МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСНОВАНИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ МАТЕМАТИКИ

С. КЛИНИ, Р. ВЕСЛИ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1978

ОСНОВАНИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ МАТЕМАТИКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. КЛИНИ, Р. ВЕСЛИ

Перевод с английского
Ф. А. КАБАКОВА и Б. А. КУШНЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1978

517.1
К 49
УДК 512

THE FOUNDATIONS OF INTUITIONISTIC MATHEMATICS
especially in relation to recursive functions

S. C. KLEENE
R.E. VESLEY

North-Holland Publishing Company
Amsterdam 1965

К $\frac{20203-037}{053(02)-78}$ 64-78

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКОВ

В последние годы заметно повысился интерес к изучению конструктивности в математике. В исследовании этого круга вопросов можно выделить две основные тенденции. Одна из них, развитая Брауэром и его последователями, известна под названием «интуиционизм», другая тенденция, разделяемая многими математиками самой различной философской ориентации, связывает интуитивную эффективность с точными концепциями алгорифмов. Последняя тенденция весьма подробно освещена в советской монографической литературе. С другой стороны, хотя ряд интуиционистских результатов и в особенности интуиционистская критика классической математики стали широко известны, многие более глубокие идеи Брауэра, в частности его теория последовательностей выбора (свободно становящихся последовательностей в другой терминологии), в течение длительного времени оставались малопонятными для большинства математиков. Большая роль в весьма нелегком осмысливании и кристаллизации этих идей и в прояснении сходства и различий двух упомянутых только что конструктивных тенденций принадлежит выдающемуся американскому математику и логику С. К. Клини. В частности, Клини создал практически первую жизнеспособную формальную систему интуиционистского анализа [1]). Предлагаемая монография, написанная С. К. Клини в сотрудничестве с Р. Ю. Весли, суммирует многолетние исследования старшего из авторов (С. К. Клини), посвященные основаниям и интерпретациям интуиционистской математики. В книге строится и изучается формализм, который можно рассматривать как расширение

[1]) Наряду с формализацией Клини в литературе получили распространение формальные системы интуиционистского анализа Крайзела и Трулстра **1970**, а также Майхилла **1968**, **1970**, **1975** (см. примечание на стр. 11).

формальной интуиционистской арифметики, развитой в известной монографии Клини «Введение в метаматематику», и который позволяет изложить широкие разделы интуиционистского анализа, включая теорию последовательностей выбора и брауэровскую теорию континуума. Не заменяя живую интуиционистскую математику (и не претендуя на такую замену), формализация позволяет четко фиксировать сравнительно небольшое число исходных принципиальных концепций и тем самым дает возможность быстро войти в круг рассматриваемых вопросов математикам, не ориентирующимся в философии интуиционизма. Выбор тех или иных формальных аксиом, как правило, сопровождается в книге обсуждением приводящих к этим аксиомам содержательных соображений,— в частности, весьма обстоятельному обсуждению подвергнуты такие традиционно трудные аспекты интуиционисткой математики, как бар-теорема и принцип непрерывности Брауэра.

Другой стороной метода формализации является возможность получения метаматематических результатов об интуиционистских формальных системах, а также применения к ним теоретико-модельных (семантических) конструкций. Из четырех глав книги две специально посвящены рассмотрениям этого типа. Здесь, в частности, излагаются новые версии интерпретаций интуиционистских систем в терминах рекурсивной реализуемости, с помощью которых устанавливается ряд теорем о невыводимости (в том числе доказывается независимость принципа Маркова относительно формальной системы интуиционистского анализа).

Монография написана лаконично и точно с присущим С. К. Клини мастерством, знакомым советскому читателю по переводам его книг «Введение в метаматематику» и «Математическая логика». Она может служить хорошим введением в область математики, привлекающую в последние годы большое число исследователей.

Ф. А. Кабаков, Б. А. Кушнер

ПРЕДИСЛОВИЕ

В своем интуиционистском анализе Л. Э. Я. Брауэр создал теорию, которая расходится с классической математикой и которая в своих деталях не стала широко известной или понятой. Поэтому, как нам кажется, эта теория представляет собой вызов метаматематическим и теоретико-модельным методам. В главе I мы строим ее формализацию, отличную от выполненной в 1930 г. Гейтингом. Наша формализация включает в себя продолжение формального развертывания интуиционистской и классической элементарной теории чисел (арифметики), которое должно заинтересовать читателя монографии старшего автора «Введение в метаматематику», где такое развертывание формализованной математики в части II обрывается несколько неожиданно. Интерпретация, или теоретико-модельная трактовка, предпринята в главе II с использованием теории рекурсивных функций из части III «Введения в метаматематику». Эта глава содержит две новые интерпретации (с вариациями) посредством реализуемости (одна из них в другой форме была кратко объявлена старшим автором в 1957 г.). Написанная Весли третья глава формализует брауэровскую теорию континуума и, наконец, в главе IV как метаматематические, так и теоретико-модельные рассмотрения применяются к некоторым спорным вопросам рассматриваемой теории. У читателя не предполагается никаких предварительных знаний, за исключением знакомства с некоторым материалом, который можно найти в главах I — XII «Введения в метаматематику» или где-нибудь еще.

Исследования, представляемые теперь в окончательном виде в настоящей монографии, были начаты старшим автором в своей существенной части в 1950 г. при поддержке Мемориального Гуггенхеймовского общества. Заключительная часть исследований и подготовка к печати пришлись на период (начиная с 1 июля 1963 г.), в течение которого эти исследования поддерживались Национальным научным фондом США (договор GP 1621).

Старший автор с января по июнь 1950 года работал в Амстердамском университете; он весьма обязан Л. Э. Я. Брауэру, Аренду Гейтингу, Йоханну де Йонгу и покойным Давиду ван Данцигу и Эверту В. Бету за ориентацию его в интуиционистской математике и за многие плодотворные беседы тогда и позднее. Вместе с тем старший автор несет единоличную ответственность за направление, в котором его повели эти исследования, и за достигнутые им интерпретации.

Ричард Ю. Весли присоединился к проекту в качестве аспиранта (Ph. D. student). Вклад каждого из авторов совпадает с написанными им главами, однако каждый оказал влияние и на прочие главы (как это отмечено на стр. 125, 207, 245 и в других деталях). Одно доказательство Джоан Ренд Московакис помещено на стр. 98.

Мы признательны Дугласу А. Кларку, Джону Московакису, Джоан Ренд Московакис и Георгу Крайзелу за многие полезные советы, касающиеся рукописи. Джоан Ренд Московакис читала, кроме того, корректуры.

Мы оплакиваем последовавшую во время издания кончину Эверта В. Бета, оказавшего такую большую поддержку в этом предприятии.

Июнь 1964 г. *С. К. Клини*

ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ИНТУИЦИОНИСТСКОГО АНАЛИЗА

С. К. Клини

§ 1. Введение (в монографию). Конструктивная тенденция в математике была представлена до или независимо от интуиционизма в критике «классического» анализа Кронекером в 1880—1890 гг. и в работах Пуанкаре 1902, 1905—1906, Бореля **1898**, **1922** и Лузина **1927**, **1930** (ср. Гейтинг 1934 или **1955**) [1]).

Современный интуиционизм, основанный Брауэром, представляет собой яркое проявление конструктивной тенденции. В своих тезисах Брауэр **1907** говорит об интуитивном генезисе натурального ряда и настаивает на различии математики и языка, на котором она выражается. В своей знаменитой работе 1908 г. о недостоверности логических принципов он отбрасывает традиционное убеждение в апри-

[1]) Даты, набранные полужирным шрифтом (например, **1898**), отсылают к библиографии этой книги, тогда как даты, набранные светлым шрифтом (например, 1902), имеют в виду библиографию монографии Клини «Введение в метаматематику» **1952b**. Последнюю монографию мы будем упоминать в дальнейшем просто как «ВМ». Сверх того, мы будем использовать без пояснений обозначения из ВМ в тех случаях, когда подобные обозначения не употребляются в настоящей книге. (Ссылки на ВМ приводятся по русскому переводу.— *Прим. перев.*)

Некоторые опечатки в ранних выпусках ВМ отмечены ниже в библиографии. Кроме того: (а) на стр. 51 ВМ кажущийся круг в объяснении *не B* посредством *не A* устраняется следующим образом. Совпадение или различие двух натуральных чисел (или двух конечных последовательностей символов) является базисным понятием (см. ВМ, стр. 52). Для любого B, имеющего вид $m = n$, где m и n — натуральные числа, *не B* означает, что m и n различны. Объяснение *не A* на стр. 51 сопоставляет каждому A, не имеющему данного вида, некоторое B, имеющее этот вид. Другими словами, поскольку отличие 1 от 0 дается непосредственно интуицией (так что *не* $1 = 0$ выполняется), *не A* означает наличие метода, позволяющего по каждому доказательству A получить доказательство $1 = 0$ (см. ВМ, стр. 51). (b) На стр. 446—447 обозначения в 10 и 11 не предусматривают той возможности, что t содержит x, однако рассуждения в этом случае остаются теми же. (Аналогично на стр. 155 в добавлении Клини **1962a**.)

орной пригодности классической логики Аристотеля (ср. ВМ, § 13). Его работы, такие как **1912**, **1921**, содержат многочисленные примеры, предлагаемые как опровержения классических доводов и результатов. В **1918—1919** Брауэр начал построение интуиционистской математики, отличной от классической; соответствующие результаты собраны в его работах **1924—1927**, **1927**. В дальнейшем развитии интуиционистской математики к Брауэру присоединились Гейтинг **1925**, **1927**, **1927a**, **1929**, **1941**, **1953a**, де Лоор **1925**, Белинфанте **1929**, Фройденталь **1936**, ван Данциг **1942**, Дейкман **1948**, **1952**, ван Роотселар **1952**, **1960**, ван Дален **1963** и другие (см. библиографию в работах Гейтинга **1955** и **1956**). (Интуиционистская математика без отрицания представлена в работах Грисса **1944**, **1946—1951**, **1955**; см. также Гейтинг **1956**, 8.2.) Наряду с подходом к интуиционизму, развитым в оригинальных работах Брауэра (упоминавшихся выше, а также **1928a**, **1929**, **1948**, **1952**, **1954**), существуют также изложения Гейтинга (1934, переиздано **1955**, и **1956**) и Бета (**1955**, **1959**).

Между тем в 1930-х годах конструктивная тенденция проявилась в другой форме — в виде общей теории конструктивных процессов или алгоритмов для вычисления функций или разрешения предикатов (т. е. отношений и свойств). Эту теорию принято называть «теорией (обще)-рекурсивных функций» в связи с одним из математических определений класса теоретико-числовых функций [1]), предлагавшимся как эквивалент интуитивно понимаемого класса таких функций, допускающих эффективное вычисление посредством равномерных процедур. Определение *общерекурсивных функций* было дано в 1934 г. Гёделем, исходившим из идей Эрбрана (см. ВМ, § 55). Отождествление общерекурсивных функций с эффективно вычислимыми функциями, которое мы называем *тезисом Чёрча*, было впервые предложено Чёрчем в 1936 г. (ср. ВМ, стр. 267 и § 62, Клини **1958**, § 2). Независимо от признания или непризнания тезиса Чёрча доводы, приводимые в его пользу, обнаруживают важность теории рекурсивных функций. Одновременно было доказано, что класс *λ-определимых функций*, введенный и изучавшийся, начиная с 1932 г., Чёрчем и Клини, совпадает с классом общерекурсивных функций (Чёрч 1936, Клини 1936а; ср. Чёрч 1941). Тьюринг независимо предложил аналогичный тезис для класса *вычислимых функций*, введенного им в 1936—1937 гг. (этот же класс функций менее детально был независимо определен Постом 1936). В 1937 г. Тьюринг доказал, что введенный им класс функций совпадает с двумя упомянутыми только что классами. Впоследствии другие эквивалентные определения были предложены Постом 1943 и Марковым **1951c**. На этой базе была развита обширная теория, включающая в себя ряд различных направлений, например, проблемы разрешения, иерархии, степени неразрешимости, типы рекурсивной эквивалентности, рекурсивный анализ, конструктивные ординалы, рекурсивные функционалы. Среди относящихся сюда книг можно упомянуть Петер **1951**, Тарский — Мостовский — Р. М. Робинсон **1953**, Марков **1954**, Девис **1958**, Трахтенброт **1960**, Деккер — Майхилл **1960**, Успенский **1960**, Хермес **1961**, Клауа **1961**, Сакс **1963**, Роджерс **1964**. Мы насчитываем в настоящее время (15 октября 1963 г.) 150 исследователей, работающих в данной области [1]). Труды недавних конференций также указывают на размах ведущихся исследований (Россер **1957**, Гейтинг **1959**, Мостовский **1961**, Нагель — Саппес — Тарский **1962**, Деккер **1962**).

Теории общерекурсивных функций предшествовали работы Скулема 1923, Гильберта 1926, Аккермана 1928, Гёделя 1931, Петер 1934, посвященные специальным классам рекурсивных функций. Эти работы были продолжены рядом исследователей [2]).

Однако, хотя интуиционизм возник на 25 лет раньше теории общерекурсивных функций и, таким образом, сфор-

[1]) Так мы, в отличие от перевода ВМ, переводим словосочетание «number-theoretic function». Под *теоретико-числовой функцией* в данной книге подразумевается произвольная везде определенная (если в контексте не оговорено противное) функция одного или многих натуральных аргументов с натуральными значениями. Термин «*арифметическая функция*» («arithmetical function») используется ниже в более узком смысле (для указания выразимости соответствующей функции в формальной арифметике). Аналогичное замечание можно сделать в связи с употребляемыми ниже терминами «*теоретико-числовой предикат*» и «*арифметический предикат*». — *Прим. перев.*

Мы опускаем приводимый автором список имен, так как в настоящее время он должен быть значительно расширен. — *Прим. перев.*

[2]) Мы опускаем список из 35 имен, так как он в настоящее время также должен быть значительно расширен. — *Прим. перев.*

мировал климат в исследованиях оснований математики, в котором появилась эта теория, первоначальное развитие теории рекурсивных функций происходило совершенно независимо от интуиционизма. С другой стороны, в последующие 25 лет с момента появления теории общерекурсивных функций брауэровский интуиционизм продолжал следовать своим путем, не обращая сколько-нибудь пристального внимания на эту теорию. (Ср. Чёрч 1936, примечание 10, 1936a, стр. 102.)

Между тем представляется естественным рассмотрение связей между интуиционизмом и теорией общерекурсивных функций, представляющими собой (по крайней мере до последнего времени) два главных проявления конструктивной тенденции в современной математике. (Эта характеристика не сможет быть пригодной в дальнейшем в связи с быстрым современным разрастанием концепций конструктивности; ср. том «Конструктивность в математике», изд. Гейтингом **1959**.) Так, Клини в 1939—40 гг. предположил, что в интуиционистской формальной арифметике может быть доказано существование только общерекурсивных теоретико-числовых функций. Эта гипотеза подтвердилась и, сверх того, в работах Клини 1945 и Нельсона 1947 были получены и другие метаматематические результаты об интуиционистской формальной арифметике (см. изложение в ВМ, § 82; также см. Шанин **1958**, **1958a**, Клини **1960**). Клини (в 1941 г.) и Бет **1947** предложили интерпретировать «закон» в брауэровском определении «множества» или «потока» (Брауэр **1918—1919**, **1919**, **1924—1927**, **1954**) как общерекурсивную функцию. Планы всеобъемлющего использования рекурсивных функций для интерпретации интуиционистского анализа были тщательно разработаны в работе Клини 1950a, явившейся программой для настоящей монографии; прогресс был достигнут в докладе Клини **1957**. (Идеи интуиционистского анализа применялись в теории рекурсивных функций Клини **1955a**, стр. 417, 420, а также **1955b**, стр. 203.)

В программе Клини 1950a высказывалась мысль, что использование рекурсивных функций могло бы помочь брауэровскому анализу стать более приемлемым. Тем временем появление новых изложений интуиционизма, в особенности книги Гейтинга **1956**, уменьшило необходимость такой помощи. Эти изложения позволяют вполне ясно проследить развертывание интуиционистской математики, и мы, за исключением крайних случаев, не будем их дублировать здесь. В этой монографии, помимо прочего, мы хотели бы прояснить различия между интуиционистской и классической математикой. Эти различия отчасти состоят в интуиционистском отказе от классических результатов, а отчасти в утверждении результатов, противоречащих классическим.

§ 2. Статус формальной системы. Мы начинаем с формулировки формальной системы, в которой по нашему замыслу могла бы быть развернута существующая интуиционистская математика, за исключением теории видов высших порядков (Брауэр **1918—1919**, **1924—1927**). Это исследование продолжено сочинением Весли «Интуиционистский континуум», составляющим главу III этой книги.

Формализация может показаться на первый взгляд неприемлемой. Согласно одной из установок Брауэра математика должна состоять в интуитивных конструкциях и интуитивных рассуждениях на основе смысла предложений о таких конструкциях, а не в формальной дедукции из формально установленных аксиом. Это, однако, не требует обязательного отказа от использования формальных процессов дедукции в целях экономии труда, требуемого на установление смысла на каждом шаге, в тех случаях, когда в терминах смысла установлена справедливость аксиом и правил вывода, так что мы знаем, что можем вернуться к смыслу в любой момент. Например, из истории элементарной алгебры известно, что такого рода формальные манипуляции сильно увеличили скорость выполнения математических заключений. Возражения Брауэра, несомненно, относятся только к тем формальным рассуждениям, которые не могут быть выполнены в терминах смысла (ср. ВМ, § 15 или Гейтинг **1953**, стр. 59—60).

Исходя из философских предпосылок, Брауэр занимал позицию, согласно которой разнообразие математических конструкций не может быть ограничено рамками какой-либо фиксированной формальной системы, задолго до того, как эта позиция получила подтверждение в знаменитом доказательстве Гёделя 1931 того, что всякий формализм, адекватный некоторой части теории чисел, неполон. Таким образом, с самого начала должно быть понятно, что наша формальная система интуиционистской математики неполна даже для той части интуиционистской математики без теории видов высшего порядка, которая выразима в ее символизме. Произвольное интуиционистски корректное расширение этой системы может быть получено гёделевским процессом (который интуиционистски пригоден), т. е. добавлением формально неразрешимой, но истинной формулы (ср. ВМ, §§ 42, 60). В самом деле, мы часто думаем о нашей системе как о расширимой при выполнении некоторых общих условий.

Формальное описание части интуиционистской математики имеет свои преимущества, даже если эта часть есть только фрагмент. В самом деле, именно это сделал интуиционист Гейтинг в работах 1930, 1930a в ответ на вызов Манури. Правила образования и постулаты помогают непосвященному выделить для себя относительно небольшое число понятий, которыми он должен овладеть, а также предложений и методов вывода, с которыми он должен согласиться, чтобы для него не осталось в принципе ничего проблематичного в структуре интуиционистской математики, развиваемой внутри системы. Далее становятся возможными метаматематические исследования, равно как и исследования, которые можно назвать *теоретико-модельными* или *семантическими* (ср. ВМ, стр. 61—62, 159—160, 441—442) и которые используют не обязательно элементарные или финитные интерпретации.

Формализация интуиционистской логики, предложенная Гейтингом 1930, 1930a, §§ 5, 6, привела к разнообразным метаматематическим и семантическим исследованиям, интересным в ряде аспектов (причем не только интуиционистских): Гливенко 1929, Колмогоров **1932**, Гёдель 1932, 1932—1933, **1933**, Генцен 1934—1935, Жегалкин **1936**, Яськовский 1936, Стоун **1937—1938**, Тарский **1938**, Вайсберг 1938, Маккинси 1939, Гаррет Биркгоф **1940**, Клини 1945 вместе с Нельсон 1947, Гейтинг 1946, Маккинси — Тарский **1946**, 1948, де Йонг 1948, Ониси **1953**, Мостовский 1948, Ригер **1949**, Генкин 1950a, Карри 1950, Клини 1948, 1952, **1952a**, ВМ (**1952b**), Риддер **1950—1951**, Шютте **1962**, Курода **1951**, Лукасевич **1952**, Маэхара **1954**, Умезава **1955**, **1959**, **1959a**, Нисимура **1960**, Шрётер **1956**, **1957**, Порт **1958**, Шмидт **1958**, Скулем **1958**, Леблан — Белнап **1962**, Макколл **1962**, Весли **1963**, Расёва **1951**, **1954**, **1954a**, Расёва — Сикорский **1953**, **1954**, **1955**, **1959**, Сикорский **1959**, Пильчак **1950**, **1952**, Дж. Ф. Роуз **1953**, Гал — Россер — Скотт **1958**, Медведев **1962**, Кабаков **1963**, Харроп **1956**, **1960**, Бет **1956**, **1959a**, Дайсон — Крайзел **1961**, Скотт **1957**, Крайзел — Патнам **1957**, Крайзел **1958a**, **1958b**, **1959a**, **1959c**, **1961**, **1962**, **1962a**, Клини **1962a**. (Гливенко **1928** частично предвосхитил Гейтинга 1930. Колмогоров **1924—1925** впервые получил для соответствующей системы результаты, подобные результатам Гёделя 1932—1933, ВМ, стр. 437.)

Генцен 1934—1935 выполнил формализацию интуиционистской логики, отличающуюся от классической логики в точности одной схемой аксиом — именно для «устранения отрицания»; ср. ВМ, стр. 94 и замечание 1, стр. 111. (Гливенко 1929 уже тогда заметил, что добавление закона исключенного третьего к интуиционистскому исчислению высказываний превращает его в классическое исчисление.) Это облегчает сравнение двух систем. Формальная система интуиционистской арифметики и теории чисел, которая получается добавлением к интуиционистской логике (в формализации Гейтинга или Генцена) аксиом Пеано и рекурсивных уравнений для подходящих арифметических функций, исследовалась метаматематически или семантически в работах: Гёдель 1932—1933, Клини 1945 вместе с Нельсон 1947 (как указывалось выше в § 1), Нельсон 1949, Клини 1948, ВМ, Шанин **1953**, **1954**, **1955**, **1958**, **1958a**, Клини **1960**, Крайзел **1958**, **1959**, **1959a**, **1959b**, **1959d**, **1962**, **1962d**, **1962e**, **1962f**, Харроп **1956**, **1960**, Гёдель **1958**, Клини **1962a**, Т. Т. Робинсон **1963**. Оказалось, что формальная система интуиционистской арифметики и теории чисел не выделяется легко как подсистема из полной системы Гейтинга 1930a (вместе с 1930) интуиционистской математики.

Со времени, когда началось данное исследование, и вплоть до продвинутого доклада Клини **1957**, не было, насколько нам известно, опубликовано других метаматематических или семантических исследований системы Гейтинга 1930, 1930a интуиционистской математики, включающей теорию множеств, или какой-либо другой формальной системы для аналогичной части интуиционистской математики. Крайзел **1959a**, **1959c**, **1962**, **1962a** ссылается на наш доклад **1957**. В своей работе **1958b** он описывает другую формальную систему этого рода и исследует некоторые вопросы из рассматриваемых в настоящей монографии. После неудовлетворительной попытки использования рекурсивных функций для интерпретации системы Гейтинга 1930a Клини пришел к ощущению, что эта система плохо приспособлена для метаматематических исследований. Она использует, в частности, эксцентричные первоначальные понятия, именно символы «σ» и «τ», где «$\sigma p\tau q$» читается «из вида q выбран элемент p», «$p\tau q$» читается «p выбрано из q». Во всяком случае такой формализм мешает сравнению интуиционистского и классического анализа. Поэтому Клини 1950a предложил нововведение: использовать для брауэровских «последовательностей выбора» просто переменные по теоретико-числовым функциям. Таким образом, часть интуиционистской математики вплоть до теории множеств, за исключением видов высших порядков, которую мы называем *интуиционистским анализом*, становится выразимой в том же языке, что и соответствующий фрагмент классического анализа. Различия между интуиционистским и классическим анализом теперь формально проявляются скорее в разной трактовке функциональных переменных в дедуктивных постулатах, нежели в правилах образования. Крайзел **1958b** также использует одноместные функциональные переменные, подчиненные некоторому ограничению (цитированному на стр. 372 нашей работы **1957**). Спектор **1962** принимает в расчет настоящий формализм (приводимый на стр. 19), детали которого стали доступны ему в ноябре 1959 г. и в январе 1961 г.; Крайзел **1962d**, **1962e**, **1962f** цитирует Спектора **1962**.

Наши постулаты открываются теми из них, которые общи (или выполняются) как для интуиционистской, так и для классической систем — именно, постулатами групп A — C § 4, группы D § 5 (к которым в дальнейшем могут быть сделаны добавления) и схемой аксиом ^{x}26.3 в § 6. Все это образует то, что мы называем *базисной системой*. Расхождения между интуиционистской и классической системами сводятся к следующему. Для *классической системы* — усиление интуиционистской схемы устранения отрицания 8^I ВМ, стр. 94 (включенной в постулаты группы A), до соответствующей классической схемы $8°$ ВМ, стр. 77. Для *интуиционистской системы* — присоединение единственного неклассического постулата ^{x}27.1 § 7. Разумеется, к классической системе могут быть сделаны дальнейшие добавления, включая новые правила образования (ср. Гильберт — Бернайс 1939, добавление IV); это, однако, составляет поле дальнейших исследований, тогда как мы хотим исходить из нашего первоначального предмета — оснований интуиционистской математики.

§ 3. Правила образования. 3.1. Мы предполагаем в дальнейшем, что читатель знаком с понятием формальной системы. Все детали могут быть приведены; однако там, где это возможно, мы будем ограничивать подробности и ссылаться на ВМ. Мы отсылаем теперь читателя к ВМ, § 15 и сл.

3.2. Формальными символами системы являются логические символы $\supset$ («влечет» или «если..., то...»), & («и»), $\vee$ («или»), $\neg$ («не»), $\forall$ («для всех») и $\exists$ («существует»), числовые переменные a, b, c, . . ., x, y, z, . . ., функциональные переменные α, β, γ, . . ., предикатный символ $=$ («равно»), некоторые функциональные символы f_0, . . ., f_p, где f_0 есть 0 («нуль») и f_1 есть $'$(«следующее за» или «плюс единица»), λ (λ-обозначение Чёрча), запятые и скобки.

Числовые переменные суть переменные над натуральными числами 0, 1, 2, . . . Функциональные переменные суть переменные над одноместными теоретико-числовыми функциями, т. е. везде определенными одноместными функциями из натуральных чисел в натуральные числа. Мы предполагаем наличие потенциально счетно бесконечного списка переменных каждого сорта.

В ВМ мы использовали строчные буквы специального рукописного шрифта «*b*», «*a*»,«*c*», . . . с целью отличить их от букв шрифта антиква (прямого) «a», «b», «c», . . ., используемых как имена числовых переменных. Здесь мы упрощаем обозначения, оставляя только последний шрифт, поскольку (после исходного разговора о формальных системах в ВМ) почти нет необходимости в самих продемонстрированных выше экземплярах числовых переменных [1]). Аналогично мы можем подразумевать, что прямые строчные греческие буквы «α», «β», «γ», . . . являются именами функциональных переменных [2]).

[1]) Мы удерживаем буквы рукописного шрифта (прописные и строчные) в написании отдельных формул чистого исчисления высказываний и предикатов.

[2]) Курсивные греческие буквы α, β, γ, . . . будут здесь использоваться как имена функций; в ВМ так использовались прямые греческие буквы, в других работах, например, Клини **1955**, **1955a**, **1955b**,— курсивные греческие буквы.

При употреблении букв как имен переменных необходима ясность в том, когда данные различные буквы называют обязательно различные переменные и когда они могут быть именами одной и той же переменной. Та же самая проблема возникала в ВМ, хотя там она в некоторых случаях устранялась употреблением экземпляров самих переменных. Проблема усложняется использованием в ВМ и здесь метаматематических выражений, именующих формулы и т. д., могущие содержать не указанные или не именованные внутри этих метаматематических выражений переменные. Необходимо соблюдать точность в этих вопросах как в отправных точках, так и в более формальных утверждениях. В прочих случаях простейшее общее правило таково: переменные, совпадение которых не вытекает из обозначений (т. е. не именованные одинаково или не стоящие на одинаковых местах в одинаково именованных формулах и т. д. в пределах связного контекста), должны быть различными всякий раз, когда это небезразлично при обсуждении того, одинаковы они или нет. Переходы, в которых мы явно оговариваем соответствующие условия, служат достаточной иллюстрацией применения этого общего правила.

Функциональные символы f_i для $i > 1$ будут специфицированы позже. Они отчасти вводятся из соображений удобства. Трактующие их правила образования, а также некоторые другие детали системы мы формулируем вначале в общих терминах с тем, чтобы оставить открытой дорогу для прочих приложений, помимо самой рассматриваемой ниже системы. При интерпретации каждый функциональный символ f_i $(i = 0, \ldots, p)$ должен выражать «примитивно рекурсивную» функцию $f_i(a_1, \ldots, a_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i})$ от определенного числа k_i натуральных чисел и определенного числа l_i одноместных теоретико-числовых функций (k_i, $l_i \geqslant 0$; в частности, $k_0 = l_0 = l_1 = 0$, $k_1 = 1$). Мы могли бы допускать здесь «общерекурсивные» функции таких переменных, однако у нас не встретится случая, в котором была бы необходимость ввести что-нибудь не «примитивно рекурсивное». В связи с понятием «примитивно (обще-)[частично] рекурсивной» функции мы отсылаем читателя к части III ВМ, точнее к § 43 (§ 55) [§ 63]. Однако мы следуем Клини 1950a, § 2, и **1955**, § 1, допуская наравне с числовыми одноместные функциональные переменные; таким образом, высказывание «$f_i(a_1, \ldots, a_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i})$, где $l_i > 0$,

примитивно (обще-)[частично] рекурсивна» означает, что $f_i(a_1, \ldots, a_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i})$ как функция $a_1, \ldots, a_{k_i}$ *примитивно*(*обще*-)[*частично*] *рекурсивна* равномерно относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i}$ (ВМ, § 47 (§ 55) [§ 63]). В случае, когда нам необходимо определить какой-нибудь функциональный символ, мы из соображений удобства будем вводить такой специальный символ, не всегда предусмотренный заранее. Таким образом, f_i могут рассматриваться как имена для символов, вводимых позже, или при $i = 0, 1$ уже введенных.

3.3. Мы определяем 'терм' и 'функтор' индуктивно следующим образом. Термы должны быть формальными выражениями, играющими роль существительных, выражающих натуральные числа, тогда как функторы играют аналогичную роль для одноместных теоретико-числовых функций. 1. Числовые переменные $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ суть *термы*. 2. Функциональные переменные $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ суть *функторы*. 3a. 0 есть *терм*. 3. Для каждого i $(i = 0, \ldots, p)$, если $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}$ — *термы* и $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i}$ — *функторы*, то $\mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i})$ есть *терм*. (Часть 3a есть частный случай 3 для $i = 0$.) 4a.′ есть *функтор*. 4. Для каждого i $(i = 0, \ldots, p)$ такого, что $k_i = 1$ и $l_i = 0$, f_i есть *функтор*. (Часть 4a—частный случай 4 для $i=1$.) 5. Если u — *функтор*, а t — *терм*, то $(\mathrm{u})(\mathrm{t})$ — *терм*. (В случае, когда u является функтором f_i по 4, часть 5 дублирует часть 3 и $(\mathrm{u})(\mathrm{t})$ будет записываться в любой форме, возможно принятой для $\mathrm{f}_i(\mathrm{t})$, например, как $(\mathrm{t})'$ при $i = 1$.) 6. Если x — числовая переменная, а s — *терм*, то $\lambda \mathrm{x}(\mathrm{s})$ — *функтор*. 7. Формальное выражение является *термом* или *функтором*, только если это вытекает из 1—6.

Далее мы определяем индуктивно 'формулу'. Формулы являются формальными выражениями, играющими роль предложений, т. е. выражающими суждения (могущие, однако, иметь «свободные» переменные). 8. Если s и t — термы, то $(\mathrm{s})=(\mathrm{t})$ — *формула*. 9. Если A и B — *формулы*, то $(\mathrm{A}) \supset (\mathrm{B})$, $(\mathrm{A}) \& (\mathrm{B})$ и $(\mathrm{A}) \vee (\mathrm{B})$ — также *формулы*; если A — формула, то $\neg(\mathrm{A})$ — также *формула*. 10. Если x — числовая переменная, A — *формула*, то $\forall \mathrm{x}(\mathrm{A})$ и $\exists \mathrm{x}(\mathrm{A})$ — также *формулы*. 11. Если α — функциональная переменная, A — *формула*, то $\forall \alpha(\mathrm{A})$ и $\exists \alpha(\mathrm{A})$ — *формулы*. 12.

Формальное выражение является *формулой* только в том случае, когда это следует из 8—11.

В записи термов, функторов и формул в тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям, могут при помощи известных соглашений (ВМ, § 17) опускаться скобки; они могут также заменяться фигурными и квадратными скобками. (Скобки всегда можно опускать при употреблении 6 и 8.) Мы принимаем сокращения «$\neq$», «1», «2», «3», ... (ВМ, стр. 71), «$\sim$» (ВМ, стр. 104) [1]. Вместо употребления единственного формального (элементарного) предикатного символа = мы будем допускать и другие такие символы; каждый такой символ P_j выражает примитивно рекурсивный предикат $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_j})$. Мы могли бы достичь того же эффекта, считая, что всякий раз, когда мы вводим символ для такого предиката, $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_j})$ является сокращением для $s_j = 0$, где s_j — терм (содержащий самое большее переменные $a_1, \ldots, a_{m_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_j}$), выражающий представляющую функцию $p_j(a_1, \ldots, a_{m_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_j})$ предиката P_j (ВМ, стр. 204). Для P_j (так же, как и для f_i) мы будем вводить такие специальные символы, не обязательно предусмотренные заранее, там, где это будет удобно.

3.4. *Свободные* и *связанные* вхождения переменных в термы, функторы и формулы различаются обычным образом (ВМ, § 18). Операторами, связывающими переменные, теперь являются *λ-префикс* λx и *кванторы* $\forall x$, $\exists x$, $\forall \alpha$, $\exists \alpha$, где x и α — соответственно произвольная числовая и функциональная переменные. Так же, как в ВМ, наши определения 'терма', 'функтора' и 'формулы' не исключают применения такого оператора с областью действия, содержащей связанные вхождения той же самой переменной; в таком случае в результирующем выражении только бывшие вначале свободными вхождения упомянутой переменной считаются связанными этим оператором.

Результат *подстановки* терма вместо (свободных вхождений) числовой переменной или функтора вместо (свободных вхождений) функциональной переменной или нескольких одновременных таких подстановок вместо нескольких

[1]) A $\sim$ B, где A и B — формулы, есть сокращение формулы (A $\supset$ B) & (B $\supset$ A).— *Прим. перев.*

переменных, а также «свободы» на местах подстановки, или, короче, при подстановке, определяются так же, как и раньше (ВМ, § 18). Мы используем также прежние обозначения. Так, если мы собираемся произвести подстановку вместо x в терм, функтор или формулу (или просто желаем достичь большей выразительности), то мы можем ввести для этих выражений составное обозначение «E (x)», после чего обозначать через «E (t)» результат подстановки t вместо (свободных вхождений) x в E (x).

Употребление этого соглашения не будет приводить к конфликтам между «r (x)» как составным обозначением терма и «r (t)» как выражением результата подстановки в r (x), с одной стороны, и «r (x)» и «r (t)», получающимися опусканием первой пары скобок в записи термов (r) (x) и (r) (t), вводимых по 5 раздела 3.3, с другой стороны. В первом случае «r» не имеет собственного статуса вне составного обозначения «r (x)» и «r (t)», тогда как во втором случае «r» само должно быть уже определенным функтором (оно должно быть одним из «α», «β», «γ», ..., или одним из f_i, или буквой, явно введенной или указанной контекстом как обозначение функтора). Аналогично не будет возникать конфликтов между составными обозначениями в случае нескольких аргументных мест и термами, образованными по 3 (f_i идентифицируются позднее). «$P_j(t_1, \ldots, t_{m_j}, u_1, \ldots, u_{n_j})$» (см. конец 3.3) будет обозначать результат свободной подстановки в $s_j = 0$ после любой необходимой замены связанных переменных в s_j (ср. ВМ, конец § 33).

Терм, функтор или формула считаются *замкнутыми*, если они не содержат свободных переменных, в противном случае они называются *открытыми* (согласно Тарскому, замкнутая формула есть *суждение*). Формула называется *элементарной*, если она не содержит логических символов.

Лемма 3.1. *Если* $a_1, \ldots, a_k$ — *числовые переменные,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — *функциональные переменные,* $t_1, \ldots, t_k$ — *термы,* $u_1, \ldots, u_l$ — *функторы и* $E(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — *терм (функтор) [формула], то* $E(t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l)$ — *терм (функтор) [формула].*

Доказательство — индукцией в соответствии с индуктивным определением 'терма', 'функтора' и 'формулы'.

3.5. Терм u (t), введенный по части 5 определения 'терма' и 'функтора', выражает значение функции, выражаемой u, для числа, выражаемого t, взятого в качестве аргумента. Функтор λxs, введенный согласно части 6 того же определения, выражает одноместную теоретико-числовую функцию, значение которой для данного аргумента выражается символом s, когда x выражает этот аргумент, или, короче, этот функтор выражает s как функцию x (Чёрч 1932, BM, стр. 37).

Лемма 3.2. *Если функции* ψ $(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta)$ *и* χ $(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x)$ *примитивно (обще-) [частично] рекурсивны, то такова же и функция* ψ $(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \lambda x\, \chi\, (a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x))$ (Клини **1955**, 1.3 [**1956**, стр. 279]).

Доказательство. По лемме 1 BM (стр. 212) вместе с очевидной транзитивностью отношения 'примитивно рекурсивный в' (лемма VI, стр. 307, с теоремой II, стр. 245 BM) [лемма VI с теоремой XVII (a), стр. 293].

Лемма 3.3. *Пусть* s *есть терм* (u — *функтор*) [P — *элементарная формула*], *не содержащий свободно переменных, отличных от числовых переменных* $a_1, \ldots, a_k$ *и функциональных переменных* $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. *Тогда при подразумеваемой интерпретации* s (u (x), *где* x — *новая числовая переменная*) [P] *выражает общее значение* (*BM, стр.* 37) *некоторой примитивно рекурсивной функции от* $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ (*функции от* $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, x$] [*предиката от* $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$].

Доказательство индукцией соответственно индуктивным определениям 'терма', 'функтора' и 'формулы' с использованием леммы 3.2 для части 3. (Функтор u, не имеющий формы λxs, эквивалентен при интерпретации функтору λxu (x) этой формы.)

Замечание 3.4. Вместо элементарной формулы P в лемме 3.3 мы могли бы допустить любую бескванторную формулу, либо формулу, содержащую лишь ограниченные числовые кванторы (ср. BM, $\#$D, $\#$E, стр. 205).

§ 4. Постулаты исчисления предикатов, арифметики и касающиеся функций (постулаты групп A — C). 4.1. При задании правил преобразования или постулатов (BM, § 19) базисной или интуиционистской формальной системы мы начинаем с постулатов интуиционистского исчисления предикатов; при этом, однако, вместо переменных одного сорта используются переменные принятых нами двух сортов.

Группа A. Постулаты интуиционистского исчисления предикатов с двумя сортами переменных.

Группа A1. Постулаты интуиционистского исчисления высказываний.

В этих постулатах A, B, C — произвольные формулы и в качестве постулатов берутся 1a, 1b, 2, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, 7, 8^{I}, как в BM, стр. 77 [1]), за исключением

8^{I}. $\neg A \supset (A \supset B)$ (как в BM, стр. 94).

Группа A2. (Дополнительные) постулаты для исчисления предикатов с двумя сортами переменных.

Первые четыре постулата 9N, 10N, 11N, 12N в точности совпадают с 9, 10, 11, 12 BM, стр. 77, с тем дополнительным (по сравнению со стр. 77 BM) ограничением, что теперь x — числовая переменная [2]). В следующих четырех постулатах α — произвольная функциональная переменная, A (α) — произвольная формула, C — любая формула, не содержащая свободно α, и u — произвольный функтор, свободный для α в A (α).

9F. $\dfrac{C \supset A(\alpha)}{C \supset \forall \alpha A(\alpha)}$. 10F. $\forall \alpha A(\alpha) \supset A(u)$.

11F. $A(u) \supset \exists \alpha A(\alpha)$. 12F. $\dfrac{A(\alpha) \supset C}{\exists \alpha A(\alpha) \supset C}$.

Классическая формальная система получается из базисной системы принятием

8°. $\neg\neg A \supset A$ (как в BM, стр. 77)

в качестве дополнительного постулата (или, поскольку 8^{I} становится выводимым (BM, стр. 94), как альтернативы к 8^{I}).

[1]) Приведем эти постулаты: 1a. $A \supset (B \supset A)$. 1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$. 2. $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$. 3. $A \supset (B \supset A \& B)$. 4a. $A \& B \supset A$. 4b. $A \& B \supset B$. 5a. $A \supset A \vee B$. 5b. $B \supset A \vee B$. 6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$. 7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$. — *Прим. перев.*

[2]) Приведем соответствующие постулаты: 9N. $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$. 10N. $\forall x A(x) \supset A(t)$. 11N. $A(t) \supset \exists x A(x)$. 12N. $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists (x) A(x) \supset C}$ — *Прим. перев.*

4.2. Далее мы принимаем дополнительные постулаты для обычной системы интуиционистской арифметики. Мы уточняем, что следующие два символа f_2, f_3 из наших функциональных символов суть $+$, $\cdot$ (причем $k_2 = k_3 = 2$, $l_2 = l_3 = 0$).

Группа В. (Дополнительные) постулаты интуиционистской арифметики.

Постулаты 13—21 те же, что и в ВМ, стр. 77, где теперь x — некоторая числовая переменная, a a, b, c — конкретные числовые переменные [1]).

4.3. Поскольку ниже в группе D в § 5 будут постулированы рекурсивные уравнения для экспоненциальной функции (a^b или $a \exp b$), мы уже сейчас будем считать, что f_4 выражает эту функцию ($k_4 = 2$, $l_4 = 0$), и будем использовать ее в схеме аксиом $^{\times}2.1$ группы С. (Наши постулаты, следующие за группой В, не будут отвечать соответствующим постулатам ВМ. Поэтому мы принимаем другую систему нумерации с целью различать ссылки на ВМ и настоящую монографию.)

Группа С. Постулаты, касающиеся функций.

В схеме аксиом $^{\times}0.1$ x — произвольная числовая переменная, r (x) — произвольный терм и t — любой терм, свободный для x в r (x). В аксиоме $^{\times}1.1$ a и b — различные конкретные переменные, α — конкретная функциональная переменная. В схеме аксиом $^{\times}2.1$ x и y — произвольные различные числовые переменные, α — произвольная функциональная переменная и A (x, α) — любая формула, в которой x свободна для α.

$^{\times}$ 0.1. $\{\lambda x\, \mathrm{r}(x)\}(t) = \mathrm{r}(t)$.

$^{\times}$ 1.1. $a = b \supset \alpha(a) = \alpha(b)$.

$^{\times}$ 2.1. $\forall x \exists \alpha A(x, \alpha) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \lambda y \alpha(2^x \cdot 3^y))$.

4.4. Интуиционистская и классическая системы исчисления предикатов рассматривались в ВМ большей частью совместно; при этом результаты, устанавливаемые только для классической системы, помечались отметкой «°» (ср. ВМ, стр. 94). Этот материал здесь может быть использован для доказательства формул, не содержащих либо числовых, либо функциональных переменных. В случае, когда имеются оба сорта переменных, мы по-прежнему можем использовать развернутые в ВМ методы, при этом, однако, следует заботиться о том, чтобы не вступить в противоречие с определением формулы; ограничения появляются в постулатах 10N, 11N, где t должно быть термом, и в постулатах 10F, 11F, где u должно быть функтором. Например, *79, стр. 148 ВМ, теперь дает $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$, $\vdash \forall \alpha \forall \beta A(\alpha, \beta) \supset \forall \alpha A(\alpha, \alpha)$, однако не $\vdash \forall x \forall \beta A(x, \beta) \supset \forall x A(x, x)$ или $\vdash \forall \alpha \forall y A(\alpha, y) \supset \forall \alpha A(\alpha, \alpha)$. Следствия постулатов группы В, взятых вместе с исчислением предикатов с числовыми переменными, аналогично развернуты в ВМ (гл. III и др.). Мы предполагаем, что читатель достаточно знаком не только с результатами ВМ, но и с методами, лежащими в их основе, чтобы суметь без детальных объяснений приспособить эти методы для представленной формальной системы в тех случаях, когда это приспособление просто. Мы должны быть также внимательны к предосторожностям в обращении с переменными (ВМ, начало § 32, стр. 134).

[1]) Приводим соответствующие постулаты: 13. $A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$. 14. $a' = b' \supset a = b$. 15. $\neg a' = 0$. 16. $a = b \supset (a = c \supset b = c)$. 17. $a = b \supset a' = b'$. 18. $a + 0 = a$. 19. $a + b' = (a + b)'$. 20. $a \cdot 0 = 0$. 21. $a \cdot b' = a \cdot b + a$. — *Прим. перев.*

Замечание 4.1. Поскольку каждая элементарная формула рассматриваемой системы есть равенство $s = t$ между термами, подстановкой в ВМ, *158 (стр. 173) немедленно получаем, что для каждой элементарной формулы P имеет место $\vdash P \vee \neg P$. Используя также ВМ, *150, *151 (стр. 172) и замечание 1(b) (стр. 123), аналогично получаем $\vdash E \vee \neg E$ для любой формулы E, построенной из элементарных формул (или из формул P, для которых $\vdash P \vee \neg P$) с использованием только пропозициональных связок ($\supset$, &, $\vee$, $\neg$) и ограниченных числовых кванторов. Согласно ВМ, замечание 1 (a) (стр. 123) и теорема 9 (стр. 118), всякая доказуемая формула классического исчисления высказываний (например, эквивалентности *56—*61, стр. 110) доказуема в интуиционистской системе, если $\vdash P \vee \neg P$ имеет место для каждой из ее различных элементарных (для исчисления высказываний) компонент (ВМ, стр. 103).

4.5. Наши правила образования предусматривают $=$ как первоначальный символ только между термами. Ниже в случае, когда u и v — функторы, «u = v» будет употребляться как сокращение для $\forall x (u(x) = v(x))$, где x — любая переменная, не входящая свободно в u или v.

В дальнейшем x — любая числовая переменная, $r(x)$ и $s(x)$ — любые термы, b — любая числовая переменная, свободная для x в $r(x)$ и не входящая свободно в $r(x)$ (за исключением случая, когда b есть x) и α — функциональная переменная [1].

$$*0.2.\quad r(x) = s(x) \vdash^{x} \lambda x r(x) = \lambda x s(x).$$

$$*0.3.\quad \vdash \lambda x r(x) = \lambda b r(b).$$

$$*0.4.\quad \vdash \lambda x \alpha(x) = \alpha.$$

Д о к а з а т е л ь с т в а. *0.2. Применяя дважды схему аксиом $^{x}0.1$ и *101, *102, стр. 166 ВМ (ср. конец § 26, стр. 108—109 ВМ) и $\forall$-введ. (ВМ, § 23), получаем $r(x) = s(x) \vdash \{\lambda x r(x)\}(x) = r(x) = s(x) = \{\lambda x s(x)\}(x) \vdash^{x} \forall x [\{\lambda x r(x)\}(x) = \{\lambda x s(x)\}(x)]$, т. е. $\lambda x r(x) = \lambda x s(x)$.

*0.3. Аналогично $\vdash \{\lambda x r(x)\}(x) = r(x) = \{\lambda b r(b)\}(x)$ (ср. ВМ, пример 9, стр. 76), откуда по $\forall$-введ. $\vdash \lambda x r(x) = \lambda b r(b)$.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения равенства функторов немедленно получаются при помощи исчисления предикатов из соответствующих свойств равенства термов (ВМ, *100—*102, стр. 166). Свойство замены для равенства (ВМ, теорема 24 и следствие, стр. 167—168) требует дополнительных предосторожностей ввиду наличия λ-оператора.

Л е м м а 4.2 (т е о р е м а о з а м е н е). *Пусть* E_R *есть терм или функтор [формула], содержащий выделенное вхождение терма {функтора}* R, *не являющееся вхождением переменной в λ-префикс [λ-префикс или квантор]. Пусть далее* E_S — *результат замены этого вхождения на терм {функтор}* S *и* $x_1, \ldots, x_n$ $[x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ — *свободные переменные* R *или* S, *принадлежащие какому-нибудь λ-префиксу [λ-префиксу или квантору], в области действия которого лежит выделенное вхождение* R. *Тогда* $R = S \vdash^{x_1 \ldots x_n} E_R = E_S$ $[R = S \vdash^{x_1 \ldots x_n \alpha_1 \ldots \alpha_m} E_R \sim E_S]$ *в предположении доказуемости аксиом равенства (ВМ, стр. 358) для каждого функционального символа* f_i, *встречающегося в* E_R *и имеющего выделенное вхождение* R *внутри своей области действия.* (Эта оговорка необходима ввиду способа, которым мы выбираем аксиомы группы D (см. лемму 5.1).)

1) Переменная x, приписанная к символу $\vdash$ в качестве верхнего индекса, указывает на варьирование этой переменной в соответствующем выводе, т. е. на применение по этой переменной какого-нибудь из правил 9 или 12.— *Прим. перев.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай, когда E_R — формула, так же, как и раньше, будет установлен, если мы докажем часть леммы, относящуюся к терму и функтору. Мы сделаем это возвратной индукцией по *глубине* (выделенного вхождения) R в E_R (считая при этом как E_R, так и выделенное вхождение переменными; ср. ВМ, стр. 84). *Глубина* определяется следующим образом. Она считается равной 0, если E_R совпадает с R (случай 1), и равной $r + 1$, если E_R имеет следующий вид: $u_R(t)$, где R имеет *глубину* r в u_R (случай 2), $f_i(t_1, \ldots, t_{k_i}, u_1, \ldots, u_{l_i})$, где R лежит в одном из $t_1, \ldots, t_{k_i}, u_1, \ldots, u_{l_i}$ и имеет там *глубину* r (случай 3), $\alpha(t_R)$, где R имеет *глубину* r в t_R (случай 4), $\{\lambda x s(x)\}(t_R)$, где r — максимум глубин R в t_R и всех свободных вхождений x в $s(x)$ (случай 5), $\lambda x s_R$, где R имеет *глубину* r в s_R (случай 6). Случай 1 очевиден. В случае 2 по индукционному предположению $u_R = u_S$, что в несокращенной записи означает $\forall x (u_R(x) = u_S(x))$, где x не входит свободно в u_R или u_S. Тогда по $\forall$-удал. $u_R(t) = u_S(t)$, т. е. $E_R = E_S$. Аксиомы равенства для $f_0, \ldots, f_p$ (см. оговорку в формулировке леммы) вместе с индукционным предположением (и подстановкой, см. ВМ, *66, стр. 134, и $\supset$-удал.) обеспечивают случай 3; аксиома $^{x}1.1$ аналогично используется в случае 4, а *0.2 в случае 6. Рассмотрим случай 5. Пусть $s(x)$ содержит *n* свободных вхождений x и пусть a, b — различные числовые переменные, не входящие в $s(x)$. Применяя последовательно *n* раз индуктивное предположение, получим $a = b \vdash s(a) = s(b)$, откуда, дважды применяя схему аксиом $^{x}0.1$, получим $a = b \vdash \{\lambda x s(x)\}(a) = \{\lambda x s(x)\}(b)$. Отсюда при помощи $\supset$-введ., подстановки и $\supset$-удал. получаем $t_R = t_S \vdash \{\lambda x s(x)\}(t_R) = \{\lambda x s(x)\}(t_S)$. Кроме того, по индуктивному предположению $R = S \vdash^{x_1 \ldots x_n} t_R = t_S$.

Определение конгруэнтности (ВМ, стр. 139) очевидным образом распространяется на рассматриваемую систему, в которой переменные помимо кванторов связываются λ-префиксом. На основании леммы 4.2 мы (после того как будет установлена лемма 5.1) получаем свойство замены как равным, так и эквивалентным (а также свойства симметрии, рефлексивности и транзитивности). Далее, наряду с *0.3 выполняются *73, *74 (BM, стр. 140), конгруэнтные термы или функторы равны и конгруэнтные формулы эквивалентны. (Этим мы приспособили к нашей ситуации лемму 15b BM, стр. 140.)

Пусть x — произвольная числовая переменная, **A (x)** — произвольная формула и α — любая функциональная переменная, свободная для x в A (x) и не входящая свободно в A (x). Имеет место

*0.5. $\vdash \forall x A(x) \sim \forall \alpha A(\alpha(0))$.

*0.6. $\vdash \exists x A(x) \sim \exists \alpha A(\alpha(0))$.

Доказательство. *0.5. Предположим (подготавливая $\exists$-введ.) (a) $\forall \alpha A(\alpha(0))$. Тогда по $\forall$-удал. A ((λyx) (0)) (где y — какая-нибудь переменная, отличная от x). Согласно ˣ0.1 и лемме 4.2 получаем A (x) и далее по $\forall$-введ. $\forall$xA (x). (Поскольку $\forall\alpha$A (α (0)) не содержит свободных вхождений x, x не варьировалась.) По $\supset$-введ. (снимая допущение (a)) получаем $\forall \alpha A(\alpha(0)) \supset \forall x A(x)$. Далее по правилам исчисления предикатов $\forall x A(x) \supset \forall \alpha A(\alpha(0))$. По &-введ. (BM, *16, стр. 105) получаем $\forall x A(x) \sim \forall \alpha A(\alpha(0))$.

4.6. С точки зрения всех наших основных целей мы могли бы постулировать вместо ˣ2.1 нижеследующее его следствие *2.2 (ср. 7.15 ниже).

Если x и y — различные числовые переменные, A (x, y) — любая формула, в которой x свободна для y и α — любая функциональная переменная, свободная для y в A (x, y) и не входящая свободно в A (x, y), то

*2.2. $\vdash \forall x \exists y A(x, y) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x))$.

Доказательство. Предположим (подготавливая $\supset$-введ.) $\forall x \exists y A(x, y)$. Тогда по *0.6 и замене $\forall x \exists \alpha A(x, \alpha(0))$, откуда по ˣ2.1 $\exists \alpha \forall x A(x, (\lambda y \alpha(2^x \cdot 3^y))(0))$. Предположим (подготавливая $\exists$-удал.) $\forall x A(x, (\lambda y \alpha(2^x \cdot 3^y))(0))$. По ˣ0.1 и замене $\forall x A(x, \{\lambda x (\lambda y \alpha(2^x \cdot 3^y))(0)\}(x))$, откуда по $\exists$-введ. $\exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x))$ (что не содержит свободно α). Завершая $\exists$-удал. и $\supset$-введ., получаем $\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x))$.

Поскольку просто по правилам исчисления предикатов имеют место обращения ˣ2.1 и *2.2, они могут быть

усилены до

*2.1a. $\vdash \forall x \exists \alpha A(x, \alpha) \sim \exists \alpha \forall x A(x, \lambda y \alpha(2^x \cdot 3^y))$.

*2.2a. $\vdash \forall x \exists y A(x, y) \sim \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x))$.

4.7. Пусть E — терм, функтор или формула, F — одноименное выражение. Мы говорим, что E *конвертируемо* в F, и пишем «E conv F», если E может быть преобразовано в F посредством нуля или большего числа замещений вида: (I) части λxr (x) на λbr (b) при условиях *0.3; (II) части {λxr (x)} (t) на r (t) при условиях ˣ0.1; (III) обратные к (I) — (II) замещения. Отношение ‘E conv F’ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поскольку (после того, как будет доказана лемма 5.1) мы располагаем теоремой о замене и т. д., если E conv F, то $\vdash$E = F, если E, F — термы или функторы ($\vdash$E $\sim$ F, если E, F — формулы).

Терм, функтор или формула называется (*ламбда*) *нормальным*, если он не содержит части вида {λxs} (t), где x — переменная, s — терм и t — терм (не обязательно свободный для x в s). Если E conv F и F нормально, то F называется *нормальной формой* E.

Лемма 4.3. *Каждый терм, функтор или формула имеют нормальную форму.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это в случае терма или функтора E. Мы воспользуемся (возвратной) индукцией по *рангу* E, определяемому следующий образом. Если E состоит из единственного символа, то *ранг* E равен нулю. Далее *ранг* E полагается равным: 1) максимуму *рангов* $t_1, \ldots, t_{k_i}, u_1, \ldots, u_{l_i}$, если E имеет вид $f_i(t_1, \ldots, t_{k_i}, u_1, \ldots, u_{l_i})$, 2) рангу t, если E есть u (t), причем u не имеет вида λxs. Если E есть {λxs} (t) или λxs, то ранг E соответственно равен 1 + + max (*s*, *t*) и *s*, где *s*, *t* — ранги соответственно s и t. E нормально в точности тогда, когда ранг E равен 0. Если E не является нормальным, то его ранг $r > 0$ есть максимум рангов его частей вида {λxs} (t) и E содержит $n > 0$ таких наиболее «глубоких» частей, не содержащих внутри s и t других подобных частей. В ходе индукции по *r* мы будем использовать индукцию по *n*. Выделим часть $\{\lambda x_1 s_1\}(t_1)$ ранга *r*. По инд. предп. о r s_1 имеет нормальную форму q_1. Выберем терм $r_1(x_1)$, конгруэнтный q_1, в котором t_1 свободен для x_1, и заменим часть $\{\lambda x_1 s_1\}(t_1)$ выражения E последовательно на $\{\lambda x_1 q_1\}(t_1)$, $\{\lambda x_1 r_1(x_1)\}(t_1)$ и $r_1(t_1)$. Пусть E_1 — получившееся выражение. Поскольку $r_1(x_1)$ нормально, части $\{\lambda xs\}(t)$ в $r_1(t_1)$ возникают в точности из-за вхождений t_1, появляющихся в результате замены свободных вхождений x_1 на t_1 в $r_1(x_1)$ (никакая часть $u(t)$ терма $r_1(x_1)$, где u — односимвольный функтор, не превращается в часть вида $\{\lambda xs\}(t)$ при подстановке t_1 вместо x_1, поскольку x_1 — числовая переменная). Таким образом, ранг $r_1(t_1)$ меньше r. Помимо части $\{\lambda x_1 s_1\}(t_1)$, замененной на $r_1(t_1)$, ничего не меняется (никакая часть $u(t)$, где u — односимвольный функтор, полного выражения не переходит в $\{\lambda xs\}(t)$ при этой замене). Таким образом, число n частей $\{\lambda xs\}(t)$ максимального ранга уменьшается на 1, если только n не было 1. В последнем случае максимальный ранг r таких частей уменьшится. Следовательно, по инд. предп. о n или о r, E_1, а вместе с тем и E, имеет нормальную форму.

Замечание 4.4. В общей теории λ-конверсии (Чёрч 1932, Клини 1934, изложение у Чёрча 1941, Карри — Фейс **1958**), где не проводится родовое различие между термами и функторами, некоторые выражения могут не иметь нормальной формы; таково, например, выражение $\{\lambda xx(x)\}(\lambda xx(x))$.

Замечание 4.5. По теореме Чёрча — Россера (**1936**, теорема 1, следствие 2, стр. 479) для их третьего типа конверсии (стр. 482) любые две нормальные формы данного выражения конгруэнтны.

Замечание 4.6. Какое-нибудь применение (II) после нуля или нескольких предварительных применений (I) назовем *редукцией*. Доказательство леммы 4.3 показывает, что некоторая последовательность редукций, начинающаяся с E, приводит к нормальному выражению. Согласно теореме 1 (b) Клини **1962** (являющейся адаптацией теоремы 2, стр. 479 работы Чёрча — Россера **1936**) существует число m такое, что любая последовательность редукций, начинающаяся с E, приводит к нормальному выражению самое большее за m редукций.

§ 5. Постулаты для некоторых примитивно рекурсивных функций и их следствия (постулаты группы D). 5.1. В этом разделе мы объясним бо́льшую часть из нашего списка $f_0, \ldots, f_p$ символов, выражающих примитивно рекурсивные функции, и введем как аксиомы рекурсивные уравнения или уравнения, явно определяющие выражаемые функции. (Символы f_0 — f_4 уже были объяснены в 3.2, 4.2, 4.3, и рекурсивные уравнения для f_2, f_3 уже были введены в постулатах группы B.) Вводимые таким образом аксиомы образуют группу D, которую мы, однако, считаем открытой. Как список $f_0, \ldots, f_p$, так и постулаты группы D, включенные в этот параграф, могут быть ниже расширены по мере того, как это будет удобно.

Свойства и приложения подходящих примитивно рекурсивных функций, сверх списка $0, ', +, \cdot$, составляют существенную часть содержания в развитии интуиционистской математики в рамках формальной системы. Проще всего добавить соответствующие символы как первоначальные и соответствующие рекурсивные уравнения как аксиомы. Это вполне допустимо с интуиционистской (и с классической) точки зрения. Мы могли бы избежать этих добавлений и в действительности развивать ту же теорию в исходной системе (приспосабливая § 74 BM, точнее, стр. 368), однако это лучше отложить до более позднего времени.

Мы начинаем с некоторых общих замечаний, не зависящих от конкретных добавляемых списков символов и аксиом. Рекурсивные уравнения не обязательно должны иметь стандартную форму (Va) или (Vb) BM (стр. 197); к ним могут примешиваться также шаги явных определений (как в BM, стр. 199). Теперь, когда мы имеем функциональные переменные, шаги явных определений могут включать подстановку функций, образованных с использованием λ-оператора (ср. лемму 3.2).

