МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

23

Г. КРАЙЗЕЛЬ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Сборник статей

Перевод с английского
Ю. А. ГАСТЕВА И Г. Е. МИНЦА

под редакцией
С. Ю. МАСЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1981

УДК 517.11.517.12

Сборник работ крупного американского специалиста по математической логике и основаниям математики. В нем дается обзор основных результатов математической теории доказательств и ее методов. Уделяется место происхождению методов теории доказательств и обоснованию интереса к рассматриваемой проблематике. В частности, описываются приложения к реальному синтезу программ для вычислительных машин.

Сборник представляет интерес как для читателей с минимальной подготовкой в области математической логики, так и для специалистов, которые могут ознакомиться с доказательствами новых глубоких результатов.

Г. Крайзель
ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ
Сборник статей

Научный редактор Г. М. Цукерман
Младший научный редактор И. В. Герасимова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор В. С. Соколов

ИБ № 2203

Сдано в набор 04.06.80. Подписано к печати 10.02.81. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип № 2. Латинская гарнитура. Высокая печать. Объем 9 бум. л., 18 усл. печ. л. Уч-изд. л. 17,34. Тираж 7800 экз. Зак. 801. Цена 1 р. 80 к. Изд. № 1/0796.

Издательство «Мир», 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Редакция литературы по математическим наукам

1702040000
К 20203-014 / 041(01)-81 14-81, ч. 1

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В начале нашего столетия традиционная теоретико-множественная математика была поставлена под сомнение из-за обнаружившихся в ней парадоксов. С целью ее обоснования Гильберт предложил программу исследования математических доказательств методами новой математической дисциплины, которую он назвал метаматематикой или теорией доказательств. Благодаря усилиям многих математиков, включая самого Гильберта, фон Неймана, Гёделя, Генцена и П. С. Новикова, теория доказательств действительно превратилась в полноправную и значительную часть математической логики. В ходе своего развития программа Гильберта подверглась модификации, а некоторые из его первоначальных предположений были опровергнуты.

Вместе с тем был получен ряд выдающихся результатов, известных сейчас любому математику, который интересуется основаниями своей науки — теорема Гёделя о неполноте всякой достаточно сильной формальной системы, теоремы о непротиворечивости арифметики и анализа и др.

Доказательства непротиворечивости связаны со сведением теорий к свободным от логики системам. Аппарат, методы и вопросы, возникшие в ходе таких сведе́ний, находятся в центре внимания современной теории доказательств. Другая группа результатов, которые формулируются в терминах теории доказательств и оказывают на нее влияние, но устанавливаются обычно средствами теории моделей,— это доказательства независимости математических предложений (например, аксиомы выбора и континуум-гипотезы) от традиционных формальных систем. Наконец, исследования по программе Гильберта дали один из важнейших стимулов к возникновению современной теории алгоритмов (рекурсий), которая сейчас уже полностью отделилась от теории доказательств.

Настоящий сборник составлен из статей американского логика Г. Крайзеля, который внес значительный вклад в развитие всех упомянутых областей математической логики. Для его работ характерно не только обилие собственно

математических результатов, но и стремление к их философскому осмыслению, поиску связей с другими областями математики и направлений плодотворного развития. Отметим, однако, что некоторые оценки автора весьма спорны. В отличие от его математических результатов они вызывают одобрение далеко не у всех видных математиков, работающих в теории доказательств: стоит только проследить полемику с (не названным ни разу прямо!) Крайзелем в книге Г. Такеути «Теория доказательств» (М.: Мир, 1978; стр. 8, 96, 100, 101, 112).

В частности, критикуя теорию доказательств за излишний интерес к «методам» в ущерб интересу к результатам, Крайзель упускает из вида, что одним из важнейших ее методов (и результатов) является развитие теории поиска вывода. Теория поиска вывода изучает вопрос о том, как по гипотезе определить структуру ее возможных доказательств. Вопрос этот имеет решающее значение для доказательств непротиворечивости, основанных на устранении сечений. Однако этот же вопрос (в некоторой форме всегда и с большой пользой изучавшийся в математике) важен и для многих других приложений, начиная с программы конструктивизации математики и кончая проблематикой машинного поиска вывода и разработки систем искусственного интеллекта. Недооценка Крайзелем этого аспекта теории доказательств особенно удивительна, так как он сам прекрасно чувствует упомянутые возможности (что и доказывает, например, публикуемая в настоящем сборнике статья «Некоторые приложения теории доказательств к поиску программ для ЭВМ», в которой используются такие типичные результаты теории поиска вывода, как Е-теоремы).

Две первые статьи сборника составляют обзор теории доказательств, как ее видит автор. Следующая статья — попытка популярного изложения истории и современного подхода к применению ординальных чисел в теории доказательств. Четвертая статья посвящена перспективам приложения некоторых недавних результатов структурной теории доказательств к построению программ для ЭВМ. Конкретное программирование, использующее этот подход, уже ведется как в СССР, так и в США. Последняя статья затрагивает вопросы поиска приложений в других областях математики. Автор приводит примеры удачных приложений в прошлом и подробно аргументирует свое мнение о перспективных направлениях будущего развития.

Сборник рассчитан на потребности различных категорий читателей. Тот, кто помнит лишь несколько основных понятий и самых звучных результатов математической логики, но хотел бы ознакомиться в общих чертах с современными проблемами и состоянием теории доказательств, не вдаваясь в технические подробности, может ограничиться «бесформульной» частью. Это вступления ко всем статьям, § 1—5 и дополнение I к «Обзору теории доказательств», § 1 статьи «Как теория доказательств пришла к своим ординальным числам...» и обе последние статьи сборника, за исключением приложения к предпоследней статье.

Более тщательное чтение требует знакомства с основными понятиями и результатами структурной теории доказательств. Значительную их часть (с доказательствами) читатель может найти в обзоре «Теория доказательств (арифметика и анализ)» (Итоги науки и техники. Алгебра, топология, логика, 1975. — М.: ВИНИТИ, т. 13, с. 5—49). Результаты Генцена, Гёделя и других классиков теории доказательств, интенсивно используемые до настоящего времени (в частности, в статьях Крайзеля), объединены в сборнике «Математическая теория логического вывода» (М.: Наука, 1967). Более современные результаты изложены в следующих книгах: Такеути Г. Теория доказательств.— М.: Мир, 1978, и Драгалин А. Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств.— М.: Наука, 1979. Из книг, не переведенных на русский язык, можно особенно рекомендовать короткую монографию Правица (Prawitz D. Natural Deduction. — Stockholm: Almquist and Wiksell, 1965), на которую ссылаются все современные работы по структурной теории доказательств, и книгу Шютте (Schütte K. Proof theory.— Berlin — Göttingen: Springer, 1977) — переработанное издание другого стандартного источника — книги того же автора «Beweistheorie» (Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer, 1960).

В заключение хочется выразить признательность автору, любезно приславшему список исправлений и небольших дополнений, которые помещены в виде подстрочных примечаний к соответствующим статьям. В статью «Обзор теории доказательств» внесены также примечания к ней, опубликованные в конце «Обзора теории доказательств II». В связи с этим первоначальные подстрочные примечания автора, имеющие сплошную нумерацию, перенесены в конец каждой статьи.

С. Ю. Маслов

ОБЗОР ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ*)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Можно уверенно сказать, что даже название нашей дисциплины понимается теперь иначе, чем тогда, когда Гильберт ввел ее под именем Beweistheorie (*теории доказательств*). (Она была задумана как основной инструмент для формулировки общего подхода Гильберта к анализу математического рассуждения.) В частности, оказалось, что между двумя основными элементами теории доказательств — принятыми интуитивными доказательствами и изучаемыми формальными доказательствами (или выводами) — роли распределены совсем иначе, чем думал Гильберт. По его мнению наиболее трудная часть работы была проделана, когда была открыта формализация, и осталось только изучать некоторые данные формальные системы. Но по мере того как накапливались знания, оказалось, что наибольшего внимания требует анализ рассматриваемых интуитивных доказательств и выбор формальных систем. Короче, для Гильберта слово *доказательство* (*в теории доказательств*) означало *формальный* вывод; однако для того, чтобы *теория доказательств* была жизнеспособной в наше время, она должна заниматься также *интуитивными доказательствами* [1]).

Я думаю, что мы получим ясную и правильную картину как того, что сделано в теории доказательств, так и того, что делать дальше, если вначале вспомним, как сам Гильберт смотрел на этот вопрос.

Отделение оснований от философии (эпистемологии). Гильберт хотел принять лишь ту часть $\mathcal{P}_0$ математических рассуждений, типичным образцом которой является школьная математика и без которой вообще не было бы науки;

---

*) G. Kreisel. A survey of proof theory. — The Journal of Symbolic Logic, v. 33, № 3, 1968, p. 321—388.

[Получена 14 февраля 1967 г., в переработанном виде — 31 мая 1967 г. Эта статья основана на обзорном докладе, который автор сделал на ежегодной конференции Ассоциации символической логики в Хьюстоне, Техас, 1967 г.]

подробности см. в дополнении I(c)(iii). Он назвал концепцию $\mathscr{P}_0$ финитистской, так как считал, что *финитность* существенна для ее элементарного характера; но это допущение само по себе проблематично, так как мы имеем дело с *переменными*. (Другие названия для $\mathscr{P}_0$, отражающие различные философские взгляды на ее существенные черты,—«комбинаторная» (1) или «конкретная» (2) математика.) Мы весьма хорошо знаем, что такое $\mathscr{P}_0$, но формулировка точного определения — это цель, а не исходный пункт нашего исследования.

В распоряжении Гильберта были два открытия. Во-первых, эмпирическое открытие формализации (существующей) математики в формальных системах S (Principia Mathematica; см. [91]). Это означает, что если мы примем абстрактные понятия математической практики, то математические рассуждения корректно выражены системой S. Так как большинство из этих понятий не имеет ничего общего с $\mathscr{P}_0$, то надо установить какую-то связь с $\mathscr{P}_0$. Она была установлена с помощью принадлежащего самому Гильберту открытия: в самой $\mathscr{P}_0$ можно сформулировать подходящие *условия адекватности* на формализацию.

Мы имеем некоторый класс $\mathscr{A}$ утверждений в $\mathscr{P}_0$ и перевод T, который отображает утверждения $A \in \mathscr{A}$ в формулы A_T системы S. Напомним, что все утверждения в $\mathscr{P}_0$ разрешимы. Первое требование на формализацию в S интуитивных классов $\mathscr{A}$ состоит в наличии функции π из $\mathscr{A}$ в формальные выводы в S и доказательства в $\mathscr{P}_0$ утверждения

(i) $A \longrightarrow Prov_S(\pi A, A_T)$ для $A \in \mathscr{A}$,

где $Prov_S$ — предикат «быть доказательством в S». Далее, для $A \in \mathscr{A}$ и переменного p

(ii) $Prov_S(p, A_T) \longrightarrow A$

должно быть установлено в $\mathscr{P}_0$. Согласно хорошо известному техническому результату (например, [17, стр. 304]), при весьма общих условиях на S условие (ii) эквивалентно *проблеме непротиворечивости*; кроме того, (i) и (ii) — настоящие *условия адекватности* (ср., например, [50, стр. 209]).

Таким образом, Гильберт установил замечательный факт: так как мы имеем формализацию, условия адекватности, т. е. (i) и (ii), можно *сформулировать* в $\mathscr{P}_0$; точнее, ввиду рудиментарности $Prov_S$ в смысле Смольяна *единственное нужное допущение относительно* $\mathscr{P}_0$ *— это чтобы* $\mathscr{P}_0$ *содержала все рудиментарные отношения.*

Так называемое отделение оснований от философии может быть выражено следующим образом.

(i) *и* (ii) *должны быть установлены с использованием очень простых допущений о* $\mathscr{P}_0$ (но, возможно, посредством сложных математических конструкций). Иными словами, Гильберт думал, что не нужно никакого детального философского анализа $\mathscr{P}_0$ (подобно тому, как иногда удается решить физическую задачу чисто математически). Это программа Гильберта, освобожденная от некоторых неудачных формулировок; см. дополнение I(c).

Эта программа казалась правдоподобной из-за невысказанного убеждения, что столь элементарные утверждения, как (i) и (ii), *разрешимы* в $\mathscr{P}_0$. Строго говоря, было бы достаточно допустить эту разрешимость только для тех S, которые общеприняты в математической практике. Но тогда нет убедительной причины для того, чтобы (ii) было доказуемо в $\mathscr{P}_0$ для следующей системы, которая возникнет в практике. И если каждый раз придется начинать сначала, то у нас не будет четкого разделения, которого желал Гильберт. (В замечании после случая (i) § 4 приводятся еще более сильные допущения.)

Следствия теоремы Гёделя для теории доказательств. Хорошо известны два приводимых ниже следствия второй теоремы о неполноте:

1. Необходим философский анализ концепций $\mathscr{P}$, отличных от $\mathscr{P}_0$, и наш интерес к данной концепции будет зависеть от ее подлинной значимости. Таким образом, мы не имеем разделения, которого хотел Гильберт.

2. Для данной системы S мы в общем случае не можем ожидать доказательства (i) и (ii) в некоторой данной $\mathscr{P}$, а должны искать *подходящую* концепцию. Заметим, что если меняется $\mathscr{P}$, то в общем случае меняется и соответствующий класс $\mathscr{A}$. Далее, не обязательно предполагать, что S — формальная система, если $\mathscr{P}$ некомбинаторная, ибо в такой концепции могут допускаться нерекурсивные описания (это не используется в дальнейшем).

Однако на схему Гильберта влияет и *первая* теорема о неполноте.

3. *Центральной* проблемой становится выбор S. При гильбертовских допущениях (перечисленных выше) было неважно, какая из систем S, принятых в математической практике, выбрана, так как предполагалось, что $\mathscr{P}_0$ устанавливает (i) и (ii) для всех таких S. Кроме того, Гильберт думал, что введенные им системы S для арифметики и анализа *полны*, т. е. верил, что их правила разрешают любое утверждение, сформулированное в языке системы S. Поэтому естественно, что он, с одной стороны, не уделял внимания *подсистемам*

своих формальных систем (например, арифметике с индукцией только по бескванторным формулам из § 4) — они казались бы искусственными при его предположениях. С другой стороны, он не искал *расширений* своих систем S. Действительно, в силу полноты не нужно никаких новых правил, если рассматриваются формулы в языке системы S, а ввиду эмпирического открытия, упомянутого выше, было известно, что понятия из математической практики выразимы в этом языке. (Хорошо известно, что нахождение расширений обычных формальных систем является одной из главных проблем для оснований математики, но не для гильбертовской концепции теории доказательств: обычные системы доставляли достаточно неприятностей!)

Ввиду теорем Гёделя о неполноте имеются две возможности:

1. Так как все формальные системы неполны, т. е. являются подсистемами, все они искусственны: грубо говоря, это конец рассматриваемой здесь теории доказательств.

2. Фундаментальным становится *выбор* системы, например, в случае, когда мы можем установить средствами данной концепции $\mathscr{P}$ утверждения (i) и (ii) для подсистемы S', но не для самой S. Ясно, что если редукция к $\mathscr{P}$ вообще имеет значение, то вопрос о том, нельзя ли случайно формализовать существующую математику в S', столь же существен, как и вопрос о формализации ее в «очевидной» системе S, и в общем случае более существен, чем вопрос, можно ли формализовать существующую математику в *какой-нибудь* (непротиворечивой) системе.

Эти выводы противоречат широко распространенным мнениям, восходящим к началу нашего столетия и более ранним временам, что неудивительно, так как они опираются на (более поздние) открытия Гёделя. Возможно, что прогресс исследований в области оснований тормозился привычкой математиков сосредоточиваться на новых *методах* доказательства, вроде тех, что ввел Гёдель, вместо того чтобы пересмотреть значение старых проблем в свете новых результатов.

§ 2. РЕЗЮМЕ (ФИЛОСОФСКИЙ АСПЕКТ)

Концепции $\mathscr{P}$, затрагиваемые в настоящей статье,— это концепции комбинаторного, неконструктивного предикативного (относительно понятия натурального числа) и интуиционистского доказательства. Часто полезно и даже необходимо формулировать явно, какие *свойства* этих концепций нужны в различных конкретных рассуждениях, точно так же, как формальные аксиомы теории множеств формулируют некоторые из математически наиболее полезных свойств понятия множества. Есть, однако, важное отличие: так как $\mathscr{P}$ описываются в терминах *доказательств*, то важные свойства этих концепций выражаются не только аксиомами, но и правилами: *интерпретация* формализма будет не только задавать универсум и сопоставлять объекты отношениям и функциональным символам, но и сопоставлять интуитивные доказательства формальным выводам. Иными словами, важно не только множество теорем, но и множество формальных выводов.

В общем рассматриваемые свойства концепций $\mathscr{P}$ будут относиться к принципам доказательства по индукции и определения путем рекурсии, принципам определения функций типа $N^N \longrightarrow N$ и принципам определения функций всех конечных типов [2]).

Философское значение этих принципов объяснено в § 6(d), § 10, дополнениях IV и VII. Но новичок, пришедший из математики, не успокоится, пока не получит ответа на следующие вопросы.

Рассматриваемые принципы $\mathscr{P}$ более или менее традиционны. Почему мы должны *ограничиться* ими? Не лучше ли было бы подходить к проблеме непротиворечивости *интуитивно* и искать по возможности более информативное математически доказательство непротиворечивости? Когда мы его найдем, мы сможем затем проанализировать его философское значение. Иными словами, мы снова пытаемся отделить основания математики от эпистемологии, хотя и в несколько более слабом смысле, чем первоначально намеревался Гильберт.

Дополнение I(b) посвящено этому вопросу.

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕЗЮМЕ (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ)

§ 6—12 содержат математические результаты, касающиеся различных формальных систем для отраслей современной (неконструктивной) математики или для концепций $\mathscr{P}$, упомянутых в последнем разделе.

Из-за важности, которую приобрел анализ интуитивных концепций $\mathscr{P}$, теория доказательств сходна по общему характеру с *прикладной* математикой. Чтобы выделить математически существенные черты, естественно рассмотреть используемые методы и посмотреть, как они *обобщаются*, по аналогии с тем, как могут обобщаться доказательства теорем о 3-мерном пространстве. Можно ожидать, что такие обобщения теории доказательств несут аналогичные функции. Так, например, чисто технически более общая задача может

вынудить нас упростить рассуждение и таким образом позволит решить более сложную задачу о *самой* $\mathscr{P}$. Кроме того, различия, «тонкие» в частном случае, могут стать весьма наглядными в общем случае. Наконец, понятия, развитые для такого обобщения, могут быть использованы при анализе новой ситуации (здесь — новой концепции), для которой существующая теория подходит (например, путем использования иерархии систем вместо единственной системы, ср. примечание 1).

Мне кажется, что все эти функции хорошо иллюстрируются расширением теории доказательств на *инфинитарные* (бесконечно длинные) *формулы* или, точнее, на подходящим образом выбранные инфинитарные формулы. Я дам небольшой отчет о достижениях в этом направлении в § 13. Технические применения будут очевидны. Лично я считаю этот предмет важным с *философской* точки зрения, грубо говоря, потому, что, как мне кажется, мысли лучше представляются бесконечными объектами, чем словами, которые мы используем, чтобы их сообщать. Эта идея, конечно, не нова, но ей меньше доверяли бы, если бы не было хорошо работающей теории бесконечно длинных формул [3]).

Теория формальных систем и теория доказательств: одно различие. Очевидно, имеется много вопросов о формальных системах, вообще выходящих за рамки теории доказательств в нашем смысле, например *теорема полноты* относительно интуитивного понятия, не включающего никакого понятия доказательства. Так, для замкнутых формул A исчисления предикатов первого порядка мы имеем теоретико-множественную формулу $V(A)$, выражающую тот факт, что A имеет место во всех структурах и теорему полноты вида $\forall A[V(A) \rightarrow \rightarrow \exists p\, Prov_1(p, A)]$, где $Prov_1$ — отношение «быть доказательством» для одной из обычных формулировок логики предикатов. Само утверждение о полноте не имеет смысла в $\mathscr{P}$, если V не определено в $\mathscr{P}$, например в случае $\mathscr{P}_0$.

Другой важный пример — *доказательства независимости*, т. е. утверждения о том, что для конкретной формулы A_0 и для всех n верно $\neg Prov(n, A_0)$, когда мы просто не знаем ответа, например для теории множеств Квайна и $0=1$ в качестве A_0. В этом случае не только желательно использовать теоретико-модельные методы, но просто смешно не сделать этого. (Кстати, зачастую довольно легко и не особенно интересно преобразовывать такие рассуждения в доказательства относительной независимости, использующие только комбинаторные методы, ср. дополнение II.)

Иногда случается, что теория доказательств в нашем смысле дает самое легкое решение *технической* проблемы, т. е. проблемы, формулируемой в обычных математических терминах, в частности не упоминающей никакой концепции $\mathscr{P}$. Примерами являются вопросы конечной аксиоматизируемости и близкие вещи. Мы будем называть такие технические применения теории доказательств *приложениями*, чтобы отличить их от философских «следствий».

§ 4. ВЫБОР ПОДСИСТЕМ

В программе Гильберта формальная система S функционирует только как компактное описание математической практики. Но ведь не с помощью же статистического анализа математических текстов мы находим такие системы! И даже если бы они были найдены таким образом, они не были бы убедительны! (Точно так же *правила* логики предикатов не были бы найдены, если бы не рассматривалось интуитивное понятие логического следования либо в обычном теперь теоретико-множественном семантическом смысле, либо в смысле интуитивного логического следования в понимании Фреге. Относительно детализации этого различия см., например, § 2 в [46].)

Общий принцип, отличающий открытие рассматриваемых здесь базисных аксиоматических систем от обнаружения технических систем, вроде аксиом теории групп, заключается в следующем.

Мы имеем (категоричную) *аксиоматику второго порядка для математической структуры, а затем переходим к системе первого порядка либо* (i) *используя схему, либо* (ii) *используя многосортную систему и формулируя явные условия замкнутости для «множеств»* [4]).

Пример. Рассмотрим аксиомы Пеано для арифметики, т. е. структуру $\langle N, 0, S\rangle$ множества натуральных чисел с выделенным первым элементом 0 и функцией следования S. Кроме аксиом первого порядка для 0 и S мы имеем *принцип индукции* второго порядка

$$\forall \boldsymbol{X}\,(\forall x\,[\boldsymbol{X}(x) \rightarrow \boldsymbol{X}(Sx)] \rightarrow \forall x\,[\boldsymbol{X}(0) \rightarrow \boldsymbol{X}(x)]),$$

где $\boldsymbol{X}$ — переменная второго порядка.

Случай (i). Мы заменяем принцип индукции схемой, что приводит к известной системе классической арифметики первого порядка (некоторые формальные детали см. в дополнении III). Заметим, что этот шаг *неоднозначен*. Так, в аксиомах Пеано явно упоминаются только функциональные символы 0 и S (соответственно от нуля аргументов и одного аргумента), но эта известная система содержит еще $+$ и $\times$! На

техническом языке: существование сложения и умножения является следствием второго порядка из аксиом Пеано, и выбор языка первого порядка учитывает во всяком случае *некоторые* такие следствия[5]). Хорошо известно, что соответствующая схема в языке (0, S) совершенно не годится для формализации арифметических рассуждений.

Замечание. Формальная система (где постулирована схема индукции), ограниченная языком (0, S), *полна*. Не думал ли Гильберт, что для любой примитивно рекурсивной функции f, определенной с помощью вспомогательных функций $f_1, \ldots, f_k$, рекурсивные равенства для $(f, f_1, \ldots, f_k)$ вместе с аксиомами для функции следования и схемой для языка $(0, S, f, f_1, \ldots, f_k)$ тоже окажутся полными?

Случай (ii). Мы рассматриваем двухсортное исчисление предикатов, добавляем принадлежность, записываем экзистенциальные аксиомы для X, соответствующие правилам построения для формул первого порядка, примерно так, как делается в обычной конечной аксиоматизации теории множеств, использующей классы (общее описание см. [46, App. A]), и записываем индукцию в виде

$$\forall X[\forall x(x \in X \to Sx \in X) \to \forall x(0 \in X \to x \in X)].$$

Здесь имеется очевидная неоднозначность в выборе экзистенциальных аксиом (среди тех, которые имеют место в данной структуре).

Замечание. С философской точки зрения вторая форма более привлекательна, ибо мы *можем воспринять* бесконечное множество аксиом в (i) только потому, что они являются примерами (ii)! Но для хорошей формализации анализа будет необходимо отделить индукцию от экзистенциальных аксиом (аксиом существования) для множеств.

Таким образом, в обоих случаях (i) и (ii) у нас есть неоднозначность в выборе аксиоматизации первого порядка. *Поэтому особый интерес представляют те результаты, которые настолько независимы от этого выбора, насколько это возможно.* Ниже я постараюсь давать именно такие формулировки, например, в связи с ролью ε_0 в арифметике.

Анализ. Рассматривается структура $\langle N, \mathfrak{P}(N), 0, S, \in\rangle$. Известная аксиоматизация второго порядка добавляет к аксиомам Пеано экстенсиональность для $\in$ и так называемую *аксиому свертывания*

$$(CA) \qquad \forall \boldsymbol{X}\exists X\forall x[x \in Y \leftrightarrow \boldsymbol{X}(x)].$$

Более удобная формулировка использует структуру

$$\langle N, \mathfrak{P}(N), N^N, 0, S, \in, \circ\rangle,$$

где $\circ$ обозначает применение функции к аргументу, называемое иногда оценкой: $N^N \times N \to N$, $f, g, \ldots$ — функциональные переменные (низшего типа) и $\boldsymbol{X}$ — бинарные отношения второго порядка на $N \times N$, $N \times N^N$, $N^N \times N^N$. Кроме обычных аксиом, связывающих функции и их графики, мы имеем *аксиому выбора* AC в одной из форм:

$$(AC_{00}) \qquad \forall \boldsymbol{X}\exists f[\forall x\exists y\boldsymbol{X}(x, y) \to \forall x\boldsymbol{X}(x, fx)],$$

$$(AC_{01}) \qquad \forall \boldsymbol{X}\exists f[\forall x\exists g\boldsymbol{X}(x, g) \to \forall x\boldsymbol{X}(x, f_x)],$$

$$(DC_{11}) \qquad \forall \boldsymbol{X}\forall h\exists k[\forall f\exists g\boldsymbol{X}(f, g) \to \forall x(k_0x = hx \wedge \boldsymbol{X}(k_x, k_{x+1})]$$

Здесь f_x определяется соотношением $f_x(y) = f(\langle x, y\rangle)$, где $\langle x, y\rangle$ — терм, определяющий спаривающую функцию.

Хорошо известно, что $DC_{11} \to AC_{01} \to AC_{00} \to CA$. С помощью совершенно элементарных условий замкнутости (первого порядка) мы получаем также $CA \to AC_{00}$. Но так как DC_{11} верна в единственной структуре, удовлетворяющей аксиомам для анализа CA, то и DC_{11} является следствием второго порядка из CA (плюс элементарные аксиомы)! Относительно некоторых интерпретаций, для которых неправдоподобна аксиома DC_{11} или даже AC_{01}, см. дополнение IV(b).

Системы первого порядка, где $\boldsymbol{X}$ в аксиомах второго порядка (индукции, свертывания, выбора) заменяется явно определимыми отношениями Ξ. Мы рассматриваем подсистемы по причинам, объясненным во введении, но, кроме того, приходим к подсистемам в случае, когда хотим иметь верную картину рассуждений, *действительно* используемых в существующем анализе. Один из методов получения таких подсистем — *ограничить синтаксическую форму* формулы Ξ, например ввести ограничение на число чередующихся кванторов в префиксе ее нормальной формы (это знакомо по иерархии Клини). Следует отметить два обстоятельства. (i) Рассмотрение неформальных доказательств подсказывает, что схему индукции следует изучать на иных основаниях, чем другие схемы. Индукция свободно применяется к любым формулам (содержащим переменные любых сортов в рассматриваемых формализмах), но оказывается, что некоторые «ветви» анализа используют AC или DC лишь в весьма ограниченных формах. Более теоретическое обоснование этого различия может быть дано в терминах ω-моделей из дополнения IV(a): если формула A невыводима потому, что индукция ограничена, то модель для $\neg A$ должна содержать нестандартные на-

туральные числа, т. е. не может быть ω-моделью. (ii) Хотя некоторые уровни (синтаксического аналога) иерархии Клини ведут к осмысленным подсистемам, например, для $\Xi \in \Sigma^1_1$ (ср. дополнение V) и почти наверняка для $\Xi \in \Sigma^1_2$, не следует предполагать, что они обязательно оказываются интересными для всех Σ^1_n.

В действительности для современной теории доказательств гораздо более успешной оказывалась до сих пор совсем иная классификация.

Она будет рассмотрена в § 9. Грубо говоря, мы там избегаем *основного недостатка* упомянутых выше подсистем, описываемого и устанавливаемого в § 8. Имеются канонические определения R хорошо известных вполне-упорядочений натуральных чисел, например по ординалу ε_0, такие, что принцип «наименьшего числа»

$$(*) \qquad \exists x \Xi(x) \rightarrow \exists u [\Xi(u) \wedge \forall v \{R(v, u) \rightarrow \neg \Xi(x)\}]$$

не может быть выведен в данной подсистеме для достаточно сложного Ξ. Так как эти канонические определения задают рассматриваемые вполне-упорядочения во всех ω-моделях, то, как и в случае ограниченной индукции, модель, отрицающая (*), обязана быть нестандартной (даже относительно натуральных чисел).

Несколько слов о *значении* подсистем. В философском отношении критерий очевиден: при заданной концепции $\mathscr{P}$ мы хотим найти подсистему, которая сводима к $\mathscr{P}$ (в том смысле, как это объяснено во введении) и в то же время дает возможность удобно формулировать математическую практику без искусственных трюков. Математически вопрос менее четко очерчен и часто несколько субъективен, так как связан с имеющимися знаниями. (В этом одна из причин того, что математическая логика так часто разочаровывает, если не ясно философское значение рассматриваемого вопроса!). Подсистема, безусловно, интересна, если ей удовлетворяет *известный класс* (множеств и) *функций, который не удовлетворяет полной системе.* Например, в случае Σ^1_1-AC_{01} или Σ^1_1-DC_{11} таков класс гиперарифметических функций. (Очевидно, что для того, чтобы оценить этот пример, нужно знать понятие гиперарифметической функции *и* признавать его ценность.) В частности, большинство результатов гиперарифметического (и так называемого рекурсивного) анализа является непосредственными следствиями того факта, что эти результаты выводимы в подходящих подсистемах классического анализа. Те, кто работает в этой области, кажется, находят удовольствие в переписывании классических рассуждений, совершенно забывая об *аксиоматическом методе*! Конкретные примеры см. в реферате работы [57]. (Естественно, что результаты о независимости требуют специальных конструкций [37].) Критическим моментом при использовании подсистем почти всегда является *выбор определения* для рассматриваемого понятия из нескольких, эквивалентных в полном анализе или теории множеств. Например, различные «определения» класса гиперарифметических функций, т. е. различные свойства, которые выделяют эти функции в N^N, в общем случае не эквивалентны в Σ^1_1-AC_{01}. Интересно, что зачастую в слабой подсистеме можно больше доказать как раз для первоначальных «неуклюжих» определений; яркие примеры см. в дополнении V(a). Люди боятся задаваться вопросом, какое из определений является правильным или основополагающим, и исследуют скучный список альтернатив. Вот очевидное предложение: выбирать то определение изучаемого понятия, для которого основные свойства, используемые в неформальной теории, могут быть доказаны в слабой подсистеме. (Это предложение эвристическое, и необходимо исследование, чтобы проверить, осуществляется ли оно в данном конкретном случае, т. е. для данного понятия и предложенной подсистемы.) Конечно, это предложение относится не только к аксиоматической теории гиперарифметической иерархии, но, даже в большей степени, к определениям более интуитивных понятий, таким, как геометрические понятия открытого и замкнутого множества. Здесь требуется, чтобы были доказуемы *интуитивно очевидные* свойства понятий (а не только «главные» свойства, которые случайно оказались полезными). Другой полезный, но менее радикальный критерий касается следующего вида *устойчивости.* Если при переходе к другому языку мы записываем аксиомы и они оказываются поразительно похожими, то результирующая система должна быть «тесно» связана с первоначальной системой. Более точная информация имеется в дополнении VI(c).

§ 5. КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Это, конечно, наиболее известная часть теории доказательств и та область, где были впервые применены многие из ее наиболее плодотворных идей. Но, несмотря на то что весьма легко указать философский интерес (для $\mathscr{P}_0$) работ, скажем, Генцена или Эбрана, математическая сторона более запутана: мы чувствуем, что нечто достигнуто, но кажется, что многие результаты гораздо легче получить неконструктивными методами, в частности с помощью *полноты* и *корректности*

изучаемых правил. (Как уже сказано раньше, это парадигмы свойств формальных систем, не имеющих ничего общего с теорией доказательств.)

Пример 1. Рассмотрим систему арифметики с чисто универсальной аксиомой A. Тогда, если $\forall x \exists y B(x, y)$ есть следствие A, то имеются термы $t_1, \ldots, t_n$, построенные из функциональных символов в A и такие, что $B(x, t_1) \vee \ldots \ldots \vee B(x, t_n)$ есть следствие $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, где каждое A_i есть подстановочный частный случай формулы A. Более того, имеется операция f в $\mathscr{P}_0$, дающая чисто пропозициональный вывод по формальному выводу d формулы $A \rightarrow \forall x \exists y B(x, y)$ (и, следовательно, границу для сложности t_i в терминах d).

В философском отношении это важно, поскольку в выводе d могут встречаться формулы, не имеющие смысла в $\mathscr{P}_0$ (если кванторным формулам вообще не приписана интерпретация) или просто ложные (для естественной интерпретации кванторов в $\mathscr{P}_0$), но указанный результат показывает, что если A истинна в $\mathscr{P}_0$ для естественной интерпретации, то истинна и $\forall x \exists y B(x, y)$.

С математической стороны эта *реализация кванторов существования явно определенными комбинаторными функциями* имеет некоторые алгебраические приложения, обсуждаемые в [34]. См., однако, дополнение I(d). Если мы действительно хотим для данного d получить эти реализации, то должны вернуться к комбинаторному доказательству. Но если нам нужно только существование таких t или рекурсивной функции f, то имеется очень простое теоретико-модельное рассуждение. (Поэтому, если мы не заинтересованы в действительных вычислениях и не имеем отчетливого представления о $\mathscr{P}_0$, то нам вряд ли придутся по вкусу старые рассуждения.)

Пример 2. Одно из доказательств предыдущего результата использует так называемое генценовское устранение сечения. Рассмотрим любую из систем, про которую вы знаете, что она «свободна от сечения». Доказательство Генцена, позволяющее получить свободный от сечения вывод формулы A из вывода в обычной системе, проходит в $\mathscr{P}_0$. Но существование такого свободного от сечения вывода является непосредственным следствием (i) *полноты свободных от сечения правил*[6]) и (ii) корректности обычных правил. Так как для многих алгебраических приложений нужно только существование вывода, свободного от сечения, мы имеем ту же ситуацию, что и в примере 1. Тонкости см. в дополнении II(b)(i).

Конечно, несколько более изощренные рассмотрения позволяют увидеть, что *устранение сечения — это совсем не то, что* (i), так как метод устранения сечения был непосредственно применен Генценом к интуиционистским системам, которые уж, безусловно, неполны относительно обычной семантической общезначимости.

В конце этого обзора окажется необходимым проанализировать, *что же существенно в системах, свободных от сечения*. Пока (т. е. в ближайших трех параграфах) математические приложения будут опираться на *свойство подформульности*, т. е. на тот факт, что в вывод A «без сечения» входят только подформулы формулы A. Полезность этого свойства в свою очередь зависит от *существования частичных определений истинности* для подформул любой фиксированной формулы A при естественном понимании «подформулы». (Как заметил Тарский, определение истинности для всех формул сразу невозможно.) Применения этого свойства перечисляются до оскомины в [51].

О разнице между «обычными» и «свободными от сечения» правилами по отношению к второй теореме Гёделя о неполноте ср. примечания 8 и 16.

С точки зрения *длин* выводов ситуация менее отчетлива. Так, добавление *сечения* (modus ponens) сокращает выводы. С другой стороны, использование истинностных таблиц (в исчислении высказываний), например формализованное путем построения нормальных форм Поста, в общем случае длиннее.

Заметим, кстати, что Генцен [12] приписывал правилам без сечения гораздо более важное значение. Грубо говоря, он считал, что *логические* операции *определяются* правилами вывода, а сечение представляет некоторую непредикативность (которую он хотел устранить; оперативная логика Лоренцена [66] и анализ в терминах теории игр [65] являются усилиями в том же направлении). В этом, может быть, что-то и есть, но два наиболее известных вида логических операций — булевские и интуиционистские — наверняка определены *не* правилами вывода. Напротив, мы *ищем* правила, истинные для этих операций. Также и в анализе или теории множеств логические операции используются как главное средство (непредикативных) определений в аксиомах свертывания. Я вернусь к этому вопросу ниже.

Как это часто случается, разработанная математика частично заменяет твердое владение интуитивной концепцией вроде $\mathscr{P}_0$. Сформулированное выше различие, которое может показаться тонким, становится *гораздо более ясным в применении к инфинитарным языкам*, где мы имеем естественные (классические!) примеры устранения сечения для неполных систем. Кроме того, сказанное о длинах выводов (многие ло-

гики сочтут это «копанием в мелочах») усиливается необычайно: для счетных языков не существует (счетных) нормальных форм Поста, даже если мы имеем свободные от сечения правила доказательства [78] [7])!

Далее, как указал Тейт [87], изучение инфинитарных пропозициональных языков (отрицание, бесконечная дизъюнкция) очень подходит для теоретико-доказательственного анализа арифметики, *если только уделять должное внимание* (i) *принципам определения, применяемым при описании бесконечных деревьев вывода, и* (ii) *методам доказательства того, что описанные таким образом деревья фундированы.* (Для теоретико-доказательственного изучения подсистем анализа, а не арифметики имеется выбор между использованием инфинитарных языков с конечными цепочками кванторов [54] и более или менее прямой редукцией к пропозициональному случаю [87].)

В следующем параграфе будет объяснено, что именно имеется в виду в (i) и (ii). Следует отметить, что совершенно аналогичные вопросы нужно было бы рассмотреть и раньше, когда использовались бесконечные доказательства, но только конечные (кванторные) формулы, как у Шютте [109], или интерпретации вроде интерпретации отсутствием контрпримера для арифметики.

§ 6. КЛАССИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА Z ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ФОРМУЛИРУЕМАЯ С ПОМОЩЬЮ СХЕМЫ ИНДУКЦИИ)

Теоретико-доказательственные результаты в пп. (a) и (b) ниже устанавливают формальные соотношения между $\boldsymbol{Z}$ и некоторыми системами, формулирующими так называемую ε_0-индукцию. Точнее, этот принцип индукции включает определение $\preccurlyeq$ (т. е. формулу с двумя свободными переменными) двуместного отношения на натуральных числах, которое напрашивается в качестве *естественного упорядочения ординала* ε_0.

Понятие естественного ε_0-упорядочения будет проанализировано ниже в (d) и будет показано, что оно единственно с точностью до изоморфизма (из подходящего класса отображений). Среди всех определений этого упорядочения выбирается *каноническое* определение (единственное с точностью до «доказуемого» изоморфизма), как в [44, стр. 154, 3.222].

NB. Формальные результаты, упомянутые в предыдущем абзаце, совершенно не зависят от этого анализа, так как определения, которые сами приходят в голову (или упоминались в литературе, например у Генцена [14], Гильберта — Бернайса [18], Шютте [109], Тейта [85]), все удовлетворяют критерию канонического естественного ε_0-упорядочения. Однако значение этих результатов для $\mathscr{P}_0$ зависит от этого анализа: в зависимости от своего вкуса читатель может прочитать п. (d) до или после (a)—(c) (или вовсе пропустить, если он находит это обсуждение слишком голословным).

(a) *Основной результат.* Мы рассматриваем арифметику $\boldsymbol{Z}'$, полученную из $\boldsymbol{Z}$, грубо говоря, *ограничением* логических правил до правил без сечения, *расширением* схемы индукции до следующего правила: для каждой цифры $\bar{n}$ вывести $(\forall x \preccurlyeq \bar{n})\, Ax$ из $(\forall x \preccurlyeq \bar{n})[(\forall y \preccurlyeq x)\, Ay \to Ax]$ и *добавлением* схемы определения рекурсией по $\preccurlyeq \bar{n}$ (формальные детали этой схемы см., например, в [85]). *Тогда* $\boldsymbol{Z}$ *и* $\boldsymbol{Z}'$ *имеют одно и то же множество теорем в языке системы* $\boldsymbol{Z}$.

Хотя эта простая формулировка, кажется, не встречалась в литературе, *какой-то* вариант этого рода непосредственно следует из известных анализов арифметики $\boldsymbol{Z}$ в терминах теории доказательств, данных в (b). Мы дадим набросок рассуждения, использующего книгу Шютте [109].

NB. Правила $\boldsymbol{Z}'$ будут указаны в конце этого наброска. Они «свободны от сечения» в смысле § 5, т. е. обладают свойством подформульности, но неизящны: в частности, в них разрешаются сечения, перечисленные ниже, и подстановка цифр вместо *свободных* переменных. Было бы интересно посмотреть, существенны ли эти модификации обычных правил без сечения. Я благодарен Ч. Парсонсу и Л. Тарпу за конструктивную критику предыдущей формулировки.

Отметим, что какое-то расширение схемы обычной индукции *необходимо*, например в силу [44, стр. 163, 3.33].

Первый шаг. По данному формальному выводу формулы A в $\boldsymbol{Z}$ мы, используя неформальные инструкции из [109], получаем *описание* бесконечного дерева (конечных) формул и *бескванторного вывода в* $\boldsymbol{Z}'$, устанавливающего следующие результаты (ср. [44, стр. 163—164, 3.33]). (i) Это дерево является *локально корректной* фигурой доказательства, т. е. для каждого узла $\bar{N}$ формула $A_{\bar{N}}$, находящаяся в $\bar{N}$, связана с формулами, находящимися в непосредственно соседствующих с ним узлах, согласно правилам вывода из [109]. (ii) Это дерево фундировано в том (сильном) смысле, что мы даем его явное сохраняющее порядок отображение в отрезок канонического ε_0-упорядочения. Этот шаг может быть формализован в примитивно рекурсивной арифметике; явное отображение необходимо для того, чтобы избежать кванторов в определении вполне-упорядоченности.

Второй шаг. Мы используем кодирование наших бесконечных деревьев и предикат доказуемости $Prov_I$ для них (как в [44, стр. 164]). В силу свойства подформульности мы имеем формулу $A(N)$ с переменной N, которая перечисляет подформулы A, т. е. $A \leftrightarrow A(\langle\ \rangle)$, где $\langle\ \rangle$ обозначает вершину дерева, и для каждого узла $\bar{N}$ формально выводимо $\leftrightarrow A(\bar{N})$. Пусть $\pi(N)$ — дерево (доказательства), расположенное ниже $\bar{N}$, и пусть $R(N)$ — формула

$$Prov_I[\pi(N),\ s_A(N)] \to A(N),$$

где $s_A(N)$ определяет номер формулы в узле $\bar{N}$.

Третий шаг. Пусть $\prec$ — частичное упорядочение узлов, уже использованное в (ii) первого шага. Мы получаем *элементарный вывод без сечения* для импликации $(\forall N' \prec N) R(N') \to R(N)$ и, следовательно, с помощью описанного выше отображения в отрезок ε_0 также вывод в Z' формулы

$$Prov_I[\pi(N),\ s_A(N)] \to A(N),$$

а значит, и $Prov_I[\pi(\langle\ \rangle), s_A(\langle\ \rangle)] \to A(\langle\ \rangle)$. Так как мы уже имеем (бескванторное) доказательство в Z' формулы $Prov_I[\pi(\langle\ \rangle), s_A(\langle\ \rangle)]$, то, применяя сечение к этой формуле, мы получаем $A(\langle\ \rangle)$. Это дает вывод самой формулы A по модулю шага $A(\langle\ \rangle) \leftrightarrow A$. Перечисление $A(N)$ наверняка можно выбрать так, чтобы сечения нужно было применять только к формулам сложности, меньшей, чем у A.

Заметим, что эта редукция может быть проведена с помощью бесквантороной ε_0-рекурсии [8]).

Редукция Z' к Z хорошо известна; она, очевидно, может быть установлена в примитивно рекурсивной арифметике, см., например, Шютте [109, стр. 202—209]. Что еще важнее, он анализирует условия, а именно аксиомы A1—A12, стр. 202—203, на упорядочение $\trianglelefteq$ *вместе* с некоторыми (ординальными) функциями на $\trianglelefteq$, которые обеспечивают формальную выводимость в Z правила индукции $\trianglelefteq \bar{n}$ для каждого n. Хотя в изложении Шютте этот анализ играет чисто формальную роль, мы сможем использовать его более существенным образом в (d) (vi) ниже.

Следствия основного результата. (i) Анализ правил без сечения показывает, что если универсальная формула $\forall x A$ (A — бескванторная формула) выводима в Z, то она выводима с помощью α-индукции для некоторого $\alpha < \varepsilon_0$. И если $\forall x \exists y A(x, y)$ выводима в Z, то имеется терм tx, представляющий определение по α-рекурсии, для которого $A(x, tx)$ выводима α-индукцией. (Точное описание бескванторной α-индукции и α-рекурсии см., например, в [85].)

(ii) Пусть $Prov$ — каноническое определение отношения «быть доказательством» для Z, и пусть $s_A x$ — каноническое определение гёделевского номера формулы $A(\bar{x})$. Тогда (ср. [44, стр. 165, 3.3322] добавление к Z принципа рефлексии

$$\forall x [\exists y\, Prov(y, s_A x) \to A]$$

для всех A эквивалентно добавлению, тоже для всех A, схемы

$$\forall x [(\forall y \trianglelefteq x)\, Ay \to Ax] \to \forall x Ax.$$

Заметим, кстати, что принцип рефлексии эквивалентен над Z следующему правилу: вывести $\forall x A$ из $\forall x \exists y\, Prov(y, s_A x)$.

(b) Как ε_0 входит в *доказательство* основного результата (т. е. редукции Z к Z')? Генцен сопоставлял ординалы формальным выводам, т. е. конечным синтаксическим структурам. Я люблю рассматривать *упорядоченные структуры, которым мы просто сопоставляем их порядковые типы.* Я не верю, что есть какая-либо надежда получить осмысленное упорядочение формальных выводов, если рассматривать только их синтаксическую структуру. В действительности нужно рассматривать интуитивные доказательства, описываемые выводами, и использовать свойства этих доказательств, чтобы *открывать* полезное упорядочение формальных выводов.

Устранение сечения (либо инфинитарное исчисление высказываний, либо книга Шютте [109], уже использованная в п. (a) выше). Если мы начинаем с формального вывода, соответствующего выводу в Z, и применим естественным образом устранение сечения, то закончим свободным от сечения выводом с ординалом $< \varepsilon_0$. Эта граница минимальна в том смысле, что для каждого $\alpha < \varepsilon_0$ имеется вывод в Z, который *этот* метод преобразует в свободный от сечения вывод с ординалом $> \alpha$. (Это не зависит от того, рассматриваем мы ординал линейного упорядочения ветвей дерева доказательства, упорядоченных слева направо, или частичное упорядочение посредством отношения «быть предшественником» для узлов.)

Интерпретация отсутствием контрпримера. Здесь каждой арифметической формуле A сопоставляется ее и. о. к. $F \forall f' (A'(F, f)$, где A' — бескванторная формула, f — переменная типа N^N, а F — переменная типа $N^N \to N$. (Подразумевается, что F пробегает конструктивные операции, непрерывные в топологии произведения.) С каждым F связано упорядочение его необеспеченных последовательностей. Если с каждой формулой A, формально выводимой в Z, мы свяжем естествен-

ное определение функционала F_A, такого, что $\forall f A'(F_A, f)$, то снова оказывается, что соответствующие порядковые типы заполняют отрезок $< \varepsilon_0$. (Точный анализ см. в [86].)[9])

Замечание. Оба метода доказательства обобщают и объясняют связь между $\boldsymbol{Z}$ и ε_0 в следующем *формальном* смысле. Если мы добавим к $\boldsymbol{Z}$ схему индукции (для формулы $<_\alpha$ вместо $<$), то определение ε_0, т. е. первого ε-числа после ω, заменяется на соответствующее определение первого ε-числа после α (а не на α^{ε_0}, например, что тоже подходит для упомянутого выше результата при $\alpha = \omega$). Точнее, мы рассматриваем здесь вопрос о том, как ε_0 связано с формальной системой $\boldsymbol{Z}$, а не как оно связано с $\mathscr{P}_0$! Действительно, так как приведенное выше обобщение совершенно не зависит от того, как *усматривается* допустимость рекурсии по $<_\alpha$, оно представляет для $\mathscr{P}_0$ не больше интереса, чем, например, обобщение геометрической теоремы на случай 25 измерений для физического или визуального пространства.

Лучшая формулировка вопроса о связи между ε_0 и $\boldsymbol{Z}$ будет дана в следующем параграфе, где рассматривается иная формулировка индукции (с помощью другого сорта переменных). Там приводится сильный *отрицательный* результат о невыводимости индукции до ε_0 включительно. На пути к хорошей формулировке стоит следующее препятствие:

схема индукции (*для арифметических формул* A) *может быть доказана в* $\boldsymbol{Z}$ *для отношений* $<$, *которые вообще не являются вполне-упорядочениями* (т. е. не определяют вполне-упорядочения в арифметической структуре).

(Возьмем очевидное неявное определение предиката истинности T для арифметики, имеющее вид $\forall x \exists y A(T, x, y)$ с бескванторной формулой A. Приведем его к виду $\exists f \forall x A(T, x, fx)$ и рассмотрим упорядочение необеспеченных последовательностей для $\forall x A[\lambda y g(2y), x, g(2x+1)]$.)

(c) *Как не надо говорить об ординалах в теории доказательств.* В разделе (d) ниже будет рассмотрено значение для $\mathscr{P}_0$ ординала ε_0, точнее, естественных упорядочений ординала ε_0. Но мы можем указать здесь на недостатки некоторых попыток в литературе, например в [112], дать более простые условия на ε_0-упорядочения, такие, как примитивная рекурсивность отношения упорядочения и множества предельных элементов, для использования в теории доказательств для системы $\boldsymbol{Z}$.

Чтобы выразить это более формально, отметим следующее.

(i) Для любого истинного арифметического предложения A имеется примитивно рекурсивно описываемое доказательство без сечения с ординалом ω^ω (использовать примитивно рекурсивное ω-правило вместо рекурсивного ω-правила [105]).

(ii) Для любого истинного арифметического предложения A имеется функционал F_A с примитивно рекурсивной окрестностной функцией, такой, что $\forall f A'(F_A, f)$ и множество необеспеченных последовательностей для F_A имеет ординал ω^{ω^2} (ср. [53, стр. 59]).

(iii) Предположим, что S содержит $\boldsymbol{Z}$, что, как во многих обычных системах, непротиворечивость любой конечной подсистемы S можно формально доказать в S и что этот факт, т. е.

$$\forall n \exists m\, Prov(m, \ulcorner \exists y\, Prov(y, \ulcorner Con\, S_n \urcorner) \urcorner),$$

тоже можно доказать в S. Тогда имеется примитивно рекурсивное упорядочение $<$ типа $< \omega^2$ со следующими свойствами.

Для каждого отрезка отношения $<$ схема индукции может быть формально доказана в S.

Непротиворечивость S можно доказать индукцией по $<$.

(Следует построить $<_n$, «эквивалентный» $Con\, S_n$ в смысле [53, § 7]; $<_n$ имеет ординал ω, так как $Con\, S_n$ чисто универсально. Полагаем $< = \bigcup_n <_n$.)

Следующий результат включен сюда, так как он принадлежит к рассматриваемому кругу вопросов, хотя его формулировка использует свободные функциональные или предикатные переменные.

(iv) для систем S, удовлетворяющих условиям из (iii), но содержащих свободные функциональные переменные, имеется примитивно рекурсивное упорядочение $<_S$ со следующими свойствами.

Для любого отрезка упорядочения $<_S$ в S можно доказать, что он является вполне-упорядочением, и любая Π^1_1-теорема системы S может быть доказана индукцией по $<_S$.

Простая непротиворечивость (и т. д.) системы S может быть доказана бескванторной индукцией по $<_S$.

(Возьмем в качестве $<_S$ объединение всех примитивно рекурсивных вполне-упорядочений, для которых в S доказуема вполне-упорядоченность.)

Как всегда, когда забыты существенные стороны рассматриваемого вопроса, можно бесконечно продолжать тоскливый список «патологических» свойств.

(С интуитивной точки зрения все эти условия не годятся, так как ничего не говорят о том, как устроено ε_0; это будет

основным в (d). Иначе говоря, имеет значение сложность, а не величина упорядочений. Насколько далеки эти условия от цели, выяснится в § 7.)

Предостережение. В математической логике имеется еще одно «грубое» применение ординалов, которое тоже, по-видимому, представляет весьма ограниченный интерес для теории доказательств (ср. дополнение V), а именно ординалы разветвленной аналитической иерархии.

(d) ε_0 *и* $\mathscr{P}_0$. Будем считать, что $\mathscr{P}_0$ занимается комбинаторными операциями над натуральными числами, т. е. теоретико-числовыми функциями, определенными по правилам, которые могут быть обоснованы методами концепции $\mathscr{P}_0$. Мы будем называть их $\mathscr{P}_0$-правилами. С формальной точки зрения $\mathscr{P}_0$-доказательства будут описываться *бесквантор*ными формализмами с переменными для натуральных чисел и константами для функций. Допустим еще следующее.

(I) Все примитивно рекурсивные определения, т. е. обычные определяющие схемы для примитивно рекурсивных функций, допускаются в $\mathscr{P}_0$.

(II) Все $\mathscr{P}_0$-допустимые определения могут быть сведены к *рекурсивным уравнениям* (эквивалентным им с точки зрения $\mathscr{P}_0$). Таким образом, все $\mathscr{P}_0$-определения определяют рекурсивные функции.

(i) $\boldsymbol{Z}$ и $\mathscr{P}_0$. Вспомним следствие к основному результату из (a), согласно которому система $\boldsymbol{Z}$ может быть сведена к $\mathscr{P}_0$ при условии, что принципы доказательства по индукции относительно $\lessdot$ и определения рекурсий по $\lessdot$ справедливы в $\mathscr{P}_0$ для каждого собственного отрезка упорядочения $\lessdot$.

Вспомним точное формальное описание этих принципов в [85]. Отметим, что рекурсия влечет за собой индукцию и, следовательно, вообще говоря, существование функции, определенной с помощью рекурсии, влечет за собой единственность [85, стр. 161]. Грубо говоря, рассматриваемый принцип таков: если g и h были введены в $\mathscr{P}_0$, мы вводим также f правилом

$$fn = c, \quad \text{если} \quad n = 0 \quad \text{или} \quad \neg\, hn \lessdot n, \quad \neg\, n \lessdot p,$$
$$fn = g(n, fhn) \quad \text{в противном случае.}$$

Перед нами стоят два вопроса*). Все ли такие определения для *данного* $\bar{p}$ приемлемы в $\mathscr{P}_0$? Окажется ли какое-либо

*) Ответы были доведены Фридманом до (более точного) теоретико-модельного результата в терминах ω-следования. Для любого ограниченного расширения $\mathscr{E}+$ элементарного анализа имеется ω-модель системы $\mathscr{E}+$, в которой опровергается некоторый частный случай $\mathrm{WF}(\lessdot)$.

из этих определений (с примитивно рекурсивными g и h) недопустимым *без* ограничения $n \lessdot \bar{p}$? Короче говоря, верно ли, что α-рекурсия допустима для каждого $\alpha < \varepsilon_0$, но ε_0-рекурсия недопустима в $\mathscr{P}_0$? Разумеется, мы не предполагаем, что *эти* вопросы будут разрешены методами $\mathscr{P}_0$.

Комментарии. (a) По соображениям из примечания 2 следует ожидать, что в этих ответах будут использованы различные (хотя и сравнимые) предположения о $\mathscr{P}_0$ (или свойства этой концепции). Конечно, хотелось бы иметь совокупность очевидных свойств $\mathscr{P}_0$, полностью определяющих множество формул, выражающих утверждения, которые доказуемы в $\mathscr{P}_0$ и выразимы в некотором данном языке, например в языке примитивно рекурсивной арифметики. (Очень простую парадигму, когда «доказуемо в $\mathscr{P}_0$» заменяется на «интуитивно истинно» и «примитивно рекурсивная арифметика» на «исчисление предикатов первого порядка», см. в [50] аксиомы II и III для *Val*, стр. 190.)

(b) Заметим, что мы хотим обосновать в $\mathscr{P}_0$ утверждение о том, что уравнения для α-рекурсии являются корректно определенными правилами. Понятие вполне-упорядочения или ординала в явном виде не возникает. Но эти уравнения правдоподобны, так как мы смотрим на них как на определения по трансфинитной рекурсии [10]).

(ii) $\mathscr{P}_0$ и понятие вполне-упорядочения — один софизм. Чтобы обосновать α-рекурсию, мы должны заметить, что для $n \lessdot \bar{p}$ и $h_1 0 = n$, $h_1(m+1) = h(h_1 m)$ последовательность $h_1 0$, $h_1 1$, $h_1 2$,... «поворачивается», т. е. $\neg\, h_1(m+1) \lessdot h_1(m)$ для некоторого m. Так как $h_1 \in \mathscr{P}_0$, то $\lessdot$ *не обязательно должно определять вполне-упорядочение* (не содержащее *никаких* бесконечных убывающих последовательностей), достаточно, чтобы оно определяло *квази-вполне-упорядочение*, т. е. отношение, не содержащее бесконечных убывающих $\mathscr{P}_0$-последовательностей. По принципу II для этого требуется только, чтобы $\lessdot$ не содержало убывающих рекурсивных последовательностей.

Софизм: казалось бы, легче установить, что $\lessdot$ является квази-вполне-упорядочением, чем доказать его вполне-упорядоченность.

Здесь упущено из вида, что понятие квази-вполне-упорядочения даже не формулируется в $\mathscr{P}_0$, *а то, что мы устанавливаем, должно делаться методами* $\mathscr{P}_0$.

NB. Моя формулировка в [35, стр. 295] неудовлетворительна, так как эти вопросы не были рассмотрены должным образом.

Пример. В теории ординалов мы представляем себе ε_0 как предел (или, эквивалентным образом, сумму) ω, ω^ω, ω^{ω^ω}, ... и используем следующие результаты. (a) Если каждый из порядковых типов $w_1, w_2, w_3, \ldots$ вполне упорядочен, то вполне упорядочено и их объединение. (b) Если w_1 и w_2 вполне упорядочены, то вполне упорядочено и $w_1^{w_2}$ для обычного определения показательной функции на (не обязательно вполне упорядоченных) порядковых типах. *Этот* метод рассуждения, особенно (b), очевидно, ложен, если имеются в виду квазивполне-упорядочения; мы используем (I) и (II). Действительно, Парих [71] построил примитивно рекурсивное упорядочение w_2, не содержащее рекурсивной убывающей последовательности и такое, что для двухэлементного порядка w_1 упорядочение $w_1^{w_2}$ имеет примитивно рекурсивную убывающую последовательность. Это w_2 является квази-вполне-упорядочением, и квази-вполне-упорядочением является, очевидно, w_1, но не $w_1^{w_2}$.

Отметим, что если мы заменим (II) предположением, что все $\mathscr{P}_0$-допустимые функции принадлежат некоторой рекурсивно перечислимой совокупности рекурсивных функций, то даже умножение не сохраняет квази-вполне-упорядоченности по теореме 5 из [71]. Даже со сложением нужно соблюдать осторожность! Например, доказательство теоремы 4(a) из [71] неконструктивно в следующем смысле. Если мы знаем, что последовательность h убывает в $w_1 + w_2$, то мы не обязательно знаем, остается ли она в w_2 или в конце концов уходит в w_1. Поэтому для такой h мы не обязательно умеем найти i и последовательность h_i, которая убывает в w_i (для $i=1$ или $i=2$).

Отступление. Использование приведенного выше примера типично для очень *общего принципа, применимого к широкому классу неформальных концепций* $\mathscr{P}$, которые не допускают общего понятия функции. Пусть нам очевидно, что все функции, допустимые в $\mathscr{P}$, принадлежат $\mathscr{F}$ и все функции из $\mathscr{F}_1$ допустимы в $\mathscr{P}$ (например, $\mathscr{P}$ — предикативная математика в смысле [93], $\mathscr{F}$ — класс гиперарифметических функций, $\mathscr{F}_1$ — класс арифметических функций). Тогда функция $\boldsymbol{F}$, определенная на упорядочениях w, не сохраняет квази-вполне-упорядоченности относительно $\mathscr{P}$, если имеется такое w, что его характеристическая функция лежит в $\mathscr{F}_1$ и оно не содержит бесконечных убывающих последовательностей из $\mathscr{F}$, но $\boldsymbol{F}w$ содержит бесконечную убывающую последовательность даже из $\mathscr{F}_1$. (Такая функция $\boldsymbol{F}$ соответствует показательной функции с основанием 2 из приведенного выше примера.)

(iii) $\mathscr{P}_0$ и понятие $\mathscr{P}_0$-вполне-упорядочения — все с самого начала. Не будем пытаться использовать то обстоятельство, что нам нужны «только» квази-вполне-упорядочения, как в (ii) выше, а поступим как раз наоборот.

Сформулируем более сильное понятие $\mathscr{P}_0$-ординала, которое тривиальным образом влечет квази-вполне-упорядоченность, а затем посмотрим, сохраняются ли $\mathscr{P}_0$-ординалы при таких операциях, как сложение и умножение. (В частности, свойство быть $\mathscr{P}_0$-ординалом приложимо к упорядочениям, определенным в $\mathscr{P}_0$, и мы рассматриваем операции на упорядочениях.)

Уже упомянутая общая идея состоит в том, что $\mathscr{P}_0$-ординал *построен* с помощью комбинаторных операций, которые среди прочего сохраняют квази-вполне-упорядочения. Чтобы *выразить* эту идею, нужно не только само упорядочение, но и *функции* на нем, соответствующие этим операциям. Иными словами, мы имеем дело с *алгебраическими структурами*, состоящими из *упорядочения* ***вместе*** *с ординальными функциями и их обращениями*, причем последние нужны для анализа построения структуры. Мы будем называть использование таких структур *функториальным анализом.*

Два замечания. Во-первых, эта идея ближе к генценовскому анализу $\mathscr{P}_0$ [13, стр. 559, 1.18—21], чем к гёделевскому [11, стр. 281, 1.4—1.7], так как последний ближе к квази-вполне-упорядочениям из приведенного выше п. (ii). (Изложение, соответствующее развиваемой сейчас мысли и лучшее, чем в [35, стр. 295], имеется в [44, 3.42, стр. 171—172].) Во-вторых, мы вернемся в § 12 к общим абстрактным принципам, лежащим в основе понятия $\mathscr{P}_0$-ординала. Вероятно, оно относится к теоретико-множественному понятию вполне-упорядочения так, как алгебраическое понятие многочлена к теоретико-множественному понятию функции. Но в данный момент, быть может, полезно проиллюстрировать эту идею и вопросы, которые она вызывает, рассматривая простейшее приложение и показывая, как *функториальный анализ* возникает естественным образом.

(iv) Пример: *конечные упорядочения.* Понятие конечного упорядочения иллюстрирует рассматриваемое понятие, тем более, что такие упорядочения очевидным образом являются квази-вполне-упорядочениями. Проследим, как мы *убеждаемся* в конечности некоторого упорядочения, скажем сегмента $\leqslant \bar{p}$, и как мы можем *выразить* знание этого факта. Очевидно, что *истинности* формулы $\forall x[x \leqslant \bar{p} \leftrightarrow (x = \bar{n}_0 \vee x = \bar{n}_1 \vee \vee \ldots \vee x = \bar{n}_k)]$ для некоторого списка $\{\bar{n}_0, \ldots, \bar{n}_k\}$ недостаточно, так как мы можем никогда этого не узнать! Даже ес-

ли мы можем доказать это, мы еще не покажем, что $\preccurlyeq p$ есть упорядочение, и даже если мы смогли бы доказать и последнее, то *много дополнительных шагов* могло бы понадобиться, чтобы расположить $\{\bar{n}_0, \ldots, \bar{n}_k\}$ в этом порядке. Естественно было бы сказать, что сегмент $\preccurlyeq \bar{p}$ *построен из исходного элемента, скажем* n_0, *путем итерирования процесса добавления одного элемента в конец.*

Формализуя это, допустим, что у нас есть функции σ, π *следования* и *предшествования* на $\preccurlyeq$, для которых мы доказали

$$x \preccurlyeq \bar{p} \to [y \preccurlyeq \sigma x \leftrightarrow (y \preccurlyeq x \vee y = x)], \quad x \preccurlyeq \bar{p} \to x \preccurlyeq \sigma x, \quad \bar{n}_0 \neq \sigma x$$

и

$$\pi \bar{n}_0 = \bar{n}_0, \quad \bar{n}_0 \preccurlyeq x \preccurlyeq \bar{p} \to x = \sigma \pi x$$

со свободными переменными x и y.

Тогда, если $\pi^{(k)}$ обозначает (для фиксированного k) k-ю итерацию π, то

$$\pi^{(k)} \bar{p} = \bar{n}_0$$

выражает, что сегмент $\preccurlyeq \bar{p}$ построен, исходя из n_0, путем не более чем k-кратной итерации операции добавления элемента в конец.

NB. Было бы интересно проанализировать полнее, быть может с помощью комбинаторов, неформальный шаг установления того, что наша формулировка выражает задуманную идею.

Этот функториальный анализ позволяет нам сформулировать дальнейшие факты об упорядочении.

Если даны $\bar{n}_0$, σ, π, то мы можем *восстановить* отношение $\preccurlyeq$, ограниченное на $\preccurlyeq \bar{p}$, просто в терминах $=$. Иначе говоря, мы теперь говорим не о природе объектов из области упорядочения (в нашем случае они «случайно» являются натуральными числами), а лишь о данной структуре.

Пусть дано другое упорядочение $\preccurlyeq' \bar{p}'$, которое «оказывается» изоморфным $\preccurlyeq \bar{p}$, вместе с соответствующими операциями $\bar{n}_0'$, σ', π' (константа $\bar{n}$ — «операция» от нуля аргументов). Тогда мы можем определить изоморфизм *явно* посредством булевых операций из данных структур.

Наконец, отметим *условие замкнутости*. Пусть $\boldsymbol{F}$ — произвольная операция, отображающая любое конечное упорядочение в некоторое его расширение. Тогда, если $\boldsymbol{F}$ итерируется вдоль любого финитного упорядочения, т. е. повторяется конечное число раз, и если итерация применяется к конечному упорядочению, то результат снова является конечным упорядочением.

NB. Конечно, для каждой данной концепции $\mathscr{P}$ нужно рассматривать не *произвольные* $\boldsymbol{F}$, а только те, которые приняты в самой $\mathscr{P}$. Поэтому приведенное выше условие замкнутости особенно сильно. Не следует ожидать столь же сильных условий замкнутости, когда «конечный порядок» будет заменен «$\mathscr{P}_0$-вполне-упорядочением». Из [40], и особенно [43], нам известно, что при обобщении «*конечного*» необходима осторожность, и мы снова вернемся к этому в § 13.

(v) $\mathscr{P}_0$: *итерирование* ***процесса*** *конечной итерации.* Вероятно, названия «*финитистское*» заслуживает только изучение *специфических* конечных конфигураций, как в (iv). Даже если это так, рассуждение в $\mathscr{P}_0$ наверняка не ограничивается такими конфигурациями, так как используются переменные для таких конфигураций (ср. начало введения). Точнее, $\mathscr{P}_0$ касается *процесса* построения финитных конфигураций прежде всего в ω-*порядке*. Как только этот процесс понят (или принят), его можно проитерировать, например, для построения $\omega + \omega + \ldots$, т. е. $\omega \cdot \omega$-порядка. Проанализировать концепцию $\mathscr{P}_0$ — значит, дать теоретический анализ вопроса, *что подразумевается при допущении* ω *итераций*. Применительно к случаю ординалов мы спрашиваем: *какие упорядочения могут быть построены из* ω *итерированием процесса* ω-*итерации*? Эти упорядочения являются тогда по определению $\mathscr{P}_0$-ординалами.

Я считаю, что общий тип нужного здесь анализа хорошо иллюстрируется обсуждением конечных упорядочений в (iv), но не умею правильно выразить это. Грубо говоря, ясно, что при теоретико-доказательственном изучении подсистем арифметики $\boldsymbol{Z}$ первого порядка приводятся детали именно этого рода. Интересная задача — *сформулировать* значение таких деталей. Автономная прогрессия, описанная в [44, 3.42, стр. 171—172], по-видимому, непосредственно связана с рассматриваемыми вопросами, в частности с уяснением того, что $\mathscr{P}_0$-ординалы являются квази-вполне-упорядочениями.

Но, оставляя в стороне философский, или, быть может, психологический, анализ процесса ω-итерации, мы можем использовать вышеупомянутые *общие* понятия, чтобы следующим образом дать точные *математические* результаты.

(vi) *Естественные* α-*упорядочения для* $\alpha < \varepsilon_0$. Мы обобщим функториальный анализ конечных упорядочений из (iv) (с первым элементом, функциями следования и предшествования). Теперь используются следующие ординальные функции: константы 1 (первый элемент) и ω, сложение и в некото-

рых формальных результатах показательная функция с основанием 2 вместе с их обращениями. Последние, как всегда, нужны, чтобы избежать чередования кванторов. В первую очередь мы допустим *существование таких ординальных функций*, т. е. функций, удовлетворяющих рекурсивным уравнениям, данным, например, в [109, стр. 202—203]. Их *единственность*, которая зависит от того факта, что рассматриваемые упорядочения не имеют автоморфизмов, будет установлена позднее.

Результат об *изоморфизме* (с точностью до *рекурсивных* отображений, но не обязательно $\mathscr{P}_0$-отображений). Допустим, что $\lhd' \bar{p}'$ — упорядочение натуральных чисел с ординалом α $(\alpha < \varepsilon_0)$ вместе с упомянутыми выше ординальными функциями, включая показательную. (Мы предполагаем здесь, что упорядочение должно быть задано вместе с перечеслением всех его элементов; поэтому можно применять оператор наименьшего числа и обратные функции не нужны.) Тогда имеются сохраняющие порядок отображения, *рекурсивные* в этих функциях и в $\lhd'$, из $\lhd' \bar{p}'$ в соответствующий отрезок $\lhd \bar{p}$ канонического ε_0-упорядочения.

Доказательство проводится непосредственно: данные функции позволяют построить канторовскую нормальную форму $t(n)$ для $n \lhd \bar{p}$ рекурсивно в данных функциях на $\lhd$, а эти же функции на $\lhd'$ дают элемент из $\lhd'$, определяемый формой t.

В качестве следствия мы, разумеется, получаем изоморфизм между любыми двумя алгебраическими структурами $\lhd' \bar{p}'$, $\lhd'' \bar{p}''$ и соответствующими ординальными функциями, отображая каждую из них на $\lhd \bar{p}$. При данных функциях это возможно только для $\alpha < \varepsilon_0$ [11]).

Так как в $\mathscr{P}_0$ допускаются не все рекурсивные функции, более уместен несколько иной результат об изоморфизме. Для $\alpha = 2^\beta$ мы рассматриваем описанные выше алгебраические структуры и обратные функции. Тогда мы можем определить отображения, которые не только рекурсивны в этих структурах, но и определяются β-рекурсией.

Наконец, *свойство замкнутости* ординала ε_0. Мы называем совокупность $\mathscr{O}$ упорядочений *замкнутой* относительно операции F на упорядочениях, если для $w \in \mathscr{O}$ также $Fw \in \mathscr{O}$. Пусть $\mathscr{O}$ — совокупность упорядочений $\lhd \bar{p}$ $(\bar{p} = 0, 1, \ldots)$ для естественного ε_0-упорядочения, определенного выше. Тогда с точностью до класса отображений, введенного выше, $\mathscr{O}$ есть наименьшая совокупность упорядочений, замкнутая относительно следующего класса $\mathscr{F}$ операций на упорядочениях. (i) Константная операция 1 (единственный элемент) и $\omega \in \mathscr{F}$.

(ii) Сложение и композиция $\in \mathscr{F}$ (где подстановка получается как частный случай композиции применительно к константной функции). (iii) Если $F \in \mathscr{F}$ и константа (упорядочение) w принадлежит $\mathscr{O}$, то $Fw \in \mathscr{O}$ и итерация F^w лежит в $\mathscr{F}$, где итерация «вдоль» w определена обычным образом.

Обсуждение. Значение этого свойства замкнутости зависит от возможности проверить в $\mathscr{P}_0$, что итерация операций из $\mathscr{F}$ относительно $\mathscr{P}_0$-упорядочений корректно определена. Очевидно, что здесь нужно больше, чем квази-вполне-упорядоченность.

§ 7. ТЕОРИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ. ИНДУКЦИЯ, СФОРМУЛИРОВАННАЯ В ДВУХСОРТНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ПОСРЕДСТВОМ ЕДИНСТВЕННОЙ АКСИОМЫ (НАПРИМЕР § 4 (ii))

Здесь *экзистенциальные* аксиомы для арифметических свойств заменяются *функторами* (константами «третьего порядка»). Типичные примеры: F_c, F_i, F_p с аксиомами

$$\forall X \forall x [x \in F_c X \leftrightarrow \neg\, x \in X],$$
$$\forall X Y \forall x [x \in F_i(X, Y) \leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)],$$
$$\forall X \forall x [x \in F_p X \leftrightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in X)].$$

Полный список см. в [46, App. A]. Таким образом, мы разделяем, по крайней мере формально, использование логических операций в (i) построении утверждений и (ii) определении объектов; ср. § 6(a).

Чтобы сформулировать некоторые результаты, удобно ввести третий сорт переменных для функций (f, g, h, ...) и обычные аксиомы, связывающие функции и (множества, которые суть) их графики.

Эта система эквивалентна варианту формального разветвленного анализа уровня 1, где *индукция* применяется только к формулам первого порядка (не содержащим кванторов для множеств и функций) в противоположность, например, [109], где индукция не ограничена таким образом.

Мы здесь заинтересованы главным образом в улучшенном описании роли ε_0, которое было обещано в § 6(c) и использует переменные для множеств или функций. Интересно было бы обобщить результат из § 6(a), т. е. дать изящный свободный от сечения вариант рассматриваемой системы, используя только *конечные* формулы и конечные выводы с подходящим *правилом* $\lhd \bar{p}$-индукции для $\bar{p} = 1, 2, \ldots$.

NB. Вариант, свободный от сечения, не представляет особого интереса, если *формула* $A(T)$ *считается подформулой* $\forall X A(X)$ *или* $\exists X A(X)$ *для произвольного терма* T, *построенного из функторов* F. Действительно, в этом случае нет формулы T_A, которая *доказуемо* является определением истинности для всех подформул формулы A (кроме случая, когда все кванторы в A числовые).

Фундированность и доказательства по трансфинитной индукции (два смысла фундированности). Пусть R — формула, содержащая две переменные x и y (т. е. R определяет бинарное отношение).

(i) $\mathrm{WF}(R)$: $\forall X[\exists x(x \in X) \rightarrow$
$\rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall y[R(y, x) \rightarrow \neg\, y \in X])]$.

С помощью функциональных переменных мы можем для арифметических формул R написать более простое выражение $\forall f \exists x \neg R[f(x+1), f(x)]$. (Это используется в [22].)

(ii) *Схема* для любой формулы A, содержащей переменную x, но не y:

$\mathrm{TI}(R, A)$: $\quad \forall x(\forall y[R(y, x) \rightarrow Ay] \rightarrow Ax) \rightarrow \forall x Ax$.

Отметим, что TI получается контрапозицией из принципа наименьшего элемента (*) из § 4. Формулировка *второго* порядка, из которой выводится эта схема, будет рассмотрена в § 9.

Основные результаты. 1. Если $\mathrm{WF}(R)$ является теоремой, то теоремой будет и $\mathrm{TI}(R, A)$ для каждой формулы A, содержащей только числовые кванторы. (Доказательство получается непосредственно, поскольку для таких A имеет место $\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow Ax)$.)

2. Даже для обычного определения R_0 естественного упорядочения натуральных чисел имеется формула A_0, для которой нельзя вывести $\mathrm{TI}(R_0, A_0)$.

(Один из способов показать это — использовать доказательство непротиворечивости арифметики, данное в [18, S.366—367]. Оно состоит, по существу, в выводе $\mathrm{WF}(R) \longrightarrow \longrightarrow \mathrm{WF}(R^{\#})$ (см. также приложение I к статье «Как теория доказательств пришла к своим ординальным числам и как она приходит к ним теперь» в настоящем сборнике. — *Перев.*) с последующим применением индукции к Π^1_1-формуле $\mathrm{WF}(W_n)$, где W_0 — упорядочение $\omega + \omega$, $W_{n+1} = W_n^{\#}$ и в общем случае $R^{\#}$ есть каноническое определение для 2^R.)

Асимметрия между $\mathrm{WF}(R)$ *и схемой* $\mathrm{TI}(R, A)$ *будет играть важную роль в следующем параграфе.*

3. Пусть R — существенно Σ^1_1-формула, т. е. содержит (в предваренной форме) только кванторы существования, не считая числовых кванторов, и пусть свободными переменными в R являются x и y. Тогда из доказуемости формулы $\mathrm{WF}(R)$ следует, что R определяет (в стандартной модели) фундированное отношение типа $<\varepsilon_0$ (см. [38]). Если, далее, R — бескванторная формула, то имеется терм tx, такой, что (i) может быть выведено $R(x, y) \longrightarrow t(x) \lessdot t(y) \lessdot \bar{n}_R$, где, как и выше, $\lessdot$ — каноническое упорядочение ординала ε_0, и (ii) формальная вычислимость tx является теоремой.

Здесь мы имеем отрицательный результат, выражающий тот факт, что ε_0 *есть предел доказуемых вполне-упорядочений, без предположений о существовании на рассматриваемом упорядочении определимых ординальных функций.* (Наложено только чисто синтаксическое и очевидным образом необходимое Σ^1_1-условие.)

Отметим, что граница ε_0 не меняется, если добавлено любое истинное Σ^1_1-предложение, в частности утверждение о существовании функции, удовлетворяющей некоторым рекурсивным уравнениям. О значении этого факта см. пример в § 4.

Принципы рефлексии и непротиворечивость. Теперь, когда у нас есть *функциональные переменные* (или переменные для множеств, удовлетворяющих условиям функциональности), преимущества принципа рефлексии перед простым утверждением о непротиворечивости могут быть описаны следующим образом. (NB. Нам нужен принцип рефлексии только для формул первого порядка с параметрами для множеств.)

Пусть S — *система, содержащая арифметику, и пусть* Prov_S — *естественный предикат; в частности, предположим, что он удовлетворяет условиям теоремы Лёба* [60]. *Тогда, если формула*

$$\forall n[\exists y\, \mathrm{Prov}_S(y, s_A(n)) \rightarrow An]$$

(где s_A — каноническое определение гёделевского номера формулы $A\bar{n}$ для n-й цифры $\bar{n}$) *может быть выведена после добавления* $\mathrm{WF}(R)$ *к* S *для арифметической формулы* R, *а* $\mathrm{WF}(R')$ *можно вывести в* S, *то формула*

$$(*) \qquad \neg\, \exists f \forall xy[R(x, y) \leftrightarrow R'(fx, fy)]$$

выводима в S, т. е. не существует сохраняющего порядок отображения R в R'. Иными словами, если R' определяет вполне-упорядочение, то его ординал меньше ординала вполне-упорядочения R.

(Доказательство проведено в [44, 3.3421, стр. 166—167]. Действительно, если $\neg(*)$ добавлена к S, то $\mathrm{WF}(R') \longrightarrow$

$\rightarrow \mathrm{WF}(R)$. Поэтому, взяв (*) в качестве A и s_* в качестве s_A, мы получаем, что $\neg(*) \rightarrow [\exists y\, Prov_S(y, s_*) \rightarrow (*)]$, а значит, и $\exists y\, Prov_S(y, s_*) \rightarrow (*)$ являются теоремами в S. По теореме Лёба тогда и сама формула (*) выводима в S.)

Таким образом, в противоположность утверждению о непротиворечивости [ср. § 6(c) (iii)], которое может быть формально выведено с помощью индукции по *некоторому* упорядочению с ординалом ω, *имеется нетривиальная нижняя граница на ординалы* (рекурсивных вполне-упорядочений), *которые дают возможность доказать принцип рефлексии путем трансфинитной индукции в применении к предикатам первого порядка.* Эта граница точна, например, если S содержит арифметическую аксиому свертывания (с параметрами).

Отметим, кстати, что первоначальное гёделевское доказательство его *первой* теоремы о неполноте для арифметической системы S показывает невыводимость принципа рефлексии для формулы, выражающей «я невыводима». Невыводимость утверждения о непротиворечивости требует значительно более сильных условий на S и на представление ее предиката доказуемости; ср [44, стр. 154, 3.221] или § 11(b) (i) ниже.

§ 8. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ АНАЛИЗ $\mathscr{E}$

Это двухсортный формализм с переменными для индивидов (натуральных чисел) и функций и с индукцией в виде схемы, применяемой ко *всем* формулам этого формализма. Главные экзистенциальные аксиомы (они слабы) утверждают существование функции следования, спаривающей функции и проекций, а также замкнутость относительно примитивно рекурсивных операций. Точное описание см. в [22, App. 1, стр. 350], где эта система обозначена через $\boldsymbol{Z}_1$.

Очевидно, что $\mathscr{E}$ — консервативное расширение арифметики первого порядка, так как в $\boldsymbol{Z}$ можно доказать, что аксиомы системы $\mathscr{E}$ выполнены, когда функциональные переменные пробегают (примитивно) рекурсивные функции.

Основной результат [ср. § 6(a)]. Для упорядочения $\lessdot$ натуральных чисел с ординалом ε_0, рассмотренного в § 6, $\mathscr{E}$ эквивалентна двухсортной системе, полученной ограничением логических правил до свободных от сечения и расширением схемы индукции до следующего правила: для каждой цифры $\bar{n}$ вывести $(\forall x \lessdot \bar{n})\, Ax$ из $(\forall x \lessdot \bar{n})[(\forall y \lessdot x)\, Ay \rightarrow Ax]$ для всех формул A рассматриваемого языка.

Естественное доказательство использует *инфинитарную* формулировку системы $\mathscr{E}$, все правила которой свободны от сечения в обычном смысле.

Следствия, использующие символику § 7 (и канонические представления R примитивно рекурсивных бинарных отношений).

1. Формула $\mathrm{WF}(R)$ выводима в $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда формула $\mathrm{TI}(R, A)$ выводима для всех A. Таким образом, $\mathscr{E}$ «сбалансирована» относительно двух смыслов фундированности.

Как и в § 7, если выводима $\mathrm{WF}(R)$, то R определяет (в стандартной модели) частичное упорядочение с ординалом $< \varepsilon_0$.

2. Для любой формулы A с единственной свободной переменной x пусть $s_A x$ канонически определяет гёделевский номер формулы $A\bar{x}$ для x-й цифры. Тогда (см. [51]) *принцип* (схема) *рефлексии*

$$\forall x\, [\exists y\, Prov_{\mathscr{E}}(y, s_A x) \rightarrow Ax],$$

где $Prov_{\mathscr{E}}$ означает отношение выводимости для $\mathscr{E}$, эквивалентен над $\mathscr{E}$ схеме

$$\forall x\, [(\forall y \lessdot x)\, Ay \rightarrow Ax] \rightarrow \forall x\, Ax$$

снова для всех A.

3. Принцип рефлексии имеет такое непосредственное следствие. *Для любого конечного расширения F системы $\mathscr{E}$ в языке этой системы непротиворечивость системы $\mathscr{E} \cup \{F\}$ может быть выведена добавлением к $\mathscr{E} \cup \{F\}$ частного случая* $\mathrm{TI}(\lessdot, A_F)$ *схемы* ε_0*-индукции*, где A_F зависит от F. Значит, *схема* $\mathrm{TI}(\lessdot, A)$ *невыводима ни в каком конечном расширении системы* $\mathscr{E}$.

Доказательство стандартно. $\forall y \neg\, Prov_{\mathscr{E}}(y, \ulcorner F \rightarrow 0 = 1 \urcorner)$ выражает непротиворечивость $\mathscr{E} \cup \{F\}$. Согласно сказанному выше, $\forall y [Prov_{\mathscr{E}}(y, \ulcorner F \rightarrow 0 = 1 \urcorner) \rightarrow \neg F]$ выводима в $\mathscr{E}$ из подходящего частного случая ε_0-индукции, а так как F есть теорема $\mathscr{E} \cup \{F\}$, мы получили бы утверждение

$$\forall y \neg\, Prov_{\mathscr{E}}(y, \ulcorner F \rightarrow 0 = 1 \urcorner).$$

Приведем *примеры* расширений системы $\mathscr{E}$, которые заданы схемами, но эти схемы эквивалентны конечному числу своих частных случаев (ср. [51]).

(i) «Арифметическую» аксиому свертывания можно заменить единственной аксиомой

$$\forall f \exists g \forall x\, (gx = 0 \leftrightarrow \exists y\, [f(\langle x, y \rangle) = 0]).$$

Полученная таким образом система формально совпадает (с точностью до использования переменных для функций вместо переменных для множеств) с так называемым развет-

вленным анализом уровня один в формулировке Шютте [109]. Ср. также дополнение IV.

(ii) В символике § 4 (*) схема AC для формул Ξ, содержащих параметры и являющихся существенно Σ^1_1- или Σ^1_2-формулами.

