводимости секвенции* S *следует* LK-*выводимость секвенции* $[S]^r_s$.

Доказываемая теорема следует из теоремы 4.1 и из того, что никакой терм нельзя совместить ни с каким термом путем подстановки термов вместо связанных переменных.

§ 5. Сколемовский метод элиминации положительных кванторов. Обоснование для первого положительного квантора

Пусть S — произвольная очищенная секвенция и x — некоторая S-положительная переменная. *Размерностью* переменной x в S будем называть число различных S-отрицательных переменных, управляющих переменной x. Обозначим через k размерность переменной x в S и через f — первый в алфавитном порядке k-местный функциональный символ, не входящий в S. Список всех S-отрицательных переменных (в порядке вхождений в S), управляющих переменной x в S, запишем в виде

$$z_1, \ldots, z_k. \tag{1}$$

Результатом применения к паре (S, x) *сколемовского метода элиминации положительных кванторов* (сокращенно — с. м. э.) будем называть секвенцию [1])

$$[S^-]^x_{f(z_{1 \div k})}, \tag{2}$$

если $k>0$, и секвенцию $[S^-]^x_f$, если $k=0$, где S^- обозначает результат вычеркивания из S единственного вхождения кванторного комплекса с собственной переменной x. Результат применения с. м. э. к паре (S, x) будем обозначать через $\mathscr{S}(S, x)$.

Пример 1. Если S обозначает секвенцию

$$\forall x_1 \exists x_2 (P^2_1(x_1, x_2) \vee \neg P^2_2(x_1, x_2)) \rightarrow P^1_1(a_1),$$

то $\mathscr{S}(S, x_2)$ — это секвенция

$$\forall x_1 (P^2_1(x_1, \varphi^1_1(x_1)) \vee \neg P^2_2(x_1, \varphi^1_1(x_1))) \rightarrow P^1_1(a_1).$$

Пример 2. Если S обозначает секвенцию

$$\rightarrow \exists x_1 \neg \forall x_2 (P^2_1(x_1, x_2) \supset \neg \exists x_3 \forall x_4 P^4_1(x_1, x_2, x_3, x_4)),$$

то $\mathscr{S}(S, x_4)$ — это секвенция

$$\rightarrow \exists x_1 \neg \forall x_2 (P^2_1(x_1, x_2) \supset \neg \exists x_3 P^4_1(x_1, x_2, x_3, \varphi^3_1(x_1, x_2, x_3))).$$

Выражение $\mathscr{S}(S, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1})$ ($k \geqslant 1$) будет обозначать то же, что и $\mathscr{S}(\mathscr{S}(S, z_1, \ldots, z_k), z_{k+1})$.

[1]) Выражение $u_{1 \div k}$ будет обозначать список $u_1, \ldots, u_k$.

Основная цель ближайших двух параграфов — доказать, что применение с. м. э. переводит любую очищенную секвенцию в дедуктивно равную секвенцию (т. е. в секвенцию, которая выводима или нет одновременно с данной).

Лемма 1. *Пусть S — произвольная очищенная секвенция и x — произвольная S-положительная переменная. Тогда* LK-*выводима формула*

$$[S^{\Phi} \supset [\mathcal{S}(S,\ x)^{\Phi}. \qquad (3)$$

Лемма непосредственно следует из теоремы о монотонной замене и из LK-выводимости любых формул типа

$$\tilde{\forall}\,([A]^x_{f(z_{1 \div k})} \supset \exists x A),$$

$$\tilde{\forall}\,(\forall x A \supset [A]^x_{f(z_{1 \div k})}),$$

где A — произвольная квазиформула, не содержащая кванторных комплексов с собственными переменными $z_1, \ldots, z_k$.

Отметим, что импликация, обратная к (3), вообще говоря, не является LK-выводимой, как видно уже на примере секвенции $\to \forall x_1 P^1_1(x_1)$.

Из доказанной леммы и из теоремы 3.3 непосредственно вытекает следующее утверждение, в котором δ обозначает пустое слово или знак $=$.

Теорема 5.1. *Каковы бы ни были очищенная секвенция S и S-положительная переменная x, из* LK^{δ}*-выводимости секвенции S следует* LK^{δ}*-выводимость секвенции* $\mathcal{S}(S,\ x)$.

Дальнейшая часть настоящего параграфа посвящена обоснованию применения с. м. э. к первому вхождению квантора существования, не находящемуся в области действия пропозициональных связок.

На протяжении оставшейся части этого параграфа Γ и Δ будут обозначать некоторые списки формул, $z_1, \ldots, z_k$ и x — некоторые связанные переменные, попарно отличные друг от друга, A — некоторую квазиформулу такую, что $\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A$ является формулой и S — секвенцию

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ \Gamma \to \Delta. \qquad (*)$$

Мы будем предполагать, что S — очищенная секвенция. f будет обозначать первый не входящий в S k-местный функциональный символ.

Через S^{δ}_1 будем обозначать секвенцию

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k [A]^x_{f(z_{1 \div k})},\ \Gamma \to \Delta,$$

если δ — пустое слово, и секвенцию

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall z_1 \ldots \forall z_k \Big(\mathop{\&}_{i=1}^{k} x_i = z_i \supset f(x_{1 \div k}) = f(z_{1 \div k})\Big),$$

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k [A]^x_{f(z_{1 \div k})},\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Gamma \to \Delta,$$

если δ есть $=$ (здесь мы считаем, что если f — это нульместный функциональный символ, то $f(\ )$ обозначает f).

Заметим, что S_1 совпадает с $\mathcal{S}(S,\ x)$, а $S^{=}_1$ получается дописыванием к антецеденту секвенции S_1 списка $\mathrm{Eq}^+(S_1)$ (т. е. обозначения согласованы с обозначениями теоремы 2.2).

Основной целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 5.2. *Если секвенция S_1* LK^{δ}*-выводима, то и S* LK^{δ}*-выводима* [1]).

Если $k=0$, то переход от S_1 к S можно осуществить с помощью правила введения $\exists$ в антецедент, если воспользоваться теоремой 4.2 и (для случая, когда δ есть $=$) теоремой 2.2. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $k>0$. В силу теорем 2.2 и 1.1 достаточно указать метод перестроения любого вывода секвенции S^{δ}_1 средствами исчисления LK без сечения в вывод секвенции S^{δ} средствами исчисления LK. Пусть D — произвольный вывод секвенции S^{δ}_1 средствами исчисления LK без сечения. В силу леммы 5 из § 2 можно считать, что в D входят только те функциональные символы, которые входят в его конечную секвенцию. Введем некоторые вспомогательные определения и докажем несколько лемм.