Конкретнее, аксиомы для функциональных символов f_i для $i \geqslant 4$ могут иметь (и для $i = 2, 3$ уже имели) одну из следующих двух форм, которые мы проиллюстрируем для случая трех переменных y, a, α:

$$\text{(a)} \quad f_i(y, a, \alpha) = p(y, a, \alpha),$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} f_i(0, a, \alpha) = q(a, \alpha), \\ f_i(y', a, \alpha) = r(y, f_i(y, a, \alpha), a, \alpha), \end{cases}$$

где $p(y, a, \alpha)$, $q(a, \alpha)$ и $r(y, z, a, \alpha)$ — термы, содержащие только различные переменные, указанные в их обозначениях, и только функциональные символы из списка $f_0, \ldots, f_{i-1}$. Кроме того, y, a, α свободны для z в $r(y, z, a, \alpha)$.

5.2. Лемма 5.1. *Аксиомы равенства ВМ, стр.* 358 [1]), *доказуемы для каждого из функциональных символов* $f_0, \ldots, f_p$, *вводимых последовательно вместе с соответствующими аксиомами, как описано выше* (*постулаты группы* В *и* 5.1).

Доказательство (неформальной) индукцией по i. Для $i=0$ аксиомы равенства отсутствуют, а для $i=1$ имеется одна такая аксиома, постулированная как аксиома 17 группы В. При $i>1$ предположим, что аксиомы равенства для $f_0, \ldots, f_{i-1}$ доказуемы. Тогда эти аксиомы для q (a, α), т. е.

$$a = b \supset q(a, \alpha) = q(b, \alpha), \quad \alpha = \beta \supset q(a, \alpha) = q(a, \beta)$$

(где b, β свободны соответственно для a, α), а также для r (y, z, a, α) и p (y, a, α) доказуемы на основании леммы 4.2 и $\supset$-введ., поскольку по инд. предп. о i доказуемы аксиомы равенства для встречающихся в них функциональных символов. Аксиомы равенства для f_i, вводимого согласно (a), следуют непосредственно. В случае, когда f_i вводятся по схеме (b), они устанавливаются с помощью метода, использованного для a + b (наше f_2) в ВМ, *104, *105 (стр. 166). Именно, заключения формул

$$a = b \supset f_i(y, a, \alpha) = f_i(y, b, \alpha),$$
$$\alpha = \beta \supset f_i(y, a, \alpha) = f_i(y, a, \beta),$$

выражающие заместимость на месте каждого параметра, выводятся из антецедента (формальной) индукцией по переменной рекурсии y. Чтобы доказать заместимость на месте переменной рекурсии, обозначим через A (y, x) доказываемую формулу

$$y = x \supset f_i(y, a, \alpha) = f_i(x, a, \alpha).$$

Мы докажем $\forall x$A (y, x) индукцией по y. Базис: необходимо доказать $\forall x$A (0, x). Мы доказываем A (0, x) разбором случаев индукции по x (ВМ, стр. 169) и затем получаем $\forall x$A (0, x) по $\forall$-введ. Инд. шаг: предположив $\forall x$A (y, x), вывести $\forall x$A (y', x). Мы приходим к A (y, x) по $\forall$-удал. из инд. предп. Отсюда мы выводим A (y', x) разбором случаев индукции по x и, наконец, по $\forall$-введ. получаем $\forall x$A (y', x).

[1]) Имеются в виду аксиомы вида

$$a = b \supset f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

где $i = 1, \ldots, n$.— *Прим. перев.*

5.3. Теперь мы обобщим утверждения *175 — *177 ВМ, стр. 181 (ср. стр. 176, 179—180), и распространим соответствующую теорию на случай функциональных переменных. Так же, как в ВМ, стр. 265, но с функциональными переменными $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ в качестве функциональных букв $g_1, \ldots, g_l$ и с равномерностью, мы говорим, что формула A ($a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$, w), содержащая свободно только указанные (различные) переменные, *нумерически представляет* функцию $s(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, если для каждых $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$

(v) если $s(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) = w$,

то $E^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \vdash A(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \mathbf{w})$,

(vi) $E^{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} \vdash \exists! \, w A(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, w)$,

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ остаются фиксированными в каждом выводе.

Лемма 5.2. *Рассмотрим произвольный терм* s ($a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$) (*коротко* s), *содержащий свободно только указанные* (*различные*) *переменные, и пусть* $s(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — *выражаемая этим термом* (*лемма* 3.3) *функция. Тогда формула* s ($a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$) = w (*где* w — *новая числовая переменная*) *нумерически представляет* $s(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$.

Доказательство. I. (vi) непосредственно следует из *171 ВМ (стр. 180).

II. *Если* (v) *выполняется для каждого функционального символа* f_i *в* s (т. е. если для каждых $a_1, \ldots, a_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i}$ всякий раз, когда $f_i(a_1, \ldots, a_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i}) = w$, имеет место $E^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l_i}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l_i}} \vdash f_i(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k_i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i}) = \mathbf{w}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l_i}$ фиксированы), *то* (v) *выполняется и для самого* s. По лемме 4.3 мы можем, не теряя общности, считать s нормальным. Мы используем теперь индукцию по числу (вхождений) функциональных символов и функциональных переменных в s. Если s есть просто символ, то (v) тривиально. Далее перейдем к случаю, когда

s имеет вид $\mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i})$. Пусть $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — фиксированные значения $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ и пусть для этих значений $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i}$, s выражают $t_1, \ldots, t_{k_i}, \beta_1, \ldots, \beta_{l_i}, w$. По инд. предп.

$$(1) \quad \mathrm{E}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \vdash \mathrm{t}_j^* = \boldsymbol{t}_j \qquad (j = 1, \ldots, k_i)$$

с фиксированными $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, где * указывает на подстановку $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ вместо $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$. По предположению о выполнимости (v) для f_i из s имеет место

$$\mathrm{E}^{\beta_1 \ldots \beta_{l_i}}_{\beta_1 \ldots \beta_{l_i}} \vdash \mathrm{f}_i(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{k_i}, \beta_1, \ldots, \beta_{l_i}) = \boldsymbol{w}$$

с фиксированными $\beta_1, \ldots, \beta_{l_i}$, откуда по &-удал. и $\supset$-введ.

$$(2) \quad \vdash \mathrm{F}(\beta_1, \ldots, \beta_{l_i}) \supset \mathrm{f}_i(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{k_i}, \beta_1, \ldots, \beta_{l_i}) = \boldsymbol{w},$$

где $\mathrm{F}(\beta_1, \ldots, \beta_{l_i})$ — конъюнкция конечного числа уравнений из $\mathrm{E}^{\beta_1 \ldots \beta_{l_i}}_{\beta_1 \ldots \beta_{l_i}}$, использованных при такой заданной дедукции. Однако $\mathrm{F}(\beta_1, \ldots, \beta_{l_i})$ есть конъюнкция уравнений вида $\beta_m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$, где $\beta_m(a) = b$ $(1 \leqslant m \leqslant l_i)$. Если u_m есть $\lambda \mathrm{a} \mathrm{v}_m(\mathrm{a})$, то, по инд. предп. и $^{\times}0.1$, $\mathrm{E}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \vdash \mathrm{v}^*_m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \vdash (\mathrm{u}^*_m)(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ при фиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Если u_m есть односимвольный функтор, то аналогично по инд. предп.

$$\mathrm{E}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \vdash (\mathrm{u}^*_m)(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \quad (\mathrm{u}^*_m \text{ есть просто } \mathrm{u}_m).$$

Таким образом,

$$(3) \qquad \mathrm{E}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \vdash \mathrm{F}(\mathrm{u}^*_1, \ldots, \mathrm{u}^*_{l_i})$$

с фиксированными $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Подстановка в (2) дает

$$(4) \quad \vdash \mathrm{F}(\mathrm{u}^*_1, \ldots, \mathrm{u}^*_{l_i}) \supset \mathrm{f}_i(\boldsymbol{t}_1 \ldots, \boldsymbol{t}_{k_i}, \mathrm{u}^*_1, \ldots, \mathrm{u}^*_{l_i}) = \boldsymbol{w},$$

откуда заменой с использованием (1) получаем

$$(5) \quad \mathrm{E}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \vdash \mathrm{F}(\mathrm{u}^*_1, \ldots, \mathrm{u}^*_l) \supset \mathrm{f}_i(\mathrm{t}^*_1, \ldots, \mathrm{t}^*_{k_i}, \mathrm{u}^*_1, \ldots, \mathrm{u}^*_{l_i}) = \boldsymbol{w}$$

с фиксированными $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Теперь (v) следует из (3) и (5) по $\supset$-удал. Оставшийся случай, когда s есть $\alpha(\mathrm{t})$, где α — одно из $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, рассматривается аналогично, но проще.

III. (v) *выполняется для каждой из функций* $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_p$, *равно как и для* s. Далее действуем индукцией по i, используя II и подстановку в аксиомы (a) или (b) из 5.1, вводящие f_i, в случае (b) — индукция по y.

5.4. Аналогично (с использованием ВМ, стр. 265, с функциональными переменными и равномерностью) на рассматриваемую ситуацию распространяется понятие нумерической выразимости предиката формулой (ВМ, стр. 176).

Мы предпочли (конец 3.3) использовать символы сокращений для примитивно рекурсивных предикатов, отличных от $=$. На основании леммы 5.2 и акс. 15 ВМ (стр. 77) каждый предикат $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_j})$, для которого мы вводим сокращающий символ P, нумерически выразим посредством $\mathrm{P}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{m_j}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_j})$.

5.5. В литературе имеется большое число формальных трактовок арифметических функций, сверх 0, $'$, $+$, $\cdot$, в частности, Скулем 1923, Гильберт — Бернайс 1934 и Нельсон 1947. Мы дадим другую трактовку с тем, чтобы, во-первых, данная монография образовывала вместе с ВМ (приблизительно) замкнутое в себе целое; во-вторых, чтобы иметь возможность утверждать, что все доказательства могут быть проведены в интуиционистской системе (как у Нельсона 1947); и, в-третьих, чтобы сохранить тесную гармонию между формальными и некоторыми неформальными обозначениями.

Неформальные обозначения будут теми же, которые использовались нами в теории рекурсивных функций. В частности, мы будем следовать Гёделю 1931 в сопоставлении отдельных натуральных чисел конечным последовательностям натуральных чисел, используя единственность разложения положительных целых чисел («основная теорема арифметики»). Такое сопоставление возможно — и с точки зрения машинных вычислений (что не является объектом наших рассмотрений) предпочтительнее — производить на основе n-адических представлений чисел (Шмульян **1959**); при этом отпадает необходимость в столь быстро растущих функциях, как экспонента. При использовании этой альтернативы мы, вероятно, смогли бы сэкономить на доказательствах «первой теоремы Евклида» и основной теоремы арифметики, однако взамен потребовалось бы рассмотрение некоторых других вещей. Вместе с тем труд по доказательству этих теорем не очень велик, и он приводит нас к положению, в котором мы можем формально употреблять обозначения, используемые в неформальной литературе, с которой тесно связаны настоящие рассмотрения. Это также имеет свои преимущества. (Наш выбор был предварен в схеме аксиом ^{x}2.1; соответствующее *2.1a формализует Клини **1955**, (5).)

Согласно сказанному мы теперь вводим формальные обозначения функций (и символов сокращений для предикатов) те же, что и в ВМ, за исключением формальных переменных, принимая (как в ВМ, §§ 44—45) #3 — #21, #A — #F, а также Seq как #22 (Клини **1955a**, стр. 416), $\bar{\alpha}(x)$ как #23 (Клини 1950a, стр. 680), $\tilde{\alpha}(x)$ как #24 (ВМ, § 46) [1]. Мы знаем, что мы можем иметь функциональные символы и предикатные символы-сокращения, выражающие и нумерически представляющие или выражающие все эти функции и предикаты. То новое, что мы теперь добавляем,— это проверка того, что вместе с рекурсивными уравнениями, выбранными (обычным образом), как в ВМ, но теперь формализованными, формулы, выражающие различные полезные свойства этих функций и предикатов, доказуемы.

Мы уже имеем #1, #2 (сложение и умножение) в аксиомах 18—21 и соответствующие свойства в ВМ, § 39. По меньшей мере до рассмотрения #15 мы используем «$a < b$», «$a \leqslant b$» и т. д., как в ВМ, стр. 169. Мы сокращаем $a < c$ & $b < c$ как «$a, b < c$» и т. д. Заметим, что

*137a. $\vdash a \leqslant b \sim \exists c\,(c + a = b)$.

*145c. $\vdash a \leqslant b \supset ac \leqslant bc$.

Для #3 (экспонента) мы уже ввели символ (как f_4) и теперь зададим соответствующие рекурсивные уравнения как аксиомы ^{x}3.1, ^{x}3.2 (где a, b — различные конкретные числовые переменные) и приведем дальнейшие свойства как доказуемые формулы *3.3—*3.13. Далее для #4 (факториальная функция) мы вводим символ a! как f_5 ($k_5 = 1$,

[1] Эти обозначения будут разъяснены ниже.— *Прим. перев*

$l_5 = 0$) и рекурсивные уравнения как аксиомы ^{x}4.1, ^{x}4.2, и свойство в *4.3; аналогично посредством #13 [a/b] вводится как f_{14}. В #14 не вводится новых символов, а в #15, #16 вводятся предикатные символы-сокращения.

^{x}3.1. $a^0 = 1$. ^{x}3.2. $a^{b'} = a^b a$.

*3.3. $\vdash a^b a^c = a^{b+c}$. *3.4. $\vdash (a^b)^c = a^{bc}$.

*3.5. $\vdash (ab)^c = a^c b^c$.

*3.6. $\vdash a^1 = a$. *3.7. $\vdash b > 0 \sim 0^b = 0$.

*3.8. $\vdash 1^b = 1$.

*3.9. $\vdash a > 0 \supset a^b > 0$. *3.10. $\vdash a > 1 \supset a^b > b$.

*3.11. $\vdash a, b > 1 \supset a^b > a$.

*3.12. $\vdash a > 1 \supset (b < c \sim a^b < a^c)$.

*3.13. $\vdash a, c > 0 \supset (a < b \sim a^c < b^c)$.

Доказательства *3.3—*3.5. Индукция по c (необходимые свойства замены выполняются в силу леммы 4.2 п. 5.1).

*3.7. I. Доказываем $0^{c'} = 0$ (ср. доказательство *143b ВМ, стр. 171). II. На основании ^{x}3.1.

*3.9. Индукция по b (с использованием *143a).

*3.10. Индукция по b (с использованием *143b, *138b).

*3.11. Мы доказываем $a > 1 \supset a^{c''} > a$, используя *3.10 (вместе с *145a), *143a.

*3.12. Предположим, что $a > 1$. I. Допускаем $d' + b = c$ (для применения $\exists$-удал. к $b < c$) и используем *3.3, *143b (*3.9, *3.10). II. Обратное получается, как в доказательстве *145a.

*3.13. I. Доказываем $a > 0$ & $a < b \supset a^{c'} < b^{c'}$ индукцией по c, используя дважды *145a (и *3.9).

^{x}4.1. $0! = 1$. ^{x}4.2. $a'! = a!a'$. *4.3. $\vdash a! > 0$.

^{x}5.1. $\mathrm{pd}\,(0) = 0$. ^{x}5.2. $\mathrm{pd}\,(a') = a$.

*5.3. $\vdash \mathrm{pd}\,(a) \leqslant a$.

^{x}6.1. $a \dot{-} 0 = a$. ^{x}6.2. $a \dot{-} b' = \mathrm{pd}\,(a \dot{-} b)$.

*6.3. $\vdash (a + b) \dot{-} b = a$. *6.3a. $\vdash a \dot{-} a = 0$.

*6.4. $\vdash 0 \dot{-} a = 0$. *6.5. $\vdash a \dot{-} (b + c) = (a \dot{-} b) \dot{-} c$.

*6.6. $\vdash b \geqslant c \supset (a + b) \dot{-} c = a + (b \dot{-} c)$.

*6.7. $\vdash a \geqslant b \sim (a \dot{-} b) + b = a$.
*6.8. $\vdash (a + c) \dot{-} (b + c) = a \dot{-} b$.
*6.9. $\vdash b \geqslant c \sim a \dot{-} (b \dot{-} c) = (a + c) \dot{-} b$.
*6.10. $\vdash a \geqslant b \sim a \dot{-} (a \dot{-} b) = b$.
*6.11. $\vdash a \leqslant b \sim a \dot{-} b = 0$.
*6.12. $\vdash a > b \sim a \dot{-} b > 0$.
*6.13. $\vdash c > 0 \supset (a \dot{-} b \geqslant c \sim a \geqslant b + c)$.
*6.13a. $\vdash a \dot{-} b > c \sim a > b + c$.
*6.13b. $\vdash c > 0 \supset (a \dot{-} b = c \sim a = b + c)$.
*6.14. $\vdash c\,(a \dot{-} b) = ca \dot{-} cb$. *6.15 $\vdash a \dot{-} b \leqslant a$.
*6.16. $\vdash a, b > 0 \sim a \dot{-} b < a$.
*6.17. $\vdash a \geqslant b \supset a \dot{-} c \geqslant b \dot{-} c$.
*6.18. $\vdash a \leqslant b \supset c \dot{-} a \geqslant c \dot{-} b$.
*6.19. $\vdash a > b, c \sim a \dot{-} c > b \dot{-} c$.
*6.20. $\vdash a < b, c \sim c \dot{-} a > c \dot{-} b$.
*6.21. $\vdash a \dot{-} c \leqslant (a \dot{-} b) + (b \dot{-} c)$.

Доказательства. *6.3. Мы доказываем $\forall a\, ((a + b) \dot{-} b = a)$ индукцией по b. Инд. шаг. Предположим $\forall a\, ((a + b) \dot{-} b = a)$. Следовательно, $(a' + b) \dot{-} b = a'$. Теперь $(a + b') \dot{-} b' = \mathrm{pd}\, ((a + b') \dot{-} b) = \mathrm{pd}\, ((a' + b) \dot{-} b)$ [акс. 19, *118] $= \mathrm{pd}\, (a') = a$, следовательно, $\forall a\, ((a + b') \dot{-} b' = a)$.

*6.5. Индукция по c.

*6.6. $b \geqslant c$ дает $\exists d\, (d + c = b)$. Допустим, что $d + c = b$. Тогда $(a + b) \dot{-} c = (a + d + c) \dot{-} c = a + d$ [*6.3] $= a + ((d + c) \dot{-} c)$ [*6.3] $= a + (b \dot{-} c)$.

*6.7. I. Ввиду *6.6, *6.3. II. Согласно *137a (выше).

*6.9. I. $a \dot{-} (b \dot{-} c) = (a + c) \dot{-} ((b \dot{-} c) + c)$ [*6.8] $= (a + c) \dot{-} b$ [*6.7]. II. $b < c$ дает $a \dot{-} (b \dot{-} c) < (a + c) \dot{-} b$ (полагаем $d' + b = c$ и используем *6.5 и т. д.).

*6.11, *6.12. Сначала доказываем $a \leqslant b \supset a \dot{-} b = 0$, $a > b \supset a \dot{-} b > 0$. Обратные утверждения следуют из *139, *140.

*6.14. Согласно *139, $a > b \vee a \leqslant b$. Случай 1: $a > b$. Используем *6.3. Случай 2: $a \leqslant b$. Используем *145c (выше), *6.11.

*6.17. Разбираем случаи ($b \leqslant c$, $b > c$).

ˣ7.1. $\min (a, b) = b \dot{-} (b \dot{-} a)$.

*7.2. $\vdash a \leqslant b \sim \min (a, b) = a = \min (b, a)$.
*7.3. $\vdash \min (a, b) = \min (b, a)$.
*7.4. $\vdash \min (a, b) \leqslant a, b$.
*7.5. $\vdash a, b \geqslant c \sim \min (a, b) \geqslant c$.
*7.6. $\vdash a, b > c \sim \min (a, b) > c$.
*7.7. $\vdash \min (c + a, c + b) = c + \min (a, b)$.
ˣ8.1. $\max (a, b) = (a \dot{-} b) + b$.
*8.2. $\vdash a \geqslant b \sim \max (a, b) = a = \max (b, a)$.
*8.3. $\vdash \max (a, b) = \max (b, a)$.
*8.4. $\vdash \max (a, b) \geqslant a, b$.
*8.5. $\vdash a, b \leqslant c \sim \max (a, b) \leqslant c$.
*8.6. $\vdash a, b < c \sim \max (a, b) < c$.
*8.7. $\vdash \max (c + a, c + b) = c + \max (a, b)$.
*8.8. $\vdash \min (a, b) \leqslant \max (a, b)$.
*8.9. $\vdash \min (a, b) + \max (a, b) = a + b$.

Доказательства. *7.2. I. $\min (a, b) = b \dot{-} (b \dot{-} a) = a$ [*6.10] $= a \dot{-} 0$ [ˣ6.1] $= a \dot{-} (a \dot{-} b)$ [*6.11] $= \min (b, a)$.

*7.3—*7.7. Разбором случаев ($a \leqslant b$, $a \geqslant b$) из *7.2.

ˣ9.1. $\overline{\mathrm{sg}}\, (0) = 1$.
ˣ9.2. $\overline{\mathrm{sg}}\, (a') = 0$.
*9.3. $\vdash \overline{\mathrm{sg}}\, (a) = 0 \sim a > 0$.
*9.4. $\vdash \overline{\mathrm{sg}}\, (a) = 1 \sim a = 0$.
*9.5. $\vdash \overline{\mathrm{sg}}\, (a) = 0 \vee \overline{\mathrm{sg}}\, (a) = 1$.

ˣ10.1. $\mathrm{sg}\, (0) = 0$.
ˣ10.2. $\mathrm{sg}\, (a') = 1$.
*10.3. $\vdash \mathrm{sg}\, (a) = 0 \sim a = 0$.
*10.4. $\vdash \mathrm{sg}\, (a) = 1 \sim a > 0$.
*10.5. $\vdash \mathrm{sg}\, (a) = 0 \vee \mathrm{sg}\, (a) = 1$.

Доказательства. Разбором случаев индукции (ВМ, стр. 169).

ˣ11.1. $|a - b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a)$.
*11.2. $\vdash |a - b| = 0 \sim a = b$.
*11.3. $\vdash |a - b| > 0 \sim a \neq b$.
*11.4. $\vdash |a - b| = |b - a|$.
*11.5. $\vdash |a - c| \leqslant |a - b| + |b - c|$.
*11.6. $\vdash |a - 0| = a$.
*11.7. $\vdash |(a + c) - (b + c)| = |a - b|$.

*11.8. $\vdash |(a+b)-b| = a$.

*11.9. $\vdash c\,|a-b| = |ca-cb|$.

*11.10. $c \leqslant a,\ b \supset |(a \dot{-} c)-(b \dot{-} c)| = |a-b|$.

*11.11. $c \geqslant a,\ b \supset |(c \dot{-} a)-(c \dot{-} b)| = |a-b|$.

*11.12. $\vdash a \dot{-} b,\ b \dot{-} a \leqslant |a-b| \leqslant \max(a,\ b) \leqslant a+b$.

*11.13. $\vdash |(a \dot{-} c)-(b \dot{-} c)|,\ |(c \dot{-} a)-(c \dot{-} b)|,\ ||a-c|-|b-c|| \leqslant |a-b|$.

*11.14. $\vdash |a-b| \geqslant c \sim a \geqslant b+c \vee b \geqslant a+c$.

*11.14a, b. Аналогично со знаками $>$, $=$.

*11.15. $\vdash |a-b| < c \sim a < b+c \,\&\, b < a+c$.

*11.15a, b. Аналогично со знаками $\leqslant$, $\neq$.

Доказательства. *11.2, *11.3. Ввиду *6.3a, $a=b \supset |a-b|=0$. Рассматривая случаи ($a<b$, $a>b$) и используя *6.12 и *142a, получаем $a \neq b \supset |a-b|>0$. Обратное следует из *158, *140.

*11.5. Используем *6.21.

*11.10. Используем *11.7, *6.7.

*11.11. Используем *6.5, *6.10.

*11.14. I. Разбор случаев ($a \geqslant b$, $a \leqslant b$). II. Разбор случаев.

*11.15. Из *11.14 посредством *30, *63, *139.

12.1. $\mathrm{rm}(0,\ b)=0$.

$^{\times}$12.2. $\mathrm{rm}(a',\ b) = (\mathrm{rm}(a,\ b))' \cdot \mathrm{sg}\,|b-(\mathrm{rm}(a,\ b))'|$.

$^{\times}$13.1. $[0/b]=0$.

$^{\times}$13.2. $[a'/b] = [a/b] + \overline{\mathrm{sg}}\,|b-(\mathrm{rm}(a,\ b))'|$.

*12.3. $\vdash b>0 \sim \mathrm{rm}(a,\ b)<b$.

*13.3. $\vdash [a/0]=0 \,\&\, \mathrm{rm}(a,\ 0)=a$.

*13.4. $\vdash a = b\,[a/b]+\mathrm{rm}(a,\ b)$.

*13.5. $\vdash a = bq + r \,\&\, r<b \supset q=[a/b] \,\&\, r=\mathrm{rm}(a,\ b)$.

*13.6. $\vdash [a/1]=a \,\&\, \mathrm{rm}(a,\ 1)=0$.

*13.7. $\vdash a<b \supset [a/b]=0 \,\&\, \mathrm{rm}(a,\ b)=a$.

*13.8. $\vdash b>0 \supset [ab+c/b] = a+[c/b] \,\&\, \mathrm{rm}(ab+c,\ b)=\mathrm{rm}(c,\ b)$.

*13.9. $\vdash b>0 \supset [ab \dot{-} c/b] = a \dot{-} ([c/b]+\mathrm{sg}\,\mathrm{rm}(c,\ b))$.

*13.10. $\vdash a \leqslant b \supset [a/c] \leqslant [b/c]$.

*13.11. $\vdash a \geqslant b > 0 \supset [c/a] \leqslant [c/b]$.

Доказательства. *12.3. I. Индукция по a. В инд. шаге разбираем случаи по *10.5: $\mathrm{sg}\,|b-(\mathrm{rm}(a,\ b))'|=0$, $\mathrm{sg}\,|b-(\mathrm{rm}(a,\ b))'|=1$ (тогда по *10.4 и *11.3 $b \neq (\mathrm{rm}(a,\ b))'$).

*13.4. Аналогично.

*13.5. По *146b, *13.4, *12.3.

*13.6, *13.7. По *13.5.

*13.8. По *12.3 (с допущением $b>0$) $\mathrm{rm}(c,\ b)<b$. Далее, $b(a+[c/b])+\mathrm{rm}(c,\ b) = ab+(b\,[c/b]+\mathrm{rm}(c,\ b)) = ab+c$ [*13.4]. Остается применить *13.5.

*13.9. Пусть $b>0$. Случай 1: $\mathrm{rm}(c,\ b)=0$. Тогда $[ab \dot{-} c/b] = [ab \dot{-} b\,[c/b]/b]$ [*13.4] $= [b(a \dot{-} [c/b])/b]$ [*6.14] $= a \dot{-} [c/b]$ [*13.8, 12.1] $= a \dot{-} ([c/b]+\mathrm{sg}\,\mathrm{rm}(c,\ b))$. Случай 2: $\mathrm{rm}(c,\ b)>0$. Подслучай 1: $[c/b]<a$. Тогда $a \dot{-} [c/b] \geqslant 1$ [*6.12, *138b]. Следовательно, $ab \dot{-} b\,[c/b] \geqslant b$ [*145c, *6.14]. Таким образом, $[ab \dot{-} c/b] = [ab \dot{-} (b\,[c/b]+\mathrm{rm}(c,\ b))/b]$[*13.4]$=$ $[(ab \dot{-} b\,[c/b]) \dot{-} \mathrm{rm}(c,\ b)/b]$ [*6.5] $=[(((ab \dot{-} b\,[c/b]) \dot{-} b)+b) \dot{-} \mathrm{rm}(c,\ b)/b]$ [*6.7] $= [(ab \dot{-} (b\,[c/b]+b))+(b \dot{-} \mathrm{rm}(c,\ b))/b]$ [*6.5; *6.6, *12.3]$=[b(a \dot{-} ([c/b]+1))+(b \dot{-} \mathrm{rm}(c,\ b))/b] = a \dot{-} ([c\ b]+1)$[*13.8; *1 3.7, *6.16]$=$ $a \dot{-} ([c/b]+\mathrm{sg}\,\mathrm{rm}(c,\ b))$. Подслучай 2: $[c/b] \geqslant a$. Тогда $b\,[c/b] \geqslant ab$. Следовательно, $[ab \dot{-} c/b] = [ab \dot{-} (b\,[c/b]+\mathrm{rm}(c,\ b))/b] = [0/b]$ [*6.11] $= 0$ [$^{\times}$13.1] $= a \dot{-} ([c/b]+\mathrm{sg}\,\mathrm{rm}(c,\ b))$ [*6.11].

*13.10. Индукцией по p получаем $[a/c] \leqslant [a+p/c]$.

*13.11. Допускаем $a \geqslant b > 0$ и $[c/a] > [c/b]$ и используем *13.4, чтобы вывести $\mathrm{rm}(c,\ b) \geqslant b$ в противоречие с *12.3.

Под *стандартной* формулой мы подразумеваем (элементарную) формулу вида $t=0$, где $\vdash t=0 \vee t=1$ (эквивалентно, $\vdash t \leqslant 1$). Следующий результат *14.1 (вытекающий из *11.2, *10.3) вместе с *10.5 показывает, что всякая элементарная формула $t_1 = t_2$ эквивалентна некоторой стандартной формуле. Это обстоятельство будет полезно при построении других стандартных формул, выражающих примитивно рекурсивные предикаты из конструкций #D — #F.

*14.1 $\vdash a = b \sim sg\,|a - b| = 0$.

До сих пор «$a < b$» было сокращением для $\exists c\,(c' + a = b)$. Теперь *15.1 показывает, что в дальнейшем мы можем также трактовать «$a < b$» как сокращение для стандартной (элементарной) формулы $sg\,(a' \dot{-} b) = 0$, причем все формулы, доказанные (интуиционистски) в ВМ и выше, будут по-прежнему выполняться. (Первый или третий член в *15.1 есть просто расшифровка среднего члена, согласно которой мы интерпретируем сокращение «$a < b$».)

*15.1. $\vdash \exists c\,(c' + a = b) \sim a < b \sim sg\,(a' \dot{-} b) = 0$.

Доказательство. $sg\,(a' - b) = 0 \sim a' \dot{-} b = 0$ [*10.3] $\sim a' \leqslant b$ [*6.11] $\sim a < b$ [*138b].

В ВМ, стр. 173, «$a \mid b$» есть сокращение для $\exists c\,(ac = b)$. Теперь *16.8 даст некоторую альтернативу. (Доказательства *16.1—*16.5 пригодны для системы ВМ.)

*16.1. $\vdash a \mid 0$. *16.2. $\vdash 0 \mid b \sim b = 0$.

*16.3. $\vdash 1 \mid a$.

*16.4. $\vdash a \mid c \,\&\, b \mid d \supset ab \mid cd$.

*16.5. $\vdash a \mid b \supset (a \mid c \sim a \mid b + c)$.

*16.6. $\vdash b > 0 \supset a \mid a^b$.

*16.7. $\vdash 0 < b \leqslant a \supset b \mid a!$.

*16.8. $\vdash \exists c\,(ac = b) \sim a \mid b \sim sg\,(rm\,(b, a)) = 0$.

Доказательства. *16.2. По *16.1, *156.

*16.5. Чтобы показать $a \mid b,\ a \mid b + c \vdash a \mid c$, допустим, что $ad = b$ и $ae = b + c$, откуда $c = ae \dot{-} b$ [*6.3] $= ae \dot{-} ad = a\,(e \dot{-} d)$ [*6.14], или (избегая $\dot{-}$) мы могли бы поступить следующим образом. Случай 1: $a = 0$. Используем *16.2. Случай 2: $a \neq 0$. Допустим для $\exists$-удал. $ap = b$ и $aq = b + c$. Тогда $ap = b \leqslant b + c = aq$, следовательно, по *145b, $p \leqslant q$. Предположим, что $p + r = q$. Теперь $ap + ar = aq = b + c = ap + c$ и, по *132, $ar = c$.

*16.6. Доказываем $a \mid a^{c'}$.

*16.7. Индукция по a (с использованием *138a).

*16.8. I. Предположим $a \mid b$ и для $\exists$-удал. $aq = b$. Случай 1: $a = 0$. Тогда $b = 0$, поэтому $rm\,(b, a) = 0$ по ^{x}12.1 и т. д. Случай 2: $a > 0$. Тогда $b = aq + 0 \,\&\, 0 < a$, следовательно, по *13.5, $rm\,(b, a) = 0$. II. Пусть $sg\,(rm\,(b, a)) = 0$. Тогда $rm\,(b, a) = 0$ по *10.3, следовательно, $b = a\,[b/a]$ по *13.4, откуда $a \mid b$.

#A, #C не нуждаются в комментариях. Чтобы получить #B, мы введем следующий функциональный символ f_{15}, выражающий конечную сумму ($k_{15} = l_{15} = 1$) вместе с аксиомами:

^{x}B1a. $f_{15}\,(0, \alpha) = 0$.

^{x}B2a. $f_{15}\,(z', \alpha) = f_{15}\,(z, \alpha) + \alpha\,(z)$.

Это удовлетворяет требованиям леммы 5.1. Кроме того, если ввести «$\sum_{y<s} t\,(y)$», где y — произвольная переменная, $t\,(y)$, s — термы, как сокращение для $f_{15}\,(s, \lambda y t\,(y))$, то, ввиду *0.4, эти две аксиомы окажутся эквивалентными формулам *B1, *B2 (см. ниже). Это позволяет вести изложение в привычных обозначениях. Аналогично мы вводим конечное произведение с двумя аксиомами:

^{x}B3a. $f_{16}\,(0, \alpha) = 1$.

^{x}B4a. $f_{16}\,(z', \alpha) = f_{16}\,(z, \alpha) \cdot \alpha\,(z)$.

Для произвольной переменной y и формул $A\,(y)$, $R\,(y)$ мы будем использовать «$\forall y_{A(y)} R\,(y)$» как сокращение для $\forall y\,(A\,(y) \supset R\,(y))$ и «$\exists y_{A(y)} R\,(y)$» — как сокращение для $\exists y\,(A\,(y) \,\&\, R\,(y))$. Нам также понадобятся версии *B5—*B13, *B16—*B21 с неравенством $v \leqslant y < z$ вместо $y < z$. (Соответствующие версии *B14, *B15 приводятся явно.) Мы интерпретируем «$\sum_{v \leqslant y < z} t\,(y)$» как сокращение для $\sum_{y < z \dot{-} v} t\,(v + y)$, если v свободен для y в $t\,(y)$ (в противном случае как сокращение для $\sum_{y < z \dot{-} v} t_1\,(v + y)$, где $t_1\,(y)$ конгруэнтен $t\,(y)$ и v свободен для y в $t_1\,(y)$). Эти версии вытекают из соответствующих данных с использованием $\vdash \forall y_{v \leqslant y < z} R\,(y) \sim \forall y_{y < z \dot{-} v} R\,(v + y)$, $\vdash \exists y_{v \leqslant y < z} R\,(y) \sim \exists y_{y < z \dot{-} v} R\,(v + y)$ (по *144a; *6.7, *6.12; *6.19, *6.7). «$\sum_{v < y < z}$» будет означать $\sum_{v' \leqslant y < z}$ и т. д. (ср. *138a, *138b). В упоминаниях *B5—*B23 мы будем подразумевать модифицированные версии в тех случаях, когда это будет необходимо. Мы будем также сокращать $(\sum_{y<s} t(y)) + r$ как «$\sum_{y<s} t\,(y) + r$».

*B1. $\vdash \sum_{y<0}\alpha(y)=0$.

*B2. $\vdash \sum_{y<z'}\alpha(y)=\sum_{y<z}\alpha(y)+\alpha(z)$.

*B3. $\vdash \prod_{y<0}\alpha(y)=1$.

*B4. $\vdash \prod_{y<z'}\alpha(y)=(\prod_{y<z}\alpha(y))\cdot\alpha(z)$.

*B5. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)=0 \sim \sum_{y<z}\alpha(y)=0$.

*B6. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)>0 \sim \prod_{y<z}\alpha(y)>0$.

*B7. $\vdash \exists y_{y<z}\alpha(y)>0 \sim \sum_{y<z}\alpha(y)>0$.

*B8. $\vdash \exists y_{y<z}\alpha(y)=0 \sim \prod_{y<z}\alpha(y)=0$.

*B9. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)\leqslant 1 \supset \sum_{y<z}\alpha(y)\leqslant z$.

*B10. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)\leqslant 1 \supset \prod_{y<z}\alpha(y)\leqslant 1$.

*B11. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)=1 \supset \sum_{y<z}\alpha(y)=z$.

*B12. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)\leqslant 1 \supset [\sum_{y<z}\alpha(y)=z \supset \forall y_{y<z}\alpha(y)=1]$.

*B13. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)=1 \sim \prod_{y<z}\alpha(y)=1$.

*B14. $\vdash w\leqslant z \supset \sum_{y<z}\alpha(y)=\sum_{y<w}\alpha(y)+\sum_{w\leqslant y<z}\alpha(y)$,

$\vdash v\leqslant w\leqslant z \supset \sum_{v\leqslant y<z}\alpha(y)=\sum_{v\leqslant y<w}\alpha(y)+\sum_{w\leqslant y<z}\alpha(y)$.

*B15. $\vdash w\leqslant z \supset \prod_{y<z}\alpha(y)=(\prod_{y<w}\alpha(y))\cdot\prod_{w\leqslant y<z}\alpha(y)$,

$\vdash v\leqslant w\leqslant z \supset \prod_{v\leqslant y<z}\alpha(y)=(\prod_{v\leqslant y<w}\alpha(y))\cdot\prod_{w\leqslant y<z}\alpha(y)$.

*B16. $\vdash \sum_{y<z}(\alpha(y)+\beta(y))=\sum_{y<z}\alpha(y)+\sum_{y<z}\beta(y)$.

*B17. $\vdash \prod_{y<z}\alpha(y)\beta(y)=(\prod_{y<z}\alpha(y))\cdot\prod_{y<z}\beta(y)$.

*B18. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)=\beta(y) \supset \sum_{y<z}\alpha(y)=\sum_{y<z}\beta(y)$.

*B19. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)=\beta(y) \supset \prod_{y<z}\alpha(y)=\prod_{y<z}\beta(y)$.

*B20. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)\leqslant\beta(y) \supset \sum_{y<z}\alpha(y)\leqslant\sum_{y<z}\beta(y)$.

*B21. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y)\leqslant\beta(y) \supset \prod_{y<z}\alpha(y)\leqslant\prod_{y<z}\beta(y)$.

*B22. $\vdash \forall y_{y\leqslant z}\alpha(y)<\beta(y) \supset \sum_{y\leqslant z}\alpha(y)<\sum_{y\leqslant z}\beta(y)$.

*B23. $\vdash \forall y_{y\leqslant z}\alpha(y)<\beta(y) \supset \prod_{y\leqslant z}\alpha(y)<\prod_{y\leqslant z}\beta(y)$.

Доказательства. *B5. Инд. по z. Базис. Использовать $\neg y<0$, *10a, *11. Инд. шаг. Использовать *138a, *128.

*B7.I. Предположим $\exists y_{y<z}\alpha(y)>0$. Согласно *136, $\sum_{y<z}\alpha(y)\geqslant 0$. Однако, если $\sum_{y<z}\alpha(y)=0$, то по *B5 $\forall y_{y<z}\alpha(y)=0$, откуда (ввиду *84a и замечания 4.1) вытекает $\neg\exists y_{y<z}\alpha(y)>0$, что противоречит предположению. II. Допустим, что $\sum_{y<z}\alpha(y)>0$. По замечанию 4.1 $\exists y_{y<z}\alpha(y)>0 \vee \neg\exists y_{y<z}\alpha(y)>0$. Однако, если $\neg\exists y_{y<z}\alpha(y)>0$, то (ввиду *86, *58b) $\forall y_{y<z}\alpha(y)=0$ и по *B5 $\sum_{y<z}\alpha(y)=0$.

*B12. В инд. шаге $\alpha(z)=1$ или *B9 ведут к противоречию.

*B13. См. *131.

*B14. Допустим, что $w\leqslant z$ и для $\exists$-удал. $z=w+c$. Тогда *6.3 дает $c=z\dot{-}w$. Таким образом, мы должны вывести $\sum_{y<w+c}\alpha(y)=\sum_{y<w}\alpha(y)+\sum_{y<c}\alpha(w+y)$, что непосредственно устанавливается индукцией по c.

*B21, *B23. Используя $a\leqslant b\supset ac\leqslant bc$ и (для *B23) *145a.

Мы трактуем #D, #E как схемы, касающиеся некоторых видов определений. Результаты позволят нам для любой формулы E, составленной при помощи пропозициональных связок и ограниченных кванторов из формул $P_1, \ldots, P_n$, для каждой из которых выбрана эквивалентная ей стандартная формула, построить стандартную формулу, эквивалентную E. Далее в силу замечания 4.1 для #D достаточно рассматривать $\vee$ и $\neg$ (как в ВМ). Посредством альтернативных версий *B5 и т. д. мы получаем альтернативные версии *E1 — *E4 с $v\leqslant y<z$ в качестве границ. Для произвольной переменной y и формулы R (y) таких, что $\vdash$ R (y) $\sim$ r (y) = 0 при некотором терме r (y), для которого $\vdash$ r (y) $\leqslant$ 1, мы употребляем «$\mu y_{y<z}R(y)$» как сокращение для $\sum_{x<z}\prod_{y<x'}r(y)$, где r (y) — некоторый такой терм (в силу *B18, *B19 неважно, какой именно), а x — переменная, не входящая свободно в r (y).

Пусть Q, R — *формулы*, q, r — *термы такие, что* $\vdash$ Q $\sim$ q = 0, *причем* $\vdash$ q $\leqslant$ 1 *и* $\vdash$ R $\sim$ r = 0, *причем* $\vdash$ r $\leqslant$ 1. *Тогда*

*D1. $\vdash Q\vee R\sim qr=0$. *D2. $\vdash qr\leqslant 1$.

*D3. $\vdash \neg Q\sim \overline{sg}(q)=0$. *D4. $\vdash \overline{sg}(q)\leqslant 1$.

Пусть y — *переменная*, R (y) — *формула*, r (y) — *терм такие, что* $\vdash$ R (y) $\sim$ r (y) = 0 *и* $\vdash$ r (y) $\leqslant$ 1. *Пусть далее в* *E5 — *E7 M_z *означает* $\mu y_{y<z}$ R (y). *Тогда*:

*E1. $\vdash \exists y_{y<z} R(y) \sim \prod_{y<z} r(y) = 0$.

*E2. $\vdash \prod_{y<z} r(y) \leqslant 1$.

*E3. $\vdash \forall y_{y<z} R(y) \sim sg\left(\sum_{y<z} r(y)\right) = 0$.

*E4. $\vdash sg\left(\sum_{y<z} r(y)\right) \leqslant 1$.

*E5. $\vdash \exists y_{y<z} R(y) \supset M_z < z \,\&\, R(M_z) \,\&\, \forall w_{w<M_z} \neg R(w)$.

*E6. $\vdash M_z < z \sim \exists y_{y<z} R(y)$.

*E7. $\vdash M_z = z \sim \forall y_{y<z} \neg R(y)$.

Доказательства. *D1. По *129 и др. *D4 с помощью *9.5.

*E1. Это есть в сущности *B8 (только вместо α подставлено $\lambda y r(y)$).

*E2. Согласно *B10.

*E3. С помощью *B5 и *10.3.

Прежде чем доказывать *E5 — *E7, мы получим с помощью *B13 и *B11

(a) $\vdash \forall y_{y<z} \neg R(y) \supset M_z = z$.

Аналогично по замечанию 4.1 (или *150), *86 и *58b

(b) $\vdash \exists y_{y<z} R(y) \vee \forall y_{y<z} \neg R(y)$.

*E5. Предположим $\exists y_{y<z} R(y)$. Пользуясь *149a (вместе с замечанием 4.1, *159 или #D, #15), получаем $\exists v\,[v < z \,\&\, R(v) \,\&\, \forall w_{w<v} \neg (w < z \,\&\, R(w))]$. Опуская $\exists v$ (подготавливая $\exists$-удал.) и $w < z$ (по *45), получаем $v < z \,\&\, R(v) \,\&\, \forall w_{w<v} \neg R(w)$. Теперь достаточно показать, что $M_z = v$. Используя $v < z$ вместе с *B14, получаем $M_z = M_v + \sum_{v \leqslant x < z} \prod_{y<x'} r(y)$. Из R (v) следует r (v) = 0, что вместе с *B8 и *B5 дает $\sum_{v \leqslant x < z} \prod_{y<x'} r(y) = 0$. Итак, $M_z = M_v = v$ (мы воспользовались (a)).

*E6.I. Предположим, что $M_z < z$. Тогда согласно (b) $\exists y_{y<z} R(y)$, следовательно $\forall y_{y<z} \neg R(y)$ вместе с (a) дает $M_z = z$. II. Согласно *E5.

Мы упрощаем #F (для любого $m \geqslant 1$), положив $\varphi_{m+1} = 0$ (BM, стр. 206).

Пусть $Q_1, \ldots, Q_m$ — *формулы*, $q_1, \ldots, q_m$ — *термы такие, что* $\vdash \neg (Q_i \,\&\, Q_j)$ $(i \neq j)$ *и* $\vdash Q_i \sim q_i = 0$. *Пусть далее* $p_1, \ldots, p_m$ — *любые термы и* p — *терм* $\overline{sg}(q_1) \cdot p_1 + \ldots + \overline{sg}(q_m) \cdot p_m$. *Тогда*

*F1. $\vdash Q_i \supset p = p_i$. *F2. $\vdash \neg Q_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \neg Q_m \supset p = 0$.

#G (BM, § 46) может быть принято по лемме 3.5(c) п. 5.6.

*H1 — *H4 эквивалентны аксиомам ^{x}H1a — ^{x}H4a (с функциональными символами f_{17}, f_{18}) аналогично тому, как *B1 — *B4 были эквивалентны ^{x}B1a — ^{x}B4a.

*H1. $\vdash \min_{y \leqslant 0} \alpha(y) = \alpha(0)$.

*H2. $\vdash \min_{y \leqslant z'} \alpha(y) = \min(\min_{y \leqslant z} \alpha(y), \alpha(z'))$.

*H3. $\vdash \max_{y \leqslant 0} \alpha(y) = \alpha(0)$.

*H4. $\vdash \max_{y \leqslant z'} \alpha(y) = \max(\max_{y \leqslant z} \alpha(y), \alpha(z'))$.

*H5. $\vdash \forall y_{y \leqslant z} \alpha(y) \geqslant \min_{y \leqslant z} \alpha(y)$.

*H6. $\vdash \exists y_{y \leqslant z} \alpha(y) = \min_{y \leqslant z} \alpha(y)$.

*H7. $\vdash \forall y_{y \leqslant z} \alpha(y) \leqslant \max_{y \leqslant z} \alpha(y)$.

*H8. $\vdash \exists y_{y \leqslant z} \alpha(y) = \max_{y \leqslant z} \alpha(y)$.

Поскольку согласно #15, #16, #E и #D $\exists c\,(1 < c < a \,\&\, c \mid a)$ эквивалентно $\exists c_{2 \leqslant c < a}\, c \mid a$, мы можем построить стандартную (элементарную) формулу Pr (a) такую, что

*17.1. $\vdash Pr(a) \sim a > 1 \,\&\, \neg \exists c\,(1 < c < a \,\&\, c \mid a)$.

Таким образом, элементарная формула Pr (a) эквивалентна составной формуле, принятой как Pr (a) в BM, стр. 173. (Доказательства *17.3, *17.4, *17.5 будут пригодны для системы BM.) Согласно п. 5.4

$$\vdash \neg Pr(0),\ \vdash \neg Pr(1),\ \vdash Pr(2),\ \vdash Pr(3),\ \vdash \neg Pr(4),\ \vdash Pr(5),\ \ldots$$

Поскольку мы теперь формально имеем $a!$, мы можем усилить *161 до

*17.2. $\vdash \exists b\,(a < b \leqslant a! + 1 \,\&\, Pr(b))$ (теорема Евклида).

Доказательство. Ввиду *4.3 и *16.7 $\vdash a! > 0 \,\&\, \forall b\,(0 < b \leqslant a \supset b \mid a!)$. Поэтому a! может играть роль d в (1) BM (стр. 173). В частности, мы имели там (как часть (2)) b | d′, что теперь означает b | a! + 1, и по *156 b $\leqslant$ a! + 1, что только и оставалось показать.

*17.3. $\vdash Pr(a) \,\&\, Pr(b) \,\&\, a \neq b \supset \neg a \mid b$.

Доказательство. Разбором случаев $(a < b,\ a > b)$ с использованием *17.1, *156.

*17.4. $\vdash a > 1 \supset \exists p\,[\mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid a]$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Ввиду *153, $a > 1 \,\&\, a \mid a$, следовательно $\exists b\,[b > 1 \,\&\, b \mid a]$. Тогда по *149a (с замечанием 4.1 или для системы BM с замечанием 1 (b), стр. 123, с *158—*160, *150) $\exists p\,[p > 1 \,\& \, p \mid a \,\&\, \forall c_{c<p} \neg (c > 1 \,\&\, c \mid a)]$. Допустим для $\exists$-удал. $p > 1 \,\&\, p \mid a \,\&\, \forall c_{c<p} \neg (c > 1 \,\&\, c \mid a)$. Допустим также $\exists c\,(1 < c < p \,\&\, c \mid p)$ и для $\exists$-удал. $1 < c < p \,\&\, c \mid p$. Тогда, ввиду $p \mid a$ и *154, $c > 1 \,\&\, c \mid a$. Однако, с другой стороны, используя $c < p$ вместе с $\forall c_{c<p} \neg (c > 1 \,\&\, c \mid a)$, получаем $\neg (c > 1 \,\&\, c \mid a)$. По правилу reductio ad absurdum (ср. замечание внизу стр. 170, BM) получаем $\neg \exists c\,(1 < c < p \,\&\, c \mid p)$.

*17.5. $\vdash \mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid ab \supset p \mid a \vee p \mid b$

(первая теорема Евклида).

Доказательство. Мы используем метод Харди — Райта **1954**, 2.11, стр. 21 (однако только в случае первой теоремы Евклида, а не основной теоремы арифметики). Поскольку содержательно $p \mid a \vee p \mid b$ тривиально выполняется для $ab = 0$, мы покажем абсурдность существования n, p, a, b таких, что $n = ab \,\&\, n \neq 0 \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid n \,\&\, \overline{p \mid a} \,\&\, \overline{p \mid b}$. Однако, если существует какая-нибудь такая четверка n, p, a, b, мы можем выбрать наименьшее n, для которого существуют остальные три числа p, a, b. Затем выбираем наименьшее p, для которого при этом n существуют остальные два числа a, b, и, наконец, выбираем наименьшее a, для которого при этих n и p существует b. Таким образом, b определяется посредством $n = ab \,\&\, n \neq 0$. Это начало доказательства формализуется с соблюдением необходимых при работе в интуиционистской системе предосторожностей в I—III ниже. Выводы, касающиеся n, p, a, b в IV—VII, с помощью которых мы достигнем противоречия, мало отличаются от соответствующих неформальных заключений, исключение составляет наша обязанность детально проверять, что применяемые нами различные известные предложения выражаются формулами, выводимость которых в нашей системе уже установлена.

I. В случае $ab = 0$ используем *129, *16.1. Нам остается доказать $ab \neq 0 \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid ab \supset p \mid a \vee p \mid b$. П

классическому исчислению высказываний (применимому согласно замечанию 4.1 или в случае системы BM согласно замечанию 4.1, стр. 123 BM, вместе с *158—*160, *150) это равносильно $\neg (ab \neq 0 \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid ab \,\&\, \neg p \mid a \,\&\, \neg p \mid b)$. Поэтому достаточно, используя $\vdash \exists n n = ab$ (*100) и $\exists$-удал., вывести противоречие из формулы

(1) $n = ab \,\&\, n \neq 0 \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid n \,\&\, \neg p \mid a \,\&\, \neg p \mid b$,

обозначаемой далее $R(n, p, a, b)$, или по $\exists$-введ. из

(2) $\exists n \exists p \exists a \exists b R(n, p, a, b)$.

II. Мы покажем, что $R(n, p, a, b) \vdash p < n \,\&\, a < n \,\&\, b < n$. Непосредственно видно $n = ab \,\&\, n \neq 0$, $a \neq 0 \,\&\, b \neq 0$. Кроме того, $a \neq 1$ (так как $a = 1$ вместе с $n = ab$ и $p \mid n$ противоречит $\neg p \mid b$). Аналогично $b \neq 1$. Итак, $a > 1 \,\&\, b > 1$ и, по *143b, $a < ab = n \,\&\, b < ab = n$. Ввиду $\mathrm{Pr}(p)$, $p > 1$. Используя $n = ab$, $n \neq 0$ и $p \mid n$ в *156, получаем $p \leqslant ab$. Однако, если $p = ab$ (так что $a \mid p$), то по *156 (где $p > 1$, $a > 1$) $1 < a \leqslant p$. Но $a = p$ ввиду *153 противоречит $\neg p \mid a$, так что $1 < a < p$. Это, однако (вместе с $a \mid p$), противоречит $\mathrm{Pr}(p)$. Таким образом, $p < ab = n$.

III. Возьмем теперь для *149a (2) как $\exists x A(x)$. Чтобы получить $A(x) \vee \neg A(x)$, заметим, что из II вместе с $A \supset B \vdash A \sim B \,\&\, A$ и *91 вытекает $\exists b R(n, p, a, b) \sim \exists b_{b<n} R(n, p, a, b)$, $\exists a \exists b R(n, p, a, b) \sim \exists a_{a<n} \exists b_{b<n} R(n, p, a, b)$ и $\exists p \exists a \exists b R(n, p, a, b) \sim \exists p_{p<n} \exists a_{a<n} \exists b_{b<n} R(n, p, a, b)$. Тогда, используя три раза *150 (вместе с замечанием 1 (b) BM, стр. 123 и др.), получаем $A(x) \vee \neg A(x)$ и по *149a мы приходим к $\exists y\,[A(y) \,\&\, \forall z_{z<y} \neg A(z)]$. Опуская $\exists y$ с целью подготовки $\exists$-удал., допустим

(3) $\exists p \exists a \exists b R(n, p, a, b) \,\&$

$\forall m_{m<n} \neg \exists p \exists a \exists b R(m, p, a, b)$.

Повторяя эту процедуру дважды, мы затем допустим

(4) $\exists a \exists b R(n, p, a, b) \,\&\, \forall q_{q<p} \neg \exists a \exists b R(n, q, a, b)$,

(5) $\exists b R(n, p, a, b) \,\&\, \forall e_{e<a} \neg \exists b R(n, p, e, b)$.

Подготавливая $\exists$-удал. из 1-го члена (5), допустим

(6) $(= (1))$ $R(n, p, a, b)$.

Наконец, подготавливая $\exists$-удал. из $p \mid n$ (в (6)), допустим

(7) $pd = n$.

Ввиду $\exists$-удал. противоречие, выведенное из (3) — (7), дает в результате противоречие, выведенное из (2), а следовательно, из (1) (ср. ВМ, замечание внизу стр. 170).

IV. Выведем $p \leqslant d$. Согласно (7) $d \neq 0$ (поскольку $n \neq 0$ в (6)) и $d \neq 1$ (поскольку $p < n$ ((6) и II)). Таким образом, $d > 1$. Чтобы показать $p \leqslant d$, предположим, что $p > d$. Ввиду $d > 1$ и *17.4 имеет место $\exists q\,[\mathrm{Pr}(q)\ \&\ q \mid d]$. Предположим для $\exists$-удал. $\mathrm{Pr}(q)\ \&\ q \mid d$. По *156 $q \leqslant d$, следовательно, $q < p$. Согласно *154 и (7) $q \mid d$. Если бы мы смогли вывести также $\neg q \mid a\ \&\ \neg q \mid b$, то мы имели бы $R(n, q, a, b)$, следовательно, $\exists a \exists b R(n, q, a, b)$ и, кроме того, $q < p$ в противоречие со вторым членом (4). Чтобы показать $\neg q \mid a$, предположим $q \mid a$. Для $\exists$-удал. отсюда и из $q \mid d$ допустим, что $qa_1 = a$, $qd_1 = d$. Тогда $a_1 \neq 0$, $d_1 \neq 0$ (ввиду $a \neq 0$ в II и $d \neq 0$). Теперь $pqd_1 = pd = n = ab = qa_1b$, следовательно, $pd_1 = a_1b$ (ввиду *133 и $q > 1$ из $\mathrm{Pr}(q)$). Таким образом, $p \mid a_1b$, но $\neg p \mid a_1$ (иначе мы получили бы $p \mid a$). Кроме того, ввиду *143b вместе с $q > 1$ и $d_1 \neq 0$, имеет место $d_1 < qd_1 = d$, так что по *145a $a_1b = pd_1 < pd = n$. Таким образом, $a_1b < n$ и $R(a_1b, p, a_1, b)$, следовательно, выполняется $\exists p \exists a \exists b R(a_1b, p, a, b)$, что противоречит второму члену (3). Симметрично для $\neg q \mid b$.

V. Выведем $a \leqslant b$. Если $b < a$ вместе с $R(n, p, b, a)$, то $\exists a R(n, p, b, a)$, что противоречит (5).

VI. Выведем $pa < n$. Из $p \leqslant d$ (см. IV) по *145c (п. 5.5, абзац 4) вытекает $pp \leqslant pd = n$. Аналогично из $a \leqslant b$ (см. V) следует $aa \leqslant ab = n$. Теперь, если бы выполнялось $pp = n\ \&\ aa = n$, мы имели бы $pp = aa$, что по *145a (вместе с $p > 1$, $a \neq 0$) делало бы $p < a$ и $p > a$ абсурдным и влекло бы, таким образом, $p = a$. Однако по *153 из $\neg p \mid a$ следует $p \neq a$. Таким образом, $pp < n\ \&\ aa \leqslant n$ или $pp \leqslant n\ \&\ aa < n$, что в каждом случае по *145a, *145c дает $papa < nn$, следовательно (поскольку $pa \geqslant n$ ведет к противоречию), $pa < n$.

VII. Выведем, наконец, противоречие. Мы имеем $pa \neq 0$, а также $pa < n$ (согласно VI). Допустим (для $\exists$-удал. из $pa < n$) $q' + pa = n$. Теперь $0 \neq q' < n$. Кроме того,

по *16.5 $p \mid d'$ и $a \mid q'$. Таким образом, положим $ar = q'$. Теперь $ab = n = q' + pa = ar + pa = a(r + p)$, так что по *133 $b = r + p$. Однако $\neg p \mid r$, поскольку иначе мы пришли бы с помощью *16.5, *153 к противоречию с $\neg p \mid b$. Следовательно, $q' < n$ и $R(q', p, a, r)$, что дает $\exists p \exists a \exists b R(q', p, a, b)$ в противоречие с (3).

*17.6. $\vdash \mathrm{Pr}(p)\ \&\ p \mid a^n \supset p \mid a$.

Доказательство. Инд. по n. Базис. Допустим $\mathrm{Pr}(p)\ \&\ p \mid a^0$. По ˣ3.1 и *156 $p = 1$. Однако $\neg \mathrm{Pr}(1)$. Инд. шаг. Используем *17.5 вместе с ˣ3.2.

Мы используем #4, #15, #17, #D, #E, #A, чтобы выделить терм $\mu b_{b<a!+2}[a < b\ \&\ \mathrm{Pr}(b)]$, употребляемый во втором уравнении рекурсии ˣ18.2.

ˣ18.1. $p_0 = 2$.

ˣ18.2. $p_{i'} = \mu_{b<p_i!+2}\,[p_i < b\ \&\ \mathrm{Pr}(b)]$.

*18.3. $\vdash p_i < p_{i'} \leqslant p_i! + 1\ \&\ \mathrm{Pr}(p_{i'})\ \&$
$\forall a (p_i < a < p_{i'} \supset \neg \mathrm{Pr}(a))$.

*18.4. $\vdash \mathrm{Pr}(p_i)$. *18.5. $\vdash p_i > i'$.

*18.6. $\vdash i < j \sim p_i < p_j$.

*18.7. $\vdash \mathrm{Pr}(a) \sim \exists i (a = p_i)$.

Доказательства. *18.3. По *17.2 (и *138a) $\exists b_{b<p_i!+2}\,[p_i < b\ \&\ \mathrm{Pr}(b)]$. Следовательно, *18.3 следует из *E5 и ˣ18.2.

*18.6. I. Доказываем $p_i < p_{i+c'}$ индукцией по c.