По поводу следствия 1. Отметим, что *импликация* $\mathrm{WF}(R) \longrightarrow \mathrm{TI}(R, A)$ в общем случае недоказуема в $\mathscr{E}$. Например, $\mathrm{WF}(<_0)$ выводима в рассмотренных выше расширениях (i) и (ii) (например, в силу [109] фундированность в смысле WF выводима в (i) для всех канонических упорядочений $< \varepsilon_\varepsilon$). Мы вернемся к этому в § 10. Тривиальным образом, фундированность в смысле WF для любого определимого отношения R выразима *одной* формулой.

Комбинируя эти результаты с симпатичными теоретико-модельными конструкциями, Фридман получил интересные результаты о Σ^1_1-AC; ср. дополнение V. Эта ситуация напоминает положение с доказательствами рекурсивной неразрешимости в стиле [84]: у нас имеется основополагающий результат из теории доказательств (соответствующий применяемому в [84] основополагающему результату из теории рекурсии), а остальные рассуждения теоретико-модельные и за ними легко следить.

§ 9. ФОРМУЛИРОВКА ПОЛНОГО АНАЛИЗА (В ТЕРМИНАХ ФУНДИРОВАННОСТИ)

Мы прервем здесь теоретико-доказательственный анализ, чтобы установить одну непосредственную формальную эквивалентность. Непосредственность означает здесь, что мы имеем *импликации* (которые верны для произвольных расширений рассматриваемых систем), а не только *теоретико-доказательственные результаты* следующего вида: если A можно *вывести* посредством данных правил, то можно вывести и B

(a) Для переменной Y мы пишем $Y(x, y)$ вместо $\langle x, y\rangle \in Y$. Аксиома

$$\forall X \forall Y [(\exists x (x \in X) \wedge \forall f \exists x \neg Y [f(x+1), f(x)]) \rightarrow \rightarrow \exists x (x \in X \wedge \forall y [y \in X \rightarrow \neg Y(x, y)])]$$

эквивалентна AC_{00}, если последняя сформулирована как единственная аксиома в (двухсортной) теории арифметических свойств первого порядка из § 7.

(Доказательство из [22, стр. 352] применимо без изменений, хотя там оно сформулировано для схем вместо аксиом.)

Следствия. *Схема* $\mathrm{WF}(R) \rightarrow \mathrm{TI}(R, A)$ для всех явно определимых отношений R и свойств A эквивалентна *схеме* AC_{00}, так как класс формул, рассматриваемый в этих схемах, замкнут относительно арифметических кванторов. (Уточнения, касающиеся соотношений между этой схемой и соответствующим правилом, см. в дополнении III.) Более интересно следующее.

Аксиома *второго порядка* AC_{00} из § 4 (разд. «Анализ») эквивалентна аксиоме

$$\forall \boldsymbol{X} \boldsymbol{Y} ([\forall f \exists x \neg \boldsymbol{Y}[f(x+1), f(x)] \wedge \exists x \boldsymbol{X}(x)] \rightarrow \rightarrow \exists x [\boldsymbol{X}(x) \wedge \forall y \{\boldsymbol{X}(y) \rightarrow \neg \boldsymbol{Y}(x, y)\}]),$$

так как, разумеется, класс *всех* свойств натуральных чисел удовлетворяет условиям замкнутости из теории арифметических (арифметически определимых) свойств.

(b) Расширим теорию арифметических свойств добавлением нового сорта переменных $\mathring{X}$ для свойств функций, расширим использование $\in$, но применительно к новым переменным будем использовать только аксиомы для замыкания относительно операций *первого порядка*.

Для переменной f обозначим через f^* последовательность функций, которую кодирует f, т. е. $f^*(x) = \lambda y f(\langle x, y\rangle)$. Аксиома

$$\forall \mathring{X} \forall \mathring{Y} [(\exists f (f \in \mathring{X}) \wedge \forall f \exists x \neg \mathring{Y}[f^*(x+1), f^*(x)]) \rightarrow \rightarrow \exists f (f \in \mathring{X} \wedge \forall g [g \in \mathring{X} \rightarrow \neg \mathring{Y}(f, g)])$$

эквивалентна DC_{11}.

(Доказательство также имеется в [22, стр. 352], причем применимы замечания и следствия, сформулированные выше.)

Рассмотренные переформулировки будут использованы в § 10 и 11.

Подсистемы. Если мы рассмотрим *схемы* в символике элементарного анализа, соответствующие (a) и (b), то можем *независимо* выбирать *синтаксические ограничения на R и A* аналогично привычному асимметричному рассмотрению индукций и аксиом свертывания. В следующем параграфе будет показано, что в настоящее время подсистемы, полученные с помощью таких ограничений, являются более уместными, чем обычные подсистемы из § 4.

Обсуждение. С философской стороны приведенные выше переформулировки вообще не представляют интереса. Для

интуитивного понимания структуры анализа схема CA очевидна и упомянутая выше эквивалентность производна.

С математической стороны кое-что сказать необходимо, хотя бы потому, что *теоретико-доказательственный анализ включает редукцию к интуиционистским методам доказательства.* Формальные результаты, которые коротко обсуждаются ниже, суммируют главные факты о системах, получаемых из $\mathscr{E}$ заменой классических правил на интуиционистские и добавлением схем (i) AC и (ii) $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$ (для произвольных R и A в языке $\mathscr{E}$). Пусть $\mathscr{E}_1$ обозначает интуиционистский вариант $\mathscr{E}$, который в [22] был назван $\boldsymbol{H}$.

(i) AC в *любой* из своих форм сводима к арифметике (например, [11] применима без изменений).

(ii) Указанная выше схема (для интуиционистской логики) сводится с помощью аксиом непрерывности к схеме для *бесквантор*ных формул R (в силу [28] или [22]); она удовлетворяется, если $f, g, \ldots$ пробегают свободно становящиеся последовательности (free choice sequences).

Отметим, что если мы добавим к $\mathscr{E}_1$ также и переменные для множеств, то CA, а также аксиома $\forall X \exists f \forall x (fx = 0 \leftrightarrow x \in X)$ наверняка не являются истинными, когда переменные X, Y пробегают (интуиционистские) виды, а $f, g, \ldots$ — либо конструктивные функции, либо свободно становящиеся последовательности; действительно, CA требует существования неразрешимых видов.

(iii) Если *заменить* функциональные переменные в $\mathscr{E}_1$ на переменные для множеств и добавить CA, то результирующей системе удовлетворяет наиболее общее понятие вида натуральных чисел (как разъясняется в моей статье [48]). Теперь непосредственное обобщение старого гёделевского перевода (см., например, [27]) системы $\mathscr{E}\,\mathrm{U}(\mathrm{CA})$ в эту систему *дает интуиционистское доказательство непротиворечивости классического анализа.*

Обсуждение. С «наивной» точки зрения это легкое доказательство никоим образом не уменьшает интереса более подробной теоретико-доказательственной редукции из следующего параграфа точно так же, как первоначальное интуиционистское доказательство непротиворечивости для классической арифметики $\boldsymbol{Z}$, принадлежащее Гёделю, не сделало излишними генценовские редукции.

Для логика *основная* проблема состоит в том, чтобы сформулировать причины этого «наивного» впечатления. Для $\mathscr{P}_0$, например, это было сделано Гёделем [11]: $\mathscr{P}_0$ допускает только конструкции над комбинаторными объектами, в то время как законы интуиционистской логики *непосредственно* очевидны, только если допускаются конструкции над абстрактными объектами (такими, как функции или даже доказательства).

В следующем параграфе дается редукция к некоторым *принципам определения* для операций над последовательностями натуральных чисел, в частности будут *понижены* высокие типы. Дальнейшее обсуждение, включая некоторые открытые вопросы, см. в конце § 11 и, более конкретно, в моей статье [48].

§ 10. ФУНДИРОВАННОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Мы рассматриваем теперь элементарный анализ $\mathscr{E}$, расширенный схемой $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$ для произвольных формул A и «элементарных» формул R, а именно для канонических определений R примитивно рекурсивных отношений [(очевидную) точную формулировку канонических определений, единственных с точностью до доказуемой эквивалентности, см. в [44, стр. 154, 3.222]]. Подробности, связанные с наличием параметров, см. в дополнении V.

Свойства системы. (i) Рассматриваемая схема влечет Σ^1_1-AC_{01} (для теоретико-числовых отношений R) и Σ^1_1-DC_{11} (для отношений R между функциями). Это усматривается из эквивалентностей § 9; ср. [19].

(ii) Обращение (i) неверно в том (сильном) смысле, что совокупность гиперарифметических функций является ω-моделью аксиомы Σ^1_1-AC_{01} в силу результата из [41] (а также и аксиомы Σ^1_1-DC_{11} в силу того же метода), но не нашей схемы. В действительности имеются области «практического» анализа, которые могут быть развиты в рассматриваемой системе, но не выводимы из Σ^1_1-DC_{11}, например теорема Кантора — Бендиксона из теории точечных множеств [37].

(iii) Простая *модель*, удовлетворяющая нашей схеме, дана в дополнении V. Нужные свойства доказываются с помощью Σ^1_2-AC_{01} (или, эквивалентным образом, Π^1_1-AC_{01}, или Δ^1_2-CA). Но более тонкое теоретико-доказательственное рассуждение, использующее редукцию к интуиционистским системам, показывает, что *непротиворечивость* этой схемы можно в действительности доказать в $\mathscr{E} \cup \{\Sigma^1_1\text{-CA}\}$. С этим свойством контрастирует следующее.

(iv) Рассматриваемая схема не *содержится* ни в каком конечном расширении элементарного анализа. (Сначала не-

посредственно устанавливаем $\mathrm{WF}(\preccurlyeq)$, затем применяем § 8 (3).)

Таким образом, (iii) показывает, что предположения, необходимые для установления непротиворечивости рассматриваемой схемы, относительно слабы, а (iv) объясняет, почему *кажется*, что некоторые следствия этой схемы предполагают сильные аксиомы существования, а именно: если мы *настаиваем* на том, чтобы выводить схему из аксиом свертывания, то нам *нужны* по существу все частные случаи! Кстати, именно в ситуации такого рода новая аксиоматизация некоторой неформальной ветви математики может оказаться по-настоящему эффективной в аспекте «оснований» (ср., например, [41, начало стр. 328]). И можно добавить, что эта возможность используется несравнимо более редко, чем возможно. Эта неспособность современной логики использовать аксиоматический метод, вероятно, связана с ситуацией, описанной в последнем абзаце § 4, а в конечном счете — с философскими проблемами, возникающими при выборе подсистем (конец § 1).

Теоретико-доказательственный анализ рассматриваемой системы. Три основных результата, грубо говоря, таковы.

(i) Система интерпретируется методом Гёделя из примечания 9 в бескванторной системе, скажем $\mathcal{T}$, для функций конечных типов, содержащей кроме элементарных (примитивно рекурсивных) схем также следующую, называемую *схемой бар-рекурсии.*

Для данных G, H следующие соотношения определяют константу $\varphi_{G,H}$, аргументами которой являются функционалы F самого низкого типа и конечные последовательности c натуральных чисел:

$$\varphi_{G,H}(F, c) = G(F, c), \quad \text{если} \quad F([c]) < lc,$$
$$\varphi_{G,H}(F, c) = H[F, c, \lambda x \varphi_{G,H}(F, c * x)] \text{ в противном случае,}$$

где lc — длина c, $c = \langle c_0, \ldots, c_i, \ldots\rangle$ для $i < lc$, $[c]$ — функция, определяемая равенствами $[c](x) = c_x$ для $x < lc$ и $[c](x) = 0$ вне этого отрезка; G и H имеют типы, для которых осмысленны подстановки.

(Эта схема является частным случаем общей схемы, введенной Спектором [80].)

(ii) Следующий шаг — определение модели для $\mathcal{T}$ путем интерпретации функций высших типов как *окрестностных функций* в смысле [36]. Таким образом, аксиомы $\mathcal{T}$ переводятся в утверждения в языке анализа. Основной принцип, нужный для доказательства этих утверждений,— сама схема

$\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$, но используется только *интуиционистская* логика.

(iii) Эта последняя система, скажем $\mathcal{J}$, была интерпретирована [44, стр. 140, 2.621] в чисто *арифметической* системе (переменные только для натуральных чисел), состоящей из интуиционистской арифметики первого порядка и одноместной предикатной константы для понятия рекурсивного ординала, т. е. множества O рекурсивных ординальных обозначений по Клини — Чёрчу. При этом добавляется соответствующий принцип индукции, формулирумый с помощью бескванторной формулы D, для которой «индуктивное определение» множества O принимает вид

$$(*) \qquad \forall x[\forall u D(x, u, O) \to Ox].$$

Мы берем саму аксиому (*) и схему

$$\forall x[\forall u D(x, u, \lambda y A y) \to Ax] \to \forall x(Ox \to Ax)$$

для всех формул A (содержащих, возможно, предикатную букву O).

(Обратно, эту систему можно интерпретировать в $\mathcal{J}$, используя явное определение O. Отметим, что в [44, 2.621] множество K заменяет O.)

(iv) Проанализировав систему $\mathcal{T}$, Говард показал, что бахмановский ординал $\varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}}$ (1), который рекурсивен, является границей для всех доказуемых вполне-упорядочений, а его ученик Гербер проверил, что эта оценка точная. (Подробное описание см. в [15], [21].) Грубо говоря, мы начинаем с определений Бахмана [6], использующих кардинал Ω (равный первому несчетному ординалу, совпадающему с ε_Ω), первое ε-число $> \Omega$, т. е. $\varepsilon_{\Omega+1}$, и т. д. Затем рассматриваются термы, используемые для этих определений, вместе с *именами* используемых кардиналов, и упорядочение этих *термов*, определенное порядком величины *значений* этих термов. Оказывается, что это упорядочение рекурсивно. Систематические определения см. в примечании 1 и, конечно, в [94]. Так как бахмановские обозначения используют нормальные функции, мы немедленно получаем однозначность характеризации.

Любой из результатов (i) — (iii) влечет за собой тот факт, что непротиворечивость рассматриваемой схемы *не может быть* доказана в системе IR Фефермана [93], а следовательно, и *предикативными методами* [12]).

Обсуждение. В (i) система сводится к *сформулированным в настоящее время* интуиционистским принципам. Использование переменных более высоких типов, чем у F, совершенно

элементарно. В отношении *действительного* понимания эта редукция имеет значение просто потому, что функционалы низшего типа больше изучались. Но имеется и более теоретическая причина. Допустим, что дано элементарное понятие функции конечного типа, описанное в [11], т. е. конструктивные арифметические функции (заданные правилами), функции, аргументами и значениями которых являются такие функции, и т. д. Затем мы *отбираем* из них сначала конструктивные арифметические функции ($\in\mathscr{F}_1$), затем те F, для которых, грубо говоря, справедлива рекурсия по их необеспеченным последовательностям ($\in\mathscr{F}_2$), а после этого допускаем только функции, получаемые применением примитивной рекурсии и $\varphi_{G,H}$ к $\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2$. Нужно проверить только, что получаемые таким образом операции типа $\mathscr{F}_2$ снова лежат в $\mathscr{F}_2$. (Конечно, проверка должна использовать только элементарные факты об этом понятии из [11].) Подходящее техническое средство для отбора $\mathscr{F}_2$ — использование конструктивных ординалов. (Редукция к арифметике включает последующее ограничение рекурсивными ординалами.)

Непосредственное значение редукции из (ii) состоит в том, что мы обходимся вообще без переменных высших типов. В частности, нет обращения (к якобы особенно проблематичному) понятию свободно становящейся последовательности [13]). Относительно ясного понятия ординала, которое не зависит от более абстрактных конструкций, запрятанных в интуиционистских понятиях, ср. § 12.

Полное значение результата (iii), и в частности ординала $\varphi_{\varepsilon_{\Omega+1}}(1)$, еще не установлено. Например, если уже есть понятие ординала, то оправданны формально более сильные принципы, чем в (iii), в частности *определение* рекурсией по O.

Следует упомянуть, что обсуждаемые здесь системы покрывают основную массу математики, которую *вообще* можно сформулировать в полном анализе (но, конечно, не теорию больших кардиналов). Поэтому при современном уровне знаний редукция анализа к известным интуиционистским принципам, даже исключая теорию видов, проблематична лишь для возможных, но не для действительных применений классического анализа; ср. замечания Генцена о положении в теории чисел в [13, 11.4, стр. 532—533].

§ 11. ЧАСТИЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПОЛНОМ АНАЛИЗЕ

Рассмотрим сначала распространение на полный анализ результатов предыдущих абзацев. В действительности сначала было рассмотрено (Спектором в [80]) именно это распространение, а из него выделен обсуждавшийся выше частный случай!

(а) Фундированные отношения между объектами конечного типа. Как указано в [36], гёделевская интерпретация [11] формально распространяется на полный анализ. Далее эквивалентность $A\leftrightarrow\exists s\forall t A_1(s,t)$ (в символике примечания 9) доказывается с помощью, по-видимому, совершенно элементарных частных случаев аксиомы выбора (это «основной результат» из [36]; ср. дополнение VII).

Спектор обнаружил, что для *теорем* A полного анализа (основанного на AC_{01}) нужные функционалы s могут быть порождены с помощью обобщения *на все конечные типы* рассмотренного в § 10 *принципа определения рекурсией по необеспеченным последовательностям функционала* F. В частности, в то время как F отображает последовательности натуральных чисел в натуральные числа, мы рассматриваем теперь F^{τ}, отображающие последовательности объектов типа τ в натуральные числа. Иначе говоря, мы рассматриваем элементарные фундированные отношения между объектами типа τ (а не только между числами или функциями). Доказательство Спектора было довольно трудным, так как он непосредственно рассматривал интерпретацию аксиомы AC_{01}. Доказательство становится стандартным, если вместо этого рассмотреть $WF(R)\rightarrow TI(R,A)$! В силу результатов § 9 мы получаем даже DC_{11} [14]). Высшие типы возникают из-за того, что теперь мы рассматриваем R, определенные с использованием функциональных кванторов.

Неизвестно никакого понятия конструктивной *функции* конечного типа, для которого можно установить расширенную схему бар-рекурсии. Конечно, можно показать непротиворечивость этой схемы, используя теорию видов, но тогда это не нужно (для доказательства непротиворечивости классического анализа), так как здесь пригоден старый метод Гёделя (§ 9 (iii)). *Формальная* аналогия этой схемы с ограниченной схемой из § 10, конечно, не является гарантией ее конструктивной допустимости точно так же, как формальная аналогия не является надежным показателем теоретико-доказательственной силы.

Замечание. Когда я первоначально рассматривал распространение интерпретации [11] на анализ (в [36]), то считал, что интуиционистскими методами удастся доказать, что описанное там *конкретное* понятие функционала конечного типа удовлетворяет $\exists s\forall t A_1(s,t)$ для теорем A, после того как показал, что это можно сделать неконструктивно. Иначе говоря, я думал, что *существующая* интуиционистская теория

свободно становящихся последовательностей, особенно если использовать формально мощные аксиомы непрерывности, имеет по существу такую же теоретико-доказательственную силу, как и полный классический анализ! Иными словами, я думал, что соотношение такое же, как между формальной интуиционистской арифметикой и классической арифметикой первого порядка (конец § 9) или, как указано в § 9, между формальным классическим анализом и интуиционистской теорией видов. Используя терминологию из § 9, можно сказать, что я не представлял себе результата (ii) в конце этого параграфа (который, конечно, тогда не был известен).

(b) *Понятие «подформулы» в логике высшего порядка.* (Вспомним § 7.) Было замечено (например, [44, стр. 167, последний абзац] без доказательства), что формальная система S анализа, содержащая схему $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$, не допускает свободной от сечения формулировки с использованием рекурсивных определений (в смысле обсуждения после примера 2 § 5), даже если на R наложено ограничение примитивной рекурсивности.

(Доказательство проходит легко, как только проанализировано упомянутое обсуждение. В частности, допустим, что в S *определены* свободные от сечения, возможно инфинитарные, правила и для каждой формулы A можно формально доказать в S *истинность* или *корректность* этих правил, примененных к подформулам формулы A.

Здесь нужны частичные определения истинности, упомянутые после примера 2 § 5. Но тогда наша схема позволяет доказать принцип рефлексии для свободных от сечения выводов и любого конечного расширения. Возьмем расширение, получаемое добавлением предложения, утверждающего, что данная система S формально эквивалентна системе без сечения, и применим первую теорему Гёделя о неполноте в формулировке из конца § 7.)

Такеути [82] рассматривает «чистую» теорию типов, которую (для типов $\leqslant 3$) можно описать следующим образом. Вместо того чтобы использовать двухсортный формализм из § 7, мы вводим также третий сорт $\mathring{X}$ переменных для свойств и функторы для сответствующих операций замыкания второго порядка, в частности для проекций «второго порядка»

$$\forall \mathring{X} \forall X\,[X \in F_p \mathring{X} \leftrightarrow \exists Y\,(\langle X, Y\rangle) \in \mathring{X})]$$

(распространение на все конечные типы очевидно).

Понятие подформулы у Такеути то же, что в § 7: для произвольного терма T, построенного из рассматриваемых функторов, $A[T]$ считается подформулой формулы $\forall X A(X)$ или $\exists X A(X)$. Правила доказательства по существу те же, что в обычной логике предикатов. Очевидно, что, когда мы применяем эту систему (например, к типовой структуре над натуральными числами), то не имеем частичных определений истинности для подформул формулы A, если A не эквивалентна формуле без кванторов высших порядков.

(i) *«Полнота» правил без сечения* в том смысле, что любая теорема полной системы может также быть выведена без сечения (но, разумеется, не в смысле полноты для истинности во всех главных моделях). Тейт [89], существенно используя более раннюю работу Шютте [110], дал очень короткое доказательство полноты, используя принципы арифметики третьего порядка, с помощью которых можно формально доказать существование стандартной модели анализа. (Вспомним родственную ситуацию в § 5.) Имеются работы Такахаси и Правица [73], [81], где рассмотрена теория *всех* конечных типов [15]).

Как заметил Такеути [82], непротиворечивость его «свободной от сечения» системы логики второго порядка вместе с некоторой аксиомой первого порядка (утверждающей существование функции следования) может быть доказана в самой системе. Поэтому нарушено одно из условий выводимости, фигурирующих во второй теореме Гёделя о неполноте, в частности, *замкнутость системы относительно сечения не может быть доказана в самой системе* (даже если добавить сечение). Поэтому *в* общих рамках доказательства Тейта использование экзистенциальных аксиом третьего порядка необходимо [16]).

(ii) *Устранение сечения.* Если оставить в стороне сам *факт* замкнутости правил Такеути относительно сечения, *проблема* устранения сечения имела эвристическую ценность, по крайней мере для Такеути. Он пришел к более длинным, но и более явным доказательствам устранения сечения для ряда подсистем анализа, последняя из которых имеет простое описание в знакомых терминах, а именно это результат добавления Σ^1_1-CA (или, что эквивалентно, Π^1_1-CA) к элементарному анализу [83] (таким образом, эта система содержит неограниченную индукцию). Устранение сечения описано с помощью определения рекурсией по определенным примитивно рекурсивным упорядочениям, которые он довольно бесцветно называет ординальными диаграммами. (Создается сильное впечатление, что они более «естественны», чем неосмысленные упорядочения из § 6(c), но я не знаю, какое свойство делает их особенно интересными; если бы я знал, я мог бы предложить для них лучшее название!)

Предостережения. 1. Доказательство Тейта [89] не устанавливает устранимости сечения для *подсистем* анализа (даже для понятия подформулы по Такеути). Я не проверял, устанавливает ли Такеути в [83] устранение сечения для выводов *произвольных* формул, и не знаю, имеет ли место для рассмотренных подсистем полное устранение сечения.

2. Было высказано предположение, что устранение сечения может быть связано с *явными реализациями кванторов существования:* имеются явно определенные $X_0, \ldots, X_k$, такие, что $A(X_0) \vee \ldots \vee A(X_k)$ выводима, если $\exists X A(X)$ выводима. Это неверно. (Контрпример здесь по существу того же типа, что и для аналогичного утверждения в случае логики первого порядка. Пусть $A(X)$ выражает, что X неконструктивно. Мы, конечно, имеем $\exists X \forall Y [A(X) \vee \neg A(Y)]$, но невозможна последовательность $X_0, \ldots, X_k$ требуемого типа, так как имеется модель [63] даже для теории множеств, в которой конструктивны все *определимые* множества, но не все вообще.)

(c) *Гипотезы и проблемы.* Конечно, было бы интересно использовать результаты из (a) и (b) в более конструктивной теории доказательств для классического анализа. В настоящее время кажется, что главная трудность носит философский характер: ср. замечания в конце § 9 и дополнение I(b). Между тем имеются *математические проблемы*, подсказываемые двумя замечаниями из п. (b) выше.

1. Пусть $Prov_{CA}$ и $Prov_{CF}$ обозначают предикаты доказательства для классического анализа с правилом сечения и без него. Сопоставим некоторую меру *сложности* формулам анализа. Примеры таких мер см. в [51]. Сложностью вывода будет по определению максимум сложностей входящих в него формул.

Мы знаем, что формула

$$(*) \qquad \forall p \forall a [Prov_{CA}(p, a) \to \exists q\, Prov_{CF}(q, a)]$$

истинна, и, следовательно, имеется рекурсивная функция ψ, такая, что

$$(**) \qquad \forall p \forall a [Prov_{CA}(p, a) \to Prov_{CF}(\psi p, a)].$$

(Так как a определяется по p, можно считать, что ψ зависит только от p, и ψ определена однозначно, если мы возьмем минимальное доказательство без сечения.) Далее, мы знаем, что формулу (*) нельзя формально вывести в анализе.

Вопрос 1. Пусть для каждой цифры $\bar{c}$ формула $p < \bar{c}$ означает, что p имеет сложность $< \bar{c}$. Можно ли (для обычной меры сложности) формально доказать в анализе формулу

$$(*)_{\bar{c}} \qquad (\forall p < \bar{c})\, \forall a [Prov_{CA}(p, a) \to \exists q\, Prov_{CF}(q, a)]?$$

Так как доказательства из (b) используют только существование ω-моделей и так как существование таких моделей для подсистем ограниченной сложности может быть установлено в анализе [51], мы ожидаем положительного ответа на вопрос 1.

Вопрос 2. Можем ли мы формально доказать в анализе, *что* формула $(*)_{\bar{c}}$ для переменного c формально доказуема в анализе?

Если бы это было так, мы располагали бы формальным доказательством самой формулы (*) в системе, состоящей из анализа плюс *принцип рефлексии* для анализа в применении к Π^0_2-формулам, т. е. в силу [51] *ω-непротиворечивость анализа влечет* (*) (в арифметике).

Вопрос 3. Возвращаясь к функции ψ из (**), хотелось бы сделать выбор между следующими двумя возможностями:

(i) Не существует рекурсивного уравнения e, для которого в анализе доказуемо, что оно задает всюду определенную функцию (т. е. не существует «доказуемо рекурсивной» функции $\{e\}$, такой, что (**) *истинно* с $\psi = \{e\}$).

(ii) Имеется доказуемо (возможно, даже примитивно) рекурсивная функция ψ, для которой (**) истинна, но не выводима в анализе.

Чтобы исключить (ii), достаточно проверить, что свободный от сечения вывод формулы $\exists x Ax$ для формулы A, не содержащей связанных переменных, содержит цифру $\bar{n}$, такую, что $A\bar{n}$. Действительно, тогда ψ давала бы нумерацию всех доказуемо рекурсивных функций анализа.

С другой стороны, формальное доказательство (ii) позволило бы усилить следствие к вопросу 2, заменив «ω-непротиворечивость» на «*простую непротиворечивость*» *).

---

*) Все три вопроса решены, ср. стр. 136 в статье: Kreisel G. Church's thesis; a kind of reducibility axiom for constructive mathematics. — In: Intuitionism and proof theory, Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 121—150. Ответ на первый вопрос положительный. На вопросы 2, 3 дает ответ следующий результат.

Имеются примитивно рекурсивные функционалы F_1 и F_2, для которых финитным образом можно установить следующие свойства:

(a) Допустим, что (функция) ψ отображает вывод с сечением в вывод без сечения с той же последней формулой. Тогда $F_1\psi$ отображает любой вывод формулы $\exists x Ax$ (для канонического представления A некоторого

2. Рассмотрим вместо классического анализа теорию видов, т. е. аксиому свертывания вместе с интуиционистской логикой. (Я обязан этим предложением беседе с Д. Правицем.)

Правиц предположил, что подходящее обобщение его работы приведет к следующему результату: если $\exists X AX$ формально выводима, то имеется явно определенный X_0, такой, что выводима $A(X_0)$. Следовательно, если $A \vee B$ — замкнутая теорема, то замкнутой теоремой будет A или B; если $\exists x Ax$ — замкнутая теорема, то имеется цифра $\bar{n}$, такая, что $A\bar{n}$ — теорема. Наконец (ср. [44, стр. 160, 3.322]), можно ожидать, что если $\forall x(Ax \vee \neg Ax)$ и $\neg\neg\exists x Ax$ — (не обязательно замкнутые) теоремы, то теоремой является и $\exists x Ax$, в частности, в классическом анализе и в теории видов всюду определенность можно доказать для одних и тех же функций, заданных рекурсивными уравнениями.

Можно добавить, что *формализация* доказательств, предложенных Правицем, в анализе имела бы такие следствия.

Если $\forall x \exists y A(x, y)$ — замкнутая теорема теории видов, то имеется цифра $\bar{e}$, такая что $\forall x A(x, \{\bar{e}\}(x))$ тоже теорема. Ср. тезис Чёрча.

Действительно, каждый данный вывод формулы $\forall x \exists y A(x, y)$ имеет ограниченную сложность $\bar{c}$, следовательно (для обычной меры сложности), мы имеем выводы сложности $\leqslant \bar{c}$ формул $\exists y A(\bar{n}, y)$ для каждого $\bar{n}$. Формализация использованных метаматематических доказательств дала бы формальное доказательство формулы $\forall x \exists y T(\bar{e}, x, y)$ в анализе для очевидной рекурсии $\bar{e}$, задающей y как функцию от n *).

Вероятно, мы должны смотреть на эту ситуацию, как в [44, стр. 156, 3.242]. Сначала проводится легкая редукция классического анализа к теории видов с интуиционистской логикой. А затем начинается тяжелая работа по более подробному непосредственному рассмотрению интуиционистской системы. Короче говоря, не теория доказательств *с применением* интуиционистских средств, а теория доказательств *для* интуиционистских систем.

примитивно рекурсивного предиката) в числовой вывод формулы An для некоторого n. Короче говоря, $F_1\psi$ устанавливает 1-непротиворечивость.

(b) Обратно, если (функция) σ устанавливает 1-непротиворечивость, то $F_2\sigma$ устанавливает теорему о нормальной форме.

Таким образом, на вопрос 2 получен отрицательный ответ. Ответ на вопрос 3(i) отрицательный, а (следовательно) на вопрос 3(ii) положительный.

*) Все эти вопросы решены.

§ 12. СУЩЕСТВУЮЩАЯ ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Развивая последнее замечание, мы можем сказать, что основные исследования, описываемые в этом обзоре, лежат между первоначальной строго комбинаторной гильбертовской концепцией $\mathscr{P}_0$ и наиболее общим абстрактным, или интуиционистским, понятием конструктивности. Наряду с различными процедурами редукции, вроде тех, которые описаны в генценовских статьях [13], [14], имеются функционалы, а также операции на фундированных деревьях. Все эти операции, которые на первый взгляд кажутся различными, тесно связаны между собой. Общим математическим элементом является использование *ординалов* или, точнее, *трансфинитной итерации* процессов, в частности трансфинитных типов. Сознательно или бессознательно, идея такого рода *итераций* принята в литературе в качестве *средства* анализа. Таким образом, здесь в противоположность § 6(d) использование ординалов не нуждается в анализе и понятие ординала не *определяется*, например, методом Фреге — Дедекинда, что было бы естественно, если бы было принято общее интуиционистское понятие вида (§ 11). Иными словами, *ординал считается исходным понятием.*

Чтобы, так сказать, завершить современное направление в теории доказательств, необходимо (a) проанализировать более тщательно эту идею итерации, а также (b) искать соответствующие математические средства. Не следует ожидать что анализ в (a) сам будет использовать ординалы (хотя не исключается использование *теоретико-множественных* ординалов). Возможно, успешнее окажется сравнение с известными подсистемами анализа. Можно надеяться, что средства из (b) помогут справиться с проблемами из § 6(d).

(a) Наиболее естественной отправной точкой для философского анализа является старая концепция *индуктивного определения*, скажем $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$. Она, грубо говоря, допускает определения «снизу», содержащие введенные ранее понятия, и доказательства путем «рефлексии» по таким определениям. Определение ординальных обозначений Клини — Чёрча в § 10 (iii) является примером таких определений, а следующая за (*) схема из § 10 (iii) выражает этот вид доказательства. Если $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$ должна представлять какой-то интерес для *оснований*, бессмысленно рассматривать ее определения как неявные определения, которые нужно превращать в явные, — тогда базисными понятиями были бы те, которые участвуют в явных определениях. Концепция $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$ трудна для большинства (и интересна для остальных) как раз потому, что здесь *неприменимы ни обычная теоретико-множественная семанти-*

ка, ни интуиционистское понимание логических операций [44, стр. 139, примечание 26]. Это ясно уже в наиболее элементарном случае (итерация чисто механических шагов) в определении рекурсивно перечислимых множеств. Если этот класс объектов представляет независимый интерес, то лишь потому, что мы можем проверить принадлежность числа такому множеству чисто механически, однако для установления противоположного нужно доказательство (а не просто вычисление). Что бы отсюда ни следовало помимо этого, необходимо, чтобы смысл *отрицания* был переформулирован для $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$, если оно вообще должно быть использовано. То же относится к импликации, кроме частного случая, когда импликация неитерированна: тогда посылка может быть поглощена квантором, который ограничен уже определенным множеством. (Здесь мы говорим только о логических операциях, применяемых к утверждениям. В случае обобщенных индуктивных определений возникает новая проблема интерпретации логических операций, входящих в сами определения.) По контрасту отметим, что истинностно-функциональное (булевское) понимание пропозициональных операций применимо как в комбинаторной, так и в предикативной математике. Первая в любом случае «свободна от логики», а для второй это следует из фундаментального принципа Пуанкаре, проанализированного в [39] и [93] и требующего, чтобы предикативное определение было инвариантно относительно расширений универсума [17]). В качестве непосредственной цели при анализе $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$ нам кажется разумным выбрать следующее.

Найти достаточно очевидных свойств концепции $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$ для того, чтобы выяснить, позволяет ли она решить проблемы Гильберта для подсистем анализа, полученных из элементарного анализа (§ 8) добавлением Δ^1_2-CA или, что эквивалентно, Σ^1_2-AC.

В настоящее время мы не знаем соотношения между Σ^1_2-CA и упомянутой в конце § 10 формальной теорией определений видов натуральных чисел рекурсией по O. Кажется правдоподобным, что эта теория тесно связана с $\mathscr{P}_{\mathrm{ID}}$.

(b) Обсуждение из § 6 выделяло задачу анализа понятия естественного вполне-упорядочения и прослеживало ее до задачи нахождения естественных ординальных функций. *Имеется ли математический метод характеризации естественных структур*, обобщающий анализ из § 6?

Я имею в виду теоретико-категорный ответ на вопрос, что такое естественное вложение или, более конкретно, следующее. В § 6(d) мы смотрели на ε_0 как на предел ординалов,

которые *неявно подразумеваются* в принятии 1, ω и сложения. Не напоминает ли это магию сопряженных функторов? При заданном декартовом произведении $X \times Y$ сопряженность извлекает экспоненту, т. е. операцию, которая для данных X и Y *итерирует* операцию произведения $(X \times X) \times \ldots Y$ «раз».

§ 13. ИНФИНИТАРНЫЕ (БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫЕ) ВЫРАЖЕНИЯ

Основная проблема здесь заключается в выборе подходящих классов таких выражений (инфинитарных языков). Для теории моделей желателен компромисс: широкий класс, позволяющий определить много структур, но достаточно регулярный для того, чтобы обеспечить простые законы. Необходимость в инфинитарных формулах с точки зрения настоящего обзора (выбор подсистем анализа) будет разъяснена в конце этого параграфа.

Как обычно, мы берем исчисление предикатов первого порядка PC в качестве типичного примера формального языка. Мы используем L_α, чтобы обозначить разветвленную иерархию множеств уровней $< \alpha$, и для начальных ординалов (т. е. кардиналов) α через H_α обозначаем совокупность множеств, наследственно (вместе со всеми подмножествами и т. д.) имеющих кардинал $< \alpha$. Таким образом, $H_\omega = L_\omega$ — совокупность наследственно конечных множеств, а $H_{\aleph_1}$ — совокупность наследственно счетных множеств.

Основные идеи из (a) и (b) ниже были введены в [43], развиты и применены Куненом [58] и в особенности Барвайзом [3]. Основной интерес в этом параграфе представляет обсуждение открытых вопросов и новых областей применения.

(a) *Анализ проблемы: синтаксис и семантика.*

(i) Общий синтаксис определяет комбинации символов. Таким образом, синтаксические объекты PC — это элементы из H_ω, или конечные последовательности, или просто конечные ординалы. Последние получаются, например, когда мы отождествляем формулы и их гёделевские номера.

Различие между множествами и ординалами (или конструктивными множествами) в финитном случае незначительно, ибо $H_\omega = L_\omega$ и естественные структуры на H_ω и ω взаимоопределимы. Однако оно станет существенным в бесконечном случае, например для $H_{\aleph_1}$ и $L_{\aleph_1}$ соответственно.

(ii) Семантика сопоставляет используемым исходным символам реализацию и тем самым определяет два обычных

свойства синтаксических объектов: быть *осмысленным* [18]) выражением и быть *истинным*. Далее имеется отношение *следования* (между формулой A и *классом* формул $\mathscr{A}$).

В РС обычный набор пропозициональных операций ($\neg$, $\wedge$) выделяется своей функциональной полнотой. Мостовский [69] дал интересный, но пока что не окончательный критерий, характеризующий кванторы ($\forall$, $\exists$) посредством вида их предикатов истинности. Логические операции в инфинитарных языках придется выбирать с помощью более тонких соображений, чем функциональная полнота; ср. выбор подсистем в § 1.

В РС множество следствий произвольного класса $\mathscr{A}$ определяется исходя из предиката истинности с использованием теоремы *конечности* и того факта, что любое конечное множество формул эквивалентно одной формуле. Отметим, что на заре логики рассматривались не произвольные классы $\mathscr{A}$, а лишь формальные системы. Множества их следствий были рекурсивно перечислимы. *Открытием* (и притом неожиданным) было то, что основные теоремы теории моделей для РС применимы к произвольным множествам $\mathscr{A}$, а не только к рекурсивно перечислимым. Естественно, что это открытие старались использовать, а другие доказательства, не опирающиеся на него, часто появлялись на редкость поздно; ср. [52] или гл. 6 в [50]. Наконец, отметим, что для упомянутых более ранних доказательств, но не для более поздних, было нужно РС с несчетным количеством символов. Это различие также будет важно для обобщений.

(b) *Главные предложения.* В более старых рассмотрениях инфинитарных языков, изложенных, например, в [24], синтаксис фиксировался условиями на мощность и логические операции выбирались либо по «прямой» аналогии ($\neg$, $\wedge$ $\bigwedge$, произвольные цепочки кванторов), либо из прагматических соображений ($\neg$, $\wedge$, $\bigwedge$, конечные цепочки кванторов [78]).

В противоположность этому мы выбираем синтаксис и логические операции из соображений *определимости*, точнее инвариантной определимости (которые в РС тривиальным образом совпадают с условиями на мощность). Наши условия применимы в первую очередь к конечным формулам, используемым для определения бесконечных выражений; впоследствии показывается, что с помощью наших бесконечных формул не определимы никакие новые (условия замкнутости). Как только для выбора языка приняты критерии определимости, естественно их использовать и дальше, например, в обобщении теоремы конечности вместо условий на мощность в обычных обобщениях так называемой теоремы компактности.

Основные принципы. Мы разделим наши задачи. Сначала обобщим *понятия*, используемые в синтаксисе и семантике (на широкий класс множеств A вместо H_ω, использованного в РС), а затем исследуем, какие добавочные условия на A нужны, чтобы основные *результаты* о РС имели место для нашего обобщения.

(i) Понятия из теории рекурсии.

A-конечность — абсолютная инвариантная определимость,

A-рек. (A-рекурсивность) множества — инвариантная определимость *на* A,

A-р. п. (A-рекурсивная перечислимость) — полуинвариантная определимость *на* A [19]).

Подробное обсуждение имеется в [43]; во всяком случае рекурсивные определения являются наиболее знакомым примером неявных инвариантных определений. Рассмотрение конечности как теоретико-рекурсивного, а не мощностного свойства в этом контексте — проблематичный и плодотворный шаг.

(ii) Логические понятия. Сами синтаксические объекты, такие, как термы и формулы, должны быть *элементами* из A. Формальные выводы, если они используются вообще, должны быть A-конечными. Множество истинных формул должно быть A-р. п., а множество осмысленных формул, возможно, A-рек. Теорема конечности принимает следующий вид.

Любое следствие A-р. п. множества формул $\mathscr{A}$ есть также следствие A-конечного подмножества множества $\mathscr{A}$.

Для любого данного A и $X \subset A$ все упомянутые выше понятия определимости можно релятивизировать к инвариантной определимости из X. Отметим, что обычная теорема конечности для произвольного A содержится в нашем варианте, так как

$$H_\omega\text{-конечность в } X \longleftrightarrow \text{конечность (для всех } X).$$

(c) *Выбор определений.* Чтобы применить принципы из (b), следует конкретизировать две вещи: какой (конечный) язык нужно использовать для инвариантных определений, или, что эквивалентно, какая *структура* введена на A, а также для какого *класса* реализаций этого языка должны быть инвариантны эти определения? Наша цель — сделать понятия нечувствительными к выбору языка. В общем случае этому помогает ограничение рассматриваемого класса отношений, так как большее число отношений становится инвариантно определимым и по транзитивности их добавление к структуре

на A не меняет наших понятий. Аналогично использование *неявных* определений вместо явных помогает достичь устойчивости (см. в [47] сравнение с более ранними рассмотрениями из [59, 98]).

Для совокупностей A множеств или ординалов естественные структуры — это соответственно $\in$ и $<$. В остальном выбор на первый взгляд диктуется голыми догадками. Последние сводятся к использованию понятия *транзитивного* или *концевого расширения* для (бинарного) отношения $R = \in$ или $<$, ограниченного на $A \times A$; выражение

$$(A', R') \text{ есть концевое расширение } (A, R)$$

означает, что

$$A \subset A' \quad \text{и} \quad \forall x \forall y [(y \in A \wedge xR'y) \leftrightarrow xRy].$$

(Если (A', R') *не* есть концевое расширение, то даже в случае $A \subset A'$ объект $y \in A \cap A'$ не является в A тем же абстрактным объектом, что в A'.)

Заметим, кстати, что известное россеровское условие в арифметике

$$\forall x [x < 0^{(n+1)} \leftrightarrow (x = 0 \vee x = 0' \vee \ldots \vee x = 0^{(n)})]$$

гарантирует, что все модели являются концевыми расширениями $(\omega, <)$.

Принцип. В случае когда A — совокупность множеств, мы используем структуру $(A, \in)$. Рассматриваемый класс реализаций — это в первую очередь *конечно аксиоматизируемые концевые расширения*, возможно, с дополнительной структурой.

Оказывается, что обычные теоретико-множественные отношения действительно A-инвариантно определимы. Далее для инфинитарных языков, которые ниже связываются с A, никакие новые отношения не определимы таким образом, даже если использовать A-р. п. множества бесконечных формул.

Насколько мне известно, ситуация менее резко очерчена для совокупностей A *ординалов* и структуры $(A, <)$.

(d) *Одновременный выбор A и связанного с ним языка* $\subset A$. Все рассматриваемые языки включают

$\mathscr{L}_A$ с операциями $\neg$, $\wedge$, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$ и *конечными* цепочками кванторов $\forall$, $\exists$.

Все рассматриваемые A должны удовлетворять элементарным условиям *замкнутости* (необходимым для обеспечения $\mathscr{L}_A \subset A$). Подробный список аксиом такой «рудиментарной» теории множеств см. в [3, стр. 21].

Задача. Каким еще условиям должна удовлетворять A для того, чтобы основные свойства РС обобщались на $\mathscr{L}_A$ при переводе из (b)? Для каких расширений языка $\mathscr{L}_A$ эти свойства сохраняются?

Чтобы избежать порочного круга при выборе A, мы используем свойства $\boldsymbol{P}$ (языка), *устойчивые относительно ограничения* языка: если $\mathscr{L}_A$ не обладает свойством $\boldsymbol{P}$, то им не обладает и никакое его расширение. Примером такого $\boldsymbol{P}$ может служить A-рекурсивная перечислимость предиката истинности. Напротив, интерполяционное свойство *неустойчиво* относительно ограничений. Тривиальным образом рассмотрим обычные пропозициональные формулы A и B без общих переменных, такие, что верно $A \to B$. Фрагмент $(\neg, \wedge, \top)$ содержит интерполяционную формулу, а $(\neg, \wedge)$ — нет.

Легко угадать достаточно хорошие дополнительные условия на A. Например, в [43, стр. 194(b)] они даны для теории рекурсии на L_{ω_1}, где ω_1 — первый нерекурсивный ординал, и для ω-логики. Независимо в [55] даны эквивалентные условия для теории рекурсии на ординалах. Платек рассматривал модификацию наших аксиом, более приспособленную к случаю, когда A не имеет инвариантно определимого вполне-упорядочения, и назвал множества, удовлетворяющие его аксиомам, *допустимыми*.

Приводимые ниже рассуждения (подробности см. в [3] и [58]) относятся к вопросу: допустимы для чего?

(i) Истинность и следование. В одном направлении главные результаты таковы.

Для *всех* допустимых множеств A A-р. п. множество формул из $\mathscr{L}_A$ имеет A-р. п. множество следствий [58].

Для *счетных* допустимых множеств A имеют место равенства A-р. п. $= \Sigma_1$ (над A в смысле [63]), A-рек. $= \Delta_1$ и A-конечность $=$ принадлежность A ([58] и [3]).

Но имеются несчетные множества A, для которых эти последние результаты неверны, например $A = H_{\aleph_1}$ или $A = H_{\varkappa_1}$, где $\varkappa_1$ — первый недостижимый кардинал. Если мы вообще принимаем несчетные кардиналы, то $\aleph_1$ и $\varkappa_1$ играют, так сказать, роль конкретных натуральных чисел для «конечного разума». Это свойство кардинала $\varkappa_1$ неудивительно; см. примечание 6 в [44, стр. 104].

В противоположном направлении: в [3] для счетных рудиментарных множеств A показано, что

если множество следствий из X принадлежит классу Σ_1 в X равномерно для всех множеств $X \subset \mathscr{L}_A$, то A допустимо.

Имеются счетные недопустимые объединения A допустимых множеств, для которых предикат истинности A-р. п. с уточнениями, когда A имеет вид L_α и $\alpha < \aleph_1$.

Тем самым различаются *допустимые по истинности* и *допустимые по следованию* A.

Кстати, было бы более приятно доказать следующее.

Гипотеза. Пусть A — рудиментарное множество. Если все A-р. п. множества формул $\in \mathscr{L}_A$ имеют A-р. п. множества следствий, то A допустимо (т. е. справедлив приведенный выше результат с A-р. п. вместо Σ_1).

(ii) Выбор языка. Прежде всего для многих (несчетных) допустимых множеств A, например для $A = H_\varkappa$, где $\varkappa$ недостижим, предикат истинности A-р. п., даже если разрешены *бесконечные* цепочки кванторов [58]. *Поэтому ограничение конечными цепочками в общем случае неоправданно.*

Для счетных множеств A вида L_α, согласно [3], справедлив такой результат:

для рекурсивно допустимых α и $A = L_\alpha$ предикат истинности для $\mathscr{L}_A$ — *полный* A-р. п. предикат; для рекурсивно недостижимых (допустимых) α он A-рек.

Правдоподобно, что этот результат можно улучшить и установить следующее.

Гипотеза *). Пусть α рек. достижим, и предположим, что расширение $\mathscr{L}_A$ новой пропозициональной операцией π имеет A-р. п. предикат истинности. Тогда π *определима* в $\mathscr{L}_A$. (Для $A = L_{\omega_1}$ это верно.)

Задача. Пусть α рек. недостижим. Какие «естественные» пропозициональные операции или кванторы нужно добавить к $\mathscr{L}_A$, чтобы получить полный A-р. п. предикат истинности?

Другие задачи этого типа автоматически придут читателю в голову, если он углубится в предмет.

(iii) A-конечность: спорный вопрос. Барвайз [3] приводит убедительные аргументы в пользу наложения на A следующего условия замкнутости:

$$\forall X\,(X \quad A\text{-конечно} \leftrightarrow X \in A),$$

которому удовлетворяют все *счетные* допустимые множества A. Грубо говоря, его идея такова. Будем искать простые условия $\mathfrak{F}$ на множества A, такие, чтобы для счетных A условие $\mathfrak{F}$ было эквивалентно допустимости, а в общем случае $\mathfrak{F}$ влекло

*) Опровергнута Фридманом (Friedman H. Adding propositional connective to countable infinitary logic. — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 77, 1965, p. 1—6).

бы за собой приведенное выше условие замкнутости, равенство A-р. п. $= \Sigma_1$ и обобщенную теорему конечности. Отметим, что эти следствия условия $\mathfrak{F}$ известны для частного случая $A = H_\alpha$. (В [3], [5] Барвайз рассматривает некоторое условие «неописуемости» $\mathfrak{F}$.)

Это условие замкнутости имеет очевидные следствия для теоретико-доказательственного (индуктивного) анализа предиката истинности для $\mathscr{L}_A$. Но я хотел бы знать, *необходимо* ли это условие*)? Например, хорошо бы найти контрпример к обобщенной теореме полноты для некоторого, обязательно несчетного, допустимого A (которое не удовлетворяет условию замкнутости и, следовательно, $\mathfrak{F}$).

Или, если контрпримера нет, показать, что любое допустимое A можно рассматривать как *фрагмент* множества A', удовлетворяющего $\mathfrak{F}$. «Фрагмент» означает, что

$$A' \text{ — транзитивное расширение } A,$$

$$\forall X\,[(X \subset A \wedge X \quad A'\text{-конечно}) \leftrightarrow X \quad A\text{-конечно}],$$

$$\forall X\,[(X \subset A \wedge X \quad A'\text{-р. п.}) \leftrightarrow X \quad A\text{-р. п.})].$$

Эта ситуация была бы аналогична использованию конечного языка для ω-логики, где, грубо говоря, $A = L_\omega \cup \{L_\omega\}$ и $A' = L_{\omega_1}$: «грубо» потому, что A, разумеется, недопустимо.

(e) *Проверка системы* (b). В то время как работы, о которых сообщалось в (d), *принимали* основные принципы (b), мы хотим теперь рассмотреть *подходы*, конкурирующие с (b).

(i) Старые мощностные условия. Здесь языки $\mathscr{L}_A$ для счетных A исключены с самого начала, хотя они замечательно подходят для определения интересных алгебраических структур. По [101] сильная компактность отсекает многие A вида $H_\varkappa$, хотя они удовлетворяют даже критерию Π^1_1-неописуемости Барвайза. Как указано в конце (a), в настоящее время есть мало свидетельств того, что сильная компактность действительно нужна для обобщения основных свойств РС.

(ii) Другие теории рекурсии на множествах (Платек). Для всех допустимых $\alpha > \aleph_1$ множество истинных пропозициональных формул из $\mathscr{L}_{L_\alpha}$ неконструктивно, следовательно, не принадлежит Σ_1 на L_α и, таким образом, не является обобщенно р. п. в смысле Платека, хотя оно даже L_1-рек., согласно [58]. Этот результат Кунена (см. [3, стр. 52]) использует рамсеевские кардиналы. Разумеется, неудивительно, что из

*) Вопрос решен положительно (Gregory J. On a finiteness conditions for infinitary languages, Springer Lecture Notes, 1975, v. 492, p. 143—206).

гипотез о существовании больших кардиналов получаются следствия, относящиеся к логическим вопросам; см. доклад (в январе 1964 г.) [44, конец стр. 116].

(iii) Ограничение конструктивными по Гёделю структурами. Мы снова принимаем большие кардиналы и рассматриваем $A = L_\alpha$ для α, расположенного строго между $\aleph_1^{(L)}$ (первый конструктивно (по Гёделю) несчетный ординал) и $\aleph_1$. По [3] множество формул из $\mathscr{L}_A$, истинных во всех моделях, является L_α-р. п. и, следовательно, принадлежит Σ_1 на L_α. Но релятивизируя [25], получаем, что есть много таких α, для которых множество формул, истинных во всех *конструктивных* моделях, *не* является L_α-р. п.

Здесь имеется поразительная параллель с результатом Воота [7] для PC, если мы сравним *конструктивность* (в смысле [7], т. е. рекурсивность) для PC с *конструктивностью в смысле Гёделя* для $\mathscr{L}_A$, где $A = L_\alpha$ и $\aleph_1^{(L)} < \alpha < \aleph_1$.

(iv) Интерполяционная лемма. Как указано в (d), интерполяционное свойство неустойчиво относительно ограничений. Поэтому о «контрпримерах» надо судить исходя из того, был ли сделан подходящий *выбор языка*. У меня есть впечатление, что изобретательных контрпримеров Малитца [67] можно избежать, если добавить к рассматриваемому языку $\mathscr{L}_A$ определенные кванторы от нуля аргументов (выражающие нечто о мощности универсума) таким образом, что расширенный язык все еще имеет A-р. п. предикат истинности.

Другой «контрпример» к интерполяционной лемме дан в [54] для случая конечных *языков высшего порядка*; недостатки обсуждаются в реферате этой работы. По моему мнению, языки высшего порядка представляют наилучший потенциальный тест для идей из (b).

Очевидно, что *понятия* инвариантной определимости совершенно осмысленны и для языков высшего порядка. Далее, хорошо известно, что конечные формулы высокого (даже второго) порядка позволяют дать абсолютные инвариантные определения *больших* структур. Допустим, что мы примем обобщение финитности из (b) и условия Барвайза из (d) (iii) на класс A, из которого взяты наши формулы. Тогда языки второго (а следовательно, и более высокого) порядка должны содержать «громадные» формулы. Иначе говоря, нельзя ожидать, что класс конечных формул второго порядка будет удовлетворять чему-то похожему на условия замкнутости, нужные для гладкой теории [20]).

(f) *Теория доказательств: приложения инфинитарных языков.* Несколько технических приложений инфинитарных языков было упомянуто в предыдущих параграфах. В [3, стр. 29] найдены A, которые не являются допустимыми по истинности, но класс формальных выводов $\in A$ замкнут относительно сечения. Это отчетливо иллюстрирует обсуждение в конце § 5.

Но инфинитарные языки, по-видимому, дают хороший критерий выбора подсистем (обсуждавшийся в § 4). Рассмотрим, например, Δ_1^1-CA и Π_1^1-CA. Результаты дополнения V ниже подсказывают, что первая «симпатичнее» второй. С точки зрения этого параграфа мы имеем изящное различие: класс Π_1^1 *незамкнут* относительно простейшего вида бесконечных дизъюнкций, т. е. имеются такие дизъюнкции (конечных) Π_1^1-формул, которые не эквивалентны никакой Π_1^1-формуле, например определение истинности для Π_1^1-формул. Напротив, класс Δ_1^1 замкнут для естественно сопоставляемого инфинитарного языка (гиперарифметические формулы), «атомами» которого являются Δ_1^1-формулы. Эти приложения, однако, еще вообще не были систематически исследованы.

Технические дополнения

I. МАТЕМАТИКА И ОСНОВАНИЯ

Основная цель этой заметки — разработать подробнее взгляды на (теоретико-доказательственные) основания, высказанные во введении к этому обзору. В частности, я сформулирую и буду критиковать широко распространенную противоположную точку зрения.

Эта точка зрения совпадает с точкой зрения Гильберта в том, что, грубо говоря, «математика может, или даже должна, сама заботиться о своих основаниях». Она отличается от гильбертовской в том отношении, что обращается к «здравому смыслу», не становясь на четкую философскую позицию по вопросу о природе математического рассуждения, и радикально отличается от принятой в этом обзоре тем, что извлекает из теорем Гёделя о неполноте следующее заключение.

«Действительно, программа Гильберта оказывается невыполнимой, если мы интерпретируем «элементарное» или «финитистское» доказательство так, как первоначально имел в виду Гильберт или даже в смысле комбинаторного доказательства $\mathscr{P}_0$ из § 6 или предикативного доказательства из [93]. Это еще не причина, чтобы углубляться в философский анализ и двусмысленности, связанные с неформальными концепциями. Положимся вместо этого на суждения, подсказываемые математическим опытом. Возьмем формальные системы вроде современной теории множеств, которые продолжают нравиться математикам, и дадим математически информативный анализ структуры формальных выводов. Остальное произойдет само

собой: не только последуют (формальные) результаты о непротиворечивости и независимости, но и проявится философское значение анализа (если кто-то этим интересуется)».

Эта точка зрения будет разобрана в несколько приемов.

(a) *Математические и логические основания*: полезное различие. Логические основания анализируют истинность математических принципов (аксиом, правил). Этот анализ обычно опирается на нашу концепцию природы математики. В так называемых математических «основаниях» истинность подразумевается и мы пытаемся сделать рассуждения более систематическими и *доступными пониманию*. Это требует перестройки изложения, зачастую путем хорошего выбора языка. Иногда цели этих двух видов оснований приходят в противоречие.

(i) Логические основания требуют, чтобы мы анализировали то, о чем мы говорим. В общем случае чем *конкретнее* рассматриваемый предмет, тем легче распознать истинность утверждений о нем. Например, в теоретико-множественных основаниях мы рассматриваем конкретные *отрезки* иерархии множеств; ср. [44, стр. 101, 1.17—22] или [50, стр. 174—176].

(ii) В противоположность этому, как только признана истинность применяемых принципов, конкретные доказательства можно сделать более доступными, устраняя аксиомы, т. е. делая предмет, так сказать, менее конкретным. Опять-таки, замена понятий может прояснить дело, даже если новые понятия определены через первоначальные, т. е. логически зависят от последних. Например, в теории категорий понятия функции и композиции подходят лучше, чем множества и принадлежности.

Таким образом, согласно обсуждаемой точке зрения, математика заботится не только о своих математических «основаниях» (с чем согласны все), но также и о своих логических основаниях.

(b) *Правильная оценка опыта*, или опасности недостаточно глубокого изучения. Рассматриваемая точка зрения имеет в очевидном смысле (i) положительный и (ii) отрицательный («антифилософский») аспекты.

(i) Ранние результаты в логике подкрепляют эту точку зрения. Теорема Гёделя о полноте и генценовское устранение сечения дают ясные примеры, в которых «мало что» нужно добавлять к математическим конструкциям; см., например, [50], стр. 190, аксиомы II, III] по поводу интуитивной логической истинности, а также § 5 выше[21]).

Но в случае формальных систем для арифметики и анализа свидетельства против этой точки зрения впечатляющи.

По справедливости можно сказать, что каждый раз, когда значение «формальных доказательств непротиворечивости» вообще было разъяснено, такой анализ требовал больше усилий, чем первоначальное рассуждение. (Я думаю, что это применимо к превосходой работе Спектора [80] и последующему анализу видов функционалов, для которых верны различные типы спекторовской бар-рекурсии.) И вне теории доказательств прекрасные работы о вынуждении (форсинге) с их многочисленными результатами о формальной независимости совсем не затронули не только вопроса об истинности формально неразрешимых предложений, но даже и вопроса о том, какого *рода* опыт может быть нужен для их разрешения.

(ii) В противоположность «грубому» формализму (см., например, [50, стр. 120—121]) рассматриваемая точка зрения соглашается с тем, что за формальными системами стоят интуитивные принципы доказательства и убедительность, которую они добавляют. Но она считает, что такие психологические элементы не допускают точного анализа. Поэтому, чтобы получить что-то определенное, мы должны *заменить* их формальными правилами и изучать последние.

Далее, если мы (считаем, что) имеем полную формальную систему, вполне разумно использовать этот факт, т. е. то обстоятельство, что формальные правила *действительно* заменяют интуитивные принципы в отношении множества истинных утверждений. Вначале мы рассматриваем самое главное и игнорируем более тонкие вопросы о *типе* рассматриваемых знаний или убедительности. Они, вероятно, никогда не будут иметь столь определенных ответов, как чисто «экстенсиональные» вопросы об истинности. (Естественно, на заре развития логики рассматривались эти последние вопросы.)

Если мы имеем дело с неполными системами, в любом случае не остается ни малейшей возможности для такой определенности. Однако важно, что когда мы внимательнее рассмотрим более тонкие вопросы, ситуация покажется не столь обескураживающей: ср. четкое различие у Гёделя [11] между комбинаторным и интуиционистским доказательством, устойчивость различных характеристик неформальных понятий доказательства (например, [93] или [44, стр. 169—179]). Кстати, подсистемы анализа, которые имеют привлекательные *формальные* свойства, были найдены не из формальных синтаксических соображений, а в поисках систем, соответствующих подходящим неформальным принципам доказательства.

(c) *Гильбертовский анализ значения комбинаторных оснований*: источник нынешнего «здравого смысла». Указывая

инструменты для сведения абстрактной математики к $\mathscr{P}_0$, описанные во введении к этой статье, Гильберт пытался также объяснить значение такой редукции, в частности ссылаясь на очень общие свойства концепции $\mathscr{P}_0$, а не на ее детальное описание, т. е. на возможности комбинаторного воображения.

Предостережение. Часть терминологии Гильберта сомнительна! Она осмысленна только в ситуациях, когда его программа может быть проведена. Поэтому, если мы используем эту терминологию, то должны верить в его программу!

(i) $\mathscr{P}_0$ и математическое доказательство *вообще*. Гильберт верил в возможность показать, что абстрактные понятия — просто способ *выражения*, который сам по себе приносит не больше знаний, чем игра (в символы). Он ввел в обиход слово «метаматематика», чтобы отличить рассуждения в $\mathscr{P}_0$ о такой игре от «абстрактной чепухи». Значение (редукции к) $\mathscr{P}_0$ было достаточно ясным: $\mathscr{P}_0$ — это *вся* осмысленная математика!

Отметим, что отличие, о котором только что сказано, вполне осмысленно, *только* если мы разделяем его взгляды! Действительно, если мы принимаем абстрактные понятия, то смотрим на этот вопрос совершенно иначе. Например, абстрактное доказательство арифметического тождества $fn = 0$ гарантирует *ту же* степень убежденности в том, что при вычислении $f0$ получается 0, как если бы мы располагали комбинаторным доказательством. Только *способы* перехода от доказательств $fn = 0$ к вычислению будут различны в этих двух случаях.

Гильбертовский способ описания абстрактных доказательств как формальных манипуляций был вскоре как им, так и другими принят за *определение* сущности доказательства! Но в силу изложенного в последнем абзаце это нуждается в обосновании! При серьезном подходе это ведет к *проблемам полноты*. Наверное поучительно вспомнить, что эти проблемы были решены Гёделем *вне* школы Гильберта положительно для рассуждений в узком смысле (об истинностных функциях и кванторах) и отрицательно для рассуждений о специфически математических понятиях, таких, как натуральные числа.

(ii) $\mathscr{P}_0$ и надежность. Так как для Гильберта $\mathscr{P}_0$ была всей математикой, он связывал рассуждения в $\mathscr{P}_0$ не с конкретным *видом* убежденности, а с надежностью (без каких-либо дальнейших эпитетов).

Однако он подчеркивал практическую надежность обычной математики [16, стр. 158] и, как мне говорили, хорошо представлял себе практическую ненадежность вычислений

(которые составляют малую часть $\mathscr{P}_0$). Для доказательства гипотезы Ферма он предлагал so lange herumrechen bis man sich endlich mal verrechnet (считать и считать, пока, наконец, не собьешься в вычислениях).

Здесь можно заметить, что распространенная мысль о связи формализации и надежности столь же непоследовательна. Когда мы действительно хотим убедиться, что математический результат верен, мы не формализуем его доказательство, т. е. не сравниваем шаги с формальными правилами, а пытаемся сделать его доступным для понимания. Мы полагаемся на математические, а не на логические основания!

Очевидно, что одной из причин введения этой выдумки о надежности является стремление избежать более тщательного анализа $\mathscr{P}_0$.

(iii) $\mathscr{P}_0$ и конечность (финитность). Возможно, что название «финитистская» (конечная), которое Гильберт дал концепции $\mathscr{P}_0$, было задумано как шаг в направлении такого анализа: он, безусловно, думал, что «бесконечное» будет устранено в $\mathscr{P}_0$, которая должна рассматривать (наследственно) конечные конфигурации и понятия, т. е. такие, которые можно конкретно реализовать в пространстве и времени; ср. [11].

Но это неубедительно, так как даже простейшее *правило* нельзя реализовать таким образом. И как только мы это поняли, ограничение конечным числом правил кажется нам совершенно неподходящим, и мы используем правила для перечисления правил; ср. [50, стр. 214(d)].

(d) *Математическое значение комбинаторных оснований.* Сравните название статьи [34], где я пытался убедиться в положительном аспекте рассматриваемой точки зрения (см. (b)(i) выше) (и совершенно откровенно оставил в стороне *логическую* проблему анализа $\mathscr{P}_0$). В частности, я находил теорему Эрбрана «подлинно интересной» и ожидал в соответствии с точкой зрения, рассмотренной в (b), математически интересных побочных продуктов.

Вероятно, этот случай надо сравнить с определенной стадией в *абстрактной алгебре*, где мы не полагаемся на внутренний интерес возникающих структур, а ищем приложений к известным задачам. В действительности я ожидал, что это сравнение будет весьма «точным»: устранению ненужных *аксиом* в абстрактной алгебре должно было соответствовать устранение ненужных (неконструктивных) *правил* вывода.

Забавно, что два основных приложения этого подхода в [34] намного превзойдены обычными методами.

(i) Пусть f — произвольный многочлен степени d от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Анализ доказательства Артина в [34]

был применен Дайкином (Daykin, не опубликовано) для получения выражений

$$(q^{(j)})^2 f = \sum_{i \leqslant N} a_i^{(j)} (p_i^{(j)})^2 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, M,$$

где M и N зависят от d и n, со следующими свойствами:

$a_i^{(j)}$ — многочлены от коэффициентов f;

$p_i^{(j)}$ и $q^{(j)}$ — многочлены от коэффициентов f и $x_1, \ldots, x_n$;

если поле K, порожденное коэффициентами f, упорядочено, K' — вещественно замкнутое расширение поля K и

$$(\forall x_1 \ldots \forall x_n \in K')(f \geqslant 0),$$

то для некоторого $j \leqslant M$ $a_i^{(j)} \geqslant 0$ для всех $i \leqslant N$ и $q^{(j)}$ не равно нулю тождественно.

Если каждый положительный элемент из K есть сумма $\leqslant P$ квадратов, то можно взять $M = 1$ за счет введения функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_P$, определенных на K и таких, что для $a \in K$

$$a \geqslant 0 \to a = (\sigma_1 a)^2 + \ldots + (\sigma_P a)^2, \quad a \leqslant 0 \to \sigma_i a = 0.$$

Но, по крайней мере для вещественно *замкнутых* полей K, Акс в [2] при $n \leqslant 3$ (и, по-видимому, Пфистер при всех n) дал гораздо лучшие границы для N. Так, для $n = 3$ из [34] получается по существу $N \leqslant \exp_2 \exp_2 \exp_2 d$, в то время как [2] дает границу $N \leqslant 2^n$, *не зависящую* от d!

(ii) Второе приложение касалось границы для первого нуля функции $\pi x - \operatorname{li} x$. Из [34] получается примерно

$$\exp_e \exp_e \exp_e \exp_e 8,$$

в то время как [64] дает $1{,}65 \cdot 10^{1165}$.

Ввиду этих уточнений в настоящее время ценность [34] для двух упомянутых выше задач состоит не в самих границах, а лишь в анализе *общей природы* этих задач; она отделяет границы, которые получаются из совершенно общих соображений, от уточнений, нуждающихся в специальном исследовании. Анализ такого типа является типичным вкладом логики; ср. 1.-9—1.-7 на стр. 155 в [50] в связи с теорией моделей *).

*) Имеется замечательное усиление. Стенгл (Stengle. Math. Annalen, 1974, Bd. **207**, S. 87—97) доказал, что $f = \sum c_i (p_i/q_i)^2$, где $q_i = 0 \Rightarrow p_i = 0$. Простое вычисление показывает, что поэтому каждая дробь p_i/q_i непрерывна (даже при $q_i = 0$), если $p_i/q_i \,\mathrm{def}\, = 0$ при $q_i = 0$ (так как $(p_i/q_i)^2 < \frac{1}{c} p$). Еще гораздо более интересные результаты установлены Делзеллом (Delzell C. A constructive continuous solution to Hilbert 17-th problem. — Thesis, Stanford, 1980).

Заключение. В конечном счете, по-моему, (теоретико-доказательственные) основания представляют интерес как инструменты эмпирического исследования: принадлежит ли $\mathscr{P}$ некоторое доказательство, как я понимаю его в данный момент [45, стр. 238]? Теория доказательств дает понятия, с помощью которых формулируются такие эмпирические факты. И ее интерес зависит от того, хотим ли мы знать такие факты.

Это заключение, конечно, вполне согласовано с восприятием логических оснований как *прикладной* математики; ср. § 3. Ранние результаты в логике соответствуют ранним работам по механике, где физика (*нахождение* дифференциальных уравнений) использовала только общеизвестные факты, в то время как математика (*решение* уравнений) была глубокой. В наше время обычно считается, что нужно также рассматривать глубокие физические факты. В теории доказательств этому соответствует философский или, более конкретно, феноменологический анализ различных видов математических рассуждений.

Значение соображений (a)—(c) для точки зрения, описанной в (b), можно суммировать следующим образом. Эта точка зрения ошибается в обеих своих главных оценках, так как преувеличивает ценность формальной работы (в настоящее время) и преуменьшает возможность строгой неформальной работы. Тому, кто разделяет эту точку зрения, вероятно, трудно оценить то, что уже сделано в теории доказательств. Правдоподобность этой точке зрения придает, по крайней мере частично, смешение математических и логических оснований и главным образом подсознательное принятие формалистических взглядов, которые проникли в современный «здравый смысл» через (гильбертовскую) формалистическую терминологию.

II. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

Цель этой заметки — указать, какие из этих отношений, изучавшихся в литературе, оказались наиболее полезными, и установить *порядок* между ними. Последнее исправит некоторые распространенные заблуждения по поводу относительного статуса теоретико-модельных и элементарных доказательств непротиворечивости и независимости.

(a) Рассмотрим сначала *синтаксические свойства*. Хотя большинство из них совершенно естественно определяется для произвольных формальных систем, мы ограничимся системами, которые основаны на многосортном исчислении пре-

дикатов и включают арифметику. Их можно представлять как подсистемы анализа.

(i) Что касается *отдельной* системы, наиболее известные синтаксические свойства — это полнота (насыщенность) и непротиворечивость. Однако они не особенно полезны для наших систем: ни одна из них не полна и в общем случае более полезной, чем непротиворечивость, оказывается какая-либо форма *принципа рефлексии* (частным случаем которого является непротиворечивость) $\exists y\, Prov(y, \ulcorner A \urcorner) \to A$; см. [51].

При хорошо известных условиях первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что *некоторый* частный случай принципа рефлексии для S не выводим в S. Обобщение второй теоремы, принадлежащее Лёбу [60], показывает, что *никакой* частный случай этого принципа не выводим в S, кроме тривиальной ситуации, когда сама A выводима в S.

Более сильные условия на S, такие, как в [60], нужны для второй теоремы, поскольку, например, согласно [87], «свободный от сечения» анализ Такеути формально доказывает свою непротиворечивость, но первая теорема Гёделя применима к системе Такеути.

(ii) Два известных синтаксических отношения между *парами* S и S' формальных систем — это, во-первых, относительная непротиворечивость и, во-вторых, если $S \subset S'$, консервативность расширения, означающая, что любая теорема S' в языке S является также и теоремой S.

Формальное доказательство утверждения «S' — консервативное расширение системы S» в некоторой системе S'' дает также и доказательство относительной непротиворечивости в S'', но обратное в общем случае неверно.

Пример (конец [42]). Пусть S — обычная арифметика, R — россеровская неразрешимая формула, S'' — (даже) примитивно рекурсивная арифметика. Таким образом, $S'' \subset \mathscr{P}_0$. Тогда

$$S'' \vdash Con\, S \to Con\,(S \cup \{R\}), \quad S'' \vdash Con\, S \to Con\,(S \cup \{\neg R\}),$$

но $S' = S \cup \{R\}$ не является консервативным расширением S даже для универсальных формул, а $S' = S \cup \{\neg R\}$ — даже для экзистенциальных.

Мораль: если можно, формулировать результаты о консервативности расширения, а не об относительной непротиворечивости. Отметим также *экстенсиональный* характер результатов первого типа, так как они касаются *множеств* теорем из S и S'. В противоположность этому проблемы (относительной) непротиворечивости упоминают *правила* (порождения теорем) из S и S', и, таким образом, эти проблемы формулируются в терминах *канонических* определений [44, стр. 154, 3.222]. Кстати, для многих известных пар систем (S, S') мы просто не знаем, является ли S' консервативным расширением S, в то время как относительная непротиворечивость зачастую не составляет проблемы, если не ограничивать S''. (Подробнее, если как S, так и S' — *принятые* системы, то одно и то же рассуждение устанавливает непротиворечивость обеих.)

Мы не обсуждаем здесь отношения, наиболее полезные для доказательств рекурсивной неразрешимости или неотделимости, так как этот вопрос подробно исследовался.

Отметим, между прочим, что различные, по-видимому, промежуточные, отношения, упоминавшиеся в литературе, такие, как «переводимость» [31], не представляют большого интереса для наших систем, так как они выполнены автоматически. Ср. [32] и особенно [56].

(b) *Отношения, осмысленные с точки зрения теории моделей.* Несомненно, наиболее известное отношение — это *интерпретация S в S'* [84]; его мы будем называть, более описательно, *равномерной S'-моделью S*. Она задается *определением*, которое определяет структуру, удовлетворяющую аксиомам S в каждой модели системы S'.

(i) Более привлекательное с теоретической стороны отношение между S и S' дано в [68]: для *каждой* модели M' системы S' имеется определение $\delta_{M'}$ некоторой модели для S. Тогда стандартным применением теоремы о конечности получается *теорема* о том, что имеется *равномерная* S'-модель системы S.

Теорема Гёделя о полноте дает (согласно [18]) для систем S', содержащих арифметику, такое утверждение: если $S' \vdash Con\, S$, то S имеет равномерную S'-модель (точные условия см. в [92]).

Менее известное *усиление* таково: если $S' \vdash Con\, S$, то имеется определение S'-модели S, *для которого предикат истинности может быть определен в S'*, и там же можно *доказать* его свойства. (Воспользоваться доказательством Хенкина теоремы о полноте.) В действительности этот результат *равномерен* для переменной конечно аксиоматизируемой системы S и может быть сформулирован следующим образом с использованием переменной s для гёделевского номера (конъюнкции аксиом) системы S. Имеется предикат $T(s, u)$ в Δ^0_2-форме, такой, что $\forall s\,(Con\, s \to M[s, \lambda n T(s, n)])$ выводима в арифметике первого порядка, где $M[s, \lambda n P(n)]$ выражает, что P есть предикат истинности для моделей формулы с номером s. (Как отметил Крипке, такой вариант допускает не-

посредственную формализацию в арифметике первого порядка очевидного теоретико-модельного доказательства устранимости сечения, упомянутого в примере 2 § 5.)

Усиленный вариант допускает обращение, а более слабый не допускает, в чем можно убедиться, взяв $S' = S$. Что касается относительных доказательств непротиворечивости $Con\,S \to Con\,S'$, то по S-модели системы S' мы получаем такое доказательство автоматически, даже в $\mathscr{P}_0$, когда S' *конечна*. Обратное не имеет места — возьмем теорию классов Гёделя — Бернайса в качестве S' и теорию множеств в качестве S [49].

Этот последний пример показывает, что из результата о консервативности расширения $S \subset S'$ не следует существования S-модели для S'.

Более симметричное отношение получается для интересного частного случая систем S', содержащего многие известные системы. Допустим, что для каждой конечной подсистемы S'_n в S' мы имеем $S' \vdash Con\,S'_n$. Тогда (теорема Ори [92] о компактности) для р. п. систем S и S'

S'-модель системы S существует тогда и только тогда, когда для любого m имеется S'-модель системы S_m или, что эквивалентно, если $\forall n (S' \vdash Con\,S_n)$ или если $\forall n \exists m (S'_m \vdash \vdash Con\,S_n)$[22]).

(ii) *Коммутирующие* модели для (S, S'). Предположим, что δ равномерно определяет S'-модель для S, δ' равномерно определяет S-модель для S' и для каждой модели M' системы S' структура, определяемая $\delta'\delta(M')$, *изоморфна* M', *причем соответствующий изоморфизм определен в* S'.

Пример. Пусть S' — арифметика первого порядка, S — общая теория множеств [1], δ есть S'-модель для S, данная в [1], а δ' — обычное построение арифметики в теории множеств без использования аксиомы бесконечности.

Существование коммутирующей пары моделей влечет синтаксическое отношение *точности* ([97] для всех формул A в языке системы S) $S \vdash (A \leftrightarrow \delta'\delta A)$. Но обратное снова неверно в общем случае.

(c) *Обсуждение некоторых доказательств относительной непротиворечивости.* Одним из «пережитков» программы Гильберта (см. дополнение I) является требование, чтобы доказательства относительной непротиворечивости ($Con\,S \to Con\,S'$) проводились в $\mathscr{P}_0$. Это зависит от невысказанного убеждения, что в один прекрасный день сама $Con\,S$ будет доказана в $\mathscr{P}_0$. Но по принципу самого слабого звена в цепи более осмысленно в философском отношении требование использовать любые принципы, которые, как мы ожидаем, будут нужны для доказательства $Con\,S$.

Некоторое *апостериорное* «оправдание» старого требования можно дать, показывая, что оно автоматически выполнено при более разумных условиях.

Одно из таких условий, уже упомянутое в (b) (i), применимо к конечно аксиоматизируемым системам S', которые имеют S-модель; тогда $\mathscr{P}_0 \vdash Con\,S \to Con\,S'$. Этим покрывается большой класс «теоретико-модельных доказательств непротиворечивости» для систем S'.

Далее, пусть у нас есть основания считать, что методы $\mathscr{P}$, предложенные для доказательства $Con\,S$, установят также и $Con(S \cup \{Con\,S\})$. Все концепции $\mathscr{P}$, обсуждавшиеся в основном тексте, удовлетворяют этому условию (и более того, например, они устанавливают принципы рефлексии). Тогда мы ничего не теряем, принимая доказательство относительной непротиворечивости в самой S! Действительно,

если $S \vdash Con\,S \to Con\,S'$, то $\mathscr{P}_0 \vdash [Con(S \cup \{Con\,S\}) \to Con\,S']$,

согласно [33]. (Отметим, что теоретически необходимо *некоторое* ограничение на S. Действительно, допустим, что S_1 непротиворечива, а $S_1 \cup \{Con\,S_1\}$ нет, и возьмем $S = S_1 \cup \{\neg\, Con\,S_1\}$.

Наконец, посмотрим на два известных примера теоретико-модельных доказательств $Con\,S \to Con\,S'$, которые используют методы, выходящие за рамки $\mathscr{P}_0$.

Во-первых, имеется *очевидный* метод расширения произвольной модели M теории множеств до модели M' теории классов путем добавления (в качестве классов) всех *определимых* подсовокупностей из M. *Это* доказательство использует разветвленный анализ уровня 1, т. е. систему из § 8 (3) (i). Чтобы дать элементарное доказательство, нужен еще *один прием*, как в [104] у Шенфилда или у меня в [30]. Однако мне неизвестно никаких преимуществ последних доказательств.

Далее рассмотрим так называемую непредикативную теорию классов S, и пусть $S' = S \cup \{V = L\}$. Очевидное доказательство относительной непротиворечивости использует конструктивные множества ранга, не превосходящего первый недостижимый кардинал $\varkappa$, и порядка, скажем, $< \varkappa^+$ (множества имеют ранг $< \varkappa$, классы — ранг $\leqslant \varkappa$). Элементарное доказательство относительной непротиворечивости гораздо тоньше. Здесь преимущество последнего доказательства состоит в том, что оно устанавливает свойства *консервативности*, а надлежащая формулировка, несомненно, должна включать эти свойства.

валентность между аксиомами и правилами. Боль-
этих результатов применимо к случаю *полной* схе-
мулы A не ограничены и $\Phi(A) \to \Psi(A)$ выведено
следующего правила: из $\Phi(A_1)$ вывести $\Psi(A_1)$
A_1, более сложной, чем A. Заметным исключе-
я результат Шепердсона в (i) ниже.
кция или трансфинитная индукция. Здесь мы
й сильный вид эквивалентности: схема аксиом с
следует из правила без параметров, когда

$$\boldsymbol{X}(0) \wedge \forall x[\boldsymbol{X}(x) \to \boldsymbol{X}(x')], \quad \Psi \text{ есть } \forall y \boldsymbol{X}(y).$$

$A_1 u = \forall u_1 \ldots \forall u_n([A0 \wedge \forall v(Av \to Av')] \to Au)$.
логически истинна и $\Psi(A_1) \leftrightarrow [\Phi(A) \to \Psi(A)]$.
на трансфинитную индукцию очевидно.
он [108] показал с помощью специального рас-
то бескванторные следствия этой аксиомы, при-
бескванторной формуле A, являются также след-
тветствующего правила, примененного к *бескван-*
муле A_1 (в то время как формула A_1, построен-
огически сложнее, чем A). Философское значение
Шепердсона для $\mathscr{P}_0$ подчеркивалось в § 5.
езультаты о формулах A, имеющих простую син-
структуру, приведены в [72]. Возможно, было
о изучить их обобщения на трансфинитную ин-

омы и *правила выбора.* Мы рассматриваем аксио-
ла, когда параметры либо допускаются как в ак-
и в правилах, либо не допускаются ни там, ни
трим AC_{00}; AC_{01}, DC_{11}, DC_{00} рассматриваются ана-

сть $\forall x \exists y \boldsymbol{X}(x, y)$, Ψ есть $\exists f \forall x \boldsymbol{X}(x, fx)$.

$A_1(u, v) = \forall u_1 \ldots \forall u_n[\forall z \exists w A(z, w) \to A(u, v)]$
логически истинна, и

$\to \forall u_1 \ldots \forall u_n[\forall z \exists w A(z, w) \to \exists f \forall x A(x, fx)]$.

льно воздействия параметров см. (c) ниже.
дированность, ср. § 9. Доказательство из [22,
гко модифицировать так, чтобы получить DC_{00} и
вила: из $WF(R)$ вывести $TI(R, A)$.

льтаты об отсутствии эквивалентности. Рассмот-
ические ограничения на формулы A, используе-
х. Тогда верно, например, следующее.
ило AC_{01} в применении к (существенно) Σ^1_1-фор-
ретико-доказательственно эквивалентно (в силу
вленному анализу уровня ω^ω.

(ii) *Аксиома* Σ^1_1-AC_{01} теоретико-доказательственно эквивалентна в силу [100] разветвленному анализу уровня ε_0, где (i) и (ii) добавлены к элементарному анализу $\mathscr{E}$ из § 8.

(c) *Роль параметров.* Фридман [100] разобрался в этом вопросе весьма подробно. Следующие хорошо известные случаи могут служить вступлением. Рассматривая язык системы $\mathscr{E}$, мы должны различать числовые и функциональные параметры, и рассматриваем последние.

(i) $\mathscr{E} \cup (\Pi^1_1\text{-CA})$, случай отсутствия эквивалентности. Рассмотрим Π^1_1-CA без параметров, т. е. схему аксиом $\exists f \forall x\,(fx = 0 \leftrightarrow Ax)$, где $A \in \Pi^1_1$ и в A нет свободных функциональных переменных. (Мы используем Π^1_1 как для обозначения определенного класса формул, так и для обозначения класса множеств, определяемых такими формулами в главной модели.) Первая модель, которая приходит нам в голову, состоит из семейства $\mathscr{C}$ функций, которые рекурсивны *) в некотором *полном* Π^1_1-множестве, например в клиниевском O. Это *действительно* модель с натуральными числами в качестве индивидов, так как в силу теоремы Клини о базисе

$$\{n\colon An \text{ истинно в } \mathscr{C}\} = \{n\colon A_n \text{ истинно в главной модели}\},$$

и потому характеристическая функция множества (натуральных чисел), определяемого формулой A в модели $\mathscr{C}$, принадлежит $\mathscr{C}$.

Эта модель удовлетворяет также Π^1_1-CA с *числовыми* параметрами, но *не* с функциональными параметрами. Действительно, возьмем обычное определение, скажем $\forall f A_0(\boldsymbol{X}, f, n)$, полного Π^1_1-предиката для множеств натуральных чисел и заметим ,что клиниевское O имеет характеристическую функцию в $\mathscr{C}$, а $\{n\colon (\forall f \in \mathscr{C})\, A_0(O, f, n)\}$ не имеет. В действительности верен даже более сильный результат: наше семейство $\mathscr{C}$ может быть формально определено в языке анализа и для естественного определения система $\mathscr{E}$ плюс Π^1_1-CA *с* функциональными параметрами формально влечет существование функции, перечисляющей $\mathscr{C}$. Следовательно, непротиворечивость системы, полученной из $\mathscr{E}$ добавлением аксиомы Π^1_1-CA *без* параметров, может быть доказана в $(\Pi^1_1\text{-CA}) \cup \mathscr{E}$. Поэтому вторая из этих систем не является консервативным расширением первой даже для арифметических предложений.

*) $\mathscr{C}$ следует определить как совокупность функций, арифметических (а не только рекурсивных) в некотором полном Π^1_1-множестве. В противном случае не удовлетворяется Π^1_0-CA с параметрами для множеств. Это не влияет на наше дальнейшее рассуждение.