Будем называть f-формулами формулы, в которые входит z_k. Заметим, что все f-формулы, входящие в D, являются подформулами тех антецедентных членов секвенции S^{δ}_1, в которые входит z_k (т. е. первого члена, если δ есть пустое слово, и одного из первых двух членов, если δ есть $=$). Будем называть f-термом любой терм, начинающийся с f. Каждый f-терм имеет вид $f(t_1, \ldots, t_k)$, где $t_1, \ldots, t_k$ — некоторые термы. Запишем в виде

$$f(t^1_{1 \div k}),\ \ldots,\ f(t^n_{1 \div k}) \qquad (4)$$

полный список f-термов, входящих в D, в котором никакой из членов не содержится ни в одном из следующих членов. При каждом i ($i=1, \ldots, n$) через τ_i будем обозначать список $t^i_{1 \div k}$. Если

[1]) Напомним, что S обозначает секвенцию (*).

$u_1, \ldots, u_k$, r — произвольные термы, то через $A(u_{1\div k}, r)$ будем обозначать формулу

$$[A]^{z_1 \ldots z_k\ x}_{u_1 \ldots u_k\ r}.$$

Список (4) перепишется теперь в виде

$$f(\tau_1), \ldots, f(\tau_n). \qquad (5)$$

Если τ обозначает список $t_{1\div k}$, то выражение $\tau=\tau_i$ будет обозначать то же, что и $\underset{j=1}{\overset{k}{\&}} t_j = t^i_j$.

Выберем n попарно различных свободных переменных $c_1, \ldots, c_n$, не входящих в D. Если B обозначает терм, формулу, список термов или список формул, то B^* будет обозначать выражение

$$[B]^{f(\tau_1) \ldots f(\tau_n)}_{c_1 \ldots c_n}.$$

Замечание 1. $f(\tau_i)^*$ совпадает с c_i; $A(\tau_i, f(\tau_i))^*$ совпадает с $A(\tau^*_i, c_i)$.

Замечание 2. Если формула C входит в D и C^* содержит f, то C является f-формулой. Если переменная a, отличная от всех переменных $c_1, \ldots, c_n$, входит в τ^*_i, то она входит в τ_i. Если c_j $(j=1, \ldots, n)$ входит в τ^*_i $(i=1, \ldots, n)$, то $f(\tau_j)$ входит в τ_i, причем $i<j$.

Пусть $i_1, \ldots, i_k$ — произвольный набор попарно различных натуральных чисел, заключенных между 1 и n. Через $F^\delta(i_1, \ldots, i_k)$ будем обозначать список

$$A(\tau^*_{i_1}, c_{i_1}), \ldots, A(\tau^*_{i_k}, c_{i_k}),$$

если δ — пустое слово, и объединение списка $F(i_{1\div k})$ и списка, состоящего из всех формул вида

$$\tau^*_{i_p} = \tau^*_{i_q} \supset c_{i_p} = c_{i_q} \qquad (1 \leqslant p < q \leqslant k),$$

если δ — это знак $=$.

Лемма 2. *Пусть τ—произвольный k-членный список термов, $1 \leqslant i_1 < \ldots \leqslant i_k \leqslant n$, Σ и Θ — произвольные списки формул, a — произвольная свободная переменная, не входящая ни в τ, ни в списки Σ, Θ, $F^=(i_{1\div k})$, и секвенция*

$$\tau=\tau^*_{i_1} \supset a = c_{i_1}, \ldots, \tau=\tau^*_{i_k} \supset a = c_{i_k},$$
$$A(\tau, a),\ F^=(i_{1\div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Sigma \to \Theta \qquad (6)$$

LK-выводима. Тогда LK-выводима секвенция

$$A(\tau, a),\ F^=(i_{1\div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Sigma \to \Theta. \qquad (7)$$

Доказательство. Предположим, что τ, $i_1, \ldots, i_k$, a, Σ и Θ удовлетворяют условию леммы. Пусть $1 \leqslant p \leqslant k$. Из того, что список $\mathrm{Eq}^+(A)$ содержится в списке $\mathrm{Eq}^+(S)$, и из леммы 4 § 2 следует, что LK-выводима секвенция

$$\tau = \tau^*_{i_p},\ \left(\underset{j=1}{\overset{k}{\&}} (\tau^*_{i_p} = \tau^*_{i_j} \supset a = c_{i_j}) \& A(\tau^*_{i_p}, a)\right),\ \mathrm{Eq}^+(S) \to$$
$$\to \left(\underset{j=1}{\overset{k}{\&}} \tau = \tau^*_{i_j} \supset a = c_{i_j}\right) \& A(\tau, a). \qquad (8)$$

Из (6) и (8) получаем, что LK-выводима секвенция

$$\tau=\tau^*_{i_p},\ \tau^*_{i_p}=\tau^*_{i_1} \supset a = c_{i_1}, \ldots, \tau^*_{i_p}=\tau^*_{i_k} \supset a = c_{i_k},$$
$$A(\tau^*_{i_p}, a),\ F^=(i_{1\div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Sigma \to \Theta. \qquad (9)$$

По правилу подстановки вместо свободной предметной переменной (теорема 3.9) получаем, подставляя в (9) c_{i_p} вместо a и учитывая условие леммы,

$$\tau=\tau^*_{i_p},\ \tau^*_{i_p}=\tau^*_{i_1} \supset c_{i_p} = c_{i_1}, \ldots, \tau^*_{i_p}=\tau^*_{i_k} \supset c_{i_p} = c_{i_k},$$
$$A(\tau^*_{i_p}, c_{i_p}),\ F^=(i_{1\div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Sigma \to \Theta. \qquad (10)$$

Все антецедентные члены секвенции (10), начиная со второго и кончая $(k+2)$-м (т. е. формулой $A(\tau^*_{i_p}, c_{i_p})$), за исключением $(p+1)$-го члена, содержатся в списке $F^=(i_{1\div k})$. Упомянутый $(p+1)$-й член представляет собой формулу

$$\tau^*_{i_p}=\tau^*_{i_p} \supset c_{i_p} = c_{i_p},$$

выводимую из рефлексивности равенства (т. е. первого члена списка $\mathrm{Eq}^+(S)$). Из сказанного вытекает, что LK-выводима секвенция

$$\tau=\tau^*_{i_p},\ F^=(i_{1\div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Sigma \to \Theta,$$

откуда следует, что LK-выводима секвенция

$$F^=(i_{1\div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S),\ \Sigma \to \Theta,\ \tau=\tau^*_{i_p} \supset a = c_{i_p}. \qquad (11)$$

Из (6) и (11) с помощью k сечений получаем, что LK-выводима секвенция (7).