*18.7. I. Допустим $\mathrm{Pr}(a)$. По *18.5 $p_a > a' > a$, следовательно, $\exists j p_j > a$. По *149a $\exists j\,[p_j > a\ \&\ \forall i_{i<j} \neg p_i > a]$. Допустим $p_j > a\ \&\ \forall i_{i<j} \neg p_i > a$, следовательно, $\forall i_{i<j} p_i \leqslant a$. Случай 1: $j = 0$. Тогда $p_j = 2 > a$, что вместе с $\neg \mathrm{Pr}(0)$, $\neg \mathrm{Pr}(1)$ противоречит $\mathrm{Pr}(a)$. Случай 2: $j > 0$. Пусть $j = i'$. Тогда $i < j$, следовательно, $p_i \leqslant a$. Однако, если $p_i < a$, мы имели бы $p_i < a < p_j = p_{i'}$ и согласно последнему члену *18.3 $\neg \mathrm{Pr}(a)$.

ˣ19.1. $(a)_i = \mu x_{x<a}\,[p_i^x \mid a\ \&\ \neg p_i^{x'} \mid a]$.

*19.2. $\vdash a > 0 \sim (a)_i < a\ \&\ p_i^{(a)_i} \mid a\ \&\ \neg p_i^{(a)_i+1} \mid a$.

*19.3. $\vdash h \leqslant (a)_i \supset p_i^h \mid a$.

*19.4. $\vdash a > 0\ \&\ h > (a)_i \sim \neg p_i^h \mid a$.

*19.5. $\vdash a > 0 \,\&\, p_i^h \mid a \,\&\, \neg\, p_i^{h'} \mid a \supset (a)_i = h.$

*19.6. $\vdash (0)_i = 0.$

*19.7. $\vdash (a)_i > 0 \sim a > 0 \,\&\, p_i \mid a.$

*19.8. $\vdash i \geqslant a \supset (a)_i = 0.$

*19.9. $\vdash (p_i^h)_i = h.$ *19.9a. $\vdash (1)_i = 0.$

*19.10. $\vdash i \neq j \supset (p_i^h)_j = 0.$

*19.11. $\vdash ab > 0 \supset (ab)_i = (a)_i + (b)_i.$

*19.12. $\vdash \forall y_{y<z}\alpha(y) > 0 \supset (\prod_{y<z}\alpha(y))_i = \sum_{y<z}(\alpha(y))_i.$

*19.13. $\vdash j \geqslant k \supset (\prod_{i<k} p_i^{\alpha(i)})_j = 0,\ \vdash j < h \vee j \geqslant k$
$\supset (\prod_{h \leqslant i < k} p_i^{\alpha(i)})_j = 0.$

*19.14. $\vdash j < k \supset (\prod_{i<k} p_i^{\alpha(i)})_j = \alpha(j),$
$\vdash h \leqslant j < k \supset (\prod_{h \leqslant i < k} p_i^{\alpha(i)})_j = \alpha(j).$

*19.15. $\vdash 0 < a \leqslant b \,\&\, \forall i_{i<b}(a)_i = (b)_i \supset a = b.$

*19.16. $\vdash a > 0 \sim a = \prod_{i<a} p_i^{(a)_i}.$

Доказательства. *19.2. I. Допустим $a > 0$. Тогда заключение следует из ˣ19.1 по *E5, если мы возьмем $\exists x_{x<a}[p_i^x \mid a \,\&\, \neg\, p_i^{x'} \mid a]$. По *18.5 $p_i > 1$. По *3.10 $p_i^a > a$, так что по *156 $\neg\, p_i^a \mid a$, следовательно, $\exists y \neg p_i^y \mid a$. По *149a $\exists y(\neg\, p_i^y \mid a \,\&\, \forall x_{x<y} \neg\neg\, p_i^x \mid a)$. Допуская $\neg\, p_i^y \mid a \,\&\, \forall x_{x<y} \neg\neg\, p_i^x \mid a$, получаем $\forall x_{x<y}\, p_i^x \mid a$. Случай 1: $y = 0$. Тогда $\neg\, p_i^y \mid a$ противоречит $p_i^0 \mid a$ (получаемому по *16.3, ˣ3.1). Случай 2: $y > 0$. Пусть $y = x'$. Тогда $p_i^x \mid a$, поскольку $\forall x_{x<y}\, p_i^x \mid a$. Кроме того, $x < a$, поскольку если $x \geqslant a$, то по *3.12 $p_i^x \geqslant p_i^a > a$, так что по *156 $\neg\, p_i^x \mid a$. Таким образом, $x < a \,\&\, p_i^x \mid a \,\&\, \neg\, p_i^{x'} \mid a$. Остается воспользоваться $\exists$-введ.

*19.3, *19.4. Согласно *16.1, *19.2, *154 и $h \leqslant m \supset c^h \mid c^m$ (по *3.3).

19.6. Из ˣ19.1 с помощью *E7.

19.8. Случай 1: $a = 0$. По *19.6. Случай 2: $a > 0$. По *19.7 (для $i \geqslant a$ *156 с *18.5 дает $\neg p_i \mid a$).

*19.9. По *18.5 $p_i > 1$. Кроме того, $p_i^h > 0$ по *3.9 и $p_i^h < p_i^{h'}$ по *3.12′. Тогда по *156 $\neg p_i^{h'} \mid p_i^h$. По *153 $p_i^h \mid p_i^h$. Далее используем *19.5.

*19.10. Предположим $i \neq j$ и $(p_i^h)_j \neq 0$. Тогда по *19.7 $p_j \mid p_i^h$, откуда, ввиду *17.6 (и *18.4), вытекает $p_j \mid p_i$. Однако по *17.3 (вместе с *18.6) $\neg\, p_j \mid p_i$.

*19.11. Допустим, что $ab > 0$. По *19.2 (вместе с *129) $p_i^{(a)_i} \mid a$, $\neg\, p_i^{(a)_i+1} \mid a$, $p_i^{(b)_i} \mid b$, $\neg\, p_i^{(b)_i+1} \mid b$. Следовательно (по *16.4, *3.3), $p_i^{(a)_i+(b)_i} \mid ab$. Заключение будет следовать из *19.5, если мы выведем $\neg\, p_i^{(a)_i+(b)_i+1} \mid ab$. С этой целью допустим $p_i^{(a)_i+(b)_i+1} \mid ab$ и для $\exists$-удал. $p_i^{(a)_i}c = a$, $p_i^{(b)_i}d = b$, $p_i^{(a)_i+(b)_i+1}e = ab$. Тогда $\neg\, p_i \mid c$ (иначе мы бы пришли к противоречию с $\neg\, p_i^{(a)_i+1} \mid a$ по *16.4, *153, ˣ3.2). Аналогично $\neg\, p_i \mid d$. Далее $p_i^{(a)_i}cp_i^{(b)_i}d = ab = p_i^{(a)_i+(b)_i+1}e$, следовательно, по *133 (с ˣ3.2, *18.5, *3.9) $cd = p_ie$, так что $p_i \mid cd$. По *17.5 (и *18.4) это противоречит $\neg\, p_i \mid c \,\&\, \neg\, p_i \mid d$.

*19.12. Инд. по z с использованием *19.9a, *B6, *19.11, и др. (Имеет место альтернативная версия с $v \leqslant y < z$ в качестве границы.)

*19.13. Использовать *19.12 (вместе с *18.5, *3.9), *19.10, *B5.

*19.14. Использовать *B15 (с j' в качестве w), *B4, *19.11 (вместе с *B6), *19.9, *19.13.

*19.15. Ввиду *86 достаточно доказать $\neg A(b)$, где $A(b)$ есть $\exists a[0 < a < b \,\&\, \forall i_{i<b}(a)_i = (b)_i]$. Мы сделаем это методом бесконечного спуска *163. Предположим $A(b)$ и для $\exists$-удал. $0 < a < b \,\&\, \forall i_{i<b}(a)_i = (b)_i$. Тогда $b > 1$ и по *17.4 $\exists p[\mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid b]$. Допустим $\mathrm{Pr}(p) \,\&\, p \mid b$. Согласно *18.7 $\exists j(p = p_j)$. Допустим $p = p_j$, так что $p_j \mid b$. По *19.7 $(b)_j > 0$. По *18.5 и *156 $j < j' < p_j \leqslant b$, следовательно, ввиду $\forall i_{i<b}(a)_i = (b)_i$ имеет место $(a)_j = (b)_j$. Поэтому из $(b)_j > 0$ и *19.7 вытекает $p_j \mid a$. Допустим, что $p_jc = a$ и $p_jd = b$. По *145a $0 < c < d$. По *143b $d < b$. Тогда, допуская, что $i < d$, ввиду *19.11 и $\forall i_{i<b}(a)_i = (b)_i$ получим $(p_j)_i + (c)_i = (p_jc)_i = (a)_i = (b)_i = (p_jd)_i = (p_j)_i + (d)_i$ и по *132 $(c)_i = (d)_i$. Таким образом, $\forall i_{i<d}(c)_i = (d)_i$, что вместе с $0 < c < d$ и $d < b$ дает $d < b \,\&\, A(d)$.

*19.16. I. Разбором случаев ($i < a$, $i \geqslant a$) с использованием *19.14, *19.13 и *19.8 показываем $\forall i\,(a)_i =$

$(\prod_{i<a} p_i^{(a)_i})_1$, откуда искомая импликация следует по *19.15 (вместе с *B6 и др.).

Мы получаем функцию lh проще, чем в ВМ, стр. 207.

ˣ20.1. $\mathrm{lh}(a) = \sum_{i<a} \mathrm{sg}((a)_i)$.

*20.2. $\vdash a > 1 \sim \mathrm{lh}(a) > 0$.

*20.3. $\vdash \mathrm{lh}(p_i^{s+1}) = 1$.

*20.4. $\vdash a > 0 \sim a \geqslant 2^{\mathrm{lh}(a)}$.

*20.5. $\vdash a > 0 \sim \mathrm{lh}(a) < a$.

Доказательства. *20.2. I. Если $\mathrm{lh}(a) = 0$, то по *B5, *10.3, ˣ3.1 и *B13 мы имели бы $\prod_{i<a} p_i^{(a)_i} = 1$ и, таким образом, по *19.16 $a \leqslant 1$.

*20.3. По *18.5, *3.6 и *3.12 $i' < p_i^{s+1}$. Теперь используем *B14 (с i' в качестве w), *B2, *19.10, ˣ10.1, *B5, *19.9, ˣ10.2.

*20.4. I. Предположим, что $a > 0$. Чтобы получить заключение из *19.6, выводим $\prod_{i<k} p_i^{(a)_i} \geqslant 2 \exp \sum_{i<k} \mathrm{sg}((a)_i)$ индукцией по k с использованием в инд. шаге разбора случаев ($(a)_k = 0$, $(a)_k > 0$) и *18.5, *3.12, *3.13 и др.

*20.5. I. Для $a = 1$ усматривается непосредственно, а при $a > 1$ $\mathrm{lh}(a) \geqslant a$ противоречило бы *20.4 ввиду *3.12, *3.10.

ˣ21.1. $a * b = a \cdot \prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i}$.

Пусть Seq — некоторая стандартная формула такая, что выполняется *22.1.

*22.1. $\vdash \mathrm{Seq}(a) \sim a > 0 \,\&\, \forall i_{i<\mathrm{lh}(a)} (a)_i > 0$.

*22.2. $\vdash \mathrm{Seq}(a) \sim a > 0 \,\&\, \forall i_{i\geqslant\mathrm{lh}(a)} (a)_i = 0$.

*22.3. $\vdash \mathrm{Seq}(a) \sim a = \prod_{i<\mathrm{lh}(a)} p_i^{(a)_i}$.

*22.4. $\vdash a > 0 \,\&\, \forall i_{i<k} (a)_i > 0 \,\&\, \forall i_{i\geqslant k} (a)_i = 0 \sim \mathrm{lh}(a) = k \,\&\, \mathrm{Seq}(a)$.

*22.5. $\vdash \mathrm{Seq}(2^{s+1})$. *22.6. $\vdash a * 1 = a$.

*22.7. $\vdash \mathrm{Seq}(b) \sim 1 * b = b$.

*22.8. $\vdash \mathrm{Seq}(a) \,\&\, \mathrm{Seq}(b) \supset \mathrm{lh}(a * b) = \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) \,\&\, \mathrm{Seq}(a * b)$.

*22.9. $\vdash \mathrm{Seq}(a) \,\&\, \mathrm{Seq}(b) \,\&\, \mathrm{Seq}(c) \supset (a * b) * c = a * (b * c)$.

Доказательства. *22.2. Если $a > 0$, то согласно ˣ20.1 и *B14 вместе с *20.5 имеет место

$$\mathrm{lh}(a) = \sum_{i<a} \mathrm{sg}((a)_i) = \sum_{i<\mathrm{lh}(a)} \mathrm{sg}((a)_i) + \sum_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i<a} \mathrm{sg}((a)_i).$$

I. Пусть $\mathrm{Seq}(a)$ и, следовательно, $a > 0 \,\&\, \forall i_{i<\mathrm{lh}(a)} (a)_i > 0$. Тогда по *B11 (вместе с ˣ10.2) $\sum_{i<\mathrm{lh}(a)} \mathrm{sg}((a)_i) = \mathrm{lh}(a)$, поэтому, ввиду *132, $\sum_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i<a} \mathrm{sg}((a)_i)$ равно 0. Следовательно, по *B5 и *10.3 $\forall i_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i<a} (a)_i = 0$ и по *19.8 $\forall i_{i\geqslant\mathrm{lh}(a)} (a)_i = 0$. II. Пусть $a > 0 \,\&\, \forall i_{i\geqslant\mathrm{lh}(a)} (a)_i = 0$. Тогда по *B5 (вместе с ˣ10.1) второй член есть 0 и, следовательно, первый член есть $\mathrm{lh}(a)$ и поэтому по *B12 (вместе с *10.5, *10.4) $\forall i_{i<\mathrm{lh}(a)} (a)_i > 0$.

*22.3. Если $a > 0$, то по *19.16 и *B15 вместе с *20.5 $a = \prod_{i<a} p_i^{(a)_i} = (\prod_{i<\mathrm{lh}(a)} p_i^{(a)_i}) \cdot \prod_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i<a} p_i^{(a)_i}$. I. Предположим, что $\mathrm{Seq}(a)$. Тогда по *22.2 $\forall i_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i<a} (a)_i = 0$; таким образом, по *B13 второй множитель есть 1. II. Пусть $a = \prod_{i<\mathrm{lh}(a)} p_i^{(a)_i}$. По *B6 (вместе с *18.5, *3.9) $a =$ (первый множитель) > 0. Следовательно, по *133 второй множитель есть 1. Таким образом, по *B13 вместе с *3.10 и *19.8 $\forall i_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i} (a)_i = 0$ и, следовательно, по *22.2 $\mathrm{Seq}(a)$.

*22.4. I. Допустим гипотезу. По *19.8 $k \leqslant a$, следовательно, по ˣ20.1, *B14, *B11, *B5 и т. д. $\mathrm{lh}(a) = k$. Кроме того, по *22.2 $\mathrm{Seq}(a)$.

*22.7. По *22.3 (вместе с $\mathrm{lh}(1) = 0$).

*22.8. Пусть $\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \mathrm{Seq}(b)$. Тогда $a * b \neq 0$ (*B6 и др.). Ввиду *6.3 (и *B19) $\prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i} = \prod_{\mathrm{lh}(a)\leqslant i<\mathrm{lh}(a)+\mathrm{lh}(b)} p_i^{(b)_{i \dot{-} \mathrm{lh}(a)}}$. Далее, используя *22.3, *19.11, *19.13, *19.14, *6.19 и *6.3, мы получаем оценки

$$i < \mathrm{lh}(a) \supset (a * b)_i = (a)_i,$$

$$\mathrm{lh}(a) \leqslant i < \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) \supset (a * b)_i = (b)_{i \dot{-} \mathrm{lh}(a)} \,\&\, i \dot{-} \mathrm{lh}(a) < \mathrm{lh}(b),$$

$$i \geqslant \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) \supset (a * b)_i = 0.$$

Следовательно, по *22.4 $\mathrm{lh}(a * b) = \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) \,\&\, \mathrm{Seq}(a * b)$.

*22.9. Примем гипотезу. По *22.8 и оценкам в его доказательстве, *6.17, *6.3 и *6.19

$$i < \mathrm{lh}(a) \supset ((a*b)*c)_i = (a)_i = (a*(b*c))_i,$$

$$\mathrm{lh}(a) \leqslant i < \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) \supset ((a*b)*c)_i = (b)_{i \dot{-} \mathrm{lh}(a)} = (a*(b*c))_i,$$

$$\mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) \leqslant i < \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) + \mathrm{lh}(c) \supset ((a*b)*c)_i = (c)_{i \dot{-} (\mathrm{lh}(a)+\mathrm{lh}(b))} = (a*(b*c))_i$$

$$i \geqslant \mathrm{lh}(a) + \mathrm{lh}(b) + \mathrm{lh}(c) \supset ((a*b)*c)_i = 0 = (a*(b*c))_i.$$

Следовательно, по *19.15 $(a*b)*c = a*(b*c)$.

^{x}23.1. $\bar{\alpha}(x) = \prod_{i<x} p_i^{\alpha(i)+1}$.

^{x}24.1. $\tilde{\alpha}(x) = \prod_{i<x} p_i^{\alpha(i)}$.

*23.2. $\vdash i < x \sim (\bar{\alpha}(x))_i = \alpha(i) + 1$.

*24.2. $\vdash i < x \supset (\tilde{\alpha}(x))_i = \alpha(i)$.

*23.3. $\vdash i \geqslant x \sim (\bar{\alpha}(x))_i = 0$.

*24.3. $\vdash i \geqslant x \supset (\tilde{\alpha}(x))_i = 0$.

*23.4. $\vdash y \leqslant x \sim \bar{\alpha}(y) = \prod_{i<y} p_i^{(\bar{\alpha}(x))_i}$.

*24.4. $\vdash y \leqslant x \supset \tilde{\alpha}(y) = \prod_{i<y} p_i^{(\tilde{\alpha}(x))_i}$.

*23.5. $\vdash \mathrm{lh}(\bar{\alpha}(x)) = x \,\&\, \mathrm{Seq}(\bar{\alpha}(x))$.

*23.6. $\vdash \mathrm{Seq}(a) \sim \exists\alpha \exists x a = \bar{\alpha}(x)$.

*23.7. $\vdash \bar{\alpha}(t+u) = \bar{\alpha}(t) * (\overline{\lambda x \alpha(t+x)})(u)$.

*23.8. $\vdash \bar{\alpha}(x') = \bar{\alpha}(x) \cdot p_x^{\alpha(x)+1} = \bar{\alpha}(x) * 2^{\alpha(x)+1}$.

Доказательства. *23.2, *23.3, *23.4. I. По *19.14, *19.13, *B19 (вместе с *23.2) соответственно.

*23.5. Согласно *22.4.

*23.6. 1. Пусть Seq (a). Тогда $a = \prod_{i<\mathrm{lh}(a)} p_i^{(a)_i}$ [*22.3] $= \prod_{i<\mathrm{lh}(a)} p_i^{((a)_i \dot{-} 1)+1}$ [*6.7 вместе с $(a)_i > 0$, вытекающим из Seq (a), *B19] $= \prod_{i<\mathrm{lh}(a)} p_i^{(\lambda x (a)_x \dot{-} 1)(i)+1}$ [^{x}0.1, *B19] $= (\overline{\lambda x (a)_x \dot{-} 1})(\mathrm{lh}(a))$, следовательно, $\exists\alpha\exists x a = \bar{\alpha}(x)$.

*23.7. $\bar{\alpha}(t+u) = (\prod_{i<t} p_i^{\alpha(i)+1}) \cdot \prod_{i<u} p_{t+i}^{\alpha(t+i)+1}$ [*B15, *6.3] $= (\prod_{i<t} p_i^{\alpha(i)+1}) \cdot \prod_{i<u} p_{t+i}^{(\overline{(\lambda x \alpha(t+x))(u)})_i}$ [*23.2, ^{x}0.1, *B19] $= \bar{\alpha}(t) * (\overline{\lambda x \alpha(t+x)})(u)$ [^{x}21.1, *23.5].

*23.8. Сначала используем *B4, затем ^{x}21.1 вместе с *20.3, *B4, *B3, *23.5, *19.9.

5.6. У нас может возникнуть необходимость в определенных рекурсией функциях, нужных только временно (так что мы предпочитаем не добавлять новых формальных символов и аксиом) или даже употребляемых только в построении вывода из допускаемых формул при подготовке применения вспомогательного правила вывода (ср. ВМ, гл. V). В действительности мы можем употреблять такую временную функцию, допуская формулу A (α), выражающую рекурсивные уравнения и подготавливающую $\exists$-удал. из доказуемой по лемме 5.3(b) формулы $\exists\alpha A(\alpha)$ (α и все другие свободные переменные в A (α) должны оставаться фиксированными в течение этого временного использования α). Одна иллюстрация встретится в доказательстве леммы 5.3(c). Изложенное служит той же цели, что пример 9 ВМ (стр. 368), однако это появляется на поздней стадии рассмотрений, и громадные возможности настоящей системы облегчают достижение искомой цели.

Ввиду леммы 5.3(c) рекурсия может быть возвратной (ВМ, § 46, #G).

Мы можем даже найти удобным с точки зрения обозначений аналогично ввести переменную для явно определенной функции, подготавливая $\exists$-удал. из леммы 5.3(a). Некоторая иллюстрация сказанного встретится в доказательстве леммы 5.3(c). (Тот же эффект мог бы быть достигнут введением символа сокращения для функтора $\lambda y p(y)$, для которого мы, однако, предпочитаем не употреблять греческих букв.)

Лемма 5.3. *Пусть* y, z — *различные числовые переменные и* α — *некоторая функциональная переменная. Пусть* p (y), q, r (y, z), r (z) — *термы, не содержащие свободно* α, *причем* α *и* y *свободны для* z *в* r (y, z) *и в* r (z). *Тогда*

(a) $\vdash \exists\alpha\forall y \alpha(y) = p(y)$.

(b) $\vdash \exists\alpha [\alpha(0) = q \,\&\, \forall y \alpha(y') = r(y, \alpha(y))]$.

(c) $\vdash \exists\alpha\forall y \alpha(y) = r(\bar{\alpha}(y))$ *и*

$\vdash \exists\alpha\forall y \alpha(y) = r(y, \tilde{\alpha}(y))$.

(Если q содержит свободно y, то некоторые вхождения y должны в доказательстве и применениях (b) заменяться (вхождениями) других переменных. По *23.5 $\mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y)) = \mathbf{r}(\tilde{\alpha}(y))$, где $\mathbf{r}(z) = \mathbf{r}(\mathrm{lh}(z), z)$.)

Доказательства. (a) По *100 и ^{x}0.1 $\{\lambda y\, p(y)\}(y) = p(y)$, следовательно, по $\forall$- и $\exists$-введ. $\exists\alpha\forall y\alpha(y) = p(y)$.

(b) Пусть $B(c, i, w)$ есть формула $(c)_i = w$. Согласно *171 (ВМ, стр. 180)

$$\vdash \exists!\, wB(c, i, w).$$

Согласно *19.9 $\vdash (p_0^w)_0 = w$, откуда

$$(\alpha)\quad \vdash \exists cB(c, 0, w).$$

Используя *19.11 и др., *19.14, *19.10, *19.13, *19.9, получаем

$$\vdash \forall i_{i<y'}(c_1)_i = ((\textstyle\prod_{i<y'} p_i^{(c_1)_i}) \cdot p_{y'}^{w})_i \,\&\, ((\textstyle\prod_{i<y'} p_i^{(c_1)_i}) \cdot p_{y'}^{w})_{y'} = w,$$

следовательно,

$$(\beta)\ \vdash \exists c_2\{\forall i_{i\leqslant y}\exists u\,[B(c_1, i, u) \,\&\, B(c_2, i, u)] \,\&\, B(c_2, y', w)\}.$$

Пусть $Q(w)$, $R(y, z, w)$ суть $q = w$, $\mathbf{r}(y, z) = w$. По *171 $\vdash \exists!\, wQ(w)$, $\vdash \exists!\, wR(y, z, w)$. Образуем $P(y, w)$ так же, как в ВМ, стр. 218, строилась формула $P(y, x_2, \ldots, x_n, w)$, однако с использованием наших B, Q, R. По замечанию 1 (ВМ, стр. 219)

(1) $\vdash P(0, w) \sim Q(w)$,

(2) $\vdash P(y', w) \sim \exists z\,[P(y, z) \,\&\, R(y, z, w)]$,

(3) $\vdash \exists!\, wP(y, w)$,

следовательно, $\vdash \forall y \exists wP(y, w)$ и по *2.2 $\vdash \exists\alpha\forall yP(y, \alpha(y))$. Допустим для $\exists$-удал. $\forall yP(y, \alpha(y))$. Теперь так же, как в ВМ, стр. 368, имеет место $\alpha(0) = q \,\&\, \forall y\alpha(y') = \mathbf{r}(y, \alpha(y))$, следовательно, (b) получается $\exists$-введ. (и $\exists$-удал.).

(c) Случай $\tilde{\alpha}(y)$. Допустим для $\exists$-удал. из (частного случая) (b)

(i) $\beta(0) = 1 \,\&\, \forall y\beta(y') = \beta(y) \cdot p_y^{\mathbf{r}(y, \beta(y))}$.

Допустим для $\exists$-удал. из (a)

(ii) $\forall y\alpha(y) = (\beta(y'))_y$.

Используя *19.11 (вместе с ^{x}24.1, *B6 и др.), *24.3, *19.9, получаем

(iii) $(\tilde{\alpha}(y) \cdot p_y^{\mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y))})_y = \mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y))$.

Теперь мы выведем индукцией

(iv) $\beta(y) = \tilde{\alpha}(y)$.

Базис. $\beta(0) = 1$ [(i)] $= \tilde{\alpha}(0)$ [^{x}24.1, *B3]. Инд. шаг. $\beta(y') = \beta(y) \cdot p_y^{\mathbf{r}(y, \beta(y))}$ [(i)] $= \tilde{\alpha}(y) \cdot p_y^{\mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y))}$ [инд. предп.] $= \tilde{\alpha}(y) \cdot p_y^{(\beta(y'))_y}$ [(iii)] $= \tilde{\alpha}(y) \cdot p_y^{\alpha(y)}$ [(ii)] $= \tilde{\alpha}(y')$ [^{x}24.1, *B4]. — Таким образом, $\alpha(y) = (\beta(y) \cdot p_y^{\mathbf{r}(y, \beta(y))})_y$ [(ii), (i)] $= (\tilde{\alpha}(y) \cdot p_y^{\mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y))})_y$ [(iv)] $= \mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y))$ [(iii)]. Пользуясь $\forall$- и $\exists$-введ. (и двумя $\exists$-удал.), получаем $\exists\alpha\forall y\alpha(y) = \mathbf{r}(y, \tilde{\alpha}(y))$.

(c) Случай $\tilde{\alpha}(y)$. Применяем (c) с $\tilde{\alpha}(y)$ для $\mathbf{r}(\prod_{i<y} p_i^{(z)_i+1})$ в качестве $\mathbf{r}(y, z)$.

5.7. Мы приведем группу результатов, основанных на #19 в п. 5.5 и позволяющих менять кванторы. Ср. *0.5, *0.6, *2.1a, *2.2a в 4.5—4.6; ВМ, стр. 254; Клини **1955**, стр. 315; **1959**, 2.1. Для каждого $m \geqslant 0$ пусть «$\langle a_0, \ldots, a_m\rangle$» есть сокращение для $\boldsymbol{p}_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{p}_m^{a_m}$, где $\boldsymbol{p}_i$ — цифра для простого числа p_i (и «$[a_0, \ldots, a_m]$» — сокращение для $\langle a_0 + 1, \ldots, a_m + 1\rangle$, как в Клини **1955**, 9.2). Пусть далее «$\langle\alpha_0, \ldots, \alpha_m\rangle$» сокращает $\lambda x\, \langle\alpha_0(x), \ldots, \alpha_m(x)\rangle$ и пусть «$(\alpha)_i$» сокращает $\lambda x\,(\alpha(x))_i$ (и «$(\alpha)_{i,j}$» сокращает $((\alpha)_i)_j$ и т. д.). Здесь буквы удовлетворяют очевидным условиям (см. общее правило п. 3.2).

*25.1. $\vdash (\langle a_0, \ldots, a_m\rangle)_i = a_i \quad (i = 0, \ldots, m)$.

*25.2. $\vdash (\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_m\rangle)_i = \alpha_i \quad (i = 0, \ldots, m)$.

*25.3. $\vdash \forall a_0 \ldots \forall a_m A(a_0, \ldots, a_m) \sim \forall aA((a)_0, \ldots, (a)_m)$.

*25.4. $\vdash \exists a_0 \ldots \exists a_m A(a_0, \ldots, a_m) \sim \exists aA((a)_0, \ldots, (a)_m)$.

*25.5. $\vdash \forall \alpha_0 \ldots \forall \alpha_m A(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \sim \forall \alpha A((\alpha)_0, \ldots, (\alpha)_m)$.

*25.6. $\vdash \exists \alpha_0 \ldots \exists \alpha_m A(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \sim \exists \alpha A((\alpha)_0, \ldots, (\alpha)_m)$.

*25.7. $\vdash \forall a_0 \ldots \forall a_m \exists b A(a_0, \ldots, a_m, b) \sim$
$\exists \alpha \forall a_0 \ldots \forall a_m A(a_0, \ldots, a_m, \alpha(\langle a_0, \ldots, a_m\rangle))$.

*25.8. $\vdash \forall a_0 \ldots \forall a_m \exists \alpha A(a_0, \ldots, a_m, \alpha) \sim$
$\exists \alpha \forall a_0 \ldots \forall a_m A(a_0, \ldots, a_m, \lambda y \alpha(\langle a_0, \ldots, a_m, y\rangle))$.

*25.9. $\vdash \forall i_{i<a} \exists x A(i, x) \sim \exists x \forall i_{i<a} A(i, (x)_i)$.

*25.10. $\vdash \forall i_{i<a} \exists \alpha A(i, \alpha) \sim \exists \alpha \forall i_{i<a} A(i, (\alpha)_i)$.

Доказательства. *25.1. По *19.11 (с *18.5, *3.9, *129), *19.9, *19.10 (и лемме 5.2, в которой $p_i = \boldsymbol{p}_i$).

*25.2. Согласно $^{\times}$0.1, *25.1, *0.4.

*25.3. I. Просто по исчислению предикатов. II. Допустим $\forall a A((a)_0, \ldots, (a)_m)$ и применим $\forall$-удал. с $\langle a_0, \ldots, a_m\rangle$ в качестве t (ВМ, стр. 92), *25.1 и $\forall$-введ. (ВМ, *64).

*25.7. I. Используем *25.3 и *2.2, затем для $\exists$-удал. допустим $\forall a A((a)_0, \ldots, (a)_m, \alpha(a))$ и продолжаем, как в *25.3.

*25.8. I. Аналогично, используя $^{\times}$2.1 и преобразуя $A(a_0, \ldots, a_m, \lambda y \alpha(\langle\langle a_0, \ldots, a_m\rangle, y\rangle))$ в $A(a_0, \ldots, a_m, \lambda y \{\lambda z \alpha(\langle\langle (z)_0, \ldots, (z)_m\rangle, (z)_{m'}\rangle)\}(\langle a_0, \ldots, a_m, y\rangle))$.

*25.9. I. Допустим $\forall i_{i<a} \exists x A(i, x)$. Разбирая случаи ($i < a$, $\neg i < a$), получаем $\exists x [i < a \supset A(i, x)]$, следовательно, по $\forall$-введ. имеет место $\forall i \exists x [i < a \supset A(i, x)]$, откуда по *2.2 $\exists \alpha \forall i_{i<a} A(i, \alpha(i))$. Допустим $\forall i_{i<a} A(i, \alpha(i))$. Ввиду *24.2 $i < a \supset A(i, (\tilde{\alpha}(a))_i)$, откуда по $\forall$- и $\exists$-введ. $\exists x \forall i_{i<a} A(i, (x)_i)$.

Замечание 5.4. Другим способом *25.9 может быть доказано индукцией по a, причем $^{\times}$2.1 с тех пор, как оно применялось в п. 4.6, будет использовано только следующим образом: посредством *2.2 в доказательстве леммы 5.3(b) (и, следовательно, (c)) и *25.7 и прямо в доказательстве *25.8 (которое при $m = 0$ есть *2.1a). Ср. 7.15 ниже.

Теперь мы скомбинируем #F (например, для $m = 2$) с леммой 5.3.

Лемма 5.5 (формулированная для $m = 2$). *При условиях, аналогичных условиям леммы* 5.3,

(a) $Q_1(y) \vee Q_2(y),\ \neg(Q_1(y) \,\&\, Q_2(y)) \vdash^{y} \exists \alpha \forall y\, \alpha(y) =$
$$= \begin{cases} p_1(y), & \textit{если}\ \ Q_1(y), \\ p_2(y), & \textit{если}\ \ Q_2(y). \end{cases}$$

Первое допущение выражает тот факт, что случаи исчерпывающие. Остальные $\binom{m}{2}$ [1] $(=1$ для $m = 2)$ формул-допущений говорят, что случаи взаимно исключают друг друга. Формула, стоящая в заключении, есть сокращение для

$$\exists \alpha \forall y [(Q_1(y) \vee Q_2(y)) \,\&\, (Q_1(y) \supset \alpha(y) = p_1(y)) \,\&\, (Q_2(y) \supset \alpha(y) = p_2(y))].$$

(b) $Q_1(y, \alpha(y)) \vee Q_2(y, \alpha(y)),\ \neg(Q_1(y, \alpha(y)) \,\&\, Q_2(y, \alpha(y))) \vdash^{y\alpha} \exists \alpha [\alpha(0) = q \,\&\, \forall y\, \alpha(y') =$
$$= \begin{cases} r_1(y, \alpha(y)), & \textit{если}\ \ Q_1(y, \alpha(y)), \\ r_2(y, \alpha(y)), & \textit{если}\ \ Q_2(y, \alpha(y))]. \end{cases}$$

(c) $Q_1(\bar{\alpha}(y)) \vee Q_2(\bar{\alpha}(y)),\ \neg(Q_1(\bar{\alpha}(y)) \,\&\, Q_2(\bar{\alpha}(y))) \vdash^{y\alpha}$
$$\exists \alpha \forall y\, \alpha(y) = \begin{cases} r_1(\bar{\alpha}(y)), & \textit{если}\ \ Q_1(\bar{\alpha}(y)), \\ r_2(\bar{\alpha}(y)), & \textit{если}\ \ Q_2(\bar{\alpha}(y)), \end{cases}$$

и

$Q_1(y, \tilde{\alpha}(y)) \vee Q_2(y, \tilde{\alpha}(y)),\ \neg(Q_1(y, \tilde{\alpha}(y)) \,\&\, Q_2(y, \tilde{\alpha}(y))) \vdash^{y\alpha}$
$$\exists \alpha \forall y\, \alpha(y) = \begin{cases} r_1(y, \tilde{\alpha}(y)), & \textit{если}\ \ Q_1(y, \tilde{\alpha}(y)), \\ r_2(y, \tilde{\alpha}(y)), & \textit{если}\ \ Q_2(y, \tilde{\alpha}(y)). \end{cases}$$

Доказательства. (a) В специальном случае, когда $Q_1(y)$, $Q_2(y)$ — элементарные формулы или эквивалентны элементарным формулам в результате применений #D и #E, мы нуждаемся лишь в приложении леммы 5.3(a), где в качестве $p(y)$ берется терм p, получаемый использованием #F с условием $\vdash Q_i(y) \sim q_i = 0$ и с $p_i(y)$ в качестве p_i $(i = 1, 2)$.

Однако общий случай может рассматриваться и прямо следующим образом. Первая допускаемая формула дает два случая.

[1] $\binom{m}{2}$ — число сочетаний из m по 2.— *Прим. перев.*

Случай 1: $Q_1(y)$. Тогда $\neg Q_2(y)$. Следовательно,

$$(Q_1(y) \vee Q_2(y)) \& (Q_1(y) \supset p_1(y) = p_1(y)) \\ \& (Q_2(y) \supset p_1(y) = p_2(y)).$$

По $\exists$-введ.

$$\exists a\,[Q_1(y) \vee Q_2(y)) \& (Q_1(y) \supset a = p_1(y)) \\ \& (Q_2(y) \supset a = p_2(y))].$$

Случай 2: $Q_2(y)$. Аналогично.— По $\forall$-введ. и *2.2

$$\exists \alpha \forall y\,[(Q_1(y)) \vee Q_2(y) \& (Q_1(y) \supset \alpha(y) = p_1(y)) \\ \& (Q_2(y) \supset \alpha(y) = p_2(y))].$$

(b) Подставляя $(y)_0$, $\lambda t (y)_1$ вместо y, α и используя *0.1, получаем $Q_1((y)_0, (y)_1) \vee Q_2((y)_0, (y)_1)$ и $\neg(Q_1((y)_0, (y)_1) \& Q_2((y)_0, (y)_1))$. Таким образом, используя (a), мы можем допустить для $\exists$-удал.

$$\text{(i)} \qquad \forall y \rho(y) = \begin{cases} r_1((y)_0, (y)_1), & \text{если } Q_1((y)_0, (y)_1), \\ r_2((y)_0, (y)_1), & \text{если } Q_2((y)_0, (y)_1). \end{cases}$$

Применяя лемму 5.3(b) с $\rho(\langle y, z\rangle)$ в качестве $r(y, z)$, мы допустим для $\exists$-удал.

$$\text{(ii)} \qquad \alpha(0) = q \,\&\, \forall y \alpha(y') = \rho(\langle y, \alpha(y)\rangle).$$

Трактуя в (i) (по $\forall$-удал.) y как $\langle y, \alpha(y)\rangle$ и используя *25.1, в результате, учитывая (ii), получаем $Q_i(y, \alpha(y)) \supset \alpha(y') = r_i(y, \alpha(y))$. По &-, $\forall$-$\dashv$ и $\exists$-введ. мы получаем требуемую формулу. Она не содержит свободно ρ или α, поэтому $\exists$-удал. может быть завершено.

(c) Случай $\bar{\alpha}(y)$. По *158, так как Seq (z) элементарна, имеет место $\mathrm{Seq}(z) \vee \neg \mathrm{Seq}(z)$. Рассматривая затем случаи и в первом случае используя *23.6 с $Q_1(\bar{\alpha}(y)) \vee Q_2(\bar{\alpha}(y))$, получаем (i) $(\mathrm{Seq}(z) \& Q_1(z)) \vee (\mathrm{Seq}(z) \& Q_2(z)) \vee \neg \mathrm{Seq}(z)$. Используя *23.6 с $\neg(Q_1(\bar{\alpha}(y)) \& Q_2(\bar{\alpha}(y)))$, получаем $\mathrm{Seq}(z) \supset \neg(Q_1(z) \& Q_2(z))$. Ввиду этого и *50, три случая в (i) взаимно исключают друг друга. Допустим для $\exists$-удал. из результата применения (a) при $m = 3$

$$\forall z \rho(z) = \begin{cases} r_1(z), & \text{если } \mathrm{Seq}(z) \& Q_1(z), \\ r_2(z), & \text{если } \mathrm{Seq}(z) \& Q_2(z), \\ 0, & \text{если } \neg \mathrm{Seq}(z). \end{cases}$$

Теперь используем лемму 5.3 с $\rho(z)$ в качестве $r(z)$ (и затем *23.5).

(c) Случай $\tilde{\alpha}(y)$. Применяем (c) в случае $\bar{\alpha}(y)$ для $Q_i(\mathrm{lh}(z), \prod_{i<\mathrm{lh}(z)} p_i^{(z)_i \dot{-} 1})$, $r_i(\mathrm{lh}(z), \prod_{i<\mathrm{lh}(z)} p_i^{(z)_i \dot{-} 1})$ в качестве $Q_i(z)$, $r_i(z)$.

Лемма 5.6. *Пусть* x — *переменная и* A (x) — *формула. Тогда*

$$\exists! x A(x) \vdash A(x) \vee \neg A(x).$$

Доказательство. Допустим, подготавливая $\exists$-удал. из $\exists! w A(w)$, $A(w) \& \forall x (A(x) \supset w = x)$. По *158, $w = x \vee w \neq x$. Случай 1: $w = x$. Тогда A (x), следовательно, $A(x) \vee \neg A(x)$. Случай 2: $w \neq x$. Тогда $\neg A(x)$, следовательно, опять $A(x) \vee \neg A(x)$.

§ 6. Постулаты для потоков (бар-теорема). 6.1. В интуиционистской теории множеств или анализе Брауэра фундаментальную роль играет то, что он называл «множеством» («Menge») в своих ранних статьях об этом предмете (**1918—1919**, I, стр. 3; **1919**, стр. 204—205 или 950—951; **1924—1927**, I, стр. 244—245) и «потоком» («spread») позже (**1954**, стр. 8). Существует несколько различающихся в деталях версий понятия ‘поток’. Мы начнем с одной версии, отличающейся от версии ранних работ Брауэра, воспроизведенной у Клини 1950a, § 1 (на стр. 680 в конце строки 8 следует добавить «> 0»), опусканием того, что Брауэр называл «стерилизованными» («gehemmt») последовательностями. В 6.9 мы рассмотрим другие версии.

Данный *поток* порождается посредством: (i) последовательного *выбора* натуральных чисел, (свободного или) подчиненного эффективному ограничению, говорящему при заданных предыдущих выборах (соответственно выбранных натуральных числах), может или нет то или иное число быть выбрано на следующем шаге; (ii) после каждого выбора производится *сопоставление* некоторого объекта (зависящего от предыдущих выборов, если они были, и от данного выбора) из некоторого фиксированного счетного множества. Кроме того, в (i) должно эффективно определяться после каждого выбора (в зависимости от этого выбора и предыдущих, если они были), *заканчивается* на нем последовательность выборов или нет; в последнем случае ограничение, управляющее выборами, должно допускать выбор на следующем шаге по меньшей мере одного натурального числа.

В случае, когда последовательность выборов заканчивается, *элементом* множества или потока, сопоставленным этой последовательности, является конечная последовательность объектов, сопоставленных выборам вплоть до их окончания. Если же последовательность выборов продолжается неограниченно до бесконечности, то *элементом*, сопоставленным этой последовательности, является бесконечная последовательность объектов, сопоставленных выборам. При этом интуиционистски этот элемент не рассматривается как завершенный, а только как процесс, развивающийся по мере продолжения выборов.

Выше слово «эффективно» выбрано с намерением передать то, что имел в виду (в своих ранних работах) Брауэр, говоря о «законе» («Gesetz», «law»), и для чего он в соответствующей связи действительно употреблял термин «алгорифм» (**1924**, § 1; **1927**, § 2). Разрешены ли выборы и имеет ли место окончание, определяется некоторым законом, который мы называем *законом выбора*. Сопоставляемый объект определяется другим законом, который мы называем *законом сопоставления*. (Ср. Клини 1950а, стр. 680, и Гейтинг **1956**, стр. 45—46 [1]), где имеется небольшая разница в терминологии.) Эти два закона оба оперируют с конечными последовательностями выборов (натуральных чисел) вплоть до того (включительно) выбора, который рассматривается в данный момент (т. е. до натурального числа, предполагаемого к выбору, если вопрос о его выборе после уже сделанных выборов позволителен; одно число должно быть выбрано перед тем, как возникнет вопрос о том, заканчивается ли после этого последовательность выборов или какой объект следует затем сопоставлять).

Множество или поток интуиционистски не мыслится как «совокупность» своих элементов даже в том случае, когда все (разрешенные) последовательности выборов заканчиваются и, таким образом, элементы сами по себе являются интуиционистски завершенными объектами. Поступать так значило бы ввести завершенную (актуальную) бесконечность (ВМ, стр. 49); например, поток, в котором все последовательности заканчиваются после первого, совершенно свободного выбора с сопоставлением самих выбираемых чисел, есть просто множество (одночленных последовательностей) натуральных чисел. Поток с интуиционистской точки зрения есть пара законов, управляющих порождающим процессом, в ходе которого развиваются его элементы. Осмысливая свое понятие 'поток', Брауэр нашел, несмотря на выступающую в качестве исходной точки зрения потенциальную бесконечность, способ обращаться с собраниями, некоторые из которых даже несчетно бесконечны (имеют классическую мощность $2^{\aleph_0}$).

[1]) Здесь и ниже страницы книги Гейтинга **1956** указываются по русскому переводу.— *Прим. перев.*

Объектами, сопоставляемыми выборам, могут в брауэровских приложениях, например, быть натуральные числа, рациональные числа, интервалы с рациональными концами. Поскольку для данного потока эти объекты должны выбираться из заданного счетного множества, мы можем с абстрактной точки зрения считать их натуральными числами. После этого обозначения, допускаемые формальной системой, становятся достаточными для теории потоков.

В самом деле, эти обозначения включают основные конституэнты, необходимые для обращения с потоками. Эти конституэнты могут гибко комбинироваться по правилам образования нашей системы, так что специальный способ их комбинирования, дающий поток, теряет в таком формализме часть своей исключительности. Ср., впрочем, п. 7.8 ниже.

6.2. В этом разделе мы сосредоточим свое внимание на изучении последовательностей выбора, лежащих в основе того или иного потока; сами эти последовательности можно трактовать как образующие поток, выбирая в качестве закона сопоставления тривиальный закон, сопоставляющий данной последовательности выборов последнее выбранное число. Если сверх того нет никаких ограничений на выборы, то поток состоит просто из всех бесконечных последовательностей натуральных чисел в процессе их развития. Такой поток Брауэр называл *универсальным потоком*. Мы сейчас изучим его.

В случае, когда последовательно выбрано t ($\geqslant 0$) натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$, мы, другими словами, выбрали первые t значений $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, ..., $\alpha(t-1)$ теоретико-числовой функции $\alpha(x)$, оставшиеся значения которой остаются еще не определенными. Далее мы можем связать с конечной последовательностью натуральных чисел $a_0, \ldots, a_{t-1}$ натуральное число $a = p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_{t-1}^{a_{t-1}+1} = \langle a_0 + 1, \ldots, a_{t-1} + 1 \rangle = [a_0, \ldots, a_{t-1}] = \bar{\alpha}(t)$, где $t = \mathrm{lh}(\bar{\alpha}(t))$ и $a_i = \alpha(i) = (\bar{\alpha}(t))_i \dot{-} 1$ для $i < t$ (ср. #18 — #23 в 5.5 и 5.7). Это дает 1-1 отображение множества конечных последовательностей выборов на множество натуральных чисел a, для которых выполняется $\mathrm{Seq}(a)$ и которые мы называем *номерами последовательностей*. Теория последовательностей выборов, таким образом, может излагаться в терминах номеров последовательностей. Основным соотношением между номерами последовательностей является отношение, связывающее a с номером последовательности $a * 2^{s+1}$ ($s = 0, 1, 2, \ldots$), который представляет последовательность $a_0, \ldots, a_{t-1}, s$, получающуюся из $a_0, \ldots, a_{t-1}$ выбором еще одного числа s. Числа $a * 2^{s+1}$ являются, таким образом, в точности числами $\bar{\alpha}(t+1)$ для разных функций α таких, что $a = \bar{\alpha}(t)$.

6.3. Поскольку последовательности выбора («Wahlfolgen» у Брауэра **1918—1919** и **1924—1927**, «бесконечно продолжающиеся последовательности» («infinitely proceeding sequences») у Брауэра **1952** и Гейтинга **1956**) рассматриваются интуиционистски только в процессе их роста посредством новых выборов, в интуиционизме специально особое положение отводится таким свойствам последовательностей выбора, которые в случае их выполнения могут эффективно опознаваться как выполняющиеся на некоторой (конечной) стадии развития последовательности выбора. Такого рода свойство той или иной последовательности выбора α имеет вид $(Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$, где $R(a)$ — теоретико-числовой предикат, эффективный по меньшей мере на номерах последовательностей a.

По отношению к такому предикату $R(a)$ мы говорим при порождении последовательности выбора $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$, что конечная последовательность выборов $\alpha(0), \ldots, \alpha(t-1)$ или номер последовательности $\bar{\alpha}(t)$, представляющий первые t выборов, *гарантирована*, если уже из этих t выборов на основании теста для предиката R известно, что α обладает свойством $(Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$, т. е. если $(Ex)_{x \leq t} R(\bar{\alpha}(x))$. Если это было известно еще до последнего

выбора, т. е. $(Ex)_{x<t} R(\bar{\alpha}(x))$, то мы говорим, что последовательность $\alpha(0), \ldots, \alpha(t-1)$ (число $\bar{\alpha}(t)$) *начально гарантирована*, если же это стало известно только при последнем выборе, т. е. $(x)_{x<t}\bar{R}(\bar{\alpha}(x))\ \&\ R(\bar{\alpha}(t))$ (первый член конъюнкции может быть опущен, если R берется таким, что для любой α $R(\bar{\alpha}(x))$ верно самое большее для одного x), то $\alpha(0), \ldots, \alpha(t-1)$ ($\bar{\alpha}(t)$) называется *непосредственно гарантированной*. Мы говорим, что $\alpha(0), \ldots, \alpha(t-1)$ или $\bar{\alpha}(t)$ *гарантируема*, если независимо от того, как будут сделаны следующие ($(t+1)$-й, $(t+2)$-й, $(t+3)$-й...) выборы, α будет обладать свойством $(Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$, т. е. если $(\beta)\, [\bar{\beta}(t) = \bar{\alpha}(t) \to (Ex)\, R(\bar{\beta}(x))]$ или, эквивалентно, $(Ex)_{x<t} R(\bar{\alpha}(x)) \lor (\beta)(Ex)\, R(\bar{\alpha}(t) * \bar{\beta}(x))$. В частности (если заменить связанную переменную β на α), 1 гарантируема в точности тогда, когда $(\alpha)(Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$. Мы ввели эти понятия по отношению к некоторому фиксированному предикату $R(a)$. Номер последовательности w, не являющийся начально гарантированным, гарантируем относительно $R(a)$ в точности тогда, когда 1 гарантируема относительно $\lambda a R(w * a)$. Номер последовательности w *заперт*, если 1 гарантируема относительно $\lambda a R(w * a)$, т. е. если $(\alpha)(Ex)\, R(w * \bar{\alpha}(x))$. (Числа, не являющиеся номерами последовательностей, считаются *негарантированными*, *негарантируемыми*, *незапертыми*.)

6.4. Мы использовали функциональные переменные в выражении введенных только что понятий. Однако здесь есть существенное различие между классическими и интуиционистскими концепциями: для интуиционистов функции не являются завершенными объектами. Функциональный квантор общности (β) или (α) с его областью действия в выражении гарантируемости не может интуиционистски рассматриваться как конъюнкция, распространенная на все завершенные одноместные теоретико-числовые функции, как это делается классически. Интуиционистский смысл $(\alpha)(Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$ состоит в том, что всякий раз, когда произвольным образом выбирают натуральные числа $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$, в конечном счете обязательно наталкиваются на некоторое x такое, что $R(\bar{\alpha}(x))$.

Каким образом интуиционисты могут использовать понятие гарантируемости?

Для начала можно сузить, в соответствии с их интерпретацией (α), $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$ до $(Ex)R(\bar{\alpha}_1(x))$, где α_1 — такие частные последовательности выбора, которые могут быть специфицированы. Именно, это такие последовательности, в связи с которыми Брауэр (**1952**, стр. 143; **1954**, стр. 7) использовал термин «остроконечные стрелы» и развитие которых заранее полностью определяется соответствующим законом (после любых $t \geqslant 0$ выборов закон допускает в точности один новый выбор). Мы имеем формальное воплощение этого в аксиомной схеме 10F, где функторы u выражают примитивно рекурсивные функции в случае, когда они не содержат никаких функциональных переменных (см. лемму 3.3).

Однако, как будет показано, это несколько слабое использование $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$. Действительно, при интерпретации, в которой α_1, задающая остроконечную стрелу, есть некоторая общерекурсивная функция, $(\alpha_1)(Ex)R(\bar{\alpha}_1(x))$, вообще говоря, слабее, чем $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$, и важная «теорема о веере» (см. п. 6.10 ниже) становится неверной, если ее предположения соответствующим образом ослабить (Клини 1950a, § 3, или лемма 9.8 ниже). Интуиционисты могут воздержаться от принятия такой интерпретации, однако они не в состоянии опровергнуть ее, поскольку их конкретные конструкции или законы ей соответствуют. Прослеживая дальнейший материал с классической точки зрения, можно сказать, что в то время как теорема о веере становится верной после расширения класса функций α до арифметических функций (т. е. таких, для которых предикат $\alpha(x) = w$ арифметический (по Гёделю); ВМ, стр. 215, см. лемму 9.12 ниже), для исчерпывания полной силы $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$ недостаточно даже всех гиперарифметических функций (Клини **1955b**, стр. 210, 208, вместе с **1959**, стр. 48, или **1959b** [см. также Роджерс **1964** — *прим. перев.*]).

Замечание 6.1. В интуиционистской системе мы можем, используя *158, доказать $\forall\alpha\forall x(\alpha(x) = 0 \vee \alpha(x) \neq 0)$; это, кажется, влечет, что каждая функция α, принимающая только значения 0 или 1, рекурсивна. (Более общо, мы можем доказать $\forall\alpha\forall x\forall w(\alpha(x) = w \vee \alpha(x) \neq w)$,

что, кажется, говорит, что предикат $\alpha(x) = w$ разрешим, следовательно, он, вероятно, рекурсивен, и поэтому по теореме III (ВМ, стр. 249) функция $\alpha = \lambda x \mu w \alpha(x)=w$ рекурсивна.) С другой стороны, как было отмечено, мы не можем интерпретировать квантор общности (α) как «для всех рекурсивных функций α» без потери интуиционистской теоремы о веере. Это кажущееся противоречие разъясняется следующим образом. Когда мы выбираем числа $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ..., формируя некоторую последовательность выбора α, после каждого выбора известно, какое число было выбрано. Именно в этом смысле имеет место $\forall\alpha\forall x(\alpha(x) = 0 \vee \alpha(x) \neq 0)$. Однако в процессе роста $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... перед каждым выбором любое число в случае универсального потока (любое число $\leqslant 1$ в случае потока последовательностей выбора, управляемых законом $(x)\,\alpha(x) \leqslant 1$) допустимо для выбора; таким образом, α не может быть ограничена до того, чтобы стать рекурсивной функцией.

Замечание 6.2. В данной классической системе с такими же правилами образования, что и интуиционистская, функторы u, пригодные для аксиомной схемы 10F, будут теми же. (Это обстоит не так для классических систем, подобных рассмотренным у Гильберта — Бернайса, дополнение IV, и имеющих оператор выбора ε или оператор дескрипции ι.) Полное использование допущений $\forall\alpha A(\alpha)$ достигается в классической системе через косвенные доказательства.

6.5. Брауэр нашел решение проблемы использования предположений гарантируемости, более полное, чем даваемое схемой аксиом 10F. Это решение состоит в рассмотрении ситуации с противоположного направления, продвигаясь назад от тех номеров последовательностей $\bar{\alpha}(x)$, для которых $R(\bar{\alpha}(x))$, к другим номерам, имеющим такие номера во всех своих (достаточно продвинутых) продолжениях.

Чтобы фиксировать наши идеи, сосредоточим на время внимание на номерах последовательностей, не являющихся начально гарантированными (так что ни в какой последовательности выбора α мы не могли опередить первый x такой, что $R(\bar{\alpha}(x))$ найдено верным). Тогда, слегка перефразируя (с целью приспособить его к нашим обозначениям и терминологии) примечание 7 работы Брауэра **1927**, можно сказать: если мыслить интуиционистски, то эта гарантируемость не означает ничего иного, как свойство, определяемое следующим образом. Оно выполняется для всякого номера последовательности a такого, что $R(a)$. Оно выполняется для данного номера последовательности a, если для каждого s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) оно выполняется для $a * 2^{s+1}$. Это замечание автоматически влечет свойства вполне упорядоченности.

Другими словами, брауэровское примечание 7 говорит, что гарантируемость есть такое свойство (не начально

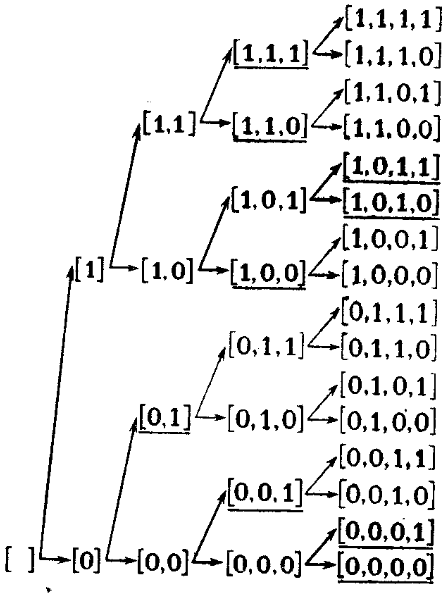

Рис. 1.

гарантированных номеров последовательностей), которое происходит от непосредственно гарантированных номеров последовательностей и распространяется назад к негарантированным, но гарантируемым номерам последовательностей через соединения номера последовательности a с его непосредственными продолжениями $a * 2^{s+1}$ ($s = 0, 1, 2, \ldots$).

Рассмотрим теперь ситуацию, используя некоторую геометрическую иллюстрацию (рис. 1). Мы можем представить универсальный поток в виде «дерева» с номерами последовательностей $a = p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_{t-1}^{a_{t-1}+1} = [a_0, \ldots, a_{t-1}]$ в вер-

шинах. Начальная (самая левая) вершина занята номером последовательности $1 = [\quad] = \bar{\alpha}(0)$. Из каждой вершины, занятой номером последовательности a, выходит бесконечно много стрелок, ведущих к следующим вершинам, занятым номерами последовательностей $a * 2^{s+1}$ ($s = 0, 1, 2, \ldots$). Часть этого дерева показана на рис. 1; однако стрелки, соответствующие $s > 1$, оказываются вне этого рисунка. Аналогично многоточие намекает на вершины, для которых $t = \mathrm{lh}(a) > 4$. (Рисунок в действительности показывает «бинарный поток» или «бинарный веер» п. 6.10 вплоть до его вершин с $\mathrm{lh}(a) \leqslant 4$.)

Бесконечная последовательность выбора α, т. е. $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ..., представляется бесконечным путем в этом дереве, начинающимся из самой левой вершины (занятой $[\quad]$) и следующим по стрелкам. Конечная последовательность выборов представляется некоторым начальным сегментом такого пути или вершиной $\bar{\alpha}(t)$ — правым концом этого сегмента. Таким образом, до того, как выбрано $\alpha(0)$, мы имеем вершину $[\quad]$; затем если мы выбрали $\alpha(0) = 1$, мы двигаемся к вершине $[1]$; выбрав на следующем шаге $\alpha(1) = 0$, мы двигаемся к $[1, 0]$; выбирая далее $\alpha(2) = 1$,— к $[1, 0, 1]$, выбирая $\alpha(3) = 1$, переходим к $[1, 0, 1, 1]$ и т. д.

Рассмотрим некоторый предикат $R(a)$, эффективный по меньшей мере на номерах последовательностей a. Для каждого α пусть мы следуем по соответствующему пути в дереве (отправляясь от $[\quad]$) до тех пор, пока не наткнемся первый раз на вершину $\bar{\alpha}(x)$, для которой $R(\bar{\alpha}(x))$. Если это когда-либо случилось, то мы подчеркиваем соответствующую вершину. В терминах п. 6.3 мы подчеркиваем вершины, занятые непосредственно гарантированными номерами последовательностей.

Теперь суждение $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$, рассмотренное в 6.3 и (интуиционистски) в 6.4, геометрически означает, что, двигаясь по любому бесконечному пути, начинающемуся в самой левой вершине $[\quad]$ и следующему по стрелкам, мы обязательно встречаем подчеркнутую вершину. Это проиллюстрировано на рис. 1 в той мере, в которой это может быть показано при наличии лишь стрелок с $s = 0, 1$. Более общо, $(\beta)(Ex)R(a * \bar{\beta}(x))$ или, словами, *a гарантируемо* (*но не начально гарантировано*) геометрически означает, что двигаясь по любому бесконечному пути, начинающемуся с вершины, занятой a, и следующему вдоль стрелок, мы обязательно встречаем некоторую подчеркнутую вершину.

Брауэровская перемена направления состоит в замене этого смысла суждения *a гарантируемо* (*но не начально гарантировано*) принадлежностью a к классу номеров последовательностей, который определяется как содержащий все подчеркнутые номера, включающий a, коль скоро он включает все $a * 2^{s+1}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, и не содержащий никаких других номеров последовательностей. (Это определение есть некоторый пример индуктивного определения в терминологии ВМ, § 53.)

На рис. 1 гарантируемые, но не начально гарантированные номера последовательностей суть те, которые набраны полужирным шрифтом; при этом предполагается соответствующее поведение вдоль путей, содержащих стрелки с $s \geqslant 2$. Однако с точки зрения первого разъяснения *гарантируемости* (*но не начальной гарантированности*), которое мы теперь назовем *явным смыслом*, набрать вершину полужирным шрифтом означает, что при движении из нее вправо вдоль стрелок по всем расходящимся путям обязательно встречают подчеркнутую вершину. При втором разъяснении (*индуктивный смысл*) набор вершины полужирным шрифтом означает ее принадлежность классу вершин, порожденному отнесением к нему подчеркнутых вершин и включением при продвижении влево по сходящимся направлениям вершин a, для которых все $a * 2^{s+1}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ уже включены в этот класс.

Поскольку явный смысл, который прямо выражается в наших символах в п. 6.3, уже использовался до представления примечания 7 работы Брауэра **1927**, это примечание Брауэра следует трактовать так: два смысла *гарантируемости* (*но не начальной гарантированности*) эквивалентны, и эта эквивалентность дана нам (если мыслить интуиционистски) интуицией. Мы с ним согласны.