(ii) $\mathscr{E} \cup (\Delta^1_1\text{-CA})$, случай эквивалентности (например) для Δ^1_1-предложений. Первая модель, которая приходит в голову для системы с параметрами, — это ее минимальная ω-модель, которая в силу [40] состоит из гиперарифметических множеств. Эта модель удовлетворяет также $\mathscr{E} \cup (\Delta^1_1\text{-CA})$ с параметрами.

Чтобы убедиться в этом, мы возвращаемся к известному результату, утверждающему, что Δ^1_1-множества замкнуты относительно Δ^1_1-операций (в то время как множество, являющееся Π^1_1 в некотором Π^1_1-множестве, не обязательно принадлежит Π^1_1). Затем мы проверяем, что упомянутый выше результат релятивизируется к упомянутой выше минимальной ω-модели (т. е. функциональные переменные в рассматриваемых Δ^1_1-определениях пробегают класс гиперарифметических функций). Однако для результатов о консервативных расширениях из [100], кажется, нужны более тонкие рассмотрения.

Следующие два дополнения относятся к важному, но расплывчатому вопросу об *интересных* системах. Системы, рассматриваемые в настоящем дополнении, представляют собой примеры! С одной стороны, различие между правилом в (b) (i) и соответствующей аксиомой в (b) (ii) представляет отчетливый интерес для предикативности; см. дополнение V(a). С другой стороны, мне неизвестно никакой концепции доказательства, для которой очевидна аксиома Π^1_1-CA без параметров, но не Π^1_1-CA с параметрами. То же относится к Δ^1_1-CA. Поэтому без какой-либо новой интерпретации различие между этими схемами и их версиями без параметров представляет чисто технический интерес, например, для аксиоматического анализа теории множеств, рекурсивных в O, и множеств, принадлежащих Π^1_1 в O, соответственно. Ср. дополнение V.

IV. ИНТЕРЕСНЫЕ В ФИЛОСОФСКОМ АСПЕКТЕ МОДЕЛИ ЯЗЫКА АНАЛИЗА: ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Это дополнение содержит конкретные примеры «интересных» различий, которые так часто противопоставляются в этой статье «чисто формальным» различиям. (Так как мы говорим о «моделях», то интересуемся главным образом обычной классической интерпретацией логических операций.)

Когда все сказано и сделано, самой основной моделью языка анализа, описанного в § 7 или 8, оказывается структура $\langle N, \mathfrak{P}(N), 0, S, \in\rangle$ из § 4 (или, если вам больше нравится,

$\langle N, \mathfrak{P}(N), N^N, 0, \in, \circ \rangle$). Мы заменим $\mathfrak{P}(N)$ двумя его подклассами, состоящими соответственно из множеств $\subset N$, которые определимы *вообще*, и тех, которые определимы посредством чисто *арифметических* методов. Второе из этих понятий *элементарно*, так как сводится к экзистенциальным предположениям о множествах. Первое интересно, так как оно *проблематично* и потому нуждается в анализе. Оказывается, что оба эти примера имеют отношение к обсуждению аксиомы выбора.

(a) *Разветвленная аналитическая иерархия*: отрезки и расширения предикативной иерархии [93]. Пусть S — некоторая ω-реализация[24]) языка анализа и $\boldsymbol{DS}$ — совокупность множеств $\subset N$, определимых (формулами этого языка) в S. Пусть A_0 — совокупность множеств, определимых в арифметике первого порядка[25]), и для ординалов $\alpha > 0$ пусть $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{DS}_\beta$, где S_β есть ω-реализация, в которой A_β является областью переменных для множеств.

(i) A_1 есть разветвленный анализ в смысле Г. Вейля. Это наименьшая ω-модель системы Σ^0_∞-CA или, эквивалентным образом, Σ^0_∞-DC с параметрами (кстати, также и без них).

(ii) $A_{\omega\omega}$ — минимальная ω-модель *правила* Δ^1_1-CA или, эквивалентным образом [93], *правила* Σ^1_1-DC_{11} с параметрами. Эти правила выделены тем свойством, что множества, введенные ими, *инвариантно* определимы во всех ω-моделях, содержащих $A_{\omega\omega}$[26]).

(iii) A_{Γ_0} — это предикативный анализ в соответствии с [93] и [111], где Γ_0 — первый сильно критический ординал. Отрезок A_{Γ_0} удовлетворяет очень сильным условиям замкнутости.

(iv) A_{ω_1}, где ω_1 — первый нерекурсивный ординал, является минимальной ω-моделью *аксиомы* Δ^1_1-CA, а также и *аксиомы* Σ^1_1-DC. Определение A_{ω_1} уже не является арифметическим, так как для ординалов $\geqslant \Gamma_0$ понятие *итерации через α шагов* не сводимо к *арифметическим* понятиям.

Смотри дополнение V, где приведена дополнительная техническая информация.

(b) *Абсолютно определимые множества натуральных чисел.* Допустим, что наше понятие определимого множества натуральных чисел достаточно отчетливо (для того, чтобы оправдать утверждения, высказываемые о нем ниже), и обозначим его через $\mathscr{D}$. Там, где это не приведет к двусмысленности, мы будем обозначать через $\mathscr{D}$ также и *совокупность* определимых множеств.

Пусть $\mathscr{D}_A$, $\mathscr{D}_E$ обозначают множества $\subset N$, которые определимы соответственно в языке анализа и теории множеств

(в обоих случаях в применении к главной модели), и пусть $\mathscr{D}_L$ — совокупность конструктивных по Гёделю множеств $\subset N$. Основные предположения таковы:

I. $\mathscr{D} \supset \mathscr{D}_A$ и, что важнее,

II. $\mathscr{D}$ корректно определено, так что квантор по $\mathscr{D}$ удовлетворяет правилам классической логики.

Допущение I не вызывает сомнений, так как, если мы вообще принимаем $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_A$, то $\mathscr{D}$ содержит определение истинности для $\mathscr{D}_A$.

Ситуация с допущением II весьма щепетильна: например, если бы мы рассматривали определения ординалов вместо определений множеств натуральных чисел, то из наблюдения Гёделя [10] следовало бы, что $\mathscr{D}$ несчетно.

(i) Пусть $A(n, X)$ — формула в языке анализа и X — единственная ее переменная для множеств. Тогда

$$\{n\colon \forall X A(n, X) \text{ истинна в } \mathscr{D}\} = \{n\colon \forall \boldsymbol{X} A(n, \boldsymbol{X})\},$$

где, как и в § 4, жирные заглавные буквы пробегают $\mathfrak{P}(N)$.

Доказательство. По теореме Клини о базисе для *любого* $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}_A$

$$\{n\colon \forall X A(n, X) \text{ истинна в } \mathscr{C}\} = \{n\colon \forall \boldsymbol{X} A(n, \boldsymbol{X})\}.$$

(ii) Допустим, что единственные переменные для множеств в формулах $A_1(n, X, Y)$ и $A_2(n, X, Y)$ — это X и Y и что

$$\forall n [\forall \boldsymbol{X} \exists \boldsymbol{Y} A_1(n, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leftrightarrow \exists \boldsymbol{X} \forall \boldsymbol{Y} A_2(n, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})].$$

Это значит, что $\forall X \exists Y A_1$ определяет Δ^1_2-множество в $\mathfrak{P}(N)$ (когда X и Y пробегают $\mathfrak{P}(N)$, а строчные переменные — N). Тогда

$$\{n\colon \forall X \exists Y A_1(n, X, Y) \text{ истинна в } \mathscr{D}\} = \{n\colon \forall \boldsymbol{X} \exists \boldsymbol{Y} A_1(n, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\}$$

при условии, что существует рамсеевский кардинал.

Доказательство. По [106] для любого $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}_L$

$$\{n\colon \forall X \exists Y A_1(n, X, Y) \text{ истинна в } \mathscr{C}\} = \{n\colon \forall X \exists Y A_1(n, X, Y)\}.$$

В силу [79], используя рамсеевские кардиналы, имеем $\mathscr{D}_A \supset \mathscr{D}_L$, так что по допущению I $\mathscr{D} \supset \mathscr{D}_L$. Подставляя $\mathscr{D}$ вместо $\mathscr{C}$ и используя II, получаем искомый результат.

Мы могли бы при желании избежать рамсеевских кардиналов, используя дополнительную информацию из [106]: нужно не все множество $\mathscr{D}_L$, а только конструктивные множества порядка Δ^1_2.

(iii) Отметим, что результаты (i) и (ii) получены путем комбинирования чисто теоретико-множественных результатов

с простыми допущениями I и II. Ср. дополнение I(b)(i). Отметим также, что для формул, рассматриваемых в (i) и (ii), *одно и то же* множество определяется независимо от того, по которой из областей $\mathscr{D}_A$, $\mathscr{D}$ или $\mathfrak{P}(N)$ берутся кванторы (для множеств); по-видимому, неизвестно, все ли формулы анализа обладают этим свойством, даже если допустить большие кардиналы.

Кажется, стоит заметить, что результат $\mathscr{D} \supset \mathscr{D}_L$ в (ii) не был особенно правдоподобным до работы Соловэя [79] даже после того, как мы узнали из [77], что $\mathscr{D}_L$ счетно, хотя и не было известно, *как* его можно перечислить (кроме случая, когда $\mathscr{D}$ включает определения множеств натуральных чисел с помощью произвольных ординалов; тогда по [10] $\mathscr{D} \supset \mathscr{D}_L$ имеет место в силу допущения II).

(c) *Аксиомы выбора и определимость.* Напомним некоторые факты. Как мы уже видели [26]), отсутствие аксиомы выбора не обеспечивает само по себе реализации экзистенциальных теорем посредством явно определимых множеств (см., однако, последнюю проблему в этом дополнении). В противоположном направлении: ограничение определимыми множествами обеспечивает аксиому выбора при условии, что, во-первых, определения явно вполне упорядочены и, во-вторых, отношение между именем (т. е. определением) и именуемым объектом (т. е. определяемым множеством) само определимо. Например, оба принадлежащих Гёделю [10] понятия *конструктивного* и *ординально определимого* множества удовлетворяют этому ограничению. Без этого ограничения аксиома выбора неправдоподобна в общем случае, когда логические операции интерпретируются теоретико-множественно. Рассмотрим $\forall n \exists X A(n, X) \rightarrow \exists X \forall n A(n, X_n)$. Здесь для каждого n может существовать определимое множество X, удовлетворяющее $A(n, X)$, но *отношение* между n и X не обязано быть определимым таким образом. Например, ограничение определимыми множествами первого порядка обладает этим свойством [возьмем $A(n, X)$, означающее, что X перечисляет арифметические множества, определимые с помощью n кванторов] [27]).

Для понятия $\mathscr{D}$ определимого множества из (b) выше нет очевидной причины допускать, что все (доступные пониманию) определения представляются нам расположенными в (определимом) полном порядке. Напротив, если принять (II), то $\mathscr{D}$ удовлетворяет аксиоме свертывания.

Будет, по-видимому, справедливо отметить, что *за* старыми дискуссиями по поводу аксиомы выбора скрывались подлинно интересные проблемы, но приведенные выше результаты вы-

зывают сомнение в том, что вопрос логической независимости этой аксиомы действительно *точно отражает сущность* проблемы.

Гораздо более многообещающая идея была введена Гёделем в [10]: избегая обходного пути через аксиому выбора, он рассматривает *роль понятия высшего* (трансфинитного) *типа* в вопросах определимости. Если дана $A(X)$, то имеются ли множества, удовлетворяющие A, которые определимы с использованием операций высших типов, но не определимы без них? Некоторые интересные результаты были получены для незначительной (?) модификации этого вопроса, относящейся к *формальным* доказательствам из данных аксиом, а не к истинности в теоретико-множественной иерархии. Так, Ганди [9] показывает, что имеются *) Π^1_2-формулы A, которым доказуемо удовлетворяют множества, определимые с использованием счетных ординалов, но не множества $\in \mathscr{D}_A$. Даже большее впечатление производят еще не опубликованные результаты Соловэя, которые показывают, что *мера* некоторых проективных множеств действительных чисел определима с использованием символов для рамсеевских кардиналов, но не определением $\in \mathscr{D}_A$ (даже если допустить существование таких ординалов).

Какой свет эти (и близкие) факты проливают на математическую практику? Прежде всего, что касается доказательств элементарных, например арифметических, утверждений, мы можем оправдать полное использование аксиомы выбора. Эта аксиома может быть элиминирована путем релятивизации к конструктивными множествам, а какая польза от явных определений в доказательствах, если они затушевываются в утверждениях теорем? С другой стороны, эти результаты бросают тень на популярное «эстетическое оправдание» использования леммы Цорна вместо определений рекурсией по счетным ординалам, что было общепринято 50 лет назад: математики не любят «перемешивать» типы. Ординалы вовлекают трансфинитные типы, в то время как лемма Цорна формулируется с использованием всего 2 или 3 типов (над

*) Результат, приведенный со ссылкой на Ганди, неверен. Если A принадлежит Π^1_2 и Σ^1_3-предложение $(\exists X \in 2^\omega) A$ доказуемо в ZF, то доказуемо и $(\exists X \in L \cap 2^\omega) A$ в силу дополнения VI(b)(i) ниже. Но добавление к ZF допущения, что все конструктивные по Гёделю множества натуральных чисел аналитичны, непротиворечиво [Jensen R. B. Note Amer. Math. Soc., 1968, v. 15, p. 189, 68T-6]. По-видимому, неизвестно, имеется ли A в Π^1_2 (с единственной свободной переменной X), такое, что $A(X^*)$ — теорема в ZF для некоторого теоретико-множественно определимого X^*, но ни для какого аналитического X^*.

рассматриваемыми индивидами). Так как большинство математиков даже не осознают, что теряется из-за их «вкуса» (так как они не знают явных определений, о которых идет речь), они просто не в состоянии судить об этом деле.

Предостережение. Последний абзац касался использования аксиомы выбора для определимости; что же касается истинности в $\mathfrak{P}(N)$, здесь ее использование, конечно, неоспоримо.

Я закончу двумя *проблемами.*

(i) Какова роль аксиомы выбора в доказательствах арифметических утверждений с использованием принципов, которым *не* удовлетворяют конструктивные множества, например, больших кардиналов?

(ii) Вспомним § 11(b)(ii)2: для *конкретной* теоремы существования $\exists X A(X)$ мы имеем по [79] явно определимое $X \in \mathscr{D}_A$, которое удовлетворяет A. Что мы можем сказать о явных реализациях теорем существования, доказанных без аксиомы выбора, если в то же время используются сильные аксиомы бесконечности?

V. ТЕХНИЧЕСКИ ПОЛЕЗНЫЕ АКСИОМЫ: АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРАРИФМЕТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

Цель этого дополнения — привести обоснования утверждений, высказанных при неформальном обсуждении в конце § 4.

В качестве основы вспомним какое-нибудь стандартное изложение свойств гиперарифметических множеств. Просмотр показывает, что доказательства «естественным образом» распадаются на четыре группы. Например, если мы рассмотрим уравнение $\Delta\,| = \mathrm{HYP}$, где HYP — первоначальное определение гиперарифметической иерархии по Клини, то $\mathrm{HYP} \subset \Delta^1_1$ более «элементарно», чем $\Delta^1_1 \subset \mathrm{HYP}$. В этом дополнении мы будем группировать доказательства в соответствии со *сложностью формул, входящих в используемые примеры* CA, AC_{01}, DC_{11}.

Очевидно, что такой аксиоматический анализ — не единственная возможная точка зрения! (Например, при примитивном подходе мы сначала спросили бы, какие результаты о Δ^1_1 обобщаются на Δ^1_n для всех n.) Это риск, как и при любой другой аксиоматической трактовке, даже в алгебре или топологии. Но мне кажется, что мы уже были за него вознаграждены в [100] и будем в еще большей степени вознаграждены, когда начнем разрабатывать обобщенную гиперарифметичность по аналогии с обобщенной теорией рекурсии на структурах, отличных от арифметики. В нашем обзоре следствия, относящиеся к анализу, особенно полезны из-за информации, которую они дают о рассматриваемых формальных системах.

Все системы, о которых говорится ниже, будут сформулированы в языке анализа. Кроме отношений (между формальными системами), перечисленных в дополнении II, мы будем использовать понятие *равномерной S-ω-модели* для S', заданной определением, которое для *каждой* модели системы S не меняет области изменения строчных переменных, т. е. даже нестандартные натуральные числа модели S остаются фиксированными[28]). Предполагается, что все рассматриваемые ниже аксиомы *добавляются* к системе $\mathscr{E}$ из § 8.

(a) *Базисные системы и их свойства.* Каждая из аксиом Δ^1_1-CA, Σ^1_1-AC_{01}, Σ^1_1-DC_{11} обладает тем свойством, что ее минимальная ω-модель состоит из гиперарифметических множеств [40], [41]. Что у них общего и каковы связи между ними (в отношении к обычному формальному следованию или к ω-следованию)? Мы знаем, что

$$\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{DC}_{11} \to \Sigma^1_1\text{-}\mathrm{AC}_{01} \to \Delta^1_1\text{-CA}.$$

(i) Фридман [100] дал равномерную Δ^1_1-CA-ω-модель системы Σ^1_1-DC_{11} с весьма удовлетворительными свойствами консервативности расширения. В частности, во всех трех системах могут быть доказаны одни и те же теоремы *о* гиперарифметических множествах (когда последние введены первоначальным определением Клини).

(ii) Он показывает также, что Σ^1_1-DC_{11} нельзя вывести ни из Δ^1_1-CA, ни из Σ^1_1-AC_{01} даже в смысле ω-следования. Его доказательство, разумеется, отличается от (i).

Действительно, система $(\Delta^1_1\text{-CA}) \wedge \neg(\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{DC}_{11})$ не может обладать равномерной $(\Delta^1_1\text{-CA})$-ω-моделью, так как имеется минимальная ω-модель системы Δ^1_1-CA, а именно HYP, а в HYP выполнена также и Σ^1_1-DC_{11}[29]).

По-видимому, *неизвестно*, существует ли равномерная $(\Delta^1_1\text{-CA})$-модель системы $(\Delta^1_1\text{-CA}) \wedge \neg(\Sigma^1_1\text{-}\mathrm{DC}_{11})$. Также неизвестно *), можно ли вывести Σ^1_1-AC_{01} из Δ^1_1-CA, так как эскиз в [97] неубедителен.

(iii) Самый важный результат в [100] — выяснение точной теоретико-доказательственной силы этих трех систем, т. е. (элементарное доказательство) консервативности относитель-

*) Открытые проблемы были решены отрицательно: Steel J. Forcing with tagged trees. — Notices A .M. S., v. 21, 1974, p. 627—628.

но обычной формальной системы (из [93] или [111]) для разветвленного анализа уровня ε_0 [30]).

Последний результат интересен не только технически из-за применения нового сочетания результатов из теории доказательств и конструкций из теории моделей, но и в отношении оснований. Как подчеркивалось в [41], с интуитивной точки зрения не казалось правдоподобным, что (*аксиома*) Δ^1_1-CA истинна при релятивизации к предикативным множествам, и из рассмотрений в [93], видно, что она не такова. Однако мы знаем, что имеется предикативное доказательство непротиворечивости Δ^1_1-CA [31]).

(b) *Аксиоматический анализ.* Как уже упоминалось, доказательства $\mathrm{HYP} \subset \Delta^1_1$ и $\Delta^1_1 \subset \mathrm{HYP}$ поражают различием своих «порядков». Так, Σ^0_∞-CA с избытком хватает для вывода первого включения. Кажется, до сих пор неизвестно, можно ли вывести второе включение в Σ^1_1-DC_{11}.

Вот несколько изолированных результатов. (Здесь, по-видимому, лучше использовать разную символику для класса $\mathscr{H}$ гиперарифметических функций и для их определений с точностью до формальной эквивалентности, а именно HYP.)

(i) *Обычное* доказательство $\Delta^1_1 \subset \mathrm{HYP}$ использует сравнимость рекурсивных вполне-упорядочений. Этот промежуточный результат наверняка не может быть выведен из Σ^1_1-DC_{11}, так как он неверен после релятивизации к $\mathscr{H}$, а последний класс удовлетворяет Σ^1_1-DC_{11}.

Чтобы усмотреть это, вспомним, что сравнимость вполне-упорядочений влечет за собой вместе с Σ^0_1-CA отделимость любых двух дизъюнктных Σ^1_1-множеств Δ^1_1-множеством. Если мы релятивизируем заключение к $\mathscr{H}$, то получим отделимость любых двух дизъюнктных Π^1_1-множеств Δ^1_1-множеством, так как любое Π^1_1-множество есть Σ^1_1-множество над $\mathscr{H}$, а любое множество, которое является Δ^1_1-множеством над $\mathscr{H}$, принадлежит $\mathscr{H}$, что противоречит хорошо известному результату Клини.

(ii) Согласно [100], если для рекурсивного линейного упорядочения (определенного, скажем, формулой без кванторов по множествам) существование иерархии можно *вывести* из Σ^1_1-DC_{11}, то это упорядочение (определяемое этой формулой в любой ω-модели) $< \varepsilon_0$.

Здесь положение по крайней мере лучше, чем с Σ^0_∞-DC_{11}, где такое упорядочение было бы конечным.

(iii) Снова в силу [100], если $\forall n[\forall X A(n, X) \leftrightarrow \neg\forall X B(n, X)]$ для двух формул первого порядка $A(n, X)$ и $B(n, X)$ можно вывести из Σ^1_1-DC_{11}, то множество $\{n\colon \forall \boldsymbol{X} A(n, \boldsymbol{X})\}$ принадлежит разветвленному анализу уровня $< \varepsilon_0$.

(c) *Схема вполне-упорядочения в* § 10. *Теоретико-модельный и теоретико-доказательственный анализ.* Список свойств приведен в начале § 10. Здесь мы установим, что эта система слабее, чем Π^1_1-CA. Как мы знаем [19], она влечет Σ^1_1-DC_{11}, и нетрудно показать, что непротиворечивость Σ^1_1-DC_{11} может быть доказана с помощью этой схемы. Таким образом, мы «поместили» эту схему строго между Σ^1_1-DC_{11} и Π^1_1-CA [32]).

(i) Σ^1_1-CA-ω-модель для схемы $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$, когда R не содержит параметров для множеств. Напомним, что R — арифметическая формула, а A — произвольная и что Σ^1_1-CA эквивалентна Π^1_1-CA из дополнения III(c)(i). Наша ω-модель — это класс $\mathscr{C}$ из этого дополнения или, точнее, его формальное определение в Π^1_1-CA. Пусть $f_{\mathscr{C}}$ — функция, перечисляющая $\mathscr{C}$. Теперь мы используем два факта. Во-первых, Σ^1_1-CA влечет теорему Клини о базисе, а значит, и утверждение, что если имеется убывающая относительно R последовательность, то имеется и такая, которая $\in \mathscr{C}$. Во-вторых, релятивизация A к $\mathscr{C}$ эквивалентна формуле $A_{\mathscr{C}}$, *арифметической* в $f_{\mathscr{C}}$, и Σ^1_1-CA влечет $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A_{\mathscr{C}})$. Этим заканчивается доказательство. Отметим, что наша $\mathscr{C}$ не удовлетворяет схеме, когда R содержит параметры для множеств.

(ii) Имеется ли Σ^1_1-CA-ω-модель для схемы $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$, когда R *содержит* параметры для множеств? *Очевидная* модель, скажем $\mathscr{C}_P$, состоит из функций, арифметических в

$$O \cup O^O \cup O^{O^O} \cup \ldots.$$

Но мы уж, безусловно, не можем доказать в Σ^1_1-CA существование функции, которая перечисляет $\mathscr{C}_P$, так как сама $\mathscr{C}_P$ удовлетворяет Σ^1_1-CA! (Очевидно, что существование такой функции может быть установлено в Δ^1_2-CA (даже без параметров), как отмечено в [22, стр. 327].)

Добавление в корректуре. Фридман ответил на этот вопрос, положительно (ср. примечание 34), и это перекрывает результаты, *сформулированные* ниже в (iii). *Рассуждение* из (iii) устанавливает большее: схема с параметрами является консервативным расширением схемы без параметров относительно арифметических формул.

(iii) Σ^1_1-CA-модель для схемы $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$, содержащей параметры для множеств в R. В силу дополнения

II(b)(i) достаточно доказать непротиворечивость схемы в Σ^1_1-CA. Мне известны только рассуждения, идущие кружным путем. Сначала мы применяем метод из [80] или улучшение Говарда из [20], чтобы свести систему к бесквантворной бар-рекурсии типа 0. Затем имеется выбор: определить *модель* для бар-рекурсии или доказать *вычислимость* бар-рекурсивных термов, то и другое в Σ^1_1-CA. В первом случае мы используем вариант непрерывных функционалов из [36] [33]) и доказываем существование бар-рекурсивных функционалов с помощью схемы $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$ *без* параметров, для которой в силу (i) имеется Σ^1_1-CA-ω-модель. Во втором случае мы анализируем вычисления в терминах говардовского ординала $\varphi_{\varepsilon\Omega+1}(1)$ и доказываем его вполне-упорядоченность в Σ^1_1-CA.

Хотя я и высказывал оговорки о значении схемы $\mathrm{WF}(R) \to \mathrm{TI}(R, A)$ для оснований в конце § 10, эта система кажется достаточно полезной в техническом отношении для того, чтобы стоило провести прямое доказательство (iii) [34]).

VI. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ БЕЗ АКСИОМЫ МНОЖЕСТВА-СТЕПЕНИ, ЕЕ РЕДУКЦИЯ К АНАЛИЗУ

Основная цель настоящего дополнения — резюмировать точные результаты, составляющие эту «редукцию». Мы сформулируем их, используя дополнение II. Эта редукция оправдывает преимущественное внимание, уделяемое анализу в нашем обзоре.

Пусть $(\mathrm{Z})^-$ и $(\mathrm{ZF})^-$ — это соответственно теория множеств Цермело и Цермело — Френкеля первого порядка без аксиомы множества-степени. Пусть звездочка обозначает добавление (схемы) аксиом выбора (или счетной аксиомы выбора; это не влияет на приводимые ниже результаты).

(a) *Грубые результаты*, зависящие только от известных формализаций анализа в теории множеств и от описания наследственно счетных деревьев в анализе.

(i) Имеется $(\mathrm{Z})^-$-ω-модель CA и $(Z)^-_*$-ω-модель AC_{01}. Эти модели заданы обычными определениями множества натуральных чисел, а значит, и совокупности его подмножеств в теории множеств.

Из того, что $(\mathrm{ZF})^- \to (\mathrm{Z})^-$, следует, что так определенные модели являются и $(\mathrm{ZF})^-$-ω-моделями.

(ii) Обратно, имеется (CA)-ω-модель системы $(\mathrm{Z})^-$ и (AC_{01})-ω-модель систем $(Z)^-_*$ и $(\mathrm{ZF})^-_*$.

Во всех трех случаях срабатывает одно и то же *определение*: мы рассматриваем счетные деревья, кодируемые теоретико-числовыми функциями, и определяем *равенство множеств* $a = b$ как наличие изоморфизма между деревьями a и b.

Наиболее интересное свойство моделей, определенных таким образом, формулируется в символике дополнения II(b)(ii) так:

$[\mathrm{CA}, (\mathrm{Z})^-]$-*модели коммутируют, и то же верно для пар* $[\mathrm{AC}_{01}, (\mathrm{Z})^-_*]$ *и* $[\mathrm{AC}_{01}, (\mathrm{ZF})^-_*]$.

Следовательно, одни и те же аналитические теоремы могут быть доказаны в $(\mathrm{Z})^-_*$ и $(\mathrm{ZF})^-_*$.

(iii) Существует (AC_{01})-ω-модель $(\mathrm{ZF})^-$, так как в силу (ii) имеется (AC_{01})-ω-модель даже для $(\mathrm{ZF})^-_*$. Необходимость в AC_{01}, а не только CA возникает так: аксиома замены в $(\mathrm{ZF})^-$, т. е.

$$\forall a\,\{(\forall x \in a)\,\exists!\, y A(x, y) \to \exists z \forall y\,[y \in z \leftrightarrow (\exists x \in a)\, A(x, y)]\},$$

после перевода в модель на *классах* изоморфизма деревьев требует, чтобы мы *выбрали* некоторое дерево из класса (изоморфизма) соответствующего y. Принадлежащий Ганди результат из (b)(iv) ниже показывает, что $(\mathrm{ZF})^-$ *не* является консервативным расширением CA, так что необходимость AC_{01} не связана с рассматриваемой конкретной моделью.

(b) *Тонкие результаты*, включающие теорию *конструктивных* (*по Гёделю*) множеств и ее развитие с использованием генерических множеств.

(i) Имеется (CA)-ω-модель $(\mathrm{ZF})^-_*$. Эта модель состоит из (счетных) деревьев, определяемых *конструктивными* множествами натуральных чисел. Она точна в смысле дополнения II(b)(ii) для всех замкнутых формул, являющихся существенно Σ^1_3-формулами [39, стр. 386].

Очевидно, что другой метод — дать (CA)-ω-модель AC_{01}, а затем применить «грубый» результат из (ii) выше.

(ii) Согласно [9], $(\mathrm{ZF})^-$ *не* является консервативным расширением CA. Более конкретно, имеется частный случай A_0-схемы Π^1_2-AC_{01}, который следует из $(\mathrm{ZF})^-$, но не из CA.

Этот результат оптимален по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, по теореме Кондо CA влечет Σ^1_2-AC_{01} или, эквивалентным образом, Π^1_1-AC_{01}, а в действительности даже Σ^1_2-DC_{11}. Во вторых, $(\mathrm{CA}) \cup \{\neg A_0\}$ является консервативным расширением относительно всех (универсальных замыканий)

существенно Σ^1_2-формул, в то время как сама A_0 — существенно Π^1_3-формула [35]).

(c) *Выбор подсистем анализа.* Вспомним дополнение IV(c). Именно из-за того, что мы принимаем подсистемы всерьез, мы не можем удовлетвориться тем, чтобы приведенные формальные результаты «говорили сами за себя». История математической логики учит, что их либо не слушают, либо слышат неправильно. Так как эта область мало затронута, я ограничусь несколькими элементарными комментариями.

(i) Каково значение (множества следствий) схемы CA? В терминах интересных в философском отношении структур, рассмотренных в дополнении IV, оно либо слишком велико, либо слишком мало. Слишком велико для IV(a), так как CA невозможно обосновать предикативно, и слишком мало для IV(b) (и, разумеется, для главной модели из § 4), так как, например, A_0 из (b)(ii) выше выполнено в $\mathscr{D}$ и даже в $\mathscr{D}_E$.

Вероятно, более существенный класс—это $(CA)\cap\mathscr{A}$, где $\mathscr{A}$ — *синтаксически ограниченный* класс формул в языке анализа. Прекрасной парадигмой является упомянутое в дополнении V(a)(i) открытие Фридмана, касающееся формул *о* гиперарифметических множествах, где CA заменено на Δ^1_1-CA. Следует ожидать, что некоторый интерес представит $(CA)\cap\cap\mathscr{A}_2$, где $\mathscr{A}_2$ состоит из формул, в которых все кванторы релятивизированы к Δ^1_2-определениям.

(ii) Все результаты в (a) и (b) выше относятся к «полному» анализу или теории множеств (без аксиомы множества-степени). Пусть $(\Sigma_1\text{-ZF})^-$ получается из $(ZF)^-$, если в аксиоме замены из (a)(iii) требуется, чтобы A была Σ_1-формулой в смысле [63]. Можно ожидать, что $(\Sigma_1\text{-ZF})^-$, а также $(\Delta_1\text{-Z})^-$ тесно связаны с Σ^1_1-AC_{01} и Δ^1_1-CA. Это приятно дополнило бы результаты, изложенные в дополнении V, если бы оказалось верным [36]).

VII. ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИОНАЛОВ: РЕЗУЛЬТАТЫ О КОНСЕРВАТИВНОМ РАСШИРЕНИИ

Мы рассматриваем здесь интерпретации (формальных систем) арифметики и анализа, использующие либо функционалы низшего типа в интерпретации отсутствием контрпримера [29], либо функционалы всех конечных типов в гёделевской интерпретации [11], обобщенной в [36] и [80].

С наивной точки зрения *любое* применение функционалов в теоретико-доказательственных редукциях арифметики или

анализа кажется *парадоксальным*, так как мы используем объекты более высокого типа, чем те, которые упоминаются в рассматриваемых системах. Этот взгляд неправилен, так как он игнорирует абстрактные операции, скрытые в логическом символизме: обычная теоретико-множественная интерпретация классических логических законов (таких, как закон исключенного третьего в применении к неразрешимым предложениям) предполагает явно неконструктивные теоретико-множественные операции, а гейтинговская интерпретация интуиционистских логических операций ссылается на чрезвычайно абстрактные операции над мыслями (доказательствами), особенно в связи с квантором всеобщности и импликацией. Более конкретно, эта точка зрения не замечает возможности *выявления* информации, скрытой в сложных логических суждениях. С другой стороны это наивное впечатление справедливо, так как использование функциональных переменных должно быть подкреплено проделанным *анализом*: было бы бессмысленно считать, что они пробегают произвольные функционалы из теоретико-множественной иерархии, построенной на натуральных числах в качестве индивидов [37]). Такой анализ может состоять либо в *описании* операций, независимом от теоретико-множественной иерархии, ср. [11] (или [36], где функционалы трактуются как «классы эквивалентности» правил), либо в трактовке использования функциональных переменных только как технического приема, который делает работу понятной, после чего они *элиминируются*. Последняя возможность требует результатов о консервативном расширении, как в [85] или [88]. Соотношение между этими возможностями очень похоже на связь между общим философским анализом и результатами о консервативном расширении, обсуждавшуюся в дополнении I(c)(ii) и примечании 27.

Простейший пример, позволяющий исправить упомянутое наивное впечатление, дает интерпретация отсутствием контрпримера. Пусть

$$A \text{ есть } \exists x_1\forall y_1 \ldots \exists x_n\forall y_n A_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

Будем писать

$$A_0(x, y) \quad \text{вместо} \quad A_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

и

$$A_0(x, fx) \text{ вместо } A_0[x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)].$$

Пусть $\boldsymbol{F}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — переменные для функционалов, значениями которых являются натуральные числа, а аргумен-

тами $f_1, \ldots, f_n$, и пусть F_i — значение $F_i(f_1, \ldots, f_n)$. Будем писать

$A_0(F, f)$ вместо $A_0[\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_n, f_1(\tilde{F}_1), \ldots, f_n(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_n)]$.

Мы имеем два (классических) логических соотношения

$$A \leftrightarrow \neg\forall x_1\exists y_1 \ldots \forall x_n\exists y_n \neg A_0(x, y)$$

и

$$\exists F\forall f A_0(F, f) \rightarrow \neg\exists f\forall x \neg A_0(x, fx)$$

и два полулогических соотношения (использующих аксиому выбора)

$$\forall x_1\exists y_1 \ldots \forall x_n\exists y_n \neg A_0(x, y) \leftrightarrow \exists f\forall x \neg A_0(x, fx)$$

и

$$\neg\exists f\forall x \neg A_0(x, fx) \rightarrow \exists F\forall f A_0(F, f).$$

Собирая их вместе, получаем

$$A \leftrightarrow \exists F\forall f A_0(F, f).$$

Внимательное рассмотрение показывает, что если $\exists F\forall f A_0(F, f)$ вообще истинно, то имеется F_0, который рекурсивен и, следовательно, зависит непрерывно от $f_1, \ldots, f_n$ (т. е. только от конечного числа значений f), такой, что $\forall f A_0(F_0, f)$. В противоположность этому, если мы возьмем обычную скулемовскую формулу A, т. е.

$$\exists x_1\exists g_2 \ldots \exists g_n\forall y_1 \ldots \forall y_n A_0[x_1, g_2(y_1), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_1, \ldots, y_n],$$

то не можем выбрать g_i рекурсивными. (Другой способ взглянуть на эти вещи — заметить, что приведенные эквивалентности не имеют места, если их релятивизировать к рекурсивным функциям f и рекурсивным функционалам F.)

Конечно, рекурсивность и непрерывность — это лишь первые приближения к конструктивности; ср. *дополнение* в конце § 11(а). Мы должны начать сначала.

(а) *Общие принципы интерпретаций* в терминах интуитивной концепции $\mathscr{P}$. Мы сопоставляем каждой формуле A изучаемой формальной системы некоторое отношение $A^*(s, t)$ между функционалами (точнее, последовательностями функционалов) s и t, такое, что неконструктивно $A \leftrightarrow \exists s\forall t A^*(s, t)$, и, кроме того, из формального вывода p формулы A мы получаем s_p, такой, что $\mathscr{P} \vdash A^*(s_p, t)$ с переменной t.

Эти соотношения очевидным образом показывают, что интерпретация $A^*(s_p, t)$ делает более явной информацию, содержащуюся в A, т. е. мы ничего не теряем с неконструктивной точки зрения и в то же время имеем редукцию к $\mathscr{P}$.

Выполнение этой программы зависит от нахождения формальных принципов $\mathscr{F}$, которые верны как для функциональных операций из $\mathscr{P}$, как и для неконструктивных операций и которых достаточно для вывода приведенных выше импликаций.

(i) Угадав вид формулы A^*, т. е. в случае описанной выше интерпретации отсутствием контрпримера $A_0(F, f)$, мы пытаемся для каждой аксиомы A найти функционал s_A, такой, что

$$\mathscr{P} \vdash A^*(s_A, t) \quad \text{с переменной } t,$$

и для каждого правила вывода, позволяющего получить A, скажем из $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$, найти функтор Φ_A, такой, что

$$\mathscr{P} \vdash A^*[\Phi_A(s_1, s_2), t]$$

имеет место, если имеют место $\mathscr{P} \vdash \bar{A}^*(s_1, t_1)$ и $\mathscr{P} \vdash \bar{\bar{A}}^*(s_2, t_2)$ (для переменных t_1 и t_2 подходящего типа) [38]).

Тогда, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — нумерация последовательности функционалов, порожденных посредством Φ_A из описанных выше s_A, мы имеем *принцип псевдорефлексии*: для всех p и t

$$Prov(p, \ulcorner A \urcorner) \rightarrow A^*(\xi_{\nu(p)}, t)$$

для подходящего ν, что и требовалось.

(ii) Чтобы получить формальные принципы $\mathscr{F}$, нужно описать в явном виде схемы для функционалов и выводы формул $A^*[\Phi_A(s_1, s_2), t]$ из $\bar{A}^*(s_1, t)$ и $\bar{\bar{A}}^*(s_2, t)$; см. примечание 38.

Мы получаем *полный* принцип рефлексии, присоединяя к $\mathscr{F}$ принципы, нужные для вывода $\exists s\forall t A^*(s, t) \rightarrow A$, которые в общем случае не будут, конечно, истинны в $\mathscr{P}$. Отсюда следует, что если расширенная система, скажем, $\mathscr{F}_1$, является консервативным расширением некоторой системы $\mathscr{P}$ (в языке A), то в $\mathscr{P}$ выводим полный принцип рефлексии для изучаемой формальной системы.

Подробное применение этой идеи в случае интерпретации отсутствием контрпримера для арифметики приведено в доказательстве теоремы 12 из [51].

(iii) Интерпретация описанного типа позволяет нам *отделить* в выводе A «математическую» часть от следующих за ней «тривиальных» логических переходов. В частности, по данному формальному выводу p_0 мы, используя принцип псевдорефлексии, получаем (в $\mathscr{F}$!) некоторое $\xi_{\nu(p_0)}$, такое, что для переменной t имеет место $A^*(\xi_{\nu(p_0)}, t)$, а затем применяем

чисто логические шаги, чтобы получить $\exists s \forall t A^*(s, t)$ и отсюда тривиальным образом [39]) A.

Это отделение можно сравнить с тем, что достигнуто в привычных свободных от сечения системах для логики предикатов, где математическая или комбинаторная часть состоит в построении тавтологий, за которыми *следуют* менее существенные [39]) логические переходы. В случае арифметики отделение, достигнутое использованием интерпретации отсутствием контрпримера в (ii) выше, кажется более полным, чем в «свободной от сечения» системе § 6(a), где для $\alpha < \varepsilon_0$ мы применяем правило α-индукции также и к кванторным формулам; эти переходы пришлось бы считать «математическими». По-моему, стоило бы сформулировать строго, в чем состоит различие, скрывающееся за этим впечатлением.

(b) *Функционалы конечного типа.* С наивной точки зрения считается, что функционалы низшего типа, используемые в интерпретации отсутствием контрпримера, более элементарны, чем функционалы конечного типа. Однако, с одной стороны, согласно [36, стр. 122, 5.32], в любом случае имеются суровые ограничения на распространение этой интерпретации за пределы арифметики или разветвленного анализа. Но, кроме того, формальные свойства функционалов, нужные для интерпретации отсутствием контрпримера, согласно списку из [85] (ср. реферат на [86]), очевидным образом выполнены только для несколько абстрактного вида функционалов, а именно тех, которые введены в терминах брауэровского понятия ординала [40]). В противоположность этому Гёдель описывает в [11] более [40]) элементарный род функционалов *всех* конечных типов, удовлетворяющий всем условиям, нужным для *его* интерпретации арифметики. (Эта интерпретация была упомянута в примечании 10. Мы отсылаем читателя к [11] за описанием правил сопоставления A^* формуле A, где A^* — это A_1 из примечания 10.)

Формальное распространение гёделевского перевода [11] на анализ совершенно стандартно [36]. Используя § 9, легко перечислить свойства функционалов, нужные для интерпретации DC_{00} и DC_{01}, а именно бар-рекурсию всех конечных типов, впервые введенную Спектором [80]. Но никто не знает конструктивного класса функционалов, который обладает этими свойствами (и не использует в своем описании понятия вида натуральных чисел) [40])! В настоящее время единственное приложение этого расширения, удовлетворительное в философском отношении, — это его специализация применительно к подсистеме, рассмотренной в § 10, которая использует бар-рекурсию низшего типа, т. е. брауэровское понятие ординала

(как упомянуто выше, это то самое понятие, которое *очевидным* образом обладает свойствами, нужными для интерпретации отсутствием контрпримера в случае *арифметики*!). Однако у нас есть несколько полезных результатов о консервативном расширении.

(i) *Главная лемма* (ср. [36, стр. 120]) относится к арифметическим или аналитическим формулам A, построенным с использованием одних только связок ($\neg$, $\wedge$, $\forall$).

Для любого класса функционалов (всех конечных типов), *удовлетворяющего* (классически) *бескванторной аксиоме выбора* QF-AC,

$$\forall s \exists t Q(s, t) \to \exists T \forall s Q(s, Ts) \quad \text{для бескванторных } Q$$

мы имеем $A \leftrightarrow \exists s \forall t A_1(s, t)$, где A_1 — отношение, сопоставленное A.

Соответствующий результат для полной аксиомы выбора или, эквивалентным образом, для чисто универсальных формул Q получается непосредственно. Сведение к QF-AC важно, так как она выполнена для естественного класса непрерывных и даже «рекурсивно непрерывных» функционалов, в то время как для самой AC это неверно.

Таким образом, с точки зрения рекурсивности рассматриваемая интерпретация более удовлетворительна, чем интерпретация отсутствием контрпримера, ибо, как замечено выше, *шаги* доказательства $A \leftrightarrow \exists s \forall t A_0(s, t)$ не релятивизируются к соответствующим классам рекурсивных функций [41]).

(ii) В случае арифметики мы очень легко получаем результаты о *консервативном расширении* [42], замечая, что эффективные операции из [36] удовлетворяют как QF-AC, так и аксиомам о функционалах, нужных [42]) для интерпретации [11]. Аналогично мы видим, что формула A из фрагмента ($\neg$, $\wedge$, $\forall$) выводима в классической арифметике тогда и только тогда, когда $A_1(s_A, t)$ выводима в [11] [42]) для некоторого s_A.

(iii) В случае анализа мы получаем соответствующие результаты о консервативном расширении, однако не для системы CA, а для DC_{11}. Очевидно, что в силу результатов о консервативном расширении для Σ^1_3-формул из дополнения VI мы получаем частичные результаты о консервативном расширении системы бар-рекурсии конечных типов относительно CA. Здесь используются непрерывные операции (вместо эффективных) из [36].

(c) *Модели и интерпретации для формальных доказательств независимости.* Что касается, например, *конструктивных* доказательств независимости, модели, по самой природе

вопроса, бесполезны. В лучшем случае они служат вспомогательным средством для доказательств относительной непротиворечивости. (Исключение представляет [107], где рассматриваются очень слабые подсистемы арифметики с вполне конструктивными нестандартными моделями.) Кроме того, если мы имеем интерпретацию, мы можем *изготовить* задачу о независимости, которая моментально решается с помощью этой интерпретации и, по всей вероятности, недоступна естественным теоретико-модельным методам; например, вычислимость функционалов, используемых в интерпретации системы $\mathscr{S}$, не может быть формально выведена в $\mathscr{S}$.

Кроме этих очевидных применений, по-видимому, имеются *потенциальные* технические приложения интерпретаций к формальным доказательствам непротиворечивости. Мы опишем три из них (упомянутые мной в [34] или [31]; читатель, возможно, предпочтет пропустить это обсуждение, если в действительности он не собирается читать эти статьи).

(i) Чтобы установить теоретико-модельными средствами независимость формулы B от множества $\mathscr{A}$, мы должны дать модель для $\mathscr{A}$, которая не удовлетворяет B. Если мы запишем $\mathscr{A}$ и B в гильбертовском ε-исчислении, то наша модель будет удовлетворять *любой* вывод из гипотез $\mathscr{A}$ (в том смысле, что она будет сопоставлять значение любому ε-терму, входящему в вывод). Интерпретации более *гибки*, так как они сопоставляют любому выводу d модель для его ε-термов, зависящую от этого конкретного d. (Более подробную разработку см. в [86, 5.1, стр. 184—185].)

Однако, хотя это изменение позволяет дать более конструктивное (элементарное) определение рассматриваемых моделей, непохоже, чтобы оно *облегчило* их явное нахождение. Рассмотрим здесь известную теорему о покрытиях. Пусть a_n — последовательность интервалов на вещественной прямой и $\sum |a_n| < 1$, где $|a_n|$ обозначает длину a_n. Верно, что для каждого N имеется рациональное ξ_N из $[0, 1]$, такое, что $\xi_N \notin \bigcup_{n \leqslant N} a_n$, однако не обязательно имеется рациональное ξ, такое, что $\xi \notin \bigcup a_n$ (или рекурсивное вещественное ξ, если a_n — рекурсивная последовательность рациональных интервалов). Но это не значит, что трудно *определить* ξ в $[0, 1] - \bigcup a_n$. В действительности мы получаем ξ автоматически, если известно, что $\sum |a_n| < 1$, и в любом случае мы часто знаем о ξ достаточно для того, чтобы заключить, что $\xi \notin \bigcup a_n$, даже если неизвестно, рекурсивно ли ξ.

Другой похожий переход содержится в примечании 22. Вместо того чтобы определять модель для ZF, в которой, скажем, неверна континуум-гипотеза CH, мы даем метод, позволяющий определить модель, где CH ложна, для первых n аксиом ZF_n системы ZF. Это делает доказательство независимости CH более элементарным, но не облегчает его нахождение.

(ii) Модели весьма слабых систем теории множеств, например системы Гёделя — Бернайса без аксиомы бесконечности, обязательно нерекурсивны, и модели, полезные для доказательств независимости в арифметике, т. е. нестандартные модели, также нерекурсивны. В противоположность этому функционалы, используемые при интерпретации весьма сильных систем, рекурсивны (функционалы, нужные для интерпретации системы $\mathscr{S}$, лежат в *подклассе* $R_{\mathscr{S}}$ рекурсивных функций). Так, нельзя доказать бесконечность (рекурсивного) множества X, если не имеется функции $f \in R_{\mathscr{S}}$, такой, что $f(n)$ превосходит n-й элемент X. Иными словами, знания о плотности такого X *могут* вести к результатам о формальной независимости.

Но в настоящее время мы слишком мало знаем об $R_{\mathscr{S}}$ (или о плотности таких множеств X, как множество простых n, для которых $n + 2$ просто), чтобы *применить* это наблюдение. Более общим образом, зачастую с нерекурсивной моделью не труднее работать, чем с нерекурсивным ξ в случае теоремы о покрытиях, рассмотренной выше.

(iii) В случае арифметики нестандартные модели выходят *за* рамки натуральных чисел, т. е. за рамки подразумеваемой модели, в то время как интерпретации *ограничивают* подразумеваемый класс функционалов.

Но так как на свете существуют вещи и помимо подразумеваемой модели арифметики, то (iii) не предоставляет очевидного практического преимущества. Ситуация напоминает примеры (i) и (ii) в дополнении V(a): в (ii) нельзя было использовать минимальную (подразумеваемую) ω-модель рассматриваемой системы Δ^1_1-CA, а в (i) она используется. Однако нахождение подходящего формального определения этой модели для решения (i) не проще, чем решение (ii) [43]).

Резюмируем существующую ситуацию. Мы имеем три основных метода для доказательств непротиворечивости в арифметике и слабых системах анализа: гёделевский диагональный метод и его обобщения (см., например, [51]); интерпретации и прочая теория доказательств, приводящая к границам для «доказуемых» ординалов, как в § 8; теоретико-модельные конструкции. Как указано в [51, последний абзац введения], неразумно проявлять фанатизм по поводу последних. Однако, чтобы уравновесить [51], я закончу некоторыми примерами, где эти конструкции намного более привлекательны. В реферате на [28] имеется теоретико-модельная редукция арифметики к подсистеме анализа, где аксиома сверты-

вания заменена утверждением, что бесконечное дерево с конечным ветвлением содержит бесконечный путь. Я предпочитаю это доказательство моему первоначальному доказательству из [42]. И, наконец, данный Фридманом [100] анализ Δ_1^1-CA, использующий из теории доказательств только *существование* модели для Δ_1^1-CA, в которой неверна ε_0-индукция, ярче, чем вариант из примечания 30.

Работа [34] появилась десять лет назад. Было бы интересно посмотреть, найдет ли применение в течение ближайших десяти лет хоть одно из свойств (i)—(iii).

VIII. ФРАГМЕНТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ПРЕДИКАТОВ. ДОПОЛНЕНИЕ К § 13

Рассматриваемые здесь множества пропозициональных операций не являются функционально полными; не таковы и «обычные» кванторы, такие, как $\forall$, $\exists$, включая $\exists_\alpha$ из [26] и [8]. Однако *смысл* логических операций обычный теоретико-множественный. Фрагменты исчисления высказываний рассматривались в работе [102] с требованием, чтобы была включена *импликация*. Это, очевидным образом, необязательно с теоретико-модельной точки зрения и было связано с привычкой к формализации посредством правила сокращения посылки (которое формулируется с использованием $\to$), что не нужно для формализаций в стиле Генцена, которые в любом случае лучше приспособлены для теории доказательств.

Перед тем как рассказать о нескольких скромных, но изящных результатах из этой области, стоит сказать несколько слов о том, какой интерес она представляет. Во-первых, учитывая, что выбор языка был основной и трудной проблемой в § 13, не кажется неразумным поэкспериментировать с «под»системами в более простых ситуациях, чем инфинитарные языки, обсуждавшиеся в § 13. Это подготовит нас к технически более трудной области. (С этой точки зрения наши фрагменты не фундаментальны, так как по предположению они только *иллюстрируют* положения, интересные в более сложной ситуации.) Во-вторых, имеется почти совершенно неисследованный пока вопрос об абстрактной формулировке математических методов, используемых в теории доказательств. Создается впечатление, что устранение сечения использует некоторые весьма общие комбинаторные принципы, возможно даже принципы из теории структур. Более того, такие на первый взгляд совершенно непохожие на устранение сечения вопросы, как устранение переменных типа выше τ из определений функционалов типа τ (см. дополнение VII), по-видимому, содержат «похожие» идеи. Хорошо иметь *примеры* для проверки наших абстрактных формулировок, и, по-моему,

фрагменты могут послужить полезной цели, так как здесь мы имеем иной язык, а не иные правила (в противоположность случаю интуиционистских систем). В любом случае фрагменты дают привлекательные упражнения, и, разрабатывая их, студент приобретает хорошее знание языка обычного исчисления предикатов, что существенно.

(a) *Пропозициональные операции.* (i) Очевидно, что любой фрагмент обладает полным набором правил со свойством подформульности, т. е. правил без сечения. Возможное применение этого результата ко второму из упомянутых выше вопросов таково: если дана абстрактная формулировка устранения сечения, мы можем спрашивать, применима ли она к правилам для фрагментов. (Заметим, что стандартное доказательство дает лишь полноту, но не инструкции для устранения сечения.)

(ii) Интерполяционная лемма верна для произвольного фрагмента; см. упр. 2 из [50], принадлежащее, по существу, Ф. Вийе. Однако по весьма тривиальной причине теорема определимости неверна! Конкретно, возьмем фрагмент, в котором T не определимо. Тогда теорема определимости требует, чтобы из того, что $(Ap, Ap', p \vdash p')$, т. е. p *неявно* определено формулой A, следовало бы, что p *явно* определено. Но для $Ap =_{\text{def}} p$ это было бы само T. Как часто бывает, этот случай является *единственным* исключением, поскольку сама $A(T)$ является явным определением для p.

Возможное приложение этого наблюдения, т. е. *существенная* зависимость теорем интерполяции и определимости от точного выбора языка, уже было упомянуто в § 13.

(iii) Резникоф в [74, 75] показывает, например, что во фрагменте, состоящем только из $\to$, любое множество формул мощности $\leqslant \aleph_1$ имеет независимую аксиоматизацию (в этом фрагменте), но дает множество мощности $\aleph_2$, которое ее не имеет. С другой стороны, независимая аксиоматизируемость не привязана к *функционально полному* множеству операций, так как любой фрагмент, *содержащий* $(\wedge, \to)$, допускает независимые аксиоматизации. (Как он замечает, его результат не особенно силен, ибо $(\wedge, \to)$ — лишь собственный фрагмент этого типа.)

(b) *Исчисление предикатов.* Положительный результат о независимости аксиоматизации распространяется на фрагмент $(\forall, \exists, \wedge, \to)$, но *полное* обобщение других результатов из (a) неизвестно.

Кстати, *отсутствие предваренных нормальных форм*, столь хорошо известное из теории инфинитарных языков (или интуиционистской логики), иллюстрируется фрагментом $(\forall, \exists, \leftrightarrow)$.

Я не хочу преувеличивать, но все же я получил от приведенных выше результатов впечатление, что фрагменты классической логики не лишены технического интереса.

Вопрос о фрагментах является *центральным* для интуиционистской логики, так как даже обычное исчисление высказываний является фрагментом. Поэтому не стоит входить здесь в обсуждение этого предмета.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1]) Эта статья рассматривает в основном подсистемы классического анализа. Для полноты картины следует привлечь (i) обзорную статью [44], (ii) сообщения Фефермана [95] и (iii) мое сообщение [48] на Конгрессе по логике, методологии и философии науки в Амстердаме в августе 1967 г. Основные теоремы, от которых зависят § 1—12, содержатся также в [44]. Изложение в настоящей статье предназначено для читателей, не знакомых с неклассическими системами, в то время как [44] рассматривает теорию доказательств для интуиционистских систем по техническим причинам, упомянутым в [44, 3.242, стр. 156]. Однако я привожу здесь несколько новых *формулировок* систем и результатов. Статья Фефермана [95] описывает использование автономных прогрессий для характеристики интуитивных концепций $\mathscr{P}$, историю этого вопроса и его проблемы. Эта важная часть теории доказательств здесь совершенно игнорируется. Статья [48] выводит обзор [44] на современный уровень по отношению к специфически интуиционистским вопросам. Некоторые результаты, впервые сформулированные в [44], приводятся в [51] с полными доказательствами и зачастую с техническими уточнениями.

[2]) Естественно постараться решить конкретный вопрос, используя свойства концепции $\mathscr{P}$, очевидные при весьма поверхностном ее понимании. В частности, нужны аппроксимации концепции $\mathscr{P}$ *снизу* для положительных результатов и *сверху* для отрицательных результатов. Можно надеяться, что затем мы улучшим эти аппроксимации. Иными словами, *мы не начинаем с определения* $\mathscr{P}$; эта сторона исследований по основаниям часто кажется странной *чистым* математикам. Тем, кто знаком с теорией моделей, может показаться полезным сравнение с так называемой *математической или алгебраической характеристикой синтаксически определенных классов моделей* — никто никогда не объяснял, кроме как на примерах, что здесь имеется в виду под «математическим». Но мы узнаем хорошее решение, когда видим его. Важнее следующее: я думаю, что вопрос о точном объяснении этой программы — интересный вопрос, но такое определение становится возможным только на весьма продвинутом этапе программы.

[3]) Более разработанное обсуждение представления мыслей бесконечными конфигурациями имеется в статье [45], написанной специально для Бертрана Рассела. Я надеюсь, что настоящая работа подходит для более широкой аудитории.

[4]) Рассматриваемые здесь структуры относятся к арифметике, континууму и, неявно, к кумулятивной иерархии типов до первого недостижимого кардинала. Все эти структуры обладают аксиоматикой второго порядка.

[5]) $+$ и $\times$ особенно элементарны; они неявно определимы в $\langle N, 0, S\rangle$.

[6]) Относительно общезначимости, а не следствий! Например, из $A \wedge B$ не вывести A с помощью системы правил, обладающей свойством подформульности.

[7]) Иногда ту же точку зрения иллюстрируют другим крайним случаем (*фрагменты* исчисления предикатов). И снова (я думаю, неправильно) рассмотрение фрагментов обычно считают копанием в мелочах. Кстати, преимущества генценовских правил без сечения перед методами, основанными на интуитивно гораздо более ясной интерпретации отсутствием контрпримера (см. замечание в дополнении VII), также проявляются в инфинитарном случае или для фрагментов, не обладающих предваренной нормальной формой. Ср. дополнение VIII.

[8]) Я не проверял, можно ли формализовать доказательство эквивалентности в самой системе $\boldsymbol{Z}$ или даже в примитивно рекурсивной арифметике. [Это можно сделать с помощью результатов из статьи Г. Е. Минца «Финитное исследование трансфинитных выводов» (Записки научн. сем. ЛОМИ АНСССР, т. **49**, 1975, с. 67—122). — *Перев.*] В философском отношении этот вопрос не особенно интересен, как разъясняется в дополнении II. Однако в техническом отношении это интересно в связи с *применением второй теоремы Гёделя о неполноте к бескванторным системам*. Для «обычных» систем S (см., например, [44, стр. 155, 3.233], а также примечание 16), для которых помимо выполнения двух других условий Гильберта — Бернайса на выводимость в самой S может быть формально доказана замкнутость относительно сечения, из теоремы Гёделя следует просто, что непротиворечивость S невыводима в S. Для систем без сечения мы имеем дополнительные возможности: (i) выводима непротиворечивость, но *не* замкнутость относительно сечения, (ii) не выводимо ни одно из этих свойств. Очевидно, что если рассматриваемое доказательство эквивалентности *можно* формализовать в $\boldsymbol{Z}$, то непротиворечивость свободной от сечения системы $\boldsymbol{Z}'$ *не может* быть доказана в $\boldsymbol{Z}'$, а замкнутость относительно сечения может быть доказана. Для $\boldsymbol{Z}'$ имеет место (ii). Этот вопрос решен в статье Крайзеля и Такеути (Kreisel G., Takeuti G. Formally self-referential propositions for cut-free analysis and related systems. — Dissertationes Mathematical, vol. **118**, 1974, p. 49, line 22). Следует помнить, что для систем без сечения не все противоречия доказуемо взаимовыводимы, т. е. (внутри системы) нет вывода для

$$(\vdash A \wedge \vdash \neg A) \leftrightarrow (\vdash B \wedge \vdash \neg B),$$

где переменные A и B пробегают все формулы. В связи с программой Гильберта относящиеся к делу противоречия имеют вид «A и $\neg A$ обе выводимы», причем A — (формула, представляющая) реальное, т. е. числовое, утверждение. Вероятно, это следует называть «непротиворечивостью по Гильберту. Также в последнем абзаце § 11 (i) «непротиворечивость» (свободного от сечения анализа Такеути) означает непротиворечивость по Гильберту. Переводы числовых утверждений, в частности равенств между цифрами, в системе Такеути — это формулы первого порядка. Во избежание недоразумений отметим следующее. То, что Такеути «заметил» результат, который я ему приписываю, не надо понимать буквально в том смысле, что он его действительно сформулировал. Однако он заметил факт (выводы формул первого порядка в его системе состоят только из формул первого порядка), из которого этот результат следует элементарно, и дал элементарное доказательство этого факта. В действительности это доказательство устанавливает непротиворечивость равномерно для всех формул первого порядка.

[9]) Имеется третий анализ, ведущий к ординалу ε_0. Он использует гёделевскую интерпретацию посредством функционалов конечных типов [11] и сопоставление ординалов термам, определяющим применяемые функционалы (ординалы отражают структуру вычислений). Эта интерпретация аналогична интерпретации отсутствием контрпримера в том отношении,

что (i) каждой формуле A сопоставляется интерпретация вида $\exists s \forall t A_1(s, t)$ с бескванторной формулой A_1 и (ii) законы (классической) логики справедливы для этой интерпретации в применении к соответствующим образом ограниченным классам формул при условии, что условия замкнутости, сформулированные в [11], выполнены для рассматриваемых функций (для отрицаний предваренных формул в обеих интерпретациях, для формул, построенных из $\neg$, $\wedge$, $\forall$ в [11]). Короткое сравнение проведено в дополнении VII. Хотя [11] была опубликована в 1958 г., профессор Гёдель сообщил мне, что он изложил формальные детали этой интерпретации в лекциях уже в 1941 г. Несмотря на изящество интерпретации, не было даже слухов о ее существовании. Я узнал о ней впервые (от профессора Гёделя) в 1955 г. и рассказал в Корнелле в 1957. Следует отметить, что Клини предложил свою интерпретацию реализуемости (ср. [27]) в начале 40-х годов. Для нашей теперешней цели она существенно отличается от двух описанных выше интерпретаций, так как отношение «e реализует формулу A» само выражается формулой, в которой $\neg$, $\wedge$, $\forall$ применяются к *неразрешимым* выражениям. Иначе говоря, *эти* логические операции не устранены.

[10]) Если я правильно интерпретирую раннюю литературу времен Ферма, то принцип доказательства по трансфинитной индукции в применении к *бескванторным выражениям* (равенствам) был принят очень рано и назывался *методом бесконечного спуска*. Так, например, в доказательстве $x^3 + y^3 \neq z^3$ (для положительных целых x, y, z) мы имеем *на первый взгляд* выбор между (i) *обычной* индукцией в применении к *кванторной* формуле Fu: $\forall x \forall y\,(\forall z < u)\,(x^3 + y^3 \neq z^3)$ и (ii) *трансфинитной* индукцией в применении к равенству $E(x, y, z)$: $x^3 + y^3 \neq z^3$, скажем, в лексикографическом упорядочении троек $\langle z, x, y\rangle$. Правда, вопреки первому впечатлению мы снова приходим к ω-упорядочению, так как нужно рассматривать только пары $\langle x, y\rangle$ при $x < z$, $y < z$. [Существенная разница заключается в том, что $F(u+1)$ выводится из $F(u)$, в то время как $E(x, y, z+1)$ выводится из $E[f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)]$ с $h(x, y, z+1) \leqslant z$ и, грубо говоря, функции f, g, h не могут быть слишком «простыми». Подробное обсуждение см. у Шепердсона [108].] Кажется очевидным, что во времена Ферма математики не думали о применении индукции к кванторным формулам и не осознавали, что лексикографическое упорядочение троек $\{(z, x, y): x < z, y < z\}$ является ω-упорядочением. Результат Генцена показывает, что использование индукции в $\mathbf{Z}$ для доказательства арифметических тождеств может быть заменено трансфинитной индукцией, применяемой только к равенствам (первые впечатления были справедливы в том смысле, что индукции по обычному упорядочению недостаточно!).

[11]) Во избежание недоразумений отметим, что здесь мы определяем изоморфизм *равномерно* для пар структур с ординалом α (вместе с упомянутыми ординальными функциями), и это возможно только для $\alpha < \varepsilon_0$. В литературе, например [57], рассматриваются также изоморфизмы, определяемые с использованием (конечного числа) *констант*, в частности для элементов e_i и e_i' $(0 \leqslant i \leqslant n)$ из $\trianglelefteq$ и $\trianglelefteq'$ соответственно, которые соответствуют ε_i. Для каждого $\alpha < \varepsilon_\omega$ и каждой пары структур с ординалом α такой изоморфизм *существует*, но в общем случае мы не будем знать, как его найти. Очевидно, что существенным свойством ординальных функций, участвующих в равномерном определении изоморфизма, является их *полнота*, т. е. тот факт, что эти функции порождают отрезок ординалов, начинающийся с 1. Феферман в [94] анализирует гораздо менее очевидную проблему *расширения* полных систем до бо́льших полных. Для любых двух упорядочений пусть $[a]$, $[a']$ обозначают сегменты, предшествующие a и a' соответственно. Одно из условий Феферма́на — *насыщенность*. Оно гарантирует, что если (i) рассматриваемые функции порождают отрезок ординалов $< \beta$ из отрезка $\leqslant \alpha$ и (ii) a, a' соответствуют α и b, b' соответствуют β, то по любому данному изоморфизму между $[a]$ и $[a']$ можно равномерно определить изоморфизм между $[b]$ и $[b']$. Второе, менее прозрачное, условие — это *относительная категоричность*, т. е. категоричность относительно ординалов, недостижимых относительно данной системы функций. Это чисто алгебраическое условие обладает двумя важными свойствами. (i) Оно сохраняется, когда добавляется производная функция данной системы, т. е. функция, перечисляющая недостижимые ординалы (даже для подходящей *трансфинитной* итерации этого процесса). (ii) Если $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — первые $n+1$ недостижимых ординалов, то упорядочение сегмента $[a_{n+1}]$ можно равномерно определить исходя из упорядочения сегмента $[a_1]$ с использованием $a_1, \ldots, a_n$. Свойство (i) позволяет применить иерархии Веблена, свойство (ii) обеспечивает существование рекурсивных упорядочений, на которых данные ординальные функции рекурсивны. Отметим, в частности, что основные свойства установлены в [94] без использования полной классической теории вполне-упорядочения; грубо говоря, рассматриваемые операции можно продолжить на бо́лее широкий класс упорядочений.

[12]) Я предложил использованную здесь характеристику *предикативного доказательства* в [35], а затем в [39]. Но моя конкретная техническая гипотеза о действительном пределе, высказанная в реферате книги [109] (в конце стр. 246), была ложной.

[13]) Точнее, совершенно справедливо, что после элиминации высших типов все рассматриваемые объекты могут быть *поименованы* или *перечислены в списке*. Но вопреки некоторым традиционным предположениям такое перечисление не является существенным для конструктивных рассуждений. См. в особенности понятие конструктивной функции конечного типа в [11].

[14]) Очень часто проверка интерпретации оказывается гораздо более легкой для одной из нескольких формально эквивалентных аксиоматик.

[15]) Результат Тейта был анонсирован в [61], но идея, примененная в этой работе, безусловно, неверна. Там предлагалось интерпретировать кванторы в формулах, в частности в термах простой теории типов как пробегающие конструктивные по Гёделю множества и проводить устранение сечений согласно порядку (в конструктивной иерархии) определенных таким образом множеств. Совершенно верно, что таким образом мы получим фигуру доказательства с атомарными формулами $T \in T'$ в качестве аксиом. Но нет никакой причины предполагать, что эти формулы являются теоремами анализа (или даже истинны в универсуме *всех* множеств конечных типов, так как редукция обеспечивает $T \in T'$ только для множеств, определяемых термами T и T' в совокупности конструктивных множеств). При буквальном понимании утверждение из [61] выглядело подозрительно в любом случае; ведь если устранимость сечения может быть доказана в предположении $V = L$, то она может быть доказана и без этого предположения, так как утверждение об устранимости сечения — чисто арифметическое. Следующая возможность не была еще исключена. Мы могли найти «естественную» процедуру редукции для формальных выводов и обнаружить, что она уменьшает ординал, который сопоставляется выводам, грубо говоря, следующим образом: берем максимум порядков в разветвленной аналитической иерархии всех множеств, определяемых (в этой иерархии) λ-термами, входящими в вывод. Из-за абсолютности (инвариантности)

Δ^1_2-определений такого рода вещь особенно перспективна для подсистемы Δ^1_2-CA классического анализа.

[16]) Эту ситуацию в литературе иногда формулируют так: гипотеза Такеути (замкнутость его системы относительно сечения) финитистски влечет непротиворечивость анализа. В этих терминах, т. е. в терминах доказательств непротиворечивости, рассуждение Тейта лишь доказывало бы непротиворечивость классического анализа в арифметике третьего порядка!

[17]) Вероятно, можно получить примерное представление о ситуации в теоретико-модельных терминах, интерпретируя логические операции в стиле [40, стр. 136—137] и заменяя «экстенсионально определенное» (т. е. инвариантное) на «устойчивое» (в смысле [76]). Это сильно отличается от наивного (но распространенного) представления, что индуктивные определения «создают» или «порождают» математические объекты вместо того, чтобы выбирать их из данных объектов.

[18]) Следует различать два понимания *осмысленности*: (i) для всех реализаций языка и (ii) лишь для моделей данных аксиом. Например, для этих двух случаев подходят две различные трактовки ι-термов: в (i) желательно, чтобы каждый ι-терм имел смысл, а в (ii) — только те $\iota_x Ax$, для которых $\exists!x Ax$ является следствием рассматриваемых аксиом. В случае ι-термов требование (i) ведет к рекурсивному множеству термов, а (ii) — только к рекурсивно перечислимому множеству. Я не знаю, типичен ли этот случай для общей ситуации.

[19]) Терминология из [58] несколько отличается от принятой в [43]; например, «сильно» употребляется вместо «абсолютно» или «A самоопределимо» вместо «A абсолютно инвариантно определимо на (A, ε)». Понятие A-р. п. множества было введено в [58] под названием «полуинвариантно неявно определимого множества» вслед за Мостовским [70]. Другие понятия имеются в [43]. Заметим, что в [43] A-р. п. множество *по определению* было областью значений A-рек. функции. Это определение неразумно в общем случае, например для $A = N^N$, так как р. п. множество функций принадлежит Σ^0_1, а не Σ^1_1.

[20]) Это обстоятельство, вероятно, имеет отношение к анализу нездорового *положения* с языками второго порядка, несмотря на то, что *смысл* формулы второго порядка формулируется в обычных теоретико-множественных терминах (используемых также и в определении смысла формул первого порядка). Известная причина этого положения состоит в том, что *теория* истинности второго порядка чувствительно зависит от существования больших кардиналов [46, стр. 157, абзац 2], в то время как истинность первого порядка сводится по теореме Левенгейма — Скулема к истинности в счетных областях. Теперь, если я прав, у нас есть дополнительные причины считать, что класс конечных формул второго порядка не является сносным приближением к «полному языку» второго порядка.

[21]) Хотя нужно добавить немного, все же *некоторый* анализ встречающихся концепций был необходим. Что еще помешало Эрбрану и Скулему объединить свои работы и получить теорему Гёделя о полноте? Эрбран не верил, что истинность осмысленна, а Скулем вообще не различал истинность и формальную выводимость.

[22]) Точнее, по данному *описанию* S в S' (точные условия см. в [92]) мы эффективно получаем определение δ некоторой реализации языка системы S, такой, что *если* $\forall n\,(S' \vdash Con\, S_n)$, то δ есть S'-модель системы S; δ *равномерно* для всех рассматриваемых S. Это имеет интересное прило-

жение, отмеченное Феферманом в частной беседе. Если мы возьмем, например, теорию множеств ZF за S' и за S, скажем, ZF плюс аксиома выбора AC и отрицание континуум-гипотезы CH, то конструкция Ори дает явные формулы $M(x)$ и $E(x, y)$ в языке системы ZF, которые определяют ZF-модель системы ZF ∪ (AC) ∪ {¬ CH} при условии, что ZF$\vdash Con(\mathrm{ZF}_n \cup (AC) \cup \cup \{\neg \mathrm{CH}\})$ истинно для каждого n. Если факт *известен* (совершенно независимо от того, как он доказан), явная конструкция ZF-модели для $M(x)$ в $E(x, y)$ — это не проблема. Открытым остается, например, вопрос о *точности* этой модели (скажем, относительно арифметических утверждений), в то время как ZF ∪ (AC) ∪ {¬CH} — консервативное расширение ZF даже для важного класса аналитических утверждений; ср. дополнение VI (b) (ii).

[23]) В списке *аксиом выбора* из § 4 была забыта очень удобная аксиома DC_{00} (или просто DC_0)

$$\forall x \exists y \boldsymbol{X}(x, y) \to \forall z \exists f \forall x\,(f0 = z \wedge \boldsymbol{X}[fx, f(x+1)]).$$

Мы имеем $\mathrm{DC}_{00} \longleftrightarrow \mathrm{AC}_{00}$.

Чтобы вывести DC_{00} из AC_{00}, которая дает функцию g, такую, что $\forall x \boldsymbol{X}(x, gx)$, положим $f0 = z$, $f(x+1) = g[f(x)]$.

Чтобы вывести AC_{00} из DC_{00}, применим последнюю к отношению $\boldsymbol{X}_1$, где $\boldsymbol{X}_1(x, y)$ определено формулой

$$\forall u \forall v \exists w\,(x = 2^u 3^v \to [y = 2^{u+1} 3^w \wedge \boldsymbol{X}(u+1, w)]).$$

Тогда $\forall x \exists y \boldsymbol{X}(x, y) \to \forall x \exists y \boldsymbol{X}_1(x, y)$. Применяя DC_{00} с $z = 3^{w_0}$, где $\boldsymbol{X}(0, w_0)$, мы получаем f, такую, что

$$\forall x \boldsymbol{X}_1[f(x), f(x+1)] \wedge f0 = 3^{w_0}$$

и

$$\forall x \exists v \exists w\,[fx = 2^x 3^v \wedge f(x+1) = 2^{x+1} 3^w \wedge \boldsymbol{X}(x+1, w)].$$

AC_{00} удовлетворяется, если взять в качестве gx показатель, с которым входит 3 в значение fx.

[24]) ω-реализация (нашего языка) имеет N в качестве области своих строчных переменных и, следовательно, некоторое подмножество множества $\mathfrak{P}(N)$ в качестве области своих заглавных переменных, называемых также переменными «для множеств». Таким образом, пересечения, объединения, разности ω-реализаций снова являются ω-реализациями. Можно заметить, что другой класс реализаций, хорошо известный в литературе, а именно класс β-моделей Мостовского, не замкнут относительно пересечений.

[25]) Это так называемые арифметически определимые множества. Эта терминология (если ее воспринимать буквально находится в конфликте с основным тезисом работы [93]. Вкратце, возражение против этой терминологии состоит в следующем: если теоретико-числовой квантор существования вообще принимается как корректно определенный, то корректно определен не только любой объект из A, но и весь этот класс, т. е. A_0 может быть перечислен посредством интуитивно-арифметического определения.

[26]) То есть заключение каждого из этих правил имеет вид $\exists X A(X)$, возможно с параметрами, и некоторое инвариантно определимое множество X_0 удовлетворяет $A(X_0)$. Разумеется, есть логические *следствия* этих правил, имеющие экзистенциальный вид (с более сложной формулой A), которые не обладают этим свойством, см. § 11b(ii)2.

[27]) Очевидно, что если бы философский анализ $\mathfrak{D}$ убедил нас, что AC_{01}, релятивизированная к $\mathfrak{D}$, ложна, то мы получили бы безболезненное

ожений, и значение его работы не
лучше всего описать этот интерес
25 в [44, стр. 139] я упомянул не-
я там сказал, а именно что суще-
т гиперстепень $<O'$, было верно.
се такие функции составляют мо-
ошибку, как только были объяв-
ниях, так как его результаты пока-
аксиоме пары. (iii) Пп. (i) и (ii)
его примечания. (iv) Когда «Обзор
ечати, я готовил [48], где бар-ре-
валась в проблемах 2 и 3, стр. 156.
роблема 2 наверняка будет иметь
но, проблема 3 — отрицательное),
ной степени имеет модель из так
функционалов трансфинитной сте-
$_\omega$ позволила бы нам обобщить мо-
степени с помощью обычной бар-
нию на $L_{\omega_1\omega}$, упомянутый в статье
. Он не только придал смысл (i),
меет положительное решение даже
е было поздно включать в [48], но

теории множеств был сформулиро-
рмул, а не для их универсальных
ость для *существенно* Σ^1_2-формул,
дует, что любая существенно Σ^1_2-
муле. Отметим, что у нас нет пол-
:А аксиомы выбора (или $V = L$)
вое сохраняет все существенно
все *существенно* Π^1_3-утверждения.

$\mathrm{F})^-$ будет тесно связана, скажем,
то Δ^1_2-множества составят «мини-
му, что, согласно [40], Δ^1_1-множе-
для Δ^1_1-CA! В действительности
одели, а минимальная β-модель
содержится в классе Δ^1_2-множеств.

чна той, которая заключена в хо-
оказательств непротиворечивости
пользующих ε_0-индукцию, ср. [44,
возражение было бы оправданно,
етико-множественного понятия ор-
едующее общее соображение, на-
ви с конфликтом между *величиной*
6(c) (iv). Базируясь на теоретико-
венно озабоченных *предположе-*
считать более объемные понятия
ке наверняка неприменимо к кон-
тие натурального числа очевидным

образом менее проблематично, чем, скажем, определение подмножества пары {0, 1} с использованием неконструктивных понятий!

[38]) Чтобы избежать логических отношений, «скрытых» в этом проекте, мы делаем зависимость явной с помощью функторов Ψ_1 и Ψ_2, таких, что

$$\mathscr{P} \vdash (\overline{A}^*[s_1, \Psi_1(s_1, s_2, t)] \wedge \overline{\overline{A}}^*[s_2, \Psi_2(s_1, s_2, t)]) \to A^*[\Phi(s_1, s_2), t]$$

с переменными s_1, s_2, t. Так как по предположению отношения A^*, $\overline{A}^*$, $\overline{\overline{A}}^*$ разрешимы, операции $\wedge$ и $\to$ — булевы операции, не представляющие проблемы.

Читатель, возможно, пожелает применить эту интерпретацию к примерам из теории (равномерно) непрерывных функций. Если $C(f)$ обозначает

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\forall x \forall x' [(|x - x'| < \delta \wedge 0 \leqslant x < x' \leqslant 1) \to |fx - fx'| < \varepsilon],$$

то мы имеем $C(f) \to \exists y \forall x (0 \leqslant x \leqslant 1 \to fx \leqslant y)$. Но y не может быть вычислен по f, т. е. исходя из правила вычисления f с любой точностью. Однако f *вместе* с модулем непрерывности $\delta(\varepsilon)$ позволяет провести вычисление. *Интерпретация* формулы $C(f)$ состоит в точности из этой дополнительной информации. Иными словами, непрерывная функция рассматривается как пара (f, δ) в теореме об ограниченности непрерывных функций на замкнутых промежутках.

[39]) «Тривиальным» в том смысле, что для естественных правил, нужных в этом переходе, *выводимость* — разрешимое отношение. Напомним, что правила Эрбрана или Генцена естественным образом распадаются на две части: те, которые используются для построения подходящих тавтологий, и те, которые позволяют проводить кванторные переходы и сокращение дизъюнкций, т. е. вывод $A \vee B$ из $A \vee A \vee B$. Очевидно, что по *данной* пропозициональной формуле P_1 и (возможно) кванторной формуле P_2 мы можем решить, можно ли вывести P_2 из P_1 посредством второго набора правил. Шаг от $\exists s \forall t A^*(s, t)$ к A аналогичен этому второму типу переходов.

[40]) Этот вопрос детально проанализирован в моем амстердамском докладе, упомянутом в примечании 1. Согласно этому анализу, гёделевское понятие, описанное в [11], имеет по существу ту же силу, что и предикативная иерархия из дополнения V(a). (Бар-рекурсия произвольного конечного типа наверняка удовлетворяется некоторым типом функционалов, определяемых использованием произвольных видов (интуиционистских подмножеств) натуральных чисел. Но тогда имеется гораздо более легкая редукция классического анализа, как в § 11 (a).)

[41]) Пусть A' — формула $\neg\forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \neg A_0(x, y)$ в символике начала этого дополнения, и пусть A'' есть

$$\neg\forall x_1 \neg\forall y_1 \ldots \neg\forall x_n \neg\forall y_n A_0(x, y).$$

Тогда основные соотношения между [11] и интерпретацией отсутствием контрпримера таковы: A_1' и A_0 *совпадают*; имеются функционалы Φ и Ψ из [11], такие, что $A_1''[s, \Psi(s, t)] \to A_1'[\Phi(s), t]$ (так как $A'' \to A'$ имеет место интуиционистски). Так как в классической арифметике A, A', A'' эквивалентны, то мы получаем не только $Prov(p, \ulcorner A \urcorner) \to A_0(\xi_{\forall^*(p)}, t)$, но даже $Prov(p, \ulcorner A \urcorner) \to A_1''(\xi_{\forall^*(p)}, t)$.

[42]) В формулировке формальной системы T из [11] имеется неоднозначность, подчеркнутая в [88]: имеем ли мы $s = t \vee \neg s = t$ для s и t,

значения которых — *не* натуральные числа? Такое расширение очевидным образом консервативно относительно формул из фрагмента ($\neg$, $\wedge$, $\forall$), так как $\neg\neg(s = t \vee \neg s = t)$ является теоремой. Но [88] показывает также, что расширение консервативно относительно произвольных формул в *интуиционистской* арифметике, даже если к T добавлены кванторные правила.

[43]) Фридман [100] следующим образом представляет свое доказательство (ii) как комбинацию (теоретико-модельного) определения δ и применения второй теоремы Гёделя. Он находит утверждение S, такое, что $(\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}) \cup \{S\}$ имеет модель, например главную модель, и показывает, что δ перечисляет $(\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}) \cup \{S\}$-модель системы $(\Sigma_1^1\text{-AC}_{01}) \cup \{S\}$. По второй теореме Гёделя $\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}$ не может быть выводима из $\Sigma_1^1\text{-AC}_{01}$, так как иначе $(\Sigma_1^1\text{-AC}_{01}) \cup \{S\}$ доказывала бы свою непротиворечивость. Поэтому в терминах моделей имеется *некоторая* модель M системы $\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}$, такая, что структура M', определяемая с помощью δ в M, не является моделью для $\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}$. Но для получения «подлинно» теоретико-модельного результата в смысле [51] хотелось бы заменить M' чем-то более явным. Допустим теперь, что M_0 — *любая* модель $(\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}) \cup \{S\}$, например главная модель, и определим последовательность M_1, M_2, ... следующим образом. Если M_n — модель для $(\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}) \cup \{S\}$, то пусть M_{n+1} — структура, которая определяется, когда переменные в δ пробегают M_n; построение последовательности обрывается, если M_n не является моделью для $\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}$.

Гипотеза. Последовательность M_1, M_2, ... обрывается для *всех* M_0. (Возможно, что даже M_1 не является моделью для $\Sigma_1^1\text{-DC}_{11}$!)

Можно заметить, что приведенная выше схема, возможно, подходит для теоретико-модельного доказательства самой второй теоремы Гёделя. Действительно, в силу дополнения II(b) для любой формулы (аксиомы) A мы эффективно находим δ_A, которая определяет предикат истинности для некоторой модели A в арифметике Z первого порядка. Допустим теперь, что Z выводима из A, т. е. A «содержит» арифметику, и допустим $A \vdash Con\,A$. Тогда для любой модели M аксиомы A формула δ_A определяла бы модель A в M.

Гипотеза. Для *любой* M_0 мы можем показать с помощью чисто теоретико-модельной конструкции, что определенная выше последовательность M_1, M_2, ... обрывается.

Добавление в корректуре. Первая из этих гипотез устанавливается небольшой модификацией принадлежащего Фридману доказательства следующего результата. Пусть P — *арифметическое отношение* (между теоретико-числовыми функциями), удовлетворяющее $\forall f \forall g \forall h ([P(f, g) \wedge P(f, h)] \to g \equiv h)$. *Тогда не может существовать последовательности* f_n, *такой, чтобы* для каждого $n = 1, 2, \ldots$, f_n *перечисляла* (посредством арифметической спаривающей функции) *некоторую* ω-*модель системы* $\Pi_1^0\text{-CA}$ *и имело место* $P(f_n, f_{n+1})$. Очевидно, что тем самым результат верен для произвольного расширения системы $\Pi_1^0\text{-CA}$. Для случая *общих моделей* я могу доказать вторую гипотезу для теорий множеств A, используя следующие специальные свойства традиционного определения δ_A: (i) δ_A выбирает самый левый путь в некотором примитивно рекурсивном графе с конечным ветвлением; (ii) натуральные числа из M_{n+1} *нестандартны*

относительно чисел из M_n; (iii) имеется конкретная формула (с номером) n_A, которая при всех n имеет различные истинностные значения в M_n и M_{n+1}. Если уровень графа, где встретилась n_A, имеет ширину m_A, то наша последовательность $M_0, \ldots, M_m$ обрывается для некоторого $m \leqslant m_A$, так как в силу (ii) «самый левый» путь в M_{n+1} правее «самого левого» пути в M_n.

Добавление к русскому переводу. Доказательство предпоследней гипотезы, данное Фридманом, опубликовано в статье Fridman H. Uniformly defined descending sequences of degrees. — J. Symbol. Log., v. 41, 1976, p. 363—367. Мой набросок доказательства последней гипотезы разработан в статьях Симпсона (G. Simpson) и Сморинского (C. Smorynski) в кн. Handbook of mathematical logic, Amsterdam, 1978.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аккерман (Ackermann W.). Die Wiederspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre. — Math Ann., Bd. **114**, 1937, p. 305—315.

[2] Акс (Ax J.). On ternary definite rational functions. — Proc. London Math. Soc., to appear.

[3] Барвайз (Barwise J.). Thesis. — Sanford University, California, 1967.

[4] — Admissible sets and structures. — Berlin, 1975.