Лемма 3. *Пусть* Σ *и* Θ — *произвольные списки формул,* $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ — *попарно различные натуральные числа, заключенные между* 1 *и* n, *причем* $c_{j_1}, \ldots, c_{j_l}$ *не входят в* Σ, Θ, $F^\delta(i_1, \ldots, i_k)$, *и секвенция*

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ F^\delta(i_{1 \div k},\ j_{1 \div l}),\ \Sigma,\ \mathrm{Eq}^+(S) \to \Theta$$

LK-*выводима. Тогда* LK-*выводима и секвенция*

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ F^\delta(i_{1 \div k}),\ \Sigma,\ \mathrm{Eq}^+(S) \to \Theta. \qquad (12)$$

Доказательство проведем индукцией по l. Базис индукции тривиален. Обоснуем индукционный переход. Предположим, что Σ, Θ, $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ удовлетворяют условию леммы и что $l>0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $j_1>j_2>\ldots>j_l$. Применяя в случае, когда δ — это знак $=$, лемму 2, получаем, что LK-выводима секвенция

$$A(\tau^*_{j_l},\ c_{j_l}),\ \forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ F^\delta(i_{1 \div k},\ j_{1 \div l-1}),\ \Sigma,\ \mathrm{Eq}^+(S) \to \Theta.$$

Из замечания 2, сделанного в начале доказательства теоремы, следует, что c_{j_l} не входит в Σ, Θ, $F^\delta(i_{1 \div k},\ j_{1 \div l-1})$ и в $\tau^*_{j_l}$. Поэтому LK-выводима секвенция

$$\exists x A(\tau^*_{j_l},\ x),$$
$$\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ F^\delta(i_{1 \div k},\ j_{1 \div l}),\ \Sigma,\ \mathrm{Eq}^+(S) \to \Theta, \qquad (13)$$

которая получается из предыдущей секвенции по правилу введения $\exists$ в антецедент. Секвенция (12) получается из (13) с помощью k применений правила введения $\forall$ в антецедент и структурных правил. Лемма доказана.

Если Σ — список формул, то через Σ' обозначим результат вычеркивания из Σ всех f-формул. Индексом секвенции $\Sigma \to \Theta$ назовем полный перечень номеров всех членов списка (5), входящих в Σ', Θ.

Если T обозначает секвенцию $\Sigma \to \Theta$, то $T^{(\delta *)}$ будет обозначать секвенцию

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ \Sigma'^*,\ F^\delta(i_{1 \div k}),\ E^\delta \to \Theta^*,$$

где $i_{1 \div k}$ — это индекс секвенции T, и E^δ обозначает пустое слово, если δ — пустое слово, и список $\mathrm{Eq}^+(S)$, если δ — это знак $=$.

Заметим, что если T обозначает последнюю секвенцию доказательства D, т. е. секвенцию S_1^δ, то $T^{(\delta *)}$ совпадает с секвенцией S^δ. Поэтому для завершения доказательства теоремы 5.2 достаточно установить следующее утверждение.

Лемма 4. *Если секвенция* T *входит в* D, *то* $T^{(\delta *)}$ LK-*выводима.*

Лемму докажем индукцией по «высоте» самого верхнего вхождения рассматриваемой секвенции в D (т. е. по количеству применений правил, находящихся выше этого вхождения).

Пусть T — произвольная секвенция из D. Если T — аксиома, то она имеет вид $C \to C$. В этом случае C не является f-формулой (все вхождения f-формул находятся в антецеденте). Поэтому $T^{(\delta *)}$ имеет вид

$$\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ C^*,\ F^\delta(i_1, \ldots, i_k),\ E^\delta \to C^*,$$

т. е. LK-выводима.

Обоснуем индукционный переход. Пусть L — применение какого-либо правила в D. Обозначим через T заключение L и через T_i $(1 \leqslant i \leqslant 2)$ i-ю посылку L (если L — применение однопосылочного правила, то T_2 отсутствует). Докажем, что из LK-выводимости секвенций $T_1^{(\delta *)}$ и $T_2^{(\delta *)}$ вытекает LK-выводимость секвенции $T^{(\delta *)}$. Через L^* обозначим фигуру, составленную из $T_1^{(\delta *)}$, $T_2^{(\delta *)}$ и $T^{(\delta *)}$ таким же образом, каким L составлено из T_1, T_2 и T. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. L — применение неструктурного правила и главная формула L является f-формулой. Тогда L — это применение правила АЕА.

Случай 1.1. Боковая формула L является f-формулой. В этом случае переход от T к $T^{(\delta *)}$ начнется с того, что вычеркивается главная формула L, а переход от T_1 к $T_1^{(\delta *)}$ начнется с того, что вычеркнется боковая формула L. Уже это начальное преобразование переведет T и T_1 в одну и ту же секвенцию. Секвенция $T^{(\delta *)}$ совпадает с $T_1^{(\delta *)}$ и потому выводима.

Случай 1.2. Боковая формула L не является f-формулой. Тогда найдется такое p $(p=1, \ldots, n)$, что боковая формула L имеет вид

$$A(\tau_p,\ f(\tau_p)), \qquad (14)$$

или найдутся такие p и q $(1 \leqslant p<q \leqslant n)$, что боковая формула L имеет вид

$$\tau_p = \tau_q \supset f(\tau_p) = f(\tau_q). \qquad (15)$$

Обозначим через Θ сукцедент секвенции T (он совпадает с сукцедентом секвенции T_1), а через Σ — список, получающийся вычеркиванием из антецедента секвенции T самого левого члена (т. е. главной формулы L).

Случай 1.2.1. Боковая формула L имеет вид (14). Тогда L^* имеет вид

$$\frac{\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ A(\tau_p^*, c_p),\ \Sigma'^*,\ F^\delta(i_{1 \div k}, j_{1 \div l}),\ E^\delta \to \Theta}{\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ \Sigma'^*,\ F^\delta(i_{1 \div k}),\ E^\delta \to \Theta}, \qquad (16)$$

где $i_{1 \div k}$ — это индекс секвенции T, а $j_{1 \div l}$ — это полный список номеров членов списка (5), входящих в $A(\tau_p, f(\tau_p))$ и не входящих в Σ', Θ. Используя лемму 3 и замечание 2, получаем, что из LK-выводимости секвенции $T_1^{(\delta*)}$ (т. е. верхней секвенции в (16)) вытекает LK-выводимость секвенции $T^{(\delta*)}$ (т. е. нижней секвенции в (16)).