Набирать ли на рисунке вершины полужирным шрифтом, пользуясь критерием нахождения подчеркнутых вершин при движении вправо по всем путям, или двигаться влево поперек рисунка, набирая вершины полужирным шрифтом согласно двум принципам порождения класса вершин,— результат будет одним и тем же.

Одна из импликаций в этой эквивалентности в действительности не представляет проблемы, т. е. легко доказывается (см. конец 6.7). Другая импликация, утверждающая, что из *гарантируемости* (*но не начальной гарантированности*) в явном смысле следует это же свойство в индуктивном смысле (или свойство «вполне упорядоченности», которое непосредственно в этом содержится), составляет содержание того, что Брауэр называл впоследствии бар-теоремой (теоремой о запирании) (**1954**, стр. 14, ср. замечание 6.3 ниже).

В работе **1924**, § 1 (ср. **1924а**, §§ 1—2), в тексте **1927**, § 2, и в **1954** Брауэр использовал более сложный анализ, чтобы доказать бар-теорему. Примечание 7 работы **1927** завершается словами: «доказательство последнего свойства [вполне упорядоченности], проведенное в тексте, представляется мне все же интересным из-за содержащихся в ходе его рассуждений предложений».

Мы просто введем то, что здесь требуется схемой аксиом $^x26.3$, которая в действительности дает бар-теорему для универсального потока. Эта схема имеет форму индуктивного принципа, применимого ко всякому свойству гарантируемых (но не начально гарантированных) номеров последовательностей, выразимому в символах системы и происходящему и распространяющемуся тем же способом, что и само свойство гарантируемости (с точки зрения его индуктивного смысла). Мы ограничиваемся адаптацией примечания 7 статьи Брауэра **1927** вместо трактовки в тексте **1927**.

Таким образом, мы быстро минуем спорные пункты брауэровского анализа, постулируя некоторую схему аксиом. Это может произвести на некоторых впечатление уловки. Однако эта схема аксиом, как мы увидим в следствии 9.9 (и 9.2, согласно которому недоказуемо ее отрицание), независима от других интуиционистских постулатов. Поэтому вопрос о выводе этой схемы (бар-теоремы) может возникнуть только после введения дополнительных постулатов. Мы не убеждены, что любые известные заменители (бар-теоремы) более фундаментальны или интуитивны. Вместе с тем, имея в виду внимание, которое продолжает привлекать доказательство в работе Брауэра **1927**, мы изучим это доказательство в п. 6.12.

6.6. Мы подумаем сейчас, каким образом можно сформулировать бар-теорему в формальных символах.

Определение свойства в брауэровском примечании 7 после ограничения его на не начально гарантированные номера последовательностей читается как индуктивное определение гарантируемых номеров. Если мы заменим «a такое, что $R(a)$» на «a, которое гарантировано», то без ограничения оно читается как индуктивное определение всех гарантируемых номеров (Клини **1955a**, стр. 416). Если мы опускаем ограничение, но требуем, чтобы R был предикатом таким, что при любом α $R(\bar{\alpha}(x))$ выполняется самое большее для одного x, то это определение читается как индуктивное определение гарантируемых, но не начально гарантированных номеров. Если мы просто опустим ограничение, то оно читается как индуктивное определение запертых номеров. Для нас представляет небольшую разницу, какое прочтение использовать; вместе с тем последнее прочтение самое простое.

Мы также достигаем некоторого упрощения, утверждая индуктивный принцип, соответствующий индуктивному определению, только для выводимых свойств 1 (для которой свойства 'гарантируемости', 'гарантированности, но не начальной гарантированности' и 'запертости' эквивалентны). Как мы убедимся в п. 6.11, при этом ничего не теряется.

Для выражения гарантируемости в явном смысле п. 6.3 мы теперь пишем «гарантируемость$_E$», а для гарантируемости в индуктивном смысле замечания 7 —«гарантируемость$_I$». Бар-теорема тогда есть импликация

(*) гарантируемость$_E$ $\rightarrow$ гарантируемость$_I$,

где правая часть изображается индуктивным принципом, соответствующим индуктивному определению (ср. ВМ, § 53). Нам нужно формализовать его применительно к 1 и относительно R. Левая часть (*) есть просто $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$.

Пусть $\mathfrak{J}(R, A)$ есть $(a)[\mathrm{Seq}(a) \& R(a) \rightarrow A(a)] \&$ $(a)[\mathrm{Seq}(a) \& (s)A(a*2^{s+1}) \rightarrow A(a)] \rightarrow A(1)$ и пусть для любых формул $\mathrm{A}(\mathrm{a})$ и $\mathrm{R}(\mathrm{a})$ $\mathfrak{J}(\mathrm{R}, \mathrm{A})$ — соответствующим образом построенная формула. Индуктивный принцип, изображаемый правой частью (*), есть $(A)\mathfrak{J}(R, A)$.

Таким образом, (*) воспроизводится в неформальных обозначениях как $(\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x)) \rightarrow (A)\mathfrak{J}(R, A)$. Выражая это в формальных символах, насколько это возможно при отсутствии предикатных переменных (ср. ВМ, стр. 382),

мы приходим к $\forall\alpha\exists x\mathrm{R}(\bar{\alpha}(x)) \supset \mathfrak{J}(\mathrm{R}, \mathrm{A})$, что (с тривиальными переделками) есть *26.1.

6.7. Прежде чем постулировать небольшое сужение (*) для базисной или интуиционистской системы, убедимся, что (*) доказуема в классической системе. Доказательство является формализацией классического доказательства (*) у Клини **1955a**, (E), стр. 417.

Пусть a, s, x — произвольные числовые переменные (a и s различны), α — любая функциональная переменная, A(a) — произвольная формула, не содержащая свободно s и в которой s свободна для a, R(a) — любая формула, не содержащая свободно α и x и в которой α и x свободны для a. Тогда

*26.1°. $\vdash \forall\alpha\exists x\mathrm{R}(\bar{\alpha}(x)) \& \forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \mathrm{R}(a) \supset \mathrm{A}(a)] \&$
$\forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \forall s\mathrm{A}(a*2^{s+1}) \supset \mathrm{A}(a)] \supset \mathrm{A}(1)$.

Доказательство. Согласно классическому исчислению высказываний достаточно предположить

(a) $\forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \mathrm{R}(a) \supset \mathrm{A}(a)]$,

(b) $\forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \forall s\mathrm{A}(a*2^{s+1}) \supset \mathrm{A}(a)]$,

(c) $\neg\mathrm{A}(1)$

и вывести $\neg\forall\alpha\exists x\mathrm{R}(\bar{\alpha}(x))$, что по правилам классического исчисления предикатов (*85, *86) эквивалентно $\exists\alpha\forall x \neg\mathrm{R}(\bar{\alpha}(x))$. Аналогично (b) эквивалентно $\forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \neg\mathrm{A}(a) \supset \exists s\neg\mathrm{A}(a*2^{s+1})]$, откуда по *97 получаем $\forall a\exists s[\mathrm{Seq}(a) \& \neg\mathrm{A}(a) \supset \mathrm{A}(a*2^{s+1})]$, следовательно, по *2.2 имеет место

$$\exists\sigma\forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \neg\mathrm{A}(a) \supset \neg\mathrm{A}(a*2^{\sigma(a)+1})].$$

Допустим для $\exists$-удал. из последней формулы

(d) $\forall a\ [\mathrm{Seq}(a) \& \neg\mathrm{A}(a) \supset \neg\mathrm{A}(a*2^{\sigma(a)+1})]$.

По лемме 5.3 (c) $\exists\alpha\forall x\alpha(x) = \sigma(\bar{\alpha}(x))$, так что предположим

(e) $\forall x\alpha(x) = \sigma(\bar{\alpha}(x))$.

Теперь выведем индукцией

(f) $\neg\mathrm{A}(\bar{\alpha}(x))$.

Базис. По *23.1 и *B3 получаем $\bar{\alpha}(0) = 1$. Следовательно, согласно (c), $\neg\mathrm{A}(\bar{\alpha}(0))$. Инд. шаг. $\bar{\alpha}(x') =$

$\bar{\alpha}(x) * 2^{\alpha(x)+1}$ [*23.8] $= \bar{\alpha}(x) * 2^{\sigma(\bar{\alpha}(x))+1}$ [(e)]. Следовательно, ввиду (d), инд. предп. и *23.5, $\neg A(\bar{\alpha}(x'))$.—

Согласно (f) и (a), а также *23.5 получаем $\neg R(\bar{\alpha}(x))$. По $\forall$- и $\exists$-введ. $\exists\alpha\forall x \neg R(\bar{\alpha}(x))$.

Обратная импликация

(**) гарантируемость$_{\mathrm{I}}$ $\to$ гарантируемость$_{\mathrm{B}}$

(Клини **1955a**, (D), стр. 416) есть $(A)\,\mathfrak{I}(R, A) \to (\alpha)(Ex)R(\bar{\alpha}(x))$. Это выполняется интуиционистски вследствие $\mathfrak{I}(R, A_1) \to (\alpha)(Ex)\,R(\bar{\alpha}(x))$, где $A_1 = \lambda a\,(\alpha)(Ex)\,R(a * \bar{\alpha}(x))$. Таким образом, *26.2 может рассматриваться как дающее (**) в базисной системе.

Если a, s, x — произвольные различные числовые переменные, α — произвольная функциональная переменная, R(a) — любая формула, не содержащая свободно x, s, α и в которой x, s, α свободны для a, то

*26.2. $\vdash \{\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, R(a) \supset \forall\alpha\exists x R(a * \bar{\alpha}(x))] \,\&$
$\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \forall s\forall\alpha\exists x R((a * 2^{s+1}) * \bar{\alpha}(x)) \supset$
$\forall\alpha\exists x R(a * \bar{\alpha}(x))] \supset$
$\forall\alpha\exists x R(1 * \bar{\alpha}(x))\} \supset \forall\alpha\exists x R(\bar{\alpha}(x))$.

Доказательство. Используя $a = a * \bar{\alpha}(0)$ (*22.6 вместе с ×23.1 и *B3), получаем

(a) $\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, R(a) \supset \forall\alpha\exists x R(a * \bar{\alpha}(x))]$.

С тем, чтобы получить ниже (b), допустим

(i) Seq(a) и (ii) $\forall s\forall\alpha\exists x R((a * 2^{s+1}) * \bar{\alpha}(x))$.

Ввиду (ii), $\exists x R((a * 2^{\alpha(0)+1}) * \overline{\{\lambda x \alpha(1+x)\}}(x))$. Допустим, подготавливая $\exists$-удал., (iii) $R((a * 2^{\alpha(0)+1}) * \overline{\{\lambda x \alpha(1+x)\}}(x))$. Однако $(a * 2^{\alpha(0)+1}) * \overline{\{\lambda x\alpha(1+x)\}}(x) = a * (2^{\alpha(0)+1} * \overline{\{\lambda x \alpha(1+x)\}}(x))$ [*22.9 вместе с (i), *22.5, *23.5] $= a * \bar{\alpha}(1+x)$ [*23.7 вместе с ×23.1, *B4, *B3, *127]. Таким образом, пользуясь $\exists$-введ., (завершая) $\exists$-удал. и $\forall$-введ., получаем $\forall\alpha\exists x R(a * \bar{\alpha}(x))$. По &-удал. и $\supset$- и $\forall$-введ. имеет место

(b) $\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \forall s\forall\alpha\exists x R((a * 2^{s+1}) * \bar{\alpha}(x)) \supset$
$\forall\alpha\exists x R(a * \bar{\alpha}(x))]$.

Допуская антецедент главной импликации *26.2 и используя (a) и (b), получаем $\forall\alpha\exists x R(1 * \bar{\alpha}(x))$, откуда согласно *22.7 и *23.5 следует консеквент $\forall\alpha\exists x R(\bar{\alpha}(x))$.

6.8. Ограничение, гласящее, что R — эффективный предикат, введенное в начале п. 6.3 (и несущественное с классической точки зрения), должно быть явно выражено в постулировании бар-теоремы (*) для базисной или интуиционистской системы. Если принять просто *26.1, то (*) окажется, ввиду *27.23, несовместимой с дальнейшим интуиционистским постулатом ×27.1, который будет введен в § 7. Мы дадим четыре формы ×26.3a — ×26.3d новой схемы аксиом. Коль скоро одна из них постулируется, остальные три аксиомы становятся доказуемыми. В тех случаях, когда неважно, какую именно из этих аксиом мы упоминаем, будет идти речь просто об аксиоме ×26.3. Ограничения для ×26.3a и ×26.3c те же, что и для *26.1. В случае ×26.3b α и ρ — произвольные различные функциональные переменные и т. д.

×26.3a. $\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \supset R(a) \vee \neg R(a)] \,\&\, \forall\alpha\exists x R(\bar{\alpha}(x)) \,\&$
$\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, R(a) \supset A(a)] \,\&\, \forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&$
$\forall s A(a * 2^{s+1}) \supset A(a)] \supset A(1)$.

×26.3b. $\forall\alpha\exists x \rho(\bar{\alpha}(x)) = 0 \,\&\, \forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \rho(a) =$
$0 \supset A(a)] \,\&\, \forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \forall s A(a * 2^{s+1}) \supset$
$A(a)] \supset A(1)$.

×26.3c. $\forall\alpha\exists! x R(\bar{\alpha}(x)) \,\&\, \forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, R(a) \supset A(a)] \,\&$
$\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \forall s A(a * 2^{s+1}) \supset A(a)] \supset A(1)$.

×26.3d. $\forall\alpha\exists x\,[R(\bar{\alpha}(x)) \,\&\, \forall y_{y<x} \neg R(\bar{\alpha}(y))] \,\&$
$\forall\alpha\forall x\,[R(\bar{\alpha}(x)) \,\&\, \forall y_{y<x} \neg R(\bar{\alpha}(y)) \supset A(\bar{\alpha}(x))] \,\&$
$\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \forall s A(a * 2^{s+1}) \supset A(a)] \supset A(1)$.

Вывод ×26.3b из ×26.3a. Беря $\rho(a) = 0$ в качестве R(a) в ×26.3a, по *158 имеем $R(a) \vee \neg R(a)$ и тем более $\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \supset R(a) \vee \neg R(a)]$.

$^{x}26.3a$ из $^{x}26.3b$. Примем четыре гипотезы (a) — (d) из $^{x}26.3a$. По $*158$, поскольку Seq (a) элементарна, имеет место Seq (a) $\vee \neg$ Seq (a). Разбирая затем случаи и в первом случае подслучаи из (a), получаем (Seq (a) & R (a)) $\vee$ $\neg$ (Seq (a) & R (a)). Чтобы применить лемму 5.5(a), используем это и $*50$ и допустим, подготавливая $\exists$-удал. из результата,

$$\forall a \rho (a) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathrm{Seq}(a) \,\&\, R(a), \\ 1, & \text{если } \neg (\mathrm{Seq}(a) \,\&\, R(a)). \end{cases}$$

Теперь Seq (a) $\supset$ (R (a) $\sim \rho$ (a) $= 0$). Используя это и $*23.5$, получаем, что три гипотезы $^{x}26.3b$ следуют из (b) — (d).

$^{x}26.3c$ из $^{x}26.3a$. Допустим $\forall\alpha\exists! x R(\bar{\alpha}(x))$. Если допустить Seq (a), то, ввиду $*23.6$, мы можем положить $a = \bar{\alpha}(x)$ (т. е. мы допускаем это, подготавливая $\exists$-удал.). Используя лемму 5.6, получаем $R(\bar{\alpha}(x)) \vee \neg R(\bar{\alpha}(x))$, следовательно, R (a) $\vee \neg$ R (a). Отсюда (завершая) $\exists$-удал. и используя $\supset$- и $\forall$-введ., получаем $\forall a [\mathrm{Seq}(a) \supset R(a) \vee \neg R(a)]$. Кроме того, $\forall\alpha\exists x R(\bar{\alpha}(x))$.

$^{x}26.3a$ из $^{x}26.3c$. Допустим четыре гипотезы **(a)** — **(d)** из $^{x}26.3a$. Пусть $R'(a)$ есть $R(a) \,\&\, \forall y_{y<lh(a)} \neg R(\prod_{i<y} p_i^{(a)_i})$. Тогда, ввиду $*23.5$ и $*23.4$, получаем $R'(\bar{\alpha}(x)) \sim R(\bar{\alpha}(x)) \,\&\, \forall y_{y<x} \neg R(\bar{\alpha}(y))$. Согласно $*23.5$ $\mathrm{Seq}(\bar{\alpha}(x))$, поэтому (a) дает $R(\bar{\alpha}(x)) \vee \neg R(\bar{\alpha}(x))$. Тогда по $*149a$ и $*174b$ $\forall\alpha[\exists x R(\bar{\alpha}(x)) \supset \exists! x R'(\bar{\alpha}(x))]$ и по $*69$ $\forall\alpha\exists x R(\bar{\alpha}(x)) \supset \forall\alpha\exists! x R'(\bar{\alpha}(x))$. Таким образом, имеем $\forall\alpha\exists! x R'(\bar{\alpha}(x))$. Поскольку $R'(a) \supset R(a)$, мы также имеем $\forall a [\mathrm{Seq}(a) \,\&\, R'(a) \supset A(a)]$. Теперь мы можем применить $^{x}26.3c$ с R' в качестве R.

$^{x}26.3d$ из $^{x}26.3c$. Используем $*174b$.

6.9. Вышеупомянутый принцип индукции $^{x}26.3$ обеспечивает бар-теорему для универсального потока. Он будет аналогично выглядеть и для других потоков последовательностей выбора.

Именно, вместо того, чтобы рассматривать класс всех номеров последовательностей *a*, характеризуемый посредством Seq (*a*), мы будем теперь иметь дело с его подходящим

подклассом, характеризуемым условием $\sigma(a) = 0$, где σ — некоторая функция.

Для простоты мы можем исключить из рассмотрения заканчивающиеся последовательности выборов (ср. 6.1), так что σ будет служить законом выбора (другая функция в законе выбора (6.1), говорящая об окончании той или иной последовательности выборов, теперь отпадает). Мы ничего не теряем при этом, поскольку нас интересует только, каковы надежды найти x такой, что $R(\bar{\alpha}(x))$. Действительно, вообще говоря, в случае упрощенного закона выбора σ, не предусматривающего окончания, мы тем не менее можем достичь эффекта окончания, либо (a) используя предикат R и считая последовательность $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$,... заканчивающейся на $\alpha(x-1)$, если x — наименьшее число такое, что $R(\bar{\alpha}(x))$, либо (b) для потоков с нетривиальным законом сопоставления используя. положительные числа в качестве объектов (или представлений объектов), которыми мы интересуемся при сопоставлении, и сопоставляя 0 в остальных случаях (это в сущности примечание 1 работы Брауэра **1924—1927I**).

В нашей теории последовательностей выбора мы пользуемся преимуществом употребления пустой последовательности, представляемой номером последовательности $\bar{\alpha}(0)=1$. (Брауэр не использует ни пустой последовательности, ни номеров последовательностей.) Для потоков, все элементы которых являются последовательностями с одним и тем же первым членом, мы находим удобным сопоставлять этот первый член пустой последовательности выбора. В таком случае закон сопоставления ϱ оперирует просто со всеми номерами последовательностей a такими, что $\sigma(a) = 0$. В случае, когда мы не нуждаемся в элементах, начинающихся с одного и того же первого члена (сопоставленного 1), мы можем просто игнорировать вопрос, чему равно $\varrho(1)$. Однако независимо от того, желаем мы или нет рассматривать $\varrho(1)$ как первый член элементов, представляется естественным получить преимущества от нашей пустой последовательности, полагая поток непустым в точности тогда, когда пустая последовательность допустима, т. е. когда $\sigma(1) = 0$. Таким образом, закон выбора сам по себе достаточен для ответа на вопрос, пуст или нет данный поток.

Если мы, таким образом, одновременно опускаем оканчивающиеся последовательности и используем пустую последовательность для проверки пустоты потока, мы приходим к следующей формуле Spr (σ), выражающей в нашем формализме ограничения на σ, при которых σ характеризует последовательности выбора того или иного потока.

$$\mathrm{Spr}(\sigma):\ \forall a\,[\sigma(a)=0 \supset \mathrm{Seq}(a)]\ \&\ \forall a\,[\sigma(a)=0 \supset \exists s\sigma(a*2^{s+1})=0]\ \&\ \forall a\,[\mathrm{Seq}(a)\ \&\ \sigma(a)>0 \supset \forall s\sigma(a*2^{s+1})>0].$$

В *26.4 мы устанавливаем бар-теорему для потоков в общем случае, используя эту версию понятия 'потока'. Вторая гипотеза $\sigma(1)=0$ выражает непустоту потока.

Если бы мы просто опустили оканчивающиеся последовательности (что привело бы к версии Гейтинга **1956**, стр. 45—46, совпадающей по существу с примечанием 2 работы Брауэра **1924—1927I**), мы бы могли тогда вместо Spr (σ) использовать формулу Spd (σ), получающуюся из нее приписыванием формулы $\sigma(1)=0\ \&$ и заменой второго квантора $\forall a$ на $\forall a_{a>1}$. *26.4 тогда перешло бы в *26.4′, где $\exists s\sigma(2^{s+1})=0$ вместо $\sigma(1)=0$ выражало бы непустоту потока.

Согласно версии понятия 'потока' у Брауэра **1954** все потоки непусты.

Допустимость последовательности выбора α по закону выбора σ некоторого потока формально выражается как $\forall x\sigma(\bar{\alpha}(x))=0$. Для последней формулы мы будем использовать сокращение «$\alpha\in\sigma$».

Форма *26.4a утверждения *26.4 соответствует ^{x}26.3a и доказывается на его основе. Используя вместо этого ^{x}26.3b — ^{x}26.3d, мы получаем соответствующие формы *26.4b — *26.4d (не все они явно выписаны ниже). Кроме того, из каждого утверждения *26.4a — *26.4d могут быть выведены остальные (с использованием только групп постулатов A — D) так же, как это делалось и в случае *26.3. Аналогично ниже обстоит дело с *26.6, *26.7 и *26.8.

*26.4a. $\vdash \mathrm{Spr}(\sigma)\ \&\ \sigma(1)=0\ \&\ \forall a\,[\sigma(a)=0 \supset R(a) \vee \neg R(a)]\ \&\ \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists x R(\bar{\alpha}(x))\ \&\ \forall a\,[\sigma(a)=0\ \&\ R(a) \supset A(a)]\ \&\ \forall a\,[\sigma(a)=0\ \&\ \forall s\{\sigma(a*2^{s+1})=0 \supset A(a*2^{s+1})\} \supset A(a)] \supset A(1).$

*26.4d. $\vdash \mathrm{Spr}(\sigma)\ \&\ \sigma(1)=0\ \&\ \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists x\,[R(\bar{\alpha}(x))\ \&\ \forall y_{y<x}\neg R(\bar{\alpha}(y))]\ \&\ \forall\alpha\forall x\,[\sigma(\bar{\alpha}(x))=0\ \&\ R(\bar{\alpha}(x))\ \&\ \forall y_{y<x}\neg R(\bar{\alpha}(y)) \supset A(\bar{\alpha}(x))]\ \&\ \forall a\,[\sigma(a)=0\ \&\ \forall s\{\sigma(a*2^{s+1})=0 \supset A(a*2^{s+1})\} \supset A(a)] \supset A(1).$

Доказательство *26.4a. В I мы укажем отображение универсального потока на поток, характеризуемый σ. Таким образом, каждому элементу α универсального потока будет сопоставлена функция α_γ $(=\lambda t\,(\gamma\,(\bar{\alpha}\,(t')))_t \dot{-} 1)$, принадлежащая потоку σ (на что указывает ниже (ε)). Если α уже принадлежит σ, то $\alpha_\gamma=\alpha$, как указывает (η). (Мы приводим (ζ) и (η) с целью использовать их ниже в доказательствах *26.7, *27.4 и т. д.) в II с помощью этого отображения бар-теорема переносится с универсального потока на поток σ.

I. Допустим, что имеют место две первые гипотезы *26.4a, называемые ниже (1) и (2). Разбирая случаи из $\sigma(a)=0 \vee \sigma(a)\neq 0$ (согласно *158) и используя (1), получаем $\exists s\,[\sigma(a)=0 \supset \sigma(a*2^{s+1})=0]$, откуда по ∀-введ. и *2.2 следует $\exists\pi\forall a\,[\sigma(a)=0 \supset \sigma(a*2^{\pi(a)+1})=0]$. Допустим

(α) $\forall a\,[\sigma(a)=0 \supset \sigma(a*2^{\pi(a)+1})=0]$.

В нижеследующей формуле (β) гипотетические случаи исчерпывающи (можно разбирать случаи, следуя *158, поскольку компоненты элементарны) и взаимно исключают друг друга (ввиду *50). Таким образом, применима лемма 5.5 (c) (частный ее случай), и мы (подготавливая ∃-удал. из результата применения леммы) допускаем

$$(\beta)\qquad \forall a\gamma(a)=\begin{cases} 0, & \text{если } \neg\mathrm{Seq}(a),\\ 1, & \text{если } \mathrm{Seq}(a)\ \&\ \mathrm{lh}(a)=0,\\ (\tilde{\gamma}(a))_B * 2^{S+1}, & \text{если } \mathrm{Seq}(a)\ \&\ \mathrm{lh}(a)\neq 0\\ & \quad \&\ \sigma((\tilde{\gamma}(a))_B * 2^{S+1})=0,\\ (\tilde{\gamma}(a))_B * 2^{\pi((\tilde{\gamma}(a))_B)+1}, & \text{если } \mathrm{Seq}(a)\ \&\\ & \quad \mathrm{lh}(a)\neq 0\ \&\ \sigma((\tilde{\gamma}(a))_B * 2^{S+1})\neq 0, \end{cases}$$

где B и S есть соответственно $\prod_{i<\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}$ и $(a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1}\dot{-}1$. Если в (β) (посредством ∀-удал.) взять $\bar{\alpha}(0)$ вместо a, то применяется второй случай и $\gamma(\bar{\alpha}(0))=\gamma(\underline{1})=1$ (ввиду *23.5, ˣ23.1, *B3). Если в (β) вместо a взять $\bar{\alpha}(x')$, то применяется третий или четвертый случай. Кроме того, ввиду *23.4, *23.2, *23.8 и др. $B=\bar{\alpha}(x)$, $S=\alpha(x)$, $\bar{\alpha}(x')=a=B\cdot p_x^{S+1}=B*2^{S+1}=\bar{\alpha}(x)*2^{\alpha(x)+1}$ и, таким образом, $B<a$ (ввиду *143b, *3.10 и т. д.) и $(\tilde{\gamma}(a))_B=\gamma(B)=\gamma(\bar{\alpha}(x))$ (согласно *24.2). Теперь индукцией, используя (2) в базисе и (α) при рассмотрении четвертого случая (β) в инд. шаге, получаем

(γ) $\sigma(\gamma(\bar{\alpha}(x)))=0.$

Пусть «α_γ» сокращает $\lambda t(\gamma(\bar{\alpha}(t')))_t\dot{-}1$. Выведем теперь по индукции

(δ) $\bar{\alpha}_\gamma(x)=\gamma(\bar{\alpha}(x)).$

Базис очевиден. Инд. шаг. $\bar{\alpha}_\gamma(x')=\bar{\alpha}_\gamma(x)*2^{((\gamma(\bar{\alpha}(x')))_x\dot{-}1)+1}$ [*23.8, ˣ0.1] $=\gamma(\bar{\alpha}(x))*2^{((\gamma(\bar{\alpha}(x')))_x\dot{-}1)+1}$ [инд. предп.], что (ввиду $\gamma(\bar{\alpha}(x))*2^{A+1})_x=(\bar{\alpha}_\gamma(x)*2^{A+1})_x$ [инд. предп.] $=A+1$) равно $\gamma(\bar{\alpha}(x))*2^{\alpha(x)+1}=\gamma(\bar{\alpha}(x'))$, если в (β) к $a=\bar{\alpha}(x')$ применялся третий случай. Если же применялся четвертый случай, то это равно $\gamma(\bar{\alpha}(x))*2^{\pi(\gamma(\bar{\alpha}(x)))+1}=\gamma(\bar{\alpha}(x'))$. —

Ввиду (γ) и (δ)

(ε) $\alpha_\gamma\in\sigma.$

Мы также выведем по индукции

(ζ) $\sigma(\bar{\alpha}(x))=0\supset\gamma(\bar{\alpha}(x))=\bar{\alpha}(x).$

Инд. шаг. При допущении $\sigma(\bar{\alpha}(x'))=0$ третий член (1) дает $\sigma(\bar{\alpha}(x))=0$, так что по инд. предп. $\gamma(\bar{\alpha}(x))=\bar{\alpha}(x)$ и применяется третий случай (β).—

Ввиду (δ), (ζ), *23.2 и *6.3 $\sigma(\bar{\alpha}(x'))=0\supset\alpha_\gamma(x)=\alpha(x)$, откуда

(η) $\alpha\in\sigma\supset\alpha_\gamma=\alpha.$

II. Допустим теперь оставшиеся гипотезы (3) — (6) из *26.4a. Мы применим ˣ26.3a с $R(\gamma(a))$, $A(\gamma(a))$ в качестве $R(a)$, $A(a)$. Если мы затем сумеем проверить четыре гипотезы ˣ26.3a, то заключение *26.4a будет иметь место, поскольку $\gamma(1)=1$ (см. I). Первую гипотезу мы получаем посредством (γ) и (3) (используя *23.6, чтобы положить $a=\bar{\alpha}(x)$, подготавливая ∃-удал.). Чтобы получить вторую гипотезу, заметим, что согласно (ε) и (4) $\exists x R(\bar{\alpha}_\gamma(x))$, следовательно, по (δ) $\exists x R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Третья гипотеза вытекает из (γ) и (5) (полагаем $a=\bar{\alpha}(x)$). Для установления четвертой гипотезы допустим $\mathrm{Seq}(a)\ \&\ \forall s A(\gamma(a*2^{s+1}))$. Согласно (γ) и *23.6 $\sigma(\gamma(a))=0$. Положим $x=\mathrm{lh}(a)$. Допуская $\sigma(\gamma(a)*2^{s+1})=0$ и используя *22.8, *22.5, *23.6, чтобы положить $a*2^{s+1}=\bar{\alpha}(y)$ (тогда $y=x'$ [*22.8, *20.3, *23.5], $a\cdot p_x^{s+1}=a*2^{s+1}$ [ˣ21.1 и т. д.] $=\bar{\alpha}(x')=\bar{\alpha}(x)\cdot p_x^{\alpha(x)+1}$ [*23.8], так что $s=\alpha(x)$ [*19.11, *22.2, *19.9, *6.3] и $a=\bar{\alpha}(x)$ [*133]), получаем, что в (β) к $\alpha(x')$ применяется третий случай и он дает $\gamma(\bar{\alpha}(x'))=\gamma(a)*2^{s+1}$. Таким образом, $\forall s A(\gamma(a*2^{s+1}))$ дает $A(\gamma(a)*2^{s+1})$, следовательно, $\forall s\{\sigma(\gamma(a)*2^{s+1})=0\supset A(\gamma(a)*2^{s+1})\}$. Ввиду (6) имеет место $A(\gamma(a))$.

6.10. Из своей бар-теоремы Брауэр вывел свою «теорему о веере» (неявно в **1923**a, стр. 4 (II); **1924**, теорема 2; **1927**, теорема 2; **1954**, § 5). «Финитное множество» или «финитарный поток», позднее названный *веером*, есть поток, в котором каждый выбор может производиться из некоторой конечной совокупности чисел. Скажем, например, что для $t=0, 1, 2, \ldots$ число $\alpha(t)$ должно выбираться среди $0, 1, \ldots, \beta(\bar{\alpha}(t))$, т. е. $(t)\ \alpha(t)\leqslant\beta(\bar{\alpha}(t))$. Мы будем здесь рассматривать только последовательности выбора, лежащие в основе веера и которые сами образуют веер, если взять в качестве закона сопоставления ϱ тривиальный закон $\varrho(\bar{\alpha}(x'))=\alpha(x)$. Согласно одной из версий теоремы о веере (эта версия верна классически), если для каждой последовательности выбора α, принадлежащей данному вееру (определенному посредством β), $(Ex)\ R(\bar{\alpha}(x))$, то существует конечная верхняя грань z наименьших x таких, что $R(\bar{\alpha}(x))$. В этой «чистой» версии, выражаемой *26.6a (или

*26.6b — *26.6d), мы можем доказать теорему о веере, исходя из бар-теоремы и не используя никаких дальнейших постулатов. Другая версия *27.7 (классически ложная), предпочитаемая Брауэром, будет вытекать из упомянутой только что версии после принятия нового интуиционистского постулата ^{x}27.1 § 7. Классическим двойником представленной версии является лемма Кёнига **1926**, которую мы приведем в замечании 9.11.

Докажем сначала представленную версию теоремы о веере неформально.

Рассмотрим произвольный номер последовательности a, принадлежащий данному вееру, т. е. представляющий конечную последовательность выбора из этого веера. *Подвеером, исходящим из* a, назовем веер, образованный теми последовательностями выбора α, которыми в данном веере может быть продолжен a, т. е. последовательностями такими, что для каждого x номер $a * \bar{\alpha}(x)$ представляет конечную последовательность выбора из исходного веера. Мы применим примечание 7 работы Брауэра **1927** (упомянутое выше в п. 6.5), рассматривая, однако, только не начально гарантированные номера последовательностей из данного веера: «для каждого s ($s = 0, 1, 2, \ldots$)» переходит в «для каждого $s \leqslant \beta(a)$». Мы используем соответствующую форму индукции, чтобы доказать (как это видно ниже), что при предположениях теоремы о веере для данного веера и данного предиката R заключение этой теоремы выполняется для подвеера, исходящего из любого гарантируемого, но не начально гарантированного (в данном веере относительно данного R) номера последовательности $a = \bar{\delta}(y)$ и предиката $\lambda w R(a * w)$. Для подвеера, исходящего из номера a такого, что $R(a)$, теорема о веере выполняется, если положить $z = 0$. Рассмотрим некоторый номер a, гарантируемость которого следует из гарантируемости всех номеров $a * 2^{s+1}$, где $s \leqslant \beta(a)$. По инд. предп. для каждого $s \leqslant \beta(a)$ подвеер, исходящий из $a * 2^{s+1}$, имеет некоторое z (назовем его z_s), удовлетворяющее теореме о веере. Тогда подвеер, исходящий из a, имеет число $1 + \max(z_0, \ldots, z_{\beta(a)})$ в качестве z в теореме о веере. Этим заканчивается индукция. Однако по условиям теоремы о веере 1 гарантируема, но не начально гарантирована. Таким образом, заключение теоремы о веере выполняется для подвеера, исходящего

из 1, и предиката $\lambda w R(1 * w)$, т. е. для данного веера и предиката R.

Сказанное легко интерпретируется геометрически. Наш веер представляется некоторым деревом, в котором из каждой вершины, занятой номером последовательности a, выходит конечное число (именно $\beta(a) + 1$) стрелок, ведущих к вершинам, занятым $a * 2^{0+1}, \ldots, a * 2^{\beta(a)+1}$. Это проиллюстрировано рис. 1 п. 6.5 в случае, когда $(a)\,[\beta(a) = 2]$ (*бинарный веер*; теперь мы не должны принимать во внимание на этом рисунке стрелки с $s > 1$). Рассмотрим, кроме того, предикат $R(a)$ и предположим, что для каждой α мы подчеркнули первую вершину $\bar{\alpha}(x)$ (если она есть), для которой выполняется $R(\bar{\alpha}(x))$. Рис. 1 иллюстрирует случай, когда $(\alpha)(Ex) R(\bar{\alpha}(x))$. Чтобы упростить терминологию, будем считать уничтоженными на каждой ветви все вершины, расположенные справа от подчеркнутой вершины $\bar{\alpha}(x)$,— таким образом, на рис. 1 останется только часть дерева, набранная полужирным шрифтом. Теперь предположения теоремы о веере говорят, что все пути конечны, а заключение утверждает, что существует конечная верхняя грань их длин. Доказательство проводится индукцией, соответствующей индуктивному определению класса гарантируемых (но не начально гарантированных) номеров последовательностей (см. п. 6.5, заменяя веером универсальный поток). Индукционное предположение состоит в существовании конечной верхней грани длин путей в поддереве, исходящем из a. В базисе индукции эта верхняя грань равна 1 (z равно 0) для вершин a, находящихся в концах ветвей. В индукционном шаге при продвижении влево от всех $a * 2^{s+1}$ ($s = 0, 1$ в случае рис. 1) к a мы «прививаем» к a конечное число поддеревьев (два на нашем рис. 1) с соответствующими конечными верхними гранями, получая поддерево с верхней гранью, равной максимуму соответствующих верхних граней, увеличенному на единицу.

Формализуя это доказательство, мы сначала докажем некоторую лемму *26.5, в которой b, s, z, w — произвольные различные числовые переменные, B (s, z) — произвольная формула, не содержащая свободно b и w и в которой w свободно для z.

*26.5. $\forall s \forall z \forall w\, [B(s, z) \& w \geqslant z \supset B(s, w)]$
$\vdash \forall s_{s \leqslant b} \exists z B(s, z) \supset \exists z \forall s_{s \leqslant b} B(s, z)$.

Доказательство. Мы допустим
(a) $\forall s \forall z \forall w\, [B(s, z) \& w \geqslant z \supset B(s, w)]$
и выведем то, что требуется индукцией по b. Инд. шаг. Допустим $\forall s_{s \leqslant b'} \exists z B(s, z)$. Следовательно, $\exists z B(b', z)$ и $\forall s_{s \leqslant b} \exists z B(s, z)$. По инд. предп. $\exists z \forall s_{s \leqslant b} B(s, z)$. Допустим для $\exists$-удал. $B(b', z_1)$ и $\forall s_{s \leqslant b} B(s, z_2)$. Используя (a) и *8.4, получаем

$$B(b', \max(z_1, z_2)) \text{ и } \forall s_{s \leqslant b} B(s, \max(z_1, z_2)),$$

следовательно, $\forall s_{s \leqslant b'} B(s, \max(z_1, z_2))$, откуда получаем $\exists z \forall s_{s \leqslant b'} B(s, z)$.

*26.6a. $\vdash \forall a\, [\mathrm{Seq}(a) \supset R(a) \vee \neg R(a)]\, \&$
$\forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x R(\bar{\alpha}(x)) \supset \exists z \forall \alpha_{B(\alpha)} \exists_{x \leqslant z} R(\bar{\alpha}(x))$,
где $B(\alpha)$ есть $\forall t \alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(t))$.

*26.6d. $\vdash \forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x\, [R(\bar{\alpha}(x)) \& \forall y_{y<x} \neg R(\bar{\alpha}(y))] \supset$
$\exists z \forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x_{x \leqslant z}\, [R(\bar{\alpha}(x)) \& \forall y_{y<x} \neg R(\bar{\alpha}(y))]$.

Доказательство *26.6a. I. $B(\alpha)$ в действительности ограничивает α до некоторого непустого потока, ибо мы можем ввести функциональную переменную σ так, что будет выполняться нижеследующая формула (a). Точнее говоря, ввиду #22, #D, #E и др. правая часть (a) эквивалентна $p(a) = 0$, где $p(a)$ — некоторый терм (причем $\vdash p(a) \leqslant 1$). Используя лемму 5.3 (a), допустим, подготавливая $\exists$-удал., $\forall a\, [\sigma(a) = p(a)]$. Отсюда

(a) $\forall a\, [\sigma(a) = 0 \sim \mathrm{Seq}(a) \& \forall t_{t<\mathrm{lh}(a)} (a)_t \dot{-} 1 \leqslant$
$\beta(\prod_{i<t} p_i^{(a)_i})]$.

(Нижеследующее также доказывает *26.6a′, в которой «Seq (a)» из *26.6a заменено правой частью (a).) Согласно *23.2, *23.4, *23.5, *6.3

(b) $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0 \sim \forall t_{t<x} \alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(t))$.

Поэтому
(c) $B(\alpha) \sim \alpha \in \sigma$.

Кроме того, в *26.4a соблюдены первые две гипотезы: (1) $\mathrm{Spr}(\sigma)$ (достаточно использовать $s = 0$ во втором члене) и (2) $\sigma(1) = 0$.

II. Мы применим *26.4a с представленными выше σ и R, полагая A (a) следующей формулой:

$$A(a):\quad \exists z \forall \alpha\, [\forall t \alpha(t) \leqslant \beta(a * \bar{\alpha}(t)) \supset \exists x_{x \leqslant z} R(a * \bar{\alpha}(x))].$$

При таком A (a) заключение $\exists z \forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x_{x \leqslant z} R(\bar{\alpha}(x))$ утверждения *26.6a будет следовать из A (1) по *22.7. Таким образом, достаточно, допуская две гипотезы *26.6a, вывести остальные четыре гипотезы (3) — (6) *26.4a. Гипотезы (3) — (5) получаются легко (в случае гипотезы (5) в качестве z берется 0). Чтобы вывести (6), допустим (d) $\sigma(a) = 0$ и (e) $\forall s\, \{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset A(a * 2^{s+1})\}$. Мы должны вывести A (a). Используя (d), (a) и *23.6, мы можем положить (для $\exists$-удал.) (f) $a = \bar{\delta}(y)$. Тогда ввиду (d) и (b) имеет место (g) $\forall t_{t<y} \delta(t) \leqslant \beta(\bar{\delta}(t))$. Мы выведем $A(\bar{\delta}(y))$, т. е.

$$\exists z \forall \alpha\, [\forall t \alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(t)) \supset \exists x_{x \leqslant z} R(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(x))].$$

A. Допустим (h) $s \leqslant \beta(\bar{\delta}(y))$. Используя *23.6 вместе с *22.5 и *22.8, мы можем положить (для $\exists$-удал.) $\bar{\delta}(y) * 2^{s+1} = \bar{\delta}'(u)$, далее (по *23.5, *22.8, *20.3) $u = y'$ и, таким образом, $\bar{\delta}(y) * 2^{s+1} = \bar{\delta}'(y')$. Согласно *23.2, ˣ21.1, *19.11 вместе с *23.3 и *19.9 $\delta'(y) = s$; если учесть еще *23.2 и *19.10, мы получим $t < y \supset \delta'(t) = \delta(t)$. Следовательно, по *B19 вместе с ˣ23.1 $t \leqslant y \supset \bar{\delta}'(t) = \bar{\delta}(t)$. Теперь (g) и (h) дают $\forall t_{t<y'} \delta'(t) \leqslant \beta(\bar{\delta}'(t))$, следовательно, по (b) $\sigma(\bar{\delta}'(y')) = 0$, откуда $\sigma(\bar{\delta}(y) * 2^{s+1}) = 0$, следовательно, по (e) и (f) $A(\bar{\delta}(y) * 2^{s+1})$, т. е. $\exists z \forall \alpha\, [\forall t \alpha(t) \leqslant \beta((\bar{\delta}(y) * 2^{s+1}) * \alpha(t)) \supset \exists x_{x \leqslant z} R((\bar{\delta}(y) * 2^{s+1}) * \alpha(x))]$. Назовем последнюю формулу $\exists z B(s, z)$. Пользуясь $\exists u$- и $\exists \delta'$-удал. и $\supset$- и $\forall$-введ., получаем $\forall s_{s \leqslant \beta(\bar{\delta}(y))} \exists z B(s, z)$. Однако B (s, z) имеет свойство, выражаемое допускаемой формулой в *26.5. Следовательно, $\exists z \forall s_{s \leqslant \beta(\bar{\delta}(y))} B(s, z)$.

B. Допустим (для $\exists$-удал.) $\forall s_{s \leqslant \beta(\bar{\delta}(y))} B(s, z)$ и $\forall t \alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(t))$. Имеем $\alpha(0) \leqslant \beta(\bar{\delta}(y))$ и, таким образом, $B(\alpha(0), z)$, т. е.

$$\forall \alpha'\, [\forall t \alpha'(t) \leqslant \beta((\bar{\delta}(y) * 2^{\alpha(0)+1}) * \bar{\alpha}'(t)) \supset$$
$$\exists x_{x \leqslant z} R((\bar{\delta}(y) * 2^{\alpha(0)+1}) * \bar{\alpha}'(x))].$$

Пусть «α'» есть сокращение для $\lambda t \alpha(t')$. Тогда

$$\alpha'(t) = \alpha(t')\ [^x0.1] \leqslant \beta(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(t')) =$$
$$\beta(\bar{\delta}(y) * (\bar{\alpha}(1) * \bar{\alpha}'(t)))\ [*23.7] =$$
$$\beta((\bar{\delta}(y) * 2^{\alpha(0)+1}) * \bar{\alpha}'(t))\ \ [*22.9].$$

Таким образом, $\forall t \alpha'(t) \leqslant \beta((\bar{\delta}(y) * 2^{\alpha(0)+1}) * \bar{\alpha}'(t))$. Итак, из $B(\alpha(0), z)$ получаем $\exists x_{x \leqslant z} R((\bar{\delta}(y) * 2^{\alpha(0)+1}) * \bar{\alpha}'(x))$. Допустим $x \leqslant z \& R((\bar{\delta}(y) * 2^{\alpha(0)+1}) * \bar{\alpha}'(x))$. Тогда $x' \leqslant z' \& R(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(x'))$, следовательно, $\exists x_{x \leqslant z'} R(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(x))$. По $\exists x$-удал., $\supset$-, $\forall$- и $\exists z$-введ. и $\exists z$-удал. получаем

$$\exists z \forall \alpha [\forall t \alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(t)) \supset \exists x_{x \leqslant z} R(\bar{\delta}(y) * \bar{\alpha}(x))].$$

В общей ситуации выборы, разрешенные для $\alpha(t)$ из некоторого веера, не должны обязательно образовывать непустой начальный сегмент натурального ряда. В таком случае закон выбора является функцией σ, удовлетворяющей первым двум гипотезам следующего утверждения:

$$
\begin{aligned}
{*}26.7\text{a}.\ \vdash\ & \mathrm{Spr}(\sigma) \& \forall a [\sigma(a) = 0 \supset \\
& \exists b \forall s \{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant b\}] \& \\
& \forall a [\sigma(a) = 0 \supset R(a) \vee \neg R(a)] \& \\
& \forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists x R(\bar{\alpha}(x)) \supset \exists z \forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists x_{x \leqslant z} R(\bar{\alpha}(x)).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Случай 1: $\sigma(a) \neq 0$. Тогда $\neg \alpha \in \sigma$. Используем *10a. (Веер пуст и теорема выполняется ввиду своей бессодержательности.)

Случай 2: $\sigma(1) = 0$. Допустим четыре гипотезы (1′) — (4′) из *26.7a.

I. Поскольку мы располагаем первыми двумя гипотезами (1) и (2) из *26.4a, мы можем ввести π и γ, как в разделе I доказательства *26.4a, причем (α) — (η) будут выполняться.

II. Используя $\sigma(a) = 0 \vee \sigma(a) \neq 0$ и (2′), получаем $\forall a \exists b [\sigma(a) = 0 \supset \forall s \{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant b\}]$. Ввиду *2.2 мы можем допустить для $\exists$-удал.

$$(\theta)\ \ \forall a [\sigma(a) = 0 \supset \forall s \{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant \beta(a)\}].$$

III. Мы применим *26.6a к β из (θ) (входящему в $B(\alpha)$) и с $R(\gamma(a))$ (где γ взята из I) в качестве $R(a)$.

A. Убедимся сначала, что заключение *26.7a вытекает из заключения $\exists z \forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x_{x \leqslant z} R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$ формулы *26.6a. Допустим для $\exists$-удал. (ι) $\forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x_{x \leqslant z} R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Пусть также ($\varkappa$) $\alpha \in \sigma$. Тогда $\sigma(\bar{\alpha}(t)) = 0$ и $\sigma(\bar{\alpha}(t')) = 0$. Однако $\bar{\alpha}(t') = \bar{\alpha}(t) * 2^{\alpha(t)+1}$. Ввиду ($\theta$) $\alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(t))$ и по $\forall$-введ. $B(\alpha)$. Следовательно, по (ι) $\exists x_{x \leqslant z} R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Опуская $\exists x$ для $\exists$-удал., имеем $x \leqslant z$ и $R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Согласно ($\varkappa$) $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0$. Тогда по ($\zeta$) $R(\bar{\alpha}(x))$. Пользуясь &-, $\exists$- и $\supset$-введ., $\exists$-удал, а также применяя $\forall$- и $\exists$-введ. и $\exists z$-удал., получаем $\exists z \forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists x_{x \leqslant z} R(\bar{\alpha}(x))$.

B. Нам осталось удостовериться в двух гипотезах *26.6a. В случае первой гипотезы допустим Seq (a) и положим $a = \bar{\alpha}(x)$. Согласно (γ) $\sigma(\gamma(\bar{\alpha}(x))) = 0$, следовательно (по (3′)), $R(\gamma(a)) \vee \neg R(\gamma(a))$. Во втором случае по ($\varepsilon$) и (4′) $\exists x R(\bar{\alpha}_\gamma(x))$, следовательно, согласно (δ) $\exists x R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$, откуда, ввиду *11, $B(\alpha) \supset \exists x R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$, следовательно, по $\forall$-введ. $\forall \alpha_{B(\alpha)} \exists x R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$.

6.11. Теперь мы формализуем индуктивный принцип, содержащийся в бар-теореме, в случае, когда выводится свойство любого запертого номера последовательности (ср. 6.6, абзацы 2—3). Это дает нам некоторую схему аксиом, непосредственно смоделированную со схемы аксиом для обычной индукции (схема аксиом 13). В эту схему импликация от индуктивного к явному смыслу гарантируемости, запертости и т. д. (т. е. перемена направления, п. 6.5, абзац 1), составляющая ядро бар-теоремы, входит следующим образом: заключение индукции, гласящее, что каждый запертый номер последовательности w обладает свойством A, формулируется с использованием явного смысла запертости. Интуиционистское ограничение на предикат R, относительно которого рассматриваются запертые номера w, мы даем в двух формах в виде предварительных гипотез. (В случае классического результата, соответствующего *26.1, мы можем опустить первую гипотезу ^{x}26.8a.)

$$
\begin{aligned}
{}^x26.8\text{a}.\ \ & \forall a [\mathrm{Seq}(a) \supset R(a) \vee \neg R(a)] \& \\
& \forall a [\mathrm{Seq}(a) \& R(a) \supset A(a)] \& \forall a [\mathrm{Seq}(a) \& \\
& \forall s A(a * 2^{s+1}) \supset A(a)] \supset \\
& \{\mathrm{Seq}(w) \& \forall \alpha \exists x R(w * \bar{\alpha}(x)) \supset A(w)\}.
\end{aligned}
$$

$$^{x}26.8c.\ \forall\alpha\forall x\forall y\,[R(\bar\alpha(x))\,\&\,R(\bar\alpha(y))\supset x=y]\,\&\ \forall a\,[Seq(a)\,\&\,R(a)\supset A(a)]\,\&\,\forall a\,[Seq(a)\,\&\ \forall sA(a*2^{s+1})\supset A(a)]\supset\ \{Seq(w)\,\&\,\forall\alpha\exists xR(w*\bar\alpha(x))\supset A(w)\}.$$

$$^{x}26.8d.\ \forall\alpha\forall x\,[R(\bar\alpha(x))\,\&\,\forall y_{y<x}\neg R(\bar\alpha(y))\supset A(\bar\alpha(x))]\,\&\ \forall a\,[Seq(a)\,\&\,\forall sA(a*2^{s+1})\supset A(a)]\supset\ \{\forall\alpha_{\bar\alpha(z)=\bar\beta(z)}\exists x_{x\geqslant z}\,[R(\bar\alpha(x))\,\&\ \forall y_{y<x}\neg R(\bar\alpha(y))]\supset A(\bar\beta(z))\}.$$

Вывод $^{x}26.3a$ из $^{x}26.8a$. Подставляем 1 вместо w и используем Seq (1), *22.7 и *23.5.

Вывод $^{x}26.8a$ из $^{x}26.3a$. Допустим пять гипотез $^{x}26.8a$. Используя *22.8, *22.9 и *22.5, получаем четыре гипотезы $^{x}26.3a$ для R (w * a), A (w * a), взятых в качестве R (a), A (a). Тогда, согласно $^{x}26.3a$, получаем A (w * 1), и, следовательно, по *22.6 A (w).

6.12. Рассмотрим, наконец, более длинное брауэровское доказательство бар-теоремы, данное им в тексте работы **1927** и с небольшими различиями в работах **1924** (ср. **1924a**) и **1954**. Брауэр сосредоточивает свое внимание (**1924**, **1927**) на предикате R таком, что $(\alpha)\ (E!x)\ R\ (\bar\alpha\ (x))$, для которого мы здесь допустим часть, касающуюся единственности $(\alpha)\ (x)\ (y)\ [R\ (\bar\alpha\ (x))\ \&\ R\ (\bar\alpha\ (y))\rightarrow x=y]$. Мы рассмотрим случай универсального потока (в то время как Брауэр рассматривал произвольный поток), поскольку теорема для произвольного потока является следствием *26.4.

В своем упомянутом выше доказательстве Брауэр начинает со следующей интерпретации. Рассмотрим любой гарантируемый (т. е. гарантируемый $_{\mathrm{E}}$), но не начально гарантированный номер последовательности w, т. е. допустим Seq $(w)\ \&\ (\alpha)\ (Ex)\ R\ (w*\bar\alpha\ (x))$. (Здесь мы слегка редактируем доказательство Брауэра: он рассматривал негарантированные последовательности, что чуть-чуть менее удобно.) То, что w гарантируемо интуиционистски, означает наличие «доказательства» гарантируемости w. Такое доказательство должно «в конечном счете» («in letzer Instanz»; Брауэр **1924**, **1927**) основываться на «атомарных» фактах о ситуации (Брауэр **1954**), которые состоят только в истинности $R\ (v)$ для некоторых номеров v и в отношениях между номерами последовательностей v и их непосредственными продолжениями $v*2^{s+1}$ $(s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Таким образом доказательство гарантируемости и разлагается на свои «атомарные» выводы, которые могут быть трех сортов: η-выводы (из 0 посылок), утверждающие, что v гарантируемо, поскольку $R\ (v)$, $\mathfrak{F}$-выводы (из $\aleph_0$ посылок), утверждающие, что v гарантируемо, поскольку гарантируемы все $v*2^{s+1}$ $(s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, и ζ-выводы (из одной посылки), утверждающие, что $v*2^{s+1}$ гарантируемо, поскольку гарантируемо v. (Брауэр в действительности не употреблял термина «η-вывод».)

Если не обращать внимания на обозначения, такое доказательство отличается от доказательств в метаматематике (ВМ, § 19, точнее стр. 78; конец § 24, точнее стр. 98) только тем, что одно из трех представленных правил вывода (именно $\mathfrak{F}$-вывода) имеет бесконечно много посылок. Логическая структура такого рода доказательства непосредственно представляется при задании его в виде дерева (ВМ, стр. 98), имеющего однако бесконечно много сходящихся вниз ветвей при каждом $\mathfrak{F}$-выводе. (Брауэр **1924**, **1927** использует вместо этого последовательностную форму ВМ, стр. 98, доставляющую выводы или выводимые предложения в линейном упорядочении, которое в случае наличия $\mathfrak{F}$-выводов становится трансфинитным вполне упорядочением. Таким образом, он устанавливает связь со своей теорией вполне упорядоченных видов **1918—1919**, **I**, **§ 3**, **1924—1927**, **III**, **1954**, **§4**, которую Весли планирует формализовать. Брауэр говорит «вид», а не «множество», так как он использовал термин «множество» для того, что позднее он назвал «потоком».— Брауэр **1954** и Гейтинг **1956**, стр. 55—56, имеют дело с веером, опуская эту необязательную линеаризацию.) Теперь мы можем использовать индукцию по доказательствам посредством η-, $\mathfrak{F}$-, ζ-выводов, т. е. форму индукции, соответствующую индуктивному определению 'доказуемой формулы' (ВМ, стр. 78, последний абзац стр. 232), в случае, когда используются представленные три правила вывода. (Продвижению вниз по дереву (ВМ, стр. 98—99) соответствует продвижение по дереву влево, как это изображено здесь, например, на рис. 1 п. 6.5.)

Только что описанная интерпретация Брауэра содержания суждения 'w гарантируемо (но не начально гарантировано)', имеющая дело с принципом индукции по доказательствам, аналогично его примечанию 7 работы **1927** (см. п. 6.5 выше), вводит перемену направления. Мы начинаем с гипотез $(\alpha)(x)(y)[R(\bar{\alpha}(x)) \,\&\, R(\bar{\alpha}(y)) \rightarrow x=y] \,\&\, \mathrm{Seq}(w) \,\&\, (\alpha)(Ex)R(w*\bar{\alpha}(x))$ в соответствии с префиксом $(\alpha)(Ex)$, смотря из w вперед в дереве на расходящиеся пути роста последовательности выбора α. Интерпретация же (вместе с принципом индукции) позволяет нам рассуждать индуктивно, продвигаясь назад из многих базисов в концах ветвей некоторого дерева по сходящимся путям к некоторому одиночному заключению. Однако тем временем, вместо того, чтобы продвигаться в сходящемся направлении в исходном дереве номеров последовательностей, исходящем из w и заканчивающемся в $w*\bar{\alpha}(x)$, для которых $R(w*\bar{\alpha}(x))$, мы делаем то же самое в другом дереве, образующем доказательство гарантируемости w.

Индукцией вдоль этого последнего дерева мы легко устанавливаем, что ζ-выводы могут быть устранены и, таким образом, получаем бар-теорему.

Для формализации этого доказательства нам необходим один постулат, выражающий брауэровские предположения.

$$(***)\ (\alpha)(x)(y)[R(\bar{\alpha}(x)) \,\&\, R(\bar{\alpha}(y)) \rightarrow x=y] \,\&\, \mathrm{Seq}(w) \,\&\, (\alpha)(Ex)R(w*\bar{\alpha}(x)) \rightarrow$$

{существует доказательство утверждения 'w гарантируемо' посредством η-, $\mathfrak{F}$- и ζ-выводов}.

Чтобы сформулировать этот постулат, мы должны найти способ выражения понятия доказательства посредством η-, $\mathfrak{F}$- и ζ-выводов в формальных символах. Соглашения на этот счет необходимо должны располагаться за пределами формализма.

Все предложения в доказательстве гарантируемости посредством η-, $\mathfrak{F}$-, ζ-выводов имеют форму утверждений, что некоторое число v гарантируемо. Поэтому при замене в дереве-доказательстве (вхождений) предложений 'v гарантируемо' вхождениями чисел v, о которых говорят эти предложения, мы получим дерево, изоморфное исходному дереву-доказательству, и вместе с тем избежим всех трудностей, связанных с недостатком формальных метаматематических символов. (В работе **1924** Брауэр сразу обращается со вполне упорядоченными видом конечных последовательностей выбора в порядке их установления в ходе доказательства и только в **1924a** он начинает впервые говорить о доказательстве как о вполне упорядоченном виде выводов.)

Теперь мы должны найти способ говорить о последнем дереве (вхождений) номеров последовательностей. Однако в действительности оно представляет собой просто отображение номеров последовательностей на вершины некоторого дерева из оканчивающихся последовательностей выбора. Это, если смотреть вперед в расходящихся направлениях, есть в точности некоторый поток, в котором, как и в абзаце 4 п. 6.9, w сопоставлено пустой последовательности, т. е. номеру последовательности $\bar{\alpha}(0)=1$. (Разумеется, здесь мы не интересуемся конечными последовательностями, образующими элементы потока как такового.)

При уточнении этого потока посредством закона выбора и закона сопоставления (6.1, 6.9) вместо оканчивающихся где-нибудь последовательностей выборов или запрещения некоторых выборов (при разрешении других) проще сопоставлять 0, который не является номером последовательности, выборам, которые вследствие этого станут как бы запрещенными (ср. 6.9, абзац 3, (b)). При таком предположении закон выбора σ становится тривиальным и поток специфицируется законом сопоставления ϱ. Точнее, имеются два потока, из которых один специфицируется непосредственно законом ϱ, «лежит» над универсальным потоком всех последовательностей выбора и имеет в качестве сопоставляемых объектов нули и номера последовательностей, и второй, который может быть получен из первого запрещением выборов, которым сопоставлялись нули, и который является потоком, изоморфным доказательству того, что 'w гарантируемо'. Однако мы обозреваем последний поток в обратном (сходящемся) направлении, так как это существенно для рассуждений Брауэра.