[5] — Applications of Strict Π^1_1-predicates to infinitary logic. — J. Symbol. Log., v. **64**, 1969, p. 409—422.

[6] Бахман (Bachmann H.). Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. — Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gessellschaft, Hf.95, 1950, S. 115—147.

[7] Воот (Vaught R. L.) Sentences true in all constructive models. — J. Symbol. Log., v. **24**, 1959, p. 1—15.

[8] — The completeness theorem of logic with the added quantifier «there are uncountably many». — Fundam. Math., v. **54**, 1964, p. 303—304.

[9] Ганди (Gandy R.). Relations between analysis and set theory. — J. Symbol. Log., v. **32**, 1967, p. 434.

[10] Гёдель (Gödel K.). Remarks before the Princeton Conference on problems in Mathematics. — In: The undecidable, ed. M. Davis, New York: Raven Press, 1955, p. 84—88.

[11] — Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. — Dialectica, v. **12**, 1958, p. 280—287. [Русский перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн. [23], с. 299—305.]

[12] Генцен (Gentzen G.). Untersuchungen über das logische Schliessen. — Math. Zeitschr., Bd. **39**, 1934, S. 176—210, 405—431. [Русский перевод: Генцен Г. Исследования логических выводов. — В кн. [23], с. 9—74.]

[13] — Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. — Math. Annalen, Bd. **112**, 1936, S. 493—565. [Русский перевод: Генцен Г. Непротиворечивость чистой теории чисел. — В кн. [23], с. 77—153.]

[14] — Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. — Forschungen zur Logik und zur Ggundlegung der exakten Wissenschaften, Hf.**4**, 1938, S. 19—44. [Русский перевод: Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел. — В кн. [23], с. 154—190.]

[15] Гербер (Gerber H.). On an extension of Schütte's Klammersymbols. — Math. Ann., Bd. **174**, 1967, S. 202—216.

[16] Гильберт (Hilbert D.). Neubegründung der Mathematik. — Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, v. 1, 1922, S. 157—177.

[17] — Grundlagen der Geometrie. — Leipzig, Berlin: Springer, 1930.

[18] Гильберт, Бернайс (Hilbert D., Bernays P.). Grundlagen der Mathematik. Vol. 2. — Berlin: Springer, 1939. [Готовится русский перевод.]

[19] Говард (Howard W. A.). Bar induction, bar recursion, and the Σ^1_1-axiom of choice. — J. Symbol. Log., v. **28**, 1963, p. 303.

[20] — Functional interpretation of bar induction by bar recursion. — Composition Math., v. **20**, 1968, p. 107—124.

[21] — A system of abstract constructive ordinals. — J. Symbol. Log., v. 37, 1972, p. 353—374.

[22] Говард, Крайзель (Howard W. A., Kreisel G.). Transfinite induction and bar induction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis. — J. Symbol. Log., v. **31**, 1966, p. 325—358.

[23] Идельсон А. В., Минц Г. Е. (редакторы). Математическая теория логического вывода. — М.: Наука, 1967.

[24] Карп (Karp C. R.) Languages with expressions of infinite length. — Amsterdam: North-Holland, 1964.

[25] — Primitive recursive set functions: a formulation with applications to infinitary fromal systems. — J. Symbol. Log. v. **31**, 1966, p. 294.

[26] Кейслер (Keisler H. J.). First order properties of pairs of cardinals.— Bull. Amer. Math. Soc., v. **72**, 1966, p. 141—144.

[27] Клини (Kleene S. C.). Introduction to metamathematics. — Princeton. N. J.: Van Nostrand, 1952. [Русский перевод: Клини С. К. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.]

[28] Клини, Весли (Kleene S. C., Vesley R. E.). Foundations of intuitionistic mathematics. — Amsterdam: North-Holland, 1965, реферат: J. Symbol. Log., v. **31**, 1966, p. 258—261. [Русский перевод: Клини С. К., Весли Р. Основания интуиционистской математики.— М: Наука, 1978.]

[29] Крайзель (Kreisel G.). On the interpretation of nonfinitist proofs. — J. Symbol. Log., v. **16**, 1951, p. 241—267.

[30] — Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. II. — In: Proceedings of the Eleventh International Congress of Philosophy (1953), New York; Pergamon Press, 1953, p. 39—49.

[31] — Models, translations and interpretations. — In: Mathematical interpretations of formal systems, Amsterdam: North-Holland, 1955, p. 25—50.

[32] — Relative consistency and translatability. — J. Symbol. Log., v. **23**, 1958, p. 108—109.

[33] — Relative consistency proofs. — J. Symbol. Log., v. **23**, 1958, p. 109—110.

[34] — Mathematical significance of consistency proofs. — J. Symbol. Log., v. **23**, 1958, p. 155—182.

[35] — Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof. — In: International Congress of mathematicians, Edinburgh, 1958, p. 289—299.

[36] — Interpretation of classical analysis by means of constructive functionals of finite type. — In: Constructivity in mathematics, ed. by A. Heyting, Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 101—128.

[37] — Analysis of the Cantor — Bendixson theorem by means of the analytic hierarchy. — Bull. Acad. Polon. Sci., v. **7**, 1959, p. 621—626.

[38] — La prédicativité. — Bull. Soc. Math. France, v. **88**, 1960, p. 371—391.

[39] — The status of the first ε-number in first-order arithmetic. — J. Symbol. Log., v. **25**, 1960, p. 390.
[40] — Set theoretic problems suggested by the notion of potential totality. — In: Infinitistic methods, Warsaw, 1961, p. 103—140.
[41] — The axiom of choice and the class of hyperarithmetic functions. — Indagationes Mathem., v. **65**, 1962, p. 307—319.
[42] — On weak completeness of intuitionistic preducate logic. — J. Symbol. Log., v. **27**, 1962, p. 139—158.
[43] — Model-theoretic invariants; applications ot recursive and hyperarithmetic operations. — In: The theory of models, Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 190—205.
[44] — Mathematical logic. — In: Lectures on modern mathematics, ed. Saaty, v. III, New York: Wiley, 1965, p. 95—195.
[45] Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics. — In: Bertrand Russell: Philosopher of the century, London: Allen and Unwin, 1967, p. 201—272.
[46] — Informal rigour and completeness proofs. — In: Problems in the philosophy of mathematics, Amsterdam: North-Holland, 1967, p. 138—171.
[47] — Relative recursiveness in metarecursion theory and relative recursive enumerability in metarecursion theory. — J. Symbol. Log., v. **32**, 1967, p. 442—443.
[48] — Functions, ordinals, species. — In: Logic, Methodology and philosophy of science III, Amsterdam, 1968, p. 145—159.
[49] Крайзель, Ван Хао (Kreisel G., Wang Hao). Some applications of formalized consistency proofs. — Fundam. Math., v. **42**, 1955, p. 101—110; v. **45**, 1958, p. 334—335.
[50] Крайзель, Кривин (Kreisel G., Krivine J. L.). Elements of mathematical logic; theory of models. — Amsterdam: North-Holland, 1967.
[51] Крайзель, Леви (Kreisel G., Levy A.). Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiom systems. — Zeitschr. für math. Log. und Grundl. Math., Bd. **14**, 1968, S. 97—142.
[52] Крайзель, Феферман (Kreisel G., Feferman S.). Persistent and invariant formulas relative to theories of higher order.— Bull, Amer. Math. Soc., v. **72**, 1966, p. 480—485.
[53] Крайзель, Шёнфилд, Ван Хао (Kreisel G., Shoenfield J. R. Wang Hao). Arithmetic concepts and recursive well orderings. — Arch. für math. Log. Grundlagenforsch., v. **5**, 1959, S. 42—64.
[54] Крейг (Craig W.). Satisfaction for nth order language defined in nth order. — J. Symbol. Log., v. **30**, 1965, p. 13—21; реферат: Math. Reviews, v. **33**, 1967, p. 659—660.
[55] Крипке (Kripke S.). Transfinite recursions on admissible ordinals. I, II. — J. Symbol. Log., v. **29**, 1964, p. 161—162.
[56] Крипке, Пур-Эль (Kripke S., Pour-El M. B.). Deduction-preserving recursive isomorphisms between theories. — Bull. Amer. Math. Soc., v. **73**, 1967, p. 145—148; Fundamenta Math., v. **61**, 1967, p. 141—163.
[57] Кроссли (Crossley J. N.). Constructive order types. I. — Formal systems and recursive functions, Amsterdam, 1964, p. 189—264; реферат: Zentralblatt für Math.
[58] Кунен (Kunen K.). Implicit definability and infinitary languages. — J. Symbol. Log., v. **33**, 1968, p. 446—451.
[59] Лакомб (Lacombe D.). Deux généralisations de la notion de récursivité. — Comptes Rend. hebd. séanc. Acad. Sci., v. **258**, 1964, p. 3141—3143, 3410—3413.

[60] Лёб (Löb M. H.). Solution of a problem of Leon Henkin. — J. Symbol. Log., v. **20**, 1955, p. 115—118.
[61] — Cut elimination in type theory. — J. Symbol. Log., v. **29**, 1964, p. 220.
[62] Леви (Levy A.). Definability in axiomatic set theory. I. — In: Proceedings of 1964 Int. Congress for Logic, Philosophy and Methodology of Science, Amsterdam, 1964.
[63] — A hierarchy of formulas in set theory. — Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1965, no. 57.
[64] Леман (Lehman R. S.). On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. — Acta arithmetica, v. **11**, 1966, p. 397—410.
[65] Лоренц (Lorenz K.). Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen. — Arch. für math. Logik Grundlagenforsch., Bd. **11**, 1968, S. 32—55, 73—100.
[66] Лоренцен (Lorenzen P.). Einführung in die operative Logik und Mathematik. — Berlin: Springer, 1955.
[67] Малитц (Malitz J. I.). Thesis. — University of California, Berkeley, 1966.
[68] Монтегю (Montague R. M.). Interpretability in terms of models. — Indagationes Math., v. **27**, 1965, p. 467—476.
[69] Мостовский (Mostowski A.). On a generalization of quantifiers. — Fundam. Math., v. **44**, 1957, p. 12—36.
[70] — Representability of sets in formal systems. — In: Recursive function theory, Providence, R. I., 1962, p. 29—48.
[71] Парих (Parikh R. J.). Some generalizations of the notion of well ordering. — Zeitschr für math. Log. Grundl. Math., v. **12**, 1966, S. 333—340; реферат: Mathem. Rev., v. **34**, 1967, p. 758.
[72] Парсонс (Parsons C.). Reduction of inductions to quantifier-free induction. — Notic. Amer. Math. Soc., v. **13**, 1966, p. 740.
[73] Правиц (Prawitz D.). Hauptsatz for higher order logic. — J. Symbol. Log., v. **33**, 1968, p. 452—457.
[74] Резникоф (Reznikoff I.). Thesis. — University of Paris.
[75] — Tout ensemble de formules de la logique classique est équivalent à un ensemble indépendent. — Comptes Rend. hebd. séances acad. sci., v. **260**, 1965, p. 2385—2388.
[76] Робинсон (Robinson A.). Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra. — Amsterdam: North-Holland, 1963. [Русский перевод: Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. — М.: Наука, 1967.].
[77] Роуботтом (Rowbottom F.). Thesis. — University of Wisconsin, Madison, 1964.
[78] Скотт (Scott D. S.). Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers. — In: Theory of models. Amsterdam: North-Holland., 1965, p. 329—341.
[79] Соловэй (Solovay R.). A non-constructible Δ^1_3-set of integers. — Trans. Amer. Math. Soc., v. **127**, 1967, p. 50—75.
[80] Спектор (Spector C.). Provably recursive functionals of analysis. — In: Recursive function theory, Providence, R. I., 1962, p. 1—27.
[81] Такахаси (Takahashi M.). A proof of cut-elimination theorem in simple type theory. — J. Math. Soc. Japan, v. **19**, 1967, p. 399—410.
[82] Такеути (Takeuti G.). On a generalized logical calculus. — Japan J. of Math., v. **23**, 1953, p. 39—96.
[83] — Consistency proofs of subsystems of classical analysis. — Annals of Math., v. **86**, 1967, p. 299—348.

[84] Тарский, Мостовский, Робинсон (Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M.). Undecidable theories. — Amsterdam: North-Holland, 1953.
[85] Тейт (Tait W. W.) Functionals defined by transfinite recursion. — J. Symbol. Log., v. **30**, 1965, p. 155—174.
[86] — The substitution method. — J. Symbol. Log., v. **30**, 1965, p. 175—192; реферат: Math. Rev., v. **34**, 1967, p. 201.
[87] — Cut elimination in infinite propositional logic. — J. Symbol. Log., v. **31**, 1966, p. 151—152.
[88] — Intensional interpretations of functionals of finite type. I. — J. Symbol. Log., v. **32**, 1967, p. 198—212.
[89] — A non-constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic. — Bull. Amer. Math. Soc., 1966, v. **72**, p. 980—983.
[90] Томасон (Thomason R.). Forcing method and the upper semilattice of hyperdegrees. — Trans. Amer. Math. Soc., v. **129**, 1967, p. 38—57.
[91] Уайтхед, Рассел (Whitehead A. N., Russell B.). Principia mathematica, v. 1. — Cambridge, Eng.: Cambridge University Press, 1910, 1912.
[92] Феферман (Feferman S.). Arithmetization of metamathematics in a general setting. — Fundamenta Math., v. **49**, 1960, p. 36—92.
[93] — Systems of predicative analysis. — J. Symbol. Log., v. **29**, 1964, p. 1—30.
[94] — Systems of predicative analysis. II. Representation of ordinals. — J. Symbol. Log., v. **33**, 1968, p. 193—220.
[95] — An ω-model for the hyperarithmetic comprehension axiom in which the Σ^1_1-axiom of choice fails. — In: International congress of mathematicians, Moscow, August 16—26, 1966.
[96] — Autonomous transfinite progressions and the extent of predicative mathematics. — In: Logic, Mathodology and Philosophy of Science III, Amsterdam, 1968, p. 121—130.
[97] Феферман, Крайзель, Ори (Feferman S., Kreisel G., Orey S.). Faithful interpretations. — Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforsch., Bd. **6**, 1962, S. 52—63.
[98] Фрессе (Fraissé R.). Une notion de récursivité relative. — In: Infinitistic Methods, Warsaw, 1961, p. 323—328.
[99] Фридман (Friedman H.). On subsystems of analysis. — Notic. Amer. Math. Soc., v. **14**, 1967, p. 144, 67T-54.
[100] — Thesis. — Massachusetts Institute of Technology, 1967.
[101] Ханф (Hanf W.). Incompactness in languages with infinitely long expressions. — Fundam. Math., v. **53**, 1964, p. 309—324.
[102] Хенкин (Henkin L.). Fragments of the propositional calculus. — J. Symbol. Log., v. **14**, 1949, p. 42—48.
[103] Хорн (Horn A.). The separation theorem of intuitionistic propositional calculus. — J. Symbol. Log., v. **27**, 1963, p. 391—399; реферат: Zenralblatt für Math. v. **117**, 1965, S. 253.
[104] Шёнфилд (Shoenfield J. R.). A relative consistency proof. — J. Symbol. Log., v. **19**, 1954, p. 21—28.
[105] — On a restricted ω-rule. — Bull. Acad. Sci. Polon, v. **7**, 1959, p. 405—407.
[106] — The problem of predicativity. — In: Essays on the foundations of mathematics, Amsterdam: North-Holland, 1962, p. 132—139.
[107] Шепердсон (Shepherdson J. C.). A non-standard model for a free variable fragment of number theory. — Bull. Acad. Polon. Sci., v. **12**, 1964, p. 79—86.

[108] — Non-standard models for fragments of number theory. — In: The theory of models, Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 352—358.
[109] Шютте (Shütte K.). Beweistheorie. — Berlin: Springer, 1960; реферат: J. Symbol. Log., v. **25**, 1960, p. 243—249.
[110] — Properties of simple type theory. — J. Symbol. Log., v. **25**, 1960, p. 305—326.
[111] — Predicative well orderings. — In: Formal systems and recursive functions, Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 279—302.
[112] — Recent results in proof theory. — В кн.: Международный конгресс математиков, Москва, 1966, Тезисы докладов по приглашению, стр. 19.
[113] — Proof Theory. — Berlin: Springer, 1977.

ОБЗОР ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ II*)

РЕЗЮМЕ

Эта статья объясняет недавние работы по теории доказательств с новой точки зрения. Доказательства и их представления в виде формальных выводов рассматриваются как основные объекты изучения, а не просто как инструменты для анализа отношения следования. Хотя статья носит в основном педагогический характер, она содержит и материал, не разработанный в литературе. Сюда относятся, в частности, условия адекватности на критерии равенства доказательств (в § 1(c)) и переформулировка второй теоремы Гёделя с помощью понятия канонического представления (в § 1(d)); использование теорем о нормализации (вместо теорем о нормальной форме) для прямого доказательства замкнутости теории видов относительно правила Чёрча [в § 2(a)(ii)] и бесполезность бар-рекурсивных функционалов для (функциональной) интерпретации систем, содержащих тезис Чёрча [в § 2(b)(iii)]; использование ординальных структур в бескванторных формулировках трансфинитной индукции (в § 3); несущественность аксиомы выбора для явной реализуемости экзистенциальных теорем как для классических, так и для гейтинговских логических правил (в § 4(c)) и некоторые новые применения гейтинговских правил к анализу индефинитной кумулятивной иерархии множеств (в § 4(d)); семантика для исчислений равенств, подходящая в случае, когда термы интерпретируются как правила вычисления [в приложении I(a)(iii)], и сверх всего анализ формалистской семантики и ее отношения к интерпретациям реализуемости (в приложении I(c)). Менее техническое изложение этой точки зрения появилось в [27].

*) Kreisel G. A. survey of proof theory II. — Proceedings of the second scandinavian logic symposium (J. E. Fenstad, Ed.), Amsterdam; North-Holland, 1971, p. 109—170.

ВВЕДЕНИЕ

Основные результаты, изложенные в [22], которая будет цитироваться как ОТД, относятся к *теории доказательств как инструменту для изучения логического следования*, в частности логического следования из (подмножеств) обычных аксиом для анализа или теории множеств. Методы теории доказательств нужны для установления независимости ω-следствий, вроде различных принципов индукции, так как, по крайней мере сейчас, у нас нет *удобных в обращении* моделей, нестандартных относительно натуральных чисел. Так как следование — это отношение между формулами и множествами формул, в то время как теория доказательств занимается выводами, основная масса теоретико-доказательственного аппарата «затеряна» в формулировках теорем. Таким образом, отношение

важность результатов/затраченные усилия

неудовлетворительно. В настоящем дополнении к ОТД я попытаюсь улучшить это отношение, формулируя результаты, относящиеся прямо к выводам, а не только к отношению следования.

В ОТД, и особенно в [26], я подчеркивал другой неудовлетворительный аспект современной теории доказательств, который также связан с, так сказать, затемненной ролью выводов, а именно отсутствие четкого объяснения *выбора* (изучаемых или используемых) формальных правил. Там я смотрел на эту проблему с точки зрения программы Гильберта или, более общим образом, анализа различных *видов* интуитивного доказательства, короче, с эпистемологической точки зрения. Здесь я хочу подчеркивать формальные результаты и проблемы, связанные с *отношениями **между** доказательствами*, например *отношение равенства между доказательствами, описываемыми формальными выводами в данной системе* (и родственные вопросы в § 1)*). Следовало ожидать (и, по-видимому, так и оказалось), что это исследование пойдет «наперерез» эпистемологических различий: формальная теория некоторых из этих отношений будет равномерно применима к доказательствам, которые в эпистемологическом отношении принадлежат совершенно разным видам. Это вполне соответ-

*) Как указал (в разговоре) Р. Стетмен, рассмотрение *равенства доказательств* испорчено ошибочным переходом от (i) операций, сохраняющих равенство *между* доказательствами [§ 1(c)(i)], к (ii) операциям, сохраняющим равенство *самих* доказательств (то есть таким, что аргумент и результат операции являются выводами, выражающими одно и то же доказательство [§ 1(a)(βi)]).

ствует впечатлению математиков, которые, несомненно, интересуются понятием равенства доказательств, что (эпистемо)логические различия между различными видами доказательств не приносят пользы в математической практике.

Упомянутые формальные результаты относятся преимущественно к *процедурам нормализации для натуральных выводов*, которые были впервые систематически разработаны Правицем [43], а впоследствии и Мартин-Лёфом [36]. Весь этот кусок теории доказательств не был включен в ОТД просто потому, что я не осознал тогда его значения. Здесь следует заметить, что эту часть теории доказательств иногда связывают с идеями Генцена о том, что *понимание логических операций задают правила их использования*. По этому поводу я сделал оговорки в ОТД, § 5. У меня все еще есть оговорки, которые будут разъяснены в приложении с помощью эвристически полезного различия между правилами *вычисления* и правилами *вывода*. Но *если* справедливы некоторые гипотезы из § 1, формальные отношения, рассмотренные Правицем, имеют значение независимо от (возможно, проблематичных) идей, приведших к ним.

В § 2 и 3 формулируются и обобщаются некоторые простые соображения, скрытые в технических дополнениях к ОТД и в весьма описательном обсуждении ординальных структур в § 6 (от (c) до конца § 6).

В § 4 я немного разрабатываю сделанное выше замечание о том, что (обычные) логические различия не очень используются, рассматривая принадлежащее Гейтингу объяснение смысла его формальных законов и логических операций. Все это было *задумано* для конструктивной математики, чтобы интерпретировать ее в терминах конструктивных доказательств и функций. Но то, что утверждается в действительности, использует в очень малой степени глубокие сведения о конструктивности. Не стоит и говорить, что этот факт не вызывает сомнения в целесообразности подробного анализа. Напротив, я упоминаю этот факт, чтобы подчеркнуть необходимость нахождения более сильных требований к такому анализу.

Подразумевается, что читатель этой статьи изучит статью Правица [48]*), где описаны основные идеи нормализации. (Как уже упомянуто, ОТД II был написан, кроме всего прочего, потому, что в ОТД я пренебрег нормализацией.) Здесь я, в стиле моих предыдущих изложений, окружаю эти главные результаты комментариями по поводу их значения, некоторыми более или менее очевидными следствиями и открытыми проблемами. Опыт подсказывает, что, по крайней мере на нынешней стадии развития теории доказательств, имеется нужда в такого рода информации, чтобы быть уверенными в том, что мы уже имеем дело с «главными» результатами. В действительности мой текст пересекается с работой Правица [48] и содержит *некоторые* указания на основные идеи. Эти указания даны не потому, что я считаю необходимым (или возможным для себя) улучшить его изложение основных принципов, а потому, что эти две статьи были написаны в один и тот же период, так что я не мог ссылаться на детали из [48].

*) Или [39]. — *Прим. ред.*

§ 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОТИВ СЛЕДОВАНИЯ

Общая природа нашей проблемы совершенно ясна. Рассмотрим *формальные правила*, которые должны формализовать некоторые *доказательства*. Иными словами, мы имеем синтаксические объекты, выводы d, которые представляют или описывают мыслительные акты $\bar{d}$, доказательства (обладающие убедительностью). Ср. [28, стр. 196], где имеется элементарное обсуждение соотношения между d и $\bar{d}$ или «отображения» $d \to \bar{d}$, которое является частным случаем общего соотношения между словами и мыслями, которые они выражают. Так как мы имеем дело с «малым» классом слов, то можем надеяться на более точные результаты, чем те, которые известны для более общего (и более знакомого!) соотношения. Для формальных правил, которые были задуманы с целью описывать рассуждения о доказательствах, например для гейтинговских систем, мы должны ожидать более подробных результатов, чем для формальных правил, в частности классических, подразумеваемая интерпретация которых формулируется в терминах истинности, а не доказательств; ср. § 2(a)(i).

Если дано свойство P доказательств или отношение R между ними, то наша задача — найти отношения P_F, R_F, такие, что для всех d из нашей формальной системы

$$P_F(d) \text{ тогда и только тогда, когда } P(\bar{d}),$$

и

$$R_F(d, d') \text{ тогда и только тогда, когда } R(\bar{d}, \bar{d}').$$

Для удобства изложения мы обратим эту процедуру и опишем сначала некоторые формальные отношения P_F, R_F, которые затем используем для того, чтобы сформулировать факты об объектах, представляющих основной интерес, а именно о свойствах доказательств и отношениях между ними.

В частности, вот самое поразительное следствие только что описанного взгляда на теорию доказательств. *Различные стили формализации, о которых раньше судили только с точки зрения эстетических критериев изящества или удобства, приобретают независимое значение*, ср. конец (a) и (c) ниже.

(a) *Нормальные выводы и конверсии.* Начиная с исходной работы Генцена, всегда подчеркивалось значение особых «нормальных» выводов с различным анализом того, что существенно в этих выводах (ср. ОТД, § 5, третий абзац примера 2). Здесь особая роль этих нормальных выводов будет заключаться в том, что они служат *каноническими представлениями* всех доказательств, представленных в рассматриваемой системе, подобно тому, как цифры (0 со штрихами) являются каноническими обозначениями для натуральных чисел.

Тогда минимальное требование заключается в том, чтобы *любое доказательство можно было нормализовать*, т. е. преобразовать в единственную нормальную форму путем серии шагов, так называемых «конверсий», каждая из которых сохраняет доказательство, описываемое данным выводом. У этого требования есть формальная и неформальная части:

(α) *Формальная* проблема установления того, что конверсии обрываются на единственной нормальной форме (не зависящей от порядка, в котором они применялись).

(βi) *Неформальная* проверка (путем непосредственного рассмотрения) того, что шаги конверсии сохраняют равенство.

(βii) *Неформальная* проблема установления того, что различные, т. е. неконгруэнтные, формальные выводы представляют различные доказательства (чтобы иметь однозначные канонические представления).

Примеры замечательного прогресса в связи с формальной проблемой можно видеть в работах Правица [48] и Мартин-Лёфа [36]. Рассматриваемые конкретные процедуры конверсии, очевидно, удовлетворяют требованию (βi), так как каждый шаг конверсии только сокращает фигуру, состоящую из введения логического символа, за которым непосредственно следует его удаление. Такое сокращение очевидным образом не меняет доказательства, описываемого этими двумя формальными выводами (до и после сокращения).

Обсуждение. Мы можем теперь описать по-новому значение отмеченного в ОТД (§ 6, пример 2) различия между полнотой нормальных выводов (в том смысле, что для каждого вывода существует нормальный вывод с той же последней формулой; мы будем это называть теоремой о нормальной форме) и нормализацией согласно точно предписанным детерминистским или недетерминистским процедурам. *Теорема о нормальной форме не затрагивает сформулированное выше неформальное требование* (βi). *Теорема о нормализации является подходящим инструментом для изучения* (β) при условии, конечно, что мы уделяем (i) надлежащее внимание (как в замечаниях о конкретных процедурах Правица и Мартин-Лёфа).

Как подчеркивается в ОТД, дополнение II(b), это различие *не* следует вопреки распространенному заблуждению анализировать в терминах конструктивности: теоретико-модельные доказательства теорем о нормальной форме *могут* быть сделаны конструктивными. ОТД рассматривает логику первого порядка. В случае логики высшего порядка доказательство теоремы о нормальной форме, данное Правицем в [44], сделано конструктивным в [25, Technical Note II], если понимать «конструктивный» как «формализуемый в теории видов». (Хорошо известно, ср. ОТД, § 12, что такое понимание «конструктивности» отлично от принятого в большей части существующей теории доказательств.) Однако, вообще говоря, естественное доказательство теоремы о нормализации сразу оказалось конструктивным (в описанном смысле)[1]).

Подчеркнутая в начале этого параграфа точка зрения на значение различных стилей формализации, разумеется, требует от нас пересмотра обычных критериев «эквивалентности». Формализации, которые мы считаем существенно различными с нынешней точки зрения, могут *иметь одно и то же множество теорем*, и этот факт обычно доказывается совершенно элементарными методами. Следовательно, они эквивалентны в том, что касается тех классов теорем, которые связаны с так называемой теоретико-доказательственной силой. (Эта мера, соответствующая программе Гильберта, совершенно не подходит здесь.) В качестве следствия эта точка зрения открывает новые области формальной работы. Рассмотрим конкретно исчисление секвенций и систему натурального вывода. Непосредственное рассмотрение показывает, что для многих процедур устранения сечения для исчислений секвенций не очевидно неформальное требование (βi), а также что процедура нормализации для систем натурального вывода не соответствует какой-либо особенно естественной процедуре устранения сечения. Следовательно, мы должны будем рассматривать обычные формулировки исчисления секвенций, варьировать *порядок*, в котором рассматриваются различные сечения, и смотреть, не ведут ли различия в порядке к неконгруэнтным выводам без сечения (или даже для некоторых систем к тому, что процедура вообще не заканчивается). В этом случае не будет выполнено формальное тре-

бование (α) (в противоположность случаю натурального вывода, рассмотренному Правицем и Мартин-Лёфом). Заметим, что (α) следует из (β), так как в силу (βi) предполагается, что все конверсии сохраняют равенство доказательств, а в силу (βii) они *должны* заканчиваться на конгруэнтных нормальных формах; однако само по себе (α) не обеспечивает (β). Дальнейшие подробности по этому поводу см. на стр. 91 монографии Правица [43].

Предлагаемый здесь вид работы — это тот сорт Kleinarbeit, который обычно нужен для поддержки настоящей гипотезы (в данном случае гипотезы об *адекватности* теоремы о нормализации в проблеме критериев равенства доказательств), а не просто математическая причуда. Она особенно нужна, так как мы вряд ли можем надеяться, что существующие формализации, такие, как в [43], годятся *без всяких изменений* для новых приложений, например, в (b) и (c) ниже. Кроме всего прочего, эти системы были развиты по другим причинам, логическим или эстетическим.

Замечание. Основной технический инструмент, использованный Правицем и Мартин-Лёфом для нормализации выводов в теории видов, был введен Жираром [10]. Независимо Жирар использовал свои идеи для установления окончания некоторой процедуры устранения сечения, получив новое доказательство «фундаментальной гипотезы» Такеути для анализа. У меня не было удобного случая проверить, сохраняет ли процедура Жирара равенство доказательств.

(b) *Нормальные выводы экзистенциальных формул.* Очевидно, что наряду с отношениями на доказательствах разумно рассматривать отношения между *доказательствами, утверждениями* и *определениями.* В соответствии с этим мы имеем формальные отношения между *выводами, формулами* и *терминами.* В (конструктивистской) литературе много обсуждалось следующее вполне естественное отношение:

определение $\bar{t}$ дается доказательством $\bar{d}$ утверждения $\exists x A$

Ср. проблему 1 в [25, стр. 125], где приведено элементарное обсуждение. Хотя это отношение весьма специально, оно окажется весьма полезным.

Важное свойство *нормальных выводов* (по определению Правица и др.) состоит в том, что они позволяют *считывать терм t с вывода d формулы* $\exists x A$. Точнее, имеется механический метод получения терма t из d (и мы признаем, что этот терм определяет реализацию, которую дает $\bar{d}$). Очевидно, имеется механический метод, распознающий, является ли d выводом экзистенциальной формулы. Для дальнейших ссылок отметим, что t может содержать параметры, не входящие в $\exists x A$, например если заключительная часть d выводит $\exists x A$ из $\forall x A$ или из $A[x/t_1] \vee A[x/t_2]$.

Отметим, что в силу (α) анализ упомянутого выше отношения требует теоремы именно о нормализации, а не только о нормальной форме.

(c) *Формулировка односторонних условий адекватности на критерии равенства доказательств.* Как подчеркивал Правиц [48], его процедуры нормализации очевидным образом сохраняют равенство доказательств. Стоящая здесь перед нами задача, β(ii) из п. (a), более деликатна: надо решить, *эквивалентна* ли конвертируемость к конгруэнтным нормальным формам равенству доказательств. Я сначала сформулирую один критерий, который доказуемо неполон[2]), а затем углублюсь в общую природу проблемы. Повторим сказанное в обсуждении из п. (α): не утверждается, что адекватны *именно те* отношения конверсии, которые изучались в литературе. (*Добавлено в корректуре*: см. также примечание 20.)

Мы рассматриваем выводы в логике предикатов, но не произвольные, а с последними формулами вида $B \to \exists x A$.

(i) Мы предполагаем, что отношение $\equiv$ между формальными выводами (с одной и той же последней формулой) очевидным образом сохраняет равенство доказательств, т. е. символически

$$d_1 \equiv d_2 \Rightarrow \bar{d}_1 = \bar{d}_2.$$

(ii) Для дальнейшего развития мы пытаемся вывести из исходного изучаемого отношения $\bar{d}_1 = \bar{d}_2$ какое-нибудь удобное в обращении математическое следствие, скажем $M(d_1, d_2)$, удовлетворяющее чисто математическому условию

(iii) $M(d_1, d_2) \Rightarrow d_1 \equiv d_2$.

Если это удалось, мы «поймали» наше исходное отношение и можем заключить, что

$$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \bar{d}_1 = \bar{d}_2.$$

Один *кандидат* на роль $M(d_1, d_2)$. Пусть d_1 и d_2 — выводы формулы $B \to \exists x A$ в логике предикатов. Рассмотрим любую формальную систему F, такую, как теория видов, которая содержит логику предикатов и нормализуема, причем шаги ее нормализации удовлетворяют условию (βi) из (α). Нам здесь *не* нужно, чтобы F удовлетворяла (βii) (и это удачно, так как именно (βii) для логики предикатов является здесь главным вопросом!). Для каждого подстановочного примера $B^* \to \exists x A^*$ формулы $B \to \exists x A$ пусть d_1^* и d_2^* обозначают

результаты соответствующих подстановок в d_1 и d_2. Для любого вывода d^* формулы B^* пусть d_1^0 и d_2^0 получаются приписыванием соответственно d_1^* и d_2^* к d^*. Как d_1^0, так и d_2^0 — — выводы $\exists x A^*$ в F, и в силу (b) они дают термы t_1 и t_2 в качестве реализации.

$M(d_1, d_2)$ утверждает, что для всех выводов d^* подстановочных примеров B^* соответствующие термы t_1 и t_2 определяют *экстенсионально* равные функции. Тогда $M(d_1, d_2)$ удовлетворяет (ii), так как с экстенсиональным равенством обращаться легко, и, следовательно, $\neg M(d_1, d_2) \Rightarrow \neg \bar{d}_1 = \bar{d}_2$.

Однако $M(d_1, d_2)$ в общем случае *не* удовлетворяет (iii). Оно дает только *частичный* критерий, т. е. имеются d_1 и d_2, для которых $d_1 \not\equiv d_2$, но описанное выше применение M не обеспечивает $\bar{d}_1 \neq \bar{d}_2$ (иными словами, на нынешней стадии точное значение отношения $\equiv$ не выяснено для таких d_1, d_2).

Пусть B истинна (и, следовательно, B^* выводима), и возьмем в качестве A подходящую формулу $\exists x (x = c \wedge P)$, где P не зависит от x, например

$$\exists x (x = c \wedge [(p \wedge \neg p) \to (p \to p)]).$$

Очевидно, что *любое* доказательство будет давать реализацию c. Но мы имеем два явно различных доказательства формулы

$$(p \wedge \neg p) \to (p \to p)$$

(а значит, и всей формулы, начинающейся с существования), одно из них игнорирует заключение (из противоречия следует все, что угодно), а второе игнорирует посылку (так как $p \to p$ верно).

Обсуждение. Чтобы оценить предложенный (частичный) критерий, по-видимому, поучительно рассмотреть известный анализ понятия *логической истинности* (от формулировки правил вывода, принадлежащей Фреге, до гёделевского доказательства полноты) Исходное понятие равенства доказательств должно соответствовать логической истинности, причем класс выводов, рассматриваемый здесь, соответствует, вероятно, ограничению языком *первого* порядка. Тогда условие (i), сформулированное выше, соответствует тому факту, что формальные правила Фреге, очевидно, сохраняют логическую истинность. «Удобное в обращении» свойство M из (ii) соответствует математическому свойству истинности во всех счетных областях (Скулем-Лёвенгейм). А аналог условия (iii) дается гёделевским доказательством полноты. Для *подклассов* языка первого порядка, например для универсальных формул, мы можем заменить «истинность в счетных областях» на «истинность в конечных областях». Для формул второго порядка мы (как известно) не имеем формальных правил, но не имеем и столь же удобного в обращении свойства M, так как истинность второго порядка чувствительна к открытым вопросам о существовании больших кардиналов (ср. [28, стр. 190—191]). В последнем случае мы оперируем с частичными критериями, полученными при рассмотрении специфических вопросов, таких, например, как существование Π_1^1-неописуемых кардиналов. Можно спокойно сказать, что предлагаемые условия адекватности критериев равенства не обязательно должны быть полными (но, конечно, они должны решать какой-то интересный открытый вопрос).

Более серьезное возражение по поводу этого критерия (чем его частичный характер) таково. Предложенные доказательства адекватности *избегают* вопросов о природе равенства доказательств или о природе доказательств, а не решают их. Действительно, мы предлагаем показать для конкретных выводов, что вопрос об адекватности $\equiv$ может быть разрешен без более тщательного анализа участвующих здесь понятий. Но в настоящее время описанный выше критерий полезен педагогически: он опровергает распространенное убеждение, что нельзя сказать «ничего» точного (и разумного) по вопросам синонимии доказательств.

Замечание. Рискуя объяснить obscurum per obscurius (непонятное еще более непонятным), я указал бы на аналогию между нахождением (α) отношения конвертируемости, соответствующего равенству доказательств, и (β) отношения «эквивалентности», такого, как отношение *комбинаторной эквивалентности* в топологии, соответствующего основному инварианту в наших геометрических представлениях. Очень часто бывает трудно сформулировать заранее явные условия адекватности на (β) (наше доверие к предлагаемому отношению эквивалентности вполне может зависеть от достоинств предлагающего). Использование различных стилей формализации, упомянутое в п. (а) выше, можно сравнить с использованием различных систем координат в геометрии, где зачастую одна из систем особенно подходит для изучения конкретного геометрического отношения, «подходит» не только в смысле удобства, но и в том смысле, что переход от одной системы координат к другой может ввести сингулярности, не имеющие геометрического смысла, такие, как неопределенность второй полярной координаты в начале координат.

(d) *Дальнейшие иллюстрации: вторая теорема Гёделя.* Читатель, разделяющий мое доверие к поразительным примерам (а вероятно, и мой скептицизм по поводу выделения самой центральной проблемы на ранней стадии исследования), возможно, хотел бы посмотреть на знакомый материал, который наиболее естественно формулируется в терминах *доказательства*, а не *следования*. Я думаю, что вторая теорема Гёделя — превосходный пример.

Мы будем рассматривать *непротиворечивые* формальные системы. Поэтому, если речь идет только о множестве теорем, вопрос о том, могут ли возникнуть обе формулы A и $\neg A$, не поднимается вовсе!

Нетрудно понять, что, образно говоря, *недостаточно даже отождествлять формальную систему с ее множеством выводов; мы должны рассматривать тот способ, с помощью которого убеждаемся, что синтаксический объект является выводом*; короче говоря, мы должны рассматривать формальные правила. (Я буду считать, что эти правила заданы своими постовскими производящими схемами.) Действительно, рассмотрим любую известную вам формальную систему F и определим F^* следующим образом (ср. [21, стр. 154, 3.221]).

Объект d есть вывод в F^*, если (i) он есть вывод в F, и (ii) для всех выводов d', d'' в F (с гёделевскими номерами) $\leqslant d$ вывод d' не приводит к формуле, которая является отрицанием формулы, выведенной с помощью d''.

Таким образом, если F непротиворечива, то F^* имеет *в точности* те же выводы, что F, и лишь проверка свойства «быть выводом» более длинна в соответствии с шагом (ii). Очевидно, что имеется совершенно элементарное доказательство непротиворечивости системы F^*. Столь же очевидно, что формулы, *выражающие* отношения доказательства для F и F^*, а значит, и их непротиворечивость являются различными (в действительности *не* являются доказуемо эквивалентными). Формальное определение *канонического представления* в [21, стр. 154, 3.222] дает *анализ понятия выразимости отношений доказательства для F и F^*, адекватный рассматриваемой проблеме* (о надлежащей формулировке второй теоремы Гёделя). Хотя в [21] это и не сказано, аналогичное определение характеризует, с точностью до доказуемого изоморфизма, *каноническую* гёделевскую нумерацию конечных последовательностей (состоящих, скажем, из $a_1, \ldots, a_n$) со следующей структурой: пустая последовательность — выделенный элемент, и для каждого a_i добавление a_i и обратное действие являются операциями. Ср., например, [29, стр. 256, 2.5.3].

Замечание. Здесь следует отметить еще одно обстоятельство, которое, однако, не требует рассмотрения выводов — достаточно отношения следования. Иногда говорят, что теорема Гёделя применима к системам, которые «содержат арифметику» (или, в более явном виде, содержат модус поненс и полны относительно численной арифметики). Ясно, что в обычном смысле слова F^* содержит столько же арифметики, сколько и F! Естественная формулировка имеет следующий совершенно простой вид.

Если дана система F и формулы A_1, A_2, A_3 этой системы, то одно из следующих утверждений нельзя вывести в F:

A_1 выражает (в терминах канонических представлений), что F замкнута относительно модус поненс, и A_1 имеет место;

A_2 выражает, что F полна относительно численной арифметики (в действительности полна относительно конкретного примитивно рекурсивного предиката, разумеется канонически представленного), и A_2 имеет место;

A_3 выражает, что F непротиворечива, и A_3 имеет место.

Совершенно естественно, что в первоначальной статье Гёделя надлежащей формулировке не было уделено большого внимания. Прежде всего в то время не была еще понята важность нормальных выводов и, следовательно, для обычных систем формулы A_1 и A_2 всегда могли быть найдены. Далее, если иметь в виду программу Гильберта, то отсутствие A_1 или A_2 является *таким же недостатком*, как и отсутствие A_3: у нас нет никакой причины считать, что F кодифицирует математическую практику. (Я говорю «таким же», так как, разумеется, программа Гильберта в его формулировке не требовала, чтобы эти условия адекватности были доказаны внутри изучаемой системы.)

Резюмируя, мы видим, что здесь существенны не только множества следствий и не только выводы, рассматриваемые как экстенсиональные объекты, но даже и дополнительная информация о «структуре», а именно о последовательности операций, участвующих в построении выводов.

(e) *Замечание о проблеме непротиворечивости* (дополняющее ОТД, конец § 1 и дополнение I(c)). Следующие соображения элементарны.

Результаты о непротиворечивости вообще не выражают сколько-нибудь хорошо математическое содержание доказа-

тельств непротиворечивости. У нас теперь (в силу результатов из ОТД, дополнение II, о принципах рефлексии, консервативных расширениях и коммутирующих моделях) есть понятия, позволяющие выразить их содержание и изящно, и гораздо более информативно. Ср. также конец п. (b) (ii) в приложении I. Кроме того (ср. ОТД, дополнение I), некоторые из допущений Гильберта, связывающих доказательства непротиворечивости с *надежностью*, кажутся неоправданными. Однако во избежание недоразумений следует помнить, что бывают *самые настоящие* доказательства непротиворечивости в том смысле, что используемые математические методы *явно* более элементарны, чем подразумеваемая интерпретация, которая привела к изучаемым формальным системам, не говоря уже о случае, когда просто имелись сомнения в непротиворечивости (как в ОТД, § 3, предпоследний абзац). Например, для арифметики с индукцией только по универсальным формулам методы, использованные Эрбраном или Генценом, заведомо более элементарны, чем теоретико-множественная концепция структуры арифметики. Равным образом мы, конечно, располагаем также теоретико-модельными методами, где изобретательно выбранная модель может использовать значительно более элементарные экзистенциальные допущения, чем очевидная или «стандартная» модель; ср. ОТД, дополнение IV. Эти наблюдения вполне согласованы с тем фактом, что ситуация более щекотлива *в частных случаях*, например в генценовском доказательстве непротиворечивости арифметики с помощью ε_0-индукции. Так как, говоря практически, проблематичность неконструктивной концепции натурального числа преувеличена, а кроме того, истинность ε_0-индукции наверняка не *видна* непосредственно, то эпистемологическая ценность генценовского доказательства зависит от более точного анализа видов математического опыта. (Естественно, что гораздо больше написано о таких открытых вопросах, требующих внимания, чем о многих доказательствах непротиворечивости с четко очерченным эпистемологическим заключением.) По крайней мере на нынешней стадии анализа мне кажется, что методы, разработанные для этого доказательства, привели к более интересным результатам для других приложений, вроде тех, которые обсуждались выше в п. (a), чем для первоначальной проблемы непротиворечивости.

Замечание. Тот факт, что безыскусные проблемы, касающиеся непротиворечивости, или, более общим образом, *надежности*, принципов могли привести к выявлению значительных различий *среди* надежных принципов, кажется мне типичным для некоторой весьма общей ситуации (вспомним, что в физике наивные проблемы о *реальности*, например, света привели к выявлению важных различий *среди* объектов реального мира). Естественно, не предполагается, что возможности использования этих различий, в частности различия между нормальными и остальными выводами, уже исчерпаны! Упомянем только один пример, содержащийся неявно в п. (b) выше, в связи с *длиной* или «осуществимостью» конструкций: длина ненормального вывода $\exists x A$ может быть намного меньше, чем числовая величина реализации, которую он дает. Короче, *«обычный» логический вывод ухудшает осуществимость*. (Как заметил Такеути, это не так для нормальных выводов в «свободном от сечения» анализе.)

§ 2. ОПЕРАЦИИ НА ВЫВОДАХ: СИНТАКСИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

В противоположность § 1, где рассматриваются вопросы, которыми мы пренебрегли в ОТД, настоящий параграф посвящен известному различию (ср. [21, стр. 159—160, 3.31]) между двумя общими методами теории доказательств, упомянутыми в заглавии Типичные синтаксические преобразования — это процедуры нормализации и устранения сечения, введенные Генценом. Типичные функциональные интерпретации — это так называемая интерпретация отсутствием контрпримера [18] или гёделевская интерпретация [4]. На теорему Эрбрана тоже можно смотреть как на такую интерпретацию (ср. [18]), хотя сам он так ее не воспринимал (другие различия разъясняются в конце этого параграфа). Имеются некоторые общие соображения по поводу *областей полезных приложений* этих двух методов, которые, по-видимому, не были явно сформулированы в литературе, хотя в неявном виде там содержатся. Так как мы занимаемся применениями, эти различия важнее, чем сходство: нам нужны соображения о том, какой метод с большей вероятностью поможет при решении заданной проблемы. Сходство будет обсуждаться в приложении I в связи с описанным Правицем гомоморфизмом между выводами и термами (доказательствами и функциями, рассматриваемыми как правила). Чтобы облегчить изложение, мы также отложим до § 3 все *количественные* уточнения этих двух методов в терминах ординалов (или, более строго, ординальных структур); в этом направлении было проделано столько работы, что изложение ее здесь исказило бы общую картину.

Я сейчас коротко опишу три практических вывода, которые далее формулируются более точно.

(α) Синтаксические преобразования имеют дело в основном с *доказательствами* и нуждаются лишь в очень элементарных функциях. Интерпретации (упомянутые выше, а не реализуемость, являющаяся гибридом) имеют дело в основном с *функциями*, т. е. принципами определения, и используют очень элементарные доказательства. Подробности см. в (a)(iii) и (b)(iii) ниже.

(β) Синтаксические преобразования особенно приспособлены для получения *выводимых правил*, вообще говоря, потому, что нормальные выводы столь просты. Таким образом, для этой цели зачастую достаточно теорем о нормальной форме.

(γ) Интерпретации полезны для получения доказательств независимости от *схемы*. Варьируя принцип интерпретации или рассматриваемый класс функционалов, можно сделать всю схему истинной в некоторой интерпретации.

(a) *Синтаксические преобразования* отображают выводы $\in\mathscr{D}$ в (под)класс $\mathscr{D}_N$ *нормальных* выводов. Иногда приложения могут зависеть только от структурных свойств нормальных выводов, а не от конкретного используемого преобразования. В этом случае достаточно *теоремы о нормальной форме*. Очевидно, что если теорема о нормальной форме верна для пары $(\mathscr{D}, \mathscr{D}_N)$, то всегда есть *какое-то* рекурсивное отображение $\mathscr{D}\to\mathscr{D}_N$, сохраняющее последние формулы: исходя из данного вывода $d\in\mathscr{D}$, пробегаем $\mathscr{D}_N$, пока не найдется $d'\in\mathscr{D}_N$ с той же последней формулой, что у d.

(i) В ОТД (§ 5, пример 2 и далее, а особенно § 11(b)) я подчеркивал важность тех нормальных выводов, которые обладают свойством *подформульности*. Наиболее поразительное обстоятельство заключается в том, что *если* применимость теоремы о нормальной форме зависит от этого конкретного свойства, то для систем, содержащих индукцию, предпочтительно рассматривать *бесконечные* нормальные фигуры доказательства[3]). (И даже здесь имеются ограничения для рекурсивных фигур доказательства, так как если включена бар-индукция, то доказуемым образом нет таких фигур со свойством подформульности. Ср. [21, стр. 167, 3.343] и ОТД § 11(b).) В настоящее время, насколько я знаю, применения нормальных форм в классических системах используют лишь свойство подформульности.

Отступление о бесконечных фигурах доказательства. В результате переписки с Правицем выяснилось, что, по-видимому, желательно расширить мои предыдущие замечания по этому поводу в ОТД, примечание 3 или § 6(b). Во-первых, имеется принципиальный вопрос — *представление* наших мыслей, т. е. доказательств, посредством таких бесконечных фигур доказательства. Нет никаких сомнений в том, что последние более непосредственны, чем конечные фигуры доказательства, и тем не менее достаточно удобны в обращении. Такие (экстенсиональные) фигуры доказательства *не являются полными* представлениями, как минимум нужно добавлять *описание* (например, в каждом узле — описание фигуры «под» этим узлом) вместе с доказательством *того*, что данная фигура правильно построена. Это соответствует известной процедуре из технической теории доказательств, описанной в самых ясных выражениях в [21, конец стр. 163]. Ср. также (c)(ii) ниже. В связи с общей точкой зрения на проблематичный характер конструктивных логических операторов, подчеркиваемой в этой статье, следует обратить внимание, что доказательства, которые надо добавлять к экстенсиональной фигуре доказательства (для более полного представления наших измерений), устанавливают *свободные от логики утверждения*. Ко времени написания ОТД в литературе не было даже попытки выявить *смысл* конечных выводов. Только недавно Правиц [37] провел соответствующий анализ с помощью своего *предиката истинности* для выводов, хотя и в логически сложной форме. (Более ранние применения формально аналогичных предикатов вычислимости не внесли вклада в объяснение того, *что* же кодируют конечные выводы.) Во-вторых, мы имеем математическую задачу (упомянутую в ОТД, § 6(b), и представляющую, по-моему, первостепенную важность) придания *внутреннего смысла ординалам, используемым в этой части теории доказательств*. Бесконечные фигуры доказательства были единственными объектами, которые имели внутреннюю связь с ординалами. Ситуация изменилась с появлением проблем нормализации, где главные объекты изучения — *конкретные* фундированные фигуры редукций; ср. § 3(a)(ii). Очевидно, что наш интерес к этим фигурам зависит от интереса к определяющим их *специальным* процессам редукции, и именно поэтому я в § 1 лез из кожи в поисках такого интереса. (На этом отступление кончается.)

Возвращаясь теперь к приложениям нормальных форм, заметим, что для гейтинговских систем (в противоположность рассмотренному ранее классическому случаю) свойство подформульности несущественно. В частности, для нормальных форм очевидны *выводимые правила*, имеющие обычно

следующий вид. Для формул A подходящей синтаксической структуры

если выводима $A \to \exists x B$, то выводима и $A \to B[x/t]$

для некоторого терма t

и, следовательно, $\exists x (A \to B)$, где x не входит свободно в A; ср. [21, стр. 160, 3.322]. (Это собственно выводимые правила в том смысле, что импликация $(A \to \exists x B) \to \exists x (A \to B)$ невыводима.) Несмотря на солидную работу, проделанную в этой области, в общем еще не вполне осознанно, что такие *условные результаты о явной определимости намного полезнее, чем* (более известные) *абсолютные результаты*, по той простой причине, что *первые автоматически сохраняются, когда аксиомы той же структуры, что и A, добавляются к рассматриваемой системе*, ср. [21, стр. 160, 3.322] или [44, стр. 269]. Как уже упоминалось, многие выводимые правила, включая правило Маркова, подробно обсуждаемое в статье Трулстра [55], имеют упомянутый выше вид. (Вероятно, следует отметить, что в формальной арифметике $\forall x (A \vee \neg A) \to \neg\neg \exists x A$ может быть выводимо, а $\forall x (A \vee \neg A) \to \exists x A$ — невыводимо. Возьмем $T(e, e, x) \vee \forall y \neg T(e, e, y)$ в качестве A с параметром e или с константой e, если $\exists x T(e, e, x)$ формально неразрешима.)

Здесь кажутся уместными два замечания. Во-первых, в связи с выводимыми правилами следует отметить, что они *не* связаны с конструктивной интерпретацией гейтинговских систем. С одной стороны, как будет объяснено в § 4, даже свойство дизъюнктивности *не обязательно* для корректной интерпретации. С другой стороны, конструктивная корректность *не нужна* для выводимых правил, в чем можно убедиться, добавляя (конструктивно) неверные аксиомы той же структуры, что и A. Во-вторых, о нормальных формах вообще. Хотя для некоторых приложений свойство подформульности не требуется, мы не ожидаем получить (и не получаем) все важные свойства нормальных выводов в случае первого порядка, когда свойство подформульности имеет место. Например, может быть неверна *интерполяционная лемма*. (Согласно ОТД, § 13(iv), это бросает тень не на понятие нормальной формы, а скорее на выбор языка.)

(ii) Приложение, которое в настоящее время использует теорему *нормализации* интересным образом,— это доказательство *замкнутости относительно правила Чёрча*. Теорема о нормальной форме немедленно дает следующий результат: если выводима $\forall x \exists y A(x, y)$, то имеется рекурсивное равенство с номером e_0, такое, что для любой цифры n выводимо

$A(n, \{e_0\}(n))$, где $\{e_0\}(n)$ обозначает числовое значение функции, определяемой уравнением e_0, на аргументе n. Проблема в том, чтобы показать, что универсальная формула $\forall x A(x, \{e_0\}(x))$ также выводима в рассматриваемой системе. (Уточняю. Под e_0 я здесь подразумеваю следующее механическое правило: пробегаем формальные выводы, пока не натолкнемся на такой, последняя формула которого имеет вид $A(n, m)$ с цифрой m, и сопоставим это m аргументу n.) Заметим, что, строго говоря, нам нужна не теорема нормализации, а лишь следующее утверждение: если дано доказательство в S формулы $\forall x \exists y A(x, y)$, то найдется доказательство в самой S *того факта*, что для каждой цифры n формула $\exists y A(n, y)$ имеет нормальный вывод в подходящей подсистеме S_0. «Подходящая» означает, что принцип рефлексии для S_0 может быть установлен в S. В [25, Note II] замкнутость относительно правила Чёрча была установлена путем сочетания *классического* доказательства теоремы о нормальной форме для теории видов, данного Правицем [44], и приводимого ниже следствия из описания Спектором [52] доказуемо рекурсивных функционалов классического анализа в его системе Σ_4:

> классический анализ с аксиомой выбора или без нее [25, стр. 135, 1.17—19] является *консервативным* расширением теории видов относительно $\forall\exists$-формул.

В [25] это следствие получено с помощью *модели* (в теории видов) для системы Σ_4, которая теперь может быть заменена (более простым) доказательством вычислимости Σ_4 с использованием работы Жирара [10] (или непосредственно в силу [10] без упоминания о Σ_4).

Как упомянуто в § 1(a), недавние теоремы нормализации делают ненужным круговой путь через [44]. Что еще важнее, они в силу § 1(b) дают большее: для каждого вывода d_n формулы $\exists y A(n, y)$ получается терм t_n, определяющий объект $\bar{x}$, который дает вывод $\bar{d}_n$. Так как из данного вывода $\forall x \exists y A(x, y)$ мы получаем d_n канонически с помощью подстановки, процедура нормализации дает также и рекурсивное равенство e_1, такое, что

$$\forall x A(x, \{e_1\}(x)) \text{ выводимо и } t_n^* = \{e_1\}(n)$$

(где t_n^* — некоторый замкнутый терм, получаемый из t_n, если последний содержит параметры, ср. [25, § 1]). Отметим, что в общем случае $\{e_0\}(n) \neq \{e_1\}(n)$ снова в силу [25, § 1]. Однако нельзя сказать, что e_1 — *то самое* правило, которое дает $\bar{d}$ в качестве подразумеваемой интерпретации кванто-

ной комбинации $\forall\exists$ в $\forall x\exists y A$. [Ср. приложение I(a)(i) относительно дефектов предиката T с точки зрения наших целей.]

(iii) Наконец, несколько слов о свойстве (α), упомянутом в начале этого раздела. Описание (бесконечных) фигур доказательства в (i) и отношения *непосредственной* редукции или нормализации в (ii) можно дать с помощью *элементарных по Кальмару* определений: нужны даже не все примитивно рекурсивные определения. Этот факт правдоподобен, так как здесь участвуют вполне-упорядочения, а все рекурсивные вполне-упорядочения вложимы с сохранением порядка в *элементарные по Кальмару* [16]. Проверить нужно, что и сами вложения элементарны (и это можно доказать, применяя индукцию к элементарным предикатам; по поводу этого последнего и чрезвычайно существенного ограничения ср. [21, стр. 165, 3.3322]). Именно в этом смысле *синтаксические преобразования имеют дело в основном с доказательствами* (элементарных бескванторных утверждений) *и не привлекают функции* (кроме самого минимума).

Хотя только что упомянутое свойство синтаксических преобразований, вероятно, не претендует на особую глубину, оно обеспечивает полезную конкретную основу для обсуждения гейтинговского понимания логических операций[4]) в § 4.

(b) *Функциональные интерпретации* имеют следующую общую форму ([21, стр. 158, 3.301—3.303] или ОТД, дополнение VII(a)). Мы сопоставляем каждой формуле A некоторую формулу $\exists s A_0(s)$, такую, что из истинности A следует истинность $\exists s A_0(s)$, когда s пробегает «большой» класс F^+ функций или функционалов, а если $\exists s A_0(s)$ доказано ограниченными методами, то $\exists s A_0(s)$ истинно, когда s пробегает меньший, обычно порожденный явно класс F^-. Если A_0 — логически сложная формула, то эти два утверждения несравнимы (потому что области изменения переменных, связанных кванторами внутри A_0, обычно также будут различными). Но если A_0 является, например, чисто универсальной и если меньшая область изменения s плотна в большой области в некоторой топологии, в которой непрерывны рассматриваемые функционалы, то $(\exists s \in F^-) A_0^-$ сильнее, чем $(\exists s \in F^+) A_0^+$ (Этому условию удовлетворяют интерпретации, упомянутые в начале этого параграфа.) Иными словами, такие интерпретации ясно показывают, *насколько больше мы знаем, когда доказали теорему, по сравнению со случаем, когда нам известно лишь, что она истинна.*

Хотя связи между синтаксическими преобразованиями и функциональными интерпретациями существуют (и будут

неоднократно упоминаться в тексте), в настоящее время наиболее важной чертой последних является их *простота*, особенно когда для наших целей, например для *результатов о независимости*, достаточно классов экстенсиональных функционалов. Если A доказана, мы не только знаем, что $(\exists s \in F^-) A_0^-$ истинна, но и имеем отображение $d \to s_d$, такое, что если d выводит A в изучаемой формальной системе, то $A_0(s_d)$ может быть выведена в системе, скажем, $\mathcal{S}$, которая дает интерпретацию. Поэтому для независимости формулы A достаточно найти *некоторый* класс C функционалов, удовлетворяющий $\mathcal{S}$, таких, что $A_0(s)$ *ложна для всех* $s \in C$. Если A независима по не очень тонким причинам, то подойдет любой класс C при условии, что он удовлетворяет очень простым условиям, ср. также (iii) ниже.

Здесь нет необходимости углубляться в использование интерпретаций для результатов о независимости от схем, т. е. для свойства (γ), упомянутого в начале этого параграфа, так как оно хорошо проиллюстрировано изложением Трулстра в [55]. (Читатель, желающий сравнить доказательства независимости от схемы посредством нормальных форм с использованием интерпретаций, может рассмотреть независимость схемы M от IP в 5.2 статьи Трулстра [55].)

(i) Хорошо известные доказательства независимости закона исключенного третьего

$$\forall f \exists n [fn = 0 \vee \forall m (fm \neq 0)]$$

с переменными f для последовательностей типа $0 \to 0$, который интерпретируется формулой

$$\exists N \forall f [f(Nf) = 0 \vee \forall m (fm \neq 0)],$$

используют только непрерывность N в топологии произведения на последовательностях натуральных чисел.

(ii) Опять-таки часто нужно использовать только *рекурсивный* характер (в любом из различных смыслов, описанных в статье Трулстра [55]) рассматриваемых функционалов, несмотря на тот факт, что для любой формализованной системы $\mathcal{S}$ мы имеем реализации (модели) на рекурсивно перечислимых *подклассах* класса рекурсивных функционалов.

Разумеется, то же самое применимо к замкнутости относительно правила Чёрча, обсуждавшейся выше в (a)(ii): равенства e можно найти в рекурсивно перечислимом множестве *доказуемо* рекурсивных равенств, для которых в рассматриваемой системе можно доказать, что они определяют (всюду определенную) функцию.

(iii) Переходя теперь к *ограничениям* функциональных интерпретаций, мы различаем те из них, которые связаны с

синтаксической формой $\exists s A_0$ интерпретации формулы A, и те, которые связаны с конкретной областью изменения переменных, входящих в A_0. Примеры первого типа дают формулы A, для которых s вообще не входит в A_0. Это будет происходить, вообще говоря, когда A — чисто универсальная формула (и бескванторные формулы разрешимы). В этом случае не следует ожидать, что намеченные выше «грубые» методы помогут в установлении независимости A.

Интересный пример ограничений второго рода дают так называемые бар-рекурсивные функции конечного типа, введенные Спектором [52]. Они *доказуемым образом удовлетворяют интерпретации* [4] *отрицания тезиса Чёрча.* Действительно, в силу [52, стр. 19 (12.1.1)] они удовлетворяют интерпретации формулы

$$\neg\neg\forall x\exists y\forall z\,[T(x, x, y) \vee \neg T(x, x, z)]$$

для предиката Клини T, но также и интерпретации формулы

$$\neg\exists e\forall x\exists v\forall z\,\{T(e, x, v) \wedge [T(x, x, Uv) \vee \neg T(x, x, z)]\},$$

так как эта формула — теорема интуиционистской арифметики первого порядка. Но это противоречит тезису Чёрча (в действительности даже его двойному отрицанию)

$$\forall x\exists y A(x, y) \rightarrow \exists e\forall x\exists v\,[T(e, x, v) \wedge A(x, Uv)].$$

Недавно профессор Гёдель указал мне более изящное доказательство. Система Σ_2, описанная в [52, стр. 6], *формально противоречит* тезису Чёрча; ср. также гл. IX в [32]. Так как T разрешим,

$$\neg\neg\exists y\forall z\,[T(x, x, y) \vee \neg T(x, x, z)]$$

— теорема арифметики. Но тогда по аксиоме F

$$\forall x\,\neg\neg P \rightarrow \neg\neg\forall x P;$$

беря $\exists y\forall z\,[T(x, x, y) \vee \neg T(x, x, z)]$ за P, мы получаем противоречие с тезисом Чёрча. (Однако кажется правдоподобным, что Σ_2 замкнута относительно *правила* Чёрча.)

Было бы интересно выяснить, существуют ли модели для функциональных схем, использованных Жираром (например, модель, состоящая из наследственно вычислимых термов), в которых *удовлетворяется* интерпретация тезиса Чёрча. Это составило бы отчетливое преимущество функций из [10] перед бар-рекурсивными функциями.

Обсуждение. Я не устану подчеркивать, что ограничения описанного сорта не уменьшают *практической ценности* интерпретаций. В общем случае мы должны ожидать, что интерпретации со *знакомыми* областями определения функционалов (что облегчает обращение с интерпретациями) будут *неполными*, т. е. что $(\exists s \in F^-)\,A_0^-$ может быть истинна, даже если A недоказуема. Кроме всего прочего, мы знаем, что весь комплекс логических соотношений сложен: было бы глупо ожидать, что некоторый метод (здесь — интерпретация) будет одновременно и применим в общем случае, и прост в тех случаях, которые нас особенно интересуют.

Замечание. Во избежание недоразумений в связи с вопросом о *равенстве* доказательств, вероятно, стоит упомянуть, что мы легко можем ввести *некоторое* отношение эквивалентности между выводами, даже если рассматриваем только *экстенсиональное* равенство (между термами). Используя введенные выше обозначения и интерпретацию в $\mathcal{J}$, мы определяем $\underset{\mathcal{J}}{\equiv}$ соотношением

$$d \underset{\mathcal{J}}{\equiv} d', \text{ если } s_d \text{ и } s_{d'} \textit{ экстенсионально} \text{ равны.}$$

Например, возьмем два вывода, скажем d и d', формулы

$$(p \wedge \neg p) \rightarrow (p \rightarrow p),$$

упомянутые в *обсуждении* из § 1(a). Тогда практически для любой интерпретации $\mathcal{J}$ мы получаем $\neg\, d \underset{\mathcal{J}}{\equiv} d'$. Конечно, в общем случае было бы нелепо предполагать, что

$$d \underset{\mathcal{J}}{\equiv} d' \Leftrightarrow d = d'.$$

Нам необходимо отдельное исследование в терминах условий адекватности, как в § 1(c).

(c) *Метаматематические принципы*, нужные для понимания синтаксических преобразований и функциональных интерпретаций. (В более формальных терминах мы говорили бы о принципах, нужных для того, чтобы доказать утверждения «любой вывод $d \in \mathcal{D}$ может быть нормализован» и «если d выводит A, то некоторый вывод d' в $\mathcal{J}$ выводит $A_0(s_d)$».)

(i) В случае *финитных* (конечных) выводов ключевой пункт для синтаксических преобразований — показать, что *нормализационная фигура* фундирована. Как отмечено в конце § 1(a), эта фигура содержит в каждом узле вывод d, а непосредственно следующие узлы — это выводы, полученные применением к d *одного* шага нормализации, т. е. сокращением любого участка, состоящего из введения логической частицы, за которым непосредственно следует ее удаление. (Причина, по которой мы в общем случае не имеем дерева нормализации, состоит в том, что к одному выводу можно

применить *несколько* таких шагов нормализации.) Очевидно, что если выводы конечны, то можно применить лишь конечное число шагов, но данный вывод может быть результатом применения одного шага нормализации к любому из бесконечного множества выводов точно так же, как 0 есть результат одного шага вычисления, примененного к $(s^n 0)\cdot 0$ для $n = 0,1, \ldots$.

(ii) В случае (возможно) *бесконечных* выводов имеется добавочный шаг проверки того, что каждая из встречающихся (бесконечных) фигур доказательства фундирована. В более явной форме, мы даем *описание* последовательности фигур доказательства. Как упомянуто в (a), функции, используемые в этом описании, элементарны. Установить здесь (как и в (i)) надо, во-первых, что описываемая фигура *локально* корректна, т. е. что формула в узле N фигуры доказательства построена согласно правилам из формул, расположенных в непосредственных наследниках N, во-вторых, в бесконечном случае, что вся фигура фундирована, в-третьих, что описываемая нормализационная фигура также локально корректна (в очевидном смысле) и, наконец, что она фундирована.

Очевидно, что полезность этих процедур нормализации для результатов о непротиворечивости зависит от нахождения *принципов доказательства фундированности*, которые более элементарны в смысле § 1(e), чем принципы, которые привели в изучаемой формальной системе; ср. также § 3 ниже.

(iii) Для функциональных интерпретаций, по крайней мере если A_0 — логически несложная формула, ключевым пунктом *обычно* является существование функционалов, удовлетворяющих аксиомам системы $\mathcal{J}$. «Обычно» в том смысле, что доказательство формулы

$$(d \vdash A) \to d' \underset{\mathcal{J}}{\vdash} A_0(s_d)$$

совершенно элементарно для наших интерпретаций. Отметим, что „s_d" — это *имя* некоторого терма в $\mathcal{J}$; мы не используем перечисляющий функционал для функционалов, имеющих имена в $\mathcal{J}$.

В настоящее время будет, по-видимому, справедливо сказать, что для используемых систем $\mathcal{J}$, таких как гёделевская система T в [4], *существование упоминаемых в их описаниях функционалов действительно очевидно, но нельзя сказать, что оно очевидно из очень элементарных соображений*. Естественное определение наследственно рекурсивных

объектов (ср. HRO и HEO в [55]) использует принципы интуиционистской арифметики первого порядка. И хотя неэкстенсиональные операции HRO имеют более поразительные (и легко устанавливаемые) свойства, чем HEO, используемые *принципы* ничуть не более элементарны. Если $\mathcal{J}$ интерпретируется с помощью более специальных правил вычисления (ср. приложение), то предикат вычислимости также имеет логически сложную форму.

(d) *Отступление*, касающееся ранних работ Эрбрана и Генцена по интерпретациям и синтаксическим преобразованиям. Так как я был, вероятно, первым, кто «воскресил» работу Эрбрана 25 лет назад, чтобы использовать и обобщить ее в [18], я, вероятно, могу высказать разумные предположения о ее истинных и кажущихся прелестях. (Ее ограниченность очевидна каждому, кто хоть сколько-нибудь знаком с главным потоком теории доказательств за последние 20 лет. Например, ни в каком месте ОТД не было бы выгодно использовать формулировку Эрбрана.) Прежде всего работа Эрбрана содержит усовершенствование теоретико-модельных конструкций, а так как, если оно применимо, теоретико-модельное рассуждение легко обозреть, то эрбрановская трактовка дает нам оба преимущества: теоретико-модельную ясность и количественные оценки (для явного конструктивного рассмотрения). Не делается никакой попытки дать анализ логических операций, в частности пропозициональной операции импликации. Как отмечено в начале (b), Эрбран позволяет нам прояснить *содержание* теоремы, доказанной ограниченными средствами, не углубляясь в детальный анализ доказательств. Истинная привлекательность заключается в том, что зачастую такая информация о «конструктивном содержании» — это все, что нам нужно, и хорошо иметь прямой путь ее получения. Но, как часто бывает, il faut reculer pour mieux sauter (надо отступить, чтобы дальше прыгнуть.— *Перев.*).

Первое место, где очевидно поразительное превосходство генценовского анализа, связано с гейтинговской логикой предикатов. Даже если и удается для этого случая выжать какой-то аналог теоремы Эрбрана (ср. Минц [38]), он неизящен. В действительности основная черта эрбрановского анализа — отделение *всех* применений кванторных правил [5]) — здесь вообще нереальна, так как в противоположность классической логике с импликацией связан почти такой же тип абстракции, что и с квантором всеобщности; ср. § 4. Таким образом, как только осознан большой интерес интуиционистских систем для теории доказательств (а это

происходило в исследованиях последних 40 лет), мы получаем четкие ограничения эрбрановского подхода.

Имеется также совершенно иное обобщение теоремы Эрбрана, которое дает *интерпретация отсутствием контрпримера* [18]. Формально она похожа не на анализ, данный самим Эрбраном, а на доказательство с помощью ε-теорем из книги Гильберта — Бернайса. Концептуально она совершенно иная. (Различие состоит в том, что она существенно использует функционалы низшего типа и функциональные *переменные*, а Эрбран считал эти понятия слишком абстрактными[6]).) Это вполне подходит для арифметики и разветвленного анализа, но не за их пределами (точный смысл этого высказывания объяснен в ОТД, дополнение VII (iii) (b)). И разумеется, из работ Эрбрана не выросло ничего, соответствующего теоремам нормализации или даже теоремам о нормальной форме для классического анализа.

§ 3. ОРДИНАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ И ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ ОРДИНАЛОВ

В ОТД, § 6(d), § 12(b), и особенно в [26], проанализированы с эпистемологической точки зрения ординальные структуры, используемые в теории доказательств, т. е. упорядочения натуральных чисел и функции на них. Так как обсуждение было беспорядочным, я резюмирую здесь главные заключения.

Согласно § 2(c), основная цель — дать элементарное обоснование трансфинитной индукции на наших ординальных структурах, в частности более элементарное или конструктивное, чем для индукции на абстрактных вполне-упорядочениях. Ключевое различие состоит в том, что наши упорядочения *построены* с помощью специальных конструкций (таких, как *сложение или взятие* ω *экземпляров*), в частности путем *итерации этих конструкций вдоль ранее определенных ординальных структур*. Следовательно, трансфинитную индукцию на наших ординальных структурах можно анализировать явно в терминах этих специальных конструкций или построения наших упорядочений. Это соответствует обоснованию обычной индукции, т. е. ω-индукции в терминах построения натуральных чисел с помощью операции следования. В абстрактном случае в противоположность этому операции у нас *скрыты* в логически сложном допущении о вполне-упорядоченности. Более формально абстрактный принцип трансфинитной индукции выражается правилом

$$\text{вывести } Ax \text{ из } [(\forall y < x)\, Ay \to Ax],$$

которое содержит логически составленную подформулу $(\forall y<x)\,A(y)$ и потому не подходит для *бесквантворной метатеории*, которой требует рассматриваемая здесь теория доказательств, ср. § 2(a)(iii). Как только мы получаем полное множество строительных функций (build-up functions в терминологии Фефермана [58]), обозначаемых, скажем, через $f_1, \ldots, f_k$, то получаем и *бесквантворную* формулировку трансфинитной индукции, соответствующую построению ординальной структуры, ср. [21, стр. 172].

Пусть c_1 является (доказуемым образом) *пределом* сегмента, который порождается конечными итерациями функций f. Тогда мы выводим

$$x < c_1 \to Ax \text{ из } A0, \quad Ax \to Af_i x \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Чтобы вывести Ac_1, нам нужна замена для обычной формулировки $(\forall y < x)\, Ay \to Ax$ (прогрессивности формулы A), так как она содержит кванторы. Очевидным образом достаточное условие дает вывод формулы

$$(*) \qquad (\tau x < x \to A\tau x) \to Ax$$

для некоторого уже введенного терма τ. Более общо, этот вывод может быть обоснован исходя из свойств A; в частности (ср. [21, стр. 172, 3.4214]), если A — свойство «сегмент x построен применением операций $f_1, \ldots, f_n$», то мы заключаем, что c_1 построен так же. (Точнее, в терминологии [26], мы *усмотрели*, что c_1 построен описанным образом с помощью методов, подразумеваемых операциями $f_1, \ldots, f_n$.) Таким образом, если операции $x \to f_i x$ сохраняют вполне-упорядоченность, мы разрешаем теперь итерацию самих f_i до c_1, и для $y < c_1$ обозначим y-ю итерацию через f_i^y.

В общем случае пусть c_{n+1} — предел сегмента, порожденного трансфинитной, но $< c_n$-кратной итерацией функций f. Тогда мы выводим

$$x < c_{n+1} \to Ax \text{ из } (y < c_n \wedge Ax) \to Af_i^y x \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } Ac_{n+1}$$

Эти правила в противоположность упомянутому выше абстрактному принципу трансфинитной индукции являются бесквантворными и, следовательно, свободны от логики, если A разрешима. Отметим, что приведенная выше формулировка дает более *явный* анализ процесса трансфинитной индукции по $<$, чем в случае, когда одна только $(*)$ считается достаточной, чтобы вывести Ax. Здесь $(*)$ используется только для того, чтобы вывести Ac_n из $x < c_n \to Ax$.

В общем случае для установления посылок правил, в частности для того, чтобы выразить и установить определяющие

свойства чисел c_n, нужны кроме строительных функций f еще дополнительные функции. Так, свойство *Lim* быть предельным числом определяется соотношением $spx \neq x$, где s и p — соответственно функции следования и предшествования. Однако, чтобы выразить бескванторным образом тот факт, *что* это определение выражает подразумеваемый смысл, нам нужны еще добавочная бинарная функция g и доказательство формулы $(spx \neq x \wedge y < x) \rightarrow y < g(y, x) < x$.

Особенно полезную группу дополнительных функций составляют *обращения* строительных функций, называемые также *ретрассирующими функциями*. Например, функция предшествования — обратная к функции следования. С помощью таких функций мы можем выразить явно *фундаментальное отношение* между

элементом и его именем, построенным из $0, f_1, \ldots, f_k$,

т. е. между объектом x в упорядочении и термом (построенным из $0, f_1, \ldots, f_k$), который обозначает x. Оно фундаментально, так как терм *отражает построение сегмента до x* так же, как цифры $(0, s0, ss0, \ldots)$ — *стандартная запись* для целых чисел — отражают построение объектов, которые они обозначают. Очевидное следствие таково.

Пусть O_1 и O_2 — ординальные структуры с изоморфными областями ординала α, причем обе они содержат описанные выше строительные и ретрассирующие функции. Тогда O_1 и O_2 изоморфны, причем осуществляющее этот изоморфизм отображение *явно определяется* следующим образом.

Для x_1 из O_1 нужно найти его стандартное обозначение t посредством ретрассирующих функций из O_1, затем посредством строительных функций из O_2 определить «величину», т. е. обозначение x_2 терма t в O_2.

Иными словами, наши ординальные структуры определены *однозначно с точностью до описанного выше явного изоморфизма*. Читатель может сравнить этот *функториальный анализ* ординальных структур с обсуждавшимся в п. (d) § 1 анализом канонических представлений, который определяет представления однозначно с точностью до доказуемой эквивалентности.

Замечание. Люди, работающие в теории доказательств и, очевидно, интересующиеся целями, описанными в § 2(c), часто говорят об *ординале* некоторой формальной системы; например, ε_0 — ординал арифметики первого порядка. При буквальном понимании это противоречит нашему обсуждению, которое показывает, не оставляя места сомнениям, что для их целей существенна *ординальная структура*, а не ординал и

даже не упорядочение. Однако, практически говоря, ошибки маловероятны просто потому, что встречающиеся ординальные структуры не только однозначно определены в описанном смысле, но и изоморфны *известному* ε_0-упорядочению (а это как раз то упорядочение, которое обычно используют без дальнейшего анализа). Само *определение* ординала ε_0 как предела последовательности $\omega, \omega^\omega, \ldots$ ссылается на *ординальные функции*, по существу те самые, которые нужны для ординальной структуры, выявленной более тщательным анализом. Здесь следует помнить, что в настоящее время *у нас нет* ***общей*** *схемы сопоставления формальной системе некоторой ординальной структуры таким образом, чтобы это отражало существо дела.* (Но у нас есть схемы сопоставления ординалов: граница на доказуемые Σ^1_1- вполне-упорядочения, принципы индукции, нужные для принципов рефлексии; ср. ОТД, § 7.) Кроме того, хотя такая внутренняя характеристика была бы очень привлекательна, она не обязательна для специальных математических целей § 2(c), которые требуют только *некоторой* ординальной структуры, построенной элементарным образом.

В предыдущих публикациях ([26] и ОТД, § 12(b)) я рассматривал проблему сопоставления ординальных структур или «естественных» вполне-упорядочений данным ординалам. Я не буду продолжать здесь эти рассмотрения, а займусь двумя гораздо более скромными формальными вопросами, возникающими при создании *бескванторной метатеории*, которым я не уделил внимания в ОТД, а именно вопросами (α) и (β), сформулированными ниже.

(α) Каковы минимальные *формальные* требования к бескванторным системам ординальных функций, если они должны служить для формализации метаматематических принципов, обсуждавшихся в § 2(c)?

Разумеется, этот вопрос имеет совершенно разумный смысл, если, как обычно в литературе, мы имеем в виду формальный язык для арифметики и рассматриваем конкретные вполне-упорядочения натуральных чисел с теоретико-числовыми функциями, представляющими наши ординальные операции. Но так как нас не интересуют их арифметические свойства и так как мы только что видели, что ординальные структуры, которые приходится рассматривать, однозначны с точностью до (явного) изоморфизма чрезвычайно элементарного вида, то мы с тем же успехом можем рассматривать *формальные теории ординалов*. Хотя не будет исключена возможность того, что переменные могут пробегать те конкретные (конеч-

ные и бесконечные) множества, которые фон Нейман использовал в своих теоретико-множественных ординальных структурах, наши теории будут реализованы на ординальных структурах, которые определяются вполне элементарными (конструктивными) процессами.

(β) Существуют ли изящные формальные теории ординалов, соответствующие системам арифметики и анализа, представляющим главный предмет изучения в современной теории доказательств [7]?

Замечание. Так как в теории доказательств доминировала программа Гильберта и другие конструктивные цели, большинство из тех немногих формальных теорий ординалов, которые изучались в теории доказательств, являются конструктивными. Они имеют модели над «небольшими» отрезками рекурсивных ординалов, причем функциональные символы реализуются примитивно рекурсивными функциями на этих ординалах или, точнее, на их записях. Но, поскольку требование конструктивности не всегда соответствует ситуации, что настоятельно подчеркивается в этой статье, здесь, в частности в пп. (b) и (c) ниже, мы рассмотрим и другие формальные теории.

Естественно, последние не приносят непосредственной пользы для усовершенствования того типа доказательств фундированности, который упоминается в § 2(c), в частности для их усовершенствования путем устранения общего понятия фундированности с помощью операций на ординальных структурах, построенных особенно элементарным образом. Но кроме такого эпистемологического применения можно ожидать, что ординальный анализ будет полезен технически просто потому, что он заменяет *качественное* понятие фундированности *количественной* формулировкой. Эта количественная версия до некоторой степени могла бы, подобно интерпретациям в § 2(b), дать ответ на повторяющийся вопрос:

Насколько больше мы знаем, когда знаем, что некоторая теорема может быть доказана ограниченными средствами, по сравнению со случаем, когда известно лишь, что она верна?

(a) Мы рассматриваем первый вопрос (α) в применении к *синтаксическим преобразованиям*, описанным в § 2(a).

(i) Если мы интересуемся главным образом (бесконечными) фигурами доказательства, а не отношением конверсии, то минимальное требование таково:

> Для естественного кодирования формул фигуры доказательства должны быть *определимы* в теории ординалов, а их основные свойства формально выводимы. Основные свойства состоят, разумеется, в том, что эти фигуры доказательства «локально корректны», т. е. построены согласно изучаемым правилам доказательства, и что они фундированы.

Хотя известные теоремы о нормальной форме, скажем для разветвленного анализа, с использованием бесконечных нормальных (или свободных от сечения) доказательств не были формализованы в какой-либо теории ординалов, метод достаточно ясен. Например, мы уже знаем, что сами фигуры доказательства имеют подходящий порядковый тип (ОТД, § 6(b)). Наверное, было действительно разумно подождать, ибо, как упоминается в (c) ниже, вероятно, элегантнее рассматривать подсистемы в языке теории множеств, а не анализа: было бы утомительно пробиваться сквозь формализацию метаматематики анализа.

Я скажу здесь несколько слов о технических применениях количественного ординального анализа нормальных фигур доказательства, хотя сходные соображения применимы к анализу фигур конверсии, рассматриваемому ниже в (ii).

Для достаточно сильного понимания «нормальности» оказывается, что граница на *ординальную величину* нормального вывода накладывает значительное ограничение на доказываемую теорему. Например (см. [65, стр. 422] по поводу нормальных выводов со свойством подформульности), вывод фундированности некоторого отношения имеет ординал, превосходящий ординал самого отношения. (В случае обычного исчисления предикатов первого порядка существенна *конечность* длины нормального вывода.) Здесь порядковый тип нормальной формы любого данного вывода является полезной характеристикой, даже если мы не углубляемся в детали его ординальной структуры.

Для подлинно практических приложений применимы соображения из § 2(b) о «неполных» интерпретациях. Совершенно очевидно, что из одной лишь теоремы об ординальной границе не могут следовать все результаты о независимости: хорошо известно, что добавление любого истинного Σ^1_1-суждения к формальной системе не меняет ее ординальной границы! (Хотя в общем случае оно изменит ее ординальную структуру.) Но *если* некий результат о независимости можно доказать столь грубым приемом, как рассмотрение одной только ординальной границы, то доказательство независимости будет, вообще говоря, очень легким.

(ii) Проблемы формализации процедур конверсии из § 2(a)(ii) продуманы гораздо меньше. Это неудивительно,

ибо, как уже упоминалось, этими процедурами в теории доказательств пренебрегали. Например, удовлетворительное (по крайней мере, в смысле ОТД, § 6(b) [8])) рассмотрение потребовало бы, кроме всего прочего, изучения *фигур вычисления или конверсии через* упорядоченные структуры. Еще не вполне ясно, действительно ли *каноническое* сопоставление ординалов этим фигурам, скажем для арифметики первого порядка, использует все ординалы $<\varepsilon_0$. Разумеется, мы знаем из § 2(c)(i), что *доказательство* фундированности в теории ординалов (с функциями следования, сложения, экспонентой) требует индукции $\leqslant\varepsilon_0$. Но это совсем не то, что определение реляционного типа самих фигур или наименьшего ординала, в который их можно вложить, точнее вложить посредством отображений, которые характеризуются условиями *определимости* (но не обязательно *доказуемости*).

Очевидно, что проблема *формализации теорем нормализации в теории ординалов* предъявляет минимальные требования к такой теории примерно так же, как и в п. (i) выше.