Случай 1.2.2. Боковая формула L имеет вид (15). Тогда L^* имеет вид

$$\frac{\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ \tau_p^* = \tau_q^* \supset c_p = c_q,\ \Sigma'^*,\ F^=(i_{1 \div k}, j_{1 \div l}),\ \mathrm{Eq}^+(S) \to \Theta}{\forall z_1 \ldots \forall z_k \exists x A,\ \Sigma'^*,\ F^=(i_{1 \div k}),\ \mathrm{Eq}^+(S) \to \Theta}, \quad (17)$$

где обозначения $i_{1 \div k}$, $j_{1 \div l}$ имеют смысл, аналогичный их смыслу в (16). Заметим, что второй член антецедента верхней секвенции в (17) содержится в списке $F^=(i_{1 \div k}, j_{1 \div l})$, поэтому его можно «уничтожить» с помощью правил перестановки и сокращения повторений в антецеденте. После этого нижняя секвенция фигуры (17) (т. е. секвенция $T^{(\delta*)}$) получается из верхней секвенции с помощью леммы 2.

Случай 2. L — применение структурного правила, или главная формула L не является f-формулой. В этом случае, для того чтобы L^* стало (с точностью до перестановок в антецеденте) применением того же правила, что и L, достаточно «уравнять» индексы посылок и заключения (т. е. «выровнять» списки F^δ). Если в индексе какой-либо из посылок «не хватает» членов по сравнению с индексом заключения, то «недостающие» члены списка F^δ вводятся утончением. Если в индексе посылки имеются «лишние» члены по сравнению с индексом заключения (в этом случае L — применение правила введения $\forall$ в антецедент или $\exists$ в сукцедент), то удаление «лишних» членов списка F^δ можно осуществить с помощью леммы 2. Теорема доказана.

Часть теоремы 3.1, относящаяся к случаю, когда δ — это пустое слово, остается справедливой после замены LK на LJ. Единственное изменение, которое нужно произвести в доказательстве — это заменить LK на LJ.

§ 6. Обоснование сколемовского метода элиминации положительных кванторов

Теорема 5.2 дает обоснование применения с. м. э. в случае, когда элиминируется «внешнее» вхождение квантора $\exists$.

Теорема 6.1. *Пусть S — произвольная очищенная секвенция, x — произвольная S-положительная переменная. Тогда из* LK$^\delta$*-выводимости секвенции $\mathscr{S}(S, x)$ следует* LK$^\delta$*-выводимость секвенции S.*

Доказательство. Обозначим через V единственное вхождение в S кванторного комплекса с собственной переменной x и через Q — квантор, входящий в этот комплекс.

Случай 1. V — вхождение в антецедент S.

Случай 1.1. Вхождением V не управляют никакие логические знаки, кроме, может быть, кванторов $\forall$ и $\exists$. В этом случае утверждение теоремы доказывается индукцией по количеству вхождений квантора $\exists$, управляющих вхождением V. Базис индукции представляет собой теорему 5.2. Для обоснования индукционного перехода заметим сначала, что в силу теоремы 5.1 из выводимости секвенции $\mathscr{S}(S, x)$ следует выводимость секвенции $\mathscr{S}(S, x, z)$, где z обозначает собственную переменную самого левого $\exists$-комплекса, управляющего в S комплексом $\exists x$.

Затем, применяя индукционное предположение, получаем, что выводима секвенция $\mathscr{S}(S, z)$. Отсюда в силу теоремы 5.2 следует, что выводима секвенция S.

Случай 1.2. Случай 1.1 не имеет места. Применением теоремы о вынесении кванторов вперед (теорема 3.7) к V и к тому антецедентному члену рассматриваемой секвенции, в который входит V, этот случай сводится к 1.1.

Случай 2. V — вхождение в сукцедент S. Применением теоремы о перенесении из сукцедента в антецедент с отрицанием (теорема 3.9) к тому сукцедентному члену секвенции S, в который входит V, этот случай сводится к случаю 1.

Из теорем 5.1 и 6.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Каковы бы ни были очищенная секвенция S и S-положительная переменная x,* LK$^\delta$*-выводимость секвенции S эквивалентна* LK$^\delta$*-выводимости секвенции $\mathscr{S}(S, x)$.*

§ 7. Первая форма теоремы Эрбрана

Пусть S — произвольная очищенная секвенция. Список всех S-положительных переменных (в порядке их вхождений в S) запишем в виде $z_1, \ldots, z_k$. Секвенцию $\mathscr{S}(S, z_1, \ldots, z_k)$ будем называть *функциональной формой секвенции S* и обозначать через $\Phi(S)$.

Заметим, что функциональная форма любой очищенной секвенции — это очищенная секвенция, в которой нет положительных кванторных комплексов.

Определим алгорифмы U и R. Первый из этих алгорифмов будет сопоставлять каждой паре (m, S), где m — натуральное число и S — очищенная секвенция, некоторый список термов. Алгорифм R будет сопоставлять каждой паре указанного вида некоторую бескванторную секвенцию.

Алгорифм U определим индуктивно.

Список $U(0, S)$ состоит из всех свободных переменных и из всех нульместных функциональных символов, входящих в $\Phi(S)$, а в случае, если таких переменных и символов нет, из переменной a_1. Если терм t принадлежит $U(m, S)$, то он принадлежит также $U(m+1, S)$.

Если f — k-местный функциональный символ $(k>0)$, входящий в $\Phi(S)$, и термы $t_1, \ldots, t_k$ принадлежат $U(m, S)$, то терм $f(t_1, \ldots, t_k)$ принадлежит $U(m+1, S)$.

Объединение всех множеств $U(m, S)$ будем называть *лексиконом* секвенции S.

Для определения алгорифма R будет удобно определить сначала алгорифм R_1, аргументами которого служат тройки вида (m, S, E), где E — квазиформула, список формул или секвенция.