Теперь мы можем сформулировать условия, при которых ϱ указанным образом представляет некоторое доказательство гарантируемости. Если $\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \varrho(a)>0$, то $\varrho(a)=v$, где 'v гарантируемо' есть результат некоторых η-, $\mathfrak{F}$- и ζ-выводов, как описано выше, и т. д. Тогда представленное посредством ϱ доказательство того, что 'w гарантируемо', выражается посредством $\varrho(1)=w$. В целом «локальные» требования $\mathfrak{P}(w, \varrho, R)$ на ϱ, при которых ϱ представляет некоторое доказательство утверждения 'w гарантируемо', следующие:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(w,\ \varrho,\ R)\colon\ & \varrho(1)=w\,\&\,(a)\,\{\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\varrho(a)>0\rightarrow\\ & [R\,(\varrho(a))\,\&\,(s)\,\varrho(a*2^{s+1})=0]\vee\\ & (s)\,\varrho(a*2^{s+1})=\varrho(a)*2^{s+1}\vee[\mathrm{Seq}\,(\varrho(a*2))\,\&\\ & (Es)\,\varrho(a)=\varrho(a*2)*2^{s+1}\,\&\,(s)\,\varrho(a*2^{s+2})=0]\}\\ & \&\,(a)\,\{\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\varrho(a)=0\rightarrow\\ & (s)\,\varrho(a*2^{s+1})=0\}.\end{aligned}$$

Принцип индукции по доказательствам утверждений вида 'w гарантируемо' посредством η-, $\mathfrak{F}$- и ζ-выводов при принятом нами способе представления таких доказательств есть $(A)\ \mathfrak{J}(w,\ \varrho,\ A)$, где $\mathfrak{J}(w,\ \varrho,\ A)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(w,\ \varrho,\ A)\colon\ & (a)\,\{\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\varrho(a)>0\,\&\,(s)\,[A\,(\varrho(a*2^{s+1}))\vee\\ & \varrho(a*2^{s+1})=0]\rightarrow A\,(\varrho(a))\}\rightarrow A\,(w).\end{aligned}$$

Пусть для произвольных формул R (a) и A (a) $\mathfrak{P}$ (w, ρ, R) и $\mathfrak{J}$ (w, ρ, A) — соответственно построенные формулы.

Заключение (***) теперь есть $(E\varrho)\,\{\mathfrak{P}(w,\ \varrho,\ R)\,\&\,(A)\ \mathfrak{J}(w,\ \varrho,\ A)\}$. Таким образом, мы приходим к следующей схеме аксиом, выражающей (насколько это возможно при отсутствии предикатных переменных) предположения брауэровского доказательства.

$$\begin{aligned}{}^{\times}26.9.\quad & \forall\alpha\,\forall x\,\forall y\,[R\,(\bar{\alpha}(x))\,\&\,R\,(\bar{\alpha}\,(y))\supset x=y]\,\&\\ & \mathrm{Seq}\,(w)\,\&\,\forall\alpha\,\exists x\,R\,(w*\bar{\alpha}\,(x))\supset\\ & \exists\rho\,\{\mathfrak{P}(w,\ \rho,\ R)\,\&\,\mathfrak{J}(w,\ \rho,\ A)\}.\end{aligned}$$

Имея ${}^{\times}26.9$ в качестве схемы аксиом, мы можем доказать каждую аксиому ${}^{\times}26.3$ через ${}^{\times}26.3$c, формализуя, таким образом, длинное доказательство Брауэра.

Мы возьмем 1 в качестве w (поскольку ${}^{\times}26.3$c специализирована применительно к 1, хотя Брауэр этого не делал), а в качестве A (a) рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned}A'(a)\colon\ & \exists y_{y<\mathrm{lh}(a)}R\,(\textstyle\prod_{i<y}p_i^{(a)_i})\vee\forall c\,\{\mathrm{Seq}\,(c)\,\&\\ & \forall\alpha\,\exists x\,R\,((a*c)*\bar{\alpha}\,(x))\,\&\,\forall b\,[\mathrm{Seq}\,(b)\,\&\,R\,(b)\supset\\ & A\,(b)]\,\&\,\forall b\,[\mathrm{Seq}\,(b)\,\&\,\forall s\,A\,(b*2^{s+1})\supset A\,(b)]\supset\\ & A\,(a*c)\}.\end{aligned}$$

Допустим (a) $\forall\alpha\,\exists!x R\,(\bar{\alpha}\,(x))$. Если из (a) и аксиомы ${}^{\times}26.9$ мы выведем A′ (1), то мы будем иметь то, что нам нужно,

положив c = 1 (и используя $\mathrm{lh}\,(1)=0$, Seq (1), *22.7). Имея (a), мы располагаем тремя гипотезами этой аксиомы и, таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы показать, что из (a) (b) $\rho\,(1)=1$, (c) $\forall a\,\{\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\rho\,(a)>0\supset[R\,(\rho\,(a))\,\&\,\forall s\rho\,(a*2^{s+1})=0]\vee\forall s\rho\,(a*2^{s+1})=\rho\,(a)*2^{s+1}\vee[\mathrm{Seq}\,(\rho\,(a*2))\,\&\,\exists s\rho\,(a)=\rho\,(a*2)*2^{s+1}\,\&\,\forall s\rho\,(a*2^{s+2})=0]\}$ и (d) $\forall a\,\{\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\rho\,(a)=0\supset\forall s\rho\,(a*2^{s+1})=0\}$ мы можем вывести (A) $\forall a\,\{\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\rho(a)>0\,\&\,\forall s\,[A'(\rho\,(a*2^{s+1}))\vee\rho\,(a*2^{s+1})=0]\supset A'\,(\rho\,(a))\}$. Индукцией по x, используя (b) — (d), получаем (e) $\rho\,(\bar{\alpha}\,(x))>0\supset\mathrm{Seq}\,(\rho\,\bar{\alpha}\,(x))$. Ввиду (a) и леммы 5.6 получаем (f) $\forall a\,[\mathrm{Seq}\,(a)\supset R\,(a)\vee\neg R\,(a)]$. Используя (для $\rho\,(a)>0$) *150 вместе с (e), (f), *23.4 и др., получаем (g) $\mathrm{Seq}\,(a)\supset\exists y_{y<\mathrm{lh}(\rho(a))}R\,(\prod_{i<y}p_i^{(\rho(a))_i})\vee\neg\,\exists y_{y<\mathrm{lh}(\rho(a))}R\,(\prod_{i<y}p_i^{(\rho(a))_i})$. Чтобы вывести (A), мы допустим (h) Seq (a), (i) $\rho\,(a)>0$ и (j) $\forall s\,[A'\,(\rho\,(a*2^{s+1}))\vee\rho\,(a*2^{s+1})=0]$ и предпримем вывод A′ (ρ (a))). Ввиду (g) имеются два случая и ввиду (c) во втором случае мы рассматриваем три подслучая. С л у ч а й 2: (k) $\neg\exists y_{y<\mathrm{lh}(\rho(a))}R\,(\prod_{i<y}p_i^{(\rho(a))_i})$. Чтобы вывести второй дизъюнктивный член A′ (ρ (a)), мы допустим (l) Seq (c), (m) $\forall\alpha\,\exists xR\,((\rho\,(a)*c)*\bar{\alpha}\,(x))$, (n) $\forall b\,[\mathrm{Seq}\,(b)\,\&\,R\,(b)\supset A\,(b)]$ и (o) $\forall b\,[\mathrm{Seq}\,(b)\,\&\,\forall sA\,(b*2^{s+1})\supset A\,(b)]$ и предпримем вывод A (ρ (a) ∗ c). Согласно (h), (i) и (e) имеем (p) Seq (ρ (a)). С л у ч а й 2.1: $R\,(\rho\,(a))\,\&\,\forall s\rho\,(a*2^{s+1})==0$. Используя (m) и (a), получаем c = 1 (и x = 0). Используя (n) вместе с (p), мы получаем A (ρ (a)) и, следовательно, A (ρ (a) ∗ c). С л у ч а й 2.2: $\forall s\rho\,(a*2^{s+1})=\rho\,(a)*2^{s+1}$. Согласно (j) и (p) имеем (q) $\forall sA'\,(\rho\,(a*2^{s+1}))$. Ввиду (k) вместе с (p), *22.3 и т. д. имеем (r) $\forall s\,\{\exists y_{y<\mathrm{lh}(\rho(a)*2^{s+1})}R\,(\prod_{i<y}p_i^{(\rho(a)*2^{s+1})_i})\sim R\,(\rho\,(a))\}$. По (f) и (p) $R\,(\rho\,(a))\vee\neg R\,(\rho\,(a))$. С л у ч а й 2.2.1: R (ρ (a)). Аналогично случаю 2.1. С л у ч а й 2.2.2: $\neg R\,(\rho\,(a))$. Используя (q) вместе с (r), (n) и (o), получаем (s) $\forall s\forall d\,\{\mathrm{Seq}\,(d)\,\&\,\forall\alpha\,\exists xR\,(\rho\,(a)*2^{s+1}*d*\bar{\alpha}\,(x))\supset\forall sA\,(\rho\,(a)*2^{s+1}*d)\}$. С л у ч а й 2.2.2.1: c = 1. Выведем сначала $A\,(\rho\,(a)*2^{s+1})$ разбором случаев согласно (f) и (p). С л у ч а й A: $R\,(\rho\,(a)*2^{s+1})$. Согласно (n),

$A(\rho(a) * 2^{s+1})$. С л у ч а й В: $\neg R(\rho(a) * 2^{s+1})$. Согласно (m), $\forall\alpha\exists x R(\rho(a) * 2^{s+1} * \bar{\alpha}(x))$. Согласно (s), $A(\rho(a) * 2^{s+1})$, что и требуется. Ввиду (0), $A(\rho(a))$ и, следовательно, $A(\rho(a) * c)$. С л у ч а й 2.2.2.2: $c \neq 1$. Ввиду (l) (и *23.7 и др.) мы можем положить $p = 2^{s+1} * d$, где d таково, что Seq (d). Используя (s) и (m), получаем $A(\rho(a) * c)$. С л у ч а й 2.3: $\mathrm{Seq}(\rho(a*2))\ \&\ \exists s\rho(a) = \rho(a * 2) * 2^{s+1}\ \&\ \forall s\rho(a * 2^{s+2}) = 0$. Допустим (t) $\rho(a) = \rho(a * 2) * 2^{s+1}$. Так как $\mathrm{Seq}(\rho(a * 2))$, $\rho(a * 2) > 0$, то ввиду (j) имеет место (u) $A'(\rho(a * 2))$. Согласно (t) вместе с (k) имеем (v) $\neg\exists y_{y<lh(\rho(a*2))} R\left(\prod_{i<y} p_i^{(\rho(a*2))_i}\right)$. Ввиду (u) вместе с (v), (n) и (o) $\forall c\{\mathrm{Seq}(c)\ \&\ \forall\alpha\exists x R(\rho(a * 2) * c * \bar{\alpha}(x)) \supset A(\rho(a * 2) * c)\}$. Следовательно, беря $2^{s+1} * c$ в качестве c и используя (t), (l) и (m), получаем $A(\rho(a) * c)$.

Обратно, ^{x}26.9 выводимо из ^{x}26.3. Соответствующий вывод Джоан Ренд [1]) (22 марта 1963 г.) короче исходного авторского вывода (зима 1958—1959 г.) и в отличие от него не использует прямо (а не через *2.2) ^{x}2.1.

Предположим (a) $\forall\alpha\forall x\forall y[R(\bar{\alpha}(x))\ \&\ R(\bar{\alpha}(y)) \supset x = y]$, (b) Seq (w) и (c) $\forall\alpha\exists! x R(w * \bar{\alpha}(x))$. Тогда (d) $\forall\alpha\exists! x R(w * \bar{\alpha}(x))$. Следовательно, по лемме 5.6 (e) $\forall\alpha\exists! x R(w * \bar{\alpha}(x)) \vee \neg R(w * \bar{\alpha}(x))$. Отсюда $\mathrm{Seq}(a)\ \&\ a \neq 1 \supset (R(w * \prod_{i<lh(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}) \vee \neg R(w * \prod_{i<lh(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}))$. Таким образом, мы можем ввести ρ, как это сделано ниже, подготавливая $\exists$-удал. из результата применения леммы 5.5 (c) (с $\bar{\alpha}(y)$) и используя *23.5 [*23.2 вместе с *6.3, *22.3, *6.7, *B4, *143b и др.], чтобы выразить $a\ [\rho(\prod_{i<lh(a).1} p_i^{(a)_i})]$ в терминах $\bar{\rho}(a)$.

$$
(f)\quad \forall a\rho(a) = \begin{cases} w = w * a, & \text{если } a = 1, \\ w * a, & \text{если } \mathrm{Seq}(a)\ \&\ a \neq 1\ \& \\ & \neg R\left(w * \prod_{i<lh(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}\right)\ \& \\ & \rho\left(\prod_{i<lh(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}\right) > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
$$

[1]) Дж. Р. Московакис (см. предисловие).— *Прим. перев.*

Тогда (g) $\rho(a) > 0 \supset \rho(a) = w * a$. (Для большей детализации ср. (A) в п. 14.1.)

Первый и третий конъюнктивные члены (h) и (i) формулы $\mathfrak{P}(w, \rho, R)$ немедленно следуют из (f). Чтобы получить второй член (j), допустим $\mathrm{Seq}(a)\ \&\ \rho(a) > 0$. Ввиду (e) мы имеем два случая. С л у ч а й 1: $R(w * a)$. Тогда по (g) $R(\rho(a))$ и по (f) $\forall s\rho(a * 2^{s+1}) = 0$. С л у ч а й 2: $\neg R(w * a)$. Используя это вместе с $\rho(a) > 0$ и (f), получаем $\forall s\rho(a * 2^{s+1}) = w * (a * 2^{s+1}) = (w * a) * 2^{s+1} = \rho(a) * 2^{s+1}$ (согласно (g)).

Чтобы получить $\mathfrak{J}(w, \rho, A)$, допустим (k) $\forall a\{\mathrm{Seq}(a)\ \&\ \rho(a) > 0\ \&\ \forall s[A(\rho(a * 2^{s+1})) \vee \rho(a * 2^{s+1}) = 0] \supset A(\rho(a))\}$. Чтобы вывести A (w) с помощью ^{x}26.3c, достаточно вывести гипотезы (d), (A) и (B) формулы ^{x}26.3c с $R(w * a)$, $A(w * a)\ \&\ \rho(a) > 0$ в качестве R (a), A (a). Ввиду *149a

$$
(l)\quad \rho(\bar{\alpha}(x)) = 0 \supset \exists y_{y \leqslant x}[\rho(\bar{\alpha}(y)) = 0\ \& \\ \forall z_{z<y}\rho(\bar{\alpha}(z)) > 0].
$$

В ы в о д (A). Допустим $\mathrm{Seq}(a)\ \&\ R(w * a)$. Положим $a = \bar{\alpha}(x)$. Согласно (f) $\forall s\rho(a * 2^{s+1}) = 0$. Чтобы применить (k), нам по-прежнему необходимо (m) $\rho(a) > 0$. Предположим $\rho(a) = 0$. Имея в виду (l), допустим (n) $y \leqslant x\ \&\ \rho(\bar{\alpha}(y)) = 0\ \&\ \forall z_{z<y}\rho(\bar{\alpha}(z)) > 0$. Ввиду $\rho(\bar{\alpha}(y)) = 0$ вместе с (f) (и $w > 0$, вытекающим из (b)), имеем $y > 0$ и $R(w * \bar{\alpha}(y \dot{-} 1)) \vee \rho(\bar{\alpha}(y \dot{-} 1)) = 0$. Однако $\rho(\bar{\alpha}(y \dot{-} 1)) = 0$ исключено ввиду (n) и $y > 0$. Следовательно, $R(w * \bar{\alpha}(y \dot{-} 1))\ \&\ R(w * \bar{\alpha}(x))\ \&\ y \dot{-} 1 < y \leqslant x$, что противоречит (d) вместе с *172.— Теперь (k) дает $A(\rho(a))$. Следовательно, ввиду (m) и (g), $A(w * a)\ \&\ \rho(a) > 0$. В ы в о д (B). Допустим $\mathrm{Seq}(a)\ \&\ \forall s(A(w * (a * 2^{s+1}))\ \&\ \rho(a * 2^{s+1}) > 0)$. Ввиду (i) имеем (o) $\rho(a) > 0$. Ввиду (g) $\forall sA(\rho(a * 2^{s+1}))$. Таким образом, по (k) $A(\rho(a))$, следовательно, по (o) и (g) $A(w * a)\ \&\ \rho(a) > 0$.

З а м е ч а н и е 6.3. В своей «бар-теореме» Брауэр **1954** (стр. 14) исходит из некоторого (линейного) вполне упорядочения, однако это делает необходимым некоторый индуктивный принцип, сходный с выраженным в нашей формуле

$^{x}26.3$ и т. д. Мы не знаем никакого другого места в сочинениях Брауэра, где подобное предложение явно устанавливалось бы как теорема, за исключением § 1 работы **1924** (не совпадающего с соответствующим текстом **1954**), в котором гипотеза **1954** (стр. 14) или $^{x}26.3$ заменена другой гипотезой, влекущей ее через (приводимый ниже в § 7) принцип Брауэра (и делающей теорему классически ложной). Однако из работы **1954** (стр. 14) «заимствуется» переход стр. 63—65 работы **1927**, доказывающий эту версию. Мы не рассматриваем то или иное предложение как версию бар-теоремы, если только оно не позволяет из гипотезы, дающей (или делающей необходимой) гарантируемость$_{\mathrm{E}}$ или запертость$_{\mathrm{E}}$, получить гарантируемость$_{\mathrm{I}}$ или запертость$_{\mathrm{I}}$ или некоторое свойство вполне упорядоченности, ибо достижению именно этого посвящены усилия в брауэровском доказательстве **1954** или **1927**.

§ 7. Постулаты, касающиеся сопоставления функций последовательностям выбора (принцип Брауэра). 7.1. Предположим, что каждой последовательности выбора $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... сопоставлено некоторое натуральное число b. Поскольку последовательности выбора рассматриваются интуиционистски не как завершенные, а как непрерывно развивающиеся посредством новых выборов, это сопоставление интуиционистски может осуществляться только таким способом, при котором сопоставляемое число становится (эффективно) определимым на некоторой (конечной) стадии развития последовательности $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... Таким образом, интуиционистски b должно эффективно определяться первыми y выборами $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ последовательности α при некотором y (зависящем, вообще говоря, от этих выборов).

Мы называем это «принципом Брауэра (для чисел)». Брауэр утверждал его в **1924**, § 1, **1927**, § 2 и **1954**, стр. 15, в ходе доказательства своей версии теоремы о веере. Он также утверждал его в работах **1918—1919**, I, конец § 1, и **1924—1927**, I, конец § 5, в (не использующей канторовского диагонального метода, ВМ, § 2, конец стр. 14) аргументации того, что универсальный поток C не может быть взаимно однозначно отображен на подмножество A множества всех натуральных чисел; при принятии этого принципа вместе с обычным определением $>$ для кардинальных чисел (ВМ,

стр. 17) и использовании некоторого очевидного взаимно однозначного отображения A на подмножество C интуиционистски оказывается довольно тривиальной теорема о том, что кардинальное число C больше кардинального числа A.

Для нашего формального изложения необходимо уточнить принцип Брауэра. Это можно сделать явным включением его в любое утверждение, в котором говорится, что b сопоставляется каждой α. Тогда простые утверждения без добавленного разъяснения не употреблялись бы. Во всяком случае Брауэр предпочел рассматривать определение сопоставляемого числа по некоторому начальному сегменту $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ последовательности α как подразумеваемое при употреблении им выражений вида 'b сопоставляется каждой α'. В таком случае в интуиционистской формальной системе должна быть постулирована формула, выражающая или, может быть, обеспечивающая этот принцип. Принцип Брауэра ложен классически, например, в случае классически допустимого сопоставления 0 всем последовательностям, состоящим из одних нулей, и 1 всем остальным последовательностям. Таким образом (и согласно п. 9.2), этот принцип независим от других интуиционистских постулатов, которые все верны классически. Намерение Брауэра, касающееся того, что b должно определяться эффективно, засвидетельствовано в его выражении: «*алгорифм* закона сопоставления» (**1924**, § 1, **1927**, § 2).

Прежде чем формулировать требуемый постулат, рассмотрим сначала, каким должен быть этот алгорифм. Для каждого начального сегмента $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ последовательности выбора α он должен решить, продуцируется ли этим сегментом сопоставляемое число b. Если решение положительно (а это должно случиться при некотором y), то он должен выработать это b. Так же, как и в § 6, нам будет удобно представлять каждый начальный сегмент $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ некоторой последовательности выбора α номером последовательности $\bar{\alpha}(y)$. Тогда мы сможем соединить две подлежащие выполнению операции алгорифма в одной функции τ, оперирующей, таким образом, с номерами последовательностей $\bar{\alpha}(y)$. По мере роста начального сегмента $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ некоторой последовательности выбора α (y возрастает) $\tau(\bar{\alpha}(y))$ остается нулем так долго, пока алгорифм не воспринимает

$\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ или $\bar{\alpha}(y)$ как основу для выработки b. Однако, как только это первый раз случится, $\tau(\bar{\alpha}(y)) = b+1$. (Это представление было выбрано в январе 1956 г. в ходе настоящего исследования. Оно тем временем было использовано в работе Клини **1959a**. Если употреблять терминологию этой статьи интуиционистски, то принцип Брауэра для чисел может быть высказан так: каждый функционал типа 2 счетен.)

Мы не говорим, что при росте y $\tau(\bar{\alpha}(y))$ остается нулем так долго, пока $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ или $\bar{\alpha}(y)$ не «определит» b в том смысле, что то же самое b сопоставляется всем α, имеющим $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ в качестве начального сегмента. Интуиционистски сопоставление изначально устанавливается самим алгорифмом, т. е. $\tau(\bar{\alpha}(y))$ отличается от 0, когда $\bar{\alpha}(y)$ эффективно определяет b посредством этого алгорифма. Сказанное, конечно, не исключает возможности, что мы сможем доказать относительно данного алгорифма, что в некоторых случаях он откладывает выработку b до первого y, при котором для всех способов продолжения $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ он будет вырабатывать в конечном счете одно и то же b. (Ср. Брауэр **1924**, § 1, конец абзаца 1, **1927**, § 2, конец абзаца 1.)

Мы приведем один пример (из Клини **1959a**, стр. 83), в котором такое «откладывание» алгорифма существенно, если считать, что τ, выражающая тот или иной алгорифм, должна быть общерекурсивной (тезис Чёрча). Пусть b сопоставляется каждой α посредством правила такого, что $b = 0$, если $\overline{T}_1(\alpha(0), \alpha(0), \alpha(1))$, и $b = \alpha(1)+1$ в остальных случаях (ВМ, стр. 251). Если выработку b всегда откладывать до $y = 2$, то достаточно некоторой примитивно рекурсивной функции τ, именно

$$\tau(a) = \begin{cases} 1, \text{ если } \overline{T}_1((a)_0 \dot{-} 1,\ (a)_0 \dot{-} 1,\ (a)_1 \dot{-} 1) \ \&\ \mathrm{lh}(a) = 2, \\ (a)_1 + 1, \text{ если } T_1((a)_0 \dot{-} 1,\ (a)_0 \dot{-} 1,\ (a)_1 \dot{-} 1) \ \&\ \mathrm{lh}(a) = 2 \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Однако, если b всегда вырабатывается, как только оно классически определено, то мы должны были бы иметь

$(y)\,\overline{T}_1(x, x, y) \equiv \tau(2^{x+1}) = 1$, и, таким образом, согласно ВМ, стр. 252, τ не была бы общерекурсивной.

Нам будет удобно считать, что $\tau(\bar{\alpha}(y)) = 0$ после первого y, для которого $\tau(\bar{\alpha}(y)) > 0$, так что мы будем иметь $(\alpha)(E!y)\,\tau(\bar{\alpha}(y)) > 0$. Если бы у нас была только некоторая τ, для которой $(\alpha)(Ey)\,\tau(\bar{\alpha}(y)) > 0$, то мы смогли бы перейти к функции τ_1, для которой $(\alpha)(E!y)\,\tau_1(\bar{\alpha}(y)) > 0$, положив

$$\tau_1(a) = \begin{cases} \tau(a), \text{ если } \mathrm{Seq}(a) \ \&\ (z)_{z<\mathrm{lh}(a)}\tau\left(\prod_{i<z} p_i^{(a)_i}\right) = 0, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Формулы, которыми мы здесь представляем принцип Брауэра, оказываются, таким образом, взаимно выводимыми с формулами, выражающими этот принцип, без условия единственности y (лемма 5.5 (a), *149a, *159 и *174b).

Рассмотрим далее гипотезу, что каждой последовательности выбора α сопоставляется некоторое натуральное число b. Этим утверждается существование некоторой функции из α в b, т. е. функционала **F** типа 2. Мы могли бы добавить переменные по функционалам к нашему формализму, чтобы формализовать принцип Брауэра. Однако мы хотим поддерживать формализм настолько простым, насколько возможно. В конечном счете все, что нужно, чтобы продвинуться так далеко, как в настоящей книге (включая гл. III Весли),— это чтобы функционал $b = \mathbf{F}(\alpha)$ порождался некоторым данным отношением $A(\alpha, b)$ над α. Тогда мы можем записать высказанную гипотезу просто как $(\alpha)(Eb)\,A(\alpha, b)$. Согласно нашему пониманию интуиционизма $(\alpha)(Eb)\,A(\alpha, b)$ означает в точности наличие некоторого процесса **F**, посредством которого по заданной произвольной α мы можем найти конкретное **F** такое, что $A(\alpha, b)$. Таким образом, некоторая аксиома выбора $(\alpha)(Eb)\,A(\alpha, b) \to (E\mathbf{F})(\alpha)\,A(\alpha, \mathbf{F}(\alpha))$ выполняется интуиционистски. (Другие аксиомы выбора, соответствующие префиксам $(x)(Ey)$ и $(x)(E\alpha)$, были введены выше как *2.2 и $^{\times}$2.1.) Принцип Брауэра говорит, что каждый процесс **F** может быть представлен некоторой функцией τ описанным только что образом. Поэтому τ может заменить **F**. Таким образом, **F** играет только промежуточную роль между исходной гипотезой $(\alpha)(Eb)\,A(\alpha, b)$ и появлением τ. Комбинируя принцип выбора, подразумеваемый интуиционистским смыслом префикса $(a)(Eb)$, с принципом Брауэра для чисел в том виде, в котором он его прямо формулировал, мы приходим к некоторой формулировке принципа Брауэра, каждый пример которой может быть непосредственно выражен в нашем формализме. Таким образом, мы приходим к *27.2 как к нашей формализации принципа Брауэра для чисел. (В **1957**, (4), мы уже формулировали сходным образом одно следствие принципа Брауэра.)

Другой случай принципа Брауэра (для функций) утверждает, что если каждой последовательности выбора $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... сопоставлена некоторая функция β, то интуиционистски каждое значение $\beta(t)$ этой функции должно эффективно определяться по t и некоторому начальному сегменту $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ последовательности α. Это может рассматриваться как сопоставление числа $b=\beta(t)$ каждой последовательности выбора t, $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ...

Первоначально мы предполагали, что этот принцип (для функций) понадобится при формализации брауэровского доказательства его теоремы о равномерной непрерывности (Брауэр **1923a**, теорема 3, **1924**, теорема 3, **1927**, теорема 3, **1952**, стр. 14, **1954**, § 6). Однако в § 15 гл. III Весли ухитрился обойтись употреблением только принципа Брауэра для чисел для каждого значения $\beta(t)$ функции β отдельно.

Тем не менее нам кажется, что интуиционистские соображения в пользу принятия принципа Брауэра для чисел равным образом приложимы и к соответствующему принципу для функций (несмотря на то, что нам неизвестно какое-нибудь его явное утверждение в сочинениях Брауэра). Поэтому мы выбираем постулирование последнего в виде ˣ27.1 (для интуиционистской, но не для базисной системы); ср. 7.15.

7.2. В ˣ27.1 α, β и τ — любые различные функциональные переменные, t и y — любые различные числовые переменные, $A(\alpha, \beta)$ — произвольная формула, не содержащая свободно τ.

$$^{x}27.1.\quad \forall\alpha\exists\beta A(\alpha,\beta)\supset\exists\tau\forall\alpha\{\forall t\exists!\,y\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(y))>0$$
$$\&\forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(y))=\beta(t)+1\supset$$
$$A(\alpha,\beta)]\}.$$

Теперь мы можем специализировать принцип Брауэра для чисел.

$$*27.2.\quad \vdash\forall\alpha\exists b A(\alpha, b)\supset\exists\tau\forall\alpha\exists y\{\tau(\bar{\alpha}(y))>0\&$$
$$\forall x[\tau(\bar{\alpha}(x))>0\supset y=x]\&A(\alpha,\tau(\bar{\alpha}(y))\dot{-}1)\}.$$

Доказательство. Допустим $\forall\alpha\exists b A(\alpha, b)$. Согласно *0.6 $\forall\alpha\exists\beta A(\alpha,\beta(0))$. Применяя ˣ27.1 и опуская $\exists\tau$, подготавливая $\exists$-удал., а также используя $\forall$- и &-удал., получаем

$$(1)\quad \forall t\exists!\,y\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(y))>0,$$

$$(2)\quad \forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(y))=\beta(t)+1\supset A(\alpha,\beta(0))].$$

Применяя *2.2 к (1) (расшифровывая $\exists!y$ согласно ВМ, стр. 180) и опуская $\exists\nu$ в результате (для $\exists$-удал.) получаем

$$(3)\quad \forall t[\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(\nu(t)))>0\&$$
$$\forall x[\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(x))>0\supset\nu(t)=x]].$$

По $\forall$-удал. из (2) (используя $\lambda t\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(\nu)(t)))\dot{-}1$ в качестве β) и ˣ0.1 имеем

$$(4)\quad \forall t\exists y\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(y))=(\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(\nu(t)))\dot{-}1)+1\supset$$
$$A(\alpha,\tau(2*\bar{\alpha}(\nu(0)))\dot{-}1).$$

По $\forall$-удал. из (3) и *6.7 $\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(\nu(t)))=(\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(\nu(t)))\dot{-}1)+1$, следовательно, $\forall t\exists y\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(y))=(\tau(2^{t+1}*\bar{\alpha}(\nu(t)))\dot{-}1)+1$. Тогда по (4) имеет место $A(\alpha,\tau(2*\bar{\alpha}(\nu(0)))\dot{-}1)$, а по ˣ0.1 получаем

$$(5)\quad A(\alpha,\{\lambda t\tau(2*t)\}(\bar{\alpha}(\nu(0)))\dot{-}1).$$

Кроме того, по $\forall$-удал. из (3) (с 0 в качестве t) и ˣ0.1 получаем

$$(6)\quad \{\lambda t\tau(2*t)\}(\bar{\alpha}(\nu(0)))>0\&$$
$$\forall x[\{\lambda t\tau(2*t)\}(\bar{\alpha}(x))>0\supset\nu(0)=x].$$

Формула *27.2 следует из (6) и (5) посредством &- и $\exists y$-введ. $\exists\nu$-удал., $\forall\alpha$- и $\exists\tau$-введ., $\exists\tau$-удал. и $\supset$-введ.

Третий случай принципа Брауэра (случай разрешения) приложим, когда A и B — такие классы, что каждая последовательность выбора α принадлежит A или B. Тогда интуиционистски один из классов A и B, которому принадлежит α, должен определяться некоторым начальным сегментом $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ последовательности α.

$$*27.3.\quad \vdash \forall\alpha(A(\alpha) \vee B(\alpha)) \supset \exists\tau\forall\alpha\exists y\{\forall x[\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \,\&\, \{(A(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 1) \vee (B(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 2)\}\}.$$

Доказательство. Допустим $\forall\alpha\,(A(\alpha) \vee B(\alpha))$. По $\forall$-удал. $A(\alpha) \vee B(\alpha)$. Случай 1: $A(\alpha)$. Ввиду *100 $A(\alpha) \,\&\, 0 = 0$, откуда по $\vee$-введ. $(A(\alpha) \,\&\, 0 = 0) \vee (B(\alpha) \,\&\, 0 = 1)$, следовательно, по $\exists$-введ. $\exists b\{(A(\alpha) \,\&\, b = 0) \vee (B(\alpha) \,\&\, b = 1)\}$. Случай 2: $B(\alpha)$. Аналогично.— По $\forall$-введ. $\forall\alpha\exists b\{(A(\alpha) \,\&\, b = 0) \vee (B(\alpha) \,\&\, b = 1)\}$. Согласно *27.2 имеем $\exists\tau\forall\alpha\exists y\{\tau(\bar{\alpha}(y)) > 0 \,\&\, \forall x[\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \,\&\, \{(A(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1 = 0) \vee (B(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1 = 1)\}\}$. Посредством $\exists$-, $\forall$-, $\&$- и $\vee$-удал. и введ. и *6.7 (в надлежащей последовательности) и $\supset$-введ. мы получаем формулу *27.3.

С помощью *2.2 и *6.7 обращение ˣ27.1 может быть доказано в базисной системе. Таким образом, главная импликация в ˣ27.1 может быть усилена до $\sim$ (аналогично ˣ2.1); назовем получившееся утверждение *27.1a. Аналогично (как правило, более просто) *27.2—*27.10, *27.15 могут быть усилены до *27.2a — *27.10a, *27.15a ($B \supset A$, $C \,\&\, B \supset A$, $D \,\&\, C \,\&\, B \supset A$ становятся $B \sim A$, $C \supset (B \sim A)$, $D \,\&\, C \supset (B \sim A)$).

7.3. В 7.2 мы ввели принцип Брауэра для универсального потока. Этот принцип приложим и к другим потокам.

$$*27.4\quad \vdash \mathrm{Spr}(\sigma) \,\&\, \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists\beta A(\alpha, \beta) \supset \exists\tau\forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\{\forall t\exists!\, y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0 \,\&\, \forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(\alpha, \beta)]\}.$$

$$*27.5.\quad \vdash \mathrm{Spr}(\sigma) \,\&\, \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists b A(\alpha, b) \supset \exists\tau\forall_{\alpha\in\sigma}\exists y\{\tau(\bar{\alpha}(y)) > 0 \,\&\, \forall x[\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \,\&\, A(\alpha, \tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1)\}.$$

$$*27.6.\quad \vdash \mathrm{Spr}(\sigma) \,\&\, \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}(A(\alpha) \vee B(\alpha)) \supset \exists\tau\forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists y\{\forall x[\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \,\&\, \{(A(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 1) \vee (B(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 2)\}\}.$$

Доказательства. *27.4. Случай 1: $\sigma(1) \neq 0$. Тогда $\neg\alpha \in \sigma$. Используем *10a. Случай 2: $\sigma(1) = 0$. Допуская также $\mathrm{Spr}(\sigma)$, мы можем ввести π и γ, как в разделе I доказательства *26.4a, причем (α)—(η) будут выполняться. Допустим $\forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists\beta A(\alpha, \beta)$. Согласно $\forall$-удал. $\alpha_\gamma \in \sigma \supset \exists\beta A(\alpha_\gamma, \beta)$, откуда по ($\varepsilon$) и $\forall$-введ. $\forall\alpha\exists\beta A(\alpha_\gamma, \beta)$. Используя ˣ27.1 с $A(\alpha_\gamma, \beta)$ в качестве $A(\alpha, \beta)$ и опуская $\exists\tau$ для $\exists$-удал., получаем $\forall\alpha\{\forall t\exists!\, y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0 \,\&\, \forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(\alpha_\gamma, \beta)]\}$. Тогда, допуская $\alpha \in \sigma$ и используя $\forall$-удал. и (η), получаем $\forall t\exists!\, y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0 \,\&\, \forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(\alpha, \beta)]$.

*27.5, *27.6. Аналогично из *27.2 и *27.3 соответственно, или последовательно из *27.4 так же, как *27.2 и *27.3 получались из ˣ27.1.

7.4. Брауэр соединил свой принцип (для чисел) с тем, что мы уже имели в *26.6 (или *26.7), чтобы установить в следующем виде свою теорему о веере: если каждому элементу δ некоторого веера сопоставлено натуральное число $b\delta$, то может быть определено натуральное число z такое, что для каждого δ сопоставляемое число $b\delta$ полностью определяется первыми z выборами последовательности выбора α, порождающей δ. Сейчас мы установим это. Сначала мы обратимся непосредственно к вееру из последовательностей выбора α (ср. 6.10).

$$*27.7.\quad \vdash \forall\alpha_{B(\alpha)}\exists b A(\alpha, b) \supset \exists z\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists b\forall\gamma_{B(\gamma)}\{\forall x_{x<z}\gamma(x) = \alpha(x) \supset A(\gamma, b)\},$$

где $B(\alpha)$ есть $\forall x\alpha(x) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(x))$.

$$*27.8.\quad \vdash \mathrm{Spr}(\sigma) \,\&\, \forall a[\sigma(a) = 0 \supset \exists b\forall s\{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant b\}] \,\&\, \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists b A(\alpha, b) \supset \exists z\forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists b\forall\gamma_{\gamma\in\sigma}\{\forall x_{x<z}\gamma(x) = \alpha(x) \supset A(\gamma, b)\}.$$

Доказательства. *27.7. Так же, как и в разделе I доказательства *26.6a, мы введем σ так, что выполняются (a) — (c), (1) и (2). Допустим (d) $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists b A(\alpha, b)$. Применяя *27.5 вместе с (1) и (c) и опуская для $\exists$-удал.

$\exists\tau$, получаем

(e) $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists y\{\tau(\bar{\alpha}(y))>0 \,\&\, \forall x[\tau(\bar{\alpha}(x))>0 \supset y=x] \,\&$
$A(\alpha, \tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1)\}$.

Мы имеем первую гипотезу *26.6а для $\tau(a)>0$ в качестве $R(a)$ согласно *159 или по *15.1 и *158 и вторую гипотезу согласно (e). Таким образом, применяя *26.6а и опуская $\exists z$ для $\exists$-удал., имеем

(f) $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists x_{x\leqslant z}\tau(\bar{\alpha}(x))>0$.

Чтобы получить заключение *27.7, допустим $B(\alpha)$. Используя (e), допустим для (&-и) $\exists$-удал. (**h**$_1$) $\forall x\,[\tau(\bar{\alpha}(x))>0 \supset y_1 = x]$. Допустим $B(\gamma)$. Используя (e), допустим (**g**$_2$) $\tau(\bar{\gamma}(y_2))>0$, (**h**$_2$) $\forall x\,[\tau(\bar{\gamma}(x))>0 \supset y_2 = x]$ и (**i**$_2$) $A(\gamma, \tau(\bar{\gamma}(y_2)) \dot{-} 1)$ и, используя (f), допустим (**j**) $x \leqslant z$, (**k**) $\tau(\bar{\gamma})(x))>0$. Допустим $\forall x_{x<z}\gamma(x) = \alpha(x)$. Тогда, используя (j) вместе с *B19 и ×23.1, получаем $\bar{\gamma}(x) = \bar{\alpha}(x)$. Ввиду (k) и (h$_2$) $y_2 = x$, так что $\bar{\gamma}(y_2) = \bar{\gamma}(x) = \bar{\alpha}(x)$, следовательно, по (g$_2$) и (h$_1$) $y_1 = x$, так что $\bar{\gamma}(y_2) = \bar{\alpha}(y_1)$. Следовательно, по (i$_2$) $A(\gamma, \tau(\bar{\alpha}(y_1)) \dot{-} 1)$. Теперь мы можем закончить вывод с помощью $\supset$-, $\forall$- и $\exists$-введ. и &- и $\exists$-удал. в надлежащем порядке, взяв $\tau(\alpha(y_1)) \dot{-} 1$ в качестве b.

*27.8. Аналогично из *26.6а.—

Рассмотрим теперь веер из элементов δ, определяемый законом выбора σ (удовлетворяющим первым двум гипотезам *27.8) и законом сопоставления ϱ (ср. 6.1, 6.9). То, что b (такое, что $A(\delta, b)$) сопоставляется каждому элементу δ, может быть выражено в формальных символах как $\forall\delta\,\{\exists\alpha_{\alpha\in\sigma}\,\forall t\delta(t) = \rho(\bar{\alpha}(t)) \supset \exists bA(\delta, b)\}$. Ввиду *96, ×0.1 и леммы 4.2 это эквивалентно $\forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists bA(\lambda t\rho(\bar{\alpha}(t)), b)$. Теорема о веере для такого веера выражается посредством *27.8 с $A(\lambda t\rho(\bar{\alpha}(t)), b)$ в качестве $A(\alpha, b)$.

7.5. Постулаты и результаты, полученные до сих пор, ставят нас в выгодную позицию для следования брауэровскому развитию его анализа. Это сделано со всей тщательностью Весли в гл. III ниже. Здесь же мы продолжим исследования, касающиеся в большей степени оснований.

Используя принцип Брауэра, мы можем освободиться от гипотез $\forall a\,[\mathrm{Seq}(a) \supset R(a) \vee \neg R(a)]$ ($\forall a\,[\sigma(a) = 0 \supset R(a) \vee \neg R(a)]$) в нашей предварительной версии *26.6а (*26.7а) теоремы о веере.

*27.9. $\vdash \forall\alpha_{B(\alpha)}\exists xR(\bar{\alpha}(x)) \supset \exists z\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists x_{x\leqslant z}R(\bar{\alpha}(x))$,

где $B(\alpha)$ есть $\forall t\alpha(t)\leqslant\beta(\bar{\alpha}(t))$.

*27.10. $\vdash \mathrm{Spr}(\sigma) \,\&\, \forall a\,[\sigma(a)=0 \supset \exists b\forall s\{\sigma(a * 2^{s+1})=0 \supset$
$s\leqslant b\}] \,\&\, \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists xR(\bar{\alpha}(x)) \supset$
$\exists z\forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists x_{x\leqslant z}R(\bar{\alpha}(x))$.

Доказательства *27.9. Это следует из *27.11 так же, как *26.6а следовало из *26.4а. Приводимое ниже доказательство более прямое. Мы поступаем так же, как в доказательстве *27.7, вплоть до (f) с $R(\bar{\alpha}(b))$ в качестве $A(\alpha, b)$. Для $\exists$-удал. из леммы 5.3 (b) предположим

(g) $\gamma(0)=1 \,\&\, \forall k\,[\gamma(k')=\gamma(k)\cdot(p_k \exp 1 + \max_{t\leqslant\gamma(k)}\beta(t))]$

(ср. Клини **1956**, примечание 8). Индукцией по k, как ниже, получаем

(**h**) $B(\alpha) \,\&\, x\leqslant k \supset \bar{\alpha}(x) \leqslant \gamma(k)$.

Инд. шаг. Допустим $B(\alpha) \,\&\, x\leqslant k'$. Случай 1: $x\leqslant k$. Тогда $\bar{\alpha}(x) \leqslant \gamma(k)$ [инд. предп.] $\leqslant \gamma(k')$ [(g) и *143a вместе с *3.9 и *18.5]. Случай 2: $x = k'$. Тогда $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(k)\cdot p_k^{\alpha(k)+1}$ [*23.8] $\leqslant \bar{\alpha}(k)\cdot(p_k \exp 1 + \max_{t\leqslant\lambda(k)}\beta(t))$ [так как $\alpha(k) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(k))$ [ввиду $B(\alpha)$] $\leqslant \max_{t\leqslant\gamma(k)}\beta(t)$ [инд. предп., *H7]; далее используем *145c (п. 5.5, абзац 4) вместе с *144b и *3.12 вместе с *18.5] $\leqslant \gamma(k)\cdot(p_k \exp 1 + \max_{t\leqslant\gamma(k)}\beta(t))$ [инд. предп. и снова *145c] $= \gamma(k')$ [(g)].— Для того, чтобы получить заключение *27.9, допустим (**i**) $B(\alpha)$. Ввиду (f) $\exists x_{x\leqslant 7}\tau(\bar{\alpha}(x))>0$. Тогда допустим (**j**) $x\leqslant z \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(x))>0$ и, используя (e), допустим (**k**) $\forall x\,[\tau(\bar{\alpha}(x))>0 \supset y = x]$ и (**l**) $R(\bar{\alpha}(\tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1))$. Ввиду (j) и (k) $y = x$, следовательно, по (l) имеем (**m**) $R(\bar{\alpha}(\tau(\bar{\alpha}(x)) \dot{-} 1))$. Согласно *H7 и (h) вместе с (i) и (j) получаем (**n**) $\tau(\bar{\alpha}(x)) \dot{-} 1 \leqslant \max_{s\leqslant\gamma(z)}\tau(s) \dot{-} 1$. Используя (n) и (m), мы выводим заключение *27.9 посредством надлежащей последовательности $\exists$- &-, $\supset$- и $\forall$-введ. и &-

и $\exists$-удал. с $\tau(\bar{\alpha}(x)) \dot{-} 1$ в качестве x и $\max_{s \leqslant \lambda(z)} \tau(s) \dot{-} 1$ в качестве z.

*27.10. Вытекает из *27.9 так же, как *26.7a из *26.6a.

Аналогично мы можем ослабить предположение бар-теоремы *26.4a в случае, когда поток есть веер. Эти результаты вместе с соответствующими результатами 6.7—6.9, 7.6 и 7.14 дают обзор теоретико-доказательными методами интуиционистских версий классических форм бар-теоремы.

*27.11. $\vdash \forall \beta_{B(\alpha)} \exists x R(\bar{\alpha}(x))\ \&$

$$\forall\alpha\forall x[\forall t_{t<x}\alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(t)\ (\&\ R(\bar{\alpha}(x)) \supset$$

$$A(\bar{\alpha}(x))]\ \&\ \forall\alpha\forall x\ [\forall t_{t<x}\alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(t))\ \&$$

$$\forall s\{s \leqslant \beta(\bar{\alpha}(x)) \supset A(\bar{\alpha}(x) * 2^{s+1})\} \supset$$

$$A(\bar{\alpha}(x))] \supset A(1),$$

где $B(\alpha)$ есть $\forall t\alpha(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(t))$.

*27.12. $\vdash \mathrm{Spr}(\sigma)\ \&\ \sigma(1) = 0\ \&$

$$\forall a[\sigma(a) = 0 \supset \exists b \forall s\{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset$$

$$s \leqslant b\}]\ \&\ \forall\alpha_{\alpha\in\sigma}\exists x R(\bar{\alpha}(x))\ \&$$

$$\forall a[\sigma(a) = 0\ \&\ R(a) \supset A(a)]\ \&$$

$$\forall a[\sigma(a) = 0\ \&\ \forall s\{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset$$

$$A(a * 2^{s+1})\} \supset A(a)] \supset A(1).$$

Доказательства. 27.11. Мы продвигаемся, как в доказательстве *27.9, вплоть до (h). Пусть $R'(a)$ есть формула $\exists u_{u \leqslant \lambda(z)} [\sigma(u) = 0\ \&\ \mathrm{lh}(a) + 1 = \tau(u)\ \&\ \forall i_{i < \min(\mathrm{lh}(a), \mathrm{lh}(u))} (a)_i = (u)_i]$. Допустим теперь остальные две гипотезы (o) и (p) формулы *27.11. Мы применим *26.4a с $R'(a)$ в качестве $R(a)$. Из остающихся гипотез (3′) — (6′) формулы *26.4a мы имеем (3′) по замечанию 4.1 (или #D, #E и т. д.). Для (4′) допустим $\alpha \in \sigma$, тогда (c) дает (i) $B(\alpha)$, так что мы можем затем допустить (j). Используя (h) — (j), (b), *6.7, *23.2 и т. д., мы приходим к $R'(\bar{\alpha}(\tau(\bar{\alpha}(x)) \dot{-} 1))$ с $\bar{\alpha}(x)$ в качестве u. Чтобы вывести (5′) из (o) и (a), (b) и др., было бы достаточно (ввиду (a), *23.6) вывести $\sigma(\bar{\alpha}_1(x_1)) = 0\ \&\ R'(\bar{\alpha}_1(x_1)) \supset R(\bar{\alpha}_1(x_1))$. Таким образом, допустим $\sigma(\bar{\alpha}_1(x_1)) = 0\ \&\ R'(\bar{\alpha}_1(x_1))$ и для

$\exists$-удал. (упрощая) (q) $u \leqslant \gamma(z)\ \&\ \sigma(u) = 0\ \&\ x_1 + 1 = \tau(u)\ \&\ \forall i_{i < \min(x_1, \mathrm{lh}(u))} \alpha_1(i) + 1 = (u)_i$. Ввиду $\sigma(u) = 0$ и (a) имеем $\mathrm{Seq}(u)$. На основании леммы 5.3(a) пусть $\forall i\alpha(i) = \max((\bar{\alpha}_1(x_1))_i, (u)_i) \dot{-} 1$. Используя последнюю часть (q), *23.2, *23.3, *22.2 и т. д., получим $i < x_1 \supset \alpha(i) = \alpha_1(i)$, $i < \mathrm{lh}(u) \supset \alpha(i) = (u)_i \dot{-} 1$ и (r) $i \geqslant \max(x_1, \mathrm{lh}(u)) \supset \alpha(i) = 0$. Таким образом, используя сначала *B19 и ×23.1, а затем также *22.3, *6.7 вместе с *22.1 и др., получаем (s) $\bar{\alpha}(x_1) = \bar{\alpha}_1(x_1)\ \&\ \bar{\alpha}(\mathrm{lh}(u)) = u$. Отсюда, используя также $\sigma(\bar{\alpha}_1(x_1)) = 0$ и $\sigma(u) = 0$ вместе с (b), (c) и (r), получаем (i) $B(\alpha)$. Таким образом, так же, как и в доказательстве *27.9, мы можем допустить (k) и (l). Ввиду (s) и (q) имеет место (t) $x_1 + 1 = \tau(\bar{\alpha}(\mathrm{lh}(u)))$. Таким образом, по (k) $y = \mathrm{lh}(u)$, следовательно, по (l) $R(\bar{\alpha}(\tau(\bar{\alpha}(\mathrm{lh}(u))) \dot{-} 1))$, откуда по (t) и *6.3 вместе с (s) получаем $R(\bar{\alpha}_1(x_1))$.— Наконец, (6′) следует из (p) и (b).

*27.12. Принимая гипотезы (1″) — (6″) *27.12, мы используем разделы I и II доказательства случая 2 *26.7a.

III. Мы применим *27.11 для β из (θ) с $R(\gamma(a))$ в качестве $R(a)$ и $\sigma(a) = 0 \supset A(\gamma(a))$ в качестве $A(a)$. B. Первая гипотеза *27.11 (=вторая гипотеза *26.6a) проверяется так же, как и раньше. Для второй гипотезы предположим $R(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Ввиду ($\gamma$) и (5″) $A(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$, откуда $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0 \supset A(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Для установления третьей гипотезы достаточно, предположив

(ι) $\forall s\{s \leqslant \beta(\bar{\alpha}(x)) \supset [\sigma(\bar{\alpha}(x) * 2^{s+1}) =$
$0 \supset A(\gamma(\bar{\alpha}(x) * 2^{s+1}))]\}$,

вывести $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0 \supset A(\gamma(\bar{\alpha}(x)))$. Допустим ($\varkappa$) $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0$. Ввиду ($\gamma$) и (6″) достаточно, допуская (λ) $\sigma(\gamma(\bar{\alpha}(x)) * 2^{s+1}) = 0$, вывести $A(\gamma(\bar{\alpha}(x)) * 2^{s+1})$. Из ($\lambda$) по ($\varkappa$) и ($\zeta$) получаем ($\mu$) $\sigma(\bar{\alpha}(x) * 2^{s+1}) = 0$. Ввиду ($\theta$) вместе с ($\varkappa$) и ($\mu$) имеет место ($\nu$) $s \leqslant \beta(\bar{\alpha}(x))$. Согласно ($\iota$) вместе с ($\nu$) и ($\mu$) получаем $A(\gamma(\bar{\alpha}(x) * 2^{s+1}))$, следовательно, по ($\zeta$) и ($\mu$) $A(\bar{\alpha}(x) * 2^{s+1})$, следовательно, по ($\zeta$) и ($\varkappa$) $A(\gamma(\bar{\alpha}(x)) * 2^{s+1})$.

7.6. Используя (×27.1 через) *27.2, мы можем установить пятую интуиционистскую версию бар-теоремы (ср. ×26.3a — ×26.3d).

*27.13. $\vdash \forall\alpha \forall x [R(\bar{\alpha}(x)) \supset \forall y_{y>x} R(\bar{\alpha}(y))] \&$
$\forall\alpha \exists x R(\bar{\alpha}(x)) \& \forall a [\mathrm{Seq}(a) \& R(a) \supset A(a)] \&$
$\forall a [\mathrm{Seq}(a) \& \forall s A(a * 2^{s+1}) \supset A(a)] \supset A(1).$

Доказательство. Допустим четыре гипотезы (1) — (4) *27.13. Используя (2) вместе с*27.2 и опуская $\exists\tau$ для $\exists$-удал., имеем

(a) $\forall\alpha \exists y \{\tau(\bar{\alpha}(y)) > 0 \& \forall x [\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \&$
$R(\bar{\alpha}(\tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1))\}$.

Пусть $R'(a)$ есть $\mathrm{lh}(a) = \langle(\mathrm{lh}(a))_0, (\mathrm{lh}(a))_1\rangle \&$ $\tau(\prod_{i<(\mathrm{lh}(a))_0} p_i^{(a)_i}) = (\mathrm{lh}(a))_1 + 1$. Тогда

(b) $R'(\bar{\alpha}(x)) \sim x = \langle(x)_0, (x)_1\rangle \& \tau(\bar{\alpha}((x)_0)) = (x)_1 + 1$

[*23.4 вместе с *19.2 и др.]. Применим ˣ26.3a с $R'(a)$ в качестве $R(a)$. Первую гипотезу ˣ26.3a имеем по замечанию 4.1 или по #D. Вторую гипотезу с $\langle y, \tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1\rangle$ в качестве x получаем из (a) и *25.1, *6.7. Чтобы получить третью, допустим $\mathrm{Seq}(a) \& R'(a)$ и $a = \bar{\alpha}(x)$. Тогда имеем правую часть (c) из (b). Используя (a), допустим для $\exists$-удал. (d) $\forall x [\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x]$ и (e) $R(\bar{\alpha}(\tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1))$. Согласно (c) и (d) $y = (x)_0$, так что $\tau(\bar{\alpha}(y)) \dot{-} 1 = \tau(\bar{\alpha}((x)_0)) \dot{-} 1 = ((x)_1 + 1) \dot{-} 1 = (x)_1$ [*6.3] $\leqslant x$ [*19.2, *19.6]. Следовательно, по (e) и (1) $R(\bar{\alpha}(x))$, т. е. $R(a)$. Таким образом, согласно (3), $A(a)$. Четвертая гипотеза есть (4).

Вывод ˣ26.3a из *27.13 (постулированного вместо ˣ26.3; без использования ˣ27.1). Допустим четыре гипотезы (1) — (4) ˣ26.3a. Выберем $R'(a)$, $A'(a)$ так, чтобы (при учете *23.4) выполнялось:

(a) $R'(\bar{\alpha}(x)) \sim \exists t_{t \leqslant x} R(\bar{\alpha}(t))$,

(b) $A'(\bar{\alpha}(x)) \sim A(\bar{\alpha}(x)) \vee \exists t_{t<x} R(\bar{\alpha}(t))$.

Мы применим *27.13 с $R'(a)$, $A'(a)$ в качестве $R(a)$, $A(a)$. Первая гипотеза *27.13 очевидна. Вторая следует из (2). Для рассмотрения третьей гипотезы допустим $\mathrm{Seq}(a) \& R'(a)$ и положим $a = \bar{\alpha}(x)$. Ввиду (1) $R(a) \vee \neg R(a)$. Случай 1: $R(a)$. Тогда ввиду (3) $A(a)$ и, следовательно,

$A'(a)$ по (b). Случай 2: $\neg R(a)$. Тогда, ввиду $R'(a)$ вместе с (a), $\exists t_{t<x} R(\bar{\alpha}(t))$, откуда по (b) получаем $A'(a)$.— Чтобы получить четвертую гипотезу, допустим $\mathrm{Seq}(a) \&$ $\forall s A'(a * 2^{s+1})$ и положим $a = \bar{\alpha}(x)$. Согласно (1) и *150 $\exists t_{t<x'} R(\bar{\alpha}(t)) \vee \neg \exists t_{t<x'} R(\bar{\alpha}(t))$. Случай 1: $\exists t_{t<x'} R(\bar{\alpha}(t))$. Подслучай 1: $\exists t_{t<x} R(\bar{\alpha}(t))$. Тогда, ввиду (b), $A'(a)$. Подслучай 2: $R(\bar{\alpha}(x))$. Тогда $A'(a)$ ввиду (3) и (b). Случай 2: $\neg \exists t_{t<x'} R(\bar{\alpha}(t))$. Однако $\forall s A'(a * 2^{s+1})$ дает $\forall s [A(a * 2^{s+1}) \vee \exists t_{t<x'} R(\bar{\alpha}(t))]$, следовательно, $\forall s A(a * 2^{s+1})$. Согласно (4) и (b) тогда $A'(a)$.

*27.14. $\vdash \mathrm{Spr}(\sigma) \& \sigma(1) = 0 \& \forall\alpha \forall x [\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0 \&$
$R(\bar{\alpha}(x)) \supset \forall y_{y>x} \{\sigma(\bar{\alpha}(y)) = 0 \supset R(\bar{\alpha}(y))\}] \&$
$\forall\alpha_{\alpha\in\sigma} \exists x R(\bar{\alpha}(x)) \& \forall a [\sigma(a) = 0 \& R(a) \supset$
$A(a)] \& \forall a [\sigma(a) = 0 \& \forall s \{\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset$
$A(a * 2^{s+1})\} \supset A(a)] \supset A(1).$

7.7. Принцип Брауэра для чисел (аналогично теореме о веере в *27.7) может быть установлен без явного упоминания алгорифма τ.

*27.15. $\vdash \forall\alpha \exists b A(\alpha, b) \supset \forall\alpha \exists y \exists b \forall\gamma \{\forall x_{x<y} \gamma(x) =$
$\alpha(x) \supset A(\gamma, b)\}.$

Эта формула появилась в работе Крайзела **1962** (замечание 9), где она неверно названа «бар-теоремой» (ср. замечание 6.3). (Крайзел, кажется, предлагает ее в качестве постулата, заменяющего постулат *27.7 из Клини **1957**, однако, согласно следствию 9.9 ниже, *27.7 стал бы тогда недоказуемым в отсутствие ˣ26.3.) Эта формула допускается также в работе Гейтинга 1930a, 12.22, при значительной разнице в применяемых обозначениях. В предположениях Гейтинга явно используется некоторая функция из последовательностей выбора в натуральные числа, что не обеспечивается нашим формализмом. В *27.15 мы следовали нашей практике (начатой в работе **1957**), согласно которой существование сопоставления b последовательностям α вытекает из простого префикса $\forall\alpha\exists b$ или для веера $\forall\alpha_{B(\alpha)}$ $\exists b$ и т. д. (ср. 7.1).— Доказательство *27.15, исходя из ˣ27.1, употребляемого через посредство *27.2 (без ˣ26.3), проводится непосредственно теми же рассуждениями, что и использованные в доказательстве *27.7. Мы не рассматриваем здесь, как *27.2 могло бы быть доказано, исходя из *27.15, постулированного вместо *27.1.

7.8. В 7.1 мы истолковали принцип Брауэра на основе интуиционистской концепции последовательностей выбора, трактующей их как развивающиеся, а не завершенные объекты. Эти соображения приложимы при обращении с совокупностью последовательностей выбора α, образующей универсальный или любой другой поток. Это верно, что свойство $\alpha \in \sigma$, т. е. свойство быть последовательностью выбора некоторого потока, затрагивает все значения α (ср. 6.9). Однако оно делает это только таким образом, что коль скоро на данной стадии $\bar{\alpha}(x)$ роста α свойство $\alpha \in \sigma$ выполнено «до сих пор», т. е. $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0$, рост α может продолжаться так, что это свойство будет выполняться на каждой последующей конечной стадии и, следовательно, само свойство $\alpha \in \sigma$ будет выполняться. Однако тот или иной вид (не поток) последовательностей выбора α может характеризоваться некоторым свойством $C(\alpha)$, затрагивающим все значения α не только указанным образом (ср. 6.12, абзац 3). В рассуждениях о членах α такого вида $C(\alpha)$ выступает как некоторая неконструктивная гипотеза, так сказать, увеличивающая то, что интуиционист может делать «от себя». (Эта тема будет развита в главе II, особенно в п. 8.6.)

Мы теперь покажем, что принцип Брауэра, как он формулировался в *27.4 — *27.6 для любого потока (характеризуемого посредством $\alpha \in \sigma$), не может быть непротиворечиво относительно базисной системы распространен на произвольные виды (характеризуемые посредством $C(\alpha)$). В самом деле, используя только интуиционистские постулаты групп A — D, можно показать

*27.16. $\vdash \neg [\forall \alpha_{C(\alpha)} (A(\alpha) \vee B(\alpha)) \supset$
$$\exists \tau \forall \alpha_{C(\alpha)} \exists y \{\forall x [\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x\} \,\&$$
$$\{(A(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 1) \vee (B(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 2)\}\}],$$

где $A(\alpha)$ есть $\forall x\, \alpha(x) = 0$, $B(\alpha)$ есть $\neg \forall x \alpha(x) = 0$ и $C(\alpha)$ есть $A(\alpha) \vee B(\alpha)$.

Доказательство. $\forall \alpha_{C(\alpha)} (A(\alpha) \vee B(\alpha))$ выполняется по принципу тождества *1 (ВМ, стр. 104). Таким

образом, ввиду $\exists$-удал. достаточно вывести противоречие из

(a) $\forall \alpha_{C(\alpha)} \exists y \{\forall x [\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \,\&$
$$\{(A(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 1) \vee (B(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 2)\}\}.$$

Допустим $\forall x \alpha_1(x) = 0$ (лемма 5.3 (a)), так что выполняется $A(\alpha_1)$, а следовательно, $C(\alpha_1)$. Применяя (a) и опуская $\exists y_1$ для $\exists$-удал., получаем

(b) $\tau(\bar{\alpha}_1(y_1)) = 1$.

Теперь допустим $\forall x \alpha_2(x) = x' \dot{-} y_1$, так что (по *6.11 и др.)