Будет, вероятно, нелишним углубиться в *природу* проблемы формализации, скажем, первоначального генценовского доказательства непротиворечивости *). Это объяснит и, я думаю, оправдает нежелание, с которым люди до сих пор брались за работу над этой проблемой. Как сказал кто-то: «Формализация — это внешний и видимый признак внутренней и невидимой благодати, а именно нашего понимания и постижения того, о чем мы говорим». (Формализация имеет для данного лица те же достоинства и недостатки, что и корректные манеры.) В частности, *главная* трудность состоит в том, чтобы решить, в каких терминах, в каком *языке* должна быть дана формализация, а этот вопрос наверняка не решается неформальным рассуждением. Затем нужно решить, какие пункты требуют особого внимания. Теперь будет справедливо сказать, что, хотя было непосредственно очевидно, что Генцен получил некоторую поразительную редукцию, не было ясно осознано даже наиболее фундаментальное и наиболее известное в настоящее время обстоятельство: ε_0-индукция применяется к бесквантворному, т. е. свободному от логики, предикату. Если не *стремиться* к бесквантворной формализации, то все сведется к блестящему парадоксу: Генцен доказал непротиворечивость обычной индукции, т. е. ω-индукции, посредством ε_0-индукции. Столь же к месту другой пример, где

*) Имеется в виду опубликованная версия, а не та, которую Генцен изъял в корректуре. См. статью «Как теория доказательств пришла к своим ординальным числам и как она приходит к ним теперь» в настоящем сборнике. — *Прим. перев.*

кто-то натыкается на формализацию, но не извлекает из нее выгоды. Как уже подчеркивалось в ОТД (§ 6 перед следствиями), Шютте [65] сформулировал в явном виде свойства некоторых ординальных функций, нужные для доказательства непротиворечивости. Но значение этих свойств не бросается в глаза, если смотреть только на формализацию. Оно было обнаружено, только когда мы стали *искать* его, в терминах внутренней характеризации естественной ординальной структуры на ε_0.

(b) В силу § 2(c)(iii) следует ожидать, что связи между ординалами или ординальными структурами и функциями (высших типов), используемых в интерпретациях из § 2(b), будут *в общем случае* слабыми. Точнее, теория ординальных структур, конечно, непосредственно относится к делу, если функции мыслятся как правила применения данных процедур вычисления или редукции. В этом случае минимальное требование на такую теорию совершенно аналогично требованию в (ii): фигура вычисления (или дерево вычисления, если правила вычисления детерминистские) должна быть определима и ее основные свойства должны быть доказуемы. Мы займемся этим вопросом в приложении I.

Но функции, которые имелись в виду, когда вводилась интерпретация отсутствием контрпримера или гёделевская интерпретация [4], не мыслились в то время как такие правила вычисления. Иными словами, существование подразумеваемых функций было очевидно по другим причинам. Конечно, с тех пор были установлены отношения между этими функциями (или, по крайней мере, схемами, которым они удовлетворяют) и ординальными структурами. Ср. ОТД, § 6(b) (интерпретация отсутствием контрпримера), для непрерывных функций, используемых в интерпретации отсутствием контрпримера, и говардовское сопоставление, упомянутое в примечании 8, для гёделевской системы T. Однако никакое усилие воображения не позволит утверждать, что эти соотношения были первоначальной причиной введения этих интерпретаций. Действительно, Гёдель в явной форме предложил принципы, сформулированные в T, в качестве *альтернативы* к генценовскому применению ε_0-индукции, и, следовательно, они независимы от последнего (но, возможно, менее элементарны, ср. § 2(c)(iii)).

Функции высшего типа, упомянутые в предыдущем абзаце, в качестве основного типа имеют натуральные числа. Позднее (ср. (c) ниже) изучались функции высшего типа над ординалами. Естественно, отношение между функционалами и ординалами здесь совершенно иное.

(i) В случае непрерывных (и, следовательно, экстенсиональных) функционалов *низшего* типа над натуральными числами с дискретной топологией на числах и топологией произведения на функциях связь оказывается более тесной, так как этот класс *функционалов* можно *породить индуктивно* [9]). Но, как только что упоминалось, многие из приводимых в литературе схем для таких непрерывных функционалов вводятся по другим причинам, в частности потому, что их вычислимость делается очевидной, если привлечь понятие свободно становящейся последовательности. В таких случаях вычислительная «процедура», которую мы имеем в виду, *оперирует не с индуктивным порождением, а с методом проб и ошибок.* Используя обычные соглашения (например, [20]), мы берем окрестную функцию f_0 на конечных последовательностях натуральных чисел, свободно становящуюся последовательность α и испытываем $f_0(\bar{\alpha}0)$, $f_0(\bar{\alpha}1)$, ..., $f_0(\bar{\alpha}2)$, пока не попадем на m, такое, что $f_0(\bar{\alpha}m) \neq 0$. Ср. вычисления на тех определениях рекурсивных функций, которые заданы в форме Клини $U[\mu_y T(e_0, n, y)]$, где для каждого n мы испытываем $T(e_0, n, 0)$, $T(e_0, n, 1)$, ..., пока не попадем на $T(e_0, n, m)$, которое истинно. Для этих определений (которые не следует смешивать с *вычислительными* нормальными формами в [64] или [54]!) очевидный порядковый тип вычислений имеет конечный ординал. Ср. также приложение I(a)(i).

Простое общее наблюдение, сделанное в предыдущем абзаце, подтверждается, вероятно, дальнейшей работой. С одной стороны, у нас есть простое доказательство вычислимости в [64, стр. 225—227] (обсуждаемое дальше в приложении I(a)) для замкнутых термов высших типов в гёделевской теории T [4], когда они мыслятся как обозначения вычислительных процедур, формулируемые в самой теории. С другой стороны, мы имеем осложнения (в [54]), возникающие из-за схемы бар-рекурсии типа 0, которую подсказывает понятие свободно становящейся последовательности. На нынешней стадии мы не знаем, является ли разница глубокой; см. также конец статьи Трулстра [55].

(ii) Для известных функций высших типов (или, точнее, для функций, удовлетворяющих *топологическим* условиям, вроде непрерывных функций из [20] или [50]) мы не знаем никаких простых связей с ординалами, в частности никакого индуктивного порождения, аналогичного (i).

Правда, с помощью теории конструктивных по Гёделю множеств мы получаем вполне систематический метод, позволяющий связывать *любую* теорию функционалов, которая может быть развита исходя из обычных аксиом теории множеств (или дополнительных аксиом, которые верны в L), с теорией ординалов. Нам нужно только ограничиться конструктивными по Гёделю функционалами и описывать последние так, как сделано, например, в [67]. Но это далеко выходит за рамки принципов, предусмотренных в существующей теории доказательств (согласно анализу в ОТД, начало § 12).

(iii) Совсем недавно Феферман [60] весьма интересно использовал подходящие *отрезки* конструктивной иерархии для установления связей между функционалами и ординалами (или, точнее, теоретико-числовыми функциями, которые определяются посредством функционалов конечных типов). Существенное отличие от предыдущего состоит в том, что, во-первых, рассматриваемые функционалы *не конструктивны* даже в том слабом смысле, чтобы иметь рекурсивные реализации для *функциональных* символов (т. е. неконструктивны даже в смысле теории видов). Во-вторых, ординалы встречаются не в виде описанных здесь ординальных структур, а просто как *ординалы иерархий.*

Так как теоретико-доказательственный анализ для формальных теорий тех *конкретных* иерархий (до ε_0-шагов), которые рассматривает Феферман, проводится вполне элементарными средствами, его работа может служить *промежуточной* ступенью на пути к конструктивной теории доказательств. (С точки зрения применяемого метода это следует сравнить с промежуточными приложениями теории моделей, упомянутыми в ОТД, дополнение II, и особенно с исследованиями самого Фефермана в [61]. Разница состоит в том, что вводятся не модели исчисления предикатов, а подходящие классы экстенсиональных функционалов.) Тем не менее в том смысле, как я понимал *предостережение* в ОТД, § 6(c), теперь необходимо предостеречь против этого предостережения.

(c) *Теории множеств и ординалов.* Традиционная теория доказательств изучала много формальных систем, сформулированных в языке арифметики или анализа (с переменными для натуральных чисел и их множеств). Этот выбор был естественным, когда хотели использовать конструктивные методы и, следовательно, избегать абстрактных допущений. Так как наиболее известные применения множеств и трансфинитных ординалов были чрезвычайно абстрактными, считалось, что уже само использование соответствующих языков может вызвать недоразумение. Времена изменились: мы лучше понимаем принципы и знакомы с вполне элементарными моделями аксиом в языке множеств и ординалов. Следовательно, вполне разумно и в теории доказательств исполь-

зовать эти изящные языки, которые, в частности, избегают громоздких процедур кодирования.

(i) Отношения между подсистемами обычных теорий множеств и (обычными) системами анализа обсуждались в ОТД, дополнение VI. Некоторые теории множеств, соответствующие подсистемам анализа, рассматривались в ОТД, дополнение VI(c), но с тех пор были изучены более интересные системы такого рода. Например, система Фефермана [59] (которая задумана как теоретико-множественная система, соответствующая его системе анализа IR из [57], или, эквивалентным образом, его иерархии разветвленного анализа), или изящная теоретико-множественная версия «бар-индукции» из [9], которая рассматривается без какой-либо систематической цели.

(ii) Отношения между теориями множеств и теориями ординалов: нерекурсивный шаг. Очевидный первый шаг, уже упомянутый в (b)(ii) — просто конкретизировать теорию конструктивных по Гёделю множеств в формулировке [67] применительно к подсистемам обычной теории множеств. С помощью стандартного приема обрушивания (collapsing argument) мы получаем минимальные фундированные модели.

В общем случае эти минимальные модели нерекурсивны в следующем смысле. Либо сама *область* содержит нерекурсивные ординалы, либо, если она есть отрезок α рекурсивных ординалов, то *ординальные функции* не реализуются рекурсивными функциями на естественном вполне-упорядочении α. (Эквивалентным образом, упорядочение нерекурсивно на области, построенной из *термов* теории.)

В качестве примера последней ситуации Зукер изучал минимальную модель группы 1 из [53] (в процессе анализа утверждений Ветте [3] об этой группе аксиом). Область состоит из ординалов $<\omega^\omega$, но легко видеть, что функции, упоминаемые в аксиомах, не реализуются рекурсивными функциями на (каноническом упорядочении ординала) ω^ω; ср. реферат на [3]. Как пример первой ситуации Правиц [46] описал изящную теорию ординалов (и конкретных функций на них), которая соответствует полному анализу. Здесь сама *область* нужных ординалов выходит за рекурсивные.

(iii) Отношения между теориями множеств и теориями ординалов, которые реализуются на сегментах *рекурсивных* ординалов $<|a|$ (где $a \in O$ [16]), таких, что ординальные функции на упорядочении $\{(x, y): x <_O y <_O a\}$ также рекурсивны. Большая часть работы в этом направлении была проделана после того, как был написан ОТД, хотя Говард ввел первый пример несколько лет назад в разд. VI распространявшегося частным образом Стенфордского доклада об основаниях анализа. Методы, использовавшиеся до сих пор, идут по следующему обходному пути. Формулируется кванторная теория ординалов и некоторых конкретных видов ординалов, соответствующая рассматриваемой подсистеме анализа или теории множеств. Например, для теорий, воплощающих известные принципы *обобщенного индуктивного определения* (о. и. о.), получается абсолютно стандартная редукция к теории ординалов: чтобы найти наименьшее множество X_A, удовлетворяющее $\forall x\,[A(P, x) \to P(x)]$ для монотонного свойства A, мы полагаем $P_0(x) \leftrightarrow A(\bot, x)$ и определяем по трансфинитной индукции последовательность P_α для ординалов $\alpha > 0$ с помощью соотношения

$$P_\alpha(x) \leftrightarrow (\exists \beta < \alpha)\, A(P_\beta, x),$$

где $x \in X_A \leftrightarrow \exists \alpha P_\alpha(x)$.

Эта кванторная теория *интерпретируется* в подходящей системе высшего типа Говардом loc. cit. в стиле Гёделя [52] для неитерированных о. и. о. и Зукером [12] для итерированных о. и. о. с использованием модификации из [19, 3.5.1]. «Подходящая» означает здесь, что можно использовать замкнутые термы в качестве области определения удобной в обращении модели. Для читателей, знакомых с гёделевским доказательством того, что континуум-гипотеза верна в L (совокупности конструктивных по Гёделю множеств), нынешние методы, впервые явно сформулированные Феферманом [57], лучше всего описать следующим образом. Как в (b)(ii), мы имеем в виду теорию конструктивных по Гёделю множеств, сформулированную в теории ординалов [71], причем теоретико-ординальное отношение $\alpha \, e \, \beta$ означает, что множество с номером α есть член множества с номером β.

Первый шаг — построить бескванторную систему, которая очевидным образом удовлетворяется «большим» (несчетным) отрезком ординалов, когда функциональные символы, включая константы, реализуются обычными ординальными функциями: назовем эту структуру 0^∞. Это соответствует тому шагу в «обрушивающем» рассуждении Гёделя, когда некоторый большой ординал добавляется к данному отрезку $<\alpha$ (где α — кардинал в L) и образуется «скулемовская оболочка». Последняя *не* заполняет целиком отрезок ординалов. Мы можем рассматривать образование скулемовской оболочки как построение *модели из термов*, состоящей из констант для ординалов $<\alpha$ и для добавленного ординала, а также из термов, образованных посредством функциональных символов f для используемых скулемовских функций. По определению реализация $\bar{f}$ функции f в модели из

термов (называемая также канонической реализацией) определяется действием

$$\bar{f}\colon t_1, \ldots, t_n \to ft_1 \ldots t_n$$

для всех n-ок термов (если f имеет n аргументов).

Следующий шаг обрушивающего рассуждения — рассмотреть упорядочение термов

$$\{(t_1, t_2)\colon t_1^s < t_2^s\},$$

где t^s — реализация t в скулемовской оболочке, т. е. ординал, который обозначает t. Для гёделевского доказательства существенны два следующих факта: ординал α_1 этого упорядочения имеет кардинал α (в L) и это упорядочение определимо в L_α. Это обеспечивает определимость скулемовской оболочки *вместе* с ее структурой, так как имеется очевидная индексация (в L_α) для термов и, следовательно, для канонической реализации функциональных символов; в частности, $\{(t_1, t_2)\colon t_1^s < t_2^s\}$ тоже определимо. (Очевидно, что скулемовская оболочка, рассматриваемая как теоретико-множественный объект, а не только как структура, вообще говоря, не определима в L_{α_1}.)

Для нашей теперешней цели нахождения рекурсивных моделей требуются аналогичные, но более тонкие аргументы. Вместо сохранения кардиналов мы хотим, чтобы α_1 был рекурсивным (для данного α). И вместо (инвариантной) определимости над L_{α_1} мы хотим, чтобы отношение

$$(*) \qquad \{(t_1, t_2)\colon t_1^\infty < t_2^\infty\}$$

было рекурсивным, где на этот раз t^∞ — ординал, который обозначается в 0^∞ термом t. Очевидно, что если это выполнено, то функциональные символы снова реализуются рекурсивными функциями (на этих термах).

Феферман [58] дает некоторые полезные общие условия на ординальные функции, для которых выполняется (*) В действительности в [58] он в основном заботится о более *элементарных* частях теории доказательств, где вообще не происходит никакого обрушивания (относительно применений обрушивания см., например, диссертацию Зукера [11]). Мы снова начинаем с бескванторной системы, которой очевидным образом удовлетворяют обычные ординальные функции над обычными структурами. Но теперь оказывается, что ординалы, обозначаемые (в этих обычных структурах) термами, в любом случае заполняют некоторый отрезок, т. е. системы *насыщены* (replete) в терминологии [58], и (*)

также имеет место. Короче, имеет место свойство *абсолютности* или *инвариантности*:

терм имеет одну и ту же величину независимости от того, получают ли функциональные константы свою подразумеваемую (обычную) или свою каноническую реализацию.

Интересное различие между итерированными и неитерированными о. и. о. состоит просто в следующем: в первом случае замкнутые термы, использованные в интерпретации [11], не обладают свойством инвариантности.

Замечание. Интерпретация Говарда бескванторная, и модель рекурсивна в том сильном смысле, что отношение $=$ (даже) между термами ненулевого типа может быть реализовано рекурсивным отношением. Интерпретация Зукера действительно позволяет иметь рекурсивную модель для области, функций и даже отношения $=$, но сохраняет *остаток логики* в форме двух видов, которые не реализуются рекурсивными предикатами. (Эта асимметрия между функциями и предикатами, разумеется, хорошо известна.)

С точки зрения *построения* ординальных структур, описанной в начале этого параграфа, применение функционалов высших типов на ординалах совершенно естественно. Функционал высшего типа соответствует размышлению (reflection) *о* процессе итерации операций низшего типа (хотя он не выявляет деталей этого процесса). Некоторые *формальные* понятия и аксиомы, выражающие это применение высших типов, можно найти в одной из статей Фефермана в сборнике конференции в Буффало [62]. Более тонкий анализ, ограничивающийся операциями на ординальных структурах (низшего типа), был дан Говардом [7] и Зукером [11] в терминах конкретных строительных функций, применяемых в иерархии Бахманна.

Очевидно, что в зависимости от интересов исследователя дальнейшая работа будет преследовать две цели, которые, по крайней мере *на первый взгляд*, принципиально различны. С одной стороны, в работу будут *вовлечены* принципы, подсказываемые известными теоретико-множественными конструкциями вроде процедур итерации по Мало. Можно сказать, что процессы — одни и те же, а отличаются лишь основные операции (прибавление единицы в конструктивном случае и образование множества-степени в теоретико-множественном случае!). Действительно с этой точки зрения развиваемые здесь ординальные конструкции должны служить *испытательным полигоном* для проблематичных аксиом бесконечности. В действительности может даже оказаться, что термин «аксиома бесконечности» не совсем подходит, т. е.

что (кардинальная) *величина* определяется, по существу, основными операциями и что *полная сложность* естественным образом присутствует уже в рекурсивном случае; ср. примечание 37 в ОТД [10]).

С другой стороны, будут исследоваться модели, построенные более тщательно, и будут сделаны попытки найти понятия, в терминах которых можно точно анализировать существенные различия. Например, я все еще не убежден, что разницей между итерированными и неитерированными о. и. о. можно пренебречь, даже допуская (и это кажется разумным), что найдена интерпретация логических операций, которая действительно подходит для использования о. и. о. (как объяснено, например, в ОТД, § 12(a)). Если это так, то более тщательное рассмотрение функционалов, использованных в интерпретациях Говарда и Зукера, может помочь нам найти понятия, нужные, чтобы сформулировать разницу.

§ 4. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ФУНКЦИИ

Примерно 40 лет назад Гейтинг [5] придал смысл основным логическим понятиям (утверждению, виду и операциям на них). Этот смысл объясняется при моем нынешнем прочтении в терминах *двух* исходных понятий, а именно *рассуждения*, или доказательства (в частности, доказательства тождеств, которые, разумеется, свободны от логики), и *функции*, аргументы и значения которой являются (наследственно) парами (p, π), где p и π означают соответственно доказательства и функции. Например утверждение «$(p_0\ \pi_0)$ устанавливает $A \to B$», сокращенно записываемое в виде

$$(p_0, \pi_0) \vdash A \to B,$$

означает, что p_0 есть доказательство тождества

$$[(p, \pi) \vdash A] \Rightarrow [\pi_0(p, \pi) \vdash B]$$

для всех p и π. Гейтинг записал также формальные законы, истинность которых усматривается (даже) при весьма грубом понимании этих двух исходных понятий доказательства и функции.

Приведем теперь самое важное соображение, которое следует запомнить.

Хотя Гейтинг *подразумевал*, что p будет пробегать конструктивные доказательства, а π — конструктивные функции, все, что он *на самом деле* сказал об этих исходных понятиях, и те законы, которые он в действительности сформулировал, лишь в очень малой степени использовали какой-либо детальный анализ ограничителя «*конструктивный*». Гейтинг отчетливо подчеркивал тот факт, что *любой* список формальных законов оставляет открытой возможность различных интерпретаций. Однако он не обратил внимания на то, что его конкретный список формальных законов оставляет слишком много возможностей.

(a) Как и следовало ожидать, гейтинговские законы оказываются неполными при более детальном анализе конструктивности, в частности в предположении, что конструктивные теоретико-числовые функции рекурсивны, и в этом случае множество верных законов (в языке логики предикатов) не является рекурсивно перечислимым [25] [11]).

Хотя очень естественно представлять различные типы «интерпретаций реализуемости» (обсуждавшиеся Трулстрой [55]) как варианты схемы Гейтинга (ср. [21, стр. 128—129, 2.31—2.32]), этого обычно не делают. Сюда вписываются и интерпретации логических операций «в терминах» формальной выводимости (такие, как у Правица [45]), где p теперь пробегает (доказательства, которые изображают) выводы в данной системе, а π — некоторый (очень ограниченный) класс функций. В еще одном варианте (использованном в первом из недавних обсуждений [19] схемы Гейтинга) «ведущая» модель придает p в качестве области изменения доказательства, которые наследственно формализуемы в некоторой прогрессии формальных систем, а π — функции, такие, что в приведенном выше определении $\to$ уровень (первого элемента) $\pi_0(p, \pi)$ не слишком отличается от уровня p. Ср. приложение I(c)(ii).

Замечание. При попытке создать формальную теорию конструкций (т. е. доказательств и функций) легко возникают парадоксы. Но, как обычно, это в равной мере может указывать как на то, что у нас слишком *много* разумных интерпретаций, так и на то, что у нас нет ни одной! Действительно, если мы вообще имели что-то в виду, когда формулировали формальные законы, которые оказывались противоречивыми, то это означает, что один закон верен или по крайней мере правдоподобен при одном понимании, а другой — при другом понимании. Если бы мы не имели в виду никакого истолкования, то предложенные законы даже не казались бы правдоподобными.

(b) Чтобы показать светлую сторону неполноты, отмеченной в п. (a), необходимо, разумеется, найти внутренне интересные или хотя бы полезные примеры среди необычных интерпретаций. Примеры, упомянутые в (a), вводят *ограни-*

чения на понятия, которые имел в виду Гейтинг, так как (ОТД, § 13) теория доказательств по традиции интересовалась особенно *элементарными* методами: она хотела быть редуктивной (в смысле Правица [47])[12]). Однако можно хорошо использовать и неконструктивные интерпретации. Например, работа Фефермана о «предикативности относительно понятия натурального числа» или, проще, о «сводимости к арифметике» использует неконструктивное понимание квантора по натуральным числам, и, таким образом, вполне к месту оказывается функционал E [17] для функциональной переменной α:

$$\mathbf{E}\alpha = 0 \leftrightarrow \exists x\,(\alpha x = 0), \quad \mathbf{E}\alpha = 1 \leftrightarrow \neg\exists x\,(\alpha x = 0).$$

Рассмотрения в [60], упомянутые уже в § 3(b), вполне удовлетворительны также и формально.

(c) *Явные определения.* Есть одно применение формальных законов Гейтинга, которое вообще не подходит под его схему, но, по-моему, гораздо ближе к интересам математической практики. Общие соображения таковы.

В обычной классической математике операции $\exists$ и $\vee$, так сказать, безработные. Они определимы явно через $\forall$, $\neg$, $\wedge$. Поэтому мы ищем формальные законы, которые воспроизводят обычные классические рассуждения для так называемого негативного фрагмента $\neg$, $\wedge$, $\forall$, но для экзистенциальных теорем и дизъюнкций мы требуем большего, чем истинность, т. е. мы требуем (для замкнутых формул), чтобы выполнялись условия

$\exists xA$ выводима (тогда и) только тогда, когда $A[x/t]$ выводима для некоторого терма t;
$A \vee B$ выводима (тогда и) только тогда, когда A или B выводимы[13]).

NB. Этих условий *не* требует (даже) конструктивная истинность, например в логике предикатов, вопреки почти общепринятому заблуждению! Рассмотрим формулы A и B логики предикатов, содержащие, скажем, единственную предикатную переменную X. Пусть X бинарна.

$A \vee B$ верна

в том и только в том случае, когда для всех видов D («D» — от domain — область) и всех $X^* \subset D \times D$ утверждение $A^* \vee B^*$ верно, когда переменные в A и B пробегают D и X заменена на X^*. Короче,

$$\forall D\,(\forall X^* \subset D^2)\,(A^* \vee B^*).$$

Но разумеется, не очевидно, что отсюда следует

$$[\forall D\,(\forall X^* \subset D^2)\,A^*] \vee [\forall D\,(\forall X^* \subset D^2)\,B^*].$$

Требование на экзистенциальные теоремы включает столь же, если не боле поразительную равномерность

$$\forall D \forall X^* \exists x^* A^* \rightarrow \exists t \forall D \forall X^* A',$$

где A' получается заменой x^* в A^* на значение t^* терма t в (D, X^*). Для формул A первого порядка t не содержит (символов для) D, X и t^* не зависит ни от D, ни от X. Для логик высшего порядка, использующих термы с абстракциями, t^* зависит от D и X, но t не содержит символа для D.

Теперешнее «нелогическое» использование законов Гейтинга особенно интересно в связи с различными формулировками *аксиомы выбора*. Как часто отмечалось, имеется почти общепринятое недоразумение, касающееся отношения между аксиомой выбора и явной определимостью, из-за того случайного обстоятельства, что в обычных формулировках аксиом теории множеств все аксиомы, кроме аксиомы выбора, утверждают существование множеств, для которых мы имеем явные определения. При этом не замечают, что имеются экзистенциальные теоремы без явных реализаций, которые являются классическими *логическими* следствиями этих аксиом (ОТД, § 1, *предостережение* 2). Иными словами, *неограниченное применение* (обычной) *классической логики не сохраняет явную реализуемость экзистенциальных теорем* (точнее, *доказуемую* реализуемость; ср. проблему (ii) в конце дополнения IV ОТД).

В противоположность этому, если мы используем гейтинговские правила и даже добавляем аксиому выбора (а также и негативный перевод аксиомы выбора; ср. [49]), то получаем реализации экзистенциальных теорем.

Замечание. Одна из причин, по которой мы предполагаем, что эти вопросы о реализациях существований ближе к интересам математической практики, состоит просто в том, что центральная задача интерпретации $\rightarrow$, которая обсуждалась совершенно явно в течение более чем 40 лет, просто не привлекла «общественного» внимания. Вопросы реализации существований привлекли его. С теоретической точки зрения для понимания этих последних вопросов не обязателен интерес к логике, а для понимания центрального вопроса он нужен. Было бы интересно знать, как мы взялись бы за *открытие* подходящих формальных законов, которые обеспечивают реализации экзистенциальных теорем (не имея в виду интерпретации самого Гейтинга). Забавно, что законы

Гейтинга естественным образом формулируются как классические законы минус добавочное правило

$$\neg\neg A \to A,$$

где квантор существования вовсе не упоминается!

(d) *Другие применения.* Более проблематичные, но также и претендующие на большее приложения гейтинговских формальных систем основаны на их корректности (обнаруженной Крипке [30]) для интерпретации логических операций, подсказываемой понятием *потенциальной* целостности или *расширяющейся* совокупности знаний. Я говорю «подсказываемой», а не «в терминах», потому что *последовательность* моделей, используемая для представления расширения универсума (или нашего знания), сама обычно трактуется в литературе как обыкновенное множество. Эта процедура вообще не дает эпистемологического анализа. Альтернатива к этому — рассмотрение логических операций, применяемых к потенциальным совокупностям, как *исходных*: интерпретация Крипке рассматривается не как объяснение или «редукция», а как утверждение о свойствах этих операций, полученных путем размышления об их смысле. При таком непредикативном взгляде на эти операции совершенно естественно их использование в формулировке их собственной «семантики».

Несколько человек, включая Крипке (ср. ссылку у Патнема [40, стр. 284]) и Посгая [41], предлагали использовать гейтинговские правила для анализа идеи порождения множеств путем *произвольных* итераций операции множества-степени (кумулятивная иерархия типов). В обычной теории множеств молчаливо предполагается, что рассматривается *отрезок* этой иерархии, так как иначе здесь неприменима классическая интерпретация квантора всеобщности, ибо нет множества всех множеств. Ср [21, стр. 101, 1.19—22, и примечание 12 на стр. 120]. Эта ситуация совершенно аналогична наивной финитистской идее порождения *всех* наследственно конечных множеств. Совершенно аналогично и изложение при условии, что вовсю используется *индукция по множествам*, соответствующая обычной индукции в арифметике. Например, в арифметике мы доказываем разрешимость равенства индукцией из аксиом для функции следования, а затем переходим к разрешимости формул, содержащих только ограниченные кванторы, предварительно вводя подходящие арифметические функции. Аналогично с помощью теоретико-множественной индукции мы доказываем разрешимость формул, содержащих только ограниченные кванторы,

исходя из разрешимости атомарных формул и существенно используя элементарные теоретико-множественные операции, соответствующие «подходящим» арифметическим функциям в арифметике.

Аксиому свертывания следует модифицировать, придав ей вид

$$\forall a \forall x_1 \ldots \forall x_n [\forall x (A \vee \neg A) \to \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow [x \in a \wedge A])],$$

где свободные переменные из A содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$ и y не входит в A. Ограничение разрешимыми формулами A требуется потому, что для рассматриваемого понимания *множества* (кумулятивная иерархия) множество — это корректно определенное единство (словами Кантора) с определенным экстенсионалом.

В [24, Note I § 2(b)] я предложил *принцип рефлексии* в форме

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (A \vee \neg A) \to$$
$$\to \forall \beta (\exists \alpha > \beta) \forall x_1 \ldots \forall x_n [(x_1 \in V_\alpha \wedge \ldots \wedge x_n \in V_\alpha) \to (A \leftrightarrow A_\alpha)$$

для произвольных A со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$, где α пробегает ординалы, V_α обозначает отрезок иерархии до α и A_α получается из A ограничением всех кванторов на V_α.

Нужно отметить, что из этих модифицированных схем следуют соответствующие обычные аксиомы, когда применяется «негативный» перевод (ср. ОТД, § 9(iii). Таким образом, *рассматриваемая интерпретация обосновывает использование классической логики применительно к перечисленным аксиомам.* Кстати, я не вижу никакого обоснования (при рассматриваемой интерпретации логических операций) для классически эквивалентной формы приведенного выше принципа рефлексии

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists \alpha [x_1 \in V_\alpha \wedge \ldots \wedge x_n \in V_\alpha \wedge (A \leftrightarrow A_\alpha)],$$

т. е. для нахождения α для данных значений $x_1, \ldots, x_n$, исходя только из формы A, не зная, является ли A вполне определенной. Оправдан только ее негативный перевод. Однако даже это не очевидно для «полного» принципа

$$\exists \alpha (\forall x_1 \in V_\alpha) \ldots (\forall x_n \in V_\alpha)(A \to A_\alpha);$$

ср. примечание 6 на стр. 10 в [31].

Тот, кто прочел [24, Note I § 2(b)], заметил, что обоснование принципа рефлексии должно использовать конкретные свойства понятия множества, а не просто тот факт, что области изменения наших переменных неопределенны. Эти свой-

ства не могут иметь места также и для (финитистской идеи) индефинитной иерархии наследственно конечных множеств, так как для последней принцип рефлексии не имеет места. По-видимому, существенный момент заключается в том, что финитист может доказать A, используя принцип порождения $x, y \to x \cup \{y\}$ (в своем языке), относительно которого не замкнуто ни одно конечное V_α. (Здесь мы имеем еще один пример утверждения о множествах, о котором нельзя сказать, что оно «перенесено» с наших представлений о конечных множествах, ср. [24, Note I § 1(b) (особенно подстрочное примечание 9)].)

Замечание. Основной вопрос здесь состоит не в корректности гейтинговских правил. Неоднократно подчеркивалось, что они обычно оказываются корректными каждый раз, когда мы говорим, хотя бы очень неопределенно, о каких-то процессах. Вопрос в том, плодотворна ли гейтинговская схема при исследовании некоторого *конкретного* процесса, ср. подстрочные примечания 16 и 19 в [24, Note I] или примечание 3 в [26]. Например, Шютте [65], следуя идеям Аккермана (ср. 1), обсуждает разумные логические законы для «неопределенных» свойств, для которых $A \leftrightarrow \neg\neg A$.

Приложение

ВЫЧИСЛЕНИЯ И ФОРМАЛИСТСКИЕ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Рассматриваемые здесь вопросы не созрели еще для систематического изложения, хотя интерес к ним в последнее время оживился (см. [54] или статью Правица [48]) после работ Карри и Лоренцена, в частности оперативной логики последнего. На нынешней стадии, кажется, полезно задать три вопроса, которые не были освещены в литературе:

(α) Каковы *общие* цели этого рода исследований?

(β) Каковы *точные* отношения между этими исследованиями и более известным материалом, изложенным в литературе?

(γ) Для каких (математических) результатов действительно *нужны* эти исследования?

Правила (или функции) рассматриваются в пп. (a) и (b) ниже, а логика — в (c).

Рассмотрим (α). Кажется ясным, что общая цель — заменить наши обычные непредикативные понятия на понятия, удовлетворяющие основному *формалистскому требованию*:

все участвующие объекты должны быть явно перечислены.

Этот вид редукции аналогичен рассмотренному в [25], где абстрактные непредикативные понятия заменены *рекурсивными*, но более радикален. Разница состоит в том, что хотя, конечно, имеется «перечисление», нет *внутреннего*, т. е. рекурсивного, перечисления рекурсивных определений. Шаги от абстрактных версий к рекурсивным приведены в (a)(i) и (c)(i) для вычислений и логики соответственно.

Рассмотрим (β). «Известный» материал состоит, разумеется, из вышеупомянутых рекурсивных версий. Принцип использования этих (формалистски неприемлемых) версий общеизвестен и заключается в том, чтобы

> формулировать явно свойства замкнутости данного класса рекурсивных операций, необходимые для проверки рассматриваемых конкретных законов (которые имеют место для абстрактной интерпретации).

Иными словами, явная формализация хороша для формалистских оснований. Отсюда следует, что к *некоторым* формалистски приемлемым интерпретациям обычно легко прийти исходя из известных работ, и основная плодотворная проблема для современных исследований — проанализировать, каким дополнительным требованиям должны удовлетворять формалистские основания: вопрос представляет не существование какой-нибудь (последовательной) формалистской интерпретации, а выбор среди таких интерпретаций. Этот вопрос будет рассмотрен в (b)(iii) и (c)(iii) в терминах *выразительной силы* (простых языков), обеспечиваемой формалистскими интерпретациями. Иными словами, здесь нам не нужно принимать формалистскую *философию* математической точности и математического умозаключения, которая требует формалистских интерпретаций, однако мы ожидаем, что последние будут полезны в тех областях, которые носят формалистский характер. Например, подготовка любой математической задачи для вычислительной машины составляет некоторый вид формалистской редукции. Можно ожидать, что здесь имеется полезная общая теория, сравнимая с теорией моделей, которая является общей теорией аксиоматических систем и оказалась полезной в математической практике.

Рассмотрим (γ). Мы сравниваем главным образом результаты для конкретной системы T (введенной Гёделем в [4]), полученные применением «грубой» рекурсивной модели HRO из [55], уже упомянутой в § 2(c)(iii), и формалистской интерпретации из [54], ср. (b)(ii). В действительности главная плодотворная проблема здесь — это *поиски* (интересных) задач, для которых нужны более утонченные формалистские интерпретации.

Кроме этих общих положений (α) — (γ), которые имеют аналоги почти для всех наук на соответствующей стадии их развития, вводятся два *специфических соображения.*

Во-первых, различие между теми формалистскими основаниями, которые сохраняют *абстрактный непредикативный остаток в метаматематических объяснениях*, и теми, которые, грубо говоря, наследственно *свободны от логики.* См. введение к [25] относительно соответствующей ситуации для рекурсивных вариантов, в частности о логическом остатке в кванторной комбинации ∀∃, используемой для определения «рекурсивности». Сюда имеет отношение (b) (i) и особенно (c) (ii).

Во-вторых, как уже упоминалось в самом начале этой статьи, я предлагаю использовать формальные отношения, которые были обнаружены в процессе работы над формалистскими основаниями, *для анализа самих абстрактных понятий*, ср. (c) (iii). Это следует рассматривать не как некий *искусственный прием* (подсказанный моим недоверием к описанной выше формалистской философии), а просто как пример применения традиционной процедуры. Например, когда мы изучаем абстрактное понятие *множества*, то рассматриваем также совокупность L_ω наследственно конечных множеств, порожденную из $\varnothing$ операцией $x, y \to x \cup \{y\}$, и формулируем аксиомы и определения, истинные для L_ω. Но как только наше внимание обратилось к этим аксиомам, мы начинаем сначала и спрашиваем, верны ли они также и для абстрактного понятия; ср. примечание 13 на стр. 146 в [25].

Я начинаю с вычислений (а не с логики), так как здесь, хотя бы иногда, наше *обычное* понимание носит формалистский характер. В частности, когда мы записываем формулу

$$(*) \qquad 0 + s0 = s0$$

(где s — символ функции следования), то иногда подразумеваем, что сама формула (*) получена *применением определяющих равенств для сложения*

$$a + 0 = a, \quad a + sb = s(a + b).$$

Здесь молчаливо подразумевается, что левая часть определяющего равенства заменяется на его правую часть (а не наоборот) до тех пор, пока замкнутый терм не сведется к своей *канонической форме*, а именно к *цифре* 0, $s0$, $ss0$, ... Таким образом, определяющие равенства играют *двойную роль* — как *правила вычислений* в описанном выше смысле и как *утверждения* об отображении цифр в цифры, которое определяется этими правилами вычисления. Это различие подлинное. Например, нигде не определенная функция вычисляется по правилу «заменить fa на $2fsa$», но *константная* функция $\dot{0}$ удовлетворяет равенству

$$fn = 2f(n + 1) \quad \text{для всех } n.$$

Оставшаяся часть этого приложения будет весьма концентрированной и предполагает хорошее знакомство с цитируемой литературой.

(a) *Семантика* системы T, которая здесь, как и в [4], рассматривается как *исчисление равенств.* Таким образом, как известно из опыта редукции примитивно рекурсивной арифметики к такой форме, нам нужен *функционал равенства* (здесь — для каждого конечного типа σ), и *индукция* формулируется в виде такого правила:

Для термов t_1, t_2 типа $0 \to \sigma$ можно вывести $t_1 n = t_2 n$, если $t_1 0 = t_2 0$ и $t_1 sn = tn(t_1 n)$, $t_2 sn = tn(t_2 n)$ были выведены для некоторого терма t типа $0 \to (\sigma \to \sigma)$ с переменной n типа 0.

Тогда интерпретация или «реализация» должна придавать смысл только константам, переменным и знаку $=$. Для *конструктивной* трактовки было бы естественно потребовать также специального класса *доказательств* (для формул со свободными переменными), как в [28, стр. 202, строка 11 снизу]. Хотя на некоторой более поздней стадии будет, вероятно, полезно рассмотреть *все* модели T, для нашей нынешней цели — ответа на вопросы (α) — (γ), сформулированные в начале этого приложения,— существенно отобрать модели, *имеющие отношение к делу.*

Мы отсылаем читателя к [4], где изложено то понимание, в терминах абстрактных непредикативных понятий *конструктивной функции конечного типа* над натуральными числами и *равенства по определению*, которое привело (Гёделя) к формулировке системы T. В противоположность наиболее привычной идее функции конечного типа в конструктивной математике даже для $\sigma \neq 0$ операция типа $\sigma \to \tau$ ***работает не на «аппроксимациях» к аргументу (типа σ)***, а на правиле (или *определении* этого аргумента). Таким образом, мы не ожидаем экстенсиональности и, как следствие, непрерывности. Любые *общие сомнения* по поводу смысла этих объяснений быстро рассеиваются с помощью рекурсивного варианта HRO, развитого Трулстрой в [55] и уже упомянутого в § 2(c)(iii).

(i) Здесь *область* модели для системы T состоит из HRO, *наследственно рекурсивных операций*, т. е. (физических) *программ* для машин Тьюринга, которые (наследственно) корректно определены. Отношение $=$ реализуется *буквальным* (графическим) *равенством.*

Замкнутые термы интерпретируются как программы таким образом, что аксиомы системы T верны в этой модели. Для ссылок в п. (b) ниже: мы можем также получить немеханические модели, например наследственно гиперарифметические операции.

Очевидно, что при этой интерпретации не любой объект из HRO имеет *имя* в T, что неприемлемо для формалистских оснований: модель HRO не является рекурсивно перечислимой. Следующее *усовершенствование* типично для того применения рекурсивных моделей, которое упомянуто во введении.

Так как T — бескванторная система, мы усекаем HRO до тех программ, которые *имеют* имена в T (и рассмотрение показывает, что можно найти примитивно рекурсивное перечисление для каждого конечного типа). Так как каждая программа из HRO корректно определена для *всего* HRO, она автоматически корректно определена для наших подклассов.

Обсуждение. Хотя результаты из [55], к которым мы вернемся ниже в п. (b), показывают, что HRO (и, более общим образом, программы для машин) являются превосходным инструментом для изучения T, не столь ясно, что T, и особенно ее язык, обладает структурой, достаточной для того, чтобы выражать интересные факты о программах. В частности, хотя T обладает некоторыми неэкстенсиональными чертами и позволяет нам вводить операции, которые дают различные результаты в применении к различным, но экстенсионально эквивалентным программам, она ничего не говорит об исполнении *самих* программ. На более техническом уровне даже модель HRO имеет некоторые недостатки, так как она вводится с помощью клиниевского предиката T. Это обеспечивает хорошую нормальную форму для рекурсивных *функций*, но не для *вычислительных процедур*. Как упомянуто в § 3(b)(i), Клини располагает в ω-порядке все возможные вычисления, т. е. (конечные) выводы в его конкретном исчислении равенств, и вычисление, «исходя из» рекурсивного равенства, скажем e, состоит в прохождении по этому списку до тех пор, пока мы не наткнемся на вывод, который действительно является вычислением! (Несомненно, что такая процедура отличается от простого проведения (имеющего отношение к делу, т. е.) последнего вывода.)

(ii) Модели, более непосредственно связанные с T, можно определить с помощью понятия *наследственно вычислимого терма*, введенного в [54] (где вместо «вычислимый» используется «конвертируемый»). Существенный шаг состоит в том, что среди аксиом (= равенств) выбираются *определяющие равенства* для констант t, имеющие вид, скажем, $t=t_1$. Они используются как *правила вычисления*, определяемые отношением непосредственной редукции, скажем $\circ\!\!\rightarrow$, где $t'\circ\!\!\rightarrow t''$ означает

t'' — результат замены некоторого подтерма t в t' на t_1.

Отношение $\circ\!\!\rightarrow$ примитивно рекурсивно и финитно (т. е. имеется лишь конечное число t'', таких, что $t'\circ\!\!\rightarrow t''$). Эта терминология [14]) оправданна из-за свойства сильной вычислимости $\circ\!\!\rightarrow$: любая редукционная последовательность ρ, начинающаяся с t, обрывается на несводимом (т. е. таком, к которому неприменимы редукции) терме $|t|_\rho$ и $|t|_\rho$ *единствен* с *точностью до конгруэнтности*. Эта нормальная форма для t обозначается через $|t|$.

Нужные метаматематические принципы

совершенно элементарны при доказательстве конгруэнтности, т. е. *непротиворечивости правил вычисления*, и

содержат ε_0-рекурсию при *нахождении* нормальных форм (в том смысле, что для $\alpha<\varepsilon_0$ имеется t_α типа $0\to 0$, такой, что $|t_\alpha s^n 0| = s^{f n}0$ и f не является α-рекурсивной).

(Это показывает также, что *транзитивное замыкание* отношения $\circ\!\!\rightarrow$ не является α-рекурсивным [15]).) Точнее, нужны переменные для последовательностей, чтобы *выразить*, что *любая* редукционная последовательность ρ обрывается, но доказательство не требует сильных экзистенциальных аксиом о ρ и может быть формализовано в консервативном расширении ε_0-арифметики; ср. также (b)(i).

Чтобы описать три модели $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ для T ($\mathfrak{T}$ от слова «терм» (term), $\mathfrak{N}$ — от «нормальный терм» (normal term), $\mathfrak{M}$ — от «отображение» (mapping)), мы используем $\equiv$ для обозначения конгруэнтности, t — для *замкнутых* термов и t_1 — для замкнутых термов типа σ, если t типа $\sigma\to\tau$. Пусть $\bar{t}$ обозначает *отображение* (функцию) $|t_1|\mapsto|tt_1|$, если t типа $\sigma\to\tau$, и $|t|$, если t типа 0, и пусть $\dot{=}$ обозначает *экстенсионально равенство* между такими отображениями. *Области* вводимые ниже моделей состоят из реализаций (всех) замкнутых термов.

	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{M}$
t	t	$\|t\|$	$\bar{t}$
$t=t'$	$\|t\|\equiv\|t'\|$	$\|t\|\equiv\|t'\|$	$\bar{t}\doteq\bar{t}'$
(возможно) соединение	$t,\ t_1\mapsto tt_1$	$\|t\|,\ \|t_1\|\mapsto\|tt_1\|$	$\bar{t},\ \bar{t}_1\mapsto(\overline{tt}$

Таким образом, $=$ реализуется, по существу, тождество в $\mathfrak{N}$ (но не в $\mathfrak{T}$). Обычно соединение рассматривается ка

чисто синтаксический комбинатор на термах, и ему не сопоставляют реализации с помощью какой-либо операции применения (и сама эта операция не является *применением* функции даже в $\mathfrak{M}$). Это обстоятельство влияет на теоретико-рекурсивную сложность описания $\mathfrak{N}$, так как множество нормальных термов и отношение конгруэнтности примитивно рекурсивны, но отображение $|t|$, $|t_1|\mapsto|tt_1|$ не таково.

Метаматематические принципы, нужные для установления того, что эти объекты являются моделями системы T, включают ε_0-рекурсию, так как вклинивается отображение $t\mapsto|t|$. (Если, в педантичной манере [28, стр. 202(b)], реализация формулы с переменными предусматривает *доказательство*, мы можем взять доказательства, выражаемые выводами в самой системе T.) Очевидно, что *непротиворечивость* системы T утверждает больше, чем непротиворечивость ее правил вычисления (которые задают определяющие равенства), ибо T содержит такие *правила вывода*, как индукция или подстановка, которые дают возможность сокращения; например, мы выводим $0+a=a$ и получаем $0+s^n0=s^n0$ путем подстановки, не углубляясь в вычисление $0+s^n0$ из определяющих равенств для сложения.

Замечание. Как и следовало ожидать от формалистской концепции, которая замалчивает различия между типами, как рассматриваемые *данные* (для отношения вычислимости $\circ\!\!\rightarrow$), так и наши *утверждения об этих данных* (формулируемые в T) представляются похожими формальными процедурами. Но их роли различны. В языке теории моделей $\circ\!\!\rightarrow$ определяет (более или менее непосредственно) диаграмму *данных* моделей, в то время, как для аксиом и правил T мы *показываем*, что они истинны в этих моделях. Отсюда выражение «правило вывода», употребленное выше. Конкретные модели $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ являются *каноническими* в том смысле, что в T имеется *имя* для каждого элемента из их областей.

(iii) Откладывая пока до п. (b) обсуждение (ii), мы можем упомянуть *стандартные* обобщения (ii). Так, мы могли бы, обращая хронологический порядок, вместо выбора определяющих равенств по данному исчислению равенств начать с подходящего класса вычислительных отношений $\circ\!\!\rightarrow$ и искать исчисления равенств, истинные для них в смысле (a)(ii). Отметим, что (a)(ii) осмысленно, даже если $\circ\!\!\rightarrow$ определено для объектов, не имеющих имени в рассматриваемом исчислении равенств. («Подходящего» здесь означает, что класс велик, но удовлетворяет многим аксиомам или правилам.) Или мы можем искать удобные в обращении синтаксические условия на множества равенств, которые обеспечивают сильную вычислимость (всех замкнутых термов, построенных из символов, входящих в эти равенства). Иными словами, мы спрашиваем: что такое определяющие равенства? В качестве следствия можно ожидать информации об *общих* расширениях классов определяющих равенств, которые сохраняют вычислимость, таких, как известное добавление *функционала равенства* E со следующими правилами редукции для замкнутых термов t, t':

$$\text{из}\quad |t|\equiv|t'|\quad\text{вывести}\quad E(t,t')=1,$$
$$\text{из}\quad \neg|t|\equiv|t'|\quad\text{вывести}\quad E(t,t')=0.$$

Предостережение. Чтобы наши гипотезы были осмысленными, следует четко осознавать различия между вычислениями, или конверсиями, с одной стороны, и доказательствами — с другой (даже если внутри некоторого ограниченного контекста мы имеем экстенсиональную эквивалентность между ними). Это хорошо иллюстрируется наличием *свободных переменных в определяющих равенствах* системы T. Возможность привести термы из T к нормальной форме, быть может тоже содержащей свободные переменные, устанавливается так же, как для замкнутых термов, и, следовательно, $\{(t',t''): |t'|\equiv|t''|\}$ рекурсивно. Тщательное рассмотрение показывает, что для констант t', t'' типа $\sigma\to\tau$ и *переменной* a типа σ

$$|t'|\equiv|t''|\Leftrightarrow|t'a|\equiv|t''a|.$$

Разумеется, также и

$$|t'|\equiv|t''|\Rightarrow\underset{T}{\vdash}t'=t''.$$

Однако, хотя обратное утверждение верно для *замкнутых* термов, оно неверно в общем случае для открытых термов. Действительно, для примитивно рекурсивных термов t', t'' типа $0\to0$ множества

$$\{(t',t''):\ \underset{T}{\vdash}t'a=t''a\}\quad\text{и}\quad\{(t',t''):\ \exists n\ \underset{T}{\vdash}t's^n0\neq t''s^n0\}$$

не являются даже рекурсивно отделимыми. Конечно, было бы интересно непосредственно проанализировать различие между вычислениями и встречающимися здесь правилами вывода, но до тех пор нам лучше придерживаться его неявно, если мы вообще хотим работать в этой области.

Для описания приведенных выше фактов подходит теоретико-модельная терминология. Так, T *корректна* относительно своих собственных правил вычисления, т. е. для замкнутых термов t' и t''

$$(\underset{T}{\vdash}t'=t'')\Rightarrow|t'|\equiv|t''|,$$

и T *полна*, так как

$$(|t'| \equiv |t''|) \Rightarrow \underset{T}{\vdash} t' = t''$$

(последнее даже для *открытых* t' и t'').

(b) *Обзор ситуации.* Не углубляясь в вопросы о том, почему были введены модели HRO из (a)(i) и $\mathfrak{T}$ или $\mathfrak{N}$ из (a)(ii) или возникло желание сопоставлять ординалы термам из T в (i) ниже, мы рассмотрим некоторые философские и математические приложения.

(i) Гёдель в [4] хотел использовать (свойства понятия конструктивной функции конечного типа, кодифицированные в) T для *доказательства непротиворечивости* формальной арифметики. Модели HRO, $\mathfrak{T}$ или $\mathfrak{N}$ не подходят, так как они определены непосредственно в арифметических терминах со следующей разницей: HRO даже экстенсионально не является арифметической, в то время как $\mathfrak{N}$ имеет примитивно рекурсивную область и отношение $=$ (хотя применение функции к аргументу там не примитивно рекурсивно). *Доказательство*, например в [54], показывающее, что $\mathfrak{N}$ является моделью, использует всю арифметику вместе с принципом рефлексии для $\forall\exists$-формул. (Оно применяет индукцию к логически сложному предикату вычислимости, чтобы показать, что последний примитивно рекурсивен, более того, все термы вычислимы.) Хорошо известно, что это эквивалентно ε_0-рекурсии (достаточно применить генценовские синтаксические преобразования, рассмотренные в § 2).

Другим способом *эта* теоретико-доказательственная эквивалентность может теперь быть установлена путем формальной редукции к T из [4] вместе с сопоставлением ординалов $<\varepsilon_0$ термам из T в [6] (или в более ранней, но оставшейся незамеченной работе [63]), причем использованные метаматематические принципы — одни и те же. Общие затраты труда при этих двух способах в рассматриваемом здесь частотном случае формальной арифметики, вероятно, примерно одинаковы. См. § 2(b) и обзор [23] относительно преимуществ второго способа (функциональной интерпретации) для *расширений* арифметики, где ординальный анализ необозрим. Естественно, этот путь действительно привлекателен, если обнаружено, что рассматриваемые правила вычисления представляют независимый интерес.

В [4] упоминается, но не используется равенство по определению между термами типа $\neq 0$. Тейт в [54] выражает сомнения в осмысленности равенства по определению $t=t'$, если не перечислены все возможные *аргументы* t и t'. Каковы бы ни были достоинства такого перечисления, модель HRO ясно показывает, что эти сомнения необоснованны (и это же показывают неканонические модели, упомянутые в (a)(iii), если предпочтительны модели в стиле [54]) [16]).

Наконец, стоит, вероятно, заметить, что в соответствии с примечанием 6 из [25] механический характер рассматриваемых правил не существен для понятия равенства по определению, ср. (a)(i).

(ii) Конкретные математические применения модели $\mathfrak{N}$, подчеркивавшиеся в [54], например свойство *консервативности расширения* для T^ω (т. е. T с разрешимым $=$ и интуиционистской логикой для функций конечных типов) относительно арифметики первого порядка, могут также быть получены с помощью HRO. Это даже проще, как и следовало ожидать в силу § 2(b), поскольку HRO — более «грубая» модель.

По-видимому, $\mathfrak{N}$ дает больший эффект, когда главным объектом изучения являются сами определяющие равенства (а не общие модели) системы T. Но, вероятно, $\mathfrak{N}$ — все еще наилучший инструмент для следующего результата, где не упоминаются «определяющие равенства».

Имеется *свободная* модель системы T, т. е. такая модель, что для замкнутых термов t_1, t_2

$t_1 = t_2$ истинно в модели тогда и только тогда, когда $\underset{T}{\vdash} t_1 = t_2$,

и эта модель *рекурсивна*.

Все еще в предположении, что система T интересна сама по себе, более поразительным применением (a)(ii) является установление связи между (функциями из) T и подлинной упорядоченной структурой, а именно (фундированным) *отношением вычисления*, которое индуцировано определяющими равенствами, читаемыми слева направо, и, по-видимому, имеет (порядковый) тип ε_0 (ω исключается в силу замечания в примечании 14). Как и в примечании 15, ε_0 имеет здесь экстенсиональное, а не вспомогательное метаматематическое значение. Связь между формальными принципами T и ε_0 уж наверняка не очевидна из рассмотрения HRO или (см. обсуждение в § 3(b)) из первоначальной интерпретации T.

Однако наиболее плодотворный шаг в настоящее время — *поиски* существенных сильных результатов. Гудмен (Goodman N. The theory of Gödel functionals. — J. Symbolic, Logic, v. 41, 1976, p. 574—583) показал, что свойство консервативности расширения сохраняется, когда к T^ω добавляются *аксиомы выбора*. Здесь, кажется, недостаточна ни $\mathfrak{N}$, ни HRO, хотя один из наиболее интересных результатов в [55] утверждает, что непротиворечиво допущение о том, что HRO удовлетворяет аксиоме выбора.

Замечание относительно результатов о консервативном расширении. Технически они служат для того, чтобы явно *сформулировать* неясно ощущаемые «различия» между разными метаматематическими исследованиями. Например, простой $\neg\neg$-перевод показывает только, что классический анализ консервативен над теорией видов для $\forall$-формул, в то время как работа Спектора была использована в [25], чтобы обобщить это на $\forall\exists$-формулы;ср. § 2(a) (ii). Но, рискуя показаться высокопарными, мы можем сказать больше: они устанавливают *свойства адекватности или автономности языков и принципов вывода.* Напомним, что, когда мы обосновываем аксиомы в конструктивной математике, скажем в арифметике, мы говорим о *доказательствах* и *функциях* (на доказательствах), т. е. о понятиях, которые вообще не упоминаются в языке формальной арифметики. Действительно, расширение языка (и принципов) составляет наиболее известный метод усиления обязательно неполных систем арифметики (например, когда индукция применяется к предикатам в более широком языке), а результаты о консервативном расширении устанавливают *адекватность относительно добавления некоторых принципов, формулируемых в более широком языке.* Можно по справедливости сказать, если удалить доктринерские элементы программы Гильберта (ср. ОТД, дополнение I(c)), что *редуктивная теория доказательств в собственном смысле слова требует результатов о консервативном расширении, а не только о непротиворечивости.*

(iii) Если мы согласны с тем, что система T интересна, то (i) и (ii) содержат полезное резюме ее более тонких формальных свойств. Но, как не устают повторять формалисты, важность формальных систем зависит от наших «целей». Формалистская трактовка (ii) (ср. (i) выше) не способствует единственной явно сформулированной цели введения системы T — доказательству непротиворечивости арифметики. Так какие же цели преследуются здесь?

Хотя (a)(i) и (a)(ii) упоминают правила *вычисления*, нельзя утверждать, что конкретные правила системы T, оперирующие на термах высших типов, очевидным образом типичны для действительной практики теоретического программирования (computer science). Более перспективную цель можно будет, вероятно, найти, если рассматривать, как в [54], описание T с использованием комбинаторов и считать, что *комбинаторы дают язык для систематической теории формальных процедур*, как *теория множеств* дает язык для *классической* (экстенсиональной) *математики.* Эта разумная цель иногда затемняется блестящими, но искусственно притянутыми аллюзиями рефлексивных парадоксов.

Семантика комбинаторов более утонченна, чем модель $\mathfrak{T}$ или $\mathfrak{N}$ в (a)(ii), где каждый терм t в (исчислении равенств) T обозначает самого себя или по крайней мере свою нормальную форму. Короче, t обозначает объект *внутри* отношения вычисления. Комбинаторы должны выражать нечто *об* отношении вычисления. Или, используя знакомую теорию моделей, *комбинаторы должны играть роль логических операций.* Равенства, не содержащие комбинаторов, должны соответствовать атомарным формулам, которые обозначают отношения *в* рассматриваемых моделях, в то время как логически сложные формулы выражают нечто *о* модели, обозначая объекты в теоретико-множественной *сверхструктуре* над моделью (формулы первого порядка обозначают подмножества предметной области модели). Как иногда говорят философы, логические операции не «представляют» ничего (*в* модели). И введение комбинаторов или чего-то похожего подсказывается тем, что *использование логически сложных формул оказалось изумительно эффективным для выражения понятий и фактов, относящихся к математическим структурам, о которых мы*, т. е. математики, изучавшие эти структуры, *действительно хотим знать*! (Например, понятия бесконечности, сходимости, равномерной сходимости могут быть систематически выражены в языке арифметики первого порядка с ее обычной интерпретацией.)

Но здесь параллель кончается. *Выразительная сила* теоретико-модельной интерпретации нашего обычного логического языка уже *установлена.* У нас есть значительная масса неформальной математики, *и* у нас есть Principia, где проверено, что эта масса понятий и результатов может быть сформулирована в языке теории множеств (с его обычной интерпретацией). В проектируемой теории формальных процедур у нас нет аналога Principia. В действительности вряд ли мы располагаем аналогом массы неформальной математики, упомянутой выше. Вероятно, до поисков языка (комбинаторов), подходящего для *систематической* теории вычислений, мы могли бы скромно спросить себя, что мы вообще хотим знать о них на самом деле.

(c) *Формалистские семантики.* Непредикативный исходный пункт — гейтинговско-брауэровское объяснение логических частиц. Точнее, у нас есть два варианта, один из которых *использует* логику в самом объяснении (ср. также § 4(d) в связи с моделями Крипке), а другой *сводит* всю логику к доказательствам тождеств, т. е. утверждений, не являющихся логически составными. Ср., например, [25, примечание 11, стр. 146] относительно «операций» и «суждений».

Мы отсылаем читателя к статье Правица [48] за двумя примерами формалистских интерпретаций (удовлетворяющих формальным законам Гейтинга). Одна, в гл. IV из [48], — это *абстрактная* функциональная схема, использующая знакомые λ-термы. Другая, названная в приложении А *операционной*, более конкретна и использует операции (нормализации) на формальных выводах в обычных системах (добавленных к произвольным постовским системам). Обе используют логику в метаматематических объяснениях, как и первый из упомянутых выше гейтинговских вариантов [17]).

К настоящему времени нет и тени сомнения в ценности для современных теоретико-доказательственных исследований формалистских интерпретаций, которые, согласно гл. IV из [48], связывают термы, рассматриваемые вместе с правилами вычисления, и выводы, рассматриваемые вместе с правилами нормализации. Даже совсем грубая идея такого гомоморфизма оказалась полезной. В одном направлении, процедуры нормализации для теории видов были подсказаны жираровскими вычислениями термов [10], а, в противоположном направлении, назначение ординалов термам, предложенное Хината [63], было подсказано одним из ординальных анализов выводов по Такеути.

Что же касается исходных вопросов (α) и (γ) из этого приложения, приведенные выше ссылки дают весьма хорошее представление об общих целях формалистской семантики и ее математических применениях. (Представляется правдоподобным, что материал о T, сообщенный в (a) и (b), можно получить как следствие, если *правила вычисления* T понимать как подходящие постовские правила.) Остается рассмотреть вопрос (β) и, разумеется, в соответствии с (b)(iii) выразительную силу формалистских интерпретаций.

(i) *Логически сложная* (*рекурсивная*) *реализуемость*. Это рекурсивный «посредник» между абстрактным понятием и его формалистской заменой. Чтобы избежать часто поверхностных, но отвлекающих деталей, я начну с некоторых тривиальных модификаций первоначальной реализуемости Клини (для теории чисел). Ср. также изложение Трулстры [55]. Мы пишем $R(e, \alpha)$ вместо

e реализует (замкнутую) формулу α.

Для *атомарных* формул α Клини полагает $R(e, \alpha) \Leftrightarrow \alpha$, что естественно в теории чисел, где все атомарные формулы разрешимы. Если вместо этого мы имели бы некоторую постовскую систему для порождения атомарных формул, то положили бы

$R(e, \alpha) \Leftrightarrow e$ выводит α в этой системе.

(И действительно, модификация такого рода используется, когда Клини модифицирует пункты своего определения реализуемости, добавляя условия истинности или формальной выводимости формулы α, чтобы получить подходящие *выводимые* правила.)

Опять-таки в интерпретации *квантора всеобщности* для теории чисел естественно зафиксировать область. При рассмотрении постовских систем как «аппроксимаций к нашим знаниям об атомарных предложениях» (как в 1.1 гл. IV в [48]) аппроксимации к нашему знанию о предметной области подсказывают введение расширяющихся, а не константных областей (знакомых по моделям Крипке [30]).

Наконец, тривиальным образом, *бестиповые* реализации Клини (e может реализовать разные формулы) можно заменить типовой версией, где теперь формула α реализуется *парой* (e, α) там, где в клиниевской версии она реализовалась самим e. *Применение* функции к аргументу определяется посредством

$$\{(e', \alpha \to \beta\}(e, \alpha) = (\{e'\}(e), \beta).$$

Я хочу более тщательно углубиться в интерпретацию реализуемости для *импликации*, потому что ее нестандартный характер часто (хотя и не всегда, ср. примечание 1, стр. 143, в [25]) упускают из вида. Это имеет прямое отношение к нашей проблеме, так как затрагивает и (логически сложные) формалистские интерпретации в [48]. Мы не только проверяем некоторые фиксированные формальные законы, поэтому мы должны *лучше выявить цели, для которых введена реализуемость*. Повторим (из § 4(d) и других мест): было бы порочным кругом использовать логические операции в определении реализуемости, если бы последняя должна была сообщать нам их смысл. Но вполне разумно использовать их (если мы их понимаем), чтобы лучше выявить смысл α. Это делается путем введения отношения $R(e, \alpha)$, т. е.

e реализует α,

причем (утверждение, обозначенное через) α *эквивалентно* $\exists \alpha R(e, \alpha)$. Поэтому $\alpha \to \beta$ переходит в

$$\exists e' R(e', \alpha) \Rightarrow \exists e'' R(e'', \beta)$$

или

$$(*) \qquad \forall e' [R(e', \alpha) \Rightarrow \exists e'' R(e'', \beta)].$$

Несмотря на тот факт, что $R(e', \alpha)$ в общем случае неразрешима, $R(e, \alpha \to \beta)$ полагают равным

$$(**) \qquad \forall e' [R(e', \alpha) \Rightarrow R(\{e\}(e'), \beta)].$$

Этот шаг наверняка нестандартен, например, эквивалентность между (*) и (**) не является теоремой арифметики первого порядка (хотя она может быть сформулирована в языке первого порядка для фиксированных α и β). Если, как в первоначальной формулировке Клини, $\{e\}$ — *частичная* функция, то эта интерпретация означает, что e'' зависит *только* от e', но не от остальной информации о $R(e', \alpha)$. Короче говоря, хотя e'' не зависит экстенсионально от функции $\{e'\}$, эта зависимость «слишком» экстенсиональна, так как игнорирует различия между возможными доказательствами предиката $R(e', \alpha)$. Этот нестандартный характер становится даже более поразительным, если вместо частичных функций мы рассматриваем *всюду определенные* (тотальные) реализующие функции. (Это непосредственно применимо к гл. IV из [48], и такие тотальные варианты реализуемости Клини «с типами» (или «типовые») также удовлетворяют гейтинговским законам. Родственные примеры, разработанные в литературе,— модифицированная реализуемость посредством HRO или HEO, изученная в [55].)

Переход от (*) к (**) сводится к замене

$$\forall e'\,[R(e', \alpha) \Rightarrow \exists e''R(e'', \beta)] \text{ на } \forall e'\exists e''\,[R(e', \alpha) \Rightarrow R(e'', \beta)],$$

хотя $R(e', \alpha)$ — *неразрешимый предикат* (от e').

Это завершает комментарии, *относящиеся* к рекурсивной реализуемости, и мы обращаемся к *основному усовершенствованию*, соответствующему тому, что описано в (a) (i).

> Используем переменные различных типов и запишем *явные условия замкнутости* (на их области изменения), достаточные, чтобы обеспечить реализации всех формально доказуемых теорем.

Как и в (b) (ii), мы можем спросить, каковы технические применения таких усовершенствований. Очевидно, что они не нужны для таких «грубых» результатов, как формальная независимость формулы

$$\forall x\exists y\forall z\,[T(x, x, y) \vee \neg T(x, x, z)],$$

для которой достаточно обычной рекурсивной реализуемости. С другой стороны, первое доказательство независимости принципа Маркова в логике предикатов [20, стр. 113, 3.52] опиралось на такую трактовку.

Замечание. Большое число возможных вариантов интерпретаций реализуемости для логических операций (в частности, для связок $\forall$ и $\rightarrow$ выше), удовлетворяющих законам Гейтинга, как мне кажется, поддерживает точку зрения, высказанную во введении к этому приложению: наиболее плодотворной проблемой, по крайней мере в настоящее время, является не *существование* формалистских семантик, а выбор *между* ними.

(ii) *Свободная от логики формалистская семантика*, где в противоположность реализуемости из (i) метаматематические объяснения не имеют логического остатка. Одним из хороших примеров является работа Гёделя [4], где используется даже более нестандартная интерпретация $\rightarrow$, чем в реализуемости. Первоначальная интерпретация Гёделя не является формалистской в смысле этого приложения, хотя используемые термы перечислены явно, так как им не придано никакого *формалистского* смысла. Такой смысл дается в [54], но *этот* вариант не свободен от логики, ср. (b) (i) выше, а также § 2(c) (iii).

Последовательно свободную от логики формалистскую семантику (удовлетворяющую гейтинговским законам) можно, по-видимому, получить, формализуя подходящим образом свободный от логики вариант объяснения Брауэра — Гейтинга, упомянутого в первом абзаце настоящего п. (c). Конкретное применение *частичных* функций у Гудмена [8] не подходит непосредственно для этой цели из-за (по-видимому) существенного использования скрытых логических операций в понятии «определено».

Как уже упомянуто в (b) (ii), некоторое продвижение в этом направлении, по-видимому, нужно для получения лучших на сегодняшний день формальных результатов (относительно добавления аксиом выбора). Если эта нужда подлинная, добавочные трудности, вводимые наличием переменных по *суждениям*, могут показаться терпимыми. Они «добавочны» к уже усложненному формалистскому усовершенствованию рекурсивной реализуемости.

Очевидно, что свободная от логики (формалистская) семантика представляет интерес с точки зрения оснований только потому, что *можно дать независимое обоснование* возникающих *принципов определения* (как в § 3 или [26]).

Замечание. И снова само существование такой семантики не вызывает сомнения в силу примечания 32 на стр. 513 в [26], примененного к свободным от логики прогрессиям (индексированным ординалами σ). Критическим моментом, который возникает опять-таки при интерпретации $\rightarrow$, является *ограничение на высоту* ρ_σ, выражающее формальное требование, состоящее в том, чтобы на стадии σ было известно, что шаг от σ' к $\rho_\sigma(\sigma')$ обоснован ср. [26, стр. 498]. Если запи-

сать в виде $P(e, \sigma; \alpha)$ отношение

e, кодирующее вывод e_1 и терм e_2 (оба — уровня σ),

реализует формулу α (на стадии σ),

то $P(e, \sigma; \alpha \to \beta)$ требует, чтобы e_1 было формальным выводом на стадии σ формулы

$$P(e', \sigma'; \alpha) \Rightarrow P(e_2 e', \rho_\sigma(\sigma'); \beta)$$

с переменными e' и σ'. Здесь в противоположность (i) *P разрешимо.*

(iii) Для того чтобы ориентироваться в *целях, которые преследует формалистская семантика*, хорошо вспомнить общие черты всех редукционистских схем [18]). Их изложение начинается с возражений (часто доктринерских) по адресу существующих понятий. Редукции определены неоднозначно. Более тщательное рассмотрение показывает, что эти возражения более сомнительны, чем рассматриваемые понятия. На этой стадии «блеск» редукционистской схемы меркнет. Тем не менее мы можем вернуться к этой схеме, не удовлетворенные более одним только существованием редукции, и потребовать, чтобы она помогала нам понимать вопросы, интерес которых установился. Имеются два общих направления.

Во-первых, мы можем захотеть узнать что-либо об объектах, используемых в редукционистской схеме. В частности, если мы рассматриваем *операциональную* семантику из приложения A в [48], которая говорит о *формальных правилах*, то спрашиваем себя, что мы хотим о них знать; ср. (b) (iii) в связи с вычислениями. Самый первый вопрос (любой семантики) —

что мы можем выразить?

в данном языке с помощью нашей интерпретации. Вот возможный «тест». В своей книге [65, стр. 40—46] Шютте рассматривает zulässige, ableitbare и direkt ableitbare Regeln, т. е. правила, которые консервативны (они называются также выводимыми), доказуемо выводимы конструктивными средствами и выводимы конкретным равномерным методом (и консервативны для всех расширений). Быть может, эти понятия не центральны, но они вполне естественны. Поэтому стоит посмотреть, может ли операционная интерпретация (известных языков) выразить по крайней мере *эти* понятия «о» формальных операциях. В более общем контексте, мне кажется, что мы можем извлечь выгоду из опыта с интерпретациями Крипке [30]. Несомненно, первоначальным намерением было

дать теоретико-множественную *редукцию* для некоторых современных неклассических понятий, среди которых (непредикативный) смысл логических частиц, введенных Брауэром — Гейтингом. Оказалось, что для этого анализа оно имело слабости; ср. реферат на [30]. Но в дополнение к некоторым *неожиданным* применениям в основаниях вроде тех, которые обсуждались в § 4, обнаружилось также, что эта интерпретация обычного логического языка имеет поразительную *выразительную силу*. «Поразительную» потому, что хорошо известная (и когда-то удивительная) выразительная сила логики предикатов первого порядка проверена для ее *теоретико-модельной* интерпретации. Как показано в (неопубликованной) работе Габая и Сморинского (см. реферат в J. Symbol. Log., 1970, v. **35**), очень естественные *геометрические* свойства деревьев могут быть охарактеризованы формулами простой синтаксической структуры. Поэтому, если мы вообще хотим иметь общую теорию моделей того рода, который рассмотрен в [30], то по справедливости можно сказать, что язык исчисления предикатов с интерпретацией из [30] представляет внутренний (не доктринерский) интерес. Кстати, для *этой* интерпретации ограничение обычными интуиционистскими пропозициональными операциями весьма искусственно. То, что обычно называют оператором «необходимости» $\Box$, *здесь* оказывается настолько естественным одноместным пропозициональным оператором, насколько можно желать [19]). Вероятно, это следует иметь в виду при работе над операционной семантикой и следует предусматривать *добавление новых «логических» операторов.*

Второй, отошедший на задний план вид применения редукционистских схем — *помощь в анализе самих абстрактных понятий*! Сюда относится, например, естественное использование формальных результатов о независимости с помощью не подразумевавшихся вначале «элементарных» моделей рассматриваемых аксиом A. Следует считать, что эти результаты показывают не какую-то неопределенность или другой дефект абстрактных понятий, а лишь *дефект нашего нынешнего анализа* (этих понятий), кодифицированного в A. И доказательства независимости *точно указывают* конкретные задачи об этих понятиях, которые действительно требуют дальнейшего анализа. Как подсказывает опыт, мы не можем полагаться на то, что обычная практика автоматически приведет к таким задачам. Кроме всего прочего, даже после того, как сильные аксиомы уже сформулированы (например, в теории множеств), у математиков уходит много времени на то, чтобы научиться эффективно их использовать. Очевидно, что пока редукции используются таким образом как вспомогатель-

ные средства, они не обязаны представлять внутренний интерес.

Другое применение того же рода, т. е. применение, связанное с тем, что редукции более *удобны в обращении*, чем абстрактные понятия (представляющие основной интерес), таково. Изучение редукций *подсказывает* некоторые (формальные) отношения (например, конверсии в случае операционной семантики), и мы используем их, чтобы *анализировать, а не заменять абстрактные отношения* (такие, как равенство доказательств, кодируемых выводами). Это требует *отдельного* исследования, и, как мы видели в § 1(a) и § 1(c), *точное* значение формальных отношений, имеющихся в литературе, все чаще попадает под сомнение. Следует заметить, что *свойства устойчивости* (такие, как наличие гомоморфизма или даже изоморфизма между двумя такими структурами, как термы и выводы; ср. гл. IV в [48]) не имеют сюда отношения. Нужно независимое условие адекватности того типа, который обсуждался в § 1(c). Конечно, как мы видели, конкретное предложение из § 1(c) было слишком наивным [20]. В любом случае результаты об устойчивости не дают гарантии ни от *систематического недосмотра* (когда мы не замечаем подходящих правил конверсии и вычисления по *одной и той же* причине), ни от *смешения* (когда мы не замечаем, скажем, правила конверсии *потому, что* соответствующее правило вычисления не подходит).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1]) Часто бывает, что, когда мы требуем больше (информации), *естественное* решение оказывается более элементарным; см. анализ гильбертовского метода ε-подстановок с этой точки зрения в [21, стр. 168, 3.351]. Для реальных исследований было бы важно знать конкретнее, какие методы с большей вероятностью (естественно) приведут к успеху в проблемах данного типа! Однако трудно проанализировать имеющийся опыт. Конечно, есть «теоретические» результаты о существовании логически более элементарных решений, но кажется, что они имеют мало отношения к практическим вопросам исследования. Например, пусть A — утверждение первого порядка о полях. Если A верно для поля Q вещественных рациональных чисел, то его доказательство может потребовать трансцендентных аксиом. Если же A верно для всех вещественных полей, а не только для Q, то существует доказательство первого порядка (из аксиом первого порядка для вещественных полей). Но самое естественное доказательство вполне может включать определения вещественного замыкания и теоретико-множественных операций на нем, которые даже не определимы в языке (первого порядка) для полей. Аналогично одно только существование конструктивного доказательства теорем о нормальной форме не обеспечивает конструктивности естественного или по крайней мере первого доказательства. (В случае первого порядка оно *было* конструктивным, в случае второго порядка — нет.)

[2]) Правид помог мне найти доказательство того, что этот критерий частичный.

[3]) Мы говорим о *фигуре* доказательства, а не о *дереве* потому, что для сравнения с (ii) лучше разрешить, чтобы формула A могла быть посылкой двух или более применений правил, и мы не требуем отдельных доказательств для каждого вхождения A. (Как обычно, мы предполагаем, что фигура доказательства задана не только отношением частичного порядка, но и дополнительной структурой, сопоставляющей каждой формуле ее посылки.)

[4]) Я часто подчеркивал аналогию между теоретико-множественными и конструктивными основаниями. В то время как *типы* (множеств) и *доказательства* (хотя бы равенств) существенны для оснований, они не появляются в практике как объекты изучения. Забавно, что здесь возникают и похожие возражения! Серр однажды жаловался в разговоре на суету, которую логики создают вокруг типов, так как никто никогда не использует аксиому фундированности. И, добавил он, если вы хотите ее иметь, то просто *определяете* совокупность тех множеств, которые наследственно фундированы. Скотт в [50, стр. 239, 1. — 10, 1. — 9] очень ясно выражает аналогичные сомнения по поводу роли доказательств в конструктивных основаниях. Доведенный до неразумной крайности взгляд Серра не оставляет никакого шанса найти разумное основание для «ограничения» по Цермело противоречивой формулировки принципа свертывания, данной Фреге, а взгляд Скотта не оставляет шансов, по крайней мере в настоящий момент, на объяснение импликации без порочного круга. Ср. также приложение, п. (c)(ii).

[5]) *Исправление.* Я не понимал этого состояния дел, когда формулировал задачу, которую решил Минц [38]. Отметим, что, как обычно, сокращение дизъюнкции $A \vee A \vee B$ в $A \vee B$ не считается «применением правила». (Весь вопрос о разделении различных *типов* выводов с помощью теорем эрбрановского типа еще не ясен. Ср. ОТД, дополнение VII(a)(iii) и примечание 39.)

[6]) *Исправление* (к [35] Мартин-Лёфа, стр. 12, строка 15). Если не обращать внимания на это различие, то сложность формулировки самого Эрбрана становится совершенно необъяснимой (а это уже иной вопрос, чем вопрос о возможности ее избежать).

[7]) В (c) мы рассмотрим причины, по которым вопросы (α) и (β) игнорировались продолжительное время.

[8]) Недавний опыт, кажется, подтверждает это положение: в [6] Говард рассматривает формально аналогичную ситуацию, а именно фигуру вычислений, и сопоставляет ординалы (так, что применение шага редукции уменьшает ординал). Это сопоставление не связано непосредственно с *порядковым типом чего бы то ни было*, а в его проверке наверняка нет ничего приятного.

[9]) В [29] и других местах было упущено из вида, что Кальмар обсуждал этот факт почти 15 лет назад в [13]. (В логической литературе это отношение более известно в связи с порядковым типом необеспеченных последовательностей функционалов в так называемом упорядочении Клини — Брауэра.)

[10]) Оговорка «естественным образом» существенна, так как величина всегда устранима в том смысле, что имеются счетные элементарные подмодели.

ому объяснению Майхилла [34, стр. 327, 1.14]
а того, что мы недостаточно уточнили смысл,
ы знаем, о чем говорим. Ср. случай логики выс-
чаем неполноту (формальных систем), как
м мы говорим, т. е. переходим к главным мо-

тся, что мы знаем одну интерпретацию, *выхо-*
ики: доказуемость здесь отождествляется с ис-
ится к единственному элементу π и рассматри-

ощих, например, арифметику, второе условие
к $(A \vee B) \leftrightarrow \exists x\,[(x = 0 \to A) \wedge (x \neq 0 \to B)]$

лая. Кроме того, из-за конкретного метода до-
пользует, Тейт выбирает (более детерминиро-
правил вычисления. Отметим для ссылок, что
так как, например, $s^n 0 \cdot 0 \circ\!\!\to 0$ для всех n.

дах доказательства и определения следует от-
щихся (экстенсионального порядкового) типа
ление в § 2(a)(i) и § 3(a)(iii) основного тек-

в моем реферате на [54]. Я использую здесь
ку, сделанную там, когда я сказал, что вычис-
для 1-непротиворечивости. Действительно, лю-
натуральными числами) обеспечивает некото-
бого замкнутого терма типа 0. Поэтому, если
е для примитивно рекурсивной формулы A, то
ля которого At доказана в T, и если $\bar{t}$—значе-
$\bar{t}$ истинна и, следовательно, выводима в ариф-
мости числового терма t его денотаты в раз-
ть разными.

ьно распространенных) заблуждений читатель
нг не рассматривает непосредственно понятие
орее объясняет смысл логических операций,
атомарные формулы интерпретированы и об-
заданы. Определение *логической истинности*
вали эти молчаливые предположения, рассма-
ти и все возможные интерпретации, что сде-
чевидно, Гейтинг делает (не сформулирован-
оложение, что мы знаем столь мало об этих
претациях, что любое доказательство логиче-
равномерно относительно них и рассматривать
4] существующие формальные теории видов со-
нием в том смысле, что если $\forall X_1 \ldots \forall X_n \exists x A$
$X_1 \ldots \forall X_n A\,[x/t]$ для терма t, не зависящего

зумений заметим, что формалистская семан-
но для программы Гильберта, этой парадигмы
льств, которая вообще не интерпретирует ло-
о такие интерпретации обычно нужны, чтобы
воречивости и особенно чтобы сделать синтак-
ятными. Убедительный пример см. в прило-

[19]) С другой стороны, описание □ как оператора «необходимости» совершенно неубедительно, так как не сделано даже попытки серьезного анализа (объективной) *возможности*: структура считается возможной, если она совместима с позитивной диаграммой имеющейся информации. Также не проверено, можно ли выразить в языке логики предикатов более реалистические гипотезы об объективной возможности. (Тот факт, что результирующие формальные законы похожи на *некоторые* «обычные» применения слова «*возможно*», отражает просто субъективный характер этих применений.) Современная теория вероятностей и статистика дают гораздо более утонченный анализ возможности.

[20]) (*Добавлено в корректуре.*) Более изощренные предложения могли бы использовать работы о λ-исчислении и гомоморфизме между λ-термами и выводами. В частности, как указал мне Барендрегт, полноты (*подходящего* λ-исчисления) в смысле Гильберта — Поста наверняка было бы достаточно. Парадигма результата о гильбертовско-постовской полноте для равенств между нормализуемыми термами была установлена Бомом [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аккерман (Ackermann W.). Grundgedanken einer typenfreien Logik.— In: Essays on the foundations of mathematics, Jerusalem: Magnes Press and Amsterdam: North-Holland, 1961, p. 143—155.

[2] Бом (Böhm C.). Alcune proprieta delle forme β-η-normali nel λ-*K*-calcolo. — Publicazioni dell'instituto per le applicazioni del calcolo, no. 696, Consiglio nazionale delle recerche Rome, 1968.

[3] Ветте (Wette E.). Definition eines (relativ vollständigen) Systems konstruktiver Arithmetik. — In: Foundations of Mathematics, eds. J. J. Bulloff, T. C. Holyoke, S. W. Hahn, Berlin: Springer, 1969, p. 130—195; реферат: J. Symbol. Log., 1971, p. 36.

[4] Гёдель (Gödel K.). Über einer bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes. — Dialectica, v. **12**, 1958, p. 280—287. [Русский перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Математическая теория логического вывода, М.: Наука, 1967, с. 299—305.]

[5] Гейтинг (Heyting A.). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaften, phys.-math. Klass, 1930, S. 42—56.

[6] Говард (Howard W. A.). Assignment of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type. — In: [15, p. 443—458].

[7] — Assignment of ordinals to terms for type zero bar recursive functionals (abstract). — J. Symbol. Log., v. **35**, 1970, p. 354.

[8] Гудмен (Goodman N. D.). A theory of constructions equivalent to arithmetic. — In: [15, p. 101—120.]

[9] Енсен, Шредер (Jensen R. B., Schroder M. E.). Mengeninduktion und Fundierungsaxiom. — Arch. f. math. Log. und Grundlagenforsch., Bd. **12**, 1969, S. 119—133.

[10] Жирар (Girard J. Y.). Une extension de l'interpretation de Godel a l'analyse, et son application a l'elimination des coupures dans l'analyse et la theorie des types. — In: [56, p. 63—92].

[11] Зукер (Zucker J.). Dissertation, Stanford University, 1971.

[12] — Iterated inductive definitions, trees and ordinals. — In: Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, Berlin: Springer, 1973, p. 392—453.

[13] Кальмар (Kalmar L.). Über arithmetische Funktionen von unendlich vielen Variablen, welche an jeder Stelle nur von einer endlichen

Anzahl von Variablen abhängig sind. — Colloquium Math., v. 5, 1957, S. 1—5.
[14] Карри, Фейс (Curry H. B., Feys R.). Combinatory Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1958.
[15] Кино, Майхилл, Весли (Kino A., Myhill J., Vesley R. E.). Intuitionism and proof theory. — Amsterdam — London, 1970.
[16] Клини (Kleene S. C.). Forms of predicates in the theory of constructive ordinals. — Amer. J. of Math., v. **66**, 1944, p. 41—58; v. **77**, 1955, p. 405—428.
[17] — Recursive functionals and quantifiers of finite types. — Trans. of Amer. Math. Soc., v. **91**, 1959, p. 1—52.
[18] Крайзель (Kreisel G.). On the interpretation of non-finitist proofs. — J. Symbol. Log., v. **16**, 1951, p. 241—267.
[19] — Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof. — In: International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958, p. 289—299.
[20] — Interpretation of classical analysis by means of constructive functionals of finite type. — In: Constructivity in mathematics, ed. A. Heyting, Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 101—128.
[21] — Mathematical logic. — In: Lectures on modern mathematics, v. III, ed. Saaty, N. Y., 1965, p. 95—195.
[22] — A survey of proof theory. — J. Symbol. Log., v. **33**, 1968, p. 321—388. [Русский перевод: см. настоящий сборник.]
[23] — Functions, ordinals, species. — In: Logic, methodology and philosophy of science III, Amsterdam: North-Holland, 1968, p. 145—159. Реферат: Zentralblatt für Math., Bd. **187**, 1970, S. 265—266.
[24] — Two notes on the foundations of set-theory. — Dialectica, v. **23**, 1969, p. 93—114.
[25] — Church's thesis; a kind of reducibility axiom for constructive mathematics. — In: [15, p. 121—150]; реферат: Zentralblatt für Math., Bd. **199**, 1971, S. 300—301.
[26] — Principles of proof and ordinals implicit in given concepts. — In: [15, p. 489—516].
[27] — The collected works of Gerhard Gentzen. — J. of Philosophy, v. **68**, 1971, p. 238—265.
[28] Крайзель, Кривин (Kreisel G., Krivine J. L.) Elements of mathematical logic; model theory. — Amsterdam: North-Holland, 1967.
[29] Крайзель, Трулстра (Kreisel G., Troelstra A. S.). Formal systems for some branches of intuitionistic analysis. — Annals of Math. Log., v. **1**, 1970, p. 229—387.
[30] Крипке (Kripke S. A.). Semantical analysis of intuitionistic logic I. — In: Formal systems and recursive functions, ed. J. N. Crossley and M. A. E. Dummett. — Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 92—130.
[31] Леви (Levy A.). Principles of reflection in axiomatic set theory. — Fundamenta Math., v. **49**, 1960, p. 1—10.
[32] Лукхардт (Luckhardt H.). Habilitationsschrift. — Phillips-Universität, Marburg, 1970.
[33] — Extensional Godel functional interpretation. A consistency proof of classical analysis. — Berlin, 1973.
[34] Майхилл (Myhill J.). The formalization of intuitionism. — In: Contemporary philosophy, ed. Klibansky, Florence, 1968, p. 324—342.
[35] Мартин-Лёф (Martin-Löf P.). Notes on constructive mathematics. — Uppsala, 1970. [Русский перевод: Мартин-Лёф П. Очерки по конструктивной математике. — М.: Мир, 1975.]
[36] — Hauptsatz for the theory of species. — In: [56, p. 217—234].