Если E — элементарная квазиформула, то [1])

$$R_1(m, S, E) \underline{\circ} E.$$

Если E и F — произвольные квазиформулы, то

$$R_1(m, S, (E \& F)) \underline{\circ} (R_1(m, S, E) \& R_1(m, S, F)),$$
$$R_1(m, S, (E \vee F)) \underline{\circ} (R_1(m, S, E) \vee R_1(m, S, F)),$$
$$R_1(m, S, (E \supset F)) \underline{\circ} (R_1(m, S, E) \supset R_1(m, S, F)),$$
$$R_1(m, S, \neg E) \underline{\circ} \neg R_1(m, S, E),$$
$$R_1(m, S, \forall x E) \underline{\circ} \mathop{\&}_{t \in U(m, S)} [R_1(m, S, E)]^x_t \text{ [2])},$$
$$R_1(m, S, \exists x E) \underline{\circ} \bigvee_{t \in U(m, S)} [R_1(m, S, E)]^x_t.$$

---

[1]) Выражение $A \underline{\circ} B$ читается: «слово A совпадает со словом B».

[2]) Если W обозначает список $v_{1 \div k}$, то, по определению,

$$\mathop{\&}_{t \in W} [E]^x_t \underline{\circ} \mathop{\&}_{i=1}^{k} [E]^x_{v_i}.$$

Аналогичный смысл имеет дизъюнкция по всем членам списка.

Если E обозначает список формул $A_1, \ldots, A_n$, то $R_1(m, S, E)$ — это список формул $R_1(m, S, A_1), \ldots, R_1(m, S, A_n)$.

Если E обозначает секвенцию $\Delta \to \Theta$, то $R_1(m, S, E)$ — это секвенция

$$R_1(m, S, \Delta) \to R_1(m, S, \Theta).$$

Наконец, положим

$$R(m, S) \underline{\circ} R_1(m, S, \Phi(S)).$$

Легко видеть, что пункты определения алгорифма R_1 близки к соответствующим пунктам определения алгорифма построения k-образов [1]).

Теперь мы можем сформулировать утверждение, являющееся обобщением теоремы Эрбрана на секвенции.

Теорема 7.1. *Для того чтобы очищенная секвенция S была* LK^δ*-выводима, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое m, что* LK^δ*-выводима секвенция $R(m, S)$.*

Доказательство. В силу теоремы 6.2 секвенция S LK^δ-выводима тогда и только тогда, когда LK^δ-выводима секвенция $\Phi(S)$. Далее, для любого m

$$U(m, S) \underline{\circ} U(m, \Phi(S)), \quad R(m, S) \underline{\circ} R(m, \Phi(S)).$$

Поэтому, заменяя в случае необходимости рассматриваемую секвенцию ее функциональной формой, мы будем в дальнейшем считать, что рассматриваемая секвенция не содержит положительных кванторных комплексов. Достаточность вытекает из теоремы 3.3 и из того, что в силу теоремы о монотонной замене для любого m и для любой секвенции S, не содержащей положительных кванторных комплексов, LK-выводима секвенция

$$\to [R(m, S)^\Phi \supset [S^\Phi.$$

Докажем необходимость. Пусть S — произвольная LK^δ-выводимая секвенция, не содержащая положительных кванторных комплексов. Выражение $S^=$ будет иметь тот же смысл, что и в § 2, т. е. будет обозначать секвенцию, которая получается в результате дописывания списка $Eq^+(S)$ справа к антецеденту секвенции S. Буква D будет обозначать произвольный вывод секвенции S^δ средствами исчисления LK без сечения (такой вывод всегда имеется в силу теорем 1.1 и 2.2).

В силу леммы 5 § 2 можно считать, что все термы, входящие в D, принадлежат лексикону секвенции S. Действительно, если

---

[1]) См. [12]. k-образ формулы A — это бескванторная формула, выражающая суждение: «формула A истинна в области, состоящей из объектов $1, \ldots, k$».

это условие нарушено, то обозначим через a первую из свободных переменных, входящих в S, если такие переменные имеются, и переменную a_1 в противном случае. Выполнения нужного условия можно добиться, заменяя вхождения в D переменных, не принадлежащих лексикону секвенции S, на переменную a. В результате такой замены все аксиомы в D перейдут в аксиомы и каждое применение правила перейдет в применение того же правила.

Обозначим через m максимальную из степеней термов, встречающихся в D. Так как все термы, входящие в D, принадлежат лексикону секвенции S, то все эти термы содержатся в списке $U(m, S)$.

Обозначим через D_1 результат замены в D каждой секвенции T на секвенцию $R_1(m, S, T)$ и докажем, что, сделав в D_1 вставки и вычеркнув повторения секвенций, можно превратить D_1 в вывод средствами исчисления LK без сечения.

Если T — аксиома, то $R_1(m, S, T)$ также аксиома. Пусть L — применение какого-либо правила в D.

Если L — применение структурного правила, то его образ в D_1 — применение того же правила.

Если L — применение правила введения в антецедент или в сукцедент какой-либо связки исчисления высказываний, то в силу пункта определения алгорифма R_1, относящегося к этой связке, образ L в D_1 будет применением того же правила, применением которого было L.

Пусть, наконец, L — применение кванторного правила. Так как S^δ не содержит положительных кванторных комплексов, то это — применение правила введения $\exists$ в сукцедент или $\forall$ в антецедент. Рассмотрим первый из этих случаев (второй рассматривается совершенно симметрично). L имеет вид

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ [A]^x_r}{\Gamma \to \Delta,\ \exists x A}.$$

Как уже отмечалось, терм r принадлежит списку $U(m, S)$. Образ L в D_1 имеет вид

$$\frac{R_1(m, S, \Gamma) \to R_1(m, S, \Delta),\ [R_1(m, S, A)]^x_r}{R_1(m, S, \Gamma) \to R_1(m, S, \Delta),\ \bigvee_{t \in U(m, S)} [R_1(m, S, A)]^x_t}. \qquad (1)$$

Таким образом, фигура (1) может быть заменена рядом последовательных применений правила введения $\vee$ в сукцедент.

Из сказанного вытекает, что нижняя секвенция фигуры D_1 (т. е. секвенция $R_1(m, S, S^\delta)$) LK-выводима. Если δ — пустое слово, то $R_1(m, S, S^\delta)$ совпадает с $R(m, S)$.

Если δ — знак $=$, то $R_1(m, S, S^\delta)$ получается приписыванием к антецеденту секвенции $R(m, S)$ справа списка формул $R_1(m, S, \mathrm{Eq}^+(S))$. Используя теорему о монотонной замене для того, чтобы заменить список $R_1(m, S, \mathrm{Eq}^+(S))$ на список $\mathrm{Eq}^+(S)$, мы установим, что LK-выводима секвенция, получающаяся приписыванием к антецеденту секвенции $R(m, S)$ справа списка $\mathrm{Eq}^+(S)$. Так как в $R(m, S)$ входят те и только те функциональные и предикатные символы, которые входят в S, то список $\mathrm{Eq}^+(R(m, S))$ совпадает со списком $\mathrm{Eq}^+(S)$. Применяя теорему 2.2, получаем, что секвенция $R(m, S)$ $\mathrm{LK}^=$-выводима. Тем самым доказательство теоремы закончено.