(c) $x < y_1 \supset \alpha_2(x) = 0$, (d) $x \geqslant y_1 \supset \alpha_2(x) > 0$.

Ввиду (d) $\alpha_2(y_1) \neq 0$, следовательно, $\neg \forall x \alpha_2(x) = 0$, т. е. $B(\alpha_2)$, поэтому $C(\alpha_2)$. Применяя (a) и опуская $\exists y_2$ для $\exists$-удал., получаем

(e) $\forall x [\tau(\bar{\alpha}_2(x)) > 0 \supset y_2 = x]$,

(f) $\tau(\bar{\alpha}_2(y_2)) = 2$.

Однако согласно (c) (и *B19, *23.1) $\bar{\alpha}_2(y_1) = \bar{\alpha}_1(y_1)$, так что по (b)

(g) $\tau(\bar{\alpha}_2(y_1)) = 1$.

Согласно (g) и (e) $y_2 = y_1$, откуда по (f) и (g) получаем $2 = 1$ в противоречие с тем, что $2 \neq 1$.

Таким образом, при специальном выборе $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ мы опровергли модификацию *27.6, получаемую опусканием гипотезы $\mathrm{Spr}(\sigma)$ и заменой $\alpha \in \sigma$ на $C(\alpha)$. Соответствующие модификации *27.4 и *27.5 также опровержимы, поскольку модификация *27.6 выводима из каждой из них таким же способом, каким *27.3 выводилось из *27.2, а следовательно, из *27.1.

7.9. Теперь (вплоть до п. 7.14) мы будем исследовать следствия принципа Брауэра, противоречащие классическим результатам. Мы начнем в следующем пункте с опровержения законов классической логики. Доказательства недоказуемости в интуиционистской логике различных законов классической логики проводились многими способами. Для исчисления высказываний — см. Гёдель 1932, Генцен 1934—1935 (или ВМ, стр. 424—430), Яськовский 1936 (и Пильчак **1952**, Дж. Роуз **1953**), Вайсберг 1938, Стоун **1937—1938**, Тарский **1938**, Маккинси — Тарский **1946**, 1948 (используются идеи работы Скулема 1919; ср. Скулем **1958**, Скотт **1960**), Скотт **1957**, Крайзел—Патнам **1957**, Шмидт **1958**, Харроп **1956**, **1960**, Клини **1962a**.

В случае исчисления предикатов методы Генцена 1934—1935 применялись для этой цели Карри 1950 и Клини 1948 и ВМ, § 80. Мостовский 1948 использовал топологическую интерпретацию исчисления предикатов (продолжая исследования Стоуна **1937—1938**, Тарского **1938**). Клини 1945 использовал нереализуемость арифметических формул, являющихся (свободно) подстановочными примерами предикатных формул, для установления недоказуемости последних формул, вытекающей отсюда ввиду теоремы Нельсона 1947, согласно которой все формулы, доказуемые в (интуиционистском) исчислении предикатов, реализуемы (см. также ВМ, § 82). Один элегантный новый метод Бета **1956**, связанный с работами Генцена 1934—1935, становится пригодным на базе намеченного Крайзелом **1958b**, стр. 381, способа исправления ошибок в доказательстве Бета (ср. рецензии Клини **1957a** и Крайзела **1960**) и доклада Дайсона — Крайзела **1961**, доводящего до конца эти исправления. Другие критерии имеются в работах Расёвой **1954**, **1954a**, Харропа **1960**, Клини **1962a**.

Брауэр **1924** —**1927**, I, **1925**, **1927**, 1928 и Гейтинг 1930 (стр. 50), 1930a (стр. 65) использовали противоречащие предложения в интуиционистском анализе для опровержения формул классического исчисления высказываний и предикатов. Мы здесь вернемся к этим ранним методам. Однако мы будем явно использовать заданные правила образования и преобразований, в то время как примеры Брауэра и Гейтинга приводились неформально. (Позднее Гейтинг получил один такой формализм в 1930a, однако он не переустановил в нем эти примеры.) С другой стороны, их примеры предполагают, что интуиционистский анализ образует модель для интуиционистского исчисления предикатов, надежность которой в этом случае уже не оставляет сомнений. Аналогично наше представление противоречащей формулы в нашей системе интуиционистского анализа не показывает недоказуемости в интуиционистском исчислении предикатов до тех пор, пока мы не дадим доказательства непротиворечивости этой системы. Одно такое доказательство, использующее понятие реализуемости для интуиционистского анализа, будет приведено в главе II. Согласно второй теореме Гёделя

(Гёдель 1931; ВМ, стр. 190—192) никакое доказательство непротиворечивости не может быть элементарным. Единственные доказательства интуиционистской недоказуемости классически доказуемых формул исчисления предикатов (а не высказываний), представляющиеся нам действительно элементарными, суть те, которые основываются на основной теореме Генцена 1934—1935 (ВМ, стр. 400), включая рассмотрения Бета. Если желать просто продемонстрировать недоказуемость в интуиционистском исчислении предикатов, то приводимые здесь примеры будут являться слабым местом. Однако с точки зрения других соображений, идущих из работы по расширению позиции, на которой мы теперь стоим, и допускающих то, что мы будем делать также в главе II, эти примеры просты и неоспоримы. Более того, с некоторой точки зрения существование противоречащей формулы в интуиционистском анализе есть более сильный результат, чем недоказуемость в интуиционистском исчислении предикатов. Ведь оно также исключает доказуемость в любом расширении интуиционистского исчисления предикатов, совместимом с интуиционизмом. Эти примеры приложимы также в анализе.

Как показывают следующие соображения (принадлежащие Клини и опубликованные в работе Бета **1955a**, стр. 341), невозможен эффективный метод или «разрешающая процедура» (ВМ, §§ 30, 60, 61), позволяющая в общем случае решить, доказуема или нет в интуиционистском исчислении предикатов предикатная формула A (ВМ, стр. 131), доказуемость которой в классическом исчислении предикатов уже установлена. Пусть C — некоторая фиксированная (скажем, замкнутая) предикатная формула, доказуемая в классическом, но опровержимая в интуиционистском исчислении предикатов (примеры см. в литературе или ниже). Пусть A — любая (замкнутая) предикатная формула. Тогда формула $A \vee C$ доказуема в классическом исчислении предикатов. Согласно Генцену 1934—1935, стр. 407 (или ВМ, теорема 57 (a), стр. 429, примененная, однако, к исчислению предикатов), $A \vee C$ доказуема в интуиционистском исчислении предикатов в точности тогда, когда A или C доказуемы, т. е., поскольку C недоказуема, в точности тогда, когда доказуема A. Таким образом, если бы существовала разрешающая процедура для интуиционистской доказуемости классически доказуемых формул, то аналогичная процедура существовала бы и для интуиционистской доказуемости произвольных формул. Это противоречит соответствующей версии для интуиционистского исчисления предикатов теоремы Чёрча 1936a и Тьюринга 1936—1937 (ВМ, теорема 54, стр. 382—383).

Мы не будем добиваться «опровержения» предикатных формул в интуиционистском анализе просто доказательством отрицаний их подстановочных примеров. Так, формула $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ недоказуема в интуиционистском исчислении высказываний (и предикатов). Однако никакая формула вида $\neg(A \vee \neg A)$ не является доказуемой в интуиционистском анализе, если он непротиворечив, поскольку $\neg\neg(\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A})$ доказуема в интуиционистском исчислении высказываний (*51a) и, следовательно, формула $\neg\neg(A \vee \neg A)$ доказуема в интуиционистском анализе. Вообще мы должны скорее стремиться доказывать отрицание замыканий (свободно) подстановочных примеров (ср. Клини 1945, §§ 10, 16). Например, мы «опровергнем» $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ посредством доказательства в интуиционистском анализе $\neg\forall\alpha(A(\alpha) \vee \neg A(\alpha))$ для подходящей формулы $A(\alpha)$ (*27.17). Это, конечно, показывает, что $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ недоказуема в интуиционистском исчислении высказываний (и предикатов), если интуиционистский анализ непротиворечив, поскольку доказуемость этой формулы в интуиционистском исчислении высказываний (или предикатов) влекла бы доказуемость $A(\alpha) \vee \neg A(\alpha)$, а следовательно, по $\forall$-введ. и доказуемость $\forall\alpha(A(\alpha) \vee \neg A(\alpha))$ в интуиционистском анализе.

Не всякая предикатная формула, доказуемая в классическом и недоказуемая в интуиционистском исчислении предикатов, может быть опровергнута этим способом с использованием нашей формальной системы интуиционистского анализа или любого другого фиксированного формализма F, совместимого с интуиционистским исчислением предикатов. Если бы это было так всегда, то мы бы имели следующую разрешающую процедуру для доказуемости в интуиционистском исчислении предикатов предикатных формул, доказуемых в классическом исчислении предикатов: при помощи нумерации доказуемых формул интуиционистского исчисления предикатов ищем саму формулу A и одновременно при помощи нумерации доказуемых формул F ищем отрицание замыкания подстановочного примера A.

7.10. Тем не менее, за одним возможным исключением, все предикатные формулы, упоминаемые в ВМ как классически, но не интуиционистски доказуемые, могут быть опровергнуты указанным способом в нашем интуиционистском анализе.

*27.17. $\vdash \neg\forall\alpha(\forall x\alpha(x) = 0 \vee \neg\forall x\alpha(x) = 0)$.

Доказательство. Допустим $\forall\alpha(\forall x\alpha(x) = 0 \vee \neg\forall x\alpha(x) = 0)$. Обозначая через $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ соответственно $\forall x\alpha(x) = 0$ и $\neg\forall x\alpha(x) = 0$ и применяя *27.3, получаем

(a) $$\forall\alpha\exists y\{\forall x[\tau(\bar{\alpha}(x)) > 0 \supset y = x] \,\&$$
$$\{(A(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 1) \vee (B(\alpha) \,\&\, \tau(\bar{\alpha}(y)) = 2)\}\}.$$

Далее мы продолжаем, как в доказательстве *27.16, с тем исключением, что $C(\alpha_1)$ и $C(\alpha_2)$ теперь не нужны для использования (a).

*27.18. $\vdash \neg\forall\alpha(\neg\exists x\alpha(x) \neq 0 \vee \neg\neg\exists x\alpha(x) \neq 0)$.

Доказательство. $\forall x\alpha(x) = 0 \vee \neg\forall x\alpha(x) = 0$ вытекает из $\neg\exists x\alpha(x) \neq 0 \vee \neg\neg\exists x\alpha(x) \neq 0$ по *86, *158 и *49c.

В *27.17 мы непосредственно опровергли (замыкание подстановочного примера) $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$, $\forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{A}(x))$ и $\neg\neg\forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{A}(x))$ (ср. *49b); *27.18 добавляет $\neg\mathcal{A} \vee \neg\neg\mathcal{A}$ к этому списку.

Подобное опровержение должно существовать и для любой предикатной формулы B, из (свободно) подстановочного примера B_1 которой выводима в интуиционистском исчислении предикатов некоторая опровержимая этим способом формула A.

Доказательство. Дано: в интуиционистском анализе $\vdash \neg\forall A^*$, где A^* — подстановочный пример A, и в интуиционистском исчислении предикатов $B_1 \vdash A$. По $\forall$-удал. и $\supset$-введ. $\vdash \forall B_1 \supset A$, откуда при помощи подстановки (ВМ, теорема 15, стр. 145) и *69 (и, может быть, *75) получаем, что в интуиционистском анализе $\vdash \forall B_1^* \supset \forall A^*$. Следовательно, по контрапозиции (*12) $\vdash \neg\forall A^* \supset \neg\forall B_1^*$. По $\supset$-удал. $\vdash \neg\forall B_1^*$. Однако B_1^* — подстановочный пример B.

Например, мы, следовательно, можем опровергнуть также $\neg\neg\mathcal{A}\supset\mathcal{A}$ (согласно замечанию 1 ВМ, стр. 111), $\neg\neg(\forall x\neg\neg\mathcal{A}(x)\supset\neg\neg\forall x\,\mathcal{A}(x))$ (что есть $\neg\neg(\mathrm{Ic}_1\supset\mathrm{Ib})$ ВМ, стр. 151 и 433 [1]), $\neg\forall x\neg\mathcal{A}(x)\supset\exists x\,\mathcal{A}(x)$ (поскольку $\neg\neg\mathcal{A}\supset\mathcal{A}$ следует отсюда после подстановки $\mathcal{A}$ вместо $\mathcal{A}(x)$) и т. д. В целом, используя эти примеры и выводы, отмеченные в ВМ, стр. 429 и 433—434, мы можем, исходя из *27.17 и *27.18, таким образом опровергнуть все примеры из ВМ, касающиеся исчисления высказываний (пример 4, стр. 428 и перечисленные в теореме 57 (b), стр. 429), и все примеры для исчисления предикатов (перечисленные в теореме 58, стр. 430 ВМ), кроме (b) (i) (или *92), (b) (iii), $\mathrm{IIc}\supset\mathrm{IIb}$, $\mathrm{IIIb}\supset\mathrm{IIIa}$ и *97.

Опровергнем теперь (b) (i) (или *92).

$$*27.19.\ \vdash\neg\forall\alpha\{\forall x\,(\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0)\supset \forall x\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0\}.$$

Доказательство. Ввиду *158, $\alpha(x)=0\vee\neg\alpha(x)=0$. Следовательно, разбором случаев (используя во втором случае *85a) и $\forall$-введ. получаем (a) $\forall x\,(\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0)$. Допустим $\forall\alpha\{\forall x\,(\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0)\supset\forall x\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0\}$. Тогда из (a) и *41 получаем $\forall\alpha\,(\forall x\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0)$, что противоречит *27.17.

Опровергнем *97 (ВМ, стр. 148).

$$*27.20.\ \vdash\neg\forall\alpha\{(\exists x\,\alpha(x)=0\supset\exists x\,\alpha(x)=0)\supset \exists x\,(\exists x\,\alpha(x)=0\supset\alpha(x)=0)\}.$$

Доказательство. Допустим $\forall\alpha\{(\exists x\alpha(x)=0\supset\exists x\alpha(x)=0)\supset\exists x\,(\exists x\alpha(x)=0\supset\alpha(x)=0)\}$. Ввиду *1 и *41, $\forall\alpha\exists x\,(\exists x\alpha(x)=0\supset\alpha(x)=0)$. Применяя *27.2 и опуская $\exists\tau$ для $\exists$-удал., имеем

(a) $\forall\alpha\exists y\{\tau(\bar\alpha(y))>0\,\&\,\forall x[\tau(\bar\alpha(x))>0\supset y=x]\,\&\,[\exists x\,\alpha(x)=0\supset\alpha(\tau(\bar\alpha(y))\dot{-}1)=0]\}$.

Допустим $\forall x\alpha_1(x)=1$, Используя $\forall$-удал. из (a) и опуская $\exists y_1$ для $\exists$-удал., получаем

(b) $\tau(\bar\alpha_1(y_1))>0$.

Допустим $\forall x\alpha_2(x)=\mathrm{sg}\,(\max(y_1,\ \tau(\bar\alpha_1(y_1)))\dot{-}x)$, тогда

(c) $x<\max(y_1,\tau(\bar\alpha_1(y_1)))\supset\alpha_2(x)=1$,

(d) $x\geqslant\max(y_1,\ \tau(\bar\alpha_1(y_1)))\supset\alpha_2(x)=0$.

Применяя (a) и опуская $\exists y_2$ для $\exists$-удал., имеем

(e) $\tau(\bar\alpha_2(y_2))>0$,

(f) $\forall x\,[\tau(\bar\alpha_2(x))>0\supset y_2=x]$,

(g) $\exists x\alpha_2(x)=0\supset\alpha_2(\tau(\bar\alpha_2(y_2))\dot{-}1)=0$.

Ввиду (c) имеем (h) $\bar\alpha_2(y_1)=\bar\alpha_1(y_1)$. Тогда по (b) и (f) получаем (i) $y_2=y_1$. Согласно (c) вместе с (h) и (b) имеем (j) $\alpha_2(\tau(\bar\alpha_2(y_1))\dot{-}1)=1$. Ввиду (d) $\exists x\alpha_2(x)=0$, следовательно, по (g) имеем (k) $\alpha_2(\tau(\bar\alpha_2(y_2))\dot{-}1)=0$. Ввиду (j), (k) и (i) $1=0$, что противоречит $1\neq 0$.

Согласно *158 и *49c $\alpha(x)=0\sim\neg\neg\alpha(x)=0$, так что мы опровергли также $(\mathcal{A}\supset\exists x\mathcal{B}(x))\supset\exists x(\mathcal{A}\supset\neg\neg\mathcal{B}(x))$. Однако это может быть следующим образом выведено из подстановочного примера $\mathrm{IIc}\supset\mathrm{IIb}$. Допустим (a) $\mathcal{A}\supset\exists x\mathcal{B}(x)$ и (b) $\forall x\neg(\mathcal{A}\supset\mathcal{B}(x))$. Из (b) по $\forall$-удал. и *60d получаем $\neg\neg\mathcal{A}$ и $\neg\mathcal{B}(x)$. Из последней формулы по $\forall$-введ. и *86 получаем $\neg\exists x\,\mathcal{B}(x)$, следовательно, из (a) согласно *12 получаем $\neg\mathcal{A}$, что противоречит $\neg\neg\mathcal{A}$.

[1]) Приведем необходимую для (независимого от ВМ)чтения этого пункта часть таблиц Гейтинга (ВМ, стр. 151). В каждой из таблиц I—III любые две формулы, не разделенные чертой, интуиционистски эквивалентны, и, кроме того, интуиционистски выводима импликация от любой формулы к формуле, стоящей ниже ее в данной таблице.

I

a. $\forall x A(x)$

b. $\neg\neg\forall x A(x)$

c_1. $\forall x\neg\neg A(x)$

c_2. $\neg\neg\forall x\neg\neg A(x)$

c_3. $\neg\exists x\neg A(x)$

II

a. $\exists x A(x)$

b. $\exists x\neg\neg A(x)$

c_1. $\neg\neg\exists x A(x)$

c_2. $\neg\neg\exists x\neg\neg A(x)$

c_3. $\neg\forall x\neg A(x)$

III

a. $\exists x\neg A(x)$

b_1. $\neg\neg\exists x\neg A(x)$

b_2. $\neg\forall x\neg\neg A(x)$

c. $\neg\forall x A(x)$.

—Прим. перев.

Таким образом, по $\neg$-введ. (снимая допущение (b)) получаем $\neg\forall x \neg(\mathcal{A}\supset\mathcal{B}(x))$. Тогда по подстановочному примеру $\mathrm{IIc}_3 \supset \mathrm{IIb}$ получаем $\exists x \neg\neg(\mathcal{A}\supset\mathcal{B}(x))$ и по *60g, h (ВМ, стр. 110) $\exists x(\mathcal{A}\supset\neg\neg\mathcal{B}(x))$. По $\supset$-введ. (снимая (a)) получаем $(\mathcal{A}\supset\exists x\mathcal{B}(x))\supset\exists x(\mathcal{A}\supset\neg\neg\mathcal{B}(x))$.

Наконец, $\mathrm{IIc}_2 \supset \mathrm{IIb}$ есть подстановочный пример $\mathrm{IIIb}_1 \supset \mathrm{IIIa}$ и, таким образом, в случае исчисления предикатов остается неопровергнутым только (b) (iii) (ВМ, стр. 430).

7.11. Опровергнем замыкание некоторого примера принципа наименьшего числа *149 (ВМ, стр. 172; *148 опровергается аналогично ВМ, стр. 452, (vii)).

$$*27.21.\ \vdash \neg\forall\alpha\{\exists x C(\alpha, x)\supset\exists y[C(\alpha, y)\,\&\,\forall z(z<y\supset\neg C(\alpha, z))]\},$$

где $C(\alpha, y)$ есть $y=1\vee(\forall x\alpha(x)=0\,\&\,y=0)$.

Доказательство. Назовем эту формулу $\neg\forall\alpha D(\alpha)$. Из $\forall\alpha D(\alpha)$ методом ВМ ((vi), стр. 452) выводим $\forall\alpha\ (\forall x\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0)$, что противоречит *27.17.

7.12. Мы опровергнем классически доказуемые формулы, двойственные *2.1a, *2.2a и *25.9. Начнем с *25.9 (в каждом из упомянутых случаев одна импликация доказуема просто по правилам исчисления предикатов).

$$*27.22.\ \vdash \neg\forall\alpha\{\forall x\exists i_{i<2}A(\alpha, i, (x)_1)\supset\exists i_{i<2}\forall x A(\alpha, i, x)\},$$

где $A(\alpha, x)$ есть $\alpha(x)=0$, $B(\alpha)$ есть $\neg\forall x\alpha(x)=0$ и $A(\alpha, i, x)$ есть $(A(\alpha, x)\,\&\,i=0)\vee(B(\alpha)\,\&\,i=1)$.

Доказательство. Допустим

(a) $\forall\alpha\{\forall x\exists i_{i<2}A(\alpha, i, (x)_1)\supset\exists i_{i<2}\forall x A(\alpha, i, x)\}$.

Допустим $\forall x(A(\alpha, x)\vee B(\alpha))$. По $\forall$-удал. $A(\alpha, (x)_0)\vee B(\alpha)$. Случай 1: $A(\alpha, (x)_0)$. Тогда $A(\alpha, (x)_0)\vee 0=0$, следовательно, $A(\alpha, 0, (x)_0)$, поэтому $0<2\ \&\ A(\alpha, 0, (x)_0)$, а тогда $\exists i_{i<2}A(\alpha, i, (x)_1)$. Случай 2: $B(\alpha)$. Аналогично. Завершая разбор случаев ($\vee$-удал.) и используя $\forall$-введ., получаем $\forall x\exists i_{i<2}A(\alpha, i, (x)_1)$. Согласно (a) $\exists i_{i<2}\forall x A(\alpha, i, x)$. Допустим для $\exists$-удал. $i<2\ \&\ \forall x A(\alpha, i, x)$. Случай 1: $i=0$. Тогда $\forall x A(\alpha, 0, x)$, следовательно (ввиду $0\neq 1$, *47, *48, *89), $\forall x A(\alpha, x)$, откуда $\forall x A(\alpha, x)\vee B(\alpha)$. Случай 2: $i=1$. Аналогично. Таким образом,

заканчивая $\vee$- и $\exists$-удал. и используя $\supset$- и $\forall$-введ., получаем $\forall\alpha\{\forall x(A(\alpha, x)\vee B(\alpha))\supset\forall x A(\alpha, x)\vee B(\alpha)\}$, что противоречит *27.19.

Это опровержение распространяется на формулы, двойственные *2.2a и *2.1a (точнее, их импликации, начинающиеся с $\forall\alpha\exists x$), поскольку двойник *25.9 следует из двойника *2.2a и поэтому из двойника *2.1a в том же духе, как само *25.9, следует из *2.2a и, следовательно, из *2.1a.

7.13. Приведем одну иллюстрацию из брауэровской теории видов. В работе **1924—1927**, стр. 246, абзац 9, Брауэр указывает пару видов M и N, которые «конгруэнтны», но не «идентичны». В 1941 году, будучи новичком в данной области, автор этих строк находил, что этот пример трудно расшифровывается, исходя из аскетического текста Брауэра. (Другой пример имеется в работе Брауэра **1954**, стр. 6, абзац 4.) Мы приведем теперь переработанный и упрощенный пример работы **1924—1927**. Пусть

«$\alpha\in M$» есть сокращение для $\forall x\alpha(x)\neq 0\vee\neg\forall x\alpha(x)\neq 0$,

«$\alpha\in N$» есть сокращение для $\forall x\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0$.

То, что вид M «конгруэнтен» виду N, выражается посредством

(i) $\neg\exists\alpha(\alpha\in M\,\&\,\neg\alpha\in N)\,\&\,\neg\exists\alpha(\alpha\in N\,\&\,\neg\alpha\in M)$.

Эта формула доказуема, так как ввиду *51a $\neg\neg\alpha\in N$ и $\neg\neg\alpha\in M$ обе доказуемы. То, что M и N не «идентичны» при некотором упрощении, позволительном, поскольку элементами M и N являются всегда последовательности выбора (а не элементы потока, связанные с последовательностями выбора через закон сопоставления), выражается посредством

(ii) $\neg\{\forall\alpha(\alpha\in M\supset\alpha\in N)\,\&\,\forall\alpha(\alpha\in N\supset\alpha\in M)\}$.

Обе формулы $\neg\forall\alpha(\alpha\in M\supset\alpha\in N)$ и $\neg\forall\alpha(\alpha\in N\supset\alpha\in M)$ и, тем более, (ii) доказуемы. Чтобы доказать первую, допустим $\forall\alpha[\alpha\in M\supset\alpha\in N]$, т. е.

(a) $\forall\alpha[\forall x\alpha(x)\neq 0\vee\neg\forall x\alpha(x)\neq 0\supset\forall x\alpha(x)=0\vee\neg\forall x\alpha(x)=0]$.

Допустим $\forall x\alpha_1(x)=\mathrm{sg}(x)\cdot\alpha(x\dot{-}1)$, так что $\alpha_1(0)=0$, $\alpha_1(x')=\alpha(x)$. Тогда $\neg\forall x\alpha_1(x)\neq 0$, следовательно,

(b) $\forall x\alpha_1(x) \neq 0 \vee \neg \forall x\alpha_1(x) \neq 0$. Также имеет место (c) $\forall x\alpha_1(x) = 0 \sim \forall x\alpha(x) = 0$. Из (a), используя $\forall$-удал. (с α_1 в качестве α), (b), (c), $\exists\alpha_1$-удал. и $\forall$-введ., мы выводим $\forall\alpha(\forall x\alpha(x) = 0 \vee \neg\forall x\alpha(x) = 0)$, что противоречит *27.17.

7.14. Опровергнем, наконец, классическую версию *26.1 бар-теоремы.

$$*27.23.\quad \vdash \neg\forall\beta\{\forall\alpha\exists xR(\beta, \bar{\alpha}(x)) \& \forall a[\mathrm{Seq}(a) \& R(\beta, a) \supset A(\beta, a)] \& \forall a[\mathrm{Seq}(a) \& \forall sA(\beta, a * 2^{s+1}) \supset A(\beta, a)] \supset A(\beta, 1)\},$$

где $R(\beta, a)$ есть $(a = 1 \& \neg\forall x\beta(x) = 0) \vee (\mathrm{lh}(a) = 1 \& \beta((a)_0 \dot{-} 1) = 0)$ и $A(\beta, a)$ есть $R(\beta, a) \vee \forall xR(\beta, a * 2^{x+1})$.

Доказательство. Обозначим доказываемую формулу $\neg\forall\beta B(\beta)$. Допустим $\forall\beta B(\beta)$.

I. Мы установим три гипотезы импликации $B(\beta)$. (A) В случае первой гипотезы отметим, что по *158 $\beta(\alpha(0)) = 0 \vee \beta(\alpha(0)) \neq 0$. Случай 1: $\beta(\alpha(0)) = 0$. Тогда по *23.5, *23.2 и *6.3 $\mathrm{lh}(\bar{\alpha}(1)) = 1$ & $\beta((\bar{\alpha}(1))_0 \dot{-} 1) = 0$. Поэтому получаем $R(\beta, \bar{\alpha}(1))$ и, следовательно, $\exists xR(\beta, \bar{\alpha}(x))$. Случай 2: $\beta(\alpha(0)) \neq 0$. Тогда $\exists x\,\beta(x) \neq 0$, следовательно, по *85a $\neg\forall x\beta(x) = 0$. Кроме того, $\bar{\alpha}(0) = 1$. Таким образом, $R(\beta, \bar{\alpha}(0))$, следовательно, $\exists xR(\beta, \bar{\alpha}(x))$, Завершая разбор случаев ($\vee$-удал.) и используя $\forall$-введ., получаем $\forall\alpha\exists xR(\beta, \bar{\alpha}(x))$. (B) Вторая гипотеза $B(\beta)$ очевидна, так как $R(\beta, a)$ является дизъюнктивным членом $A(\beta, a)$. (C) Допустим $\mathrm{Seq}(a)$ и $\forall sA(\beta, a * 2^{s+1})$, т. е. $\forall s[R(\beta, a * 2^{s+1}) \vee \forall xR(\beta, (a * 2^{s+1}) * 2^{x+1})]$. Однако имеет место $\neg\forall xR(\beta, (a * 2^{s+1}) * 2^{x+1})$, поскольку по *22.8 вместе с *22.5 $\mathrm{lh}((a * 2^{s+1}) * 2^{x+1}) = \mathrm{lh}(a) + 2$, что вместе с $\mathrm{lh}(1) = 0$ противоречит обоим дизъюнктивным членам $R(\beta, (a * 2^{s+1}) * 2^{x+1})$. Поэтому $\forall sR(\beta, a * 2^{s+1})$, следовательно, $A(\beta, a)$.

II. Теперь по $\forall$- и $\supset$-удал. из $\forall\beta B(\beta)$ мы выводим $A(\beta, 1)$, следовательно (ввиду *22.7 вместе с *22.5), $R(\beta, 1) \vee \forall xR(\beta, 2^{x+1})$. Случай 1: $R(\beta, 1)$. Тогда, поскольку $\mathrm{lh}(1) = 0$, $\neg\forall x\beta(x) = 0$, следовательно, $\forall x\beta(x) = 0 \vee \neg\forall x\beta(x) = 0$. Случай 2: $\forall xR(\beta, 2^{x+1})$, т. е. $\forall x[(2^{x+1} = 1 \& \neg\forall x\beta(x) = 0) \vee (\mathrm{lh}(2^{x+1}) = 1 \& \beta((2^{x+1})_0 \dot{-} 1) = 0)]$. Однако по *3.10 $2^{x+1} \neq 1$. Таким образом, $\forall x\beta((2^{x+1})_0 \dot{-} 1) = 0$, следовательно, по *19.9 и *6.3 $\forall x\beta(x) = 0$, откуда $\forall x\beta(x) = 0 \vee \neg\forall x\beta$

$(x) = 0$. Заканчивая разбор случаев и используя $\forall$-введ., мы приходим к противоречию с *27.17.

7.15. В работе **1957** Клини предложил *2.2 в качестве постулата. Затем он полагал, что необходим кажущийся более сильным постулат ^{x}2.1, который аналогично приемлем интуиционистски (равно как и классически). Затем Клини (в феврале 1963 г.) получил результат *R15.1 (гл. IV ниже), обходящий единственное прямое (а не через *2.2) использование *2.1 в гл. III Весли; Джоан Ренд (в марте 1963 г.) устранила клиниевское прямое использование ^{x}2.1 в выводе ^{x}26.9 из ^{x}26.3 и, наконец, Весли (в июле 1963 г.) достиг следующего:

Вывод ^{x}2.1 из *2.2. Допустим $\forall x\exists\beta A(x, \beta)$. Согласно *0.5, $\forall\alpha\exists\beta A(\alpha(0), \beta)$. По ^{x}27.1 (опуская $\exists\tau$ для $\exists$-удал.)

$$\forall\alpha\{\forall t\exists!\, y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0 \& \forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(\alpha(0), \beta)]\}.$$

Используя $\forall$-удал. с λzx вместо α, ^{x}0.1 и $\forall$-введ., получаем

(a) $\forall x\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \overline{\lambda zx}(y)) > 0$,

(b) $\forall x\forall\beta[\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \overline{\lambda zx}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(x, \beta)]$.

Используя (a) в *25.7 (ср. замечание 5.4), допустим (опуская $\exists\delta$ для $\exists$-удал.)

(c) $\forall x\forall t\tau(2^{t+1} * \overline{\lambda zx}(\delta(\langle x, t\rangle))) > 0$.

Допустим (подготавливая $\exists$-удал. из леммы 5.3 (a))

(d) $\forall w\gamma(w) = \tau(2^{(w)_1+1} * \overline{\lambda z(w)_0}(\delta(\langle (w)_0, (w)_1\rangle))) \dot{-} 1$.

Теперь $(\lambda t\gamma(2^x \cdot 3^t))(t) + 1 = \gamma(2^x \cdot 3^t) + 1 = (\tau(2^{t+1} * \overline{\lambda zx}(\delta(\langle x, t\rangle))) \dot{-} 1) + 1$ [(d), *25.1] $= \tau(2^{t+1} * \overline{\lambda zx}(\delta(\langle x, t\rangle)))$ [*6.7 вместе с (c)]. По $\exists$- и $\forall$-введ. $\forall t\exists y\tau(2^{t+1} * \overline{\lambda zx}(y)) = (\lambda t\gamma(2^x \cdot 3^t))(t) + 1$. Тогда используя (b), получаем $A(x, \lambda t\gamma(2^x \cdot 3^t))$, следовательно, $\exists\gamma\forall xA(x, \lambda t\gamma(2^x \cdot 3^t))$. —

Этот вывод прямо (а не через *27.2) использует ^{x} 27.1. Таким образом, при замене ^{x}2.1 как постулата на *2.2 становится неизвестным, выполняются ли ^{x}2.1 и *25.8 (наш единственный остающийся результат, отличный от *2.1a, использующий ${}^{x}2.1$ прямо) в базисной (или даже в данной классической) системе (ср. конец § 2). Постулат ${}^{x}27.1$ также имеет статус, сходный со статусом ${}^{x}2.1$. Он является приемлемым, однако для наших основных целей он может быть заменен своей спецификацией от функций к числам: он непосредственно использовался только здесь (и для *27.4).

Модификация *27.1′ постулата ${}^{x}27.1$ с заменой $\forall\alpha\,\exists\beta$ на $\forall\alpha\,\exists!\beta$ (где $\exists!\beta$ аналогично $\exists!x$ ВМ, стр. 180, причем используется (п. 4.5) знак $=$ для функторов) выводима из *27.2. Намек (на вывод): $\forall\alpha\,\exists!\beta A(\alpha, \beta) \vdash \forall\alpha\,\exists b A'(\alpha, b)$, где $A'(\alpha, b)$ есть $\exists\beta\{\beta(\alpha(0)) = b \,\&\, A(\lambda t\alpha(t+1), \beta) \,\&\, \forall\gamma[A(\lambda t\alpha(t+1), \gamma) \supset \beta = \gamma]\}$.

РАЗЛИЧНЫЕ ПОНЯТИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ

С. К. Клини

§ 8. Определение реализуемости. 8.1. Во вводном § 1 нами было высказано намерение сопоставить интуиционистский анализ с теорией общерекурсивных функций. Однако при построении формальной теории в главе I мы не использовали общерекурсивных функций. В частности, мы не последовали сделанному ранее Бетом и нами предложению рассматривать «законы» или «алгорифмы» в брауэровском определении потока как общерекурсивные функции; эти законы, а также закон, фигурирующий в принципе Брауэра, мы выразили просто при помощи функциональных переменных: переменной σ в *26.4, переменной ρ в ${}^{x}26.9$ и переменной τ в ${}^{x}27.1$. (См. замечание 6.1.)

Неклассическое понимание кванторных приставок $\forall\alpha\,\exists\beta$ и $\forall\alpha\,\exists b$ включено в интуционистскую систему посредством постулата ${}^{x}27.1$, выражающего принцип Брауэра. Возможно ли, однако, предложить какое-нибудь специальное понимание таких кванторных приставок, не сделав того же самого по отношению ко всем прочим способам построения формул с помощью логических связок средствами исчисления предикатов? Всякий, кто приступает к изучению интуиционизма, может пожелать явной интерпретации, применимой ко всем формулам и удовлетворяющей принципу Брауэра для формул, начинающихся с $\forall\alpha\,\exists\beta$ и $\forall\alpha\,\exists b$. В самом деле, классический математик мог бы поставить вопрос о непротиворечивости интуиционистской системы с принципом Брауэра. В непротиворечивости этой системы он сможет убедиться с помощью интерпретации, которую мы теперь дадим и которая будет основана только на принципах, приемлемых как с классической, так и с интуиционистской точки зрения.

Если бы наши семантические (или теоретико-модельные) доводы, использующие эту интерпретацию, были формализованы в базисной формальной системе (см. конец § 2), то мы имели бы для интуиционистской системы метаматематическое доказательство ее непротиворечивости относительно базисной системы. Позже мы обсудим возможность такой формализации (см. п. 9.2, пятый абзац).

8.2. Мы начнем с того, что ряд результатов теории обще- и частично рекурсивных функций от числовых и (одноместных) функциональных переменных преобразуем к форме, более подходящей для предстоящих приложений.

Пусть Ψ — список переменных, числовых или функциональных или и тех и других. Мы будем писать $\varphi\,[\Psi]$, употребляя квадратные скобки вместо круглых, для обозначения функции от переменных Ψ, значениями которой служат (частичные или всюду определенные) одноместные теоретико-числовые функции. Функцию $\varphi\,[\Psi]$ мы назовем *примитивно* (*обще-*) [*частично*] *рекурсивной*, абсолютно или относительно Θ, если $\varphi\,[\Psi] = \lambda t\varphi\,(\Psi,\ t)$, где соответственно такой же является функция $\varphi\,(\Psi,\ t)$ со значениями из натурального ряда.

Как и в § 7, где мы формализовали принцип Брауэра, некоторый тип функционала, сопоставляющего одноместной теоретико-числовой функции α одноместную теоретико-числовую функцию β (фактически «счетный» функционал Клини **1959a**, § 5), может быть представлен посредством подходящей одноместной теоретико-числовой функции τ такой, что для любых t и α $\tau\ (2^{t+1} * \bar{\alpha}\,(y)) > 0$ справедливо в точности только для одного y, причем для этого y $\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}\,(y)) = \beta\,(t) + 1$. Введем запись $\{\tau\}[\alpha]$ для обозначения этой функции β. Чтобы в дальнейшем обращаться с $\{\tau\}\ [\alpha]$ как с частично рекурсивной функцией от τ и α, мы определяем в общем случае

$$(8.1)\qquad \{\tau\}\,[\alpha] = \lambda t\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}\,(y_t)) \dot{-} 1,$$

где $y_t \simeq \mu y\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}\,(y)) > 0$. При этом мы будем говорить, что $\{\tau\}\,[\alpha]$ *собственно определено*, если $(t)\,(E!y)$ $\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}\,(y)) > 0$.

Лемма 8.1. *Для любой частично рекурсивной функции $\varphi\,[\Theta,\ \alpha]$ существует такая примитивно рекурсивная функция $\psi\,[\Theta]$, что при любых Θ и α имеем $\{\psi\,[\Theta]\}\ [\alpha] = \varphi\,[\Theta,\ \alpha]$ и, если функция $\varphi\,[\Theta,\ \alpha]$ всюду определена, то $\{\psi\,[\Theta]\}[\alpha]$ собственно определено.*

(Доказательство следует ниже.) Мы будем писать

$$(8.2)\qquad \Lambda\alpha\varphi\,[\Theta,\quad \alpha] = \psi\,[\Theta],$$

т. е. $\Lambda\alpha\varphi\ [\Theta,\ \ \alpha]$ будет служить для обозначения некоторой примитивно рекурсивной функции $\psi\,[\Theta]$, обладающей свойством, о котором говорится в лемме, т. е. такой, что *при любых Θ и α*

$$(8.3)\qquad \{\Lambda\alpha\varphi\ [\Theta,\ \alpha]\}\ [\alpha] = \varphi[\Theta,\ \alpha]$$

и выражение $\{\Lambda\alpha\varphi[\Theta,\alpha]\}\,[\alpha]$ *собственно определено всякий раз, когда всюду определена задаваемая им по* (8.1) *функция.*

Пусть $\varphi\,[z,\ \ \Theta,\ \ \alpha]$ — частично рекурсивная функция и $\psi\,[z,\ \Theta] = \Lambda\alpha\varphi\,[z,\ \Theta,\ \alpha]$. Для фиксированного e положим $\varphi\,[\Theta,\ \alpha] = \varphi\,[e,\ \Theta,\ \alpha]$. Тогда $\psi\,[e,\ \Theta] = \Lambda\alpha\varphi\,[e,\ \Theta,\ \alpha]$ есть $\Lambda\alpha\varphi\ [\Theta,\ \alpha]$, т. е. $\psi\ [e,\ \Theta]$ обладает этим свойством.

Доказательство леммы 8.1. Рассмотрим, например, $\varphi\,[b,\beta,\alpha]$ с b,β в качестве Θ. Имеем $\varphi\,[b,\beta,\alpha] = \lambda t\varphi\,(b,\ \beta,\ \alpha,\ t)$ с частично рекурсивной функцией φ в правой части этого равенства. В силу теоремы о нормальной форме (ВМ, стр. 260, 294) существует такое число e, что при любых $b,\ \beta,\ \alpha,\ t$:

(i) $\varphi\,(b,\beta,\alpha,t) \simeq U\,(\mu y T_2^{1,\,1}\,(\tilde{\beta}\,(y),\tilde{\alpha}\,(y),e,b,t,y))$,

(ii) $T_2^{1,\,1}\,(\tilde{\beta}\,(y),\tilde{\alpha}\,(y),e,b,t,y)$

истинно по крайней мере для одного y.

Пусть $\psi\,[b,\ \beta] = \lambda s\psi\,(b,\ \beta,\ s)$, где

$$\psi\,(b,\ \beta,\ s) = \begin{cases} U\,(y) + 1, & \text{если } \mathrm{lh}\,(s) > 0\ \& \\ & T_2^{1,\,1}\,(\tilde{\beta}\,(y),\tilde{\alpha}\,(y),e,b,t,y), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и y, t и α из правой части должны быть следующим образом выражены через s:

$$y = \mathrm{lh}\,(s) \dot{-} 1,\quad t = (s)_0 \dot{-} 1,\quad \alpha\,(i) = (s)_{i+1} \dot{-} 1\ (i < y).\,-$$

Мы обобщим эти обозначения, допустив целые списки аргументов $a_1,\ \ldots,\ a_k,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l$ вместо единственной переменной α (случай $(k,\ l) = (0,\ 1)$). Во-первых, введем обозначение $\langle a_0,\ldots,a_m\rangle$ для $p_0^{a_0}\cdot\ldots\cdot p_m^{a_m}$ ($=1$ при $m = -1$), $\langle a_1,\ \ldots,\ a_k,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l\rangle^1$ для $\lambda t\,(a_1,\ \ldots,\ a_k,\ \alpha_1\,(t),\ \ldots,$

$a_l(t)\rangle$, опуская при этом верхний индекс 1, когда из контекста ясно, что $l > 0$, т. е. что мы имеем дело с функцией $(a)_i$ для $\lambda t\ (a\ (t))_i$ и $(a)_{i,j}$ для $((a)_i)_j$ (см. п. 5.7, а также Клини **1959**, § 2).

Положим теперь

(8.1a) $\{\tau\}\ [a] = \{\tau\}\ [\lambda ta]$,

(8.1b) $\{\tau\} = \{\tau\}[0] = \{\tau\}[\lambda t0]$,

(8.1c) $\{\tau\}[a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l] =$
$\{\tau\}[\langle a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\rangle] \quad (k+l > 1)$

и будем говорить, что левые части этих равенств *собственно определены*, если таковы же их правые части при расшифровке согласно (8.1). В контексте с этими обозначениями мы будем избегать употребления фигурных скобок в их обычном смысле. Кроме того, мы пишем

(8.2a) $\Lambda a\varphi[\Theta, a] = \Lambda \alpha\varphi[\Theta, \alpha(0)]$,

(8.2b) $\Lambda\varphi[\Theta] = \Lambda a\varphi[\Theta] = \Lambda\alpha\varphi[\Theta]$,

(8.2c) $\Lambda a_1 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_l \varphi[\Theta, a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l] =$
$\Lambda\alpha\varphi[\Theta, (\alpha(0))_0, \ldots, (\alpha(0))_{k-1}, (\alpha)_k, \ldots, (\alpha)_{k+l-1}]$
$(k+l > 1)$.

Тогда

(8.3a) $\{\Lambda a\varphi[\Theta, a]\}[a] \simeq \varphi[\Theta, a]$,

(8.3b) $\{\Lambda\varphi[\Theta]\} \simeq \varphi[\Theta]$,

(8.3c) $\{\Lambda a_1 \ldots a_k \alpha_1 \ldots \alpha_l \varphi[\Theta, a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l]\}$
$[a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l] \simeq$
$\varphi[\Theta, a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l] \quad (k+l > 1)$,

где левые части собственно определены всякий раз, когда всюду определены соответствующие правые части.

Обозначения настоящего пункта аналогичны обозначениям, введенным в ВМ (стр. 304—305, 307) и которыми мы тоже будем иногда пользоваться, изменив их, однако, таким образом, чтобы соответствующие записи строились на одном уровне. А именно, мы будем писать $\{z\}(\Psi)$ вместо $\{z\}^{\Psi_1}(\Psi_2)$ (стр. 304), где Ψ_1 — функции и Ψ_2 — числа в том порядке, в котором они входят в Ψ, и будем писать $\Lambda\Psi\varphi\ (\Theta, \Psi)$ вместо $S_n^{m,1,\ldots,1}(e, \Theta)$ (стр. 305), а также

$\Lambda^{1,\ldots,1}\Psi_2\varphi\ (\Theta, \Psi)$ (стр. 307), когда Θ состоит только из чисел (в количестве m), где e есть гёделев номер $\lambda\Theta\Psi_2\varphi\ (\Theta, \Psi)$, определяемый равномерно относительно Ψ_1 (здесь Ψ_2 состоит из n чисел, а Ψ_1 — из такого числа функций, сколько раз цифра 1 встречается в верхнем индексе). В соответствии с этим для любого $\Theta\ \Lambda\Psi\varphi_1\ (\Theta, \Psi)$ есть гёделев номер $\Lambda\Psi_2\varphi\ (\Theta, \Psi)$ равномерно относительно Ψ_1, или короче $\Lambda\Psi\varphi\ (\Theta, \Psi)$ есть *гёделев номер* $\lambda\Psi\varphi\ (\Theta, \Psi)$.

T-предикаты из ВМ (стр. 259) могут быть переформулированы для использования $\overline{\alpha}$ вместо $\widetilde{\alpha}$ и т. д. Например, $T_1^{1,1}(\overline{\beta}(y), \overline{\alpha}(y), e, a) \equiv T_1^{1,1}(\widetilde{\beta}(y), \widetilde{\alpha}(y), e, a, y)$, где полагаем $T_1^{1,1}(u, v, e, a) \equiv T_1^{1,1}\left(\prod_{i<\mathrm{lh}(u)} p_i^{(u)_i \dot{-} 1}, \prod_{i<\mathrm{lh}(u)} p_i^{(v)_i \dot{-} 1}, e, a, \mathrm{lh}(u)\right)$ (Клини **1955**, прим. 2).

Следующее утверждение обосновывается с помощью результатов ВМ, стр. 212, и теорем о нормальной форме (ВМ, стр. 260, 294): всюду определенная (всюду определенная) [частичная] функция $\varphi(\Psi)$ является примитивно (обще) [частично] рекурсивной относительно всюду определенных одноместных функций Σ тогда и только тогда, когда существует такая примитивно (частично) [частично] рекурсивная функция $\lambda\Psi\Sigma\varphi\ (\Psi, \Sigma)$, что для данного $\Sigma\ \lambda\Psi\varphi\ (\Psi) = \lambda\Psi\varphi\ (\Psi, \Sigma)$; аналогично для $\varphi[\Psi]$, $\varphi[\Psi, \Sigma]$.

Так как $\lambda a_0 \ldots a_m \sigma(a_0, \ldots, a_m)$ примитивно рекурсивно относительно $\lambda a\sigma\ ((a)_0, \ldots, (a)_m)$ и обратно, то в выражении 'φ примитивно (общее) [частично] рекурсивна относительно Σ'многоместные функции из Σ могут быть эквивалентным образом заменены на одноместные функции.

8.3. В предложенной нами в свое время интерпретации интуиционистской арифметики (см. работу 1945 (получено в 1941 г.) или ВМ, § 82) мы исходили из той идеи, что с интуиционистской точки зрения всякое предложение, исключая наиболее элементарные, образует неполное сообщение информации, утверждающее, что дальнейшая информация может быть дана эффективно для его восполнения. Например, всякое экзистенциальное предложение «$(Ex)A\ (x)$» является неполным сообщением, утверждающим, что может быть предложен x такой, что $A\ (x)$, вместе с информацией, восполняющей предложение «$A\ (x)$» для этого x. Всякое предложение общности «$(x)\ A\ (x)$» представляет собой неполное сообщение о том, что может быть задан некоторый эффективный общий метод, позволяющий для каждого x

получить информацию, восполняющую предложение «A (x)» для этого x. Всякое же предложение, не содержащее логических связок, является значением одного из исходных предикатов и не требует восполнения, если эти предикаты заданы эффективно.

Говоря здесь о «(Ex) A (x)» и «(x) A (x)» как о предложениях, мы предполагаем, что либо они не содержат свободных переменных, либо всякая свободная переменная в них должна считаться принявшей определенное значение. Точно так же и о «A (x)» мы говорим как о предложении, предполагая всякий раз, что переменной x придано некоторое конкретное значение.

При применении этой идеи к арифметическому формализму вместо конкретных натуральных чисел как значений свободных переменных естественно рассматривать соответствующие цифры, эти числа выражающие. Таким образом, формальными аналогами «предложений» оказываются замкнутые формулы.

Более того, ту информацию, посредством которой восполняются неполные сообщения, можно кодировать натуральными числами, используя в качестве эффективных процессов гёделевы номера рекурсивных функций. При этом мы говорим, что эти числа «реализуют» соответствующие замкнутые формулы. Так, мы говорим, что натуральное число e *реализует* замкнутую формулу $\exists x \mathrm{A}$ (x), если $e = 2^x 3^a$, где a $(= (e)_1)$ реализует (также замкнутую) формулу A $(\boldsymbol{x})$, а $\boldsymbol{x}$ есть цифра, изображающая натуральное число x $(= (e)_0)$. Далее, число e *реализует* замкнутую формулу $\forall x \mathrm{A}$ (x), если e есть гёделев номер общерекурсивной функции φ такой, что при любом x φ (x) реализует A $(\boldsymbol{x})$. Число e *реализует* замкнутую элементарную формулу P, если $e = 0$ и формула P истинна при обычной интерпретации входящих в нее предметных, функциональных и предикатных символов. (Остальные четыре пункта этого определения понятия «реализует» см. Клини 1945 или ВМ, § 82. Некоторые незначительные усовершенствования в деталях появляются в работе **1960**, § 5.)

Наконец, мы говорим, что замкнутая формула A *реализуема*, если ее реализует некоторое число. Открытая формула A $(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)$, содержащая свободно только переменные $\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m$ (которые предполагаются попарно различными), называется *реализуемой*, если реализуемо ее замыкание

(Клини 1945), или, эквивалентным образом (Клини 1948 и ВМ, § 82), если существует такая общерекурсивная функция φ, что для любых $y_1, \ldots, y_m$ число φ $(y_1, \ldots, y_m)$ реализует A $(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$.

8.4. С некоторыми модификациями эти идеи мы теперь используем для построения интерпретации интуиционистского анализа. Мы будем говорить, что предложение «$(E\beta)$ A (β)» является неполным сообщением о том, что могут быть указаны некоторое β такое, что A (β), и информация, восполняющая предложение «A (β)» для этого β. С конструктивной точки зрения β должно быть здесь общерекурсивной функцией, если только «$(E\beta) A$ (β)» не содержит свободных переменных, имеющих в качестве своих значений нерекурсивные функции. Последнее становится возможным, например, при рассмотрении интерпретации для «(α) $(E\beta) A$ (α, β)», где отсутствуют свободные переменные. Такое предложение должно быть восполнено заданием эффективного процесса, при котором для каждого α находится информация, восполняющая «$(E\beta)$ A (α, β)». Здесь α пробегает все одноместные теоретико-числовые функции. (Согласно Клини 1950a § 3 или лемме 9.8 ниже, теорема о веере оказалась бы неверной, если бы мы ограничились одними общерекурсивными функциями.) Какой должна быть функция β, восполняющая сообщение $(E\beta)$ A (α, β) при заданном α, зависит, вообще говоря, от того, какой является эта функция α, поэтому мы не можем ограничивать β классом общерекурсивных функций. В таком, скажем, простом примере, когда «A (α, β)» есть «$(x) \alpha$ $(x) = \beta$ (x)», β обязано совпадать с α. В общем случае, когда «$(E\beta)$ A (β)» содержит свободные функциональные переменные, имеющие своими значениями некоторые заданные функции, восполняющая «$(E\beta)$ A (β)» функция β должна быть общерекурсивной относительно этих функций, если только $(E\beta)$ A (β) трактуется само по себе (ср. п. 8.6).

Переходя теперь к формальному символизму, мы не имеем, вообще говоря, возможности заменить подстановку конкретных функций в качестве значений для свободных функциональных переменных подстановкой вместо таких переменных функторов, выражающих эти значения. Дело в том, что в нашей формальной системе, как и во всякой формальной системе (со счетным всего лишь множеством символов), мы не можем всякую конкретную функцию выразить подходящим функтором. Если бы это было так, то мы вполне могли бы функциональные и числовые переменные специфицировать одинаковым образом. (В нашем определении реализуемости в работе **1957**, найденном в 1951 г., мы специфицировали значения функциональных переменных, подставляя в то же время цифры вместо числовых переменных.)

Информацию, посредством которой должны восполняться неполные сообщения, представляется теперь естественным кодировать не натуральными числами, а одноместными теоретико-числовыми функциями. При этом до тех пор, пока никакие функции не выделяются в качестве значений для функциональных переменных, «реализующими» функциями будут функции общерекурсивные; затем в качестве таковых будут выступать функции, общерекурсивные относительно тех функций, которым предстоит быть значениями функциональных переменных. Впрочем, используя с помощью обозначений { } [ ] некоторую версию теоремы о нормальной форме (см. п. 8.8), мы увидим, что на самом деле здесь хватает и функций, являющихся примитивно рекурсивными абсолютно либо относительно функций, выделенных в качестве значений для функциональных переменных. (В работе **1957** мы все еще употребляли числа, добавляя в то же время функциональные аргументы для рекурсивных функций, представленных своими гёделевыми номерами. Определение в п. 8.5 эквивалентно определению в работе **1957**, но на него удобнее опираться при доказательствах.)

8.5. Пусть Е — произвольная формула и Ψ — список попарно различных переменных обоих типов, включающий в себя все переменные, входящие свободно в Е. Определим, когда одноместная арифметическая функция ε 'реализует' Е при данном наборе Ψ чисел и функций как значений для Ψ, или короче, когда ε'реализует-Ψ' Е. Это определение, как и прежде (Клини 1945, ВМ, § 82), будет индуктивным — индукцией по числу (вхождений) логических символов в Е. Здесь имеется 9 случаев соответственно виду Е.

1. ε *реализует-Ψ* элементарную формулу Р, если Р *истинна-Ψ*, т. е. если Р истинна, когда переменные из Ψ имеют соответствующие значения из Ψ.

2. ε *реализует-Ψ* A & B, если $(\varepsilon)_0$ *реализует-Ψ* A и $(\varepsilon)_1$ *реализует-Ψ* B.

3. ε *реализует-Ψ* A $\vee$ B, если $(\varepsilon(0))_0 = 0$ и $(\varepsilon)_1$ *реализует-Ψ* A или $(\varepsilon(0))_0 \neq 0$ и $(\varepsilon)_1$ *реализует-Ψ* B.

В следующем теперь случае 4 предполагается, что $\{\varepsilon\}[\alpha]$ собственно определено всякий раз, когда α реализует-Ψ А; аналогично в случаях 6, 8 и 9.

4. ε *реализует-Ψ* A $\supset$ B, если при любом α $\{\varepsilon\}[\alpha]$ *реализует-Ψ* В всякий раз, когда α *реализует-Ψ* А.

5. ε *реализует-Ψ* $\neg$ A, если при любом α неверно, что α *реализует-Ψ* А. (Так как в силу случая 1 при любых α, Ψ неверно, что α *реализует-Ψ* $1 = 0$, то эквивалентным образом: ε *реализует-Ψ* $\neg$ A, если ε *реализует-Ψ* A $\supset 1 = 0$ в смысле случая 4.)

В случае 6 предполагается, что x не входит в список Ψ, чего всегда в случае необходимости можно добиться предварительной заменой связанных переменных, и что Ψ, x являются соответственно значениями Ψ, x. Аналогично в случаях 7, 8, 9. (Так, в случае 7 $(\varepsilon(0))_0$ является значением x и т. д.)

6. ε *реализует-Ψ* $\forall$xA, если для любого x $\{\varepsilon\}[x]$ *реализует-Ψ*, x А.

7. ε *реализует-Ψ* $\exists$xA, если $(\varepsilon)_1$ *реализует-Ψ*, $(\varepsilon(0))_0$ A.

8. ε *реализует-Ψ* $\forall\alpha$A, если для любого α $\{\varepsilon\}[\alpha]$ *реализует-Ψ*, α A.

9. ε *реализует-Ψ*, $\exists\alpha$A, если $(\varepsilon)_1$ *реализует-Ψ*, $\{(\varepsilon)_0\}$ A.

Мы теперь будем говорить, что замкнутая формула Е *реализуема*, если некоторая общерекурсивная функция ε реализует Е, и что открытая формула реализуема, если реализуемо ее замыкание.

Понятие реализуемости следующим образом релятивизируется к произвольному классу (или списку) T (всюду определенных) теоретико-числовых функций. Замкнутая формула Е *реализуема/T*, если некоторая функция ε, общерекурсивная относительно (конечного множества функций из) T, реализует Е; открытая формула *реализуема/T*, если *реализуемо/T* ее замыкание.

Рассмотрим в качестве примера упоминавшуюся в п. 8.4 формулу нашего формального символизма $\forall\alpha\exists\beta\forall x\alpha(x) = \beta(x)$. Эта формула доказуема с помощью элементарных логических рассуждений. Она реализуема, если существует общерекурсивная функция ε, которая ее реализует, т. е. согласно случаю 8 такая, что при всяком α $\{\varepsilon\}[\alpha]$ реализует-α $\exists\beta\forall x\alpha(x) = \beta(x)$. Пусть $\zeta = \{\varepsilon\}[\alpha]$. В силу случая 9,

$(\zeta)_1$ должно реализовать-a, $\{(\zeta)_0\}$ $\forall x\alpha(x) = \beta(x)$. Очевидным выбором значения для $\{(\zeta)_0\}$ является a; тогда, согласно случаю 6, при каждом x $\{(\zeta)_1\}$ $[x]$ должно реализовать-a, a, x $\alpha(x) = \beta(x)$. Но при каждом x $\alpha(x) = \beta(x)$ истинно-a, a, x, поэтому $\{(\zeta)_1\}$ $[x]$ может быть любой функцией, например, $\lambda t0$. На основании леммы 8.1 и т. д. достаточно положить $\zeta = \langle \Lambda a, \Lambda x\lambda t0\rangle$, $\varepsilon = \Lambda a\langle \Lambda a, \Lambda x\lambda t0\rangle$. Функция ε, выбранная таким образом, является общерекурсивной (фактически даже примитивно рекурсивной) и реализует формулу $\forall\alpha\exists\beta\forall x\alpha(x) = \beta(x)$.

В качестве второго примера рассмотрим формулу $\forall\alpha\forall x(\alpha(x) = 0 \vee \alpha(x) \neq 0)$ (см. замечание 6.1). Чтобы реализовать эту формулу, функция ε должна быть общерекурсивной и такой, что если при любом a положить $\zeta = \{\varepsilon\}$ $[a]$ и затем при любом x положить $\eta = \{\zeta\}$ $[x]$, то η реализует-a, x $\alpha(x) = 0 \vee \alpha(x) \neq 0$. Очевидно, в качестве η можно взять $\langle a(x), \lambda t0\rangle$, и тогда $\zeta = \Lambda x \langle a(x), \lambda t0\rangle$ и $\varepsilon = \Lambda a\Lambda x\langle a(x), \lambda t0\rangle$. Заметим, что выбор того, что здесь реализуется — $a(x) = 0$ или $a(x) \neq 0$ (последнее — любой функцией, например, $\lambda t0$),— зависит как от x, так и от a.

Наконец, третий пример: формула $\exists\alpha[\alpha(0) = 1 \& \forall x\,\alpha(x') = x'\cdot\alpha(x)]$ (см. лемму 5.3 (b)) реализуема посредством $\langle\Lambda\lambda tt!, \langle\lambda t0, \Lambda x\lambda t0\rangle\rangle$.

8.6. В новом определении реализуемости, хотя и восходящем к прежнему определению 1945 г., явно отражено допущение функциональных переменных, что меняет, по сравнению с прежним, трактовку импликации, а в силу эквивалентного варианта случая 5, также и трактовку отрицания.

Рассмотрим произвольную замкнутую формулу, имеющую вид импликации: $A \supset B$. В работе 1945 мы говорили, что e реализует $A \supset B$, если при любом a таком, что a реализует A, $\{e\}$ (a) реализует B. Теперь мы говорим, что ε реализует $A \supset B$, если при любом a таком, что a реализует A $\{\varepsilon\}$ $[a]$ реализует B. При этом множеством допустимых значений для a является теперь множество всех теоретико-числовых функций, а не одних только общерекурсивных функций. Таким образом, новая интерпретация импликации требует предъявления такой общерекурсивной функции ε, с помощью которой, исходя из всякого, даже весьма неконструктивного, восполнения a неполного сообщения, выраженного посредством A, можно было бы конструктивно получить некоторое восполнение сообщения, выраженного посредством B. Другими словами, при новом понимании реализуемости импликация $A \supset B$ считается «конструктивно истинной» всякий раз, когда при «истинном»— не обязательно «конструктивно»— A «истинным», и притом с не бо́льшей, чем A, «степенью неконструктивности», оказывается и B. Здесь интуиционистское требование к конструктивности предъявляется в форме, менее суровой, чем прежде; мы теперь допускаем нетривиальные «контрфактические» условные предложения вместо того, чтобы все без разбору B считать следствиями не являющейся интуиционистски истинной посылки A. В силу определения работы 1945 импликация $A \supset B$ всегда оказывалась реализуемой при нереализуемом A, а это уже не оставляет места в интуиционистской математике для теории относительной рекурсивности. (Обсуждаемое изменение, которое может показаться скромным и которое связано с использованием функций как реализующих объектов, было осуществлено в версии нового понятия реализуемости в работе **1957**, где мы исходили из прямого обобщения определения работы 1945.)