[37] — Hauptsatz for the simple theory of types (в печати).
[38] Минц Г. Е. Аналог теоремы Эрбрана для непредваренных формул конструктивного исчисления предикатов. — Записки научн. семин. ЛОМИ АН СССР, т. **4**, 1969, с. 47—51. Реферат: Zentralblatt f. Mathem., Bd. 186, 1970, S. 5—6.
[39] — Теория доказательств (арифметика и анализ), Итоги науки и техники, Алгебра, Топология, Геометрия, т. **13**, 1975, М.: ВИНИТИ, с. 5—49.
[40] Патнем (Putnam H.). Foundations of set theory. — In: Contemporary philosophy, ed. Klibansky, Florence, 1968, p. 275—285.
[41] Посгай (Pozsgay L.). Liberal intuitionism as a basis for set theory. — Proc. Symp. in Pure Math., v. **13**, 1971, p. 321—331.
[42] Правиц (Prawitz D.). Angaende konstruktiv logik och implikationsbegreppet. — In: Sju filosofiska studier tillägnade Anders Wedberg, Stockholm, 1963, S. 9.32; реферат: J. Symbol. Log., v. **33**, 1968, p. 605.
[43] — Natural deduction. — Stockholm: Almquist & Wiksell, 1965.
[44] — Some results for intuitionistic logic with second order quantifier-rules. — In: [15, p. 259—269].
[45] — Constructive semantics. — Proceedings of first Scandinavian logic symposium, Uppsala, 1970.
[46] — On the proof theory of mathematical anylysis. — In: Logic and Value, Uppsala, 1970.
[47] — The philosophical position of proof theory. — In: Contemporary philosophy in Scandinavia, Baltimore, 1970.
[48] — Ideas and results in proof theory. — In: [56, p. 235—308].
[49] Скарпеллини (Scarpellini B.). On cut elimination in intutionistic systems of analysis. — In: [15, p. 271—285].
[50] — A model for bar recursion of higher types. — Compositio Math., v. **23**, 1971, p. 123—153.
[51] Скотт (Scott D.). Constructive validity. — In: Symposium on automatic demostration, Berlin, 1970, p. 237—275.
[52] Спектор (Spector C.). Provably recursive functionals of analysis. — In: Resursive function theory, Providence, 1962, p. 1—27.
[53] Такеути (Takeuti G.). A formalization of the theory of ordinal numbers. — J. Symbol. Log., v. **30**, 1965, p. 295—317.
[54] Тейт (Tait W. W.). Intensional interpretations of functionals of finite type I, — J. Symbol. Log., v. **32**, 1967, p. 198—212; реферат: Zentralblatt für Math., v. **174**, 1969, S. 12—13.
[55] Трулстра (Troelstra A. S.). Notions of realizability for intuitionistic arithmetic and intuitionistic arithmetic in all finite types. — In: [56, p. 369—405].
[56] Фенстад (Fenstad J. E.) (ed.). Proceedings of the second scandinavian logic symposium. — Amsterdam, North-Holland, 1971.
[57] Феферман (Feferman S.). Systems of predicative analysis. — J. Symbol. Log., v. **29**, 1964, p. 1—30.
[58] — Systems of predicative analysis II; Representation of ordinals. — J. Symbol. Log., v. **33**, 1968, p. 193—220.
[59] — Predicatively reducible systems of set theory. — In: Proc. Symp. Pure Math., v. **13**, Part II, Providence, 1971, p. 137—175.
[60] — Ordinals and functionals in proof theory. — In: Actes congr. int. mathematiciens, 1, Paris, 1971, p. 229—233.
[61] — Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. — In: [15, p. 303—326].
[62] — Hereditarily replete functionals over the ordinals. — In: [15, p. 289—302].

[63] Хината (Hinata Sh.). Calculability of primitive recursive functionals of finite type. — Sci. Repts. of the Tokyo Kyoiky Daigaku, v. 9, 1967, p. 218—235.
[64] Шёнфилд (Shoenfield J. R.). Mathematical logic. — New York, 1967. [Русский перевод: Шёнфилд Дж. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.]
[65] Шютте (Schütte K.). Beweistheorie. — Berlin, Springer, 1960.
[66] — Proof theory. — Berlin, Springer, 1977.
[67] Ясуги (Yasugi M.). Interpretations of set theory and ordinal number theory. — J. Symbol. Log., v. 32, 1967, p. 145—161.

КАК ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ПРИШЛА К СВОИМ ОРДИНАЛЬНЫМ ЧИСЛАМ И КАК ОНА ПРИХОДИТ К НИМ ТЕПЕРЬ *)

РЕЗЮМЕ

Генцен дал первое доказательство непротиворечивости (сокращенно ДН) для чистой арифметики (ЧА) в смысле программы Гильберта, использовав, в частности, некоторые принципы определения непрерывных функционалов в бэровском пространстве. Позднее он заменил эти функционалы соответствующими операциями на ординальных числах $<\varepsilon_0$, чтобы избежать возражений (в действительности необоснованных) против своего первоначального ДН, которые рассматриваются в § 9. Сегодня уместен совсем другой способ введения ординальных чисел в теорию доказательств, использующий теорию ω-моделей (или ω-логику) так называемого *элементарного анализа* (ЭА). Он расширяет формализм ЧА путем добавления функциональных переменных, но тем не менее может быть «сведен» к ЧА, т. е. ЭА — это *консервативное* расширение ЧА. Данный способ введения не зависит от программы Гильберта, и, таким образом, сомнения в непротиворечивости ЧА (которые сами еще более сомнительны, чем непротиворечивость ЧА) здесь не имеют значения.

К тому же в современной ЧА ординальные числа не играют значительной роли, в то время как понятие вполне-упорядочения (натуральных или вещественных чисел) легко записывается в рамках формализма ЭА и при случае может быть удачно использовано. Мы используем следующую теорему ω-логики. Для каждой формулы A системы ЭА имеется примитивно рекурсивное упорядочение $<_A$, такое, что

$$\mathrm{TI}(<_A, P_A) \vdash A \quad \text{и} \quad \vdash_\omega A \Leftrightarrow <_A \text{ фундировано},$$

где P_A — предикат примерно той же логической сложности, что и A, а через $\mathrm{TI}(<, P)$ обозначена трансфинитная индукция по $<$, примененная к предикату P. (Доказательство этой теоремы использует полноту так называемых правил без

*) G. Kreisel. Wie die Beweistheorie zu ihren Ordinalzahlen kam und kommt. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 78, Heft 4, 1977, S. 177—223.

сечения для ω-логики.) Теория доказательств *усиливает* эту (теоретико-модельную) теорему для тех A, которые не только верны во всех ω-моделях (т. е. $\vdash_\omega A$), но и *формально выводимы* в ЭА. В частности, $<_A$ можно заменить на подходящий начальный отрезок *канонического* ε_0*-упорядочения* $<_0$. Вместо того чтобы ограничиться доказательством непротиворечивости ЭА с помощью $\mathrm{TI}(<_0, P)$ (для подходящего примитивно рекурсивного предиката P), рассматривается так называемый *принцип рефлексии* для ЭА, откуда для любого расширения $\mathscr{A}$ системы ЭА дополнительными аксиомами ограниченной сложности k получаем

существует такой P_k, что из $\mathscr{A}$ доказуемо $\mathrm{TI}(<_0, P_k) \vdash \vdash \mathrm{WF}_{\mathscr{A}}$, где $\mathrm{WF}_{\mathscr{A}}$ утверждает непротиворечивость $\mathscr{A}$.

Следствие. В противоположность ЧА или ЭА, для подобных расширений $\mathscr{A}$ так называемые границы выводимости трансфинитной индукции $\mathrm{TI}(<, P)$ существенно зависят от сложности P. (Для P_k эта граница есть ε_0, в то время как для примитивно рекурсивных P граница $\gg \varepsilon_0$.)

В приложении II эта зависимость от сложности P эффективно применяется, так сказать, в качестве позитивного противовеса к «принижению» (в предыдущем следствии) понятия «абсолютного» ординального числа системы $\mathscr{A}$. Используемые при этом результаты собраны в § 6. Параграфы 1—5 содержат простые, но полезные (и не общеизвестные) факты о самом понятии непротиворечивости, о различии между ЧА и аксиомами Пеано, а также формулировку TI, ЭА и ω-логики. В § 7 рассматривается понятие канонического вполне-упорядочения (и некоторые относящиеся к нему сомнения), а в § 8 — некоторые связи между непрерывными функционалами и фундированными упорядочениями, используемые в § 9. Само собой разумеется, что обычная в теории доказательств классификация схем $\mathrm{TI}(<, P)$ *по логической сложности* P убедительна лишь тогда, когда $<$ *фундировано не для всех* P; следствия из этого и близких соображений рассмотрены в § 10. В приложении I «алгебраизация» понятия вполне-упорядочения $<_0$ сравнивается с переходом от аксиом Пеано к ЧА. Это сравнение уточняет не только роль «обычных» функций (сложение, экспонента), но и сущность «определяющих» их свойств.

ПРЕАМБУЛА

Эта статья содержит основные положения двух лекций, которые я прочел в 1975 г.: одну (приложение II) — специалистам по теории доказательств в Мюнхене, вторую — на

ежегодном собрании Немецкого математического общества в Тюбингене. В этих обстоятельствах имело смысл привлечь внимание к дефектам ординалов, используемых в доказательствах непротиворечивости, как общей меры теоретико-доказательственной силы формальных систем и к другим, более изобретательным, применениям ординалов под такими лозунгами как «статус ε_0 в конечных расширениях элементарного анализа» или «длины теоретико-рекурсивных иерархий». Для более широкой аудитории столь же необходимо подчеркнуть, так сказать, дополнительное обстоятельство: это статья не содержит подробностей какого-либо конкретного теоретико-ординального анализа и в соответствии со своим названием ограничивается вопросом о том, как ординалы входят в теорию доказательств. В статье проводятся аналогии между аналитическим или геометрическим рассмотрением вещественных многочленов и использованием ординалов в теории моделей и теории рекурсии с одной стороны, и между алгебраическим рассмотрением многочленов и использованием ординалов в теории доказательств — с другой. Пользуясь этими аналогиями, можно сказать, что большее внимание уделяется той части, которая соответствует геометрической картине и геометрически осмысленным следствиям алгебраического рассмотрения; ср. лекции в Калифорнийском университете в Лос-Анжелесе и резюме в части, соответствующей изощренной алгебраической теории.

В данный момент можно сказать, что основной открытый вопрос из этой статьи, описанный в § 9 (об основополагающей работе Генцена) полностью решается ссылкой на переписку между Генценом и Бернайсом, которая осталась в Высшей технологической школе в Цюрихе после смерти Бернайса. Хотя Бернайс часто говорил со мной об этой проблеме в той самой комнате, где он хранил эту переписку, он никогда не упоминал о ней (и потому мне никогда не приходило в голову, что эта переписка существовала). Подробности приводятся в подстрочном примечании (f) *).

ВВЕДЕНИЕ

Название этой работы в какой-то степени обманчиво: оно как будто обещает исторически точное изложение того, как развивался теоретико-ординальный анализ (формальных) доказательств. При подобном изложении следовало бы принимать во внимание такие «случайности», как личные контакты,

*) Латинскими буквами помечены подстрочные примечания, добавленные автором к английскому переводу статьи. — *Прим. перев.*

знание литературы, а также темперамент пионеров, которые развивали этот анализ. Но здесь приводятся даже не все известные мне источники. Я изложу лишь (настолько просто, насколько возможно при нынешнем состоянии дел), как *можно* вводить теоретико-ординальный анализ, а затем с позиции нынешних знаний попытаться вникнуть, так сказать, в «логику ситуации», в которой находились первые исследователи. Короче говоря, «пришла» и «приходит» в заглавии нужно поменять местами.

Предполагается, что читатель, которого привлекает название этой работы, слышал о генценовском доказательстве непротиворечивости (ДН) для чистой арифметики (ЧА) с помощью ε_0-индукции. Как обычно, ε_0 обозначает наименьшее число α, такое, что $\alpha=\omega^\alpha$ (оно равно наименьшему $\beta>\omega$, для которого $\beta=2^\beta$, и $\lim \omega_n$, где $\omega_1=\omega$, $\omega_{n+1}=\omega^{\omega_n}$). В такой формулировке результат Генцена звучит смехотворно, так как главный принцип ЧА — это ω-индукция, т. е. обычная полная индукция, а ω, так сказать, много меньше, чем ε_0. Очевидно, что необходима более точная формулировка, оттеняющая нюансы. Но этого еще не достаточно, пока мы ограничиваем себя программой Гильберта, которая должна была устранить сомнения по поводу ЧА. Сегодня без преувеличения можно утверждать следующее:

> сомнения в непротиворечивости ЧА (и других систем, используемых в математике) со своей стороны гораздо проблематичнее, чем сама эта непротиворечивость.

(Естественно, что сомнения могут быть столь же проблематичными и легкомысленными, как и утверждения.) При этом работы по программе Гильберта ни в коем случае не следует считать бесполезными. Без них *допущения*, которые привели к этой программе, никогда не были бы *убедительно* опровергнуты; см., например, статью о второй проблеме Гильберта в Proc. Symp. Pure Math., v. 28, 1976.

Но исправление наивных предположений не исчерпывает значения этих работ, особенно генценовского ДН. Следует *по-новому* взглянуть на ДН и использовать идеи ДН для получения других результатов, значение которых *не* затрагивается упомянутыми проблематичными сомнениями. *Такие переформулировки* — обычное явление в естественных науках: результаты, полученные в рамках ложной теории, должны быть *интерпретированы по-новому*. В математике это случается реже, но иногда все же случается, особенно в пограничных областях. Например, Штурм рассматривал вещественную алгебру без понятия непрерывности, так как связывал его с действительно сомнительным понятием актуально бесконечно малой величины. Цель, которую он преследовал, уже давно неактуальна. Однако идеи его доказательств и конструкций оказались *по-прежнему* ценными, когда Артин и Шрайер ввели понятие вещественно замкнутого поля, в котором действуют конструкции Штурма.

§ 1. РОЛИ ПОНЯТИЯ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ СОМНЕНИЙ

Мы рассматриваем здесь популярные системы S, например ЧА или (обычную) теорию множеств Цермело, непротиворечивость которых (сокращенно WF_S) становится очевидной при рассмотрении обычной интерпретации в полукольце натуральных чисел или в кумулятивной иерархии $C_{\omega+\omega}$ соответственно. Здесь

$$C_0=\varnothing,\quad C_{\alpha+1}=\mathfrak{P}(C_\alpha),\quad C_\omega=\bigcup_n C_n \quad\text{и}\quad C_{\omega+\omega}=\bigcup_n C_{\omega+n}.$$

Известная *вторая* теорема Гёделя о неполноте показывает не только неполноту систем S (просто потому, что они являются формальными системами и содержат элементарную арифметику), но и невыводимость в S конкретных истинных (в указанных выше интерпретациях) математических суждений WF_S.

Ясно, что WF_S носит такой же «элементарный характер», как, например, утверждение, что $\sqrt{2}$ иррационален, т. е. что уравнение $p^2=2q^2$ не имеет решений в натуральных числах p, q. Это сравнение уточняется работой Матиясевича: WF_S эквивалентно утверждению $\forall n_1 \ldots \forall n_9[p(n_1, \ldots, n_9)\neq 0]$, где p — многочлен от девяти переменных с целыми коэффициентами.

Непосредственным следствием теоремы Гёделя является непротиворечивость системы

$$S\cup\{\neg\,\mathrm{WF}_S\}\ \text{(сокращенно } S_G\text{)}.$$

Это совершенно неочевидно на основе обычной интерпретации, так как $\neg\mathrm{WF}_S$ ложно (в этой интерпретации). Следовательно, согласно Матиясевичу, S_G содержит доказуемое, но ложное предложение вида $\neg\forall n_1 \ldots \forall n_9(p\neq 0)$. Что же можно сказать о системах вроде S_G — непротиворечивых, но содержащих ложные аксиомы? По меньшей мере то, что любое доказуемое в S_G *универсальное* предложение (т. е. $\forall n_1 \ldots \forall n_9(p\neq 0)$ в качестве типичного примера) истинно: если бы $p=0$ имело диофантово решение, то этот факт можно было бы подтвердить путем числового подсчета, который

проводится внутри S_G. (Очевидно, что эти рассуждения справедливы в самом общем случае, так как они не используют никаких специальных свойств S_G, кроме непротиворечивости.) Тем самым S_G была бы *практически* полезна, если бы для некоторого диофантова уравнения $p=0$ доказательство в S_G было более обозримым. (В § 6 будет показано, что $\forall n_1 \ldots \ldots \forall n_9 (p \neq 0)$ доказуемы в S и в S_G для одних и тех же p.)

Однако такая возможность использовать систему S_G до сих пор не реализована, в частности, из-за того, что *метаматематическое высказывание* WF_S слишком далеко от *арифметической* практики.

Здесь в игру входят ДН, особенно когда они используют такие более или менее употребительные в математике понятия, как ε_0-индукция. Допустим, что WF_S выведено в S из (истинного) допущения A, например из ε_0-индукции [1]). Тогда не только $S \cup \{\neg A\}$ непротиворечива, но даже имеются классы $\mathscr{F}_A$ (формул F), которые содержат, безусловно, не одни лишь универсальные предложения, такие, что для $F \in \mathscr{F}_A$

если F выводима (в S) из $\neg A$, то F истинна.

(формулы F из $\mathscr{F}_A$ логически «проще», чем $\neg A$, хотя они и не являются универсальными формулами.) Классы $\mathscr{F}_A$ мы находим путем *более тщательного анализа* ДН. В приложении II приведен конкретный пример такой формулы F, которую легче вывести из (ложной) формулы $\neg A$.

Принципиальные замечания. Особое положение универсальных предложений по отношению к непротиворечивости ни в коей мере не случайно: оно полностью отвечает «идеологическим» целям первоначальной программы Гильберта. Действительно, как выясняется при уточнении понятия «элементарного» (или упомянутого в примечании 1 финитного) доказательства, во всех случаях речь идет о доказательствах универсальных предложений. И главной целью программы Гильберта было доказательство автономии этой элементарной математики, установление того, что логические и вообще абстрактные понятия не приводят к существенно новым доказательствам универсальных предложений. Иначе говоря, абстрактные понятия *безвредны*, но именно поэтому логически бесполезны.

Если теперь отказаться от этого особого положения, то система S должна удовлетворять естественному требованию: для всех F

$(*)_F$ если формула F доказуема в S, то (высказывание) F истинно.

Очевидно, что WF_S содержится в $(*)_F$, когда F имеет вид противоречия $A \wedge \neg A$. Обратно, $(*)_F$ для *универсальных формул* F следует из WF_S (как было указано выше) при условии, что в S постулированы числовые подсчеты и обычные логические заключения. Принцип $(*)_F$ иногда называют *принципом рефлексии* (для F), так как истинность $(*)_F$ мы усматриваем с помощью «рефлексии», т. е. размышления о формальных правилах системы S.

Вторая теорема Гёделя — формальная независимость $(*)_F$ для F вида $A \wedge \neg A$ — была обобщена Лёбом:

если $(*)_F$ для какой-то F выводима в самой системе S, то уже F выводима в S.

Эта теорема Лёба может быть сведена обратно к теореме Гёделя путем рассмотрения системы $S \cup \{\neg F\}$, обозначаемой через S'. Если $(*)_F$ доказуемо в S, то в S' существует доказательство предложения

F недоказуема в S,

а значит, и формулы $\mathrm{WF}_{S'}$. Но тогда S' была бы противоречива по теореме Гёделя, т. е. F доказуема в S.

Теорема Лёба открывает следующую возможность использования *доказательств принципа рефлексии для* S (вместо ДН для S). Допустим, что $(*)_F$ выведен в S из предположения A (например, из ε_0-индукции, примененной к предикату, достаточно более сложному, чем F), а также

$$(\neg A) \to F.$$

Тогда F доказуема в самой S. Как уже говорилось выше, эта возможность *действительно* реализована, см. приложение II. Соответствующие системы и намеченные выше понятия точнее описаны в § 6.

Для специалистов. Вместо самого $(*)_F$ часто полезнее воспользоваться его вариантом: формула F может содержать параметр, например, для натуральных чисел, т. е. в обычной символике

$(*)_F^+$ $\quad \forall n \{\exists b\, \mathrm{Bew}_S [b, s_F(n)] \to F(n)\}$,

где s_F — терм, определяющий гёделевские номера формул $F(0)$, $F(1)$, ...

Упражнение. Если в S доказуемо $(*)_F^+$, то доказуема и $\forall n F(n)$. (*Указание.* Доказать $(*)_F^+ \to (*)_{\forall n F}$, используя предложение: если доказуема $\forall n F$, то доказуемы $F(0)$, $F(1)$, ...)

Напомним, кстати, что описанная *схема приложений* ДН или доказательства $(*)_F$ для подходящих классов формул F в коей мере не ограничена теоретико-доказательственной

метаматематикой. Напротив, тщательный анализ теоретико-модельных доказательств, скажем формальной непротиворечивости континуум-гипотезы (КН), привел к полезным классам формул $\mathscr{F}^+$ и $\mathscr{F}^-$, для которых имеет место следующее: если $F \in \mathscr{F}^+$ $(F \in \mathscr{F}^-)$ и $\mathrm{KH} \to F$ $(\neg \mathrm{KH} \to F)$, то истинна F, хотя неизвестно, истинна КН или нет.

§ 2. ЧИСТАЯ АРИФМЕТИКА (ЧА)

Это *формальная* система, которая выглядит похожей на обычные аксиомы Пеано, но оказалась *существенно иной*. Во-первых, ЧА имеет только *один* тип переменных n, m (для индивидов, т. е. натуральных чисел), в то время как аксиома индукции у Пеано

$$\forall X\,[\{0 \in X \wedge \forall n\,[n \in X \to s(n) \in X]\} \to \forall n\,(n \in X)]$$

или ее контрапозиция, выражающая фундированность отношения непосредственного следования $m = s(n)$ (с первым элементом 0, т. е. $\forall n \neg [0 = s(n)]$),

$$\forall X\,\{\exists n\,(n \in X) \to \exists n\,([s(n) \in X \wedge \neg (n \in X)] \vee 0 \in X)\}$$

содержит переменную X для множеств. Во-вторых, в ЧА кроме функции следования (и отношения равенства) с аксиомой $\forall n \forall m\,[n = m \leftrightarrow s(n) = s(m)]$ имеются еще операции $+$ и $\times$ с «рекурсивными равенствами»

$$\forall n\,(n + 0 = n), \quad \forall n \forall m\,[n + s(m) = s(n + m)];$$
$$\forall n\,(n \times 0 = 0), \quad \forall n \forall m\,[n \times s(m) = n \times m + n].$$

Эти дополнительные равенства лишние для системы аксиом Пеано, так как (i) $+$ и $\times$ в рамках теории множеств определимы через s и притом (ii) однозначно определимы в силу рекурсивных равенств. Это не так, если аксиома индукции заменена схемой

$$(*) \qquad \{P(0) \wedge \forall n\,[P(n) \to P(s(n))]\} \to \forall n P(n),$$

где P пробегает только формулы *первой ступени*, которые построены из 0, s, $=$ и логических частиц. В ЧА имеется соответствующая схема, обозначаемая через Ind, т. е. схема $(*)$, в которой P может теперь содержать еще $+$ и $\times$.

Упражнение. Если $+'$ и $\times'$ определены в ЧА и доказуемо удовлетворяют рекурсивным равенствам, то

$$\forall n \forall m\,(n + m = n +' m \wedge n \times m = n \times' m)$$

также доказуемо в ЧА. Сравни первые упражнения из приложения I, где приведены другие примеры этой «однозначности в алгебраическом смысле» также по отношению к явно определимым вариантам.

Замечания. Ограничение операциями (полу)кольца $+$ и $\times$ соответствует старинному убеждению, что они «фундаментальны». Это убеждение может найти вполне удовлетворительное подтверждение в упомянутом выше результате Ю. В. Матиясевича (согласно которому остальные привычные теоретико-числовые операции являются диофантовыми). В противоположность этому индукция в *аналитической* теории чисел применяется к предикатам, которые (могут быть) определены с помощью понятий анализа (и потому *непосредственно* не определяются в ЧА). Естественно, эти применения к аналитически определенным предикатам следуют из аксиом Пеано, так как переменная X относится к любым предикатам (множествам). Математики уже давно задавались вопросом, до какой степени *нужны* и нужны ли вообще аналитические вспомогательные средства в теории чисел. Они, к примеру, не были бы нужны, если бы любая формула (без свободных переменных) была либо выводима, либо опровержима в ЧА. Такую возможность исключает теорема Гёделя о неполноте. Теперь известно даже, что в ЧА разрешимы не все формулы $\exists n_1 \ldots \exists n_9\,(p = 0)$, где p — многочлен от девяти переменных с целыми коэффициентами [2]).

Количественное усиление неполноты (ЧА). Обычная мера «логической сложности» (предваренных) формул — это число чередующихся кванторов.

Ind_n обозначает схему индукции в применении к $P \in \mathscr{P}_n$, т. е. к P сложности $\leqslant n$.

(Упражнение для тех, кто знаком с теорией рекурсии: Ind_n совершенно элементарно следует из индукции, примененной всего к одному предикату P, который *полон* для класса $\mathscr{P}_n$.) $\vdash_n$ обозначает выводимость (в ЧА), когда схема Ind урезана до Ind_n. Хотя аналитические методы разрешают некоторые формулы, неразрешимые в ЧА, можно было бы подумать, что *внутри* самой ЧА (логически) «простые» высказывания A всегда имеют «простые» доказательства, если A вообще выводимо в ЧА. Точнее,

$$\forall n \exists m \forall p\,[A \in \mathscr{P}_n \wedge \vdash_p A \to \vdash_m A].$$

Это неверно. Напротив, $\mathrm{Ind}_{n+2} \vdash_0 [(\vdash_n A) \to A]$, следовательно, $\mathrm{Ind}_{n+2} \vdash_0 (*)_A$ для $A \in \mathscr{P}_n$ (и выводимости $\vdash_n$) и, таким образом,

$$\mathrm{Ind}_{n+2} \vdash_0 \mathrm{WF}_n, \quad \text{но не} \quad \mathrm{Ind}_n \vdash_n \mathrm{WF}_n$$

(и $\mathrm{WF}_n \in \mathscr{P}_1$, так как WF_n в виде $\forall n_1 \ldots \forall n_9\,(p \neq 0)$ не содержит чередований кванторов).

Следствие (согласно § 1). Если $A \in \mathscr{P}_n$ и $\vdash_n [\neg \mathrm{Ind}_{n+2} \to A]$, то $\vdash_n A$.

(Для доказательства этого следствия требуется лишь знакомство с основами логики. Очевидно, достаточно показать, что из Ind_{n+2} следует $(*)_A$ для $A \in \mathscr{P}_n$, т. е., в частности, если A принадлежит формализму ЧА и выводимо средствами логики предикатов, то *A верно как арифметическое утверждение.* Естественно, что $(*)_A$ легко можно записать и (тривиально) доказать в теории множеств. В ЧА $(*)_A$ не удается даже непосредственно сформулировать, ибо, как известно, в ЧА невозможно определение истинности для ЧА. Однако Генцен (а до него Эрбран) заметил, что можно формулировать элементарную логику так, чтобы *любой вывод A из гипотез Γ содержал только подформулы A и Γ*. Но тогда для фиксированной A сложности n формализация утверждения $(*)_A$ и тривиальное доказательство (упомянутое выше) этого утверждения требуют только *частичного определения истинности*, скажем W_A, для подформул аксиомы Ind_n, формулы A и аксиом S для функции следования, $+$, $\times$. Оно имеет сложность $n + 2$, ибо такова сложность Ind_n. При этом индукция применяется к следующему предикату (от b): для всех выводов b формулы A из допущений Ind_n и S в генценовской логической системе (без сечения) и для всех формул F, входящих в b, верно $W_A(F)$. Это применение индукции принадлежит Ind_{n+2}.)

Тем самым, так сказать, «в принципе» понятно, почему в теории чисел вводятся сложные вспомогательные функции и предикаты, к которым затем применяется индукция. Но на этом все и кончается: до сих пор ни проведенный выше анализ, ни следствие не нашли каких-либо приложений в теории чисел (или других областях математики). Мы испробуем совсем другое доказательство соотношения $(\vdash_n A) \to A$, восходящее к генценовскому ДН для ЧА с помощью ε_0-индукции.

§ 3. ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И МЕТОД СПУСКА

Речь идет не о буквальном обобщении индукции из § 2. Мы используем фундированность отношения упорядочения

$$\forall n \{[(\forall m < n) P(m)] \to P(n)\} \to \forall n P(n),$$

а не отношения следования (которое не транзитивно и, значит не является порядком).

Из $\forall n \{\ldots\}$ следует $P(0)$, так как имеет место $\neg \exists m (m < 0)$. (Короче говоря, мы теперь думаем не о *натуральных числах*, а о *конечных ординалах*.) Вместо $<$ рассматриваются произвольные частичные порядки R и их начальные отрезки R^p, т. е. $\{(m, n): mRn \wedge (nRp \vee n = p)\}$, и вводятся обозначения

$$\mathrm{TI}(R, P) \quad \text{для} \quad \forall n \{[(\forall mRn) P(m)] \to P(n)\} \to \forall n P(n),$$

$$\mathrm{TI}(R^p, P) \quad \text{для} \quad (\forall nRp) \{[(\forall mRn) P(m)] \to P(n)\} \to (\forall nRp) P(n).$$

Согласно § 2, следует ожидать, что *в общем случае* возможности доказательства, предоставляемые $\mathrm{TI}(R, P)$ или схемой $\mathrm{TI}(R^p, P)$ для $p = 0, 1, 2, \ldots$ зависят от сложности предиката P.

Схеме TI отвечает такое *правило вывода*:

если Q *прогрессивен*, т. е. если доказано

$$\forall n \{[(\forall mRn) Q(m)] \to Q(n)\}, \quad \text{то} \quad \forall n Q(n).$$

Упражнения. $\mathrm{TI}(R, Q)$ содержит это правило. Обратно, $\mathrm{TI}(R, P)$ выводима с помощью этого правила: положить

$$Q(n): \forall n' \{[(\forall mRn') P(m)] \to P(n')\} \to P(n)$$

и показать, что (i) Q прогрессивен и (ii) $\forall n Q(n) \to \mathrm{TI}(R, P)$.

Метод спуска получается из правила вывода, если ограничить Q *бесквантор*ными формулами, но усилить посылку до следующей: существует терм μ, такой, что

$$\{\mu(n) Rn \to Q[\mu(n)]\} \to Q(n)$$

(т. е. $Q(n)$ следует уже из $Q[\mu(n)]$ или $\neg \mu(n) Rn$ вместо $\forall mRn) Q(m)]$). *Метод спуска* наверняка обоснован, если последовательность n, $\mu(n)$, $\mu[\mu(n)]$, ..., т. е.

$\mu(i, n)$, $i = 0, 1, \ldots$, где $\mu(0, n) = n$, $\mu(i + 1, n) = \mu[\mu(i, n)]$,

не является монотонно возрастающей. Действительно, пусть i_0 — наименьшее i, для которого $\neg \mu(i_0 + 1, n) R \mu(i_0, n)$; тогда

$$Q[\mu(i_0, n)] \quad \text{и} \quad (\forall i < i_0) \{Q[\mu(i + 1, n)] \to Q[\mu(i, n)]\}.$$

(*Упражнение*: найти такой P_μ, что *метод спуска* следует из $\mathrm{TI}(R, P_\mu)$.)

Историческое замечание. Если трансфинитная индукция была сформулирована только в прошлом столетии, то *метод спуска* известен по существу еще со времен Ферма. Тогда в математике вообще не пользовались предикатами с кванторами, а применяли только *равенства* и *неравенства* (в противоположность TI). Например, сегодня мы стали бы доказывать

$$(p + 1)^3 + (q + 1)^3 \neq (n + 1)^3, \quad \text{сокращенно} \quad F_3(p, q, n),$$

с помощью обычной индукции, примененной к $\forall p \forall q F_3(p, q, n)$. До того как математики привыкли к логическим символам, тройки (n, p, q) упорядочивались лексикографически и применялся *метод спуска*. Можно было предполагать, что удачное упорядочение четверок (p, q, r, n) — например с ординалом $\varepsilon_0!$ — ведет к доказательству теоремы Ферма [a]

$$(p+1)^{r+3} + (q+1)^{r+3} \neq (n+1)^{r+3}.$$

Упорядочения и ординалы. Конечно, не следует ожидать, что множество теорем, выводимых из $\mathrm{TI}(R, P)$, не говоря уже о множестве их доказательств, зависит только от «ординала упорядочения R».

1. В схеме $\mathrm{TI}(R, P)$ и без того участвуют не сами упорядочения, а *определения* R и нельзя ожидать, что структуры доказательств будут определяться упорядочением, которое задает R в *одной* из моделей, например в полукольце натуральных чисел.

2. Определенный таким образом порядок, конечно, не показателен! Рассмотрим какую-нибудь формулу $\forall n F(n)$ и определение R_F, в котором $\min(p, q)$ обозначает наименьшее из чисел p, q:

$$pR_Fq\colon\ p < q, \quad \text{если} \quad [\forall n < \min(p, q)]\, F(n), \quad \text{и}$$
$$p > q, \quad \text{если} \quad \neg[\forall n < \min(p, q)]\, F(n).$$

Очевидно, что $\mathrm{TI}(R_F, P_F) \vdash \forall n F$, если $P_F(n)$ есть $(\forall m R_F n) F(m)$. Но *если* $\forall n F(n)$ *истинно, то* R_F *определяет обычный порядок* $<!$ (R_F разрешимо, если F разрешимо.) Следовательно, если $\forall n F(n)$ верно, но не доказуемо в ЧА, то невозможно доказать $\mathrm{TI}(R_F, P_F)$.

3. С другой стороны, имеются (примитивно рекурсивные) определения *) R упорядочений, которые вообще не фундированы, хотя в ЧА доказуемо $\mathrm{TI}(R, P)$ для любого (арифметического) P: наименьший элемент в R имеют все (непустые) *арифметические* множества, но не все множества [3]).

Удивительно, что факты 1—3 не являются общеизвестными. Конечно, существуют *конкретные* формальные системы $\mathcal{F}$, которые подходят для «теоретико-ординального» анализа с помощью $\mathrm{TI}(R_{\mathcal{F}}, P)$ для *конкретного* $R_{\mathcal{F}}$ (и известно, что такие $R_{\mathcal{F}}$ можно выделить удовлетворительным образом, а именно с точностью до доказуемого изоморфизма; см. § 7 о *канонических определениях* вполне-упорядочений). Но следует быть готовым к тому, что эта ситуация встречается не всегда, учитывая, что ограничения 1—3 нужны уже для ординала ω. И опыт показывает, что даже для хороших специалистов по теории доказательств такие ограничения оказываются неожиданными.

Наконец, следует допустить, что ЧА хуже подходит для теоретико-ординального анализа, чем формализмы, в рамках которых можно сформулировать такие разделы математики, где вполне-упорядочения играют более важную роль (хотя, как уже сказано, на более ранних стадиях теории чисел применялся *метод спуска*, и ЧА была первой теорией, подвергнутой «теоретико-ординальному» анализу).

§ 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ АНАЛИЗ

Элементарный анализ (ЭА) содержит сверх ЧА еще *второй вид переменных* $f, g, \ldots$ для одноместных теоретико-числовых функций и новую константу A, так называемое «применение». $A(f, n)$ — это значение f на аргументе n, которое обычно (и здесь тоже) обозначается через $f(n)$. Схема индукции из ЧА распространяется теперь на все формулы ЭА.

NB. Поскольку мы увидим, что важнейшие теоремы *теории доказательств* автоматически верны для всех конечных расширений ЭА, здесь (пока) не нужно тревожиться о том, что столь «элементарные» утверждения, как, например, $\exists f \forall n [f(n) = s(n)]$, не являются аксиомами ЭА.

Для тех, кто знаком с так называемой теорией типов: совершенно аналогично получается «элементарная арифметика конечных типов», если допустить бесконечно много новых видов переменных, а именно наряду с числовыми переменными типа 0 и введенными выше переменными типа $0 \to 0$ также и $\sigma \to \tau$, если уже введены σ и τ. Выражение $A(f^\sigma, g^\tau)$ допустимо, если σ имеет вид $\tau \to \sigma'$, и в этом случае σ' есть тип терма $A(f^\sigma, g^\tau)$.

Ясно, что в ЭА доказуемы только те формулы ЧА, которые доказуемы уже в ЧА, т. е., как иногда говорят, ЭА есть *консервативное* расширение ЧА. Действительно, все аксиомы

([a]) Конечно, для «неидеологических» целей главный интерес представляет не ординал упорядочения четверок (p, q, r, n), а то, как равенство $(p+1)^n + (q+1)^n = (r+1)^n$ «сводится» к предшествующим в этом упорядочении. Кажется правдоподобным, что так называемые неэлементарные доказательства в теории чисел (использующие l-адическую когомологию) могут быть с выгодой «обтесаны» методом Генцена и таким образом свернуты в доказательства методом бесконечного спуска в применении к равенствам, т. е. как раз в такие доказательства, какие были приняты во времена Ферма. *Упражнение*: найдите упорядочение (возможно, нефундированное), которое можно было бы использовать для доказательства гипотезы Ферма посредством бесконечного спуска и которое могло бы приглянуться Ферма.

*) См. статью «Обзор теории доказательств» в этом сборнике, конец § 6(b). — *Прим. перев.*

ЭА выполнены, если рассмотреть «модель», в которой есть всего *одна* функция $\dot{0}: \dot{0}(n) = 0$. Тогда $A(f, n)$ заменяется на 0 и любая формула ЭА «переводится» в формулу ЧА простым вычеркиванием кванторов по функциям. Грубо говоря, в ЭА можно многое (из обычного анализа) *выразить*, но немногое *доказать*. Несмотря на это, переход от ЧА к ЭА весьма существен в теории доказательств.

> Он отражает стремление (типичное для современной математики) искать не только идеи доказательства, чтобы пробиться к решению какой-то задачи, но и *систему понятий* для идей, на которые мы набрели в процессе поиска решения.

Упражнения (не предполагающие глубоких знаний в области аксиоматического метода или метаматематики). (a) Пусть R — произвольное (определение, задающее) упорядочение в ЧА, например $\omega^* + \omega$-упорядочение

$$(2n)\ R\ (2m+1); \quad (2n+1)\ R\ (2m+1) \leftrightarrow n < m; \quad (2n)\ R\ (2m) \leftrightarrow m < n.$$

В ЭА можно выразить два варианта понятия фундированности, знакомых нам по § 3.

(i) Не может существовать убывающей последовательности, т. е.

$$\forall f \exists n \{\neg [f(s(n))] R f(n)\}.$$

(ii) Любой непустой предикат $\neg P$ имеет первый элемент, т. е. $\mathrm{TI}(R, P)$.

Однако (i) → (ii) в общем случае недоказуемо в ЭА! Действительно, (i) верно для всех R в приведенной выше модели, где $\dot{0}$ — единственная функция. (b) Пусть $(\mathrm{ЭА})^+$ — расширение ЭА присоединением единственной аксиомы A. Если принцип рефлексии в смысле § 1 для *всех* формул F системы ЭА доказуем после присоединения схемы $\mathrm{TI}(R_0, P)$, то и принцип рефлексии для $(\mathrm{ЭА})^+$ доказуем в $(\mathrm{ЭА})^+$ после присоединения той же схемы: F заменяется на $(A \to F)$.

§ 5. ω-МОДЕЛИ ЭА, ω-ПРАВИЛО И (СНОВА) ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Здесь рассматривается последний подготовительный шаг, который (сегодня) приводит теорию доказательств к ее ординалам.

ω-модели ЭА выделены тем, что само ω является областью изменения переменных $n, m, \ldots$, и $0, s$ обозначают соответственно нуль и операцию следования. Область функциональных переменных, напротив, никак не ограничена (кроме того, что она должна быть непустой).

Упражнения. (i) ЧА имеет только одну ω-модель (т. е. исключаются так называемые нестандартные арифметики). (ii) В ω-моделях, где выполнена «аксиома экстенсиональности», т. е.

$$\forall f \forall g \{\forall n [A(f, n) = A(g, n)] \to f = g\},$$

можно без ограничения общности выбрать в качестве области изменения функциональных переменных некоторый класс теоретико-числовых функций. Если в формализме ЭА нет равенств между функциями, то аксиома экстенсиональности лишняя, так как для любой модели в ней самой и в ее факторизации по $\forall n [A(f, n) = A(g, n)]$ выполняются одни и те же формулы ЭА. (iii) Если формула P содержит помимо f только «числовые» переменные, то $\forall f P$ верна во всех ω-моделях (обозначение $\vdash_\omega \forall f P$) в точности тогда, когда $\forall f P$ верна в обычной, т. е. максимальной, (ω-)модели ЭА.

ω-правило (известное уже более чем 40 лет под разными названиями — правило Карнапа или Гильберта, бесконечная индукция): если доказаны $A(0)$, $A(1)$, ..., $A(n)$, ... для любого $n \in \omega$, то также и $\forall n A(n)$.

Очевидно, что это правило заменяет обычную индукцию, так как по правилу модус поненс $A(n)$ для любого $n \in \omega$ следует из $A(0) \wedge \forall n [A(n) \to A(sn)]$.

Из теории моделей известно, что упомянутые в § 2 правила *без сечения* для логики предикатов вместе с ω-правилом образуют *полную систему для ω-истинности* (причем не только для формализма ЭА: ω — область изменения одного сорта переменных, остальные не ограничены).

NB. Так как правила без сечения неполны относительно следования из аксиом, добавочные аксиомы, относящиеся, например, к $=$, следованию и т. д., заменяются подходящими правилами.

Теорема о полноте может быть *усилена* (с помощью теории рекурсии) следующим образом: необходимы только (примитивно) *рекурсивные ω-деревья доказательства.*

Точнее,

> каждой формуле A рассматриваемого формализма (здесь это ЭА) ставится в соответствие дерево B_A таким образом, что (i) A находится в корне (т. е. максимальном элементе при обычном упорядочении узлов) дерева B_A; (ii) если F_K находится в узле K дерева B_A, а $F_{K'}, F_{K''}, \ldots$ находятся в непосредственных предшественниках $K', K'', \ldots$ узла K, то F_K следует из $F_{K'}, F_{K''}, \ldots$ по правилам рассматриваемой системы и (iii) в концах K ветвей B_A находятся только аксиомы.

Заметим, что, как и в других областях математики, понятие «рекурсивности» (дерева) должно уточнять, какие *данные* определяют дерево. Например, это не только упорядочение объектов [4]) в узлах K, но и функция, сопоставляющая каждому K его непосредственных предшественников (или сам узел K, если он концевой). См. стр. 77—78 из [7] или компактную формулировку в [10].

(Для специалистов. Вместо «рекурсивных деревьев доказательства» иногда говорят о введенном П. С. Новиковым «рекурсивном ω-правиле», однако чаще всего применительно не к *истинности* для чистой ω-логики, а к ω-*следованию* из добавочных аксиом. Например, в [12] используется и правило сечения, так что не обязательно заменять аксиомы «подходящими» правилами.)

Полнота: B_A *фундировано* тогда и только тогда, когда $\vdash_\omega A$.

Для тех, кто знаком с теорией рекурсии: как известно, (i) предикат $\vdash_\omega A$ принадлежит классу Π^1_1 (как предикат от A) и (ii) понятие *фундированности* (примитивно рекурсивных упорядочений) принадлежит Π^1_1 и является Π^1_1-полным; поэтому «редукция» $\vdash_\omega A$ к фундированности дерева B_A является усилением известной теоремы из теории рекурсии. Для тех, кто знаком с литературой по теории доказательств (см., например, [17] или [10]): часто рассматривается не весь формализм ЭА, а только *фрагмент*, в котором функциональные переменные *не встречаются связанно*. Этот фрагмент составляет «класс сведения» в обычном для теории доказательств смысле, так как $(\vdash_\omega A) \Leftrightarrow \forall f G^A_\omega(f)$ для некоторого G^A_ω в этом фрагменте (ибо $\vdash_\omega A \in \Pi^1_1$) и потому $(\vdash_\omega A) \Leftrightarrow \vdash_\omega G^A_\omega(f)$; см. упр. (iii) в начале § 5.

Для тех, кто знаком с интуиционистской литературой (см. определение дерева B_F в начале § 8) или с теорией рекурсии для «обеспеченных» последовательностей: если G^A_ω было приведено к чисто экзистенциальной форме, т. е. $G \in \Sigma^0_1$, то B_G построено согласно известным правилам Брауэра для определения функций на свободно становящихся последовательностях. В частности, Брауэр использовал общее правило: $\Gamma \vdash C$ следует из бесконечного набора посылок $t = s^n 0$, $\Gamma \vdash C$ $(n = 0, 1, \ldots)$ только для термов t вида $f(0)$ и для $C \in \Sigma^0_1$. Итак, грубо говоря, возможность редукции утверждения $\vdash_\omega A$ к фундированности некоторого упорядочения «типа» B_A или к некоторой Π^1_1-теореме «типа» $\vdash_\omega G^A_\omega$ не вызывает (теперь) сомнения. Поэтому наша *основная задача* — формулировать *следствия*, *которые существенно используют* B_A. Для этого подходит

трансфинитная индукция по (упомянутому в примечании 4) упорядочению R_A,

точнее, $\mathrm{TI}(R_A, P_A)$ для подходящего предиката P_A. В частности, если основную роль играет *логическая сложность* P_A

(как в примерах из § 2 или приложения II), то для любого *фиксированного* A из ЭА имеет место

$\mathrm{TI}(R_A, P_A) \vdash A$, где $\vdash$ обозначает выводимость в той части ЭА, где может быть доказана корректность правил ω-логики *без сечения* в применении к подформулам формулы A, и $P_A(K)$ [как в § 2, для *подформул* F формулы A] выражает следующее условие: для $K \in B_A$,

если формула (с номером) F находится в узле K, то F верна.

Следует отметить, что $\mathrm{TI}(R_A, P_A) \vdash A$ верно для *всех* A (из ЭА), а не только для тех, которые удовлетворяют $\vdash_\omega A$. Если верно $\vdash_\omega A$, то R_A действительно фундировано (так что $\vdash_\omega \forall X\, \mathrm{TI}(R_A, X)$), и потому B_A есть ω-доказательство.

Если верно $\vdash_\omega A$, то ординалы напрашиваются как некоторая (возможно, грубая) мера величины B_A. Минимальным элементам (дерева B_A) ставится в соответствие *нуль*, а если (узлы) K', такие, что $K' R_A K$, имеют ординалы σ', то K имеет ординал $\sup(\sigma' + 1)$. Само B_A получает ординал узла $\langle\ \rangle$ (из B_A).

Некоторые «ограничения», требующиеся, согласно § 3, при теоретико-ординальном анализе ЧА, оказываются излишними для ЭА. (Это подкрепляет высказанное в конце § 3 мнение о том, что ЭА больше подходит для такого анализа; естественно, что, как и в случае ЧА, формуле A ставится в соответствие *определение* R_A некоторого упорядочения, а не само это упорядочение.) В частности, когда A выражает фундированность некоторого арифметического отношения R, т. е. $\forall f \exists n \neg f[s(n)]\, R f(n)$, то любое свободное от сечения доказательство формулы A имеет ординал $\geqslant$ ординала (упорядочения $|R|$, которое определяется в ω-модели ЧА отношением) R; см [17, стр. 222]. Супремумом этих ординалов является уже для Π^1_1-формул A первый нерекурсивный ординал. Если фундированность R сформулирована описанным выше образом и доказуема в ω-логике, то $|R|$ действительно фундировано.

До сих пор мы использовали только ω-истинность, но не (формальную) доказуемость. Естественно ожидать, что из $\vdash_{\text{ЭА}} A$ следуют *более сильные* результаты, чем из $\vdash_\omega A$. *Не следует*, однако, ожидать, что эти улучшения можно доказать аналогичными методами: см., например, (i) теорию n-кратно дифференцируемых функций f $(f^{(n)} > 0)$ и (ii) *алгебраическую* теорию многочленов степени n.

§ 6. ЗНАЧЕНИЕ ГЕНЦЕНОВСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, НЕ ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ СОМНЕНИЙ

Грубо говоря, теорема (из § 5)

$$(\vdash_{\omega} A) \Rightarrow \mathrm{TI}(R_A, P_A) \quad \text{и} \quad \mathrm{TI}(R_A, P_A) \vdash A$$

усиливается до

$$(\vdash_{\text{ЭА}} A) \Rightarrow \mathrm{TI}(R_0^p, P_A) \vdash A,$$

где R_0 означает *каноническое* (определение, задающее) упорядочение типа ε_0 и R_0^p — начальный отрезок R_0, определяемый p (см. обозначения в § 3). Точнее (так как понятие канонического упорядочения будет уточнено только в § 7),

> R_0 — упорядочение термов t, построенных из 0, ω, $+$, $\exp_2$, причем tR_0t' верно в точности тогда, когда $|t| < |t'|$, где $|t|$, $|t'|$ — ординалы, обозначениями (т. е. канторовскими нормальными формами) которых являются t и t'.

Очевидно, что эти термы можно занумеровать так, что (i) индуцированный порядок (который мы также обозначим через R_0, а не $|R_0|$), операции построения и анализа термов (т. е. обращения функций $+$ и $\exp_2$), а также (ii) длина терма как функция его номера примитивно рекурсивны. См. примечание 4.

NB. Ниже, в частности в приложении I, мы проанализируем, что в действительности нужно от нумерации: ведь *требование* (примитивной) рекурсивности было бы столь же доктринерским, сколь концептуальное сомнение, которого мы хотели избежать.

(a) Для любого натурального числа p и любого предиката P системы ЭА имеет место $\vdash_{\text{ЭА}} \mathrm{TI}(R_0^p, P)$. В приложении I это обобщается. Из рассмотрения класса $\mathfrak{R}$: $R \in \mathfrak{R} \Rightarrow \Rightarrow \vdash_{\text{ЭА}} \mathrm{TI}(R, P)$ можно извлечь свойства R_0^p, которые здесь существенны.

(b) Если $\vdash_{\text{ЭА}} A$, то A можно вывести без сечения из $\mathrm{TI}(R_0^p, P_A)$ для некоторого p (зависящего от вывода формулы A). При этом P_A имеет примерно ту же сложность, что и A. Короче, мы имеем *нормальную* форму для доказательств в ЭА.

Следствие (так сказать, в противоположность обычной индукции, см. § 2). Если $\mathrm{TI}(R_0^p, P) \vdash A$ и P, возможно, сложнее, чем A, то имеется q, такое, что pR_0q и $\mathrm{TI}(R_0^q, P_A) \vdash A$, где P_A имеет примерно ту же сложность, что и A. Применение

трансфинитной индукции до p к логически сложным предикатам можно заменить индукцией до «большего» q по простому предикату (все относительно A). Конечно, «в противоположность» — это преувеличение, так как до замены говорится об обычной индукции по определенному упорядочению ω, а здесь — о классе упорядочений $\{(n, m)\colon nR_0m, mR_0p\}$, $p = 1, 2, \ldots$.

(c) Если к ЭА добавить

> *либо* схему $\mathrm{TI}(R_0, P)$ для всех P из ЭА, *либо* схему рефлексии $(*)^+$ (см. конец § 1),

то становятся выводимы одни и те же теоремы ЭА. И здесь мы имеем оказывающееся полезным в приложении II усиление, которое касается логической сложности: $\mathrm{TI}(R_0, P)$ следует из

$$(*)_F^+ \qquad \forall n \{\exists b\, \mathrm{Bew}_{\text{ЭА}}[b, s_F(n)] \to F(n)\},$$

где F имеет примерно ту же сложность, что и P (и обратно).

Для доказательства $\mathrm{TI}(R_0, P)$ используется $(*)_F^+$, где роль $F(n)$ играет формула $\mathrm{TI}(R_0^{w(n)}, P)$ и $w(n)$ — номер ординала ω_n в упорядочении R_0 (здесь $\omega_1 = \omega$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$). В приложении I есть вполне четкие указания к построению выводов формул $F(0)$, $F(1)$, ... Обратно, $(*)_F^+$ выводится следующим образом, совершенно аналогично тому, как выводится $\mathrm{Ind}_{n+1} \vdash_n [(\vdash_n F) \to F]$ в § 2. Сначала идет «синтаксический» шаг устранения сечения, который (весьма подробно изложен в литературе, например, в [10] и) примитивно рекурсивно сопоставляет любому формальному доказательству b в ЭА некоторое дерево B^b. При этом (a) B^b локально построено по правилам ω-логики; (b) B^b имеет ту же последнюю формулу, что b; (c) B^b содержит в каждом узле K индекс n_K, такой, что $K > K' \Leftrightarrow n_{K'}R_0n_K$ (где $<$ обозначает обычное упорядочение в дереве). Короче говоря, $K \longmapsto n_K$ отображает B^b в R_0 с сохранением порядка. С помощью R_0-индукции можно доказать, что все формулы, находящиеся в узлах B^b, верны.

Следствия. (i) $\mathrm{WF}_{\text{ЭА}}$ доказывается *методом спуска* по R_0.

(ii) Как известно, для каждого k в ЭА существует определение истинности P_k для всех формул ЭА, имеющих сложность $\leqslant k$ (в теории рекурсии P_k называется «полным» для этого класса формул). Из P_k очевидным образом получается такой P_k', что *для любого конечного расширения* $\mathfrak{A}$ системы

ЭА аксиомами *сложности* $\leqslant k$ верно следующее утверждение:

принцип рефлексии $(*)_F^+$ относительно системы $\mathscr{A}$ для формул сложности $\leqslant k$ следует в $\mathscr{A}$ из $\mathrm{TI}(R_0, P'_k)$; в частности, $\mathrm{WF}_{\mathscr{A}}$ следует в $\mathscr{A}$ из $\mathrm{TI}(R_0, P'_k)$.

(iii) Согласно § 1, верно, разумеется, и такое утверждение (для предиката P'_k из (ii) выше):

Если $\vdash([\neg \mathrm{TI}(R_0, P'_k)] \to F)$ и F имеет сложность $\leqslant k$, то и $\vdash_F$.

Это следствие будет использовано в приложении II.

Замечания о понятии ординала формальной системы, например некоторого конечного расширения $\mathscr{A}$ системы ЭА, рассмотренного в (ii), или («точной») границы выводимости трансфинитной индукции (в $\mathscr{A}$). Здесь речь идет о бездумном обобщении (нетипичной) ситуации в ЧА или ЭА. Пока эта граница определяется только по логической сложности предикатов P, ординал системы ЭА всегда равен ε_0. Однако в общем случае эта граница (для $\mathscr{A}$) существенно зависит от того, как (например, к каким P) применяется индукция.

Пример. Пусть R — произвольное рекурсивное определение фундированного упорядочения, возможно $\gg \varepsilon_0$, предикат P_k описан выше в (ii) и $\mathscr{A}$ — расширение ЭА схемой $\mathrm{TI}(R, P_k)$. Но и при ограничении запаса предикатов P в $\mathrm{TI}(R, P)$, скажем, «свободными от логики» выражениями вроде $f(x)=0$ порядковый тип R редко является показательным. *Пример* (для специалистов). Присоединение к ЭА истинных Σ^1_1-предложений, конечно, изменяет класс доказуемо фундированных R (класса Σ^1_1), но не класс их ординалов: они по-прежнему $<\varepsilon_0$. В приложении II есть хороший пример: *самая естественная* формализация разветвленного анализа (вплоть до любого уровня с рекурсивным ординалом, т. е. формализация некоторого сегмента гиперарифметической иерархии) требует помимо ЭА только Σ^1_1- аксиом (которые там обозначены через $(\Pi^1_0\text{-CA}^-)^p$).

В противовес «отрицательным» замечаниям, сделанным выше, ординал ε_0 (а не только определение R_0) имеет все же следующее значение для ЭА.

(iv) Грубо говоря, доказуемое (в ЭА) фундированное упорядочение доказуемо *не* $\geqslant \varepsilon_0$. Точная формулировка должна содержать уточнение «доказуемой фундированности», например, в зависимости от сложности рассматриваемого (определения) упорядочения R. В частности, рассмотрим высказывание F

существует сохраняющее порядок отображение R_0 в R.

Пусть k есть сложность $\neg F$ и P'_k — предикат из (ii). Мы назовем R *достаточно доказуемо фундированным*, если найдется такой P''_k, что

(a) $\mathrm{TI}(R, P''_k)$ и (b) $\{[F \wedge \mathrm{TI}(R, P''_k)] \to \mathrm{TI}(R_0, P'_k)\}$

доказуемы в ЭА. (Очевидно, что легко подобрать P''_k таким образом, чтобы (b) имело место.) Теорема Лёба дает:

Если имеют место (a) *и* (b), *то в* ЭА *доказуемо* $\neg F$.

Действительно, согласно (a) и (b) получаем, что $F \to [\exists b \mathrm{Bew}(b, \neg F) \to \neg F]$, а значит, $(*)_{\Pi^0_2}$ доказуемо в ЭА и, следовательно, по теореме Лёба доказуемо также и $\neg F$; таким образом, R_0 не может быть отображено в R с сохранением порядка.

Упражнения (для заинтересованного читателя). Сформулировать возможные дополнительные условия на (сложность) R так, чтобы R доказуемо отображалось в R_0, т. е. $|R| < \varepsilon_0$. Сформулировать следствие (iv) для конечных расширений ЭА и свести его непосредственно к (iii).

§ 7. КАНОНИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВПОЛНЕ-УПОРЯДОЧЕНИЙ (ОРДИНАЛА τ)

Речь идет о том, чтобы из класса (эквивалентности) всех упорядочений, скажем множества натуральных чисел, имеющих тип τ, выбрать такие, для которых возможно больше *основных свойств* $\mathscr{G}_\tau$ ординала τ являются *наглядными* (типично для теории доказательств — речь идет о доказательствах и потому об определениях упорядочений, а не о самих упорядочениях). Как и в других областях математики, мы говорим не об *одном* определении, а о целом классе *доказуемо эквивалентных*, а значит, и доказуемо изоморфных по упорядочению определений. Ни понятие «основного свойства» (ординала τ), ни «наглядность» не нуждаются в строгом анализе, пока рассматриваются *положительные* результаты. Например, достаточно найти небольшой набор $\mathscr{G}_\tau$, которые очевидным образом представляют собой основные свойства τ и одновременно достаточны для того, чтобы охарактеризовать класс искомых определений с точностью до изоморфизма.

(Разумеется, если мы добьемся успеха в случае некоторых хорошо знакомых нам τ, то можем ожидать, что найдем и какое-то математическое обобщение. Однако мы не можем

быть уверены, что оно будет полезным или в каком-то смысле убедительным.)

Пример: $\tau=\varepsilon_0$. Нет сомнения, что (1) в общем случае мы *вводим* ε_0 через канторовские нормальные формы, например по основанию 2 (исходя из 0 и ω), т. е. с помощью сложения $\oplus$ и возведения в степень $\exp_2$, и (2) рекурсивные уравнения для $\oplus$ и $\exp_2$ (для $\alpha<\varepsilon_0$) принадлежат к «основным свойствам» ε_0. Если бы мы хотели иметь чисто функциональные, т. е. «свободные от логики» определения и доказательства, то нам нужны были бы также функции, обратные к $\oplus$ и $\exp_2$ (т. е. $\log_2 : \exp_2(\log_2\alpha)\leqslant\alpha<\exp_2[(\log_2\alpha)+\exp_2 0])$, и предшественник π, чтобы выразить *непрерывность* этих операций на предельных числах. При этом $\pi\alpha=\alpha$ выражает предельность α с помощью свободных от логики аксиом $\beta+1=\alpha\rightarrow(\pi\alpha)+1=\alpha$, а 1, естественно, обозначает $\exp_2 0$. Как указано в начале § 6 и в приложении I, эти основные свойства и упоминаемые в них операции можно без каких-либо трудностей реализовать на R_0. Известно, что любое R_0' (типа ε_0), которое доказуемо удовлетворяет этим условиям, является доказуемо изоморфным R_0 (или, более скрупулезно, доказуемо в любой системе, содержащей шаги доказательства, используемые, например, в приложении I).

NB. Пример $\tau=\varepsilon_0$ является слишком грубым для применений к ЭА, так как здесь используются только $\sigma<\varepsilon_0$, а не само ε_0; вместо операции $\exp_2\alpha$ с переменным α достаточно применять $\alpha\mapsto\alpha^\sigma$ (для всех констант $\sigma<\varepsilon_0$).

Вместо того чтобы использовать понятие «основного свойства» $\mathscr{G}_\tau$, в математике привычнее «анализировать» явно интересные доказательства, касающиеся τ, и выяснить, какие свойства $\mathscr{B}_\tau$ числа τ «действительно» используются в этих доказательствах. Затем пытаются выяснить, выделяют ли $\mathscr{B}_\tau$ с точностью до изоморфизма некоторый класс определений (упорядочений типа τ). Естественно, что такая практика не менее (и обычно не более) проблематична, чем история с $\mathscr{G}_\tau$: ведь остается открытым вопрос, какие понятия (или какие «точки зрения») следует использовать для такого анализа.

Пример: $\tau<\varepsilon_0$. При анализе доказательств $\mathrm{TI}(R_0^p, P)$ в ЧА (или ЭА) Шютте натолкнулся на свойства $\mathscr{B}_\tau$, которые по существу совпадают с $\mathscr{G}_\tau$ из предыдущего примера. См. приложение I или [17].

Замечания. (i) Вполне можно себе представить, что такой «анализ» приведет к неудаче для недостаточно знакомых нам τ. Например, нам не удастся набрать достаточно $\mathscr{G}_\tau$ или $\mathscr{B}_\tau$, которые определяют R_τ с точностью до доказуемого изоморфизма, или, если мы вынуждены добавить новые $\mathscr{B}_\tau'$ и $\mathscr{G}_\tau'$, может оказаться невозможным даже для рекурсивных τ построить рекурсивную структуру (т. е. упорядочение с операциями, входящими в $\mathscr{G}_\tau\cup\mathscr{G}_\tau'$ или $\mathscr{B}_\tau\cup\mathscr{B}_\tau'$), удовлетворяющую этим условиям. См. заключительные замечания к приложению I. (ii) Что касается $\mathscr{B}_\tau$, то едва ли можно ожидать, чтобы при $\tau\gg\varepsilon_0$ хватило таких тривиальностей, как в приведенном выше примере с доказательством $\mathrm{TI}(R_0^p, P)$ в ЧА. (iii) Опасения, высказанные в (ii), вполне убедительно объясняют *фиаско*, которое потерпела *теория ординальных обозначений*, несмотря на наличие (а скорее, именно благодаря наличию) остроумных идей, например, при выборе «фундаментальных последовательностей» и иерархий (по Бахману). Действительно, усилия просто несоизмеримо велики по сравнению с результатами, пока эти вещи применяются в теории доказательств только к *затасканному вопросу* о границах доказуемости трансфинитной индукции. Здесь мне кажется поучительным следующее сравнение (с). Йенсен (между прочим, независимо) сумел успешно применить аналогичные идеи доказательства в теории множеств. Для доказательства его теорем о конструктивных по Гёделю множествах в [4] ему нужно столь утонченное структурирование ординалов $\leqslant\tau$ (с помощью «когерентных» фундаментальных последовательностей длины $\leqslant\mathrm{Kard}\,\tau$), что содержащиеся в нем условия $\mathscr{B}_\tau$ в достаточной степени определяют эти фундаментальные последовательности. NB. Новые доказательства (по крайней мере) некоторых теорем Йенсена, данные Сильвером, избегают этого утонченного структурирования, называемого тонкой структурой (класса L). Если основная часть теорем в теории множеств — или теории доказательств! — доказуема без сложного структурирования, то можно в конце концов не обращать внимания на пару исключений. (iv) Радикальные сомнения изложены в § 10 и особенно в приложении I, где «основные свойства» ε_0 используются не только для целей теории доказательств, но прежде всего для формулировки *общих предложений о дискретных упорядочениях* с операциями, обладающих соответствующими «основными свойствами», а также предложений о фундированных начальных отрезках таких упорядочений.

(с) Недавняя работа Жирара в терминах теории категорий (упорядочений), переформулированная Жервеллом в терминах так называемых однородных деревьев ординалов, обеспечивает, быть может, даже лучшее сравнение с работой Йенсена, хотя Жирар и представляет ее как (важный) вклад в теорию доказательств. Обстоятельство, на которое следует обратить внимание: основная часть работы, включая аналог устранения сечения, сформулирована в аскетических теоретико-ординальных терминах без какого-либо упоминания специфически теоретико-доказательственных отношений.

§ 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ С ДИСКРЕТНЫМИ, Т. Е. ЧИСЛОВЫМИ, ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ТОПОЛОГИЕЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ИНДУКЦИЯ ПО ФУНДИРОВАННЫМ ДЕРЕВЬЯМ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧА

Рассмотрим другой подход к ординальным числам и соответствующим операциям, не использующий деревьев ω-*доказательства*. Пусть A — предваренная формула ЧА, имеющая вид

$$\exists n_1 \forall m_1 \ldots \exists n_k \forall m_k A_0(n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_k)$$

(A_0 — бесквантерная).

Еще Эрбран заметил (в логике предикатов), что A «упрощается», если ввести новые функциональные переменные[5]):

$$\exists n_1 \exists n_2 \ldots \exists n_k A_0[n_1, \ldots, n_k, f_1(n_1), \ldots, f_k(n_1, \ldots, n_k)].$$

Эти формулы принадлежат ЭА (если для $k > 1$ закодировать f_k с помощью одноместных функций). Ясно, что для *истинной* A имеются функционалы $\boldsymbol{N}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ с аргументами f_i и числовыми значениями $\overline{N}_i = \boldsymbol{N}_i(f_1, \ldots, f_k)$, такие, что

$$(*) \quad \forall f_1 \ldots \forall f_k A[\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_k, f_1(\overline{N}_1), \ldots, f_k(\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_k)].$$

Далее, $\boldsymbol{N}_i$ могут быть выбраны *непрерывными*. Для формально доказуемых A естественно ожидать, что $\boldsymbol{N}_i$ *определимы ограниченными средствами* (и соответственно $(*)$ доказуема).

Замечание. Известная «функциональная» форма формулы A имеет вид

$$\exists n_1 \exists g_2 \ldots \exists g_k \forall m_1 \ldots \forall m_k A_0[n_1, g_2(m_1), \ldots, g_k(m_1, \ldots, m_{k-1}), m_1, \ldots, m_k],$$

и функции g называются «скулемовскими функциями» для A. Упомянутая выше эрбрановская форма получается из скулемовской формы для $\neg A$, если заменить $\neg \forall n_1 \ldots \forall n_k \neg$ на $\exists n_1 \ldots \exists n_k$. (По этой причине эрбрановская форма называется интерпретацией отсутствием контрпримера.)

С точки зрения *теории рекурсии* скулемовская форма безнадежна уже для A, доказуемых в логике предикатов: возьмем B_0 с параметром p, такую, что $\exists n_1 B_0(p, n_1)$ рекурсивно перечислимо, но нерекурсивно, и пусть A_0 есть $B_0(p, n_1) \vee \vee \neg B_0(p, m_1)$, $k=1$. Напротив, для всех истинных (в арифметике) A функционалы $\boldsymbol{N}_i$ можно выбрать не только непрерывными, но даже (тривиальным образом) *рекурсивно непрерывными*: для каждого k-членного набора $(f_1, \ldots, f_k)$ надо перебирать все наборы $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ в некотором ω-порядке. Короче говоря, в противоположность поверхностному первому впечатлению (см. примечание 5) требующиеся здесь операции над теоретико-числовыми функциями *в вычислительном отношении проще*, чем «соответствующее» оперирование с целыми числами (для скулемовской формы).

Начиная с этого места мы рассматриваем непрерывные функционалы $\boldsymbol{F}$ с единственным аргументом g и следующее грубое сопоставление дерева B_F, в корне которого находится *пустая* последовательность $\langle\ \rangle$.

Определение. Последовательность $\langle\ \rangle$, $\langle n_0 \rangle$, ..., $\langle n_0, \ldots, n_p \rangle$ тогда и только тогда является *ветвью* в B_F, когда имеются функции g и g', такие, что $g(i) = g'(i) = n_i$ $(0 \leqslant i \leqslant p)$ и $\boldsymbol{F}(g) \neq \boldsymbol{F}(g')$. Кроме того, $\langle\ \rangle$, $\langle n_0 \rangle$, ..., $\langle n_0, \ldots, n_p \rangle$, $\langle \langle n_0, \ldots, n_{p+1} \rangle, e \rangle$ есть ветвь, если $\boldsymbol{F}(g) = e$ для всех g, таких, что $g(i) = n_i$ $(0 \leqslant p+1)$. (Первые последовательности называются «необеспеченными», вторые — «непосредственно обеспеченными».)

Более тонкое сопоставление. Очевидно, что приведенное определение неудовлетворительно с точки зрения теории рекурсии, так как разбор случаев, вообще говоря, провести невозможно. Поэтому, как в элементарном анализе или топологии, вместо функционала $\boldsymbol{F}$ рассматривают

окрестностные функции $f(c)$ на конечных последовательностях c натуральных чисел со следующим свойством: $f(\langle\ \rangle) = 0$; если $f(c) = 0$ и c' — начало c (сокращенно $c' \prec c$), то $f(c') = 0$; если $f(c) \neq 0$ и $c \prec c'$, то $f(c') = f(c)$, и, наконец,

$$\forall g \exists n [f(\bar{g}n) \neq 0], \quad \text{где} \quad \bar{g}(n) = \langle g(0), \ldots, g(n-1) \rangle.$$

Очевидно, что каждая f однозначно определяет некоторый функционал $\boldsymbol{F}$, а каждый $\boldsymbol{F}$ имеет бесконечно много f.

Определение (дерева B_f для окрестностной функции f). Ветви B_f — это, как и выше, либо последовательности $\langle\ \rangle$, ..., $\langle n_0, \ldots, n_p \rangle$, если $f(\langle n_0, \ldots, n_p \rangle) = 0$, либо $\langle\ \rangle$, ..., $\langle n_0, \ldots, n_p \rangle$, $\langle \langle n_0, \ldots, n_{p+1} \rangle, e \rangle$, если $f(\langle n_0, \ldots, n_{p+1} \rangle) = e + 1$ и $f(\langle n_0, \ldots, n_p \rangle) = 0$.

NB. Деревья B_f, очевидно, похожи на деревья ω-*вывода* B_A из § 5, но проще них.

Фундированность. В силу $\forall g \exists n [f(\bar{g}n) \neq 0]$ дерево B_f фундировано.

Упражнение. Сопоставим каждому узлу K дерева B_f окрестностную функцию f_K. Концевым узлам $K = \langle \langle n_0, \ldots, n_{p+1} \rangle, e \rangle$ сопоставим (одно-

значно определенную) функцию $f_K(c) = e + 1$, узлам $K = \langle n_0, \ldots, n_q \rangle$ функцию $f_K(\langle\ \rangle) = 0$ и

$f_K(\langle n * c \rangle) = f_{K_n}(c)$, причем $K_n = \langle n_0, \ldots, n_q, n \rangle$, соответственно

$\langle\langle n_0, \ldots, n_q \rangle, e \rangle$.

Тогда $f_{\langle\rangle} = f$. Это сопоставление — особенно простой пример определения путем индукции (точнее, рекурсии) по B_f.

Читатели, незнакомые с ω-доказательствами без сечения, могут принять на веру следующую теорему.

Если $A(n, g)$ с функциональной переменной g не содержит кванторов, то *доказательство без сечения формулы* $\exists n A(n, g)$ (в ЭА с ω-правилом) *индуцирует дерево* B_f *и тем самым функционал* $\boldsymbol{F}$ с окрестностной функцией f так, что $\forall g A[\boldsymbol{F}(g), g]$.

Доказательство $\exists n A(n, g)$ без сечения, очевидно, содержит только формулы ЧА с функциональной переменной g, как, например, в книге Шютте [17]. Следовательно, если A — предваренная формула ЧА из начала этого параграфа, то результаты § 6 дают интерпретацию отсутствием контрпримера (*) для A.

В обратном направлении, обращаясь непосредственно к (*), мы сопоставляем шагам доказательства в ЧА, например переходам от A_1 и A_2 к A, соответствующие переходы от $(*)_1$ и $(*)_2$ к (*), т. е. от окрестностных функций, входящих в $(*)_1$ и $(*)_2$, к функциям из (*). Более формально, если f_1 и f_2 — окрестностные функции, которые удовлетворяют $(*)_1$ и $(*)_2$ (причем $x = \boldsymbol{F}_i(g)$ заменено на $\exists n[f_i(\bar{g}n) = x + 1]$), то функция f удовлетворяет (*). Хороший пример такой стратегии дал Гёдель [1] для гейтинговской ЧА. При этом он использовал функционалы всех конечных типов над ω (а не только типов $0 \to 0$ и $(0 \to 0) \to 0$, как здесь).

Переходам от f_1 и f_2 к f отвечают операции над деревьями B_{f_1}, B_{f_2} и B_f соответственно и «их» ординалами ([d]). Если дерево B_f, или, короче, B, рассматривается как частичный порядок $\prec$, то его ординал o_B равен $o(\langle\ \rangle)$, где

$o_B(K) = 0$ в концевых узлах K и

$o_B(K) = \sup[o_B(K_n) + 1]$ в противном случае.

Часто, следуя Н. Н. Лузину, Брауэру и Клини, дерево B отображают в линейное упорядочение (узлов B), которое

([d]) Еще в 1935 г. на стр. 2 длинного письма к Бернайсу от 23 июня Генцен писал, что он хотел бы сказать что-нибудь общее об отношении между трансфинитными ординалами с одной стороны и функционалами и деревьями вывода (в его терминологии — конструкционными и редукционными предписаниями) с другой, но что этот материал не был (тогда) готов для публикации.

содержит $\prec$ и в котором K_n является предшественником K_{n+1}; тогда ординал B — как раз тип этого (линейного) упорядочения.

Читатель легко может представить себе, как это происходит. Более подробную информацию об (операциях на) окрестностных функциях можно найти, например, в § 3 статьи [6], а информацию об ординалах o_B или по крайней мере о границах на o_B (в зависимости от o_{B_1} и o_{B_2}) — например, в [14]. Существование таких границ не вполне очевидно, так как имеется бесконечно много B с одним и тем же ординалом o_B. Как и для деревьев *вывода* из § 6, величина o_B является очень грубой мерой (для B).

Что же используется при переходе от (формального доказательства в ЧА) формулы A к функциональной интерпретации (*)? Как всегда, мы здесь не обращаем внимания на концептуальные сомнения. Нам известно нечто большее, чем истинность A, так как функционалы $\boldsymbol{N}_i$ из (*) не только рекурсивны, но и построены с помощью довольно простых определяющих схем. А относительно некоторых вопросов, например невыводимости A в ЧА, мы знаем достаточно, если для наших $\boldsymbol{N}_i$ высказывание (*) ложно. Это зачастую легче установить, чем невыводимость (более слабое высказывание), грубо говоря, из-за того, что возможные фигуры или деревья доказательства сложнее и менее обозримы, чем деревья B_f. Как известно, мы знаем очень мало о невыводимости в ЧА истинных математически интересных формул A. Следует предположить, что схемы определения функционалов $\boldsymbol{N}_i$ должны специально *подгоняться* к таким теоремам A, если мы хотим использовать функциональные интерпретации с упомянутой целью ([e]).

§ 9. КАК ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ (ДЛЯ ЭА) ПРИШЛА К СВОИМ ОРДИНАЛАМ

Как уже подчеркивалось во введении, мы вообще не занимаемся здесь подробной историей (работ Генцена). Но мы все же избежим самой грубой ошибки, свойственной обычным

([e]) В случае $\forall\exists$-формул выбор функций, подходящих для данной задачи, оказывается делом тонким. Изящный пример приводится в работе Кетонена и Соловэя, которые тонко модифицируют (показав, что это необходимо) «обычное» определение α-рекурсивной функции ($\alpha \leqslant \varepsilon_0$), чтобы получить более точные границы для варианта теоремы Рамсея, найденного Парисом и Харрингтоном (Paris J., Harrington L. A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic. — In: Handbook of mathematical logic, Amsterdam:North-Holland, 1977, 1133—1142). По-видимому, лучшие границы получились бы при использовании вместо этого иерархии, рассмотренной Жираром в работе, упомянутой в подстрочном примечании (c); она растягивает ε_0 до ординала бар-рекурсии низшего типа.

«историческим замечаниям» в логической (или математической) литературе, когда цитируют только *публикации* пионеров науки. К счастью, благодаря Бернайсу в нашем распоряжении теперь имеются (i) часть [2] первоначального ДН, которую Генцен забрал из печати 40 лет назад, и (ii) перечисленные Бернайсом в личной беседе возражения (вообще говоря, необоснованные), которые побудили Генцена к этому. Более полное изложение позволило бы выяснить, что Генцен думал об этих возражениях и пришел ли он (и каким образом) к опубликованному варианту путем анализа первоначального ДН. (Другая гипотеза по поводу этого шага высказана перед замечаниями в конце этого параграфа.) По крайней мере можно утверждать следующее:

> это (якобы чисто) внешнее влияние на Генцена (т. е. упомянутые возражения) имеет общеисторический интерес в том отношении, что оно выявляет ошибки, которые были распространены 40 лет назад.

(Очевидно, что ошибки столь же интересны для истории, сколь и (настоящие) открытия.)

Заинтересованный читатель, конечно, возьмется за первоначальный текст Генцена [2] (или английский перевод [3]). Здесь важна общая *структура* генценовского доказательства, которую в свете сегодняшних знаний можно сформулировать следующим образом:

(a) Так как ДН касается только истинности формально доказанных *числовых* теорем (§ 1), то «в принципе» нужно рассматривать лишь выводы таких теорем (в ЧА). Но поскольку *части* таких выводов доказывают логически сложные теоремы, то им также стоит придать некоторый (у Генцена финитный) «смысл».

(b) Этот «смысл» Генцен видел в редукционном предписании ρ, которое каждому доказательству b в ЧА с последней формулой e_b сопоставляет некоторый *числовой вывод* (некоторой числовой формулы, совпадающей с e_b, если сама e_b является числовой формулой). Особенность ρ состоит в том, что это правило зависит от (свободного) параметра f для *свободно становящихся последовательностей*: на некоторых местах e_b заменяется на произвольно выбранную $A(s^p 0)$, если e_b есть $\forall$-формула $\forall m A(m)$, и заменяется на A или на B, если e_b есть конъюнкция $A \wedge B$. Следовательно, *метаматематическое высказывание*, которое нужно было Генцену в ходе его первоначального ДН, *имело вид*

$$\forall b \forall f \exists n R[\rho(b, f, n)]\ ^{6}),$$

где $\rho(b, f, n)$ — доказательство, получающееся после n шагов редукции при исходном доказательстве b, когда предписание зависит от f. $R(b)$ означает, что b есть истинное числовое, т. е. вычислительное, доказательство. (Те, кто знаком с [2], знают, что, например, для b с числовой последней формулой e_b совершенно очевидно $\forall f \forall n [e_{\rho(b, f, n)} = e_b]$.)

(c) Однако Генцен не дал никаких принципов определения для функционалов $\boldsymbol{N}$, для которых верно $\forall b \forall f R[\rho(b, f, \boldsymbol{N})]$ для $\bar{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N}(f, b)$ [6]). Но он классифицировал доказательства по их сложности B_c и описал переход от $\boldsymbol{N}_c$ к $\boldsymbol{N}_{c+1}$:

если $(\forall b \in B_c) \forall f R[\rho(b, f, \bar{\boldsymbol{N}}_c)]$, то $(\forall b \in B_{c+1}) \forall f R[\rho(b, f, \bar{\boldsymbol{N}}_{c+1})]$.

(Для специалистов: этот переход очевидным образом соответствует так называемому *правилу бар-рекурсии*.)

Легко представить себе, что любое применение функциональных переменных в ДН для ЧА (ошибочно) ведет к возражениям: они основаны, как указано в примечании 5, на поверхностном впечатлении, что различие между так называемыми конкретными индивидами и (абстрактными) операциями высших ступеней важно «в аспекте оснований» или «само по себе». Это впечатление сродни тем наивным сомнениям, которые мы назвали концептуальными. Более интересны те конкретные возражения, к которым привела даже выдающихся логиков эта наивная неудовлетворенность (по поводу присутствия функциональных переменных).

Историческое замечание. Генцен послал первоначальное изложение своего ДН Герману Вейлю, своему учителю, в Принстон, где тогда работали также Гёдель и фон Нейман. Оба, конечно, были знакомы с теорией свободно становящихся последовательностей, которую систематически развивал Брауэр, и в частности с вызывавшим споры допущением (которым особенно гордился Брауэр) о том, что все функционалы $\boldsymbol{F}$, аргументами которых являются свободно становящиеся последовательности натуральных чисел, а значениями — натуральные числа, можно индуктивно породить с помощью процесса, описанного в упражнении § 8. Самое известное следствие отсюда — это так называемая *теорема о веерах* для функционалов $\boldsymbol{F}$ на 0-1-последовательностях f^-: существует такое n_F что $\boldsymbol{F}(f^-)$ зависит только от первых n_F значений f^-, т. е.

$$(\forall f^-)(\forall f_1^-)\{(\forall n \leqslant n_F)[f^-(n) = f_1^-(n)] \to \boldsymbol{F}(f^-) = \boldsymbol{F}(f_1^-)\}.$$

Теорема о веерах, очевидно, является вариантом леммы Кёнига для деревьев, каждый узел которых имеет не более двух предшественников.

Главное возражение против первоначального генценовского ДН состояло в том, что (i) это ДН использует теорему о веерах или лемму Кёнига и (ii) из этой леммы следует полная аксиома свертывания для анализа. (Последнее доказывается так: пусть $P(n)$ — произвольный предикат и B_P — дерево, состоящее из единственной, и притом бесконечной, ветви c, а именно если c_n — начальный отрезок c, имеющий длину n, то

$c_{n+1} = c*1$, если $P(n)$ верно, и $c_{n+1} = c*0$, если $P(n)$ неверно.

B_P бесконечно, и по лемме Кёнига $P(n)$ имеет характеристическую функцию.)

По поводу (i). Лемма Кёнига не имеет отношения к ДН, так как там вообще не идет речь о 0-1-последовательностях! (ср. с информацией в (b) о свободно выбираемом $A(s^n0)$ для универсальных формул $\forall m A(m)$). Кроме того, по-настоящему проблематичная часть упомянутого выше допущения Брауэра вообще не играет никакой роли в ДН, которое никоим образом не использует произвольных $\boldsymbol{F}$: для тех $\boldsymbol{F}$, которые действительно используются, можно показать, что они могут быть построены по рецепту Брауэра.

По поводу (ii). Здесь просто грубое *смешение* комбинаторного принципа (относящегося к ветвящимся фигурам, в нашем случае — леммы Кёнига) и его формализаций; для гильбертовской теории доказательств существенны только последние. Иначе говоря, имеет значение не только сам принцип, но и то, к каким *определениям* рассматриваемых образов он применяется [7]). Нам это, конечно, известно из рассмотрения принципа индукции в § 2: тот, кто понимает (совсем простые) факты из § 2, никогда не выдвинул бы бессмысленного возражения (ii).

Как Генцен пришел от своего исходного ДН к опубликованному ([f]) (с использованием ε^0-индукции)? Я уже сказал,

([f]) Легкомысленность этого вопроса типична для большей части истории, особенно истории идей. Он игнорирует важную особенность большинства видов человеческой деятельности и, прежде всего, исследований: когда мы начинаем размышлять о некоторой проблеме, почти все возможные идеи или «возможности» решения проносятся через наш мозг; главный шаг — это выбор идеи, которая сработает. В частности, Генцен не шел, так сказать, прямо от своего посмертно опубликованного доказательства непротиворечивости к первому опубликованному, а вернулся к одной из своих ранних идей. Так, в открытке от 11 апреля 1934 г. уже говорится о доказательстве непротиворечивости для анализа wie in der Arithmetik mit Hilfe der transfiniten Induktion (посредством трансфинитной индукции, как в случае арифметики). Позднее, 4 ноября 1935 г. в ответе на письмо Бернайса, который тогда был в Принстоне и сообщил ему комментарии Гёделя и фон Неймана по поводу деревьев и т. д., Генцен писал, что все это для него не ново (die Gedankengänge sind mir nicht neu... sogar bis zu dem

что не знаю этого. В голову приходят по меньшей мере два пути. Во-первых, связь (в § 8) между непрерывными функционалами, в частности N_c (см. п. (c) этого параграфа), и фундированными деревьями (и их ординалами). Во-вторых, «граф-схема» самого редукционного предписания ρ, т. е. следующее сопоставление (фундированного) дерева B_ρ предписанию ρ. Если b не является чисто числовым доказательством, то оно имеет непосредственных предшественников b_0, b_1, ..., b_i, ..., или b_0, b_1, или b' в зависимости от того, сколько «редукций» допускает единственное применение ρ к b: бесконечно много, две или всего одну. И b является концевой вершиной (минимальным элементом) B_ρ, если b — (истинное) числовое доказательство. Относительно выбора ρ см. § 10.