§ 8. Другие формы теоремы Эрбрана

1. Если очищенная секвенция S содержит положительные кванторные комплексы, то ее функциональная форма, а значит, и секвенция $R(m, S)$ при любом m, содержит функциональные символы (даже если сама S их не содержит). Мы определим алгорифм R^*, свойства которого аналогичны свойствам алгорифма R, но такой, что при любых m и S в $R^*(m, S)$ не входят функциональные символы. Приведем сначала одно определение.

Пусть S — произвольная очищенная секвенция. Обозначим через n число функциональных символов, входящих в $\Phi(S)$ (сюда относятся как символы, входящие в S, так и символы, вводимые при переходе от S к $\Phi(S)$).

Пусть

$$\psi_1, \ldots, \psi_n \qquad (1)$$

— список арифметических функций (т. е. функций, перерабатывающих системы натуральных чисел в натуральные числа) и при каждом i ($i = 1, \ldots, n$) размерность (т. е. число аргументов) функции ψ_i совпадает с размерностью i-го (в порядке первых вхождений) функционального символа из $\Phi(S)$. Будем говорить, что список (1) является *системой функций Сколема для секвенции* S и функция ψ_i сопоставлена i-му функциональному символу из S, если выполнены следующие условия: (a) каково бы ни было натуральное число j, если переменная a_j входит в лексикон секвенции S, то значение любой функции из списка (1) при любом наборе аргументов отлично от j; (b) значение данной функции из списка (1) при некотором наборе значений аргументов однозначно определяет как саму эту функцию, так и этот набор значений аргументов, точнее, если $\psi_j(m_1, \ldots, m_p) = \psi_i(k_1, \ldots, k_q)$, то $j = i$, $p = q$, $m_1 = k_1, \ldots, m_p = k_p$.

«Интуитивный смысл» данного выше определения поясняет приводимый ниже метод построения системы функций Сколема для произвольной очищенной секвенции S. Если в $\Phi(S)$ не входят функциональные символы, или все функциональные символы, входящие в $\Phi(S)$, нульместные, то построение системы функций Сколема тривиально: она пуста или состоит из констант. Будем считать, что некоторые из функциональных символов, входящих в $\Phi(S)$, не являются нульместными. В этом случае лексикон секвенции S — бесконечное множество. Зафиксируем какую-либо нумерацию всех термов, принадлежащих лексикону секвенции S, удовлетворяющую условиям: (a) каждое натуральное число является номером одного и только одного терма; (b) номер любой переменной, принадлежащей лексикону секвенции S, совпадает с индексом этой переменной (т. е. номером переменной a_j является j). Имея такую нумерацию, можно следующим образом построить систему функций Сколема для секвенции S.

Пусть f — произвольный функциональный символ, входящий в $\Phi(S)$. Обозначим его размерность через k. Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — произвольные натуральные числа. Согласно свойству (a) зафиксированной нумерации они являются номерами некоторых термов, которые мы обозначим соответственно через $t_1, \ldots, t_k$. Терм $f(t_1, \ldots, t_k)$ имеет в нашей нумерации некоторый номер, который мы будем считать значением выражения $\psi(n_1, \ldots, n_k)$, где через ψ обозначена арифметическая функция, которая будет соответствовать функциональному символу f в системе функций Сколема для секвенции S. Можно проверить, что построенная таким образом система арифметических функций удовлетворяет условиям, наложенным на систему функций Сколема для секвенции S.

Если t — произвольный терм, принадлежащий лексикону секвенции S, и (1) — система функций Сколема для S, то будем называть *номером терма t относительно системы* (1) значение (т. е. результат вычисления) выражения, которое получается из t путем замены всех переменных на их индексы (т. е. a_j на j), а всех функциональных символов из t на соответствующие функции из списка (1).

Дадим теперь описание работы алгорифма R^*. Будем считать, что зафиксирован какой-либо алгорифм, строящий по любой очищенной секвенции S некоторую систему функций Сколема для S (назовем эту систему стандартной). Пусть S — произвольная очищенная секвенция и (1) — стандартная система функций Сколема для S. Пусть m — произвольное натуральное число. Запишем в виде $r_1, \ldots, r_l$ полный список термов, входящих в $R(m, S)$, в котором никакой из членов не содержится ни в одном из следующих членов. При каждом i $(i=1, \ldots, l)$ обозначим через p_i номер терма r_i относительно системы функций (1).

Положим, по определению,

$$R^*(m, S) \mathrel{\underline{\circ}} [R(m, S)]^{r_1 \ \ldots \ r_l}_{\mathrm{a}_{p_1} \ldots \ \mathrm{a}_{p_l}}.$$

Приводимая ниже теорема представляет собой более буквальный аналог основной теоремы Эрбрана, чем теорема 7.1.

Теорема 8.1. *Для того чтобы очищенная секвенция S была* LK*-выводима, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое m, что секвенция $R^*(m, S)$* LK*-выводима.*

Доказательство. Достаточность. Если при некотором m LK^δ-выводима секвенция $R^*(m, S)$, то, применяя нужное число раз правило подстановки терма вместо свободной предметной переменной (теорема 3.10), получаем, что LK^δ-выводима секвенция $R(m, S)$. Остается применить теорему 7.1.

Необходимость. Пусть S — произвольная очищенная LK-выводимая секвенция. По теореме 7.1 найдется такое m, что $R(m, S)$ LK-выводима. Применяя правило замены термов термами[1]) (теорема 4.2), получаем, что секвенция $R^*(m, S)$ LK-выводима.

Заметим, что утверждение, получающееся из теоремы 8.1 путем замены LK на $\mathrm{LK}^=$, неверно. Действительно, рассмотрим секвенцию

$$\to \mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2 \supset \varphi_1^1(\mathrm{a}_1) = \varphi_1^1(\mathrm{a}_2).$$

Эта секвенция (обозначим ее через S), очевидно, выводима в $\mathrm{LK}^=$. При любом m секвенция $R^*(m, S)$ невыводима в $\mathrm{LK}^=$, так как она имеет вид

$$\to \mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2 \supset a = b,$$

где a и b — свободные переменные, отличные друг от друга и от переменных a_1 и a_2.