Мы были вынуждены сделать это изменение, поскольку без него не удавалось перенести теорему Нельсона (Нельсон 1947, теорема 1, см. также ВМ, теорема 62 (а), стр. 444) для односортного исчисления предикатов на исчисление предикатов с двумя сортами переменных — переменными числовыми и функциональными.

Однако это изменение затрагивает прежнее понятие реализуемости для *теоретико-числовых формул*, т. е. формул, не содержащих функциональных переменных и λ.

Рассмотрим какую-нибудь такую, причем замкнутую, формулу A. Прежде формула $\neg A$ считалась реализуемой тогда и только тогда, когда никакое число a не реализовало A, т. е. тогда и только тогда, когда A было нереализуемо. Теперь же формула $\neg A$ реализуема (и реализуема $/\eta$ для какой-нибудь функции η) тогда и только тогда, когда никакая функция a не реализует A, т. е. тогда и только тогда, когда A нереализуема$/\Theta$ для всякой функции Θ.

В ВМ, теорема 63 (ii), стр. 451, приводится пример некоторой замкнутой нереализуемой формулы A, для которой, следовательно, формула $\neg A$ реализуема, а формула $\neg\neg A$ нереализуема. Эта формула имеет вид $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$, где A (x) есть $\exists z$A (x, z) и A (x, z) нумерически выражает предикат T_1 (x, x, z). Формула A оказывалась там нереализуемой, так как если бы некоторое число a реализовало A, то $(\{a\}(x))_0$ было бы общерекурсивной представляющей функцией предиката $(Ez)T_1$ (x, x, z), который не является общерекурсивным (BM, теорема V, стр. 252). Подобным же образом и теперь — никакая общерекурсивная функция α не реализует A (подробности на этот счет см. непосредственно ниже), т. е. формула A снова нереализуема, однако классически может быть определена некоторая функция α, примитивно рекурсивная относительно представляющей функции τ предиката (Ez) T_1 (x, x, z) и реализующая A, так что формула A оказывается реализуемой/τ. Поэтому теперь уже и формула $\neg$A оказывается тоже не реализуемой и не реализуемой/ η при любом η, а формула $\neg\neg$A — реализуемой.

Для упрощения деталей (которые могут быть также обоснованы и иначе, с помощью следствия 9.6) мы можем либо предполагать расширенным список функциональных символов (вводимых, как описано в п. 5.1) таким образом, чтобы он включал некоторый символ f для представляющей функции предиката T_1 (x, x, z), и взять тогда в качестве A (x, z) формулу f (x, z) = 0, либо, не расширяя символизма, выбрать, на основании леммы 8.5, в качестве A (x, z) формулу, нумерически выражающую предикат T_1 (x, x, z). В любом случае (с применением леммы 8.4a во втором из них) $(E\varepsilon)$ $\{\varepsilon$ реализует-x, z A (x, z)$\}$ $\rightarrow T_1$ (x, x, z) и существует примитивно рекурсивная функция $\varepsilon_{\mathrm{A}(x,z)}$ (произвольная в первом случае) такая, что T_1 (x, x, z) $\rightarrow \{\varepsilon_{\mathrm{A}(x,z)}$ реализует-x, z A (x, z)$\}$. Доказательство того, что A не реализуется в прежнем смысле никаким числом a, проводится так же, как и раньше (см. BM, стр. 451 (i), с применением случая 7 на стр. 444). Подобным же образом формула A не реализуема в новом смысле никакой общерекурсивной функцией α, ибо в противном случае общерекурсивная функция sg$((\{\alpha\}$ $[x]$ $(0))_0)$ была бы представляющей для предиката (Ez) T_1 (x, x, z). Положим теперь φ $[\tau, x]$ = $\langle \overline{\mathrm{sg}}\varepsilon z\, T_1$ (x, x, z), $\langle \varepsilon z T_1$ (x, x, z), $\varepsilon_{\mathrm{A}(x,z)}$ $\rangle\rangle$ (см. BM, стр. 283). Функция φ $[\tau, x]$ является обще- и тем более частично рекурсивной. Поэтому, применяя в предыдущем абзаце лемму 8.1 (с учетом (8.2a)) и нижеследующую лемму 8.2, заключаем, что функция $\alpha = \Lambda x \varphi$ $[\tau, x]$ примитивно рекур-

сивная относительно τ и реализует A (на основании $(x)\overline{T}_1$ $(x, x, 0)$ и разбора случаев в $(Ez)T_1$ (x, x, z) $\vee$ $(\overline{Ez})$ T_1 (x, x, z)).

Хотя мы считаем, что новое понятие реализуемости дает более достоверную интерпретацию интуиционистской арифметики, старое понятие реализуемости продолжает представлять интерес. С его помощью проще устанавливаются результаты о недоказуемости для интуиционистской формальной арифметики, как это, например, сделано в BM, теорема 63, стр. 450. Оно также полезно в исследованиях в области интуиционистской арифметики, опирающихся на выразимость для всякой формулы утверждения о ее реализуемости посредством другой формулы той же или несущественно расширенной системы (см. BM, стр. 359). Это свойство реализуемости утрачивается при применении нового понятия реализуемости к формальной системе арифметики, однако оно сохраняется для интуиционистской формальной системы анализа. В работе 1945 Клини использовал это свойство реализуемости в интуиционистской арифметике для того, чтобы путем добавления к ней некоторых реализуемых, но классически ложных формул получить систему арифметики, полнее отвечающую той форме конструктивности, которую представляет интерпретация через реализуемость (см. также BM, стр. 453). Такой же формы конструктивности придерживались Марков и Шанин, если только мы верно понимаем их точку зрения. Кажущаяся отличной от нашей интерпретация Шанина **1958**, **1958a**, как показано у Клини **1960**, эквивалентна 1945-реализуемости [1]).

8.7. Лемма 8.2. *Пусть* Ψ_1 — *список тех переменных из* Ψ *(не обязательно в том же порядке, как в* Ψ*), которые фактически входят свободно в формулу* E, *и пусть* $\varPsi_1$ — *соответствующий набор чисел и функций из* $\varPsi$. *Тогда* ε *реализует*-$\varPsi_1$ E *тогда и только тогда, когда* ε *реализует*-$\varPsi$ E.

Доказательство. Индукция по числу логических символов в E. —

Эквивалентным по отношению к определению в п. 8.5 образом (мы это ниже тотчас же покажем) формула E, содер-

[1]) Концепции советской школы конструктивизма изложены, например, в следующих работах: Марков **1962**, **1965**, **1970**, Шанин **1958**, **1962**, Кушнер **1973**.— *Прим. перев.*

жащая свободно только переменные из Ψ, *реализуема* (*реализуема/T*), если существует такая общерекурсивная (относительно T) функция φ, что при любом $\mathit{\Psi}$ $\varphi[\mathit{\Psi}]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ E. Всякую функцию φ с таким свойством мы будем называть *реализующей* (*относительно* списка Ψ) *функцией* (для) формулы E, а всякую функцию ε, которая реализует-$\mathit{\Psi}$ E, например $\varphi[\mathit{\Psi}]$, назовем *реализующей-$\mathit{\Psi}$* (*относительно* Ψ) *функцией* (для) формулы E. Это определение реализуемости не зависит от выбора списка Ψ, в чем легко убедиться следующим образом (аналогично для реализуемости/T). Пусть φ — общерекурсивная реализующая относительно Ψ функция для E. Положим $\varphi_1[\mathit{\Psi}_1] = \varphi[\mathit{\Psi}^*]$, где Ψ_1 — минимальный в смысле условия леммы 8.2 список, а $\mathit{\Psi}^*$ получено из $\mathit{\Psi}$ заменой каждого числа (функции), соответствующего (соответствующей) переменной из Ψ, не входящей в Ψ_1, на 0 ($\lambda t\ 0$). Тогда в силу леммы 3.2 (см. также второй абзац в п. 8.2) функция φ_1 является общерекурсивной и, на основании леммы 8.2, реализующей относительно Ψ_1 функцией для E. Обратно, если ψ_1 — общерекурсивная реализующая относительно Ψ_1 функция для E и $\psi[\mathit{\Psi}] = \psi_1[\mathit{\Psi}_1]$, то ψ есть общерекурсивная реализующая относительно Ψ функция для E.

Для доказательства эквивалентности только что сформулированного определения реализуемости и определения из п. 8.5 выберем в качестве Ψ список свободных переменных формулы E в порядке их первых вхождений в E. Случай, когда формула E замкнута и, следовательно, список Ψ пуст достаточно очевиден: если ε — общерекурсивная функция из определения в п. 8.5, то полагаем $\varphi[\mathit{\Psi}] = \varepsilon$ и наоборот. Пусть теперь E — открытая формула и пусть, например, ее замыканием является формула $\forall\alpha\forall a$E. Если φ — общерекурсивная реализующая относительно α, a функция для E, то на основании случаев 8 и 6 из определения в п. 8.5 и леммы 8.1 $\Lambda\alpha\Lambda a\varphi\,[\alpha, a]$ является примитивно рекурсивной функцией, реализующей формулу $\forall\alpha\forall a$E. (Если φ есть реализующая для E функция, общерекурсивная относительно T, то, в соответствии с концом п. 8.2, при некоторых частично рекурсивной функции φ_1 и списке Σ одноместных примитивно рекурсивных относительно T функций функция $\Lambda\alpha\Lambda a\varphi_1\,[\alpha, a, \Sigma]$ является примитивно рекурсивной относительно T функцией, реализующей формулу $\forall\alpha\forall a$E.)

Обратно, если общерекурсивная функция ε реализует формулу $\forall\alpha\forall a$E, то, снова на основании случаев 8 и 6 из п. 8.5, очевидно, $\lambda\alpha a\,\{\{\varepsilon\}\,[\alpha]\}\,[a]$ и есть общерекурсивная реализующая функция для E.

В предшествующем определении отношения ‘формула E реализуема/T’ функции из класса или списка T не приписываются в качестве значений соответствующим функциональным переменным. Пусть, как и прежде, все свободные (обоих типов) переменные формулы E принадлежат списку Ψ, пусть Ψ есть (Φ, Θ) и $\mathit{\Psi} = (\mathit{\Phi}, \mathit{\Theta})$ — значения Ψ. Будем говорить, что формула E *реализуема-Θ/T*, если существует такая общерекурсивная относительно (функций из) Θ, T функция φ, что при любом $\mathit{\Phi}$ $\varphi[\mathit{\Phi}]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ E или, эквивалентным образом, если некоторая общерекурсивная относительно Θ, T функция ε реализует-Θ замыкание $\forall\Phi$E формулы E по переменным из списка Φ. Аналогичное определение примем также при отсутствии T (Клини **1957**). Понятие ‘формула E реализуема-Θ/T’ отличается от понятия ‘формула E реализуема/T’ тем, что здесь функции из Θ приписаны в качестве значений функциональным переменным из Θ, а квантор общности ‘для любого $\mathit{\Phi}$’ (или кванторная приставка $\forall\Phi$) распространяется только на остальную часть $\mathit{\Psi}$ (или соответственно Ψ). Ввиду леммы 8.2 функции из Θ, являющиеся значениями функциональных переменных из Θ, на самом деле не входящих свободно в E, могут считаться, без ущерба для общности, принадлежащими T. По той же причине и одноместные функции из T могут быть включены в Θ посредством соотнесения их функциональным переменным, не входящим свободно в E. Таким образом, только в случае, когда класс T бесконечен, понятие ‘E реализуема-Θ/T’ оказывается более общим, чем ‘E реализуема-Θ’.

Читатель теперь может перейти к следующему § 9, позже восполняя пропущенное.

8.8. Исходя из общерекурсивной (общерекурсивной относительно T) реализующей функции φ, мы получаем реализующие-$\mathit{\Psi}$ функции $\varphi[\mathit{\Psi}]$, общерекурсивные относительно $\mathit{\Psi}$ (относительно $\mathit{\Psi}$, T). Кроме того, однако, в силу нижеследующей леммы при $\Theta = \Psi$ имеется и другая такая реализующая функция φ_{E} с примитивно рекурсивными относительно $\mathit{\Psi}$ (относительно $\mathit{\Psi}$, T) реализующими-$\mathit{\Psi}$ функциями $\varphi_{\mathrm{E}}[\mathit{\Psi}]$.

Лемма 8.3. *Для любой формулы* E, *содержащей свободно только переменные из* Ψ, *для любого списка* Θ *функциональных переменных, где* $\Theta \subseteq \Psi$, *и для любой общерекурсивной (общерекурсивной относительно* T*) функции* χ *существует другая такая же функция* χ_E *со свойствами: при любом* Ψ $\chi_E[\theta]$ *является примитивно рекурсивной относительно* θ *(относительно* θ, T*), и если* $\chi[\theta]$ *реализует-*Ψ E, *то это же верно и относительно* χ_E $[\theta]$ *(где* θ *— набор функций, соответствующий* Θ*).*

Доказательство. Индукция по числу логических символов в *E*.

Случаи 1 и 5: E — элементарная формула или имеет вид $\neg$A. Тогда полагаем $\chi_E [\theta] = \lambda t 0$.

Случай 2: E есть A & B. Положим $\chi_E [\theta] = \langle (\chi [\theta])_{0A}, (\chi [\theta])_{1B} \rangle$, где $(\chi [\theta])_{0A}$ есть $(\lambda\theta (\chi [\theta])_A [\theta]$ и т. д.

Случай 3: E есть A$\vee$B. Полагаем $\chi_E [\theta] = \langle (\chi [\theta] (0))_0, \quad \lambda t\, \overline{sg} ((\chi [\theta] (0))_0) \cdot (\chi [\theta])_{1A} (t) + sg ((\chi [\theta] (0))_0) \cdot (\chi [\theta])_{1B} (t) \rangle$.

Случаи 4 и 8: A $\supset$ B или $\forall\alpha$A. $\Lambda\alpha \{\chi [\theta]\} [\alpha]$. (Для χ, общерекурсивной относительно *T*, $\Lambda\alpha \{\chi_1 [\theta, \Sigma]\} [\alpha]$, см. п. 8.7, 4-й абзац.)

Случай 6: $\forall$xA. $\Lambda x \{\chi [\theta]\} [x]$.

Случай 7: $\exists$xA. $\langle (\chi [\theta] (0))_0, (\chi [\theta])_{1A} \rangle$.

Случай 9: $\exists\alpha$A. $\langle \Lambda \{(\chi [\theta])_0\}, (\chi [\theta])_{1A} \rangle$.

8.9. Краткое изложение нижеследующих результатов было дано в Клини **1960** (см. последнее предложение в § 1, леммы 2.1a и 2.1b, примечание 9 и примечание 1). Утверждение истинности-Ψ формулы E в лемме 8.4a расшифровывается просто как обычный перевод этой формулы на содержательный язык, причем Ψ служит набором значений для соответствующих переменных из Ψ. (В случае 1 определения из п. 8.5 нам не нужно было переводить никаких логических символов. В ВМ на стр. 440 мы не имели свободных переменных, и на стр. 441 свободные переменные трактовали в смысле интерпретации всеобщности (см. стр. 137 там же), а не значений при предикатной интерпретации (там же, стр. 133).)

Лемма 8.4a. *Для всякой формулы* E, *содержащей свободно только переменные из списка* Ψ *и не содержащей символов* $\vee$ *и* $\exists$, *существует такая примитивно рекурсивная функция* ε_E, *что при любом наборе* Ψ:

(i) *если* $(E\varepsilon)$ [ε *реализует-*Ψ E], *то* E *истинна-*Ψ;

(ii) *если* E *истинна-*Ψ, *то* ε_E *реализует-*Ψ E.

Доказательство. Индукция по числу логических символов в E. Соответственно тому, какой вид имеет E — P (т. е. E есть элементарная формула), A & B, A $\supset$ B, $\neg$A, $\forall$xA или $\forall\alpha$A,— положим функцию ε_E равной $\lambda t 0$, $\langle \varepsilon_A, \varepsilon_B \rangle$, $\Lambda\alpha\varepsilon_B$, $\lambda t 0$, $\Lambda x \varepsilon_A$ или $\Lambda\alpha\varepsilon_A$.

Ограничимся подробным рассмотрением какого-нибудь одного случая.

Случай 4: E есть A $\supset$ B. Тогда имеем $\varepsilon_E = \Lambda\alpha\varepsilon_B$. (i) Предположим, что ε реализует-Ψ формулу A $\supset$ B. Предположим далее, что A истинна-Ψ. Тогда, согласно индукционному предположению для (ii), ε_E реализует-Ψ A, поэтому $\{\varepsilon\}$ $[\varepsilon_A]$ реализует-Ψ B и, следовательно, в силу индукционного предположения для (i), формула B истинна-Ψ. (ii) Предположим, что A $\supset$ B истинна-Ψ и что α реализует-Ψ A. Тогда, согласно индукционному предположению для (i), A истинна-Ψ и потому B истинна-Ψ и, следовательно, по индукционному предположению для (ii), ε_B реализует-Ψ B. Таким образом, $\Lambda\alpha\varepsilon_B$ реализует-Ψ A $\supset$ B.

Лемма 8.4b. *Для всякой формулы* E, *содержащей свободно только переменные из* Ψ, *не содержащей символа* $\vee$ *и в которой всякое вхождение кванторного символа* $\exists$ *имеет своей областью действия элементарную формулу, существует такая частично рекурсивная функция* $\varepsilon_E[\Psi]$, *что для любого* Ψ:

(i) *если* $(E\varepsilon)$ [ε *реализует-*Ψ *E*], *то* E *истинна-*Ψ;

(ii) *если* E *истинна-*Ψ, *то функция* ε_E $[\Psi]$ $(= \lambda t\, \varepsilon_E (\Psi, t)$ *всюду определена и) реализует-*Ψ E.

Доказательство. Обычная индукция. Если E имеет один из видов P (элементарная формула), A & B, A $\supset$ B, $\neg$A, $\forall$xA (x), $\exists$xP (x) или $\forall\alpha$A (α), то положим соответственно $\varepsilon_E [\Psi] = \lambda t 0$, $\langle \varepsilon_A [\Psi], \varepsilon_B [\Psi] \rangle$, $\Lambda\alpha\varepsilon_B [\Psi]$, $\lambda t 0$, $\Lambda x \varepsilon_{A(x)} [\Psi, x]$, $\langle \mu x P (\Psi, x), \lambda t 0 \rangle$ (где $P (\Psi, x)$ — примитивно рекурсивный предикат, порождаемый формулой P (x)) или $\Lambda\alpha\varepsilon_{A(\alpha)} [\Psi, \alpha]$.

Случай 9: E имеет вид $\exists\alpha$P (α). Пусть, например, Ψ есть a, β. Тогда P (α) порождает примитивно рекурсивный предикат P (a, β, α). Применяя теорему VI* (a) в ВМ вместе с ее доказательством основанным на теореме IV* (6) там же (стр. 260), и заменяя $\tilde\beta$, $\tilde\alpha$ на $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}$ (см. конец п. 8.2), заключаем, что существует такое число *e*, что $(E\alpha)\, P(a, \beta, \alpha) \equiv (E\alpha)\, (Ey)\, T_1^{1,1} (\overline{\beta} (y), \quad \overline{\alpha} (y), \quad e, \quad a) \equiv (Es)$ [Seq (*s*) &

$T_1^{1,1}(\bar{\beta}(\mathrm{lh}(s)), s, e, a)]$ и Seq (s) & $T_1^{1,1}(\bar{\beta}(\mathrm{lh}(s)), s, e, a) \to P(a, \beta, \lambda t(s)_t \dot{-} 1)$. Теперь мы полагаем $\varepsilon_{\mathrm{E}}[a, \beta] = \langle \Lambda\lambda t(\mu s[\mathrm{Seq}(s) \,\&\, T_1^{1,1}(\bar{\beta}(\mathrm{lh}(s)), s, e, a)])_t \dot{-} 1, \lambda t 0\rangle$.— См. также замечание 9.16.

Л е м м а 8.5. *Для всякой общерекурсивной функции* $\varphi(\Psi)$ [*предиката* $P(\Psi)$] *существует формула* $\mathrm{P}(\Psi, \mathrm{w})$ [$\mathrm{P}(\Psi)$], *не содержащая символов* $\vee$ *и* $\exists$, *которая нумерически представляет ее* [*выражает его*] *в интуиционистской формальной системе анализа* (*или любой ее подсистеме, содержащей постулаты групп* A *и* B *и аксиому* $^{\times}$1. 1), *представляя ее* [*выражая его*], *кроме того, и при обычной интерпретации формализма.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следующим образом модифицируем доказательства той расширенной версии теорем 27 и 32 BM (стр. 218, 263) и следствий из них, которая описана на стр. 265, строки 11—15, там же, а также некоторый другой необходимый материал из BM. В случае (IV) для теоремы I, стр. 217, делаем замену на

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) = w \equiv$$
$$(y_1) \ldots (y_m)\,[\chi_1(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) =$$
$$y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \chi_m(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) =$$
$$y_m \to \psi(y_1, \ldots, y_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) = w].$$

В случае (Vb) для теоремы 27 (и аналогично в случае (Va)) мы делаем несколько изменений. Во-первых (так же, как в BM, стр. 263), мы принимаем $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ как обозначение для $\forall \mathrm{c}\,\mathrm{a} \neq \mathrm{b} + \mathrm{c}$ (а не для $\exists \mathrm{c}\,\mathrm{c}' + \mathrm{a} = \mathrm{b}$) или как элементарную формулу (см. выше * 15.1). Далее, выражение B (c, d, i, w) мы будем использовать, в отличие от того, как оно определено в BM, стр. 184, в качестве обозначения для $\neg\forall \mathrm{v}\,\mathrm{c} \neq (\mathrm{i}' \cdot \mathrm{d})' \cdot \mathrm{v} + \mathrm{w} \,\&\, \mathrm{w} < (\mathrm{i}' \cdot \mathrm{d})'$ (см.*180b, BM, стр. 184). Наконец, выделенная на стр. 218 там же формула заменяется формулой

$$\forall \mathrm{c} \forall \mathrm{d}\,\{\forall \mathrm{u}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, \mathrm{u}) \supset \mathrm{Q}(x_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \mathrm{u})]$$
$$\&\, \forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{y}}\, \forall \mathrm{u} \forall \mathrm{v}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \supset$$
$$\mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \mathrm{u})] \supset \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{w})\},$$

которую мы обозначим через $\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \mathrm{w})$. Вместо того чтобы непосредственно доказывать, что эта формула искомая, можно показать, что она эквивалентна прежней, что мы и делаем в лемме 8.7.

З а м е ч а н и е 8.6. Замечание 1 (BM, стр. 219), касающееся формулы $\mathrm{P}(\Psi, \mathrm{w})$ из доказательства теоремы 27 в BM, служащей для нумерического представления примитивно рекурсивной функции $\varphi(\Psi)$, переносится и на случай, когда Ψ включает функциональные переменные.

Л е м м а 8.7. *Для каждой примитивно* (*обще-*) *рекурсивной функции* $\varphi(\Psi)$ *формулы* $\mathrm{P}(\Psi, \mathrm{w})$ *и* $\mathrm{P}_1(\Psi, \mathrm{w})$, *построенные в доказательствах соответственно теоремы* 27 (32 (a)) *BM и настоящей леммы* 8.5 *для нумерического представления* $\varphi(\Psi)$, *эквивалентны* (*даже и в подсистемах из формулировки леммы* 8.5), *т. е.* $\vdash \mathrm{P}(\Psi, \mathrm{w}) \sim \mathrm{P}_1(\Psi, \mathrm{w})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукция по длине k примитивно рекурсивного описания $\varphi(\Psi)$. Для случаев (Va) и (Vb) утверждение следует из предшествующих случаев I, II, IV и индукционного предположения. В этих случаях Ψ есть (y, θ), а в (Va) Q (w) есть $\mathrm{w} = q$.

I. $\vdash \mathrm{a} < \mathrm{b} \sim \mathrm{a} <_1 \mathrm{b}$, так как $\mathrm{a} < \mathrm{b} \sim \neg(\mathrm{a} \geqslant \mathrm{b})$ [*140, *141, *63] $\sim \neg\exists \mathrm{c}\,\mathrm{a} = \mathrm{b} + \mathrm{c} \sim \forall \mathrm{c}\,\mathrm{a} \neq \mathrm{b} + \mathrm{c}$ [*86].

II. $\vdash \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w}) \sim \mathrm{B}_1(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w})$. В самом деле, пусть $\exists \mathrm{v}\,(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B})$ — правая часть в *180b. Тогда $\exists \mathrm{v} \mathrm{A} \sim \exists \mathrm{v}_{\mathrm{v} \leqslant \mathrm{c}} \mathrm{A}$. В силу *150 и *158, $\exists \mathrm{v}_{\mathrm{v} \leqslant \mathrm{c}} \forall \vee \neg \exists \mathrm{v}_{\mathrm{v} \leqslant \mathrm{c}} \mathrm{A}$. Следовательно, $\exists \mathrm{v} \mathrm{A} \vee \neg \exists \mathrm{v} \mathrm{A}$. Поэтому на основании *49c $\exists \mathrm{v} \mathrm{A} \sim \neg\neg \exists \mathrm{v} \mathrm{A} \sim \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{A}$ [BM, стр. 151, II]. Таким образом, $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w}) \sim \exists \mathrm{v}\,(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B})$ [*180b] $\sim \exists \mathrm{v} \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}$ [*91] $\sim \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}$.

III. *В случаях* (Va) *и* (Vb) *для теоремы* 27 *BM*

$$\vdash \exists \mathrm{c} \exists \mathrm{d}\,\{\exists \mathrm{u}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{Q}(\Theta, \mathrm{u})] \,\&$$
$$\forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{y}} \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \,\&$$
$$\mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \Theta, \mathrm{u})] \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{w})\} \sim$$
$$\forall \mathrm{c} \forall \mathrm{d}\,\{\exists \mathrm{u}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{Q}(\Theta, \mathrm{u})] \,\&$$
$$\forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{y}} \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \,\&$$
$$\mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \Theta, \mathrm{u})] \supset \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{w})\}.$$

IIIa. Предположим, подготавливая $\exists$-удал.,

(a) $\exists \mathrm{u}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}_0, \mathrm{d}_0, 0, \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{Q}(\Theta, \mathrm{u})] \,\&\, \forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{y}} \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}$
$[\mathrm{B}(\mathrm{c}_0, \mathrm{d}_0, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}_0, \mathrm{d}_0, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \,\&$
$\mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \Theta, \mathrm{u})] \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}_0, \mathrm{d}_0, \mathrm{y}, \mathrm{w})$

и, подготавливая $\supset$- и $\forall$-введ.,

(b) $\exists \mathrm{u}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{Q}(\Theta, \mathrm{u})] \,\&$
$\forall \mathrm{i}_{\mathrm{i}<\mathrm{y}} \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \,\&\, \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \,\&$
$\mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \Theta, \mathrm{u})]$.

Наша цель — вывести B (c, d, y, w). Но сначала мы выведем индукцией по i

(c) $i \leqslant y \supset \forall u_0 \forall u\,[B(c_0, d_0, i, u_0) \,\&\, B(c, d, i, u) \supset u_0 = u]$.

Б а з и с и н д у к ц и и: аналогично индукционному шагу. И н д. ш а г. Предположим (1) $i' \leqslant y$, (2) $B(c_0, d_0, i', u_0)$ и (3) $B(c, d, i', u)$. Для &- и ∃-удал. из (a) допустим (4) $B(c_0, d_0, i', u_1)$, (5) $B(c_0, d_0, i, v_1)$ и (6) $R(i, v_1, \Theta, u_1)$. Аналогично для (b) — допустим (7) $B(c, d, i', u_2)$, (8) $B(c, d, i, v_2)$ и (9) $R(i, v_2, \Theta, u_2)$. Согласно инд. предп. с помощью (1), (5) и (8) получаем (10) $v_1 = v_2$. На основании стр. 219 в ВМ (вместе с замечанием 8.6) $\exists ! wR(i, v_1, \Theta, w)$. Тогда в силу (6), (9) и *172 имеем (11) $u_1 = u_2$. В силу *180с, $\exists ! wB(c_0, d_0, i', w)$. Наконец, на основании (2) и (4): получается (12) $u_0 = u_1$. Аналогично, из (7) и (3) следует (13) $u_2 = u$. Комбинируя (12), (11) и (13), выводим $u_0 = u$ —. В силу (a) имеем $B(c_0, d_0, y, w)$. С л у ч а й 1: $y > 0$ (или с л у ч а й 2: $y = 0$). Допустим B (c, d, y, u) из (b). На основании (c) w = u. Таким образом, имеем B (c, d, y, w).

IIIb. Обратная импликация, которую мы должны доказать, имеет вид

$$\forall c \forall d\,\{A(c, d) \supset B(c, d, w)\} \supset \exists c \exists d\,\{A(c, d) \,\&\, B(c, d, w)\}.$$

Допустим (a) $\forall c \forall d\,\{A(c, d) \supset B(c, d, w)\}$. Используя (3) на стр. 219 в ВМ, получаем $\exists w \exists c \exists d\,\{A(c, d) \,\&\, B(c, d, w)\}$. Тогда, допустив (b) $A(c, d) \,\&\, B(c, d, w_0)$, получим, в силу (a), B (c, d, w) и, наконец, $\exists c \exists d\,\{A(c, d) \,\&\, B(c, d, w)\}$.

IV. В случаях (Va) и (Vb) для теоремы 27 в ВМ

$$\vdash P(y, \Theta, w) \sim \forall c \forall d\,\{\forall u\,[B(c, d, 0, u) \supset Q(\Theta, u)] \,\&\, \forall i_{i<y} \forall u \forall v\,[B(c, d, i', u) \,\&\, B(c, d, i, v) \,\&\, R(i, v, \Theta, u)] \supset B(c, d, y, w)\}.$$

Для доказательства последовательно применить: III; *91; *181 на стр. 362 вместе с *180с; *95; *4, *5.

Л е м м а 8.8. *Пусть* P (Ψ, w) [P (Ψ)] — *формула, построенная, как в доказательстве леммы* 8.5 (*или в ВМ теоремы* 27 [*следствия из теоремы* 27]) *для нумерического представления* [*выражения*] *примитивно рекурсивной функции* φ (Ψ) [*предиката* P (Ψ)]. *Тогда* (*даже в подсистемах из формулировки леммы* 8.5)

$$\vdash P(\Psi, w) \vee \neg P(\Psi, w) \quad [\vdash P(\Psi) \vee \neg P(\Psi)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на лемме 8.5. В качестве P (Ψ) берем P (Ψ, 0), причем в силу (3) на стр. 219 в ВМ (вместе с замечанием 8.6 выше) и леммы 8.7 (с P (Ψ, w) в качестве $P_1(\Psi, w)$) $\vdash \exists ! wP(\Psi, w)$. Следовательно, по лемме 5.6 $\vdash P(\Psi, w) \vee \neg P(\Psi, w)$, откуда подстановкой получаем $\vdash P(\Psi) \vee \neg P(\Psi)$.

§ 9. Реализуемость и выводимость в интуиционистской формальной системе. 9.1. Л е м м а 9.1. (a). *Пусть* Ψ — *список попарно различных переменных, отличных от* x, A (x) — *формула, содержащая свободно только* Ψ, x, *и пусть* t — *терм, содержащий свободно только* Ψ, x, *свободный для* x *в* A (x) *и* (*при данных значениях* Ψ, *x для* Ψ, x) *выражающий число t* (Ψ, *x*). *Тогда ε реализует-*Ψ, *t* (Ψ, *x*) *формулу* A (x) *в том и только в том случае, когда ε реализует-*Ψ, *x формулу* A (t). (b). *При аналогичных условиях* (*где* u — *функтор*) *ε реализует-*Ψ, *и* [Ψ, *α*] *формулу* A (α) *тогда и только тогда, когда ε реализует-*Ψ,*α* A (u).

С этой леммой мы можем комбинировать лемму 8.2; в дальнейшем это будет делаться неявным образом. Например, если A (a) содержит свободно только переменную a (отличную от x) и α, x свободны для a в A (a), то {ε реализует-$\bar{\alpha}$ (*x*) A (a)} ≡ {ε реализует-*α*,*x*, $\bar{\alpha}$ (*x*) A (a)} [лемма 8.2] ≡ {ε реализует-*α*,*x*,*a* A ($\bar{\alpha}$ (x))} [лемма 9.1 (a), с α, x и a соответственно в качестве Ψ и x] ≡ {ε реализует-*α*, *x* A ($\bar{\alpha}$ (x))} [лемма 8.2].

Л е м м а 9.2. *ε реализует-*Ψ E *тогда и только тогда, когда ε реализует-*Ψ *результат замены всякой части* E, *имеющей вид* ¬A, *где* A — *формула, формулой* $A \supset 1 = 0$.

Т е о р е м а 9.3. (a). *Если* Γ⊢E *в интуиционистской формальной системе анализа и все формулы из* Γ *реализуемы, то и формула* E *реализуема.* (b) *Аналогично, заменяя «реализуема(ы)» на «реализуема(ы)/T».*

(c). *Пусть* Γ, E *содержат свободно только переменные из* Ψ = (Φ, Θ) *и в интуиционистской формальной системе анализа* Γ⊢E, *где переменные из* Θ *остаются фиксированными, тогда если формулы* Γ *реализуемы-Θ* (*см. конец* п. 8.7), *то формула* E *реализуема-Θ.* (d). *Аналогично с заменой «реализуемы-Θ» на «реализуемы-Θ/T».*

Доказательство. (См. доказательство теоремы 62 (a) в ВМ.).

Аксиомы (кроме полученных по схемам $^{x}26.3$ и $^{x}27.1$). Для любой конкретной аксиомы E (для большинства схем аксиом) мы укажем некоторую конкретную примитивно рекурсивную функцию ε такую, что (для любой аксиомы E, полученной по данной схеме, и) для любого списка переменных Ψ, включающего все свободные переменные E, и для любого набора значений $\mathit{\Psi}$ для Ψ функция ε реализует-$\mathit{\Psi}$ E. Полагая тогда $\varphi[\mathit{\Psi}] = \varepsilon$ (т. е. $\varphi[\mathit{\Psi}] = \lambda t \varphi(\mathit{\Psi}, t)$, где $\varphi(\mathit{\Psi}, t) = \varepsilon(t)$), мы получим φ как примитивно рекурсивную реализующую функцию для E (ср. п. 8.7). Для остальных схем аксиом эта функция ε может зависеть от некоторых значений из набора $\mathit{\Psi}$ как от параметров (например, от x для схемы аксиом 13).

1a. $A \supset (B \supset A)$ реализуется-$\mathit{\Psi}$ посредством $\Lambda\alpha\Lambda\beta\alpha$. В самом деле, предположим, что (1) α реализует-$\mathit{\Psi}$ A. Согласно случаю 4 в п.8.5, мы должны вывести из (1), что $\{\Lambda\alpha\Lambda\beta\alpha\}[\alpha]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ $B \supset A$. В силу (8.3) $\{\Lambda\alpha\Lambda\beta\alpha\}[\alpha] = \Lambda\beta\alpha$. Предположим, что (2) β реализует-$\mathit{\Psi}$ B; мы теперь должны вывести из (1) и (2), что $\{\Lambda\beta\alpha\}[\beta]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ A. Но последнее утверждение совпадает с (1), так как в силу (8.3) $\{\Lambda\beta\alpha\}[\beta] = \alpha$.

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$, а также (на основании леммы 9.2) 7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$. $\Lambda\pi\Lambda\varrho\Lambda\alpha\{\{\varrho\}[\alpha]\}[\{\pi\}[\alpha]]$.

3. $A \supset (B \supset A \& B)$. $\Lambda\alpha\Lambda\beta\langle\alpha, \beta\rangle$.

4a. $A \& B \supset A$. $\Lambda\gamma(\gamma)_0$. 4b. $A \& B \supset B$. $\Lambda\gamma(\gamma)_1$.

5a. $A \supset A \vee B$. $\Lambda\alpha\langle 0, \alpha\rangle$. 5b. $B \supset A \vee B$. $\Lambda\beta\langle 1, \beta\rangle$.

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$. $\Lambda\pi\Lambda\varrho\Lambda\sigma\lambda t$ $\overline{\mathrm{sg}}((\sigma(0))_0) \cdot (\{\pi\}[(\sigma)_1])(t) + \mathrm{sg}((\sigma(0))_0) \cdot (\{\varrho\}[(\sigma)_1])(t)$.

8^{I}. $\neg A \supset (A \supset B)$. $\Lambda\pi\lambda t 0$. Предположим, что π реализует-$\mathit{\Psi}$ $\neg$A. Тогда никакая функция α не реализует-$\mathit{\Psi}$ A. Поэтому любая функция, например, $\lambda t 0$, реализует-$\mathit{\Psi}$ формулу $A \supset B$.

10N. $\forall x A(x) \supset A(t)$, где A (x) и t из формулировки леммы 9.1 (a), так что свободные переменные этой аксиомы принадлежат списку Ψ, x. $\Lambda\pi\{\pi\}[t(\mathit{\Psi}, x)]$. В самом деле, предположим, что π реализует-$\mathit{\Psi}$,x формулу $\forall x A(x)$. Тогда по лемме 8.2 π реализует-$\mathit{\Psi}$ $\forall x A(x)$. Следовательно, $\{\pi\}[t(\mathit{\Psi}, x)]$ реализует-$\mathit{\Psi}$, $t(\mathit{\Psi}, x)$ формулу A (x), откуда, согласно лемме 9.1 (a), $\{\pi\}[t(\mathit{\Psi}, x)]$ реализует-$\mathit{\Psi}$,x A (t).

10F. $\forall\alpha A(\alpha) \supset A(u)$. $\Lambda\pi\{\pi\}[u[\mathit{\Psi}, \alpha]]$.

11N. $A(t) \supset \exists x A(x)$. $\Lambda\pi\langle t(\mathit{\Psi}, x), \pi\rangle$.

11F. $A(u) \supset \exists\alpha A(\alpha)$. $\Lambda\pi\langle\Lambda u[\mathit{\Psi}, \alpha], \pi\rangle$.

13. $A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$. $\Lambda\alpha\varrho[x, \alpha]$, где ϱ определено посредством «функциональной рекурсии»

$$\varrho[0, \alpha] = (\alpha)_0;$$
$$\varrho[x', \alpha] = \{\{(\alpha_1)\}[x]\}[\varrho[x, \alpha]].$$

Так как $\varrho[x, \alpha] = \lambda t \varrho(x, \alpha, t)$, то эти равенства принимают вид

$$\varrho(0, \alpha, t) = \psi(\alpha, t),$$
$$\varrho(x', \alpha, t) \simeq \chi(x, \alpha, \lambda t \varrho(x, \alpha, t), t),$$

где ψ — примитивно рекурсивная функция, χ — частично рекурсивная функция. Чтобы доказать, что ϱ — частично рекурсивная функция, применим теорему о рекурсии (ВМ, стр. 314) с равномерностью для решения относительно z уравнения

$$\{z\}(x, \alpha, t) \simeq \begin{cases} \psi(\alpha, t), & \text{если } x = 0, \\ \chi(x \dot{-} 1, \alpha, \lambda t \{z\}(x \dot{-} 1, \alpha, t), t), & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Пусть e — решение этого уравнения и $\varrho(x, \alpha, t) = \{e\}(x, \alpha, t)$. (См. лемму 3.2; Клини **1956**, § 4; **1959**, XXIV.)

14, 17, $^{x}1.1$: $\Lambda\pi\lambda t 0$. 16: $\Lambda\pi\Lambda\varrho\lambda t 0$.

15 и все элементарные аксиомы (а именно: 18—21, $^{x}0.1$, аксиомы группы D): $\lambda t 0$.

$^{x}2.1$. $\forall x \exists\alpha A(x, \alpha) \supset \exists\alpha\forall x A(x, \lambda y \alpha(\langle x, y\rangle))$.

$$\Lambda\pi\langle\Lambda\lambda t\{(\{\pi\}[(t_0)])_0\}((t)_1), \Lambda x(\{\pi\}[x])_1\rangle.$$

Предположим, что π реализует-$\mathit{\Psi}$ $\forall x \exists\alpha A(x, \alpha)$. Тогда при любом x $(\{\pi\}[x])_1$ реализует-$\mathit{\Psi}$, x, $\{(\{\pi\}[x])_0\}$ A (x, α). Следовательно, по лемме 9.1(b) $(\{\pi\}[x])_1$ реализует-$\mathit{\Psi}$, x, $\lambda t\{(\{\pi\}[(t)_0])_0\}((t)_1)$ A (x, $\lambda y \alpha(\langle x, y\rangle)$).

Правила вывода. 2. A, $A \supset B$/B. Принимая во внимание 8.7, выберем список Ψ содержащим все переменные, входящие свободно в $A \supset B$. Согласно индукционному предположению, существуют такие общерекурсивные функции α и ψ, что при любом $\mathit{\Psi}$ $\alpha[\mathit{\Psi}]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ A и $\psi[\mathit{\Psi}]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ $A \supset B$. Положим $\varphi[\mathit{\Psi}] = \{\psi[\mathit{\Psi}]\}[\alpha[\mathit{\Psi}]]$. Функция φ частично рекурсивна и при любом $\mathit{\Psi}$ $\varphi[\mathit{\Psi}]$ реализует-$\mathit{\Psi}$ B, следовательно, φ общерекурсивна.

9N. $C \supset A(x)/c \supset \forall x A(x)$. Пусть при любых Ψ и x $\psi[\Psi, x]$ реализует-Ψ, x $C \supset A(x)$. Тогда при любом Ψ $\Lambda\gamma\Lambda x\{\psi[\Psi, x]\}[\gamma]$ реализует-Ψ $C \supset \forall x A(x)$. 9F. $\Lambda\gamma\Lambda\alpha\{\psi[\Psi, \alpha]\}[\gamma]$.

12F. $A(\alpha) \supset C/\exists\alpha A(\alpha) \supset C$. $\Lambda\pi\{\psi[\Psi, \{(\pi_0)\}]\}[(\pi)_1]$ является реализующей функцией для заключения, если $\psi[\Psi, \alpha]$ — реализующая функция для посылки. 12N. $\Lambda\pi\{\psi[\Psi, (\pi(0))_0]\}[(\pi)_1]$.

Схема аксиом ×26.3c. $\forall\alpha\exists!x R(\bar\alpha(x))\ \&\ \forall a[Seq(a)\ \&\ R(a) \supset A(a)]\ \&\ \forall a[Seq(a)\ \&\ \forall s A(a*2^{s+1}) \supset A(a)] \supset A(1)$.

Предположим, что π реализует-Ψ посылку главной импликации некоторой аксиомы, построенной по этой схеме и содержащей свободно только переменные из Ψ; все определения и выводы ниже вплоть до последнего шага совершаются в этих же предположениях, исключая те случаи, когда, говоря о предикате (функции) с переменной π как о частично рекурсивном (рекурсивной), мы предполагаем π меняющимся по всем функциям.

Итак, $(\pi)_{0,0}$ реализует-Ψ $\forall\alpha\exists!x R(\bar\alpha(x))$, т. е. $\forall\alpha\exists x[R(\bar\alpha(x))\ \&\ \forall y(R(\bar\alpha(y)) \supset y = x)]$; $(\pi)_{0,1}$ реализует-Ψ $\forall a[Seq(a)\ \&\ R(a) \supset A(a)]$ и $(\pi)_1$ реализует-Ψ $\forall a[Seq(a)\ \&\ \forall s A(a*2^{s+1}) \supset A(a)]$. Поэтому: (1) При каждой α $(\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha])_1$ реализует-Ψ, α, x $R(\bar\alpha(x))\ \&\ \forall y(R(\bar\alpha(y)) \supset x = y)$ для $x = (\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha](0))_0$. (2) При любых a, ϱ_0, ϱ_1, если ϱ_0 реализует-a $Seq(a)$ и ϱ_1 реализует-Ψ, a $R(a)$, то $\{\{(\pi)_{0,1}\}[a]\}[\varrho_0, \varrho_1]$ реализует-Ψ, a $A(a)$ (см. (8.1c)). (3) Для любых a, ϱ_0, ϱ_1, если ϱ_0 реализует-a $Seq(a)$, и при всяком s $\{\varrho_1\}[s]$ реализует-Ψ, a, s $A(a*2^{s+1})$, то $\{\{(\pi)_1\}[a]\}[\varrho_0, \varrho_1]$ реализует-Ψ, a $A(a)$.

Кроме того:

(4) при любых σ, α, y, если σ реализует-Ψ, α, y $R(\bar\alpha(y))$, то $y = x$ для x из (1). В самом деле, согласно (1) $\{\{(\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha])_{1,1}\}[y]\}[\sigma]$ реализует-x, y $x = y$, поэтому формула $x = y$ истинна-x, y.

В силу (1) $\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha](0)$ определено при всяком α. Положим

$$R(\pi, a) \equiv (E\alpha)[a = \bar\alpha(x) \text{ для } x = (\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha](0))_0].$$

Очевидно, (5) $(\beta)(Ex)R(\pi, \bar\beta(x))$.

Следующим образом определим частично рекурсивный предикат R_1:

$$R_1(\pi, a) \cong [a = \bar\alpha_1(x_1) \text{ для } \alpha_1 = \lambda t(a)_t \dot- 1,$$
$$x_1 = (\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha_1](0))_0].$$

Покажем, что (6) $R(\pi, a) \equiv R_1(\pi, a)$. Предположим $R(\pi, a)$ и положим $a = \bar\alpha(x)$ с $x = (\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha](0))_0$. В силу (1) $(\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha])_{1,0}$ реализует-Ψ, α, x $R(\bar\alpha(x))$, откуда, по лемме 9.1 (a), следует, что та же функция реализует-Ψ, $\bar\alpha(x)$ $R(a)$. Пусть $\alpha_1 = \lambda t(a)_t \dot- 1$. Первые x значений у α_1 и α совпадают, и поэтому $\bar\alpha_1(x) = \bar\alpha(x)$. Следовательно, на основании леммы 9.1 (a), $(\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha])_{1,0}$ реализует-Ψ, α_1, x $R(\bar\alpha(y))$. В силу (4) при α_1, x и $x_1 = (\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha_1](0))_0$ в качестве α, y и x получаем $x = x_1$. Таким образом, $a = \bar\alpha_1(x_1)$. Обратно, $a = \bar\alpha_1(x_1)$ влечет $R(\pi, a)$.

Мы теперь построим некоторую частично рекурсивную функцию η со следующим свойством. Пусть S_1^π — множество номеров последовательностей, запертых относительно $\lambda a R_1(\pi, a)$ (см. пп. 6.3, 6.5, 6.6). Тогда (7) $a \in S_1^\pi \rightarrow \{\eta[\pi, a]$ реализует-Ψ, a $A(a)\}$. Чтобы доказать это, мы воспользуемся содержательным применением бар-теоремы, т. е. проведем индукцию по S_1^π (неформальный аналог ×26.8a в п. 6.11 с предусмотренной там в первой посылке рекурсивностью $\lambda a R_1(\pi, a)$). Сначала мы выведем условия, которым должна удовлетворять функция $\eta[\pi, a]$, чтобы выполнялись базис и индукционный шаг, а затем покажем, что такая частично рекурсивная функция η фактически может быть указана.

Базис: $R_1(\pi, a)$. Тогда $a = \bar\alpha_1(x_1)$ и т. д. Согласно (1) $(\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha_1])_{1,0}$ реализует-Ψ, α_1, x_1 $R(\bar\alpha(x))$, а следовательно, по лемме 9.1(a) реализует-Ψ, a $R(a)$. Кроме того, $Seq(a)$ и, следовательно, $\lambda t0$ реализует-a $Seq(a)$. Применяя (2), заключаем, что $\eta[\pi, a]$ реализует-Ψ, a $A(a)$, если $\eta[\pi, a] = \{\{(\pi)_{0,1}\}[a]\}[\lambda t0, (\{(\pi)_{0,0}\}[\alpha_1])_{1,0}]$.

Инд. шаг: $Seq(a)\ \&\ (s)[a*2^{s+1} \in S_1^\pi]$. Согласно индукционному предположению при любом s $\eta[\pi, a*2^{s+1}]$ реализует-Ψ, $a*2^{s+1}$ $A(a)$, а следовательно, в силу леммы 9.1(a) реализует-Ψ, a, s $A(a*2^{s+1})$. Применяя теперь (3), получаем, что $\eta[\pi, a]$ реализует-Ψ, a $A(a)$, если $\eta[\pi, a] = \{\{(\pi)_1\}[a]\}[\lambda t0, \Lambda s\eta[\pi, a*2^{s+1}]]$.

О п р е д е л е н и е η. Достаточно, чтобы функция η удовлетворяла равенству $\eta[\pi, a] = \lambda u \eta(\pi, a, u)$, где

$$\eta(\pi, a, u) \simeq \begin{cases} \{\{(\pi)_{0,1}\}[a]\}[\lambda t 0,\ (\{(\pi)_{0,0}\}[\lambda t\,(a)_t \dot{-} 1])_{1,0}](u), & \text{если } R_1(\pi, a), \\ \{\{(\pi)_1\}[a]\}[\lambda t 0,\ \Lambda s \lambda t \eta(\pi, a * 2^{s+1}, t)](u) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При замене η на $\{z\}$ это равенство принимает вид $\{z\}(\pi, a, u) \simeq \psi(z, \pi, a, u)$ с частично рекурсивной функцией ψ. Решение e этого уравнения относительно z гарантируется теоремой о рекурсии (ВМ, стр. 314) с равномерностью по π в качестве Ψ. Итак, мы полагаем $\eta(\pi, a, u) \simeq \{e\}(\pi, a, u)$; при этом в силу замечаний, сделанных перед доказательством леммы 8.1 непосредственно после ее формулировки (с учетом (8.2a)), специализация z числом e законна под знаком операции Λs.

На основании (5) и (6): (8) $1 \in S_1^{\pi}$. Следовательно, согласно (7) $\eta[\pi, 1]$ реализует-Ψ, 1 A (a), откуда по лемме 9.1(a): (9) $\eta[\pi, 1]$ реализует-Ψ A (1).

Окончательно, $\Lambda \pi \eta[\pi, 1]$ реализует-Ψ аксиому.

С х е м а а к с и о м ${}^{x}27.1$. $\forall\alpha \exists\beta A(\alpha, \beta) \supset \exists\tau\forall\alpha \{\forall t \exists! y\ \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0\ \&\ \forall\beta[\forall t \exists y \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(\alpha, \beta)]\}$.

Допустим (если это не определение конкретной рекурсивной функции и не заключительный шаг), что π реализует-Ψ $\forall\alpha\exists\beta A(\alpha, \beta)$. Тогда (1) при любом α $(\{\pi\}[\alpha])_1$ реализует-Ψ, α, β_1 A (α, β) для $\beta_1 = \{(\{\pi\}[\alpha])_0\}$. Пусть $\tau = \Lambda\alpha\beta_1 = \Lambda\alpha\{(\{\pi\}[\alpha])_0\}$. В силу (1) и леммы 8.1 $\{\tau\}[\alpha]$ собственно определено, т. е. (2) $(t)(E!y)\ \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$ и $\{\tau\}[\alpha] = \beta_1$, откуда в силу (8.1): (3) $(t)\ \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y_t)) = \beta_1(t) + 1$, где $y_t = \mu y \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$.

Построим теперь функцию ϱ_0 таким образом, чтобы она реализовала-τ, α $\forall t \exists! y \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$, т. е. формулу $\forall t \exists y[\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0\ \&\ \forall z(\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(z)) > 0 \supset y = z)]$, считая неравенство элементарной формулой (см. выше *15.1 в п. 5.5). Рассмотрим произвольное t. В силу (3) $\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$ истинно-τ, α, t, y_t и, следовательно, реализуемо-τ, α, t, y_t посредством $\lambda s 0$. Если σ реализует-τ, α, t, z $\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(z)) > 0$, то $\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(z)) > 0$ истинно-τ, α, t, z, следовательно, в силу (2) $z = y_t$, и потому $\lambda s 0$ реализует-z,

y_t $z = y$. Комбинируя эти результаты, получаем, что $\forall t \exists! y \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$ реализуется-τ, α посредством $\varrho_0 = \Lambda t \langle \mu y \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0,\ \langle \lambda s 0, \Lambda z \Lambda \sigma \lambda s 0 \rangle\rangle$.

Теперь мы определим функцию ϱ_1 таким образом, чтобы она реализовала-Ψ, τ, α формулу

$$\forall\beta[\forall t \exists y \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1 \supset A(\alpha, \beta)].$$

Пусть при произвольном β σ реализует-τ, α, β $\forall t \exists y\ \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1$. Тогда для любого t $(\{\sigma\}[t])_1$ реализует-τ, α, β, $\bar{y}_t$ $\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1$ при $\bar{y}_t = (\{\sigma\}[t](0))_0$; поэтому $(t)\ \tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(\bar{y}_t)) = \beta(t) + 1$. Следовательно, в силу (2) и (3) $\beta = \beta_1$ и на основании (1) $(\{\pi\}[\alpha])_1$ реализует-Ψ, α, β A (α, β). Итак, полагаем $\varrho_1 = \Lambda\beta\Lambda\sigma(\{\pi\}[\alpha])_1$.

Окончательно, рассматриваемая аксиома реализуется-Ψ посредством $\Lambda\pi\langle\Lambda\tau, \Lambda\alpha\langle\varrho_0, \varrho_1\rangle\rangle$ с выше определенными τ, ϱ_0 и ϱ_1.

(b) Пусть Γ состоит из формул $D_1, \ldots, D_l$. Каждая формула D_j имеет реализующую функцию $\varphi_j[\Psi_j]$, общерекурсивную относительно некоторого конечного множества функций из T. Пусть тогда Σ — список всех функций из T, использованных таким образом для $j = 1, \ldots, l$; ввиду сказанного в самом конце п. 8.2 эти функции всегда можно считать одноместными. В силу же предпоследнего замечания в п. 8.2 достаточно теперь для каждой формулы A_i данного вывода построить некоторую реализующую функцию $\lambda\Psi_i\varphi_i[\Psi_i]$ в форме $\lambda\Psi_i\varphi_i[\Psi_i, \Sigma]$ с частично рекурсивной функцией $\lambda\Psi_i\Sigma\varphi_i[\Psi_i, \Sigma]$. Например, для правила 9N мы берем функцию $\Lambda\gamma\Lambda x\{\psi[\Psi, x, \Sigma)]\}[\gamma]$.

(c) Применяя лемму 8b (ВМ, стр. 97) и переименовывая связанные переменные, мы можем заменить данный нам вывод E из Γ выводом $\tilde{E}$ из $\tilde{\Gamma}$, в котором переменные из Θ не встречаются в числе связанных переменных, а $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{E}$ конгруэнтны соответственно Γ, E. Тогда формулы из $\tilde{\Gamma}$ тоже реализуемы -Θ, а формула E реализуема -Θ, если такова же формула $\tilde{E}$. Мы можем переосмыслить Θ как набор индивидуальных и функциональных символов, а не числовых и функциональных переменных; в получившейся формальной системе, в противоположность лемме 3.3, термы выражают при принятой интерпретации функции, примитивно рекурсивные, но не абсолютно, а относительно Θ. Теперь остается только приспособить доказательство части (b) к построению реализующих функций $\lambda\Psi_i\varphi_i[\Psi_i]$ вида $\lambda\Psi_i\varphi_i[\Psi_i, \Theta]$ с частично рекурсивной функцией $\lambda\Psi_i\Theta\varphi_i[\Psi_i, \Theta]$.

(d) Реализующие функции имеют вид $\lambda\Psi_i\varphi_i[\Psi_i, \Theta, \Sigma]$.

9.2. Следствие 9.4. *Если формула* A *реализуема, а формула* B *нереализуема, то формула* A $\supset$ B *нереализуема. Если формула* A *реализуема или реализуема* $/\eta$ *при некоторой* η, *то формула* $\neg$A *нереализуема и нереализуема*$/\Theta$ *при любой* Θ. *Аналогично с заменой реализуемости на реализуемость-*Θ *и т. д.*

Следствие 9.5. *Интуиционистская формальная система анализа просто непротиворечива*, т. е. *не существует формулы* A, *доказуемой в этой системе вместе со своим отрицанием* $\neg$A.

Доказательство. В силу следствия 9.4 не существует формулы A, реализуемой вместе со своим отрицанием $\neg$A.

Это доказательство непротиворечивости использует только те содержательные методы, которые соответствуют общей части классической и интуиционистской формальных систем.

Это, конечно, не метаматематическое доказательство непротиворечивости, так как здесь применена неэлементарная интерпретация [1]). Но оно, по-видимому, может быть формализовано в базисной формальной системе (т. е. в формальной системе интуиционистского анализа без схемы аксиом $^{x}27.1$) с тем, чтобы получить таким образом строго финитное метаматематическое доказательство непротиворечивости интуиционистской формальной системы анализа относительно базисной системы точно так же, как в работе Нельсона 1947 вместе с Клини 1945 (§ 14) опирающееся на прежнюю интерпретацию посредством реализуемости доказательство непротиворечивости некоторого неклассического расширения интуиционистской арифметики было формализовано с целью получить метаматематическое доказательство непротиворечивости расширенной системы относительно системы первоначальной. Такая формализация

[1]) Верхним индексом «N» из ВМ, стр. 441 и ниже, могут быть здесь помечены все теоремы, следствия, леммы и замечания (если они уже не помечены индексом «C»), использующие понятие реализуемости.

должна быть весьма трудоемкой, так как она должна начинаться с формализации необходимой здесь теории частично рекурсивных функционалов. Наша уверенность в том, что такая формализация может быть проведена, основана на тщательной проверке всего того, на что опирается приведенное выше доказательство непротиворечивости с помощью интерпретации, а также на некоторой уже проделанной части работы по такой формализации. (Мы, наверное, больше сможем об этом сказать в более поздней публикации.)

Следствие 9.6. *Если формула* P$(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ *нумерически выражает общерекурсивный предикат* $P(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ *в интуиционистской формальной системе анализа (или в какой-нибудь ее подсистеме), то для любых* $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ *формула* P$(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ *реализуема-*$a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ *тогда и только тогда, когда* $P(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 47 ВМ (стр. 451). Предположим, что $P(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$. Тогда на основании § 41 (i) ВМ (стр. 176) и сказанного на стр. 265 там же (см. также п. 5.4) $\mathrm{E}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} \vdash$ P$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ с фиксированными $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Но равенства из $\mathrm{E}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}$ являются элементарными и истинными-$\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ формулами, следовательно, они реализуемы-$\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Поэтому в силу части (c) теоремы формула P$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ реализуема-$\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ и, следовательно, по лемме 9.1(a) формула P$(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ реализуема-$a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Обратно, предположим, что формула P$(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ реализуема-$a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Если налицо значения функций $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, то $P(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) \vee \bar{P}(a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ и т. д., как прежде.—

Следствие 9.6 может использоваться в сочетании со следствиями из теорем 27 и 32 в ВМ (стр. 219 и 264). Другой подход обеспечивают леммы 8.5 и 8.4a.

9.3. Ограничим область изменения содержательных функциональных переменных ε, Ψ, α в наших определениях понятий 'реализует-Ψ' и 'реализуема' функциями, принадлежащими какому-нибудь классу C, замкнутому относительно свойства общерекурсивности (это значит, что если

$\Sigma \subseteq C$ и φ — функция, общерекурсивная относительно Σ, то $\varphi \in C$), или функциями, общерекурсивными относительно некоторой функции ξ или относительно сечения $\bar{c}$ (Клини **1963**, стр. 133). Каждая из этих областей, очевидно, содержит в себе все общерекурсивные функции. Такие ограничения приводят к понятиям *C/реализует-Ψ* и *C/реализуема* или *ξ/реализует-Ψ* и т. д.

Одновременно мы можем в определении 'реализуемости' заменить рекурсивность на рекурсивность относительно T, получая при $T \subseteq C$ понятие *C/реализуемости/T* (и аналогично для Θ, $T \subseteq C$ — понятие *C/реализуемости-Θ/T* и т. д.). Здесь C ограничивает класс рассматриваемых функций, а T как бы играет роль порога, за которым конструктивность не требуется.

Теорема 9.7. *Пусть C — класс функций, замкнутый относительно свойства общерекурсивности (например, класс общерекурсивных функций). Если $\Gamma \vdash E$ в интуиционистской формальной системе анализа без схемы аксиом* $^{\times}$26.3 (*бар-теорема*) *и все формулы из Γ C/реализуемы* [*C/реализуемы/T, где $T \subseteq C$*], *то формула E C/реализуема* [*C/реализуема/T*] (*ср. теорему* 9.3(a), (b)). *С соответствующими изменениями верны также леммы* 8.2, 8.3, 8.4a, 8.4b, 9.1, 9.2, *теорема* 9.3(c) *и* (d) *и следствия* 9.4 *и* 9.6 (*мы будем их называть лемма C/*8.2 *и т. д.*).