Замечания. Если вообще говорить о «редукции», то, конечно, трансфинитная индукция и особенно *метод спуска* кажутся более подходящими, чем теория непрерывных функционалов; *метод* спуска по крайней мере формулируется в (собственной) части символизма ЧА. Здесь возникает вопрос: *зачем* вообще в ДН нужен обходный путь с применением функционалов? 40 лет назад этот путь был совершенно непонятен большинству логиков и даже казался им подозрительным! Ведь Гёдель отчетливо подчеркивал в подстрочном примечании 48[a] своей работы о неполноте, что переход к более

geometrischen Bild der Streckenverzweigung...). Кстати, на стр. 2 он пишет о переходе от устранения сечения к сильному устранению сечения, т. е. сходимости процесса при произвольном выборе устраняемых сечений, на стр. 2—3 он упоминает брауэровский принцип индукции и его отношение к трансфинитной индукции, добавляя (на стр. 3): «Damit hängt es zusammen dass ich früher beim WF die transfinite Induktion gebrauchte» (из-за этого я раньше использовал трансфинитную индукцию при доказательстве непротиворечивости), где «früher» (т. е. «раньше») подтверждает высказанную выше интерпретацию открытки, посланной 18 месяцами ранее.

Отступление для специалистов. В этой открытке Генцен формулирует предложение, которое позднее стало известно как гипотеза Такеути, желая доказать его сначала с помощью «грубой силы» (mit Gewalt), т. е. неконструктивно. Теперь мы знаем несколько больше, чем он 45 лет назад: он говорил, что эта гипотеза эквивалентна (подразумевается эквивалентность, устанавливаемая с помощью элементарных методов) непротиворечивости анализа. В действительности, она несколько сильнее, так как эквивалентна 1-непротиворечивости. Но эта гипотеза, ограниченная доказательствами элементарных формул, действительно эквивалентна непротиворечивости анализа.

Каждый, кто прочтет письма Генцена к Бернайсу, будет считать достигнутый с тех пор в технических вопросах прогресс чем-то вроде Kleinarbeit (мелкой работы), расстановки точек над i. Единственное, что поражает меня своей старомодностью, это невинное допущение, что финитистская точка зрения (finiten Standpunkt) имеет ту гносеологическую ценность, на которую претендует. Это допущение ни в коем случае не принимается в настоящей статье.

высоким ступеням (подразумевается: включая обычные аксиомы свертывания) доказывает непротиворечивость обычной теории типов и тем самым новые теоремы ЧА. Однако это далеко отстоит от привычного математического опыта. Как, например, может обычная индукция в применении к аналитическим предикатам (подразумевается: с помощью «невинно» выглядящих аксиом существования для функций) приводить к новым теоремам ЧА? С *педагогической* точки зрения мне кажется, что здесь гораздо больше подходит *фундированность* упорядочения R_0 (§ 6), например, в форме

$$(*) \qquad \forall f \exists n \neg f(n+1) R_0 f(n).$$

Тот, кто прочтет приложение I, сможет легко убедиться в том, что (*) становится *доказуемой*, если присоединить к ЭА так называемую арифметическую аксиому свертывания Π^1_0-СА *с параметром* f, т. е.

$$\forall f \exists g \forall n [g(n) = 0 \leftrightarrow P(f, n)],$$

где (свободная) переменная f является единственной функциональной переменной в P. Однако она *недоказуема*, если присоединить только $(\Pi^0_1\text{-СА})^-$, т. е. аксиому *без* функционального параметра.

После нескольких таких упражнений склонность избегать функциональные параметры пропадает. Напротив, зная, что непротиворечивость ЧА недоказуема в ЧА и что возможность (интересного ДН) заключается в применении индукции к аналитическим предложениям вроде $(\forall b \in B_c) \forall f \exists n R [\rho(b, f, n)]$, см. п. (b) настоящего параграфа, мы будем *искать* такие предложения. После подобных упражнений вообще уменьшается склонность говорить о «редукциях» или приписывать им теоретико-познавательную ценность.

На первый взгляд может показаться, что (после этих упражнений) мы теряемся в «технических деталях» и забываем о «глубоких» теоретико-познавательных вопросах, касающихся ДН. Лейтмотив моей статьи состоит в том, что это впечатление совершенно неправильно: приведенные выше упражнения выводят нас из *заблуждения* по поводу того, что — «глубоко», а что — нет. Конечно, нужно не останавливаться на упражнениях, а формулировать *новые цели* (см. § 1).

§ 10. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О СОВРЕМЕННОЙ СИТУАЦИИ В ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Прежде всего следует подчеркнуть, что *ранний период* этой теории был вполне удовлетворительным и результаты того времени, безусловно, *остаются* интересными. В частности, сюда

относятся: (i) гильбертовское математическое уточнение широко распространенного убеждения относительно роли формальных правил в математике; (ii) установление с помощью адекватной формализации того, что это убеждение верно для многих областей (тогдашней) математической практики; наконец, (iii) теоретическое опровержение убеждения, упомянутого в (i), теоремами Гёделя о неполноте. Однако *дальнейшее развитие* теории доказательств не вызвало интереса ни среди математиков, ни среди основной массы логиков, несмотря на тот несомненный (для специалистов) факт, что примерно до 1960 г. теория доказательств не отставала от теории моделей в отношении остроумных конструкций (и, например в публикациях Шютте, в чистоте изложения). Отсутствие интереса имело другие основания, и, так как (генценовская) теория доказательств существует уже 40 лет, вряд ли можно предполагать, что здесь сказываются «личные предрассудки» или враждебный «дух времени» (как будто, с другой стороны, такие «объяснения» сами не нуждаются в объяснении или не *допускают* его). Одна из существенных причин связана с (iii): *цели* традиционной теории доказательств (а также гипотезы, например гильбертовские) исходят из *опровергнутых* представлений о математике. Естественно поэтому, что к работам, преследующим эти цели, следует относиться *с осторожностью*.

Заметим, кстати, что следует воспринимать *с осторожностью* также и распространенное мнение, что математики интересуются только так называемым «математическим» (например, изяществом или остроумными методами), но не смыслом своих понятий или даже своих «устремлений». При этом, однако, упускают из вида, что большинство основных понятий и задач, которые удержались (в течение 40 лет, чтобы было с чем сравнивать теорию доказательств), очевидно, были вполне осмысленными, ведь *только* такое «математическое» по-настоящему интересно и приносит пользу. Изящество и математическая удачливость сами по себе недостаточны для устойчивого интереса среди математиков.

В свете высказанных общих соображений стоит добавить несколько конкретных примеров таких аспектов теории доказательств, которые особенно чужды и даже противоестественны для (сегодняшних) математиков.

(a) *Гимны постановкам вопроса* (недостаток проясняющих понятий). Именно выделенное положение ДН посредством трансфинитной индукции или, шире, *трансфинитной индукции как нормальной формы метаматематических доказательств* (обрыв «редукционного процесса») вызывает

ассоциацию с гимнами в богослужении. Однако эта нормальная форма неудовлетворительна не только эстетически, но и содержательно.

(i) Она существует только для определенных систем (см. замечания в § 6), и весьма естественные системы (приложение II), не обладающие этой нормальной формой, не рассматриваются и не ищутся в теории доказательств.

(ii) Когда же такая нормальная форма имеется, она в основном дает не что иное, как снова (математическое) высказывание о трансфинитной индукции! (Границы доказуемости ....)

(iii) Для (нынешних) математиков было бы немыслимо формулировать только высказывания о средствах, с помощью которых доказывается *обрыв* некоторого (редукционного) процесса, особенно если при этом нельзя сказать ничего существенного о графике этого процесса. *Один* вид подобных процессов в теории доказательств образуют так называемые устранения сечения σ (в секвенциальных исчислениях *)) или нормализация ν (в системах натурального вывода), которые сопоставляют произвольным доказательствам b определенные выделенные доказательства $|b|$ (т. е. $|b|_\sigma$, $|b|_\nu$). До 1970 г. не задавались даже вопросом, что общего имеют b и $|b|$ (кроме одной и той же последней формулы) или как связаны $|b|_\sigma$ и $|b|_\nu$.

(iv) Поразительный пример (iii): специалисты в теории доказательств в последние годы особенно интересовались устранением сечения для Π^1_1-анализа по Такеути [13], которое мы обозначим через τ. Единственная очевидная причина для выбора τ состояла в том, что обрыв τ можно доказать с помощью индукции по *ординальным диаграммам* Такеути. Нормализацию ν (и доказательство обрыва ν, данное Жираром) можно очевидным образом приспособить к Π^1_1-анализу. Эти специалисты, по-видимому, не спрашивали себя, верно ли, что

$$\tau(b) = \nu(b), \text{ если } b \text{ — доказательство } \Pi^1_1\text{-анализа.}$$

*) Секвенциальные исчисления, которые Генцен называл L-системами (от logistische), отличаются от натуральных главным образом не употреблением секвенций, а тем, что преобразования могут происходить не только в заключении, но и в посылке; например, в L-системе правило $\vee$-удаления имеет вид

$$\frac{A\Gamma \to C;\ B\Gamma \to C}{(A \vee B)\,\Gamma \to C} \text{ вместо } \frac{\Gamma \to A \vee B;\ A\Gamma \to C;\ B\Gamma \to C}{\Gamma \to C}.$$

Первое генценовское доказательство непротиворечивости как раз использует натуральное исчисление, сформулированное в терминах секвенций. — *Прим. перев.*

В какой еще области математики возможно что-либо подобное? (У меня самого слишком мало доверия к τ для того, чтобы интересоваться сформулированным вопросом. Для специалистов замечу, что нормализация для *обычных* правил классического анализа в литературе не рассматривалась *). Здесь имеется в виду нормализация ν для фрагмента, в котором используются только связки $\neg$, $\wedge$, $\forall$ и правила обычной интуиционистской логики.)

(b) *Монотонность математических доказательств* (отсутствие продуманных лемм). Сегодня в отличие, например, от 18-го столетия математик привык разбираться в сравнительно сложных ситуациях, *комбинируя* просто доказываемые предложения, см. приложение II. В обычной литературе по теории доказательств практически почти всегда начинают «с самого начала» (ab ovo). В лучшем случае переносят *методы* доказательства, например устранение сечения для обычного исчисления высказываний на исчисление с бесконечными формулами, и заменяют простое доказательство для частного случая на более длинное доказательство для более общего случая. Аналогия между этими случаями видна, но отсутствуют понятия, нужные для того, чтобы сказать, в чем она заключается.

У меня сложилось впечатление, что в теории доказательств недооценивается значение таких понятий. Кстати, это было бы согласовано с теми формалистическими представлениями о математическом мышлении и математической строгости, которые открываются за гильбертовской программой ДН! Естественно начинать с самого начала, если мы действительно верим, что лучше всего контролировать доказательство, браво выполняя шаг за шагом (или даже сверяясь с формальными правилами). Однако практическая уверенность достигается, как известно, совершенно иначе: некоторые входящие в доказательство и вызывающие сомнения предложения сопоставляют с уже известными предложениями, часто из других разделов (мета)математики. И в конце концов это приводит к тому, что известное включается в доказательство, короче говоря, доказательство составляется из кусков.

(c) *Обоснование ограничения методов.* Традиционная теория доказательств исходит, как известно, из того, что *расширение* «финитных» методов, например математики (старой) средней школы, до «абстрактной», теоретико-множественной

*) С тех пор появилась работа Статмена (Statman R. Bounds for proof-search and speed-up in the predicate calculus. — Ann. Math. Log., v. 15, 1978, № 3, p. 225—287). — *Прим. перев.*

математики нуждается в обосновании. Но когда требуют обоснования, естественно возникает вопрос, а не нуждается ли в обосновании само это требование. Мы не будем сейчас углубляться в эту общую проблему, а займемся конкретным, часто возникающим в связи с теорией доказательств вопросом — об убедительном обосновании *ограничений*[8]).

Парадигмой здесь может служить *математическое* обоснование ограничения алгебраическими методами (точнее, выражениями логики первого порядка) в теории вещественных многочленов Штурма, упомянутой в конце введения. Что же касается рассматриваемого здесь раздела теории доказательств, то самое заметное ограничение состоит в

> *методе спуска*, при котором трансфинитная индукция $\mathrm{TI}(R, P)$ применяется только к «элементарным» или «свободным от логики» предикатам P.

Однако используемые в действительности упорядочения R фундированы, и ограничение на P не является очевидно необходимым. Оно было нужно, если бы R не было фундировано, но каждое (непустое) элементарно определимое подмножество R имело бы первый элемент, т. е. если R было бы, так сказать, «фундировано» относительно этого класса множества. Итак, *одно из* обоснований ограничения (на P) состоит в нахождении таких «фундированных» R, которые были бы существенны для науки и к которым можно было бы применить наши знания из теории доказательств. Это реализовано в (длинной) статье [7] для теории высказываний, которые истинны не во всех моделях M, а лишь в тех M, которые имеют ограниченную сложность (в смысле теории рекурсии).

Другой, более тонкий вид обоснований прилегает к *опыту* современной математики. В самом общем виде, даже если мы интересуемся главным образом определенной категорией, ее математические свойства становятся действительно обозримыми только тогда, когда она погружается в более широкую категорию. В нашем случае даже если мы в действительности интересуемся главным образом фундированными объектами (и операциями над ними), напрашивается предположение, что действительно обозримые операции можно распространить также и на «фундированные» объекты (и там их легче найти). Можно было бы подумать, что имеются и убедительные философские обоснования ограничения. Однако, как показывает эта статья, те философские соображения, которые первоначально привели к ограничению, оказались неубедительными. (Они отвергаются не потому, что имеют философский характер, а потому, что философски поверхностны, так как упускают из вида элементарные факты, упомянутые в примечании 8.)

Как уже подчеркивалось в последнем абзаце введения, наука (здесь — гильбертовская теория доказательств) всегда нуждается в переформулировках. Можно вспомнить поговорку, которую охотно цитировал Гильберт: «*Когда дом готов, леса убирают*». В теории доказательств леса состоят из ложных представлений и целей (и плохо сформулированных «основных теорем», направленных на достижение этих целей), которые закрывают здание, т. е. удачные преобразования (формальных) доказательств.

Замечание. Некоторые педанты могли бы понять поговорку Гильберта так, что «леса» означает лишь нечто несущественное, формальные шероховатости. Я не могу представить себе, чтобы Гильберт, всегда руководствовавшийся в своих работах продуманными соображениями (а не стремлением соблюсти мелкие формальности), мог иметь в виду нечто столь поверхностное. Во всяком случае, он не применил эту поговорку к своей теории доказательств.

Приложение I

ВПОЛНЕ-УПОРЯДОЧЕНИЯ: АЛГЕБРАИЗАЦИЯ И НУМЕРАЦИЯ ε_0

Для теории доказательств это приложение имеет прежде всего педагогический интерес. Оно дает весьма обозримый метод доказательства в ЧА и ЭА схемы $\mathrm{TI}(R_0^p, A)$, введенной в § 3 и 6, для любой цифры p и любой формулы A. (Здесь будут использованы обозначения из § 3 и 6; в частности, R_0 обозначает каноническое определение упорядочения ε_0.) Метод состоит из двух шагов. Сначала (совершенно абстрактно) задаются *аксиомы* $\mathscr{A}(R, \vec{\Phi})$ для упорядочений R и последовательности операций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ на R (у нас $\oplus$ и $\exp_2$), из которых логически следует

$$(*) \qquad \forall X\, \mathrm{TI}(R^p, X) \Rightarrow \forall X\, \mathrm{TI}(R^{\Phi_i(p)}, X).$$

Иными словами, Φ_i *сохраняют фундированность* для всех начальных отрезков тех структур, которые удовлетворяют $\mathscr{A}(R, \vec{\Phi})$. Второй, так сказать теоретико-доказательственный шаг состоит в проверке того, что R_0 и обычные (теоретико-числовые) определения операций Φ доказуемо реализуют эти аксиомы. Чем «элементарнее» (теоретико-множественное)

доказательство формулы (*), тем шире в общем случае класс таких семейств предикатов $\mathscr{P}$, для которых все еще верно

$$(*)^+ \qquad (\forall X \in \mathscr{P})\,\mathrm{TI}(R^p, X) \Rightarrow (\forall X \in \mathscr{P})\,\mathrm{TI}(R^{\Phi(p)}, X).$$

Однако мои главные интересы в этом приложении не зависят от теории доказательств. Оно должно служить примером той методики в обычной математике, которую приблизительно называют *алгебраизацией*. Точнее, речь идет о переходе от (бесконечных) структур, которые *категорически* характеризуются аксиомами высокой ступени, к «соответствующим» алгебраическим теориям или, шире, к теориям первого порядка. Связанная с этим проблематика была объяснена уже в § 2 на примере перехода от аксиом Пеано к ЧА. Роль соответствующей алгебраической теории играла бы теория дискретных коммутативных полуколец, которая очевидным образом является подсистемой ЧА [9]). С какой же точки зрения следует выбирать алгебраизацию $\mathscr{A}(R, \vec{\Phi})$ для ε_0?

(i) на самом ε_0 аксиомы $\mathscr{A}$ однозначно (неявно) определяют функции $\vec{\Phi}_0$, и $(\varepsilon_0, \vec{\Phi}_0)$ удовлетворяет $\mathscr{A}(R, \vec{\Phi})$.

(ii) $\mathscr{A}(R, \vec{\Phi})$ должны сохранять фундированность в общем случае, а не только для $(\varepsilon_0, \vec{\Phi}_0)$, т. е. должны удовлетворять (*).

NB. (ii) ни в коем случае не является самоочевидным даже в том, что касается выбора $\vec{\Phi}_0$ (среди всех функций на ε_0): напомним здесь о выборе операций кольца на ω! В абстрактной формулировке соответствующий выбор для ε_0 — дело по крайней мере не менее тонкое; но если ε_0 *вводится* с помощью операций $\oplus$ и $\exp_2$ (а также и операции следования с константами 0 и ω), то ясно хотя бы, что они должны встретиться среди $\vec{\Phi}$. Теперь (*), не говоря уже о $(*)^+$, в (ii) уже потому несамоочевидна, что

(a) $\mathscr{A}$ обязательно выполняется и на нефундированных структурах (так как $\mathscr{A}$ — аксиома первого порядка),

(b) в общем случае Φ вовсе не являются однозначно определенными на таких нефундированных структурах.

Упражнение к (b). Рассмотреть, например, функцию $\oplus$ и применить теорему Бета об определимости или рассмотреть (нефундированное) упорядочение $\omega + (\omega^* + \omega)\cdot\omega$, на котором обычные рекурсивные уравнения для $\oplus$ не определяют никакого однозначного решения. NB. Как и в упражнении из § 2, «однозначность в алгебраическом смысле» обеспечивается схемой $\mathrm{TI}(R^p, A)$ для формул A используемого здесь языка. Или несколько более общо: если добавлены новые символы операций Φ' и A может содержать *как* Φ, *так и* Φ', то $\Phi = \Phi'$ (на R^p) следует из $\mathrm{TI}(R^p, A)$ для подходящего A, а именно A: $(\forall \vec{x} R p)[\Phi(\vec{x}) = \Phi'(\vec{x})]$. Выражая это более формально (вместо того, чтобы говорить о «точках зрения»), мы вводим новое понятие:

> класс (операций и прежде всего аксиом) $\mathscr{A}$ («для» Φ), которые удовлетворяют (i) и (ii) и на основе схемы $\mathrm{TI}(R, A)$ обеспечивают однозначность Φ.

Затем мы показываем, что обычные аксиомы принадлежат этому классу.

Однако обычные аксиомы ни в коей мере не выделяются этими понятиями и свойствами (например, как особенно «естественные»). См. замечание в конце § 7 и итоги в конце этого приложения.

(a) R, n_0, σ, π, n_ω: n_0 — первый элемент (упорядочения R); σ — «следующий за»; π — предшественник, а если n не имеет непосредственного предшественника, то имеет место $\pi n = n$; n_ω — первый предельный элемент, т. е. он не равен 0 и $\pi(n_\omega) = n_\omega$. Соответствующие аксиомы в $\forall$-форме известны, например

$$\forall n[\sigma(n) \neq n_0],\ \forall n[nR\sigma(n)],\ \forall n \forall m\{nRm \to [m = \sigma(n) \vee \sigma(n) Rm]\}.$$

УПРАЖНЕНИЯ. (i) Если R — строгое упорядочение, то $\sigma(n)$ определен однозначно. (ii) Сформулировать соответствующие аксиомы без допущения, что (дискретное) упорядочение R не имеет последнего элемента, т. е. аксиомы для *отношения* (а не функции) следования. (iii) Есть ли в $\omega + (\omega^* + \omega)$ элемент, удовлетворяющий (обычным) аксиомам для n_ω? (Здесь $\omega^* + \omega$ — порядковый тип целых чисел с обычным упорядочением.)

(b) $\oplus, \ominus$, $\exp_2$, $\log_2$. Здесь $n \ominus m$ — функция, обратная к $n \oplus m$, если $\neg nRm$. Иначе, $n \ominus m = n_0$. Следовательно,

$$\forall n \forall m\,(n \ominus m = n_0 \leftrightarrow \neg\, mRn) \text{ и}$$
$$\forall n \forall m\,(mRn \to m \oplus (n \ominus m) = n).$$

В аналогичном смысле $\log_2$ есть «обращение» $\exp_2$, а именно если $\forall m\,(n \neq \exp_2 m)$, то $\log_2 n$ — наибольший элемент, такой, что $\exp_2(\log_2 n) Rn$; следовательно,

$$\forall m \forall n\,[(\exp_2 mRn \leftrightarrow mR \log_2 n) \wedge \neg\, nR \exp_2(\log_2 n)].$$

«Рекурсивные уравнения» для $\oplus$ и $\exp_2$ пишутся так, что из них (и остальных аксиом) следуют *монотонность* и *непрерывность* в предельных точках, так что (реализации) $\oplus$ и

$\exp_2$ являются *нормальными функциями*. Например, для $\oplus$

$$\forall n\,(n\oplus n_0 = n);\ \forall n\forall m\,\{\pi(m) \neq m \to n\oplus m = \sigma[n\oplus\pi(m)]\};$$
$$\forall n\forall m\forall m'\,(m'Rm \to n\oplus m'Rn\oplus m),$$

т. е. $n\oplus m$ есть граница для $\{n + m' : m'Rm\}$;

$$\forall n\forall m\forall p\,[(nRp \wedge pRn\oplus m) \to (n\oplus(p\ominus n) = p \wedge (p\ominus n)\,Rm)].$$

«Обращения» очевидным образом использованы для того, чтобы выразить непрерывность в $\forall$-форме.

Упражнение. Интерпретировать $\ominus$ как скулемовскую разрешающую функцию в обычном определении непрерывности, т. е. в

$$\forall n\forall m\forall p\,[(nRp \wedge pRn\oplus m) \to \exists q\,(n\oplus q = p \wedge qRm)].$$

Замечание. Конечно, приведенные уравнения хорошо известны по литературе, например [17]. Здесь мы пытаемся выпукло сформулировать (словами) их роль: более прилежные читатели могут извлечь отсюда математические предложения.

(c) Пусть $r = p\oplus q$ и $s = \exp_2 p$. Мы докажем сначала на языке теории множеств

(i) $([\forall X\,\mathrm{TI}(R^p, X)] \wedge [\forall X\,\mathrm{TI}(R^q, X)] \Rightarrow \forall X\,\mathrm{TI}(R^r, X)$,

(ii) $\forall X\,\mathrm{TI}(R^p, X) \Rightarrow \forall X\,\mathrm{TI}(R^s, X)$.

(i) Допустим, что P прогрессивен до r, т. е.

$$(\forall nRr)\,[(\forall mRn)\,P(m) \to P(n)].$$

Так как pRr *или* $p = r$, то P прогрессивен до r, и в силу $\forall X\mathrm{TI}(R^p, X)$ для $X = P$ имеем $(\forall mRp)\,P(m)$. Вместе с тем и $(\forall mRr)\,P(m)$, если $q = n_0$. Если $q \neq n_0$, то применяем $\forall X\,\mathrm{TI}(R^q, X)$ к $X = P_p$, где $P_p(n)$: $P(p\oplus n)$. В силу $(\forall mRp)\,P(m)$ и сделанного выше предположения имеет место также $P_p(n_0)$, и P_p прогрессивен до q. Следовательно, $(\forall nRq)\,P_p(n)$. Но

$$\{[(\forall nRp)\,P(n)] \wedge [(\forall nRq)\,P_p(n)]\} \leftrightarrow (\forall nRr)\,P(n).$$

P и P_p могут быть соединены, так что при $p = q$ (случай, который используется в (ii)) $\forall v\,\mathrm{TI}(R^p, P_v) \to \forall v\,\mathrm{TI}(R^{p\oplus p}, P_v)$. Следовательно, удвоение $p \mapsto p\oplus p$ *сохраняет фундированность* для любого класса $\mathscr{C}$ предикатов P, замкнутого относительно *переноса*.

Упражнение. При $\neg qRp$ «доказать»

$$\forall X\,\mathrm{TI}(R^q, X) \to \forall X\,\mathrm{TI}(R^p, X)$$

и найти формулу $P^{\max(p,\,q)}$, такую, что

$$\mathrm{TI}(R^{\max(p,\,q)}, P^{\max(p,\,q)}) \to \mathrm{TI}(R^p, X).$$

(ii) Доказательство основано на следующем замечании. Для любого X

$$\mathrm{TI}(R^n, X) \text{ прогрессивен как предикат от } n,$$

а потому прогрессивен и предикат $\forall X\,\mathrm{TI}(R^n, X)$. Отсюда для *непрерывных* операций Φ и для всех предельных элементов n сразу вытекает

$$[(\forall mRn)\,\forall X\,\mathrm{TI}(R^{\Phi(m)}, X)] \to \forall X\,\mathrm{TI}(R^{\Phi(n)}, X)$$

(даже и без $\forall X$). Следовательно, остается только показать, что это верно и для $\Phi = \exp_2$ и $n = \sigma[\pi(n)]$. Но в силу (i) верно даже

$$\forall X\,\mathrm{TI}(R^{\Phi[\pi(n)]}, X) \to \forall X\,\mathrm{TI}(R^{\Phi(n)}, X),$$

так как $\Phi(n) = \Phi[\pi(n)]\oplus\Phi[\pi(n)]$.

Для «алгебраизации» используется (как в (i)) вместо предиката

$$X(n)\colon\ \forall X\,\mathrm{TI}(R^{\exp_2(n)}, X)$$

предикат первого порядка (сокращенно обозначаемый $X^1(n)$)

$$\forall v\,\mathrm{TI}(R^{\exp_2(v\oplus n)}, P).$$

В силу сделанного выше замечания прогрессивность X^1 тривиальна для предельных чисел и была доказана для $n \neq \pi(n)$ в конце п. (i).

Следствие. Из схемы $\mathrm{TI}(R^n{}_\omega, A)$ следует $\mathrm{TI}(R^t, A)$ для любого терма t, построенного из n_0, n_ω, $\oplus$, $\exp_2$ (и сверх того из $\ominus$ и $\log_2$).

Тот, кто предпочитает канторовскую нормальную форму с основанием ω, т. е. $\exp_\omega$ вместо $\exp_2$, пусть введет соответствующие аксиомы и примет во внимание, что хотя $\exp_2(\omega) = \omega$, но $\exp_2(\omega\oplus\omega) = \omega^2$ и $\exp_2[\exp_2(\omega\oplus\oplus\omega)] = \omega^\omega$, благодаря чему переход от основания 2 к основанию ω становится отчетливым.

ε_0: *нумерации*. Если интересоваться рекурсивными операциями на (вполне упорядоченных) структурах R, $\vec{\Phi}$, то нужны нумерации ν, индуцирующие *рекурсивные* образы R^ν, Φ^ν (на ω). Как известно, структура называется $\exists!$-рекурсивной, если такие нумерации существуют и любые две из них, пусть ν и ν', рекурсивно изоморфны. Последнее тривиально имеет место (т. е. верно в общем случае без предположения о вполне-упорядоченности), если любой элемент a в R строится суперпозициями операций Φ, т. е. $a = \bar{t}_a$, где $\bar{t}_a$ — реализация тер-

ма, который построен с помощью симоволов для Φ. Если $a = \nu(n)$, то путем перебора и, следовательно, рекурсивно находят соответствующий терм t_n, построенный из Φ^ν и такой, что $n = \bar{t}_n$. Тогда образом n является $\bar{t}'_n$ — значение t_n согласно ν'. Тем самым также тривиально показано, что Φ^ν можно выбрать рекурсивными. Вопрос о том, существует ли вообще ν, индуцирующее рекурсивное упорядочение R^ν, требует отдельного рассмотрения. Мы не будем заниматься этим подробнее, так как для большинства математических и метаматематических применений рекурсивность оказывается слишком грубой; нужно *более тонкое структурирование*, в частности добавочные Φ, чтобы оперирование с нумерациями было действительно обозримым. Таковы, например, «обращения» в (b), а также строительные функции, которые заменяют перебор, по крайней мере когда имеется граница для *длин* t_n (как функция от n).

Для обычно упоминаемых в литературе нумераций (т. е. ε_0-упорядочений множества $\omega \times \omega$, как, например, R_0 в § 6) имеются сравнительно простые границы этого рода. Само собой разумеется, что в теории доказательств используется не сама $\exists!$-рекурсивность, а *формально доказуемая* $\exists!$-рекурсивность, а также то обстоятельство, что нужные свойства R^ν и Φ^ν формально доказуемы.

Формализация трансфинитной индукции $<\varepsilon_0$ *в* ЧА *и* ЭА. Пусть $\mathfrak{R}$ — класс формул R (определений бинарных отношений), таких, что R доказуемо (в ЧА или ЭА) удовлетворяет следующим трем условиям: (i) является упорядочением, (ii) реализует аксиомы из (a) и (b), т. е. выполняет их для цифр n_0, n_ω и (определенных в ЧА или ЭА) функций σ, π, $\oplus$, $\ominus$, $\exp_2$, $\log_2$, и (iii) R^{n_ω} изоморфен упорядочению $<$ натуральных чисел. Тогда $\mathrm{TI}(R^{n_\alpha}, A)$ доказуемо для каждого $\alpha < \varepsilon_0$. Действительно, здесь справедливы алгебраические *доказательства* (i) и (ii) из п. (c), так как $\mathrm{TI}(R^{n_\omega}, A)$ следует из обычной индукции. Класс $\mathfrak{R}$ упоминался уже в § 6(a).

От внимания читателя не ускользнуло, что понятия и высказывания из теоретико-множественного доказательства в (c) могут быть естественным образом сформулированы в ЭА (путем замены переменных X на f таким образом, что $X(t)$ переходит в $f(t) = 0$, т. е. f есть характеристическая функция). В частности, можно непосредственно сформулировать для произвольных p и s

$$(*) \qquad \forall f\, \mathrm{TI}(R^p, f) \to \forall f\, \mathrm{TI}(R^s, f).$$

Но доказательство нельзя формализовать в ЭА, так как для «грубого» предиката $X(n)$ формула $\exists f \forall n [f(n) = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow X(n)]$, разумеется, невыводима. *Упражнение* (см. конец § 9). Доказать (*) с помощью Π^1_0-СА для $R \in \mathfrak{R}$, где R определен в ЧА.

Замечания об алгебраизации ε_0 *в аспекте оснований* (в предположениях § 7 и примечания 9). Для программы Гильберта алгебраизация, т. е. элиминация теоретико-множественных понятий (а по возможности, и логически сложных выражений) является, так сказать, самоцелью: прогрессом было уже то, что она вообще функционировала. При этом оказались скрытыми два центральных вопроса.

Во-первых, что касается ε_0, едва ли стоит сомневаться в том, что с помощью некоторого логического хитроумия можно «удовлетворительно» объяснить, чем выделен обычный выбор упорядочения R_0 и аксиом для операций на нем. Но это еще далеко не означает, что такой анализ очень полезен с научной точки зрения, например что его можно сделать примерно таким же плодотворным для математики, как известные (упомянутые в примечании 9) алгебраизации. Иначе говоря, желательно убедиться, что ε_0 так же хорошо подходит для алгебраизации, как, например, $\mathbb{R}$.

Во-вторых, даже если ε_0 допускает сравнительно рентабельную алгебраизацию, при современном состоянии дел нет никаких оснований предполагать, что вообще возможно «обобщение», например, на произвольные рекурсивные α путем «естественного» выбора операций $\vec{\Phi}^\alpha$ на α (соответствующих $\oplus$, $\exp_2$ и т. д. для ε_0), см. замечание (i) в конце § 7. Чтобы разобраться в этом, лучше всего рассмотреть общую проблему: до какой степени математические «объекты» (здесь α) имеют *некоторое* выделенное или «естественное» описание (здесь с помощью операций построения Φ^α).

Как можно уточнить этот вопрос?

Следующий вопрос (между прочим, открытый) из теории рекурсии указывает возможное *направление*.

Мы рассматриваем класс PD функций f комплексного переменного z, которые представимы в виде степенных рядов $\sum a_n z^n$ (для малых z) и в виде рядов Дирихле $\sum b_n n^{-z}$ (для достаточно больших $x = \mathrm{Re}\, z$). NB. При рассмотрении PD мы имеем дело с хорошо знакомыми вещами, так что нас не будут сбивать с толку величавые «размышления».

Верно ли, что $\lambda n a_n$ и $\lambda n b_n$ всегда рекурсивны одновременно?

Или, более того,

существуют ли (частично) рекурсивные операции, скажем Π и Δ, такие, что $\lambda n b_n = \Delta(\lambda n a_n)$ и $\lambda n a_n = \Pi(\lambda n b_n)$?

Если ответ отрицателен, то едва ли можно сказать, что *этот* класс PD подходит для изучения в рамках рекурсивного анализа.

Добавление при корректуре. Недавно я нашел ответы («да», соответственно «нет») и подходящее ограничение класса PD. См. [11].

Приложение II

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНАЯ И ТЕОРЕТИКО-ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕННАЯ МЕТАМАТЕМАТИКА С ОГРАНИЧЕННЫМИ СРЕДСТВАМИ

В этом приложении применяются основные идеи данного Фридманом [15] (и существенно использующего § 6(ii) — (iii)) доказательства того, что так называемая Σ^1_1-аксиома выбора ЭА Σ^1_1-АС «сводится к разветвленному анализу уровней α, $\alpha < \varepsilon_0$. Знание [15] не предполагается, но нужно некоторое знакомство со свойствами разветвленного анализа или (тесно связанной с ним) *гиперарифметической иерархии* (g). Здесь будут сформулированы некоторые новые предложения, упомянутые в основном тексте, которые выявляют (и, я надеюсь, устраняют) распространенные среди специалистов в области теории доказательств заблуждения, в особенности иллюзии относительно так называемых границ выводимости трансфинитной индукции как меры *доказательной силы*. Для этого мы не будем изобретать искусственных формальных систем, а воспользуемся формализацией знакомых понятий разветвленного анализа. Упомянутые границы зависят от того, содержатся ли (функциональные) параметры в (существенных) аксиомах; однако, например, множество доказуемых арифметических предложений от этого не зависит. Кроме того, в настоящем приложении отчетливо показано на примере формализаций Σ^1_1-АС, что

> если ординалы вообще должны служить мерой дедуктивной силы, то эти границы ни в коем случае не являются единственными (ординалами, которые можно разумно сопоставить некоторой формальной системе, например анализу).

(g) Совсем недавно Фридман применил ту же «меру» новым, весьма удовлетворительным способом в связи с доказательствами относительной непротиворечивости (системы S' относительно S) в системе S_0 с ординалом α_0: S' интерпретируема в смысле Тарского в разветвленной иерархии уровня $<\alpha_0$ над S.

В частности, для Σ^1_1-АС (с параметрами) еще одна мера — ординал α, такой, что доказуемо существование разветвленной иерархии (без параметра) до α. Для тех, кто знаком с теорией рекурсии, отметим, что каждому параметру соответствует так называемая релятивизированная гиперарифметическая иерархия.

В теоретико-модельных конструкциях этого приложения рассмотрение *произвольных* (нестандартных) моделей некоторой системы отвечает прямому ограничению метаматематических средств. Конечно, это известно из теории так называемых *абсолютных* свойств в теории множеств.

1. *Подготовительные шаги: некоторые расширения $\mathscr{A}$ системы* ЭА (аксиомами ограниченной сложности). Подразумевается, что в $\mathscr{A}$ формально доказуемы элементарные факты из теории рекурсии, в частности «замкнутость» относительно примитивно рекурсивных операций. Для этого достаточно, например,

$$\Sigma^0_1\text{-АС:}\quad \forall g\,[\forall n \exists m P(n, m, g) \to \exists f \forall n P(n, f(n), g)]$$

для P, который является полным (в смысле теории рекурсии) Σ^0_1-предикатом от (n, m, g), и это доказуемо (в ЭА с аксиомой Σ^0_1-АС).

Упражнение. (Расширение системы ЭА аксиомой) Σ^0_1-АС имеет наименьшую ω-модель, состоящую из класса рекурсивных функций. Согласно § 4, система Σ^0_1-АС консервативна относительно ЧА (благодаря определимости понятия рекурсивной функции в ЧА).

Π^1_0-СА (обозначаемая также через Π^0_∞-СА и называемая «арифметической аксиомой свертывания с параметром g»):

$$\forall g \exists f \forall n\,[f(n) = 0 \leftrightarrow P(n, g)].$$

При этом P — опять полный Σ^0_1-предикат от (n, g).

Упражнения. (a) Для оправдания терминологии показать, что из Π^1_0-СА доказуемо

$$\forall g \exists f \forall n\,[f(n) = 0 \leftrightarrow A(n, g)],$$

где $A(n, g)$ не содержит функциональных переменных, кроме g (но может содержать любые числовые кванторы).

(b) Для тех, кто прочел приложение I. Из Π^1_0-СА следует

$$\forall f \exists n\,[\neg f(n+1)\, R_0 f(n)],$$

т. е. *метод спуска* по R_0. Значит, из Π^1_0 СА следует непротиворечивость ЧА. Тем самым Π^1_0-СА не консервативна относительно ЧА.

(c) Добавление

$$\exists f \forall n\,[f(n) = 0 \leftrightarrow A(n)],$$

где A вообще не содержит функциональных переменных, т. е. арифметической схемы свертывания без параметров (сокращенно Π^0_∞-CA$^-$), консервативно относительно ЧА. (Рассмотреть конечные подмножества этой схемы. В упражнении перед замечанием ниже сформулирована схема Π^0_∞-CA$^-$ с ограниченной сложностью.)

$$\Sigma^1_1\text{-AC:}\quad \forall g\,[\forall n \exists f R(n, f, g) \to \exists f \forall n R'(n, f, g)],$$

где R — полный Π^0_1-предикат, $\langle n, m\rangle$ — каноническая спаривающая функция в ЧА и $R'(n, f, g)$ — формула, которая получается заменой $f(t)$ на $f(\langle n, t\rangle)$ в $R(n, f, g)$. Вместо $R'(n, f, g)$ пишут также $R(n, f_n, g)$. Расширение Σ^1_1-AC известно тем, что оно обладает наименьшей ω-моделью, состоящей из класса всех гиперарифметических функций. (То же верно для Σ^1_1-AC$^-$ и даже для

$$\forall n \exists! f R(n, f) \to \exists f \forall n R'(n, f).)$$

Π^1_0-CA^p (существование гиперарифметической иерархии относительно g на отрезке $\{n: nR_0\sigma(p)\}$, т. е. включая p):

$$\forall g \exists f\,(\forall n R_0 p)\, S(n, f, g),$$

где $S(n, f, g)$ («S» от Sprung, по-английски jump, по-русски «скачок») выражает, что функция $\lambda m f(\langle n, m\rangle)$ связана с функциями $\lambda m f(\langle n', m\rangle)$ для $n' R_0 n$ по правилам гиперарифметической иерархии, релятивизированной относительно g. Очевидно, что S не содержит связанных функциональных переменных. *Упражнение.* Найти (естественную) сколемовскую нормальную форму для $(\forall n R_0 p)\, S(n, f, g)$ в виде $\exists f' S'$, в частности с $S' \in \Pi^0_1$, и проверить, что $\exists f' S' \to (\forall n R_0 p)\, S(n, f, g)$ доказуемо в ЭА, но для стрелки $\leftarrow$ нужна Π^1_0-CA. Схема $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$ выражает существование «абсолютной» гиперарифметической иерархии (т. е. относительно $\dot{0}$) на отрезке $\{n: nR_0 p\}$. *Отметим*, что $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$ является Σ^1_1-формулой.

Упражнение. Схема $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$ для $p = n_0, n_1, \ldots, n_m, \ldots$ (nRn_ω) имеет ограниченную логическую сложность и эквивалентна Π^1_0-CA$^-$, т. е. арифметической схеме свертывания без параметра.

Замечания. При поверхностном рассмотрении различие между аксиомами с параметрами и без них выглядит педантским или несущественным, и зачастую это так и есть, например если имеется в виду наименьшая ω-модель аксиом. (Пример исключения: Π^0_1-CA и Π^0_1-CA$^-$.) Но аксиомы с параметрами, особенно для функций, не только дают очевидные новые средства доказательства, но и предъявляют очевидные более сильные требования к модели: аксиома с параметрами выражает некоторое (например, несчетное при несчетной модели) множество допущений о существовании, а аксиома без параметров — всего одно. И это различие уже вовсе не выглядит педантским! (Еще выразительнее различие, описанное во втором примере из § 6(c)(iii). Здесь «границы выводимости трансфинитной индукции» зависят от параметров: ε_0 для Π^1_0-CA$^-$ и даже для $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$, но $\varepsilon_{\varepsilon_0}$ уже для Π^1_0-CA (см. J. Symbol. Log., 1960, v. **25**, p. 390—391.) Без преувеличения можно сказать, что роль параметров при формулировке (теории) понятий — это лишь еще одно проявление той проблематики [10]), которая возникла уже в § 2 при переходе от аксиом Пеано к ЧА. Там это был выбор $+$ и $\times$. Напротив, можно хорошо обосновать выбор R_0 в качестве канонического определения типа ε_0 при формализации понятия гиперарифметической иерархии до α $(\alpha < \varepsilon_0)$ с помощью схемы Π^1_0-CA^p $(p = 0, 1, \ldots)$, используя приложение I. Во всяком случае, это так, если в качестве отправного пункта взять классическое доказательство существования для гиперарифметической иерархии, так как тогда должно быть формально доказуемо Σ^1_1-AC $\to \Pi^1_0$-CA^p.

2. *Связи между* Σ^1_1-AC, Σ^1_1-AC$^-$, Π^1_0-CA^p *и* $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$ $(p = 0, 1, \ldots)$. (Связи между Σ^1_1-AC и схемой Π^1_0-CA^p можно найти в [15].)

(a) Для любого натурального числа p в ЭА плюс Σ^0_1-AC и Π^1_0-CA доказуемы

$$(\Sigma^1_1\text{-AC}) \to (\Pi^1_0\text{-CA}^p) \text{ и } (\Sigma^1_1\text{-AC}^-) \to (\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-.$$

Доказательство, естественно, использует $\mathrm{TI}(R^p_0, P)$, примененную к $P(m)$ и $P^-(m)$, т. е.

$\exists f\,(\forall n R_0 m)\, S(n, f, g)$, соответственно $\exists f\,(\forall n R_0 m)\, S(n, f, \dot{0})$.

Для $P(m) \to P[\sigma(m)]$ нужна Π^1_0-CA т. е. схема *с параметрами*; кажется, что это не нужно для $P^-(m) \to P^-[\sigma(m)])$. Для предельных элементов n и $(\forall m R_0 n)\, P(m) \to P(n)$ нужна Σ^1_1-AC, соответственно Σ^1_1-AC$^-$. Если $n_1, n_2, \ldots$ — «фундаментальная последовательность» для n, то с помощью этих схем объединяются иерархии $f_1, f_2, \ldots$. (Следует иметь в виду, что при $mR_0 n_i$ в силу однозначности гиперарифметической иерархии имеет место $f_{i+1}(\langle m, t\rangle) = f_i(\langle m, t\rangle)$.) Обратные импликации, естественно, неверны: рассмотреть наименьшие

ω-модели. В этом случае, однако, имеем (b) и (c), которые следуют ниже.

(b) Одни и те же Σ^1_1-теоремы становятся доказуемыми, если присоединить к ЭА (плюс Σ^0_1-АС)

либо схему $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$, $p=0, 1, \ldots$, *либо* Σ^1_1-АС.

Отсюда, естественно, следует, что

одни и те же Σ^1_1-теоремы выводимы (в ЭА) из Σ^1_1-АС и $\Sigma^1_1\text{-AC}^-$ (включая Π^1_0-СА).

«Граница доказуемости трансфинитной индукции» равна ε_0 для схемы $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$, $\varepsilon_{\varepsilon_0}$, если добавляется Π^1_0-СА, но для Σ^1_1-АС это ε_0-е «критическое число», т. е. $\chi^{\varepsilon_0}(0)$ ($\chi^0(\alpha)=\omega^\alpha$ и для $\sigma>0$ через $\chi^\sigma(\alpha)$ обозначается α-й ординал, который для любого $\tau<\sigma$ является неподвижной точкой χ^τ). Для (b) нужны только элементарные, например примитивно рекурсивные, метаматематические средства.

(c) Одни и те же Σ^1_1-формулы (которые по определению могут содержать и параметры) выводимы из Σ^1_1-АС и из $\Pi^1_0\text{-CA}^p$, $p=0, 1, \ldots$. Здесь не нужно специально упоминать Π^1_0-СА, так как она содержится в $\Pi^1_0\text{-CA}^p$ (так же, как $\Pi^0_i\text{-CA}^-$ в $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$).

Приводимое ниже доказательство (b) является вариантом доказательства (c), данного в [15]. Оно использует модели M схемы $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$ для pR_0p_0, которые удовлетворяют $\neg\,\mathrm{TI}(R_0^p, G)$ для подходящего G и потому являются *нестандартными*. Для подготовки посмотрим, как выглядит порядок, определяемый R_0 в M, когда nR_0m для цифр n, m (т. е. 0, $s0$, s^20, ...) формально разрешимо и функции σ, π, $\oplus$ и т. д. из приложения I (формально) оцениваемы, т. е. термы n_0, n_ω, $\sigma(s^n0)$ доказуемо равны цифрам. (Как обычно, реализации цифр в модели M называются ее стандартными числами.)

(i) Элементы M, которые определяются канторовскими нормальными формами, являются стандартными числами. (ii) Для каждого стандартного числа n, которое является предельным элементом R_0 (как, например, n_ω, $n_\omega\oplus n_\omega$ и т. д.) имеется бесконечно много нестандартных чисел m, предшествующих n (т. е. mR_0n) и лежащих между n и всеми стандартными числами n', такими, что $n'R_0n$. (iii) Имеется бесконечно много нестандартных чисел m, лежащих позади всех стандартных чисел, т. е., так сказать, между (стандартными)

ординалами α, $\alpha<\varepsilon_0$ и ε_0. Нам потребуются следующие обозначения:

Определение. $2(0)=\omega$, $2(1)=\omega+\omega$, $2(p+1)=\exp_2[2(p)]$ для $p\geqslant 1$. Согласно п. (i) выше, число $n_{2(p)}$ является стандартным (для цифр p).

3. *Метод доказательства.* Рассмотрим произвольную модель M, в которой выполняются аксиомы некоторой конечной подсистемы ЭА, например индукция для предикатов сложности $\leqslant k$, Σ^0_1-АС, схема $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$, например для $p=n_{2(m)}$, $m\leqslant m_0$ и $\neg\,\mathrm{TI}(R_0^q, G)$ для $q=n_{2(m_0)}$. Следовательно, M зависит от (k, m_0, G).

Подход: M_G — следующая подмодель M.

Индивидная (числовая) область M_G — та же, что для M, и арифметические соотношения $(0, S, +, \times)$ — те же самые. *Функциональная* область M_G — это $\{f\colon f\in M, \exists s[G(s)\wedge f\in H_s]\}$, где «$f\in H_s$» выражает, что f принадлежит гиперарифметической иерархии отрезка $\{n\colon nR_0s\}$. Последнее означает, что $(\exists nR_0s)\forall m[f(m)=f_s(\langle n, m\rangle)]$, если f_s удовлетворяет $(\forall nR_0s)S(n, f_s, 0)$ (см. п. 1 этого приложения). Заметим, что $M\longrightarrow M_G$ не зависит от k и m_0.

Мы постепенно исследуем вопрос, каким условиям должны удовлетворять G, k и m_0, чтобы M_G была моделью

Σ^1_1-АС (включая Π^1_0-СА), Σ^0_1-АС и (конечной) подсистемы ЭА, имеющей сложность k'.

Не нужно заботиться об остальных аксиомах ЧА для 0, s, $+$, $\times$, так как они автоматически выполнены в M_G. Естественно, Σ^1_1-теорема верна в M, если она верна в M_G. Но даже когда эти соотношения выполнены, утверждение § 2(b) все еще не очевидно, так как мы ограничились моделями M, в которых верно $\neg\,\mathrm{TI}(R_0^q, G)$. Но теорема *теории доказательств* из § 6(c)(iii) [11]) показывает, что это ограничение «безвредно» (если G в достаточной мере сложнее, чем Σ^1_1): если Σ^1_1-теорема верна во всех моделях, где выполняется $\neg\,\mathrm{TI}(R_0^q, G)$, то она верна и вообще во всех (рассматриваемых) моделях.

Эвристическое замечание. Этот подход напоминает процедуру в обычной математике, например в теории дифференциальных уравнений, где рассматривают разложение в степенной ряд $\sum a_nx^n$ и постепенно исследуют, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a_n (подразумевается: если рассматриваемое уравнение вообще имеет решение вида $\sum a_nx^n$). Чтобы обосновать такой подход, при нынешнем состоянии дел с педагогической точки зрения наиболее разумно рассмотреть простое доказательство Σ^1_1-АС для M_G в § 4(b) ниже. Оно оставляет настолько много простора

при выборе k, m_0 и G, что остальные требования на M_G очевидным образом выполнимы. Для *существенно* лучшего обоснования этого подхода мы должны были бы последовать примеру *современной* теории дифференциальных уравнений с ее общими теоремами типа: если вообще имеется дифференцируемое решение, то оно аналитическое. Примерами могут служить теоремы, уточняющие следующее впечатление:

> первый нерекурсивный ординал $\omega_1^{\text{рек}}$ играет «ту же роль» для ω-моделей, что ε_0 [или $2(m)$] для подходящих *не*стандартных моделей ЭА [соответственно его подсистем].

Что касается этого впечатления, сравните доказательства Σ_1^1-AC для ω-модели полной гиперарифметической иерархии $\left(\text{до } \omega_1^{\text{рек}}\right)$, с одной стороны, и для M_G — с другой.

4. *Свойства* M_G. Мы ограничиваемся моделями M, которые удовлетворяют Σ_1^0-AC и тем аксиомам ЧА, из которых следуют алгебраические свойства R_0. NB. Из Σ_1^0-CA следует, что иерархия H_s кумулятивна в M_G.

(a) Если $\neg\,\mathrm{TI}\,(R_0^q, G)$ и $\left(\Pi_0^1\text{-CA}^q\right)^-$ выполняются (в M), то в M_G верна Π_0^1-CA.

Благодаря $\neg\,\mathrm{TI}\,(R_0^q, G)$ предикат G «прогрессивен», т. е.

$$(\forall s R_0 q)\,[(\forall s' R_0 s)\,G(s') \to G(s)].$$

Мы предполагаем, что

$$(\forall s R_0 q)\,\{G(s) \to G[\sigma(s)]\} \text{ и } (\forall s R_0 q)\,(\forall s' R_0 s)\,[G(s) \to G(s')].$$

Если это не выполнено, заменим $G(s)$ на $G(s) \wedge \wedge (\forall s' R_0 s)\,G(s')$ (и будем обозначать это через G).

Так как верно $\neg G(q)$, то параметр g из Π_0^1-CA реализуется в модели M_G функцией из такого H_s, что sRq (поскольку $G(s)$ должно быть верно). Так как q — предельный элемент, то $\sigma(s) R_0 q$ и потому

$$(\exists f \in H_{\sigma(s)})\,\forall n\,[f(n) = 0 \leftrightarrow P(n, f, g)].$$

Так как верно $G[\sigma(s)]$, то f принадлежит M_G. NB. При этом сама M не обязана удовлетворять Π_0^1-CA, так как вне M_G модель M не обязана быть замкнутой относительно арифметических операций.

Заметим, что M_G состоит в точности из тех f, для которых (в M) верно, что $f \in H_s$ и $G(s)$.

(b) Если наряду с предложениями из (a) в M верна еще $\mathrm{TI}\,(R_0^q, F)$ для всех формул F с параметром g и префиксом

$$\exists n \forall f \exists f' \forall m,$$

то в M_G верна Σ_1^1-AC.

Как уже сказано, это ключевой пункт всей конструкции: префикс не зависит от q.

Σ_1^1-AC (п. 1) требует, чтобы для предикатов R вида Π_1^0 и $g \in M_G$, для которых в M верно $\forall n \exists f R(n, f, g)$, т. е.

(i) $\forall n \exists f \exists s\,[G(s) \wedge f \in H_s \wedge R(n, f, g)]$,

существовала f', которая выполняет $\forall n R(n, f'_n, g)$ в M_G (и даже в M), так как f'_n и $g \in M \cap M_G$, а кроме них встречаются только числовые переменные. Для этого хватает границы s':

(ii) $\forall n \exists f\,[G(s') \wedge f \in H_{s'} \wedge R(n, f, g)]$ для всех $g \in H_{s'}$

Действительно, в $H_{\sigma(s')}$ имеется функция, перечисляющая H_s. Следовательно, так как R имеет вид Π_1^0, то в $H_{\sigma(s')}$ имеется f', которая для каждого n выбирает $f_n \in H_s$, такую, что $R(n, f_n, g)$. Естественно, имеет место $s' R_0 q$, так как $\neg G(q)$.

Лемма. Первое s' в упорядочении R_0, которое удовлетворяет (ii), является также первым, удовлетворяющим более элементарному условию $\forall n \exists f\,[f \in H_s \wedge R(n, f, g)]$. В силу (i) такое s' действительно имеется в предположениях п. (b).

Доказательство. Из-за $\neg G(q)$ и (i) верно (в M) $\forall n \exists f\,(\exists s R_0 q)\,[G(s) \wedge f \in H_s \wedge R(n, f, g)]$, и поэтому

$$\forall n \exists f\,(\exists s R_0 q)\,[f \in H_s \wedge R(n, f, g)].$$

Рассмотрим предикат $Q(p)$

$$\forall n \exists f\,(\exists s R_0 p)\,[f \in H_s \wedge R(n, f, g)]$$

и заметим, что $\neg Q$ удовлетворяет условию на формулы F из (b). Поэтому (непустой) Q имеет для произвольного g первый элемент в R_0^q. Имеет место $Q(q)$, значит, у Q есть первый элемент, пусть это s'. Имеет место $G(s')$, иначе благодаря прогрессивности G нашелся бы s_2, такой, что $s_2 R_0 s'$ и $\neg G(s_2)$. В силу (a) тогда мы имели бы

$$G(s) \to s R_0 s_2$$

и в силу (i) $\forall n \exists f\,(\exists s R_0 s_2)\,[f \in H_s \wedge R(n, f, g)]$, т. е. также и $Q(s_2)$. Тем самым s' не был бы первым элементом Q. В силу $G(s')$ и (a), в частности из-за $f \in M_G \leftrightarrow \exists s\,[f \in H_s \wedge G(s)]$, имеет место

$$\exists f \exists s\,[G(s) \wedge f \in H_s \wedge \forall n R(n, f_n, g)] \text{ в } M$$

и тем самым $\exists f \forall n R(n, f_n, g)$ в M_G. Следовательно, M_G выполняет аксиому

$$\Sigma^1_1\text{-AC (в применении к предикату } R).$$

(c) Предположение $\mathrm{TI}(R^q_0, F)$, $q = n_{2(m_3)}$ для формул F из (b) верно для M, если верна обычная индукция для всех формул сложности $\leqslant 5 + m_0$. (При этом мы не различаем числовые и функциональные кванторы.)

Действительно, согласно приложению I, формула $\mathrm{TI}(R^7_0, F)$ следует из $\mathrm{TI}(R^{n_\omega}_0, F_1)$ для предиката F_1, сложность которого на m_0 больше сложности F, а формулы F из (b) имеют сложность 5, считая параметр g.

(d) Если γ есть сложность G и G содержит хотя бы один квантор существования по функциям, то M_G выполняет обычную индукцию до (сложности) k', если M выполняет ее до $k' \cdot \gamma$. Действительно, по определению M_G в начале п. 3 высказывание «P верно в M_G» эквивалентно (в M) высказыванию P_1, если заменить каждую функциональную переменную f в P на $\exists s\,[G(s) \wedge f \in H_s]$. Так как наш G уже содержит квантор существования, можно поглотить $f \in H_s$. Если P имеет сложность k', то P_1 имеет сложность $\leqslant k' \cdot \gamma$. Заметим, что (d) не зависит от m_0.

5. *Выбор G и т. д. Окончание доказательства.*

(a) Чтобы M_G выполняла аксиомы

$$\Sigma^1_1\text{-AC (и } \Pi^1_0\text{-CA)}, \text{ индукцию до } k' \text{ и } \neg\,\mathrm{TI}(R^q_0, G),$$

достаточно, чтобы

> M выполняла Σ^0_1-AC, элементарные арифметические аксиомы, $(\Pi^1_0\text{-CA}^q)^-$ и обычную индукцию до $\max(5 + m_0, k'\gamma) < \gamma + m_0$ и чтобы G был полным для всех предикатов сложности γ.

Это, очевидно, возможно: полагаем $\gamma > 5$ и $m_0 > \gamma(k'-1)$.

(b) Для доказательства 2(b) из этого приложения рассмотрим вывод в ЭА некоторой Σ^1_1-теоремы $\exists f \forall n A(n, f)$ из Σ^0_1-AC, Σ^1_1-AC и Π^1_0-CA (которые могут содержать параметры). Этот вывод, естественно, использует лишь конечное множество аксиом (из схемы индукции в ЭА), пусть сложности k'. В силу (a) выше наша Σ^1_1-теорема выполнена в любой модели M аксиомы $(\Pi^1_0\text{-CA}^q)^-$, которая выполняет индукцию до $5 + m_0$,

где $m_0 = 6(k'-1)$, но не $\mathrm{TI}(R^q_0, G)$ для полного предиката G сложности 6. Следовательно,

$$[\neg\,\mathrm{TI}(R^q_0, G)] \to \exists f \forall n A(n, f)$$

выводима в ЭА из $(\Pi^1_0\text{-CA}^q)^-$ с помощью индукции до $5 + 6(k'-1)$, а значит ([h]), в силу § 6(c)(iii) выводима и сама $\exists f \forall n A(n, f)$.

(c) Что касается 2(c), то нужные модификации очевидны: используются «релятивизированные иерархии» H^g_s (где g — параметр рассматриваемой Σ^1_1-формулы).

Замечание (см. примечание 11). Если бы в 5(b) и 5 (c) не шла речь о границах на сложность (индукции в зависимости от k'), то стоило бы исследовать, выводима ли сама $\mathrm{TI}(R_0, F)$ для формул F из 4(b) в ЭА из $\Pi^1_0\text{-CA}^q$ для подходящих q и можно ли обойтись в 4(b) менее сложными F. Вообще, кажется, очень мало известно о том, для каких F индукция $\mathrm{TI}(R_0, F)$ следует из $\Pi^1_0\text{-CA}^q$ или даже из Π^1_0-CA.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1]) Для рассматриваемого здесь приложения существенно, что $A \to \mathrm{WF}$ доказуемо в S, а *не* вопрос о его, скажем, «финитной» или «предикативной» доказуемости.

[2]) Известно, что аксиомы ЧА подходят меньше, чем аксиомы Пеано, ибо они не определяют структуру полукольца целых чисел — ЧА содержит только понятия первого порядка. Но из этого не следует, что предложения в языке ЧА остаются неразрешимыми. Для тех, кто знаком с теорией вещественно замкнутых полей (кратко ВЗП), которая (по крайней мере, в одном из вариантов) получается, если в аксиомах Дедекинда для поля $\mathbb{R}$ заменить *аксиому непрерывности* для произвольных сечений X на схему для сечений, определяемых формулами ВЗП, отметим, что имеется много вещественно замкнутых полей, но все они удовлетворяют одним и тем же предложениям (первого порядка).

NB. Это сопоставление проведено здесь так подробно, чтобы показать, что проблема *перехода от понятия вполне-упорядочения* (например, с ординалом ε_0) *к теории первого порядка* возникает уже в хорошо исследованных областях математики; см. приложение I.

[3]) Согласно резюме Фридмана ([b]) (Friedman H., Notices AMS, 1975, **22**, 75 T-E 45, p. 476), утверждение (3) неверно для интуиционистского

([h]) Это применение теоремы из § 6(c)(ii), не отмеченное явно в [15], можно также сформулировать следующим образом. Так как формула $\exists f \forall n A(n, f)$ достаточно проста в сравнении с G, она верна во всех рассматриваемых моделях при условии, что она верна во всех (нестандартных) моделях, удовлетворяющих $\neg\,\mathrm{TI}(R^q_0, G)$.

([b]) Детали доказательства Фридмана и некоторые следствия теперь доступны в лекциях Г. Сундхольма (Лидс, 1979 г.).

варианта ЧА. Формулировка аналогичного вопроса для бескванторных формализмов, например для примитивно рекурсивной арифметики (ПРА), несколько более деликатна. Теперь предполагается, что каждая ПР убывающая по R последовательность μ: $\mu(0)$, $\mu(1)$, ..., возможно с параметром a, доказуемо обрывается, т. е. $\exists n\, \neg [\mu(n+1)\, R\mu(n)]$ доказуемо в ПРА. В бескванторной формулировке: для любого терма μ существует терм t_μ (с единственной переменной a), такой, что формула $\neg\, \mu(t_\mu + 1)\, R\mu(t_\mu)$ доказуема в ПРА. Отображается ли тогда R доказуемо в каноническое упорядочение ω^ω ординального числа ПРА?

[4]) Здесь объекты (наследственно) конечны, и потому их можно *канонически* занумеровать: древовидное упорядочение кодируется частичным упорядочением, скажем R_4, натуральных чисел. Как обычно, *каноническое* означает «однозначное с точностью до (доказуемого) изоморфизма». Получающаяся при этом структура хорошо известна на примере множества слов (в конечном алфавите): константы (буквы), операции приписывания и отрезания и, возможно, длины слов.

[5]) Из концептуальных соображений Эрбран мог применять свои наблюдения только эвристически, поскольку он хотел избежать введения функциональных переменных. В частности, терм t вида $f_i(t_1, \ldots, t_n)$ заменялся на новую предметную переменную a_t. Мы говорим «концептуальные» соображения, так как упомянутая в § 4 модель ЭА показывает, что сам по себе формализм функциональных переменных не имеет логического значения.

[6]) Для сравнения с интерпретацией отсутствием контрпримера из § 8: в то время как Генцен с помощью редукционного предписания ρ придает *доказательству* b, так сказать, финитный «смысл», высказывание (*) в начале § 8 относится к «смыслу» *теоремы* e_b.

[7]) Первые шаги (в различных разделах) математики можно, согласно Фридману (Notices AMS, v. **22**, 1975, p. 476), формализовать так, что абстрактная формулировка известных комбинаторных принципов формально эквивалентна аксиоматическим системам, которые известны из теории доказательств, см., например, [6, начало § 7]. Здесь, однако, надо заметить, что по-настоящему изощренные математические доказательства зачастую отличаются именно тем, что абстрактные принципы применяются совершенно *неожиданным* образом, например (в теории чисел) индукция к особенно удачно выбранным предикатам, см. [6, § 4, замечания о системах первого порядка перед схемой (*)].

[8]) Согласно п. (b) выше, такого рода ограничение оказывается неподходящим не только эвристически, но и для контроля доказательств. Действительно, ограничение обычно приводит к комбинаторно необозримым *фигурам* доказательств. И если, имея опыт оперирования с неограниченными методами, мы знаем, что они также и надежны, то при ограничениях *вероятность ошибок* (в процессе применения правильных методов) *возрастает*.

[9]) Алгебраизации отличаются тем, что важнейшие (для «алгебраизируемой» части математики) операции вводятся *явно*. Какая, однако, в этом польза, если другие, возможно более сложные, операции остаются спрятанными в логическом формализме? В алгебраической практике фактически встречаются самое большее $\forall\exists$-аксиомы, причем обычно они реализуются хорошо известными операциями. Например, $\sqrt{\lfloor x \rfloor}$ в теории ВЗП (примечание 2) для вещественно замкнутых полей с аксиомой $\forall x \exists y\, (x = y^2 \vee \vee\, x = -y^2)$. Естественно, что ЧА и рассматриваемая здесь «алгебраизация» ε_0 выходят за эти рамки, если индукция или $\mathrm{TI}(R, A)$ формулируется

для *произвольных* формул A первого порядка. Отметим следующее. (a) Упомянутый в примечании 2 вариант ВЗП допускает, как известно, $\forall\exists$-аксиоматизацию (существование $\sqrt{\lfloor x \rfloor}$, корней полиномов нечетной степени), но содержит схему для *произвольных* (сечений) A:

$$[\exists x A(x) \wedge \exists x\, \neg A(x) \wedge \forall x\, \{A(x) \to \exists y\, [x < y \to A(y)]\} \wedge$$
$$\wedge\, \forall x \forall y\, \{[A(x) \wedge y < x] \to A(y)\}] \to \exists x_A \forall y\, [y < x_A \leftrightarrow A(y)].$$

(b) Как показал Шепердсон [16], индукция для логически простых A остается в алгебраических «рамках» до тех пор, пока принцип индукции в рассмотренных им вещественно замкнутых полях верен по крайней мере для $A \in \mathbf{\Pi}_1$.

[10]) В философском (или, как говорят иногда, научно-теоретическом) отношении открытие такого рода проблематики никак нельзя считать бесполезным! См. конец § 10. Действительно, того, кто исходит из (формалистических) представлений о математическом мышлении, которые привели к программе Гильберта (см. начало § 10), не затронет эта (очевидная, как показано выше) проблематика: как раз в этом состоит (отрицательный) тест для философских представлений.

[11]) Точнее, речь идет об аналоге результата из § 6(c)(iii) для конечных подсистем ЭА (которые подробно рассмотрены в литературе [9]). Теоремы § 6(c)(iii) хватило бы, если бы сама $\mathrm{TI}(R_0, F)$ была доказуема в $(\Pi^1_0\text{-CA}^p)^-$, $p = 0, 1, \ldots$, для всех формул F в 4(c) ниже. См. также замечание в конце этого приложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гёдель (Gödel K.). Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. — Dialectica, Bd. **12**, 1958, S. 280—287. [Русский перевод: Гёдель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Математическая теория логического вывода. — М.: Наука, 1967, с. 299—305.]

[2] Генцен (Gentzen G.). Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie. — Arch. math. Logik Grundlagenforsch., Bd. **16**, 1974, S. 97—118.

[3] — The collected papers of Gerhard Gentzen, ed. Szabo. — Amsterdam: North-Holland 1969. Реферат: J. of Philosophy, v. **68**, 1971, p. 239—265.

[4] Енсен (Jensen R. B.). The fine structure of L. — Ann. Math. Logic. v. **4**, 1972, p. 229—308.

[5] Клини (Kleene S. C.). Quantification of number theoretic functions. — Compositio Math., v. **14**, 1959, p. 23—40.

[6] Крайзель (Kreisel G.). Survey of proof theory. — J. Symb. Log., v. **33**, 1968, p. 321—388. [Русский перевод: см. наст. сборник.]

[7] Крайзель, Минц Г. Е., Симпсон (Kreisel G., Mints G. E., Simpson S. G.). The use of abstract language in elementary metamathematics: some pedagogic examples. — Lecture Notes in Mathematics, v. **453**, Berlin — Heidelberg — New York: Springer, 1975, p. 38—131.

[8] Крайзель, Трулстра (Kreisel G., Troelstra A. S.). Formal systems for some branches of intuitionistic analysis. — Ann. math. logic, v. **1**, 1970, p. 229—387.

[9] Минц Г. Е. Точные оценки доказуемости трансфинитной индукции в начальных отрезках арифметики. — Записки научн. сем. ЛОМИ АН СССР, т. **20**, 1971, стр. 134—144.

[10] — Финитное исследование трансфинитных выводов. — Записки научн. сем. ЛОМИ АН СССР, т. **49**, 1975, стр. 67—122.
[11] Пур-Эль, Колдуэл (Pour-El M. B., Caldwell J.). A simple definition of computable function of a real variable with applications to functions of a complex variable. — Zeitschrift math. Logik u. Grundl. d. Math., v. **21**, 1975, p. 1—19.
[12] Такахаси (Takahashi M.). A theorem on the second order arithmetic with the ω-rule. — J. Math. Soc. Japan, v. **22**, 1970, p. 15—24.
[13] Такеути (Takeuti G.). Consistency proofs of subsystems of classical analysis. — Annals of Math., v. **86**, 1967, p. 299—348.
[14] Тейт (Tait W. W.). Functionals defined by transfinite recursion. — J. Symbol. Log., v. **30**, 1965, p. 155—174.
[15] Фридман (Friedman H.). Iterated inductive definitions and Σ^1_1-AC. — In: Intuitionism and proof theory, Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 435—442.
[16] Шепердсон (Shepherdson J. C.). A non-standard model for a free variable fragment of number theory. — Bull. Acad., Pol. Sc., v. **12**, 1964, p. 79—86.
[17] Шютте (Shütte K.). Beweistheorie. — Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer, 1960. Реферат: J. Symbol. Log., v. **25**, 1960, p. 243—249.
[18] — Proof theory. — Berlin — Göttingen: Springer, 1977.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ К ПОИСКУ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ*)

РЕЗЮМЕ

Чтобы установить отношение между рассматриваемым вопросом и формулировками из современной литературы по теоретическому программированию (computer science), мы анализируем модную проблему «проверки» программ. В частности, выявляется различие между проверкой того, что данная программа (i) дает *верное решение* задачи, которая должна быть решена, и того, что она (ii) является *верной реализацией* конкретного решения, которое предполагалось запрограммировать. Несмотря на то что п. (ii) кажется весьма субъективным (из-за слова «предполагалось»), оказывается, что он допускает точную формулировку при условии, что мы подойдем к делу практически и проследим шаги, приведшие к решению, которое предполагалось запрограммировать. Главный инструмент для анализа (i) и (ii) и для поиска программ обеспечивается недавними результатами теории доказательств, так называемыми E-теоремами, рассматриваемыми в приложении.

Другие применения теории доказательств подсказывают два предупреждения, относящиеся к двум распространенным (по крайней мере, среди логиков) заблуждениям по поводу эффективного программирования. Во-первых, нужно быть готовым к некоторой *дополнительности*: более эффективные процедуры могут требовать более «мощных» принципов доказательства для установления того, что они обеспечивают корректные решения. В частности, конструктивная традиция оказывается под подозрением: любое ограничение, запрещающее неконструктивные методы доказательства, может исключить возможность установления правильности эффективных процедур. (Конструктивность недостаточно ограничивает процедуры, так как она удовлетворяется «эффективностью в

*) Kreisel G. Some uses of proof theory for finding computer programs, Colloque International de Logique, Clermont-Ferrand, 18—25 juillet 1975, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1977, p. 123—134.

принципе» и налагает ненужные ограничения на методы доказательства правильности решения.) Во-вторых, большинство проблем, например так называемые проблемы разрешения, зависят от параметра p и имеют смысл для таких областей P изменения этого параметра, для которых (доказуемым образом) вообще не существует эффективного решения. Главная проблема — нахождение хорошего *компромисса* между возможностью охвата достаточно большой части P и достижением разумно высокой средней эффективности. В частности, под подозрением оказывается сложившаяся в логике традиция, поскольку она считает проблему разрешения во всем языке первого порядка для рассматриваемой задачи, так сказать, *идеальной формой* этой проблемы, в то время как для всех предложений этого языка может вообще не быть достаточно эффективной процедуры. Это иллюстрируется ссылкой на теорию вещественно замкнутых полей.

По предложению Энгелера к этой статье был добавлен постскриптум, относящийся к другому аспекту исследований в теории доказательств, полезному для программиста в педагогическом отношении, а именно к выбору среди имеющихся данных тех, которые наиболее пригодны для эффективной алгоритмической обработки. Эти конкретные исследования касаются алгоритмических операций на деревьях доказательства и уточнения информации, которая должна быть закодирована в их узлах.

§ 1. ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРАВИЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ: РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ НИМИ

Рассмотрим для определенности частный, но весьма типичный случай решения функционального уравнения $\forall n\,[F(f, n) = 0]$ относительно неизвестной функции f, аргументами и значениями которой являются натуральные числа. В частном случае, когда F зависит только от значения $f(n)$, достаточно рассмотреть суждение

$$(*) \qquad \forall n \exists m F_1(n, m),$$

где $F_1[n, f(n)] \leftrightarrow F(f, n) = 0$.

Программа π дает *правильное решение* задачи $(*)$, если (i) π кончает работу и определяет функцию, скажем f_π, и (ii) *верно* суждение $\forall n F_1[n, f_\pi(n)]$.

Очевидно, что даже для весьма ограниченных классов отношений F_1 и программ π *невозможен* рекурсивный метод, решающий вопрос о том, дает ли π правильное решение. Таким образом, даже если в общем случае мы удовлетворились бы любым правильным решением (насколько ни отличалось бы оно от того, которое программист предполагает реализовать), все равно нет реальной возможности *проверять автоматически*, что имеющееся решение — *действительно правильное*. Теперь посмотрим практически, как мы приходим к задаче построения программы. Мы начинаем с *доказательства* (обозначим его через p) суждения $(*)$ или, более общим образом, $\mathbf{E}f \forall n\,[F(f, n) = 0]$. Очевидно, что p является адекватной основой для программирования лишь в случае, если, *анализируя* p, мы понимаем в общих чертах, что p дает метод вычисления функции f. Это будет ясно для очевидных конструктивных доказательств. Если p выглядит неконструктивным, в наличии такого метода можно иногда убедиться, «раскручивая» p. Для достаточно простых, например разрешимых, F_1 мы ожидаем, что раскручивание приведет к некоторому алгоритму. (NB. В случае разрешимого отношения F_1, конечно, имеется хотя бы *один* алгоритм, для которого $(*)$ верно, а именно $\mu_m F_1(n, m)$, но, вообще говоря, это не тот алгоритм, который дает p.) Как в связи с различием между правильным решением и правильной реализацией, так и в более общем контексте ***поиска программ для ЭВМ*** наше обсуждение ведет к двум вопросам.

До какой степени могут быть механизированы наш анализ и раскручивание доказательства p?

Прежде всего следует, конечно, найти несколько формальных систем $\mathscr{F}$, в которых *легко* можно формализовать (многие) доказательства p, встречающиеся на практике, скажем, с помощью выводов d_p в этой системе. Шаг $p \longmapsto d_p$, конечно, необходим. Кроме всего прочего, если я только *мысленно* представляю себе p и даже не выражаю его словами, то при современном уровне математического обеспечения нечего и думать о механической обработке!

Далее, мы применяем так называемые E-теоремы для $\mathscr{F}$ (подробно объясняемые в приложении [1])), которые сопоставляют *конкретный* терм t_p доказательству d_p в качестве реализации суждения $\forall n\,[F(t_p, n) = 0]$, которую дает p (если p дает реализацию после раскручивания).

По модулю описанного выше шага $p \longmapsto d_p$ говорят, что программа π *правильно реализует* программу, определяемую доказательством p, если

$$\pi \text{ и } t_p \text{ взаимоконвертируемы.}$$

Для классов термов, которые встречаются в E-теоремах, имеющихся в литературе, *отношение взаимоконвертируемости* (и, значит, свойство «быть корректной реализацией») *рекурсивно*, так как встречающиеся термы нормализуемы и

можно сравнить нормальные формы. Здесь совсем другое положение, чем со свойством «быть корректным решением», которое, как упомянуто выше, *не*рекурсивно.

Обсуждение. Чтобы опровергнуть довольно распространенные заблуждения, вероятно, стоит явно упомянуть следующие соображения.

(i) Критерии выбора $\mathscr{F}$, действительно относящиеся к делу, находятся в остром конфликте с критериями, известными из логической литературы. Например, в противоположность стремлению к *независимым аксиоматикам* здесь необходимо *исследовать*, какие теоремы часто используются в рассуждениях p, и включать эти теоремы в $\mathscr{F}$ в качестве аксиом. Механическая процедура, которую дают E-теоремы, будет кодировать среди прочего выводы этих аксиом. Логики ищут простые системы или *простые принципы* доказательства, в то время как мы ищем *простые доказательства* (выводы). Очевидно, что с течением времени, по мере того как мы знакомимся с возможностями и ограничениями ЭВМ, мы автоматически будем *приспосабливать* доказательства p для облегчения переходов $p \longmapsto d_p$ и $d_p \longmapsto t_p$ (как некоторые преподаватели приспосабливают свои объяснения к потребностям аудитории).

(ii) Упор на взаимоконвертируемость (в определении правильной реализации) должен выявить неопределенность идеи проверки программ, и ситуацию хорошо зафиксировать в терминах теории рекурсии: истинность суждений $\forall n F_1[n, f_\pi(n)]$ *нерекурсивна*, а взаимоконвертируемость термов *рекурсивна*. Однако короткое размышление показывает, что существенным элементом в определении является *не* выбор правил конверсии (которые даже не упоминаются явно), а отображение $p \longmapsto t_p$, которое дает E-теоремы при подходящем выборе $\mathscr{F}$. Как часто бывает в логике, анализ неопределенности был предпринят с педагогической или «гигиенической» целью: из опыта известно, что в теоретическом программировании говорят о «проверке программ» и запутываются, забывая учесть важные различия. Но это не значит, что сам этот анализ имеет научную ценность: он не имеет ее, когда настоящая проблема — совсем в другом (ср. (iii) ниже).

(iii) В действительности было бы поразительно, если бы доказательство p на самом деле полностью *определяло* соответствующую программу для вычисления f в (*). В таком случае в программировании не было бы творческого элемента! Последний не противоречит E-теоремам, которые утверждают единственность лишь с точностью до взаимоконвертируемости. Так как конверсии длинны и сложны, E-теоремы

оставляют открытым принципиальный вопрос — выбор *между* взаимоконвертируемыми термами (программами). Для конкретизации (того, что оставляют неясным грубые меры сложности) можно использовать (по крайней мере для общей ориентации) опыт теории доказательств. Например, грубые меры вроде длины формул и доказательств (измеряемой числом шагов) дают совершенно неадекватное представление о роли явных определений, так как последние уменьшают длины доказательств, грубо говоря, на линейный множитель. Однако если их (подходящим образом) формализовать в системе натурального вывода с разумно выбранными «аксиомами», которым удовлетворяют такие определения, то они уменьшают *род* выводов. Вероятно, ***что-то вроде*** рода должно подойти в качестве относящейся к делу меры, и это, конечно, существенно. Такая мера описывает степень прозрачности доказательств, так как она характеризует хорошо известное препятствие для понимания — переплетенность взаимных ссылок. Для программ такая мера связана с *циклами* в блок-схемах, а ведь все знают о качественно различном поведении тех программ, которые содержат циклы, и тех, которые их не содержат. NB. Не следует предполагать, что в случае программ к делу относится *именно* род, т. е. свойство термов t, соответствующее роду того вывода d_t, который дает хорошо известный (но до сих пор совершенно бесполезный) гомоморфизм между выводами и термами («бесполезный», поскольку он связывает obscurum ad obscurius (непонятное с еще более непонятным. — *Перев.*)).

Педагогическое замечание *) (для типичного читателя-логика, сочетающего локальное остроумие с почти невероятным

*) Как показывают так называемые операции прополки, введеные К. Годом в его диссертации (Stanford, 1980), это замечание преуменьшает возможности творческого программирования. В то время как E-теоремы раскручивают описание алгоритма «на высоком уровне», неявно содержащееся в доказательстве, прополка модифицирует этот алгоритм, устраняя скрытые в нем излишества и увеличивая тем самым его эффективность. В частности (вопреки сказанному в этом замечании), улучшенный алгоритм определяет в общем случае функцию, которая экстенсионально отличается от функции, определяемой данным доказательством. Говоря более формально, соотношение между новыми операциями прополки и более известными шагами нормализации можно выразить так: в обоих случаях последовательность редукций обрывается независимо от порядка, в котором применяются правила редукции: однако в случае прополки нередуцируемые элементы (или алгоритмы) в общем случае не эквивалентны, а в случае нормализации они эквивалентны. Таким образом, прополка реализует практическую цель — выбор наилучшей из редукций, в то время как нормализация достигает идущего от оснований математики идеала теоретически стандартной системы обозначений для рассматриваемых объектов, в частности единственной нормальной формы доказательств.

буквализмом). На первый взгляд может показаться, что проверка правильности реализации в указанном выше смысле *избыточна*, если нужно только правильное решение. При этом забывают тот факт, подчеркиваемый во всем этом разделе, что правильность реализации *легче* проверять (при совершенно точном понимании «легкости»). Мы полагаемся на некоторые, так сказать, статистические факты, как бывает всегда, когда главной заботой является эффективность. В частности, мы ожидаем, что программисты, пытающиеся реализовать решение, которое уже обрисовано, в общем случае придут к решению, которое взаимоконвертируемо с имевшимся в виду, если они вообще придут к правильному решению. (Конечно, иногда они могут прийти к правильному решению, которое даже экстенсионально не равно имевшемуся в виду.) Если это соответствует действительному положению вещей, то более эффективно проверять правильность реализации. Что же касается выбора правил конверсии, то здесь мы не станем привлекать причудливую проблему *анализа* равенства правил, а будем снова руководствоваться эмпирическими соображениями: нам нужны правила, которые (конечно, сохраняют экстенсиональное равенство и) помогают осуществить описанные выше ожидания. Безусловно, если этот проект (проверка взаимоконвертируемости) вместе с некоторыми правилами конверсии окажется в разумной мере полезен для программистов, то с течением времени последние станут подчиняться этим правилам конверсии и тем самым сделают их более полезными; ср. п. (i) нашего обсуждения. (Проект может оказаться «самореализующимся».)

Предположение. Я подозреваю, что проблематика *проверки*, а не *нахождения* программ (по доказательству p) приобрела популярность не только из-за простого незнания E-теорем, но и ввиду следующей иллюзии большей точности: программа либо верна, либо неверна! При этом теряется из виду не только рассмотренное выше различие, но и то обстоятельство, что наилучшая гарантия от ошибок вообще состоит *не в формальной проверке* путем тщательного повторения формальной процедуры, а в использовании *перекрестных проверок*, в сравнении с известными фактами на многих стадиях процедуры. Ср. необходимость «обходных путей», использующих общие факты, касающиеся содержания доказываемой формулы, если мы хотим быть действительно уверенными в заключении, даже когда возможны «прямые» или «нормальные» доказательства.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬНАЯ СИЛА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СИЛА: ВОЗМОЖНАЯ ПРАКТИЧЕСКАЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ

Хорошо известно, что *теоретическая связь* (или, лучше, *возможность* некоторой связи) неконструктивных методов с теоретическим программированием следует из теоремы Гёделя о неполноте. Рассмотрим, например, примитивно рекурсивную функцию f_0, такую, что $\forall n[f_0(n) = 0]$ верно, но этот факт нельзя вывести данными ограниченными методами. Мы хотим «решить» относительно «неизвестной» f функциональное уравнение $\forall n[f_0(n) = f(n)]$ или, в форме (*) § 1,

$$\forall n \exists m [f_0(n) = m].$$

Конечно, мы имеем абсолютно элементарное доказательство, устанавливающее, что (программа π_0 для самой) f_0 дает правильное решение. Вычисления $f_0(0)$, $f_0(1)$ и т. д. имеют *неограниченную* длину. С другой стороны, согласно нашему предположению, имеется *намного более эффективная программа* π_0^+: просто $n \mapsto 0$. Но любое *доказательство*, устанавливающее, что π_0^+ дает правильное решение, должно быть более изощренным, так как оно должно выходить «за рамки» данных методов.

Замечание. Примитивно рекурсивная функция f_0 упомянута потому, что большинству читателей известны примеры таких f_0 со свойствами, нужными для приведенной выше иллюстрации. Но для вычислительных целей класс примитивно рекурсивных программ слишком велик. Осмысленная демаркационная линия проходит в другом месте, и логическая литература может ввести нас в еще большее заблуждение, если мы допустим, что ее излюбленные демаркационные линии, например между *рекурсивным* и *нерекурсивным*, имеют хотя бы отделенное отношение к делу.

Обсуждение. Конечно, отдельный пример, особенно такой тривиальный, как $\forall n \exists m [f_0(n) = m]$, обладает малым весом при эвристических рассмотрениях (относящихся к дополнительности между доказательной и вычислительной силой). Цель этого примера — *привлечь внимание* к одной возможности, которая находится в конфликте со следующим распространенным наблюдением (так что если эта возможность иногда реализуется, то наш пример получит нетривиальное применение).

Мы часто не замечаем относительно простых решений задач, если (ошибочно) считаем, что для решения нужны изощренные, «далеко идущие» методы и понятия.

Поэтому, по крайней мере при наивном подходе, можно рассмотреть следующий эвристический принцип в связи с вычислительными проблемами: статистически можно выиграть, ограничившись методами, относящимися (наследственно) к вычислительным процедурам (включая размышления о таких процедурах). Этот путь через так называемые операционные семантики ведет к интуиционистской логике необязательно из-за каких-то сомнений в корректности инфинитарных методов, а из-за сомнений в том, что они имеют отношение к вычислительным проблемам.

Я не нахожу большого подтверждения упомянутому эвристическому принципу. Действительно, иногда линия раздела проходит вообще не между конструктивным и неконструктивными принципами, а поперек этой традиционной границы, ср. § 1(iii) по поводу *рода*.