Однако для секвенций, не содержащих функциональных символов, упомянутая модификация теоремы 8.1 все же верна, как видно из приводимой ниже теоремы 8.2, занимающей промежуточное положение между теоремами 7.1 и 8.1.

2. Определим алгорифм R^{**}, занимающий промежуточное положение между алгорифмами R и R^*. Пусть S — произвольная очищенная секвенция и (1) — стандартная система функций Сколема для S. Пусть m — произвольное натуральное число. Запишем в виде

$$t_1, \ \ldots, \ t_k$$

полный список термов, входящих в $R(m, S)$ и начинающихся с

[1]) Напомним, что при любом m секвенция $R(m, S)$ бескванторная, т. е. все квазитермы в ней являются термами.

функциональных символов, не входящих в S (т. е. с функциональных символов, введенных при построении $\Phi(S)$), в котором никакой из членов не содержится ни в одном из следующих членов. При каждом j ($j=1, \ldots, k$) обозначим через q_j номер терма t_j относительно системы функций (1). Положим, по определению,

$$R^{**}(m, S) \rightleftharpoons [R(m, S)]^{t_1 \ldots t_k}_{a_{q_1} \ldots a_{q_k}}.$$

Заметим, что если в секвенцию S не входят функциональные символы, то при любом m секвенция $R^{**}(m, S)$ совпадает с $R(m, S)$.

Теорема 8.2. *Для того чтобы очищенная секвенция S была LK^{δ}-выводима, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое m, что секвенция $R^{**}(m, S)$ LK^{δ}-выводима.*

Доказательство. Достаточность и необходимость в случае, когда δ — пустое слово, доказываются точно так же, как в теореме 8.1.

Пусть очищенная секвенция S $\mathrm{LK}^{=}$-выводима. В этом случае по теореме 2.2 LK-выводима секвенция $S^{=}$, получающаяся в результате приписывания списка $\mathrm{Eq}^{+}(S)$ справа к антецеденту секвенции S. Применяя теорему о монотонной замене аналогично тому, как она была применена при доказательстве теоремы 5.1, получаем, что LK-выводима секвенция (обозначим ее через S_1), получающаяся в результате приписывания списка $\mathrm{Eq}^{+}(S)$ справа к антецеденту секвенции $\Phi(S)$. По теореме 7.1 при некотором m LK-выводима секвенция $R(m, S_1)$. Эта секвенция получается из секвенции $R(m, S)$ приписыванием справа к антецеденту списка $R_1(m, \mathrm{Eq}^{+}(S), S_1)$. Применяя теорему о монотонной замене к членам этого списка, получаем отсюда, что LK-выводима секвенция, получающаяся в результате приписывания списка $\mathrm{Eq}^{+}(S)$ к антецеденту секвенции $R(m, S)$ (обозначим ее через S_2). Все вхождения термов, заменяемых на переменные при переходе от $R(m, S)$ к $R^{**}(m, S)$, содержатся в бескванторной части секвенции S_2 (т. е. в секвенции $R(m, S)$), так как в список $\mathrm{Eq}^{+}(S)$ входят только те функциональные символы, которые входят в S. Поэтому, применяя нужное число раз правило замены термов на термы (теорема 4.2), можно показать, что LK-выводима секвенция, которая получается в результате приписывания списка $\mathrm{Eq}^{+}(S)$ справа к антецеденту секвенции $R^{**}(m, S)$. В секвенцию $R^{**}(m, S)$ входят в точности те же функциональные и предикатные символы, что и в S. Поэтому в силу теоремы 2.2 секвенция $R^{**}(m, S)$ $\mathrm{LK}^{=}$-выводима. Теорема доказана.

3. Согласно теореме 3.7 по любой формуле можно построить предваренную формулу, эквивалентную исходной. В применении к предваренным формулам формулировку теоремы Эрбрана можно несколько упростить. Пусть A — произвольная предваренная формула. Запишем ее в виде

$$\exists z_{1,1} \ldots \exists z_{1,l_1} \forall \alpha_1 \exists z_{2,1} \ldots \exists z_{2,l_2} \forall \alpha_2 \ldots \exists z_{m,1} \ldots$$
$$\ldots \exists z_{m,l_m} \forall \alpha_m \exists z_{m+1,1} \ldots \exists z_{m+1,l_{m+1}} M,$$

где M — бескванторная формула и $l_1, \ldots, l_{m+1}$ — натуральные числа (возможно, равные нулю). Обозначим через S секвенцию $\to A$. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — полный список функциональных символов, которые вводятся при построении $\Phi(S)$. При каждом i ($i=1, \ldots, m$) обозначим через t_i квазитерм

$$f_i(z_{1,1}, \ldots, z_{1,l_1}, z_{2,1}, \ldots, z_{2,l_2}, \ldots, z_{i,1}, \ldots, z_{i,l_i}).$$

Тогда $\Phi(S)$ — это секвенция $\to B$, где B обозначает формулу

$$\exists z_{1,1} \ldots \exists z_{1,l_1} \exists z_{2,1} \ldots \exists z_{2,l_2} \ldots \exists z_{m+1,1} \ldots \exists z_{m+1,l_{m+1}} M_1$$

и M_1 обозначает квазиформулу

$$[A]^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{t_1 \ldots t_m}.$$

При каждом m секвенция $R(m, S)$ имеет вид

$$\bigvee_{r_{1,1} \in U(m,S)} \ldots \bigvee_{r_{1,l_1} \in U(m,S)} \ldots \bigvee_{r_{m+1,l_{m+1}} \in U(m,S)} [M_1]^{z_{1,1} \ldots z_{1,l_1} \ldots z_{m+1,l_{m+1}}}_{r_{1,1} \ldots r_{1,l_1} \ldots r_{m+1,l_{m+1}}},$$

т. е. является дизъюнкцией формул вида

$$[M_1]^{z_{1,1} \ldots z_{1,l_1} \ldots z_{m+1,l_{m+1}}}_{s_1 \ldots s_{l_1} \ldots s_v}, \qquad (2)$$

где $v = l_1 + l_2 + \ldots + l_{m+1}$ и $s_1, \ldots, s_v$ — термы, принадлежащие лексикону секвенции S.

Лексиконом формулы A будем называть лексикон секвенции $\to A$. Лексическими примерами формулы A будем называть произвольные формулы вида (2). Напомним, что в (2) M_1 обозначает матрицу (т. е. бескванторную часть) функциональной формы формулы A, $z_{1,1}, \ldots, z_{1,l_1}, \ldots, z_{m+1,1}, \ldots, z_{m+1,l_{m+1}}$ — полный список связанных переменных, входящих в префикс этой функциональной формы, $s_1, \ldots, s_v$ — произвольные термы, принадлежащие лексикону формулы A. Из сказанного выше и теоремы 7.1 вытекает следующее утверждение (теорема Эрбрана в форме У. Куайна):

Теорема 8.3. *Предваренная формула* LK^δ*-выводима тогда и только тогда, когда* LK^δ*-выводима некоторая дизъюнкция ее лексических примеров.*

Применяя теорему 8.1 или 8.2 вместо теоремы 7.1, можно получить другие формы теоремы Эрбрана для предваренных формул.

§ 9. Приложение теоремы Эрбрана к построению алгорифмов поиска логического вывода

Известно (см., например, [12]), что невозможен алгорифм, решающий проблему разрешения в LK, т. е. алгорифм, применимый к каждой секвенции и дающий ответ «выводима», если испытываемая секвенция LK-выводима, и ответ «невыводима» в противоположном случае. Известно также, что невозможен алгорифм, решающий проблему разрешения в $LK^=$. Поэтому приобретает интерес вопрос о построении алгорифмов поиска вывода в упомянутых исчислениях. (Алгорифм φ называется алгорифмом поиска вывода для исчисления LK^δ, если он применим ко всякой секвенции S, выводимой в этом исчислении, и перерабатывает S в некоторый ее вывод в LK^δ.)

Теорема Эрбрана дает возможность построить алгорифм поиска вывода для каждого из этих исчислений. Отметим сначала, что возможны алгорифмы, решающие проблему разрешения для бескванторных секвенций в обоих упомянутых исчислениях. Действительно, такой алгорифм для LK описан, например, в § 1 раздела IV работы Генцена [6], а алгорифм для $LK^=$ получается, если взять вместо «бескванторного» фрагмента исчисления LK «бескванторный» фрагмент исчисления, описанного в статье Кангера [9].

Опишем теперь основанные на теореме Эрбрана алгорифмы поиска вывода в исчислениях LK^δ. Буква $\mathscr{R}$ будет обозначать любое из выражений R, R^*, R^{**}, если δ — пустое слово, и любое из выражений R, R^{**}, если δ — знак $=$. Описываемый алгорифм поиска вывода в исчислении LK^δ будем обозначать через g^δ.

Пусть S — произвольная секвенция. Первый шаг процесса применения алгорифма g^δ к S состоит в построении секвенции $\mathscr{R}(0, S)$ и в проверке этой секвенции на LK^δ-выводимость. Процесс применения g^δ к S считается закончившимся на первом шаге, если выполнено одно из двух условий:

(a) $\mathscr{R}(0, S)$ LK^δ-выводима;

(b) случай (a) не имеет места и все функциональные знаки, входящие в $\Phi(S)$, не более чем нульместные.

В случае (a) алгорифм дает ответ «выводима», в случае (b) — «невыводима».

Пусть уже сделано i $(i \geqslant 1)$ шагов процесса применения алгорифма g^δ к S, и на i-м шаге этот процесс не закончился. Тогда $(i+1)$-й шаг описываемого процесса состоит в построении секвенции $\mathscr{R}(i, S)$ и в проверке этой секвенции на LK^δ-выводимость. Процесс считается закончившимся на $(i+1)$-м шаге, если $\mathscr{R}(i, S)$ LK^δ-выводима. В этом случае алгорифм g^δ дает ответ «выводима».

Из установленных в этой статье вариантов теоремы Эрбрана (теоремы 7.1, 8.1, 8.2) вытекает, что g^δ действительно является алгорифмом поиска вывода в исчислении LK^δ. Следует лишь заметить, что если на первом шаге процесса применения алгорифма g^δ к секвенции S имеет место случай (b), то при любом i секвенция $\mathscr{R}(i, S)$ совпадает с секвенцией $\mathscr{R}(0, S)$, поэтому дальнейшие шаги процесса не несут новой информации.

Класс формул, удовлетворяющих условию (b), в литературе часто называют классом $\forall\exists$ (читается «A—E»). Это название связано со следующим обстоятельством: для того чтобы предваренная формула, в которую не входят более чем нульместные функциональные знаки, принадлежала рассматриваемому классу, необходимо и достаточно, чтобы ее префикс имел вид

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n \exists z_{n+1} \ldots \exists z_{n+m}$$

или, короче, $\forall^n \exists^m$.

Для формул класса $\forall\exists$ алгорифм g^δ решает проблему разрешимости в исчислении LK^δ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Herbrand J., Recherches sur la théorie de la demonstration, Travaux de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, sciences mathématiques et physiques 33 (1930).

[2] Wang Hao, Towards mechanical mathematics, JBM J. of Research and Development 4, N 1 (1960), 2—22. (Русский перевод: Хао Ван, На пути к машинной математике, Кибернетический сборник 5, ИЛ, 1962.)

[3] Gilmore P. C., A proof method for quantification theory, its justification and realization, JBM J. of Research and Development 4, N 1 (1960), 28—35.

[4] Davis M., A machine program for theorem proving, Communications of the ACM 5, N 7 (1962), 394—397.

[5] Dreben B., Andrews P., Aandreaa S., False Lemmas in Herbrand, Bull. Amer. Math. Soc. 69, N 5 (1963), 699—706.

[6] Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Z. 39 (1934—35), 176—210, 405—431. (Русский перевод: Генцен Г., Исследования логических выводов; см. наст. сборник.)

[7] Beth E. W., Foundations of mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1959. (Перевод выдержек из этой монографии помещен в настоящем сборнике.)

[8] Матулис В. А., О вариантах классического исчисления предикатов с единственным деревом вывода, Докл. АН СССР **148**, № 4 (1963), 768—770.
[9] Kanger S., A simplified proof method for elementary logic, Computer programming and formal systems, North-Holland, Amsterdam, 1963. 87—94. (Русский перевод: Кангер С., Упрощенный метод доказательства для элементарной логики, см. наст. сборник.)
[10] Gentzen G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. **112** (1936), 493—565. (Русский перевод: Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел; см. наст. сборник.)
[11] Gentzen G., Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reinen Zahlentheorie, Forsch. zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissensch., Neue Folge, N 4 (1938), Leipzig (Hirzel), 19—44. (Русский перевод: Генцен Г., Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел, см. наст. сборник.)
[12] Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.
[13] Maehara S., The predicate calculus with ε-symbol, J. Math. Soc Japan **7**, N 4 (1955), 323—344.

СОДЕРЖАНИЕ