Историческое замечание. Конечно, операционные семантики были введены не из-за рассматриваемого здесь статистического принципа, а ради конструктивных оснований. Кстати, полезно сравнить грандиозные претензии этих оснований, относящиеся к «конструктивности в принципе», с конкретным опытом в математике (на который опирается эта статья), иными словами, проверить, до какой степени имеют отношение к делу «идеализации» конструктивных оснований.

§ 3. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, КОМПРОМИССЫ

Недавно в количественной (в противоположность аксиоматической) теории сложности были получены весьма тонкие результаты, показывающие, что большинство известных разрешимых теорий не имеет практического разрешающего метода. Например, для любого «метода» μ имеется формула F_μ длины n_μ, которую μ не разрешает за $\leqslant 2^{n_\mu}$ «шагов». Точное определение использованной меры шагов см. в соответствующей литературе. Следует отметить, что так как мы интересуемся *решениями* (вопросами, допускающими ответ «да» — «нет»), то не возникает двусмысленности по поводу полезного *представления* ответа, скажем, символами $\top$ и $\bot$ (или 0, 1). Это контрастирует с вычислением целочисленных функций, где существен подходящий выбор *записи* (для решений задачи), в частности, было бы совершенно бесполезным представление в «нормальной» форме, т. е. цифрами (0, $s0$, $ss0$, ..., где s — символ функции следования).

Отступление. Этот пример бесполезности стандартных «нормальных» форм для числовых термов дает, кстати, весьма хорошее представление о слабости нормальных (или свободных от сечения) выводов для представления доказательств. Ср. также конец § 1.

Возвращаясь теперь к вопросу о разрешающих методах, вероятно, справедливо будет сказать, что упомянутые выше результаты считаются обычно *окончательными* в «отрицательном» направлении. При этом неявно предполагается, что *естественной областью применения разрешающего метода является* (полный) *язык первого порядка, связанный с рассматриваемыми понятиями.* Я предлагаю рассмотреть другое положение, находящееся, кстати, в согласии с давним «предрассудком» математиков против логики.

Главная задача — найти подходящий подъязык (возможно, с более четким «математическим содержанием») и ***начать сначала***.

В этой связи я рассмотрел класс задач, которые могут быть сформулированы в теории вещественно замкнутых полей и относятся к наибольшему количеству N_a точек, размещенных на сфере радиуса a так, чтобы (евклидово) расстояние между любыми двумя из них было $\geqslant 1$. Хорошо известно, что по крайней мере для алгебраических чисел a число N_a можно определить в языке полей (первого порядка). Для $a=1$ задача восходит к Ньютону, который спорил с Грегори, чему равно N_1, двенадцати или тринадцати. Шютте и ван дер Варден менее 25 лет назад показали, что прав был Ньютон. Пусть p_{sw} обозначает их доказательство.

Доказательство p_{sw} использует не только язык теории вещественно замкнутых полей, но и более геометрические предложения, выражаемые аналитически с помощью *тригонометрических* функций. (Очевидно, по теореме Бета имеются вещественно замкнутые поля, в которых, скажем, sin не определяется своим функциональным уравнением.) Более тщательное рассмотрение, руководствующееся знанием нормализации, позволяет сопоставить доказательству p_{sw} некоторый *вывод* d_{sw} *первого порядка* в теории вещественно замкнутых полей, поразительным образом отличающийся от выводов, получающихся с помощью стандартных методов разрешения или «элиминаций». Если дана формула F сложности c, то последние методы используют аксиомы с *логической сложностью, ограниченной функцией* $\alpha(c)$, в то время как d_{sw}, по-видимому, использует аксиомы с большей сложностью, чем $\alpha(c)$, которые возникают из многочленов, необходимых для достаточной аппроксимации тригонометрических функций. Рассмотрение p_{sw} и (неформального наброска) d_{sw} подсказывает, что последний ненамного длиннее p_{sw}, но намного

сложнее. Таким образом, здесь у нас есть хороший *кандидат* *) на роль теста для более изощренных, чем длина, мер сложности, например для рода, упомянутого в § 1. Этот пример имеет дополнительные преимущества (в качестве теста), так как много людей работало над величинами N_a, и, таким образом, как всегда в областях, с которыми мы знакомы, нам просто *легче судить* о значении наших идей: являются ли они лишь общими правдоподобными рассуждениями или конкретными формальными результатами. (Чтобы избежать распространенного недоразумения, заметим, что доверие к нашему наивному суждению в сочетании с опытом не является первым шагом по направлению к мистицизму. Мы просто признаем тот факт, что по мере нашего знакомства с объектами наши мысли приспосабливаются к этим объектам, хотя мы и не осознаем происходящих сдвигов. Более того, нет никаких свидетельств, что мы обязательно заставляем себя осознать их, т. е. нет *видимых* причин для того, чтобы суждения были здравыми.)

Отступление о чистой (математической) теории сложности для *полной* теории первого порядка вещественно замкнутых полей. Если у меня достаточно свежая информация, то $\exp_2 cn$ — *нижняя*, а $\exp_2\exp_2 cn$ — *верхняя* граница на длины разрешающих процедур (в обычном смысле слова «граница»; ссылки на литературу см. в диссертации Монка (Monk L., Berkeley, 1975)). Так как $\exp_2 cn$ превосходит реальные возможности, то, конечно, не представляет практического интереса понижение известной верхней границы (отсюда ссылка на «чистую» теорию). Но оно может представить чисто математический интерес. Насколько мне известно, те, кто работают над этим вопросом, упустили из вида подсказываемую рассмотренным выше примером возможность того, что эффективная разрешающая процедура для F может использовать аксиомы, намного более сложные, чем F.

Наконец, попробую резюмировать, в каком смысле мы должны (и можем) *начать сначала*. Прежде всего, несмотря на свое большое правдоподобие, «систематические» теории и проблемы, к которым мы привыкли в логике, *доказуемо* негодны. Сюда входят понятия (полного) языка первого порядка и рекурсивной или примитивно рекурсивной разрешимости. Они негодны в том смысле, что не являются (даже) *асимптотически* представительными для тех частных случаев, которые практически интересны, потому что решения соответствующих проблем просто расходятся в разных направлениях. Следовательно, нет серьезных причин предполагать, что уточнение «базисных» логических результатов будет приносить плоды. Грубо говоря, эти результаты «базисные» не в смысле их фундаментальности, а просто потому, что отвечают на первые, наивные вопросы, которые приходят в голову. Однако те же результаты могут быть полезными, если они используются для *ориентации*, т. е. чтобы показать нам, чего не следует делать или какого *рода явлений* следует ожидать. Насколько я могу судить, нет никакой причины возвращаться к очень узким классам задач, изучаемым в традиционной математике, которая, в общем, занимается *решениями*, а не разрешающими *методами*. Действительно, можно ожидать, что исследование такого доказуемо непрактического метода иногда поможет *открыть* (под)класс задач, для которых он эффективен, если, конечно, мы понимаем, что *такое* открытие не менее интересно, чем, например, само существование некоторого (примитивно) рекурсивного разрешающего метода для «полного» класса.

*) Некоторые недостатки этого кандидата обсуждаются в статье автора «Какие данные нужны для структурной теории доказательств», см. наст. сборник. — *Прим. перев.*

Предположение. Описанная выше роль логической теории кажется весьма типичным примером той роли, которую играют в приложениях средние научные теории. Эти теории помогают в общей ориентировке, но не (часто) *предсказывают явления* (точно). Блестящие примеры точных предсказаний в астрономии или, скажем, спектроскопии, вероятно, более характерны для *действительно фундаментальных* (систематических) теорий. Кстати, часто это происходит в областях знаний, несколько удаленных от повседневной жизни. Современная логика вряд ли претендует на фундаментальность, сравнимую с великими теориями естественных наук, как бы ее ни рассматривать — как теорию математических объектов или как теорию математических рассуждений. В этих обстоятельствах есть шанс, что логика окажется *совершенно бесполезной*, если мы будет ожидать от нее блестящих приложений упомянутого типа и в то же время упускать те (меньшие) приложения, которые она может дать.

§ 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Насколько я могу судить, в этой статье нет ничего подозрительно нового или «революционного». Прежде всего совершенно естественно предложение использовать в теоретическом программировании что-то вроде традиционной теории доказательств и что-то из нее. Кроме всего прочего, теория доказательств возникла из программы Гильберта, которая

намеревалась «свести» обычную (абстрактную) математику к утверждениям о формальных или, эквивалентным образом, механических процедурах. Из-за этой идеи редукции гильбертовскую программу вряд ли можно рекомендовать в качестве программы развития. Но можно было ожидать, что работа, проведенная в рамках этой программы, будет иметь отношение к таким частям математики, как теоретическое программирование, где речь идет буквально о механических процедурах, так что формальные «детали», очевидно, относятся к делу, а потому не скучны. (Конечно, не следует ожидать, что результаты, представлявшие главный интерес для программы Гильберта, будут также очень интересны для теоретического программирования, и это действительно не так.) Далее, необходимость изобретательного выбора подъязыков языка первого порядка хорошо известна из обычной математики. Кроме всего прочего, математики сосредоточивали внимание на специальных классах многочленов задолго до того, как Ю. В. Матиясевич установил рекурсивную неразрешимость 10-й проблемы Гильберта: имеет ли целые корни любой данный многочлен $p(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами. Эти классы выбирались не по грубым критериям, вроде числа n переменных или степени p, а в соответствии с «геометрическими» свойствами многообразия $\{\vec{x} : p = 0\}$ над подходящими полями. Если в данной статье и есть что-то необычное, то это обращение к общему научному опыту, скажем, последних 100 лет, а не к опыту относительно небольшого сообщества активно работающих в данный момент логиков.

Приложение

ИНФОРМАЦИЯ О Е-ТЕОРЕМАХ

Рассматриваемая задача такова. По данному выводу [2]) d формулы $\exists x A$

(i) решить, дает ли d реализацию для A;
(ii) если да, то определить такую реализацию, скажем, t_d.

Вопрос (i) возникает для тех d, которые выражают доказательства, не являющиеся непосредственно конструктивными. В (ii) мы не требуем (даже в случае конструктивных доказательств), чтобы существовал вывод $A[t_d]$ в *той же* формальной системе, в которой проводится d, хотя большинство из обычных систем достаточно «округлы», чтобы обеспечить это. Не следует *считать*, что (i) и (ii) окончательны, так как мы можем обнаружить прием, позволяющий извлечь из d *лучшую реализацию*, чем t_d. Начинать с (i) и (ii) просто удобнее, так как из обычной математической практики мы знакомы с тем, что называется «раскручиванием» доказательств экзистенциальных теорем для извлечения явных оценок. Иногда t_d может зависеть от параметра, даже если формула $\exists x A$ *замкнута*, например, если (по недосмотру) $\exists x A$ выведено из $\forall x A$, или t_d может быть конечным множеством термов, если, например, $\exists x A$ выведена из дизъюнкции.

Большая часть опубликованных работ в действительности рассматривает d в интуиционистских системах, где возникает только вопрос (ii).

Результаты об устойчивости. Предполагается, что читатель слышал о стандартных операциях над выводами, таких, как устранение сечения или функциональные интерпретации. Процедуры устранения сечения или нормализации дают реализации, скажем t_d^{ν}, так как нормальный вывод формулы $\exists x A$ содержит (буквально) подвывод некоторой формулы $A[t]$. Функциональные интерпретации I дают реализацию в том смысле, что некоторый t^I удовлетворяет если и не самой A, то по крайней мере ее функциональной интерпретации. Г. Е. Минц показал [Записки научн. сем. ЛОМИ, т. **40**, 1974, с. 110—118; т. **49**, 1975, с. 67—122], что

t_d^{ν} и t^I равны для обычных интерпретаций I.

«Обычные» интерпретации включают функциональные интерпретации, полученные из гёделевской (Gödel K. Dialectica, v. **12**, 1958, p. 280—287) и из ее гибрида *) с реализуемостью, который появился в моей статье, опубликованной в Constructivity in Mathematics, Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 101—128, и теперь называется «модифицированной реализуемостью». Строго говоря, между функциональными интерпретациями и нормализацией (для конечных выводов) имеется некоторая асимметрия для систем, содержащих, скажем, арифметику.

*) Для вычислительных целей этот гибрид в действительности предпочтительнее, чем «свободные от логики» (бескванторные) интерпретации, которых требуют идеалы оснований математики. Причина заключается главным образом в том, что доказательства отрицательных формул вносят очень малый вклад в алгоритмическое содержание доказательства; они нужны для проверки того, что рассматриваемые алгоритмы действительно обладают желаемыми свойствами. Поэтому любой анализ доказательств отрицательных формул обречен на бесполезность с вычислительной точки зрения. Более «популярное» обсуждение для случая универсальных теорем имеется вверху стр. 67 статьи автора «From foundations to science: justifying and unwinding proofs» (Symposium: Set theory. Foundations of Mathematics. Belgrade 29.8 — 2.9 1977) с информацией о нынешнем состоянии дел в автореферате в Zentralblatt für Mathematik, 1980, **445**, № 03037.

Если $\exists x A$ содержит свободные переменные a (называемые иногда «параметрами»), то функциональные интерпретации дают t_a^I, в общем случае тоже содержащие a, в то время как для нормализации это не так.

Однако, используя нормализацию или устранение сечения в инфинитарных системах или анализируя метаматематические доказательства утверждения

для всякого постоянного терма c вывод d_c, полученный из d подстановкой c вместо a, имеет нормальную форму $|d_c|$,

мы также получаем терм $t_a^{\vee}$ для случая формул $\exists x A$, содержащих переменные. Конечно, именно случай $\exists x A$ с параметрами представляет для нас основной интерес, как четко сказано в § 1.

Классические системы. Вопрос (i) из начала этой статьи рассматривается (неявно) в литературе по теории доказательств для *специального* случая, когда A доказуемо разрешима, например примитивно рекурсивна. В этом случае так называемая интерпретация отсутствием контрпримера или гёделевская интерпретация всегда дает реализацию t_d, удовлетворяющую A. Последняя интерпретация дает реализацию через так называемый негативный перевод, когда данный классический вывод d формулы $\exists x A$ сначала «переводится» в интуиционистский вывод, скажем d^-, формулы $\neg\neg\exists x A$ Нормализация (или устранение сечения) также дает реализации либо непосредственно в применении к d, либо в применении к d^- вместе с правилами нормализации, подходящими для правила Маркова: вывести $\exists x A$ из $\neg\neg\exists x A$. (Я не знаю, дают ли эти процедуры нормализации одну и *ту же* реализацию с точностью до взаимоконвертируемости.) Упомянутая ранее модифицированная реализуемость здесь бесполезна, так ка кмодифицированная реализация формулы $\neg\neg\exists x A$ есть сама $\neg\neg\exists x A$.

Историческое отступление. Забавно, что первой функциональной интерпретацией, рассмотренной в литературе по Е-теоремам (Г. Е. Минцем, Записки научн. сем. ЛОМИ, т. **40**, 1974), была как раз модифицированная реализуемость. Аналогично Диллер *) на встрече в Обервольфахе в апреле 1975 г.

*) Работа Диллера получила дальнейшее развитие в диссертации Штейна (Мюнстер) (Stein M. Interpretationen der Heyting-Arithmetik endlichen Typen). Там рассматриваются только замкнутые формулы, хотя эта диссертация появилась через год после моего доклада в Клермон-Ферране, где подчеркивался интерес формул $\exists x A$ с параметрами (см. разд. «Результаты об устойчивости» в этом приложении).

избрал модифицированную реализуемость для своего вывода Е-теорем (для *замкнутых* формул $\exists x A$) из некоторых результатов о *коммутативности*. В частности, он показал, что для определенных стандартных интуиционистских систем операции нормализации и модифицированной реализуемости коммутируют. Конечно, для вопроса (i) модифицированная реализуемость менее полезна, чем другие функциональные интерпретации. Правда, вопрос (i) не был включен ни в мое первоначальное обсуждение Е-теорем, ни в статью, вошедшую в сборник «Intuitionism and Proof Theory, Amsterdam, North-Holland, 1970», ни в «Обзор теории доказательств II» (см. настоящий сборник. — *Перев.*). Но я думаю, что если бы принцип предустановленной гармонии действительно преобладал, то Минц и Диллер должны были бы рассмотреть по крайней мере еще одну функциональную интерпретацию наряду с модифицированной реализуемостью.

Общая формулировка вопроса (i) была дана в моей совместной статье с Г. Е. Минцем и Симпсоном в серии Lecture Notes, **453**, Springer, 1975. Из переписки с Г. Е. Минцем я понял, что он и В. А. Лифшиц успешно разрабатывали эту проблему; их результаты опубликованы в статье Г. Е. Минца «Нормализация натуральных выводов и эффективность классического существования» (в кн.: Логический вывод, М.: Наука, 1979). Очевидно, что более подробное обсуждение должно затронуть точные детали этой публикации, так как Е-теоремы рассматривают не только вопросы «в принципе» (т. е. имеем ли мы некоторые (определимые явно) реализации экзистенциальных теорем), но и то, какие реализации даются доказательствами.

Замечание. На этой стадии естественно спросить, будет ли работа в теории доказательств, например по Е-теоремам, иметь приложения в математике, кроме тех, которые были найдены в 50-е годы (например, в Journal of Symb. Logic, v. **23**) и были вполне сравнимы с тогдашними приложениями теории моделей. В частности, будет ли теория доказательств иметь приложения в той части математической практики, которая интересуется «оценками», сравнимые с современными приложениями теории моделей (подразумевается — в тех частях, которые не интересуются оценками)? Иными словами, не будет ли теория доказательств иногда полезна, если ее сочетать с обычной математикой? Очевидно, настоящая работа будет полезной, только если ищутся *хорошие* оценки, а не оценки «в принципе» или эффективность в смысле «рекурсивности». Для рекурсивности самой по себе теория моделей обычно вполне адекватна, например, когда приходится иметь

дело с *формальными* теориями и теория моделей устанавливает выводимость *некоторого* $A[t]$.

Постскриптум о еще одном уроке, который теоретическое программирование может получить из литературы по теории доказательств, в частности из статей сборника Springer Lecture Notes № 453 и т. 49 Записок научн. сем. ЛОМИ, цитированных в этом приложении. Хорошо известно, что программист должен выбирать представление «сырых» данных, допускающее эффективное оперирование с ними. В частности, в вычислительной работе числа представляются в записи, подходящей для выполняемых операций; например, двоичное разложение особенно подходит для умножения. (Наряду с этим фактом приходится принимать во внимание работу, нужную для преобразования сырых данных в эту запись.)

Эта необходимость рассмотрения и выбора различных вариантов представления данных хорошо иллюстрируется, по-моему, алгоритмическими операциями на данных, представляющих *доказательства*. Конечно, теория доказательств имеет отношение к делу, так как ее главная цель — изучать операции на деревьях доказательства, такие, как *устранение сечения* $d \mapsto |d|$. Здесь d — дерево доказательства (возможно, бесконечное) и $|d|$ — дерево без сечения с той же последней формулой. Такое представление d (и $|d|$) рассматривалось в старой литературе не как *принципиальный вопрос*, а по большей части как случайная деталь, нужная, чтобы «прошло» некоторое конкретное рассуждение.

Примеры

(i) Следует ли представлять деревья как *множества* начальных путей или как *функции* на универсальном дереве? Нужно ли включать (как часть данных) метки на концевых точках путей?

(i) Должен ли узел N дерева содержать только формулу, «выведенную» в N, или также код примененного правила и/или коды расположения их посылок?

(iii) Нужно ли добавлять глобальную информацию обо всем дереве d_N, расположенном под N (как в стандартных рассуждениях по индукции, где используются оценки сложности формул в d_N или ординальной длины d_N)?

Новые работы, упомянутые в начале этого постскриптума, не только ищут конкретные конструкции, но и анализируют, какие добавочные данные действительно нужны, чтобы построить процедуру (устранения сечения), обладающую таким свойством, как рекурсивность или непрерывность в случае бесконечного d. (Очевидно, что случай конечного (подразумевается — представленного явно) вывода является более тонким, так как все упомянутые дополнительные данные могут быть получены путем поиска, хотя и достаточно долгого.)

Я некомпетентен судить, насколько изложенные выше соображения о выборе данных (представляющих доказательства) сравнимы по степени изощренности с другими анализами нечисловых алгоритмов в теоретическом программировании. Но этот уровень изощренности, безусловно, сравним с уровнем, скажем, элементарной теории категорий, где к обычным данным, определяющим *функцию* f, т. е. к ее *графику* γ, добавляют *границу* ρ *на область значений* f (чтобы сделать некоторые операции на этих данных *непрерывными* в соответствующих топологиях: хотя ρ и определяется графиком γ, она не непрерывна по γ).

Какой урок следует извлечь из приведенных примеров? Прежде всего мы не ожидаем, что *один-единственный* выбор данных, скажем для представления доказательств, будет оптимальным для всех операций, которые могут встретиться на практике. Но для того чтобы *теория* программирования на ЭВМ была жизнеспособной, у нас должно быть относительно *немного* наборов данных, которые будут эффективными для *многих* таких операций. Ср. существование нескольких порождающих структур (structures-mère), которые адекватны анализу многих специфических объектов, представляющих математический интерес.

Нельзя отрицать, что логиков разочарует необходимость поиска нескольких (хотя и относительно немногих) типов данных для представления объектов обычного опыта. Им хотелось бы иметь наилучшее, так сказать, *фундаментальное представление*. А если это невозможно, то они, я думаю, предпочтут, чтобы для каждой операции был нужен свой набор данных. Иными словами, как выразился епископ Батлер, каждая вещь есть она сама, а не другая. В этом случае вообще не приходится беспокоиться о теории.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1]) Наши определения нужно было бы несколько изменить для согласования с литературой, упоминаемой в приложении, особенно с работами Диллера и Минца.

(Читатели, знакомые с литературой, наверняка без труда найдут нужные модификации.)

[2]) В этом приложении мы начинаем с формальных выводов d, к которым применяются преобразования, в противоположность § 1, где мы

начинали с неформального доказательства p и требовали перехода $p \longmapsto d_p$ к соответствующему формальному выводу. Этот переход не слишком четко определен, особенно если p содержит пробелы (что неизбежно на практике). Читатели (или авторы) с различными уровнями компетентности найдут различные средства заполнения пробелов в доказательстве p и, следовательно, различные d_p. Но нет нужды впадать в истерику по поводу этих трудностей в приложениях теории доказательств, так как аналогичные трудности встречаются и в других осмысленных (и эффективных) применениях теории. Ср. *предположение* в конце § 3.

КАКИЕ ДАННЫЕ НУЖНЫ ДЛЯ СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ*)

Вторая часть этой статьи отвечает на вопрос, скрытый в заглавии: разумно адекватные данные имеются для естественной истории доказательств, но не для систематической науки. Различие между естественной историей и систематической наукой в нашем понимании сформулировано во введении к части II. Часть I (§ 1—3) подготавливает к части II, противопоставляя некоторые поразительные успехи ранней теории доказательств убывающей плодотворности дальнейших исследований. Настоящая статья дополняет недавние публикации автора [21] и [22], которые подчеркивают негативные аспекты современной теории доказательств.

Часть I. Прошлое

ВВЕДЕНИЕ

За последние полвека теория доказательств достигла значительного прогресса, представляющего непреходящий интерес. Стоит только сравнить то, что мы знаем теперь, с распространенными в 20-х годах представлениями по таким общим вопросам, как программа Гильберта; ср. § 1 ниже, где приводятся два крайних примера. С помощью ранних работ по теории доказательств были также получены ответы на совсем конкретные вопросы, которые возникали у математиков относительно содержания их собственных доказательств; ср. § 2. Эти исследования были интенсивно продолжены в 60-х годах как в направлении анализа различных неформальных понятий доказательства в литературе по основаниям, так и в отношении использованной математической техники. Некоторые из этих разработок демонстрируют бесспорное математическое остроумие, но ни одна из них не вызвала широкого

*) G. Kreisel. On the kind of data needed for a theory of proofs. Logic Colloquium 76, North-Holland Publishing Company, 1977, 111—128.

(активного) интереса среди молчаливого большинства логиков. Или, точнее говоря, то, что авторы считали интересным в своих разработках, т. е. сформулированные результаты, не произвело впечатления на это молчаливое большинство. Конечно, любая наука производит какой-то скучный материал. Дело здесь в том, что более трудные результаты теории доказательств оказываются, так сказать, систематически скучными, и на это есть причина (ср. § 3 и далее).

Распространенная точка зрения на только что описанные факты состоит в том, что молчаливому большинству не хватает вкуса к философии, необходимого для того, чтобы оценить всю внутреннюю силу этих результатов. Вряд ли можно ожидать, что молчаливое большинство будет очень ярко проявлять свои вкусы. Но есть и другая сторона дела, составляющая, вероятно, главный тезис части I этой статьи. Разработанные результаты *сформулированы* в языке, подходящем для (философских) целей, которые сами по себе основаны на *сомнительных допущениях*. Например, целью программы Гильберта было устранение абстрактных методов, так как предполагалось, что эти методы ненадежны или каким-то иным образом «неоправданны» (или, по крайней мере, хуже с этой точки зрения, чем элементарные методы). Однако ожидания, вытекавшие из этих допущений, были опровергнуты явно работами по программе Гильберта и неявно общим математическим опытом. Тем самым были скорректированы первоначальные неправильные представления и, таким образом, достигнут *прогресс* с точки зрения философии математики. Признание (молчаливым большинством) такого прогресса показало бы философскую проницательность, а не отсутствие вкуса.

Иными словами, те понятия, которые считаются главными в *существующих* схемах оснований математики (подсказанных первыми впечатлениями), просто бьют мимо цели.

Чтобы получить некоторые представления о перспективах дальнейшей работы, естественно посмотреть на прошлое нескольких преуспевших наук и сравнить ранние стадии их развития со стадиями развития теории доказательств в течение последних 50 лет. Две старые ветви физики, кинематика и механика непрерывных сред, иллюстрируют тот тип событий, который наблюдался в истории нескольких наук. Вначале имелись только качественные впечатления о мире, но этого зачастую достаточно для спекуляций о *подлинной природе* происходящих явлений. В упомянутых ветвях физики эти ранние представления выражались фразами вроде «совершенная форма» или «идеальная жидкость» и конкретизировались с помощью соответствующих ветвей математики (евклидова геометрия, уравнение Лапласа). С течением времени эти представления или концепции мира разрабатывались с помощью более передовой математики или радикально перерабатывались.

Иногда концепцию можно отвергнуть на чисто математических основаниях, просто развивая ее до пункта, где она приходит в конфликт с очень общим количественным или иным известным опытом. В таких случаях литература говорит о мысленных (Gedanken) экспериментах: их нужно лишь упоминать, но не проводить, так как в их исходе нет (подлинного) сомнения. В теории идеальной жидкости стандартный пример — это результат о том, что установившееся течение не оказывает лобового сопротивления (объектам произвольной формы). Аналогичные отрицательные примеры в логике см. в § 1. Положительные примеры и успешные применения элементарной геометрии или механики см. в § 2. Что касается содержания § 3, то его, вероятно, можно сравнить с пресловутой прикладной математикой кембриджских «трайпос» (конкурсных экзаменов) в начале этого столетия; ср. Литтлвуд [25]. Это сравнение, разумеется, чрезмерно оптимистично: современная геометрия и механика ушли далеко вперед от уровня кембриджских «трайпос».

Проведенная выше аналогия будет продолжена во введении к части II. В части I главное ее применение касается перехода от (неформальных) доказательств к адекватным формализациям. Например, полагаться на то, что математические тексты дают именно те данные, которые существенны для доказательств, можно не в большей степени, чем на то, что описания волн, которые дают моряки, обеспечивают данные, существенные для гидродинамики.

§ 1. ПЕРВЫЕ УСПЕХИ: ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Около 50 лет назад существовал широко распространенный интерес к вопросу о необходимости аналитических методов в теории чисел; ср. Ингам [11]. Мнения были различными. В соответствии с программой Гильберта многие считали, что упоминание вещественных чисел, множеств вещественных чисел и т. д. было только сокращением для соответствующих аппроксимаций и может быть непосредственно устранено. Другие придерживались противоположного мнения. И главное, обе стороны считали, что это вопрос «личной точки зрения», который никогда не будет решен. Работа в теории доказательств показала, что особенно сильно они ошибались именно там, где не было разногласий.

(a) *Теорема Гёделя о неполноте* и особенно его истолкование этой теоремы в подстрочном примечании 48[a] из [7] опровергли предположение о безвредности, т. е. устранимости теоретико-множественных методов даже для доказательства теоретико-числовых результатов. Кстати, это предположение было широко распространено даже среди тех, кто не знал его точной формулировки в форме программы Гильберта.

NB. Его ошибочность была *обнаружена* в связи с теоретико-доказательственной программой Гильберта. Сегодня лучше использовать другие результаты, разбивающие понятие формальной системы на две части: *формальный язык* (и определимость в нем) и *формальные правила* (для отношения следования). Результаты, формулируемые в терминах формальных операций, являются следствиями общих результатов в теории рекурсий; (инвариантную) определимость и отношение следования лучше изучать в теории моделей, не делая упора на формальные операции. Следствия аксиом бесконечности, утверждающих существование множеств высших типов (в гёделевском подстрочном примечании 48[a]), также верны и тогда, когда мы не ограничиваемся формальными системами; ср. [23, стр. 182, строки 10—6 снизу].

(b) Оказалось, что *реальная математическая практика* вопреки возможностям, на которые указал Гёдель, не использует аналитических методов существенным образом. Уже 40 лет назад Генцен отметил, что теоретико-числовая практика не использовала даже полную силу классической арифметики первого порядка (и потому его доказательство непротиворечивости было нужно для «оправдания» лишь возможных, а не действительных теоретико-числовых рассуждений); ср. [6, стр. 136, 170, 200]. В 50-х годах я переформулировал это его положение в следующей более общей форме: используется *язык* теории множеств или анализа, но *слабые аксиомы* (существования), консервативные над арифметикой. В действительности, чтобы найти какой-нибудь конкретный результат в аналитической практике, который *нельзя* было бы доказать совсем элементарными методами, нужно было обладать воображением. Мне пришлось обратиться к таким диковинам, как теорема Кантора — Бендиксона (которая снова возникнет в конце § 4). Короче говоря, благочестивые разговоры о возможности разрушения математики, если будут исключены теоретико-множественные или даже все неконструктивные методы, оказались пустыми.

Историческое замечание. Логический статус теоретико-множественных принципов, действительно используемых в математической практике, не является широко известным даже

теперь; ср. Бишоп [2] и реферат Штольценберга, где цитируются упомянутые выше разговоры и другие мнения, распространенные в 20-е годы, *до* работ Генцена и Гёделя. Как следствие этого изложение Бишопа представляется первым опровержением этих мнений!

NB. Разумеется (и это, безусловно, понимал Генцен), описанные факты об ограниченности современной практики не имеют отношения к первоначальной программе Гильберта, которая занималась природой всей (возможной) математики, а не увековечиванием современных ему дефектов. В крайнем случае эти факты увеличивали степень правдоподобности этой программы (при условии, что исходным пунктом были соответствующие общие допущения формалистской или номиналистической эпистемологии).

§ 2. ПЕРВЫЕ УСПЕХИ: РАСКРУЧИВАНИЕ НЕПРЯМЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Хотя результаты о неполноте и о консервативности из § 1(a) и § 1(b) соответственно были получены в теоретико-доказательственных контекстах, они говорят не о самих доказательствах, а лишь о множествах доказуемых теорем. Как уже упоминалось, многие из таких результатов лучше рассматривать с помощью теории рекурсии (в случае формальных систем) или теории моделей (для обобщений на произвольные множества аксиом). Мы обратимся теперь к результатам, в которые входят операции над доказательствами. Как и следовало ожидать из опыта математики, особенно теории категорий, здесь нужно тщательное внимание к выбору данных для представления доказательств, например, чтобы обеспечить эффективность встречающихся операций. Вообще, как упоминалось в конце введения, детали перехода от неформальных доказательств к их формализациям здесь более существенны, чем в § 1.

Историческое замечание. Методы, используемые ниже, были открыты в связи с сомнениями в «законности» неконструктивных доказательств, иногда называемых «косвенными» в случае экзистенциальных теорем $\exists x F$. Цель состояла в том, чтобы показать (например, для Σ^0_1-формул), что для *некоторого* t *можно* доказать $F[x/t]$ «законными» методами. Эта цель устаревает, как только «законность» косвенных методов становится признанной. Однако остается вопрос: верно ли, что данное (косвенное) доказательство π формулы $\exists x F$ дает пример t, такой, что $F[x/t]$, и если да, то как определить t *механически*, т. е. найти чисто механические, или, что то же

самое, формальные, правила $\pi \to t_\pi$? Короче говоря, первоначальная цель *обоснования доказательств* (т. е. принципов доказательства) заменяется вопросом о (механическом) *обращении* с доказательствами.

(a) *Два примера механического раскручивания.* Для них нужна только теория доказательств в логике предикатов первого порядка. Они охватывают период примерно в 30 лет и отвечают на вопросы, которые (в действительности) задавали выдающиеся математики о своей собственной работе.

(i) *Теорема Литтлвуда* (доказанная в 1914 г. и опровергшая предположение Римана): $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ меняет знак бесконечно много раз. Здесь $\pi(x)$ — количество простых чисел $\leqslant x$ и

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x dx/\log x.$$

Разумеется, это значит, что существует некоторый (рекурсивный) метод определения какого-то (в действительности наименьшего) натурального числа n, такого, что $\pi(n) > \mathrm{li}(n)$. Так как $\mathrm{li}(n)$ не целое, мы можем вычислить $\pi(n) - \mathrm{li}(n)$ с точностью, достаточной для того, чтобы определить знак этой разности, а затем взять наименьшее N, для которого $\pi(N) \geqslant \mathrm{li}(N)$. Доказательство Литтлвуда состоит из двух частей: в одной из них допускается, что верна (все еще недоказанная) гипотеза Римана, а в другой — что верно ее отрицание. Литтлвуд [25] пишет: «Впоследствии выяснилось, что мое доказательство является чистым доказательством существования и из него не может быть извлечена никакая численная оценка (для N)». Несомненно, что это доказательство косвенное, так как оно применяет закон исключенного третьего к неразрешенному (т. е. не доказанному и не опровергнутому) предложению. Тем не менее по существу стандартное применение теории доказательств (ε-теорем или устранения сечения) к первоначальному доказательству Литтлвуда извлекает из него границу для N; ср. Крайзель [14]. Разумеется, нельзя было ожидать, что этот метод даст оптимальные границы, для которых нужны новые идеи, и он их не дает: он дает границу около

$$10^{10^{10^{34}}} \text{ по сравнению с } (1.65) \cdot 10^{1165},$$

найденной Леманом в [24]. В действительности Литтлвуд понимал [25, стр. 118, строки 13—14], что величина N — это не единственный интересный вопрос здесь. Согласно (IV) на стр. 120, чтобы извлечь границу из его доказательства, например путем перехода от π к ψ, якобы нужна «новая идея». Это представление, несомненно, опровергнуто теоретико-доказательственным анализом, который *стандартным* образом применил *общий* (логический) метод (к первоначальному доказательству Литтлвуда для π).

Историческое замечание. Говоря точнее, были применены идеи, содержавшиеся в общей теоретико-доказательственной процедуре, а не сама эта процедура. С одной стороны, такая процедура работает на формализованном доказательстве, а первоначальное доказательство Литтлвуда, разумеется, не таково. Но, кроме того, в то время относящиеся сюда процедуры не были разработаны для формальных систем, очень близких к языку обычного анализа. Оказалось, что те шаги доказательства Литтлвуда, которые очевидным образом были критическими, удалось переписать в формализме логики предикатов первого порядка, к которому применима тогдашняя теория доказательств; ср. [15, замечание 5.2, стр. 171]. Существенно более систематическое использование теории доказательств здесь должно было бы сделать главным объектом изучения переход от неформальных доказательств к их формализации. Это было преждевременно до появления быстродействующих вычислительных машин (по крайней мере, если справедливо общее впечатление, что формализация таких доказательств, как литтлвудовское, слишком сложна для людей); ср. § 4(b).

(ii) *Раскручивание доказательства Рота.* Бейкер в разговоре о теореме Рота поднял вопрос об истинности следующего утверждения:

$$\forall n \forall \alpha \exists q_0 (\forall q \geqslant q_0) \forall p \, | \alpha - p/q | > q^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)},$$

где α пробегает иррациональные алгебраические числа (а остальные переменные — натуральные числа). Он ощущал моральную убежденность в том, что доказательство Рота можно «раскрутить» до получения *некоторой* границы на *число* исключительно близких аппроксимаций к α, т. е. на число множеств $E_{n,\alpha}$ (рациональных чисел r):

$$\left\{ r: \, | \alpha - r | \leqslant q^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)} \right\},$$

где $r = p/q$ (в несократимом виде), причем граница зависит от n и высоты числа α. Но он также предчувствовал, что этой границы будет недостаточно для того применения, которое у него (см. [2]) получила граница Давенпорта и Рота [9], требующая «новой идеи».

Оказалось, что этот вопрос о раскручивании уже был рассмотрен в литературе (см. [19, стр. 135—136]) в качестве

приложения эрбрановского анализа логических теорем вида $\exists x \forall y R(x, y)$, дающего

$$R(t_1, y_1) \vee R(t_2, x_2) \vee \ldots \vee R(t_k, y_k),$$

где термы t_i не содержат переменных y_j с $j \geqslant i$. Это очевидным образом применимо к теореме Рота для фиксированных n и α с q_0 в роли x и парой (q, p) в роли y. Рассмотрение показывает, что из k получается граница на число множеств $E_{n,\alpha}$. Это подкрепляет первую часть мнений Бейкера. С точностью до обсуждавшейся в конце § 1(a)(i) неопределенности при переходе от неформального доказательства Рота к его формализации я убедился, что величины $k_{n,\alpha}$, которые дает эрбрановский анализ, действительно слишком велики для приложений из [2].

Кстати, этот пример дает одно из немногих полезных приложений формулировки самого Эрбрана, которая не вводит функционалов в противоположность интерпретации отсутствием контрпримера. В рассмотренном выше случае $\exists x \forall y R(x, y)$ вводится новый функциональный символ f (как «контрпример», удовлетворяющий формуле $\forall x \neg R[x, f(x)]$), и мы получаем термы T_i, содержащие f, такие, что

$$\neg R[T_1, f(T_1)] \wedge \neg R[T_2, f(T_2)] \wedge \ldots \wedge \neg R[T_k, f(T_k)].$$

Читатель видит, что интерес Литтлвуда и Бейкера был, так сказать, созерцательным, а не активным. Они *располагали* границами, причем (как уже упоминалось) *лучшими*, чем те, которые давали рассматриваемые первоначальные доказательства. Вопреки утверждениям сторонников активной деятельности такого рода интересы не более постоянны, чем поиски лучших результатов, которые, кроме всего прочего, также будут превзойдены.

(b) 17-*я проблема Гильберта*: случай *заузленного раскручивания*. Решение проблемы Гильберта, предложенное Артином, было сформулировано для архимедовского формально вещественного поля, т. е. для упорядоченных полей K, в которых каждый положительный элемент является суммой $\leqslant k$ квадратов.

> Если p — многочлен с коэффициентами в K и $p \geqslant 0$, то $p = \sum (p_i/q_i)^2$, $1 \leqslant i \leqslant N$, где p_i и q_i — тоже многочлены с коэффициентами в K. Как велико N?

Из-за алгебраического характера доказательства Артина было очевидно, что одна из таких границ для N зависит только от k, числа n переменных и степени многочлена p, а, скажем, не от арифметических свойств K (которые могли бы, однако, позволить найти лучшие границы; ср. конец § 2).

Историческое замечание. Еще со времени своего первоначального доказательства в 20-х годах Артин на семинарах поднимал вопрос о границах. Он упоминал эту задачу при мне приблизительно 20 лет назад. Оказалось, что примерно в то же время этот вопрос рассматривал А. Робинсон, но в теоретико-модельных терминах. Его доказательство появилось в [28] вскоре после того, как было найдено теоретико-доказательственное решение. Теория моделей дала рекурсивный метод определения границы (методом проб и ошибок в применении к выводам в логике предикатов), а теория доказательств — границу, содержащую n-кратную *экспоненту*.

В стиле § 1(a) или, если на то пошло, также в стиле аналогичных применений теории моделей в 50-е годы доказательство Артина было сначала переписано в логику предикатов (первого порядка), однако пришлось сделать две не совсем тривиальные модификации.

(i) *Переформулировка теоремы Артина.* В отличие от § 1(a) формулировку Артина нужно модифицировать, так как условие, что K архимедово, не первого порядка. Рассмотрение рассуждения Артина показало, что оно используется лишь для того, чтобы обеспечить $p \geqslant 0$ во всех вещественно замкнутых расширениях K. Поэтому его можно заменить этим более слабым условием. Кстати, как заметил Хенкин [34], если эта замена сделана, получается более изящная формулировка для *упорядоченных* полей K без предположения, что положительные элементы являются суммами $\leqslant k$ квадратов. При новой гипотезе или, эквивалентным образом, если $p \geqslant 0$ в (единственном) вещественном замыкании $\bar{K}$ поля K,

$$p = \sum c_i (p_i/q_i)^2, \text{ где } c_i \in K \text{ и } c_i > 0.$$

Как обычно, доказательство было равномерным для данных n и d. Поэтому имеются многочлены p_i^j, q_i^j как от переменных, так и от коэффициентов многочлена p *общего вида* и многочлены c_0^j, c_i^j только от коэффициентов $(1 \leqslant j \leqslant i)$, такие, что для любого j

$$p = \sum (c_i^j/c_0^j)(p_i^j/q_i^j)^2$$

и, если $p \geqslant 0$ в K, то для некоторого j каждое (c_i^j/c_0^j) больше или равно 0.

(ii) *Переформулировка доказательства Артина.* В противоположность § 1(a) здесь вряд ли можно утверждать, что

переход от доказательства самого Артина к *доказательству* в *языке исчисления предикатов* вообще очевиден, даже после того, как дана переформулировка его теоремы, как в (i) выше. Артин использует бесконечную башню расширений полей. Определение границы для нужной конечной части этой башни равносильно нахождению N, а эта конечная часть нужна еще до того, как мы начнем формализовать вариант его доказательства в логике предикатов. В действительности в [18] были намечены два совсем различных доказательства (первого порядка) для (i). Одно держится совсем близко к доказательству Артина, другое комбинирует алгебраические тождества, используемые в его доказательстве, с полнотой аксиом для вещественно замкнутых полей и так называемой теоремой о равномерности из логики, которая является следствием теоремы Эрбрана.

Последние пять лет наблюдалось значительное расширение теории доказательств. В частности, устранение сечения было распространено на (непредикативные) теории типов таким образом, что все свободные от сечения доказательства теорем первого порядка сами состоят из формул первого порядка. Иными словами, произвольному выводу теоремы первого порядка (в системе высшего порядка) сопоставляется *конкретный* вывод первого порядка — его свободная от сечения (нормальная) форма. Тогда устранение сечения — это процедура, которая механизирует математическое *раскручивание* доказательств (или, по крайней мере, кандидат на роль такой процедуры). Однако вопрос еще не урегулирован. Конечно, если настаивать на замене обычного (агебраического) языка Артина «логическим» языком теории типов, упомянутым в последнем абзаце, то переход от его собственного изложения к формализации его доказательства в теории типов достаточно однозначен, во всяком случае не в меньшей степени, чем аналогичный переход в § 1(a). Однако такая настойчивость может оказаться стратегической ошибкой в силу инстинктивного сопротивления обычного математика применению языка теории типов и других языков из «оснований». Это главный вопрос § 4(b).

Замечание. По крайней мере в настоящий момент этот вопрос носит созерцательный характер (в смысле замечания в конце § 2(a)). В частности, лучшие числовые границы для самого N были получены Пфистером [27] независимо от d, когда K вещественно замкнуто. (Как теоретико-доказательственные, так и теоретико-модельные методы дают границы одновременно для N и для степени всего, что попадет под руку). Более интересно, что для подходящих топологий на

(подходящем поле) K следует ожидать *топологических* вариантов*) решения Артина, где p_i, q_i, c_i, c_0 зависят непрерывно от коэффициентов p или где c_0 и q_i вообще не обращаются в 0, когда $p \geqslant 0$ в $\bar{K}$. Такие результаты, конечно, следует получать не путем раскручивания доказательства Артина.

§ 3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ И УБЫВАЮЩАЯ ПЛОДОТВОРНОСТЬ

Основные результаты из теории доказательств для исчисления предикатов первого порядка, использованные в § 2, — это устранение сечения и функциональные интерпретации. Они были по причинам философского характера, обсуждающимся в п. (a) ниже, распространены на более сильные системы (включая инфинитарные), как правило, с помощью некоторого рода трансфинитной итерации или иерархии. Когда итерируемый процесс «элементарен», доминирующим фактором является (i) «длина» или *ординал* итерации, причем на предельных ординалах осуществляется контроль посредством так называемых фундаментальных последовательностей. Когда уже каждый шаг процесса содержит некоторый вид «собирания в совокупности», мы имеем (ii) *функционалы высших типов* с некоторой определяющей схемой для них.

NB. Различие между (i) и (ii) очень хорошо иллюстрируется двумя известными иерархиями множеств: (i) — конструктивной (по Гёделю), порожденной итерацией так называемой предикативной операции множества-степени, и (ii) — естественной, порожденной итерацией полной операции множества-степени. Иллюстрируется «очень хорошо», но не идеально, так как в случае теории доказательств имеются дополнительные отношения. В частности, вычислимость термов (для функционалов) в (ii) доказывается трансфинитной индукцией по (упорядочениям, соответствующим) ординалам в (i). Обратно, «определения» по трансфинитной рекурсии в (i) *доказуемым* образом удовлетворяются термами в (ii).

NB. Многие из такого рода исследований содержат материал, обладающий значительным математическим очарованием, что хорошо иллюстрируют доклады Жирара и Ю. Л. Ершова на Международном коллоквиуме по логике в 1976 г., в которых результаты формулируются в виде, независимом от первоначальных теоретико-доказательственных целей. Не будем заблуждаться: материал Жирара, хотя он,

*) Такой вариант получен Делзеллом (Delzell C. A constructive continuous solution to Hilbert 17-th problem. — Thesis, Stanford, 1980).

вероятно, исключительно хорошо отделан, вполне типичен для того рода ординальных структур, которые разрабатываются в теории доказательств (категории не обязательно фундированных упорядочений с подходящими отображениями и функторами между ними), а материал Ершова — для того, что сегодня называется декартово замкнутыми категориями, используемыми для функциональных интерпретаций, когда нужны определенные неформальные свойства непрерывности (уточняемые с помощью топологии Ершова или подходящих структур предельного пространства); ср. подстрочное примечание 1 в [13] или «основной результат» в [16, 2.4 и 5.1].

Только что изложенное подсказывает два очевидных вопроса.

(i) Верно ли, что мы просто *недостаточно* разрабатывали, не приложили достаточных усилий к достижению традиционных целей, или

(ii) наши разработки имеют *лишь* эвристическую ценность, так как вели (некоторых из нас) к идеям, которые эффективны, только если отделить их от первоначальных, ложных целей?

Перед тем как я приведу убедительное (для меня) свидетельство в пользу (ii) в случае современной теории доказательств, я удовлетворю любопытство читателей *примерами*, касающимися (i) и (ii) из преуспевающих частей логики. По поводу (i): доклад Макинтайра на Международном коллоквиуме по логике 1976 г. хорошо иллюстрирует (мои) заблуждения об использовании дальнейших продвижений в теории моделей, в частности, в связи с работой Морли [26], которая обычно считается первым примером «жесткой» теории моделей. Примерно десять лет назад я питал радужные надежды на блестящие приложения: ср. стр. 152 первоначальной (французской) версии моей совместной с Кривином книги [23]. Они не оправдались в течение следующих пяти лет, так что упоминание о [26] было выброшено из последней (немецкой) версии. Результаты Макинтайра более чем оправдывают первоначальные надежды, когда новая, «жесткая» теория моделей *комбинируется* с результатами для подходящих математических структур (группы, но не кольца, как упомянул Макинтайр) и основное внимание перемещается с наивных «логических» вопросов о мощности к устойчивости и подобным вопросам [1]). Превосходную иллюстрацию к (ii) дает упомянутая ранее работа Гёделя о конструктивной иерархии L. Эта иерархия — (изящное) расширение разветвленной иерархии, введенной Пуанкаре и Расселом для их программы предикативных *оснований*. Но, как подчеркивает Гёдель [8] в самых ясных выражениях на стр. 146—147, его работа отбрасывает требование, которое совершенно необходимо для этой программы, так как соответствующие свойства процесса итерации *не доказаны предикативно* (а установлены в самой аксиоматической теории множеств, чего хватает для гёделевских результатов об относительной непротиворечивости). Прием, несколько схожий с фундаментальными последовательностями для «теоретико-доказательственных» ординалов был успешно использован Йенсеном [12]. Гёдель несколько ностальгически замечает [8], что его прием представляет преимущественно математический, а не первоначальный философский интерес. Здесь (как мне кажется) игнорируется главная *философская* проблема: представляет ли предикативная программа, являющаяся по общему признанию философским предприятием, также и философский интерес? *Один* из тестов — сравнить результаты, полученные путем ее изменения (как сделал Гёдель), с результатами, полученными при точном следовании ей (например, с помощью автономных трансфинитных прогрессий; ср. обзор в [31]). Конечно, вне логики имеются гораздо более впечатляющие примеры (ii), например в известной теории идеальной жидкости, упомянутой во введении. Эта теория, или, как говорят, «идеализация», просто неадекватна своей первоначальной цели — гидродинамике. Однако идеи, возникшие в процессе развития этой теории, особенно в двумерном случае, имеют *непреходящую* ценность, если они подходящим образом *отделены* от первоначальной цели (функции комплексной переменной или гармонические функции, использовавшиеся для описания потенциала и течения идеальной жидкости, которые гидродинамически довольно бесполезны).

После этих иллюстраций, касающихся альтернативы (i) и (ii) выше, мы вернемся к нашей основной заботе — доказательствам. Здесь, как обещано, имеются свидетельства в пользу (ii), как в отношении (a) конкретных иерархий, упомянутых во введении к § 4, так и (b) традиционных теоретико-доказательственных целей вообще.

(a) *Два стратегических допущения* при построении иерархий. Первое касается обоснования (принципов P доказательства) и является *ограничивающим*: принципы должны быть оправданны снизу, через иерархию, путем какой-то редукции к принципам, более элементарным, чем P. Второе — *разрешающее*: вместе с каждым шагом редукции считается «данной» также и произвольная конечная итерация. Короче, не считаются данными ω-итерации, их ω-итерации и т. д.; довольно (но не абсурдно) широкое понимание этого «и т. д.» см. в докладе Жирара.

NB. Здесь тривиальным образом привлекаются идеализации — в этом вообще нет сомнения. Проблематично неявное допущение, что они хотя бы приблизительно адекватны, например, при изучении надежности доказательств. В действительности имеется радикальная альтернатива:

не лучше ли изменить стратегию на противоположную?

В частности, вообще не строить P снизу, а уменьшить длину, (конечное) число итераций на отдельном шаге. Допустим, например, что для некоторого P становится сложным описанный в § 2 переход от выводов d к явным реализациям t_d. Что пользы тогда в *возможности* такого перехода? Мы стали бы искать P^+, которые допускают (практически) более простые доказательства, чем P, с (практически пренебрежимым) риском потерять эту возможность вообще. Менее утрированный пример достаточно известен из элементарной арифметики, где наверняка безнадежно сводить числовые термы к цифрам (0, $s0$, $ss0$, ...). Вместо этого ищут новые, более эффективные обозначения. Поучительные применения в «продвинутой» арифметике см. в [32] и в реферате на эту статью, где отмечены имеющие сюда отношение положения. Для ссылок в § 4: Стетмен [29] вводит сечения, чтобы уменьшить (не длину, а) *род* в противоположность обычному подходу, когда сечения устраняются. Более общим образом можно пытаться механизировать большую часть подобных стандартных шагов, вводящих леммы для «подчистки доказательств»; кроме всего прочего, сами мы приучаемся делать такого рода вещи почти автоматически.

В свете приведенных выше рассмотрений успехи из § 2 вполне могут составлять что-то вроде предела полезных применений ведущих идей современной теории доказательств, что-то вроде оптимальной величины отношения

дополнительная информация/добавочные усилия

в традиционном теоретико-доказательственном анализе. Конкретизируя, мы закончим часть I этой статьи несколькими общими соображениями о теоретико-доказательственных целях.

(b) *Математическое рассуждение и математические объекты: открытие.* Очевидно, когда мы начинаем сознательно размышлять по поводу нашего знания (о чем бы то ни было), так называемые субъективные элементы выдвигаются на самый первый план — они представляются особенно близкими мыслящему субъекту. Когда речь идет о математическом знании, среди этих элементов оказываются определения

и доказательства в противоположность определяемым объектам и доказываемым теоремам. Фактически в истории, как только какая-то ветвь математики начинала подвергаться анализу, первые различия, которые приходили в голову, касались методов: проективные и метрические методы в геометрии, алгебраические и дифференциальные в анализе и т. п. Оказалось *открытием*, что конкретные различия, упомянутые здесь, выгоднее интерпретировать в терминах различных, возможно новых, свойств и структур, для которых верны результаты, доказанные различными методами [2]). Иными словами, мы обнаружили неожиданную адекватность анализа в терминах «объективного».

Историческое замечание. Традиционно здесь произносят высокие слова о диаметрально противоположных взглядах на природу (математической) реальности, о великом *конфликте* между объективным и субъективным. Все это становится много менее драматичным после конкретизации применительно к знакомым примерам: в конце концов, бывают проективные и метрические плоскости, с одной стороны, *и* проективные и метрические методы — с другой. Отнюдь не наблюдая ни конфликта, ни необходимости выбора между различными взглядами на то, что происходит на самом деле, мы имеем очень близкие отношения между методами и объектами, столь близкие, что рассматриваемые объекты могут быть охарактеризованы в терминах методов. Ср. различие между теми физическими объектами, которые видимы для (идеализированного) невооруженного глаза, и теми, которые невидимы. Это различие достаточно объективно (и его не особенно трудно уточнить). Но, согласно нынешнему опыту, оно слабо просто потому, что видимость вообще не является существенным фактором в большинстве физических явлений (для которых мы имеем жизнеспособные теории). Короче, здесь есть вполне реальная проблема, но она тоньше, чем набивший оскомину вопрос о реальности.

Приканчивают ли оговорки из пп. (a) и (b) выше саму дисциплину

(теории доказательств)? Конечно нет, при условии, что мы ищем явления математического рассуждения, в которых доказательства (с большой вероятностью) являются главными факторами, короче, если доказательства должны быть *основными объектами изучения*, если мы не настаиваем на том, чтобы поставить все с ног на голову и воспринимать доказательства лишь как средства, скажем, анализа «смысла» теорем.

(b) уже введенные понятия со многими знакомыми свойствами анализируются путем установления того, что они *эквивалентны* другим, которые явно определены (в некотором данном языке). Грубо говоря, возможность (вообще) устранить явные определения в случае (a) часто будет очевидна, а в (b) потребует некоторой работы в области оснований. Однако количественная разница между (a) и (b) окажется весьма тонкой.

Примеры. (a) Одна из важных стратегий применения современной абстрактной математики, скажем теории групп, к теории чисел такова. (i) Операция $\mathcal{O}$ определяется в теоретико-числовых терминах, скажем на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ или по некоторому простому модулю. (ii) Показывают, что $\mathcal{O}$ удовлетворяет групповым законам. (iii) Конкретизация общих фактов о группах применительно к $\mathcal{O}$ ведет к теоретико-числовым результатам. Эмпирически эта стратегия часто была поразительно успешной; наиболее импозантное ее применение дано, вероятно, в [4], где выявлен вычислительный недосмотр Зигеля в [10]. В то же время и в этом, и в других случаях в современной практике такая стратегия *логически тривиальна*, т. е. устранима в следующем точном смысле: доказательства (ii) оказались формализуемыми в элементарной теории чисел (хотя ввиду неполноты это надо проверять), а общие факты, используемые в (iii), естественно доказываются в консервативных расширениях этой теории (в силу полноты логики предикатов это верно автоматически, если нужные факты — сами первого порядка). Таким образом, применения этой стратегии в нынешней практике годятся для изучения в рамках программы, предложенной в конце § 3.

(b) В большей части традиционной математики, например в геометрии Евклида, доминировал поиск таких корректных определений знакомых понятий (круг, касательная), для которых обычные (геометрические) свойства этих понятий можно вывести из аксиом Евклида. Ясно, что эти свойства соответствуют свойствам групп в (iii) выше, хотя в противоположность положению с группами геометрические свойства использовались задолго до того, как появился «официальный» список аксиом для этих привычных понятий.

Библиографические замечания. Приведенные выше примеры (a) и (b) играют основную роль в той ветви естественной истории (математики), которая описана Бурбаки (в несколько приподнятом стиле) в [3, стр. 253—254] в терминах «интуитивных отзвуков» (математических структур). Открытие (явных) определений, легко схватываемых и удобных в

обращении, дает, конечно, решающее свидетельство в пользу таких «отзвуков» (и значения определяемых понятий); очевидно, что это применимо к группам в примере (a) выше. По-видимому, для того, чтобы подчеркнуть (очевидное) сходство между двумя видами использования явных определений в (a) и (b) выше, Бурбаки отодвигают различия на задний план. Наконец, с безжалостной логикой эпигонов некоторые их последователи хотят вообще скрыть применения, упомянутые выше в (b), например, в школьном преподавании. Настойчиво подчеркивается важность явных определений и у Витгенштейна в [5], например стр. 33 или 111. Идея из (b) об *осознании* эквивалентности между знакомым понятием и явным определением, т. е. корректности определения, столь же противна Витгенштейну, сколь и Бурбаки. Стоит, вероятно, заметить, что не считая, разумеется, очевидных стилистических различий, имеется и ряд других существенных аналогий во взглядах Бурбаки [3] и Витгенштейна [5], относящихся прежде всего к поверхностности тех свойств доказательств, которые подчеркиваются в традиционных основаниях. Витгенштейн иллюстрирует это место примерами из наиболее элементарной численной арифметики, Бурбаки — из «продвинутой» математики. Скептицизм Витгенштейна распространяется на теоретико-множественные основания, в то время как Бурбаки выражают (кажется) неискреннее почтение к языку теории множеств на стр. 247. Однако на стр. 251, подстрочное примечание (1), они подчеркивают важность своих основных структур, даже не упоминая, что структуры определимы в теории множеств. Эти вопросы разработаны в реферате книги Витгенштейна [5] для Bulletin of the AMS, где также указаны ошибки, сделанные Витгенштейном и Бурбаки из-за их невежества в логике (60-х годов).

Считая установленным поразительное значение явных определений, мы ищем *специфические* факторы, с которыми связано эффективное использование таких определений (подразумевается — всегда вместе с соответствующими аксиомами; ср. (ii) в примере (a) выше). Напомним читателю, что, согласно введению к части II, в (любой) естественной истории рассматриваются поверхностные или «феноменологические», а не «скрытые» факторы, и никто не ожидает, что их отношение к делу будет установлено чисто математически из знакомого опыта; последний только помогает выбирать разумного кандидата на роль (существенного) фактора.

NB. Как и в других областях научной практики, факты будут формулироваться в терминах любых понятий, которые мы научились применять, без преждевременного анализа (того, «как» мы узнаем, например, что конкретная спектральная

линия голубая). Крайним случаем является использование выражения «выглядит металлическим» в ранней минералогии.

(а) *Род* (genus) *фигур доказательства* и конкретное использование явных определений, проиллюстрированное в (а) выше. Прежде всего следует заметить, что ни одна из обычных мер *длины* не является здесь решающим фактором. *Число шагов* (узлов) уменьшается лишь линейно при введении новых понятий явными определениями. *Число символов* (в формулах) может быть уменьшено экспоненциально, но поразительные применения стратегии из примера (а) наблюдаются и без такого сокращения. В любом случае на многие рассуждения поразительно влияют даже перестановки, если при этом удается избавиться от перекрестных ссылок. Это наблюдение качественно совместимо с использованием рода в роли фактора, введенным в работе [29, гл. I], к которой мы и отсылаем читателя за подробностями. (Грубо говоря, род фигуры доказательства — это наименьший род любой поверхности, в которую эта фигура может быть вложена без пересечений.) Приведем несколько довольно общих свойств рода, которые не обсуждаются в [29], но иллюстрируют, какого типа рассмотрения нужны для естественной истории доказательств. (Тех, кто воспитан на традиционной математической логике, они раздражают.)

(i) Род *чувствителен к стилю формализации.* В частности, все выводы в исчислении секвенций имеют род 0 в противоположность натуральным выводам (при условии, что узлы, где допущения вводятся и удаляются, соединены)[3]). Эта чувствительность — вовсе не дефект, она позволяет выбирать между стилями; ср. сдвиг к гелиоцентрическим координатам в астрономии во времена Кеплера (что было существенно для естественной истории, несмотря на все разговоры об относительности пространства).

(ii) Род *трудно вычислить* по исходным данным. Нам нужна вычислительная машина даже для совершенно элементарных выводов (и довольно много усилий, чтобы превратить обычные доказательства в данные, подходящие для быстрых вычислений). Вот одна история о таких вычислениях. В Стенфорде ряд (натуральных) выводов, построенных студентами с применением ЭВМ на упражнениях по курсу аксиоматической теории множеств (информацию об этом курсе можно найти в [30]), был помещен в память ЭВМ. Алгоритм Тарьяна был достаточно эффективен для того, чтобы поделить этот готовый материал на плоские и неплоские выводы. Работа была бы огромной, если бы вместо этого пришлось кодировать для ЭВМ обычные письменные работы.

Мне кажется, что если род вообще является значительным фактором, то (ii) — не указание на недостаток, а обещание успеха. С одной стороны, так как ЭВМ — новый инструмент, то лишь совсем недавно было бы просто преждевременно изучать наш предмет эмпирически. Более существенно, (ii) уменьшает некоторую, если не главную сложность в изучении человеческого поведения независимо от того, является она психологической или физиологической (что на практике редко является важным различием). В частности, *знание теории* должно *влиять на объект наблюдения* в противоположность другим наукам, где, разумеется, решающим может быть влияние такого знания на наблюдателя, а не на объект наблюдения и где нужны предосторожности против сознательного или бессознательного искажения (наблюдателем). Если теория включает понятия вроде рода, который трудно вычислить, то имеется больше шансов, что испытуемые даже не будут пытаться вычислить род и потому просто не будут *знать теоретического предсказания* (даже если они знают теоретические законы). По крайней мере нужда в *статистических* испытаниях уменьшается в случае таких неподатливых теорий. Наконец, рассматриваемые здесь явления (рассуждения) совершенно поверхностным образом кажутся нам поразительно *туманными.* Поэтому, если теория использует такие поверхностные (феноменологические) понятия, как род, такая туманность хорошо гармонировала бы с трудностью действительного приложения теории (к данным); ср. также последний абзац введения к части II. Кстати, фактические вычисления рода для упомянутой выше массы доказательств, написанных стенфордскими студентами, не дали особенно определенных выводов. Это произошло, по крайней мере частично, потому, что весь материал был слишком элементарен для того, чтобы отразить действительно резкие различия.

Сказанного до сих пор вполне достаточно, чтобы показать, что у нас имеется много данных для разработки естественной истории доказательств. В действительности такая ситуация возникает всякий раз, когда мы находим поразительные явления, но не видно, как их анализировать в терминах «объективного» (в смысле § 3). Обсуждавшаяся выше возможность применения явных определений — это, конечно, только одно из многих таких явлений. Как отмечено в предыдущем абзаце, подготовка этих явлений к теоретическому рассмотрению (т. е. выбор данных) оказывается решающей, особенно если привлекаются такие понятия (как род, который столь трудно вычислять), что реальна только автоматическая обработка данных.

Пример. Для традиционного [4]) изложения элементарной логики одна из наиболее известных «редукций» — явное определение произвольной *пропозициональной операции* (подразумевается, что вместе с доказательством ее аксиом) в терминах (правил для), скажем, $\neg$ и $\vee$. Что теряется при таких редукциях? Стетмен в [29] показывает (в действительности для импликативного исчисления, а не для $\neg$ и $\vee$), что *род* может возрастать неограниченно. В докладе в Клермон-Ферране (в 1975 г.) он рассмотрел пропозициональные кванторы и показал, что увеличивается и *длина*; эти кванторы дают возможность явных определений, так как $\forall pP$ есть сокращения для $P[p/\top] \wedge P[p/\bot]$.

Исправление. Хотя Стетмен в [29] ссылается на [20] (имеется в виду стр. 267), его (успешное) продвижение идет по совершенно иному направлению, чем то, которое я тогда, т. е. на конгрессе в Бухаресте в 1971 г., имел в виду. Моя мысль состояла в том, что выбор аксиом для явных определений должен существенно опираться на некоторого рода традиционный *философский анализ* смысла определяемых понятий, а комбинаторная сторона пусть заботится сама о себе. Действительно, как было подчеркнуто на стр. 258 и в постскриптуме [20], я искал подкрепляющего философского анализа, противопоставляя его обычному использованию философии в современных основаниях, где ее полностью заслоняет математика. Стетмен сосредоточивается на комбинаторном, а не философском анализе. Кстати, пять лет назад я не думал в этой связи ни о Бурбаки, ни о Витгенштейне, хотя читал статью Бурбаки [3] и знал Витгенштейна в 40-е годы. В действительности даже сегодня я не помню, чтобы он говорил на эту тему в моем присутствии. Судя по приведенным выше цитатам из [5], он должен был это делать, и очевидно также, что я не дорос тогда до того, чтобы извлечь пользу из его замечаний.

(b) *Языки, применяемые в основаниях: артефакты.* Тривиальным образом, эффективность явного определения данного понятия будет зависеть от выбора *языка* (который используется в *определении*). Кажется, менее известно, что обычные языки, используемые в основаниях, могут вводить артефакты, в частности когда понятия из геометрии, включая дескриптивную теорию множеств, определяются обычным образом в языке *арифметики высших порядков*. Два приводимых ниже примера иллюстрируют мои собственные заблуждения.

(i) Имеются два стандартных доказательства теоремы Кантора — Бендиксона. Одно отождествляет совершенное

ядро (замкнутого) множества F (вещественных чисел) с множеством его точек накопления, другое — с пределом его производных множеств. *Если* настаивать на переписывании этих доказательств в арифметику второго порядка, когда F кодируется своим множеством дополнительных интервалов (с рациональными концами), то различие между этими доказательствами наиболее очевидным образом выражается в теоретико-модельных терминах: первое использует Π^1_2-свертывание (примененное к предикату «быть точкой накопления»), второе — только Π^1_1-свертывание; ср. [17] [5]). Это различие иллюзорно в той мере, в какой, так сказать, более геометрическую формализацию первого доказательства (с добавочными исходными понятиями для вещественных чисел и т. д.) можно также промоделировать, используя Π^1_1-свертывание. Это было установлено Фридманом при недавней разработке (для теорий третьего порядка) его аккуратной формализации [33].

Следствие. Не видно, как анализировать (поразительное) различие между аккуратными формализациями двух приведенных выше доказательств в терминах «объективного», и потому оно годится для изучения в рамках программы, изложенной в конце § 3.

Замечание относительно бытующего у логиков (и до сих пор практически необоснованного) мнения о «необходимости» *высших типов* в обычной математической практике. Конечно, в силу подстрочного примечания 48[a] в [7], упоминавшегося уже в § 1(a), *такая необходимость* могла бы возникнуть: некоторые арифметические теоремы (обычной непредикативной) теории типа $n+1$ просто не доказуемы в теории типа n. Однако *действительная* основа для этого мнения может носить вообще структурный, а не логический характер; ср. структурные улучшения, достигнутые в результате введения фридмановского языка *третьего* порядка с более *слабыми* аксиомами (чем в первоначальной формализации второго порядка). Для естественной теории доказательств, конечно, интересно было бы представить *иные гипотезы* о возникновении таких мнений (по аналогии со сделанными выше предположениями о логической и структурной необходимости).

(ii) Многие теоремы, которые формулируются в языке логики первого порядка (и потому в силу полноты *могут* быть доказаны по обычным правилам исчисления предикатов), в действительности доказываются с использованием геометрических или аналитических методов. Очевидная проблема для

естественной истории доказательств такова. Нужны ли эти математические методы для того, чтобы сделать доказательства удобными в обращении (путем уменьшения длины, рода или чего бы то ни было)? В [21] был предложен кандидат из теории вещественно замкнутых полей — теорема, установленная Шютте и Ван дер Варденом при решении задачи Ньютона о 13 точках (на поверхности единичной сферы). Моим конкретным предложением было формализовать их решение в обычной теории типов, где, в частности, явно определяются тригонометрические функции. Но более пристальное рассмотрение показывает, что элементарные факты о геометрических и топологических понятиях (площади сферических треугольников, теорема Эйлера о многогранниках) имеют совершенно необозримые доказательства в языке, который я имел в виду. Иными словами, представление в этом языке вводит сложности, которые вовсе не присущи решению задачи Ньютона.

Замечание. Не следует предполагать, что любому решению задачи Ньютона в подходящем геометрическом языке соответствует конкретное доказательство в исчислении предикатов первого порядка (в противоположность ситуации с решением в теории типов, где такое соответствие обеспечивается нормализацией). Ср. обсуждавшееся в § 2(b) переписывание в логику первого порядка работы Артина о суммах квадратов в качестве иллюстрации возможных причин «инстинктивного сопротивления» обычных математиков применению языков, использующихся в основаниях.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КАК ГЛАВНЫЕ ОБЪЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ: СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ НАУКА

Начнем с самого первого вопроса: насколько далеко нам нужно развить естественную историю? Не можем ли мы узнать из истории преуспевших наук, как найти систематическую схему без расточительных кружных путей *через* естественную историю?

Историческое замечание. Многие работы по естественной истории действительно были излишней тратой сил. Они были впоследствии превзойдены систематической наукой, не будучи использованы. Один пример уже был упомянут в (библиографическом замечании) .§ 4: до появления рентгеноструктурного анализа естественная история минералов занималась преимущественно формой и цветом или распределением конкретных минералов в различных частях земного шара. Полученная информация была достаточно солидной,

но просто не поддавалась теоретическому изучению (то же относится к большой части ботаники или зоологии). Более актуальный пример дают «естественные языки». Он не вызвал большого доверия, вероятно, потому, что, как кто-то сказал, эти конкретные языки немного говорят нам о подлинных *возможностях* (человеческого языка) и еще меньше о *действительном мире*, который, как предполагается, описывается языком. Конечно, в упомянутых разделах естественной истории были блестящие идеи, например у Д'Арси-Томсона о росте и форме или у Хомского о трансформационных грамматиках. Именно из-за (а не вопреки) их известности и общности от этих идей даже не пахнет зародышами систематической теории. Для контраста заметим, что внешне очень специальная идея в генетике — сосредоточиться на исследовании бактерий и вирусов — оказалась не только плодотворной для генетики как систематической науки, но и непосредственно убедительной. На этом материале можно было наблюдать (за короткое для человека время) так много поколений, что можно ожидать перехода количества в качество (данных).

Несмотря на все возбуждение по поводу открытия формализации, в настоящее время не кажется, что имеются хотя бы умеренно обещающие идеи для систематической науки о доказательствах. Что еще хуже, два краеугольных камня современных исследований (a) и (b) ниже (которые на нынешней стадии достаточно солидны для естественной истории доказательств) кажутся мне весьма слабыми.

(a) Мы ищем *осознанные* элементы в (математическом) рассуждении или по крайней мере весьма умеренные расширения до таких элементов, которые *можем сделать осознанными для самих себя*. Как обычно, традиционная философия обсуждает мелочные сомнения (здесь — сомнения в надежности интроспекции, существовании мысленных объектов и тому подобное) и тем самым сознательно или бессознательно отвлекает внимание от принципиального вопроса: составляют ли эти (под)сознательные элементы *адекватные данные* для чего-либо похожего на систематическую теорию? Ср. ситуацию в минералогии до появления рентгеноструктурного анализа (в историческом замечании выше) и, более общим образом, неадекватность области явлений, которые могут быть сделаны видимыми, для систематической физической теории.

(b) Под впечатлением бесспорно отличительных черт *математического* рассуждения мы отделяем его от других типов

умственной деятельности людей и, конечно, животных. Снова проблема состоит не в трудности уточнения какого-то из таких различий и еще меньше *в предрассудке* против допущения умственных способностей у иных биологических видов, кроме человека (помимо всего прочего, до самых последних успехов в электронике мы не могли даже объективно регистрировать более тонкие особенности их поведения). Она заключается в том, годится ли вообще для (построения систематической) теории этот конкретный тип интеллектуальной деятельности, который нас так поражает.

Повторим: (a) и (b) не вызывают сомнения в возможности прогресса естественной истории доказательств, где мы обходимся тем, что имеем. Я закончу сравнением между *стадиями изучения* (того, что обычно называется природой) доказательств и материи[6]).

Что такое доказательство? Что такое материя?

(i) Важным шагом в развитии атомной теории было открытие *химически чистых* веществ среди, как правило, нечистых веществ, изучавшихся естественной историей. Это дало возможность ввести различие между атомами и молекулами. Создается впечатление, что Бурбаки (см. статью [3], упоминавшуюся уже в § 4(a)) считают, что их structures-mères (порождающие структуры) следует сравнивать с химически чистыми веществами, в частности с атомарными. Но, как подчеркивалось в § 4(b), анализ, проводимый в основаниях математики, не учел еще открытия этих аналогов химической чистоты. Настаивая на *едином* языке оснований, будь то язык теории множеств или теории типов, мы навязываем математике буквальное, но чисто формальное единство. (На стр. 247—248 Бурбаки тоже «трубят в фанфары» о «единстве», достигнутом с помощью их порождающих структур, но восемь страниц спустя подчеркивают, что таких структур несколько и что довольно большая часть математики, например то, что не попало в их трактат, в любом случае не «составлена» из этих структур.) Бурбаки, разумеется, совершенно правильно не затрагивают в этом контексте избитую тему объективного и субъективного взгляда на математическую реальность. Кроме всего прочего, даже в предположении объективности этих порождающих структур тот факт, что они вносят вклад в «уразумение существа математики» (стр. 247), относится именно к нашему интеллектуальному «оснащению».

(ii) На основе открытия из (i) можно разрабатывать *химический* атомизм и молекулярные диаграммы из элементарных учебников химии. Это требует лишь весьма грубой

идеи, относящейся к атомной структуре,— *валентности* конкретных атомов. По аналогии с представлением доказательств графами, как в § 4(a) выше, молекулы представляются

чисто теоретико-графовой структурой.

Вряд ли можно утверждать, что это отвечает на вопрос, что такое материя, поскольку изложенные соображения не исключают огромного числа комбинаций атомов, которые никогда не реализуются.

(iii) Действительно, значительный прогресс был достигнут, когда валентность была связана с *внутренней* структурой атомов в теории Резерфорда, уточненной с использованием квантовой теории. Это не только придало валентности «смысл» (что хорошо известно). Было достигнуто гораздо больше, когда Полинг вывел отсюда

метрическую структуру,

и, в частности, *длины* и *углы* между химическими связями. Эта дополнительная структура в достаточной мере уменьшила число возможных комбинаций для того, чтобы стать *эффективным научным инструментом.* Вероятно, наиболее эффектные приложения имеются в молекулярной биологии. Было бы несколько поспешно сравнивать использование внутренней структуры атомов с проникновением глубже «осознанных элементов», о которых говорилось в (a) выше, или весьма существенную информацию, которую дали такие необычные элементы, как радий, с потребностью в более широком опыте, которая подразумевается в (b). Однако кажется совершенно очевидным, что в одном направлении нынешнее теоретико-графовое представление доказательств необходимо обогатить (хотя, по-видимому, не с помощью обычной методики), так как доказательство редко кажется убедительным, если заключение зависит от чего-то хранящегося слишком глубоко в нашей памяти. Короче, мы ожидаем, что здесь нужна какая-то гипотеза о структуре нашей памяти (и, как уже упоминалось, одни и те же трудности возникают, когда мы рассуждаем о памяти в физиологических или психологических терминах). Но, кроме того, когда мы вникнем в доказательство некоторого утверждения, нам легче его использовать. Как кто-то сказал, когда мы доказали утверждение, мы знаем больше, чем если нам известно лишь, что оно истинно. Функциональные интерпретации, упомянутые в § 2—3, выявляют *некоторую* часть такой дополнительной информации (что, согласно § 2, иногда полезно). Здесь недостает убедительного *теста*, чтобы понять, насколько эта конкретная добавка приблизит нас к факторам, которые действуют

на самом деле. Как часто бывает, затруднение не в том, что нам не приходит в голову никакая теория. Наоборот, нам приходит в голову слишком много теорий, примерно согласованных с обычным опытом (математических доказательств).

§ 6. ЭВРИСТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ ТРАДИЦИОННЫХ ЦЕЛЕЙ: ОТРЕЧЕНИЕ

Принятая в этой статье и описанная во введениях к частям I и II точка зрения на научный прогресс не обращает внимания на основные конкретные притязания традиционной философии и на сознательную или бессознательную надежду, что, следуя ее указаниям, мы выйдем на прямой путь к систематической науке, избежав кружного пути через естественную историю. В частности, этот взгляд игнорирует притязания на то, что для *исправления ошибок* в наших обычных концепциях необходим традиционный анализ, и связанную с этим надежду, что соответствующие исправления приведут, так сказать автоматически, к экстраординарным концепциям, нужным для систематической науки. В случае доказательств утверждается, что наша идея *верного* рассуждения нуждается в исправлении (или, по крайней мере, в каком-то анализе). И упомянутая надежда неявно скрыта в так называемом логическом приоритете истинности, которая, являясь «сущностью» доказательства, считается основным элементом любой систематической теории доказательств. (Здесь, возможно, присутствует игра слов, так как, несомненно, рассмотрение истинности предшествовало теории доказательств по времени, т. е. буквально.) При всех этих условиях эта надежда основывается на допущении, что *анализ* истинности (подразумевается — в терминах, действительно имеющихся в настоящее время) будет вознагражден. Конечно, аналогом истинности в случае физики являются вопросы о реальности, которые в своей первоначально подразумевавшейся общности не имели слишком обширных следствий для прогресса физики. В настоящей статье мы не обращаем внимания на только что упомянутые претензии, но не отвергаем их и не пренебрегаем ими. Кроме всего прочего, мы развились в мире, в котором живем. Почему бы заложенным в нас так называемым априорным концепциям не быть хорошим путеводителем в науке, эффективным и надежным, а не ограничением, барьером между нами и Ding an sich (вещью в себе)?

Конечно, сосредоточиться лишь на ограничении можно, только страдая некоторой формой паранойи — с гордостью от своего бессилия или с ужасом по его поводу.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Мой коллега П. Супис помог мне путем тщательной критики первого наброска этой статьи.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1]) Необходимость такого комбинирования известна и из «мягкой» теории моделей (*p*-адические поля), и из теории рекурсии (конечно порожденные группы), и, разумеется, из § 2 выше. *Предостережение.* «Созерцательные» результаты из § 2 следует сравнивать с приложениями теории моделей в 50-е годы, которые состояли в легких (общих) доказательствах легких (общих) теорем, а не с более существенными приложениями в 60-е годы. В 50-е годы специалисты по теории моделей, знакомые с материалом § 2, находили его столь же обещающим, сколь и тогдашняя теория моделей (впечатление, которое до сих пор не оправдалось); ср. реферат статьи [15], написанный А. Робинсоном.

[2]) Для читателей, интересующихся конструктивной математикой, соответствующая переинтерпретация касается в гораздо большей степени конкретного (нового) вида операций, для которых верны теоремы, чем методов доказательства, используемых для установления тождеств, которым, как утверждается, удовлетворяют операции. Иногда имеются кандидаты на роль обратной процедуры. Например, сравним характеризацию функций F на свободно становящихся последовательностях f в терминах брауэровских «вполне проанализированных» доказательств утверждений $\forall f \exists n R(f, n)$ и тождество $\forall f R[f, Ff]$ для F. Как и в конце п. (а) выше, мы ожидаем, что имеется лишь узкий класс случаев, где полезна *возможность* «извлечения» F: в общем случае F должна быть столь простой, что стóит полностью выписать определение.

[3]) Это различие в [29] впервые точно указывает меру различия между этими двумя стилями, хотя давно было ясно, что оно имеет *какое-то* значение (как подсказывает генценовский термин «натуральный вывод»).

[4]) В противоположность, например, изложению, основанному на нормализации, где данные включают правила нормализации, так что «редукция» должна сохранять также и шаги нормализации.

[5]) Основной результат из [17] касается не разницы между двумя упомянутыми доказательствами, а относительной сложности функции F и (любого определения второго порядка для) ее совершенного ядра.

[6]) Сравнение полезно также для расширения обсуждения (в конце введения) эвристической роли традиционной философии. Кроме всего прочего, идея атомной структуры — это один из наиболее поразительных вкладов *умозрительной* философии, сравнимый, вероятно, с идеей относительности пространства и времени, которую выдвинула *критическая* философия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бейкер (Baker A.). On Mahler's classification of transcendental numbers. — Acta Math., v. **111**, 1964, p. 97—120.

[2] Бишоп (Bishop E.). Foundations of constructive analysis. — New York, 1967.
Реферат: Stolzenberg, Bull. Amer. Math. Soc., v. **76**, 1970, p. 301.

[3] Бурбаки (Bourbaki N.). Les grand courants de la pensee mathematique. — Paris, 1948, p. 35—47. [Русский перевод: Бурбаки Н.

Архитектура математики. — В кн.: Бурбаки Н. Очерки по истории математики, М.: ИЛ, 1963, с. 245—249.]
[4] Вейль (Weil A.). Sur la formule de Siegel dans la theorie des groupes classiques. — Acta Math., v. **113**, 967, p. 1—87.
[5] Витгенштейн Л. (Wittgenstein L.). Lectures on the foundations of mathematics. — Ithaca, N. Y., 1976.
[6] Генцен (Gentzen G.). The collected papers of Gerhard Gentzen. — Amsterdam: North-Holland, 1969.
[7] Гёдель (Gödel K.). Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. — Monatshefte Math. Physik, Bd. **38**, 1931, S. 173—198.
[8] — Russel's mathematical logic. — In: The philosophy of Bertrand Russel, Evanston, Chicago, 1944, p. 123—153.
[9] Давенпорт, Рот (Davenport H., Roth K. F.). Rational approximations to algebraic numbers. — Mathematika, v. **2**, 1955, p. 160—167.
[10] Зигель (Siegel C. L.). Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonischer Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtlosung. — Math. Ann., Bd. **128**, 1952, S. 144—170.
[11] Ингам (Ingham A. E.). The distribution of prime numbers. — Cambridge, 1932. [Русский перевод: Ингам А. Распределение простых чисел. — М. — Л.: ОНТИ, 1936.]
[12] Иенсен (Jensen R. B.). The fine structure of the constructible hierarchy. — Annals of mathem. Log., v. **4**, 1972, p. 229—308.
[13] Клини (Kleene S. C.). Countable functionals. — In: Constructivity in mathematics. Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 81—100.
[14] Крайзель (Kreisel G.). On the interpretation of nonfinitist proofs. Part II. — J. Symbol. Log., v. **17**, 1952, p. 43—58.
[15] — Mathematical significance of consistency proofs. — J. Symbol. Log., v. **23**, 1958, p. 155—182; реферат: Robinson A. J. Symbol. Log., v. **31**, 1966, p. 128.
[16] — Interpretation of classical analysis by means of constructive functionals of finite types. — In: Constructivity in mathematics, Amsterdam: North-Holland, 1959, p. 101—128.
[17] — Analysis of the Cantor — Bendixon theorem by means of the anylytic hierarchy. — Bull. Acad. Sci. Polon., v. **7**, 1959, p. 621—626.
[18] — Sums of squares. — Summaries of talks presented at the summer institute for symbolic logic, Princeton, 1960, p. 313—320.
[19] — Hilbert's programme and the search for automatic procedures. — In: Symposium on automatic demonstration, Berlin: Springer, 1970, p. 128—146.
[20] — Logic, methodology and Philosophy of science IV. — Amsterdam: North-Holland, 1973, p. 225—277.
[21] — Der unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik. — Acta philos. Fennica, v. **28**, 1976, p. 166—187.
[22] — Some facts from the theory of proofs and some fictions from the proof theory. — Proc. Fourth Scand. Logic Symp., Amsterdam: North-Holland (в печати).
(23] Крайзель, Кривин (Kreisel G., Krivine J. L.). Elements of mathematical logic. — Amsterdam: North-Holland, 1971.
[24] Леман (Lehman R. S.). On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. — Acta Arithmetica, v. **11**, 1966, p. 397—410.
[25] Литтлвуд (Littlewood J. E.). A mathematician's miscellany. London, 1953. [Русский перевод: Литтлвуд Дж. Е. Математическая смесь. — М.: Наука, 1965.]
[26] Морли (Morley M.). Categoricity in power. — Trans. Amer. Math. Soc., v. **114**, 1965, p. 514—538.

[27] Пфистер (Pfister A.). Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. — Inventions Math., v. **4**, 1967, p. 229—237.
[28] Робинсон (Robinson A.). On ordered fields and definite functions. — Math. Ann., Bd. **130**, 1956, S. 257—271.
[29] Стетмен (Statman R.). Structural complexity of proofs. — Dissertation, Stanford University, 1974.
[30] Супис (Suppes P.). Computers in education. IFIP. Part I. — Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 173—179.
[31] Феферман (Feferman S.). Autonomous transfinite progressions and the extent of predicative mathematics. — In: Logic, methodology and Philosophy of science III. — Amsterdam: North-Holland, 1968, p. 121—135.
[32] — Ordinals and functionals in proof theory. — Actes Congres Intern. Math. v. I, 1970, p. 229—233; реферат: J. Symbol. Log., v. **40**, 1971, p. 625.
[33] Фридман (Friedman H.). Systems of second order arithmetic with restricted induction. — J. Symbol. Log., v. **41**, 1976, p. 558.
[34] Хенкин (Henkin L.). Sums of squares. — Summaries of talks presented at the summer institute for symbolic logic, Princeton, 1960, p. 284—291.

СОДЕРЖАНИЕ