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что во всех прежних доказательствах, исключая доказательство пункта, соответствующего $^{\times}$26.3 в теореме 9.3, все рассуждения остаются в силе и тогда, когда совокупность всех рассматриваемых функций ограничена классом C.

Лемма 9.8 к следствию 9.9. (Клини 1950a, § 3.) *Существует такой примитивно рекурсивный предикат $R(a)$, что если положить $\alpha \in 0 \equiv \{\alpha$ общерекурсивна$\}$ (Клини — Пост* **1954**) *и $B(\alpha) \equiv (t)\, \alpha(t) \leqslant 1$, то:*

(a) $(\alpha)_{\alpha \in 0 \& B(\alpha)} (Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$;

(b) $(z)\,(E\alpha)_{\alpha \in 0 \& B(\alpha)}\, (x)_{x \leqslant z} \bar{R}(\bar{\alpha}(x))$,

откуда

(c) $\overline{(Ez)}\,(\alpha)_{\alpha \in 0 \& B(\alpha)}\, (Ex)_{x \leqslant z} R(\bar{\alpha}(x))$,

откуда, в свою очередь, с помощью теоремы о веере (содержательный аналог *26.6a)

(d) $\overline{(\alpha)}_{B(\alpha)}\, (Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$.

Доказательство. Используя предикаты W_0 и W_1 из ВМ (стр. 274), положим

$$W(i, t, y) \equiv \begin{cases} W_0(t, y), & \text{если } i = 0; \\ W_1(t, y), & \text{если } i \neq 0; \end{cases}$$

$$R(a) \equiv (Et)_{t < \mathrm{lh}(a)} (Ey)_{y < \mathrm{lh}(a) \dot{-} t} W((a)_t \dot{-} 1, t, y).$$

Тогда для любой функции α такой, что $B(\alpha)$,

(1) $R(\bar{\alpha}(x)) \equiv (Et)_{t<x} (Ey)_{y < x \dot{-} t} W_{\alpha(t)}(t, y)$.

(a) Пусть α — общерекурсивная функция и выполнено $B(\alpha)$. С помощью теоремы IV ВМ (стр. 251) получаем при подходящих f_0, f_1 и $f = \langle f_0, f_1 \rangle$:

(2) $\alpha(t) = 1 \equiv (Ey)\, T_1(f_0, t, y) \equiv (Ey)\, T_1((f)_0, t, y)$,

(3) $\alpha(t) = 0 \equiv (Ey)\, T_1(f_1, t, y) \equiv (Ey)\, T_1((f)_1, t, y)$.

Случай 1: $\alpha(f) = 1$. Тогда $(Ey)\, T_1((f)_0, f, y)$ и $\overline{(Ey)}\, T_1((f)_1, f, y)$, откуда $(z)\, \bar{T}_1((f)_1, f, z)$. Таким образом, $(Ey)\, W_1(f, y)$, т. е. $(Ey)\, W_{\alpha(f)}(f, y)$. Случай 2: $\alpha(f) = 0$. Аналогичное рассуждение.— На основании (1), рассматривая $x = f + y + 1$ и $t = f$, получаем $(Ex)\, R(\bar{\alpha}(x))$.

(b) Рассмотрим произвольное z. Пусть

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t < z \,\&\, (Ey)_{y < z \dot{-} t} W_0(t, y) & (\text{случай A}), \\ 0, \text{ если } t < z \,\&\, (Ey)_{y < z \dot{-} t} W_1(t, y) & (\text{случай B}), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\alpha \in 0 \& B(\alpha)$. Пусть $x \leqslant z$. Предположим, что $R(\bar{\alpha}(x))$. В силу (1) существуют такие t и y, что $t < x \leqslant z$, $y < x \dot{-} t \leqslant z \dot{-} t$ и $W_{\alpha(t)}(t, y)$. Теперь разбором случаев приходим к противоречию. Случай 1: $\alpha(t) = 1$. Тогда $W_1(t, y)$ и, согласно случаю B из определения функции α, $\alpha(t) = 0$. Случай 2: $\alpha(t) = 0$ — рассматривается аналогично.

Следствие 9.9. *Бар-теорема* $^{\times}$26.3 *и теорема о веере* *26.6 *или* *27.7 *не имеют места в интуиционистской системе без первой из них в качестве схемы аксиом, т. е. в такой системе недоказуемы некоторые формулы вида*

^{x}26.3, *26.6 *и* *27.7 (*а также, ввиду имеющихся дедуктивных связей, и вида* *26.4, *26.7 — ^{x}26.9 *и* *27.8 — *27.14).

Кроме того, в силу следствия 9.5 недоказуемо отрицание любого частного случая ^{x}26.3 и т. д. Таким образом, ^{x}26.3 и т. д. являются «не зависящими» от остальных постулатов интуиционистской системы.

Доказательство следствия 9.9. Полагая в теореме 9.7 $C = \{$класс всех общерекурсивных функций$\} = \mathbf{0}$, получаем, что все формулы, доказуемые в рассматриваемой системе, $\mathbf{0}$/реализуемы.

^{x}26.3, *26.6. Покажем, что не $\mathbf{0}$/реализуем следующий частный случай теоремы о веере *26.6a (выводимый в этой системе из некоторого частного случая ^{x}26.3a):

$$\forall a\,[\mathrm{Seq}\,(a) \supset R\,(a) \vee \neg R\,(a)]\,\&\,\forall\alpha_{B(\alpha)}\,\exists x R\,(\bar{\alpha}(x)) \supset \exists z \forall \alpha_{B(\alpha)}\,\exists x_{x \leqslant z}\,R(\bar{\alpha}\,(x)),$$

где $B\,(\alpha)$ обозначает $\forall t \alpha\,(t) \leqslant 1$ (при замене в *26.6 β на $\lambda t1$), $R\,(a)$ — формула, нумерически выражающая примитивно рекурсивный предикат $R\,(a)$ из леммы 9.8 и построенная по способу, содержащемуся в доказательстве леммы 8.5. Для простоты будем считать формулы $x \leqslant z$ и $\alpha\,(t) \leqslant 1$ элементарными. Допустим, что некоторая общерекурсивная функция ε $\mathbf{0}$/реализует эту формулу. Согласно лемме $\mathbf{0}$/8.4a (ii) в теореме 9.7, $R\,(\bar{\alpha}\,(x)) \to \{\varepsilon_{R(\bar{\alpha}(x))}$ $\mathbf{0}$/реализует -α, x $R\,(\bar{\alpha}\,(x))\}$. По лемме 8.8 $\vdash R\,(a) \vee \neg R\,(a)$, откуда $\vdash \forall a\,[\mathrm{Seq}\,(a) \supset R\,(a) \vee \neg R\,(a)]$. По теореме $\mathbf{0}$/9.3(a) последняя формула $\mathbf{0}$/реализуема посредством некоторой общерекурсивной функции ζ_0. Пусть $\alpha \in \mathbf{0}$; в силу леммы $\mathbf{0}$/8.4a (i) функция $\varrho \in \mathbf{0}$ $\mathbf{0}$/реализует-α $B\,(\alpha)$ только тогда, когда $B\,(\alpha)$, и в этом случае, согласно лемме 9.8(a), $x_1 = \mu x R\,(\bar{\alpha}\,(x))$ определено, причем $R\,(\bar{\alpha}\,(x_1))$. Таким образом, $\zeta_1 = \Lambda\alpha\Lambda\varrho\,\langle x_1,\ \varepsilon_{R(\bar{\alpha}(x))}\rangle$ $\mathbf{0}$/реализует $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists x R\,(\bar{\alpha}\,(x))$. Поэтому $\eta = (\{\varepsilon\}\,[\zeta_0, \zeta_1])_1$ $\mathbf{0}$/реализует-z $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists x_{x \leqslant z}\,R\,(\bar{\alpha}\,(x))$ при $z = (\{\varepsilon\}\,[\zeta_0, \zeta_1]\,(0))_0$. Пусть теперь α — общерекурсивная функция такая, что $B\,(\alpha)$. По лемме $\mathbf{0}$/8.4a (ii) формула $B\,(\alpha)$ $\mathbf{0}$/реализуема-α посредством $\varepsilon_{B(\alpha)}$. Таким образом, формула $x \leqslant z$ $\mathbf{0}$/реализуема-x, z посредством $(\{\{\eta\}\,[\alpha]\}[\varepsilon_{B(\alpha)}])_{1,0}$ и формула $R\,(\bar{\alpha}\,(x))$ $\mathbf{0}$/реализуема-α, x посредством $(\{\{\eta\}\,[\alpha]\}\,[\varepsilon_{B(\alpha)}])_{1,1}$ при $x = (\{\{\eta\}\,[\alpha]\}\,[\varepsilon_{B(\alpha)}]\,(0))_0$. Отсюда следует, что $x \leqslant z$ и, по лемме $\mathbf{0}$/8.4a (i), $R\,(\bar{\alpha}\,(x))$.

Поэтому $(\alpha)_{\alpha \in \mathbf{0}\,\&\,B(\alpha)}(Ex)_{x \leqslant z}R\,(\bar{\alpha}\,(x))$, что противоречит лемме 9.8(c).

*27.7. Рассуждая аналогично с $R\,(\bar{\alpha}\,(b))$ в качестве $A\,(\alpha, b)$ в *27.7, мы получим η и z такие, что η $\mathbf{0}$/реализует-z $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists b \forall\gamma_{B(\gamma)}\,[\forall x_{x<z}\gamma\,(x) = \alpha\,(x) \supset R\,(\bar{\gamma}\,(b))]$, откуда следует, что

$$\text{(i)}\quad (\alpha)_{\alpha \in \mathbf{0}\,\&\,B(\alpha)}\,(Eb)\,(\gamma)_{\gamma \in \mathbf{0}\,\&\,B(\gamma)}\,[(x)_{x<z}\gamma\,(x) = \alpha\,(x) \to R\,(\bar{\gamma}\,(b))].$$

Пусть S — конечное множество тех чисел a, для которых $\mathrm{Seq}\,(a)\,\&\,\mathrm{lh}\,(a) = z\,\&\,(t)\,[(a)_t \leqslant 2]$, и пусть z_1 — наибольшее из тех чисел b, о которых говорится в (i) при $\alpha = \lambda t\,(a)_t \dot{-} 1$ и $a \in S$. Тогда $(\alpha)_{\alpha \in \mathbf{0}\,\&\,B(\alpha)}\,(Eb)_{b \leqslant z_1}R\,(\bar{\alpha}\,(b))$, и мы снова приходим к противоречию с леммой 9.8(c).

9.4^{C}. В этом и в следующем пунктах мы применяем классические рассуждения.

Операция скачка $'$ (Клини — Пост **1954**) переводит данный предикат $\lambda a A\,(a)$ в предикат $\lambda a\,(Ex)\,T_1^A\,(a, a, x)$ или, в общем случае, функцию $\lambda a \alpha\,(a)$ в предикат $\lambda a\,(Ex)\,T_1^{\alpha}(a, a, x)$ (или в его представляющую функцию) (см. ВМ, стр. 259).

Теоретико-числовая функция $\varphi\,(a_1, \ldots, a_n)$ называется *арифметической*, если арифметическим является ее представляющий предикат $\varphi\,(a_1, \ldots, a_n) = w$ (см. ВМ, стр. 215, 254) [1]).

Лемма 9.10^{C}. *Арифметические функции образуют наименьший класс функций, замкнутый относительно свойства общерекурсивности и операции скачка.* (Клини — Пост **1954** и ВМ или Клини **1955b**, §§ 2, 3.)

Доказательство — с помощью результатов из ВМ. Во-первых, из ## 14, C (стр. 204), теоремы II (стр. 245) и теоремы III (стр. 249) с $\varphi\,(a_1, \ldots, a_n) = \mu w\,[\varphi\,(a_1, \ldots, a_n) = w]$ вытекает, что функция φ общерекурсивна относительно ее представляющего предиката, и обратно. Предположим теперь, что функция φ общерекурсивна относительно арифметических функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

[1]) В ВМ термин «арифметический предикат» (arithmetical predicate) переведен как «предикат, арифметический по Гёделю». (См. также наше примечание на стр. 12.) — *Прим. перев.*

По теореме VII(d) (BM, стр. 254) каждый из представляющих предикатов $Q_1, \ldots, Q_l$ этих функций выразим в одной из форм, о которых говорится в теореме V (часть II, BM, стр. 253), соответственно с $k_1, \ldots, k_l$ кванторами. Введением, если потребуется, фиктивных кванторов можно все эти предикаты привести к форме с $k = \max(k_1, \ldots, k_l)$ кванторами. Тогда в силу теоремы Поста (теорема XI, BM, стр. 261) (принимая также во внимание теорему VII(b)) представляющий предикат функции φ также является арифметическим. Таким образом, класс арифметических функций замкнут относительно свойства общерекурсивности. Так как предикат $T_1^{\alpha}(a, a, x)$ примитивно рекурсивен относительно α (BM, стр. 259) и, следовательно, по теореме II общерекурсивен относительно α и так как класс арифметических предикатов по определению замкнут относительно операции связывания кванторами числовых переменных, то, очевидно, класс арифметических функций замкнут также и относительно операции скачка′. Чтобы показать, что и обратно — всякая арифметическая функция определима с помощью только общерекурсивных операций и операции′, достаточно согласно теореме VII(d) BM показать, что то же верно для всякого предиката, выразимого в одной из форм теоремы V. Сделаем это индукцией по числу k кванторов. При $k = 0$ утверждение очевидно. Пусть предикат $P(a_1, \ldots, a_n)$ выразим в форме с $k+1$ кванторами. Пусть внешним квантором является квантор существования (Ex) (в противном случае мы сначала рассмотрим предикат $\overline{P}(a_1, \ldots, a_n)$). Тогда (принимая во внимание, что $a_i = (\langle a_1, \ldots, a_n \rangle)_{i-1}$) $P(a_1, \ldots, a_n) \equiv (Ex)\, A(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, x)$, где $A(a, x)$ — некоторый предикат, выразимый с помощью k кванторов и, следовательно, по индуктивному предположению определимый только с помощью общерекурсивных операций и операции′. Положим $\beta = \lambda a\, \alpha((a)_0, (a)_1)$, где α — представляющая функция предиката A. Тогда этот предикат рекурсивен относительно β, и, на основании примера 2 на стр. 305 для $l = 1$[1]), при некоторой примитивно рекурсивной функции ψ $(Ex)\, A(a, x) \equiv (Ex)\, T_1^{\beta}(\psi(a), \psi(a), x)$. Итак, предикат $P(a_1, \ldots, a_n)$ рекурсивен относительно предиката $(Ex)\, A(a, x)$, который рекурсивен относительно предиката $(Ex)\, T_1^{\beta}(a, a, x)$, а этот последний получается с помощью операции′ из функции β, которая, в свою очередь, рекурсивна относительно $A(a, x)$.

[1]) Смысл параметра l выясняется во втором абзаце формулировки теоремы XXIII BM (стр. 305).— *Прим. перев.*

З а м е ч а н и е 9.11^C. Мы сейчас дадим неформальное классическое доказательство теоремы о веере посредством леммы Кёнига **1926** (усиливая Клини **1958**, стр. 139, строки 11—12). Теорема о веере *27.9 в неформальных обозначениях записывается так:

$$\text{(a)}\quad (\alpha)_{B(\alpha)}(Ex)\, R(\overline{\alpha}(x)) \rightarrow (Ez)(\alpha)_{B(\alpha)}(Ex)_{x \leqslant z} R(\overline{\alpha}(x)),$$

где $B(\alpha)$ есть $(t)\,\alpha(t) \leqslant \beta(\overline{\alpha}(t))$. По контрапозиции это эквивалентно

$$\text{(b)}\quad (z)(E\alpha)_{B(\alpha)}(x)_{x \leqslant z} \overline{R}(\overline{\alpha}(x)) \rightarrow (E\alpha)_{B(\alpha)}(x)\, \overline{R}(\overline{\alpha}(x)),$$

что в геометрическом истолковании и выражает лемму Кёнига. При этом геометрическом истолковании, представив веер деревом, как это сделано в третьем абзаце п. 6.10, мы теперь изобразим полужирным шрифтом вдоль каждого пути α все вершины по первую (если такая существует) включительно, на которой $R(\overline{\alpha}(x))$ (т. е. подчеркнутую); иными словами, это будут в точности все вершины, занятые номерами последовательностей, которые не являются начально гарантированными (см. п. 6.3). Как и прежде, отбросим ту часть дерева, которая не набрана полужирным шрифтом. Посылка $(z)(E\alpha)_{B(\alpha)}(x)_{x \leqslant z} \overline{R}(\overline{\alpha}(x))$ в (b) утверждает, что в оставшемся дереве существуют сколь угодно длинные конечные пути (не представленные на рис. 1). Заключение $(E\alpha)_{B(\alpha)}(x)\, \overline{R}(\overline{\alpha}(x))$ утверждает, что существует бесконечный путь. Действительно, некоторый бесконечный путь может быть прослежен согласно следующему (вообще говоря, не эффективному) правилу. Мы начинаем, разумеется, с начальной вершины, обозначенной [ ]. Предположим, что мы проследили путь до некоторой вершины a (это либо [ ], либо некоторая следующая за ней вершина) и что эта вершина a обладает свойством принадлежать произвольно длинному конечному пути (вершина [ ] обладает этим свойством в силу посылки). Тогда одна из вершин $a * 2^{s+1}$ $(s = 0, \ldots, \beta(a))$ обладает этим же свойством, ибо если бы все пути через $a * 2^{s+1}$ имели длину, не превосходящую некоторого $z_s + 1$ $(s = 0, \ldots, \beta(a))$, то все пути через a имели бы длину, не превосходящую $\max(z_0 + 1, \ldots,$

$\ldots, z_{\beta(a)}+1)$, что противоречит нашему предположению о том, что a обладает рассматриваемым свойством. Правило велит выбрать в качестве следующей вершины на прослеживаемом пути одну из вершин $a * 2^{s+1}$, обладающую этим свойством, например, всякий раз — с наименьшим s. Итак, выходя из вершины [ ], мы в состоянии последовательно выбирать одну за другой новые вершины с данным свойством.

Л е м м а 9.12^C. *Каков бы ни был класс C функций, замкнутый относительно свойства общерекурсивности и операции скачка' (например, согласно лемме 9.10, C может быть классом всех арифметических функций), теорема о веере содержательно верна в версии* (а) *замечания* 9.11, *если β и представляющая функция ϱ предиката R принадлежат C, а область изменения функциональной переменной α ограничена классом C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что классу C принадлежит та функция α, которая задается бесконечным путем, прослеживаемым согласно правилу из доказательства замечания 9.11. Проанализируем это правило, вводя подчиненный соответствующим условиям номер последовательности g для представления конечного пути через a длины $z+1$. Итак, $g=\gamma(z)$ для некоторой функции γ, удовлетворяющей условию $B(\gamma)$, т. е. условию $(t)\,\gamma(t) \leqslant \beta(\bar{\gamma}(t))$. Отсюда следует, что $g \leqslant \gamma(\beta, z)$, где

$$\gamma(\beta, 0)=1,$$
$$\gamma(\beta, t')=\gamma(\beta, t)\cdot p_t^{1+\max_{s\leqslant\gamma(\beta,\, t)}\beta(s)}$$

(Клини **1956**, примечание 8). Поэтому функция α, представляемая путем, построенным согласно нашему правилу, удовлетворяет равенству

$$\text{(c)}\quad \alpha(x)=\mu s_{s\leqslant\beta(\bar{\alpha}(x))}(z)\{z>x\rightarrow$$
$$(Eg)_{g\leqslant\gamma(\beta,\, z)}\{\mathrm{Seq}(g)\,\&\,\mathrm{lh}(g)=z\,\&$$
$$(t)_{t<z}\,[(g)_t\leqslant 1+\beta(\textstyle\prod_{i<t}p_i^{(g)_i})]\,\&\,\prod_{i<x}p_i^{(g)_i}=$$
$$\bar{\alpha}(x)\,\&\,(g)_x=s+1\,\&\,(t)_{t\leqslant z}\,\bar{R}(\textstyle\prod_{i<t}p_i^{(g)_i})\}\},$$

которое определяет ее по индукции. Пусть $\sigma=\langle\beta, \varrho\rangle$. Функция σ примитивно рекурсивна относительно β и ϱ, а каждая из функций β и ϱ примитивно рекурсивна относительно σ. Таким образом, правая часть равенства (с) имеет вид $\mu s_{s\leqslant\beta(\bar{\alpha}(x))}(z)\,R^\sigma(\langle\bar{\alpha}(x), s\rangle, z)$, где R^σ — предикат, примитивно рекурсивный относительно σ. Имея в виду в дальнейшем применение операции скачка к σ, обозначим через $S(a)$ предикат $(Ez)\,T_1^\sigma(a, a, z)$. Так как $\beta, \varrho \in C$, то и $\sigma \in C$, а потому классу C принадлежит и представляющая функция предиката S. На основании примера 2 ВМ (стр. 305) с $l=1$ [1]) при некоторой примитивно рекурсивной ψ $(Ez)\,\bar{R}^\sigma(a, z)\equiv S(\psi(a))$. Положим $\chi(a)=\mu s_{s\leqslant\beta(a)}\,\bar{S}(\psi(\langle a, s\rangle))$. Тогда равенство (с) принимает вид

$$\text{(d)}\quad \alpha(x)=\chi(\bar{\alpha}(x)).$$

В силу ВМ # G (стр. 208), с $\bar{\alpha}(x)$ вместо $\tilde{\alpha}(x)$, функция α примитивно рекурсивна относительно функции χ, а эта последняя примитивно рекурсивна относительно β и S, которые принадлежат классу C. Следовательно, и $\alpha \in C$.

Т е о р е м а 9.13^c. *Для любого класса функций C, замкнутого относительно свойства общерекурсивности и операции скачка' (например, для класса арифметических функций), если $\Gamma \vdash \mathrm{E}$ в интуиционистской формальной системе анализа с теоремой о веере* *26.6 (*или, ввиду имеющих место дедуктивных соотношений, с* *26.7, *27.7 — *27.10), *заменяющей в качестве схемы аксиом бар-теорему* ^{x}26.3, *и если все формулы из* Γ *C/реализуемы* [*C/реализуемы/T, где $T \subseteq C$*], *то формула* E *C/реализуема* [*C/реализуема/T*].

Д о к а з а т е л ь с т в о. К доказательству теоремы 9.7 остается добавить рассмотрение теоремы о веере с данным классом C.

*26.6c. $\forall\alpha_{B(\alpha)}\exists!x\mathrm{R}(\bar{\alpha}(\mathrm{x}))] \supset \exists\mathrm{z}\forall\alpha_{\mathrm{B}(\alpha)}\exists\mathrm{x}_{\mathrm{x}\leqslant\mathrm{z}}\mathrm{R}(\bar{\alpha}(\mathrm{x}))$,

где $\mathrm{B}(\alpha)$ — это формула $\forall\mathrm{t}\alpha(\mathrm{t}) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(\mathrm{t}))$, а формулы $\mathrm{x} \leqslant \mathrm{z}$ и $\alpha(\mathrm{t}) \leqslant \beta(\bar{\alpha}(\mathrm{t}))$ считаются элементарными. Содержательные функциональные переменные ниже считаем меняющимися по C. Рассмотрим какую-нибудь функцию β как значение переменной β и какой-нибудь набор Ψ функций как набор значений для списка Ψ остальных свободных функциональных переменных формулы $\forall\alpha_{\mathrm{B}(\alpha)}\exists!\mathrm{xR}(\bar{\alpha}(\mathrm{x}))$. Предположим, что π C/реализует-β, Ψ $\forall\alpha_{\mathrm{B}(\alpha)}\exists!\mathrm{xR}(\bar{\alpha}(\mathrm{x}))$. По лемме C/8.4а: (**0**) если ϱ C/реализует-β, α $\mathrm{B}(\alpha)$, то $B(\alpha)$. Обратно, если $B(\alpha)$, то $\varepsilon_{\mathrm{B}(\alpha)}$ C/реализует-β, α

[1]) См. предыдущее примечание.— *Прим. перев.*

B (α). Поэтому (1) для любого α, если $B(\alpha)$, то $(\{\{\pi\}[\alpha]\}[\varepsilon_{B(\alpha)}])_1$ C/реализует-Ψ, α, x R (ᾱ (x)) & ∀y (R (ᾱ (y)) ⊃ ⊃ x = y)] при $x = (\{\{\pi\}[\alpha]\}]\ \varepsilon_{B(\alpha)}]\ (0))_0$. Далее, параллельно некоторым шагам для схемы аксиом ˣ26.3c в доказательстве теоремы 9.3: (4) для любых σ, α и y, если $B(\alpha)$ и σ C/реализует-Ψ, α, y R (ᾱ (y)), то $y = x$ для x из (1). Пусть $R(\pi, a) \equiv (E\alpha)_{B(\alpha)}[a = \bar{\alpha}(x)$ для $x = (\{\{\pi\}[\alpha]\}[\varepsilon_{B(\alpha)}](0))_0]$.

Очевидно, (5) $(\alpha)_{B(\alpha)}(Ex)R(\pi, \bar{\alpha}(x))$. Следующим образом зададим частично рекурсивный предикат R_1:

$$R_1(\pi, a) \simeq [a = \bar{\alpha}_1(x_1) \& (t)_{t<x_1}\alpha_1(t) \leqslant \beta(\bar{\alpha}_1(t))$$
$$\text{для } \alpha_1 = \lambda t\,(a)_t \dot{-} 1 \text{ и } x_1 = (\{\{\pi\}[\alpha_1]\}[\varepsilon_{B(\alpha)}](0))_0].$$

С помощью (1) и (4) получаем: (6) $R(\pi, a) \equiv R_1(\pi, a)$. Кроме того, если $B(\alpha)$ & $R_1(\pi, \bar{\alpha}(x))$, то, полагая $a = \bar{\alpha}(x)$ и $\alpha_1 = \lambda t\,(a)_t \dot{-} 1$, получаем, что выполнено $B(\alpha_1)$, и, как и в базисе для схемы аксиом ˣ26.3c, $(\{\{\pi\}[\alpha_1]\}[\varepsilon_{B(\alpha)}])_{1,0}$ C/реализует-Ψ, a R (a) и, следовательно, C/реализует-Ψ, α, x R (ᾱ (x)). Таким образом, (10) $B(\alpha)$ & $R_1(\pi, \bar{\alpha}(x)) \rightarrow (\{\{\pi\}[\lambda t\,(\bar{\alpha}(x))_t \dot{-} 1]\}[\varepsilon_{B(\alpha)}])_{1,0}$ C/реализует-Ψ, α, x R (ᾱ (x)). Но из общерекурсивности $\lambda a R_1(\pi, a)$ относительно β и π при β и π из C следует $\lambda a R_1(\pi, a) \in C$. Кроме того, α в (5) берется тоже из C. Поэтому, в силу леммы 9.12, мы можем содержательно применить теорему о веере к (5) и (6), чтобы получить (11) $(Ez)(\alpha)_{B(\alpha)}(Ex)_{x \leqslant z} R_1(\pi, \bar{\alpha}(x))$. С помощью (0) и (10) получаем теперь, что формула ∃z∀α$_{B(\alpha)}$∃x$_{x \leqslant z}$ R (ᾱ (x)) C/реализуема-β, Ψ посредством $\langle \mu z\,(\alpha)_{B(\alpha)}(Ex)_{x \leqslant z} R_1(\pi, \bar{\alpha}(x)),\ \Lambda\alpha\Lambda\varrho\,\langle \mu x R_1(\pi, \bar{\alpha}(x)),$ $\langle \lambda t 0,\ (\{\{\pi\}[\lambda t\,(\bar{\alpha}(\mu x R_1\ (\pi,\ \alpha\ (x))))_t \dot{-} 1]\}\ [\varepsilon_{B(\alpha)}])_{1,0}\rangle\rangle\rangle$. Чтобы избавиться в этом выражении от квантора по функциям $(\alpha)_{B(\alpha)}$, мы можем ввести квантор по числам (g), подчинив его, как в доказательстве леммы 9.12, условию, которое обеспечивало бы равенство $g = \bar{\alpha}(z)$ при некоторой α такой, что $B(\alpha)$. Итак, (12) $(\alpha)_{B(\alpha)}(Ex)_{x \leqslant z} R_1(\pi, \bar{\alpha}(x)) \equiv (g)_{g \leqslant \gamma(\beta, z)}\{\mathrm{Seq}(g)\ \&\ \mathrm{lh}(g) = z\ \&\ (t)_{t<z}[(g)_t \leqslant 1 + \beta(\prod_{i<t} p_i^{(g)_i})]\ \&\ (Ex)_{x \leqslant z} R_1(\pi, \prod_{i<x} p_i^{(g)_i})\}$. С помощью (12) наше выражение для функции, C/реализующей-β, Ψ формулу ∃z∀α$_{B(\alpha)}$∃x$_{x \leqslant z}$R (ᾱ (x)), принимает вид $\varphi[\beta, \pi]$ с частично рекурсивной функцией φ. Тогда $\Lambda\pi\varphi[\beta, \pi]$ C/реализует-β, Ψ *26.6c.

9.5ᶜ. Предикат называется *аналитическим* (Клини **1955**, § 2), если он выразим через общерекурсивные предикаты с числовыми и функциональными переменными с помощью операций исчисления предикатов. Два теоретико-числовых предиката являются предикатами одной и той же *степени* (Клини — Пост **1954**), если каждый из них общерекурсивен относительно другого.

Т е о р е м а 9.14ᶜ. *Каждому арифметическому* [*аналитическому*] {*аналитическому*} *предикату* $P(a)$ *можно поставить в соответствие некоторую систему* S, *промежуточную между интуиционистской формальной системой арифметики* T *и классической формальной системой арифметики* [*систему* S, *промежуточную между базисной формальной системой* T *и классической формальной системой анализа*] {*систему* S, *являющуюся непротиворечивым расширением интуиционистской формальной системы анализа* T}, *таким образом, что если* $P_1(a)$ *и* $P_2(a)$ — *предикаты разных степеней, то соответствующие им системы* S_1 *и* S_2 *различны, т. е. имеют различные классы доказуемых формул.* Каждая система S получается добавлением к T некоторой аксиомы вида $P(a) \vee \neg P(a)$ (или вида $\neg\neg(P(a) \vee \neg P(a)) \supset P(a) \vee \neg P(a)$, что эквивалентно в силу замечания 1 на стр. 111 в ВМ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данное по условию выражение для $P(a)$ эквивалентно некоторому представлению этого предиката в предваренной форме (на основании содержательного варианта теоремы 19 ВМ, стр. 152) с общерекурсивным ядром (см. #D ВМ, стр. 205). Пусть, например, этой предваренной формой будет $(x)(Ey)(z)R(a, x, y, z)$. Согласно лемме 8.5 $R(a, x, y, z)$ нумерически выражается некоторой формулой R (a, x, y, z), не содержащей символов ∨ и ∃. Возьмем теперь в качестве P (a) формулу ∀x¬∀y¬∀zR (a, x, y, z) и построим S, как сказано выше. На основании случаев 3 и 5 в п. 8.5 и в силу леммы 8.4a(ii) получаем разбором случаев в $(P(a) \vee \bar{P}(a))$, что при любом a формула P (a) ∨ ¬ P (a) реализуема-a посредством $\langle \pi(a), \varepsilon_{P(a)}\rangle$, где $\pi(a)$ — представляющая функция предиката $P(a)$. Таким образом, формула P (a) ∨ ¬ P (a) реализуема/P. Тогда по теореме 9.3(b) всякая доказуемая в S формула реализуема/P, и потому система S (просто) непротиворечива.

Пусть $P_1(a)$ и $P_2(a)$ — предикаты разных степеней, причем, для определенности, P_1 не рекурсивен относительно P_2, и S_1, S_2 — соответствующие формальные системы. Тогда аксиома $\mathrm{P}_1(\mathrm{a}) \vee \neg \mathrm{P}_1(\mathrm{a})$ системы S_1 не доказуема в системе S_2. В противном случае эта аксиома была бы реализуемой/P_2 с некоторой реализующей функцией φ, общерекурсивной относительно P_2, и мы имели бы $P_1(a) \equiv (\varphi[a](0))_0 = 0$, так как по лемме 8.4(a) (i) $(\varphi[a])_1$ реализует-a формулу $P_1(\mathrm{a})$ $(\neg P_1(\mathrm{a}))$ только при условии, что $P_1(a)$ $(\overline{P}_1(a))$. Но тогда предикат P_1 оказался бы рекурсивным относительно $\lambda at\varphi[a](t)$ и, следовательно, относительно P_2, что противоречит исходному условию.

Замечание 9.15[c]. В системе S, образованной подобным образом добавлением в качестве аксиомы $\mathrm{P}_k(\mathrm{a}) \vee \neg \mathrm{P}_k(\mathrm{a})$ (или какой-нибудь формулы реализуемой/P_k) для каждого из предикатов $P_0(a)$, $P_1(a)$, ... или $P_0(a)$, ..., $P_n(a)$ (в этом случае мы полагаем $P_{n+i'}(a) \equiv P_n(a)$), всякая доказуемая формула реализуема/$\lambda ak\, P_k(a)$.

Замечание 9.16[c]. Если бы логический символ $\vee$ не был исключен в условиях лемм 8.4a и 8.4b, то формула *27.17 $[\mathrm{P}(\mathrm{a}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathrm{a})$ для $P(a) \equiv (Ex)\, T_1(a, a, x)]$ была бы классическим контрпримером для (i) [(ii)]. Контрпримеры при незапрещенном символе $\exists$ следуют с помощью $\vdash \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \sim \exists \mathrm{x}((\mathrm{x}=0 \supset \mathrm{A}) \& (\mathrm{x} \neq 0 \supset \mathrm{B}))$ и *0.6.

§ 10. Специальная реализуемость. 10.1. Ранее в исследованиях по понятию реализуемости из работы Клини 1945 (начатых в 1941 г.) встречались формулы, реализуемость которых доказывалась только классически (например, Клини 1945, стр. 114, (h) и (l), Дж. Роуз **1953**, стр. 11). В таких случаях интерпретация посредством реализуемости недостаточна для исключения интуиционистской доказуемости соответствующей формулы, однако, с другой стороны, у нас нет адекватных оснований утверждать, что она выполняется интуиционистски, хотя мы и знаем классически, что эта формула может быть непротиворечиво присоединена к интуиционистской системе в качестве постулата. Аналогичная ситуация имеет место и при настоящем понятии реализуемости.

Одной из такого рода формул является (по доказываемой ниже теореме 11.7 (a) и *25.3)

$$M_1\colon\ \forall \mathrm{z} \forall \mathrm{x}\, [\neg \forall \mathrm{y} \neg \mathrm{T}_1(\mathrm{z}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \exists \mathrm{y} \mathrm{T}_1(\mathrm{z}, \mathrm{x}, \mathrm{y})],$$

где $\mathrm{T}_1(\mathrm{z}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ — формула, нумерически выражающая $T_1(z, x, y)$ (ВМ, стр. 250), выбранная по (методу из доказательства) лемме 8.5. С точки зрения ВМ (§§ 62, 63) M_1 формализует принцип Маркова **1954a** (введенный в лекциях 1952—53 гг.), ставший известным нам по следующей его формулировке в работе Шанина **1958a**: «если процесс применения алгорифма $\mathfrak{Q}$ к исходному данному P не является безгранично продолжимым, то $\mathfrak{Q}$ применим к P». Аналогичная формула M_n с $\mathrm{T}_n(\mathrm{z}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y})$ при $n > 1$ вместо $\mathrm{T}_1(\mathrm{z}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ следует с точки зрения интепретации из M_1 ввиду сжатия (ВМ, (18), стр. 254) и теоремы IV (ВМ, стр. 251).

В ходе исследований автора по **1957**-реализуемости (начатых в 1951 г.) ему особенно стал очевиден (еще до прочтения работы Маркова **1954a**) значительный интерес, представляемый присоединением данного принципа к интуиционистской системе и связанный с разнообразными результатами, которые становятся достижимыми после (или только после) этого. Недавно обнаруженным примером является утверждение Гёделя, что если «строгая полнота» исчисления предикатов доказуема интуиционистски, то таков же и любой частный случай принципа Маркова (получаемый конкретизацией z, x посредством цифр). Этот результат появился в работах Крайзела **1958a** (замечание 2.1) и **1959a**, с коротким доказательством в **1962b** и в качестве теоремы 2 в **1962**. Сам Гёдель, по-видимому, его не опубликовал. Крайзел формулирует обсуждаемый принцип (не упоминая Маркова) как «$\neg(x)\, A(x) \to (Ex) \neg A(x)$ для любого примитивно рекурсивного A» (или аналогично). Отношение этого принципа к брауэровской теории континуума будет обсуждено в замечании 18.6 главы IV.

Крайзел в **1959a** вместе с разделом 3.52 работы **1959** показывает, что этот принцип недоказуем в интуиционистской арифметике и в формальной системе работы Клини **1957**. Крайзел достиг этого результата применением некоторой интерпретации, которую он характеризует как «тесно примыкающую к реализуемости по Клини» (1945 или ВМ, § 82), но которая, однако, использует идеи из гёделевской интерпретации (Крайзел **1959**, разделы 3.1 — 3.3, и Гёдель **1958**), не совпадая вместе с тем с нею. Крайзел вернулся позднее к этому предмету в **1962**. Формальная система из работы Клини **1957** не так сильна, как формальная система этой книги (письмо Крайзела от 22 ноября 1963 г.).

Мы теперь дадим — в этом и следующем разделах — доказательство результата Крайзела для настоящей формальной системы. Мы достигли этого доказательства, непосредственно атакуя проблему с помощью некоторых идей Крайзела **1959a** и Гёделя **1958**, и мы не будем определять точное соотношение между интерпретацией, используемой в нашем доказательстве (s-реализуемость), и интерпретацией, данной Крайзелом (**1959**, раздел 3.52).

10.2. При реализуемости, как она трактовалась выше (§§ 8, 9), импликация $A \supset B$ реализуема-Ψ посредством ε, если $\{\varepsilon\}[\alpha]$ есть произвольная частично рекурсивная функция $\varphi[\alpha]$ такая, что для каждой α, реализующей-Ψ A, $\varphi[\alpha]$ везде определена и реализует-Ψ B. Для функции α, которая не реализует-Ψ A, $\varphi[\alpha]$ не обязана быть везде определенной. В 'специальной реализуемости' (коротко 's-реализуемости'), вводимой в этом разделе, мы будем использовать вместо $\{\varepsilon\}[\alpha]$ некоторую аналогичную операцию на ε, дающую функцию $\varphi[\alpha]$ (называемую 'специально рекурсивной'), которая частично рекурсивна и вместе с тем везде определена для любой α некоторого подходящего сорта или 'порядка' (определяемого формулой A) независимо от того, верно или нет, что α 's-реализует Ψ' A.

Чтобы осуществить сказанное, мы сперва припишем 'порядки' формулам и одноместным (везде определенным) теоретико-числовым функциям. Функция, реализующая некоторую формулу, должна будет иметь тот же порядок, что и эта формула. Начнем с индуктивного определения используемых нами 'порядков'.

(1) 1 есть *порядок*. (2) Если a — *порядок*, то a + 1 также есть *порядок*. (3) Если a_0 и a_1 — *порядки*, то (a_0, a_1) также есть *порядок*. *Порядки* получаются только по этим трем правилам. Порядки, различным образом порожденные использованием этих трех правил, различны.

Порядки, даваемые правилами (2) и (3), соответственно называются *последовательностными порядками* (s-*порядок*) *и парными порядками* (p-порядок). Порядки $1 + 1$, $(1 + 1) + 1$, $((1 + 1) + 1) + 1$, ... мы записываем просто как 2, 3, 4 ... Если a есть некоторый s-порядок, то $a - 1$ есть порядок b такой, что $a = b + 1$. Переменные ${}^{a}\alpha$, ${}^{a}\beta$, ..., ${}^{a}\alpha_1$, ${}^{a}\alpha_2$, ... будут использоваться как переменные по функциям порядка a (определение дается ниже).

Для любых теоретико-числовых функций α и β мы определяем

$$(10.1) \quad \{\alpha\}(\beta) \simeq \alpha(\beta) \simeq \alpha(\bar{\beta}(\mu y\, \alpha(\bar{\beta}(y)) > 0)) \dot{-} 1$$

и говорим, что $\alpha(\beta)$ *собственно определено*, если $(E!\, y)\, \alpha(\bar{\beta}(y)) > 0$.

Теперь мы уточним, какие одноместные теоретико-числовые функции имеют 'некоторый заданный порядок'. (1) Все такие функции являются функциями *порядка* 1. (2) Для каждого порядка a функции ${}^{a+1}\alpha$ *порядка* a + 1 суть те, для которых при любой (функции *порядка* a) ${}^{a}\alpha$ существует единственное y такое, что ${}^{a+1}\alpha(\overline{{}^{a}\alpha}(y)) > 0$ (таким образом, ${}^{a+1}\alpha({}^{a}\alpha)$ собственно определено и для этого y ${}^{a+1}\alpha(\overline{{}^{a}\alpha}(y)) = {}^{a+1}\alpha({}^{a}\alpha) + 1$). (3) Для любой пары порядков a_0 и a_1 функции ${}^{a}\alpha$ *порядка* $a = (a_0, a_1)$ суть те, для которых $({}^{a}\alpha)_0$ имеет *порядок* a_0 и $({}^{a}\alpha)_1$ имеет *порядок* a_1.

Объект ${}^{a+1}\alpha$ некоторого s-порядка имеет двойственную роль: с одной стороны, он является теоретико-числовой функцией $\lambda s\, {}^{a+1}\alpha(s)$, а с другой, используется посредством (10.1) как некоторый оператор $\lambda^{a}\alpha\, {}^{a+1}\alpha({}^{a}\alpha)$. Эти операторы порядков 3, 4, 5, ... не есть просто счетные функционалы типов 3, 4, 5, ... (Клини **1959a**), поскольку, например, ${}^{3}\alpha({}^{2}\alpha)$ зависит, вообще говоря, от $\lambda s\, {}^{2}\alpha(s)$, а не просто от $\lambda^{1}\alpha\, {}^{2}\alpha({}^{1}\alpha)$. (Некоторая интерпретация, использующая функционалы, кажется пригодной для всех постулатов, кроме принципа Брауэра ${}^{\times}27.1$.)

(Мы могли бы расширить нашу теорию порядков, включив натуральные числа как объекты порядка 0.)

Каждая функция некоторого порядка $a \neq 1$ имеет также порядок 1, и есть другие возможности для функций иметь более одного порядка.

Под ${}^{1}0$ мы подразумеваем $\lambda s 0$. Для произвольного порядка a ${}^{a+1}0$ определяется посредством ${}^{a+1}0(1) = 1$, ${}^{a+1}0(s) = 0$ при $s \neq 1$. Для любых порядков a_0 и a_1, если $a = (a_0, a_1)$, то ${}^{a}0 = \langle {}^{a_0}0, {}^{a_1}0 \rangle$. При любом порядке a ${}^{a}0$ является примитивно рекурсивной функцией порядка a.

10.3. Под *специально рекурсивной функцией* (*функцией, специально рекурсивной относительно* T) мы подразумеваем функцию $\varphi(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — список из нуля или большего числа различных числовых переменных и из нуля или большего числа различных переменных по одноместным теоретико-числовым функциям, для каждой из которых указан некоторый порядок, такую, что: (a) если область изменения функциональных переменных из $\mathfrak{a}$ ограничена их соответствующими порядками, то $\varphi(\mathfrak{a})$ везде определена; (b) если область изменения функциональных переменных из $\mathfrak{a}$ не ограничена, то $\varphi(\mathfrak{a})$ частично рекурсивна (частично рекурсивна относительно T). Эти понятия распространяются на функциональнозначные функции $\varphi[\mathfrak{b}] = \lambda s\varphi(\mathfrak{b}, s)$.

Примитивно или общерекурсивная функция $\varphi(\mathfrak{a})$ или $\varphi[\mathfrak{b}]$ тем более является специально рекурсивной.

Ввиду (10.1) и определения 'функции порядка $\mathrm{a}+1$' имеем ${}^{\mathrm{a}+1}\alpha({}^{\mathrm{a}}\alpha) = \varphi({}^{\mathrm{a}+1}\alpha, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$, где φ специально рекурсивна.

Л е м м а 10.1. *Для каждой частично рекурсивной функции* $\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ *существует примитивно рекурсивная функция* $\psi[\mathfrak{b}] = \Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ *такая, что для любого* $\mathfrak{b}$, *при котором* $\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ *определена для всех* ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ *порядка* a, $\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ *есть функция порядка* $\mathrm{a}+1$ *и для любой* ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ *порядка* a

(10.2) $\{\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)\}({}^{\mathrm{a}}\alpha) = \varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$.

Обыкновенно рассматриваемые нами функции $\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ будут специально рекурсивными, так что заключение леммы будет приложимо каждый раз, когда функции из $\mathfrak{b}$ будут иметь предписанные порядки. Здесь мы для краткости ввели Λ-обозначение прямо в формулировке леммы (ср. лемму 8.1). Если $\varphi(z, \mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ частично рекурсивна и $\psi[z, \mathfrak{b}] = \Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(z, \mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ и мы полагаем $\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha) = \varphi(e, \mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ при некотором фиксированном e, то $\psi[e, \mathfrak{b}] = \Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(e, \mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ есть $\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 10.1. Пусть, например, $\mathfrak{b}$ есть $(a, {}^{\mathrm{b}}\beta)$. По теореме о нормальной форме (ВМ, стр. 260 и 294) с использованием, однако, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ вместо $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ (ср. конец п. 8.2) для любого гёделева номера e функции φ и для любых a, ${}^{\mathrm{b}}\beta$, ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ имеет место

(i) $\varphi(a, {}^{\mathrm{b}}\beta, {}^{\mathrm{a}}\alpha) \simeq U(\mu y T_1^{1,1}({}^{\mathrm{b}}\overline{\beta}(y), {}^{\mathrm{a}}\overline{\alpha}(y), e, a))$,

(ii) $T_1^{1,1}({}^{\mathrm{b}}\overline{\beta}(y), {}^{\mathrm{a}}\overline{\alpha}(y), e, a)$ самое большее при одном y.

Таким образом, положим $\psi[a, {}^{\mathrm{b}}\beta] = \lambda s\psi(a, {}^{\mathrm{b}}\beta, s)$, где

$$\psi(a, {}^{\mathrm{b}}\beta, s) = \begin{cases} U(\mathrm{lh}(s)) + 1, & \text{если } T_1^{1,1}({}^{\mathrm{b}}\overline{\beta}(\mathrm{lh}(s)), s, e, a), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

10.4. Пусть ${}^1\alpha =_1 {}^1\beta \equiv {}^1\alpha = {}^1\beta \equiv (x)[{}^1\alpha(x) = {}^1\beta(x)]$. Если a — какой-нибудь s-порядок, то пусть ${}^{\mathrm{a}}\alpha =_{\mathrm{a}} {}^{\mathrm{a}}\beta \equiv ({}^{\mathrm{a}-1}\gamma)[{}^{\mathrm{a}}\alpha({}^{\mathrm{a}-1}\gamma) = {}^{\mathrm{a}}\beta({}^{\mathrm{a}-1}\gamma)]$. Если a есть некоторый p-порядок $(\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1)$, то пусть ${}^{\mathrm{a}}\alpha =_{\mathrm{a}} {}^{\mathrm{a}}\beta \equiv ({}^{\mathrm{a}}\alpha)_0 =_{\mathrm{a}_0} ({}^{\mathrm{a}}\beta)_0 \mathbin{\&} ({}^{\mathrm{a}}\alpha)_1 =_{\mathrm{a}_1} ({}^{\mathrm{a}}\beta)_1$.

Теперь ${}^{\mathrm{a}}\alpha = {}^{\mathrm{a}}\beta \to {}^{\mathrm{a}}\alpha =_{\mathrm{a}} {}^{\mathrm{a}}\beta$, однако (при $\mathrm{a} \neq 1$) обратное, вообще говоря, неверно.

Для любых двух выборов $\Lambda_1{}^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ и $\Lambda_2{}^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ функции $\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$, удовлетворяющей (10.2), имеет место $\Lambda_1{}^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha) =_{\mathrm{a}+1} \Lambda_2{}^{\mathrm{a}}\alpha\varphi(\mathfrak{b}, {}^{\mathrm{a}}\alpha)$ (при каждом $\mathfrak{b}$, удовлетворяющем предположениям (10.2)).

Для любых двух порядков a и b мы определим теперь некоторый порядок $\mathrm{a} * \mathrm{b}$ и для $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b}$ выберем некоторую специально рекурсивную функцию $\lambda^{\mathrm{e}}\varepsilon^{\mathrm{a}}\alpha\, {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$ таким образом, что при любых ${}^{\mathrm{e}}\varepsilon$, ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ указанных порядков ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$ имеет порядок b. Определения даются рекурсией по b, соответствующей индуктивному определению 'порядка' (ср. ВМ, стр. 233.). Если $\mathrm{b} = 1$, то $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b} = (\mathrm{a}, 1) + 1$ и ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] = \lambda s\, {}^{\mathrm{e}}\varepsilon(\langle {}^{\mathrm{a}}\alpha, \lambda ts\rangle)$. Если b есть s-порядок, то $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b} = (\mathrm{a}, \mathrm{b} - 1) + 1$ и (используя лемму 10.1) полагаем ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] = \Lambda^{\mathrm{b}-1}\beta\, {}^{\mathrm{e}}\varepsilon(\langle {}^{\mathrm{a}}\alpha, {}^{\mathrm{b}-1}\beta\rangle)$ при каком-нибудь выборе последней функции. Если b — p-порядок $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1)$, то $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b} = (\mathrm{a} * \mathrm{b}_0, \mathrm{a} * \mathrm{b}_1)$, и ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] = \langle {}^{\mathrm{b}_0}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon)_0\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha], {}^{\mathrm{b}_1}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon)_1\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]\rangle$ (где ${}^{\mathrm{b}_0}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon)_0\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] = (\lambda^{\mathrm{a}*\mathrm{b}_0}\varepsilon^{\mathrm{a}}\alpha\, {}^{\mathrm{b}_0}\{{}^{\mathrm{a}*\mathrm{b}_0}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha])[({}^{\mathrm{e}}\varepsilon)_0, {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ и т. д.). Под ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[\alpha]$ мы подразумеваем ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^1\alpha]$ при ${}^1\alpha = \alpha$.

Для различных выборов $\lambda^{\mathrm{e}}\varepsilon^{\mathrm{a}}\alpha\, {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]_1$ и $\lambda^{\mathrm{e}}\varepsilon^{\mathrm{a}}\alpha\, {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]_2$ функции $\lambda^{\mathrm{e}}\varepsilon^{\mathrm{a}}\alpha\, {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$ индукцией по b устанавливается, что ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]_1 =_{\mathrm{b}} {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]_2$ (при любых ${}^{\mathrm{e}}\varepsilon$, ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ указанных порядков). Более того, имеет место

Л е м м а 10.2. Если ${}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1 =_{\mathrm{e}} {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2$, *то* ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$ (*где* $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией по b. С л у ч а й 1: $\mathrm{b} = 1$. Тогда при всех x ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha](x) = {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1(\langle {}^{\mathrm{a}}\alpha, \lambda tx\rangle)$ [опред. и т. д.] $= {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2(\langle {}^{\mathrm{a}}\alpha, \lambda tx\rangle)$ [предп.] $= {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha](x)$, т. е. ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$. С л у ч а й 2: b есть s-порядок. Тогда для всех ${}^{\mathrm{b}-1}\beta$ имеет место ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]({}^{\mathrm{b}-1}\beta) = {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1(\langle {}^{\mathrm{a}}\alpha, {}^{\mathrm{b}-1}\beta\rangle)$ [опред., (10.2)] $= {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2(\langle {}^{\mathrm{a}}\alpha, {}^{\mathrm{b}-1}\beta\rangle)$ [предп.] $= {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]({}^{\mathrm{b}-1}\beta)$, т. е. ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$. С л у ч а й 3: b есть p-порядок $(\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1)$. Тогда

${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] = \langle {}^{\mathrm{b}_0}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1)_0\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha],\ {}^{\mathrm{b}_1}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon_1)_1\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha]\rangle$ [опред.] $=_{\mathrm{b}}$ $\langle {}^{\mathrm{b}_0}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2)_0\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha],\ {}^{\mathrm{b}_1}\{({}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2)_1\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha]\rangle$ [инд. предп.] $= {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_2\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha]$.

Л е м м а 10.3. *Для каждой частично рекурсивной функции* $\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ *существует примитивно рекурсивная функция* $\psi\,[\mathfrak{b}] = {}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ *такая, что для каждого* $\mathfrak{b}$, *при котором* $\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ *(везде определена и) имеет порядок* b *для всех* ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ *порядка* a, *функция* ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ *является функцией порядка* $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b}$ *и для каждой* ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ *порядка* a *выполняется*

$$(10.3)\qquad {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} \varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha].$$

Обыкновенно рассматриваемая функция $\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ будет специально рекурсивной со значениями порядка b для всех $\mathfrak{b}$, ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ соответствующих порядков. Таким образом, заключение леммы будет приложимо, как только $\mathfrak{b}$ будет иметь надлежащие порядки. Мы будем считать ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ построенной методом из (приводимого ниже) доказательства леммы 10.3. Кроме того, имеем: если $\varphi\,[z,\ \mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ частично рекурсивна и $\psi\,[z,\ \mathfrak{b}] = {}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[z,\ \mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ и мы при некотором фиксированном e полагаем $\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha] = \varphi\,[e,\ \mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$, то $\psi\,[e,\ \mathfrak{b}] = {}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[e,\ \mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ есть некоторое ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$. Нижний индекс b в ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ может опускаться в тех случаях, когда из контекста ясно, что подразумеваемый порядок операнда $\varphi[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ в операции, задаваемой посредством ${}^{\mathrm{e}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha$, есть b. Под ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda\alpha\varphi[\mathfrak{b},\ \alpha]$ мы понимаем ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{1}\alpha\varphi[\mathfrak{b},\ {}^{1}\alpha]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 10.3. Индукция по порядку b. С л у ч а й 1: $\mathrm{b} = 1$. Положим $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b} = (\mathrm{a},\ 1) + 1$. Пусть $\psi\,[\mathfrak{b}] = \Lambda^{\mathrm{e}-1}\beta\varphi\,(\mathfrak{b},\ ({}^{\mathrm{e}-1}\beta)_0,\ ({}^{\mathrm{e}-1}\beta\,(0))_1)$. Тогда по лемме 10.1, если $\mathfrak{b}$, ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ имеют надлежащие порядки, то $\psi\,[\mathfrak{b}]$ — функция порядка e и для всех s выполняется ${}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha]\,(s) = (\lambda s\psi\,[\mathfrak{b}]\,(\langle{}^{\mathrm{a}}\alpha,\ \lambda ts\rangle))\,(s) = \psi\,[\mathfrak{b}]\,(\langle{}^{\mathrm{a}}\alpha,\ \lambda ts\rangle) = \varphi\,(\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha,\ s)$ [(10.2) и др.] $= \varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$, т. е. ${}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} \varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$. С л у ч а й 2: b есть некоторый s-порядок. Положим $\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b} = (\mathrm{a},\ \mathrm{b} - 1) + 1$. Пусть $\psi\,[\mathfrak{b}] = \Lambda^{\mathrm{e}-1}\beta\varphi\,[\mathfrak{b},\ ({}^{\mathrm{e}-1}\beta)_0]\,(({}^{\mathrm{e}-1}\beta)_1)$. Тогда по лемме 10.1 $\psi\,[\mathfrak{b}]$ имеет порядок e и для всех ${}^{\mathrm{b}-1}\beta$ выполняется ${}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha]\,({}^{\mathrm{b}-1}\beta) = \{\Lambda^{\mathrm{b}-1}\beta\psi\,[\mathfrak{b}]\,(\langle{}^{\mathrm{a}}\alpha,\ {}^{\mathrm{b}-1}\beta\rangle)\}\,({}^{\mathrm{b}-1}\beta) = \psi\,[\mathfrak{b}]\,(\langle{}^{\mathrm{a}}\alpha,\ {}^{\mathrm{b}-1}\beta\rangle) = \varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]\,({}^{\mathrm{b}-1}\beta)$, т. е. ${}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} \varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$. С л у ч а й 3: b есть p-порядок $(\mathrm{b}_0,\ \mathrm{b}_1)$. Пусть

$\mathrm{e} = \mathrm{a} * \mathrm{b} = (\mathrm{a} * \mathrm{b}_0,\ \mathrm{a} * \mathrm{b}_1)$. По инд. предп. мы можем найти $\psi_0\,[\mathfrak{b}]$, $\psi_1\,[\mathfrak{b}]$ со значениями порядков $\mathrm{a} * \mathrm{b}_0$, $\mathrm{a} * \mathrm{b}_1$ (при каждом $\mathfrak{b}$, удовлетворяющем нашим предположениям) так, что для всех ${}^{\mathrm{a}}\alpha$ имеет место ${}^{\mathrm{b}_0}\{\psi_0\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}_0} (\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha])_0$, ${}^{\mathrm{b}_1}\{\psi_1\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}_1} (\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha])_1$. Пусть $\psi\,[\mathfrak{b}] = \langle\psi_0\,[\mathfrak{b}],\ \psi_1\,[\mathfrak{b}]\rangle$; соответствующие значения имеют порядок $(\mathrm{a} * \mathrm{b}_0,\ \mathrm{a} * \mathrm{b}_1) = \mathrm{e}$. Теперь ${}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha] = \langle{}^{\mathrm{b}_0}\{\psi_0\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha],\ {}^{\mathrm{b}_1}\{\psi_1\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha]\rangle$, следовательно, $({}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha])_0 =_{\mathrm{b}_0} (\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha])_0\ \&\ ({}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}\,[{}^{\mathrm{a}}\alpha])_1 =_{\mathrm{b}_1} (\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha])_1$, т. е. ${}^{\mathrm{b}}\{\psi\,[\mathfrak{b}]\}[{}^{\mathrm{a}}\alpha] =_{\mathrm{b}} \varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$.—

Индукцией по b показывается, что любые два выбора ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda^{\mathrm{a}}\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ {}^{\mathrm{a}}\alpha]$ связаны отношением $=_{\mathrm{e}}$ (при всех $\mathfrak{b}$, удовлетворяющих соответствующим предположениям).

Для $\mathrm{e} = 1 * \mathrm{b}$ мы определяем ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}\,[x] = {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}\,[\lambda tx]$ $(= \chi\,[{}^{\mathrm{e}}\varepsilon,\ x]$ с некоторой специально рекурсивной $\chi)$. Для $\mathrm{e} = 1 * \mathrm{b}$ и частично рекурсивной $\varphi\,[\mathfrak{b},\ x]$ мы пишем ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda x\varphi\,[\mathfrak{b},\ x] = {}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda\alpha\varphi\,[\mathfrak{b},\ \alpha\,(0)]$. Тогда для $\mathfrak{b}$, при котором $\varphi\,[\mathfrak{b},\ x]$ имеет порядок b для всех x, функция ${}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda x\varphi\,[\mathfrak{b},\ x]$ имеет порядок e и (ввиду (10.3)) при каждом x выполняется

$$(10.3\text{a})\qquad {}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}\Lambda x\varphi\,[\mathfrak{b},\ x]\}\,[x] =_{\mathrm{b}} \varphi\,[\mathfrak{b},\ x].$$

Обыкновенно рассматриваемые $\varphi\,[\mathfrak{b},\ x]$ будут специально рекурсивными со значениями порядка b для всех $\mathfrak{b}$, x ($\mathfrak{b}$ имеет надлежащие порядки), так что вышесказанное будет приложимо, как только члены $\mathfrak{b}$ будут иметь надлежащие порядки.

Мы определяем ${}^{1}\{{}^{2}\varepsilon\} = \lambda s\,{}^{2}\varepsilon\,(\lambda ts)$ $(= \chi\,[{}^{2}\varepsilon]$ с некоторой специально рекурсивной $\chi)$. Для частично рекурсивной функции $\varphi\,[\mathfrak{b}]$ мы пишем ${}^{2}\Lambda\varphi\,[\mathfrak{b}] = \Lambda^{1}\alpha\varphi\,(\mathfrak{b},\ {}^{1}\alpha\,(0))$. Тогда для $\mathfrak{b}$, при которых $\varphi\,[\mathfrak{b}]$ везде определена, ${}^{2}\Lambda\varphi\,[\mathfrak{b}]$ — функция порядка 2 и (ввиду (10.2)) имеет место

$$(10.3\text{b})\qquad {}^{1}\{{}^{2}\Lambda\varphi\,[\mathfrak{b}]\} = \varphi\,[\mathfrak{b}].$$

Обыкновенно наша $\varphi\,[\mathfrak{b}]$ будет специально рекурсивной, так что заключение будет приложимо, как только $\mathfrak{b}$ будет иметь надлежащие порядки.

Равенства (8.1c) — (8.3c) (§ 8) при $k + l = 2$ также имеют аналоги; однако мы будем использовать только ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}\,[{}^{\mathrm{a}_0}\varrho_0,\ {}^{\mathrm{a}_1}\varrho_1]$ как сокращение для ${}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{e}}\varepsilon\}\,[\langle{}^{\mathrm{a}_0}\varrho_0,\ {}^{\mathrm{a}_1}\varrho_1\rangle]$.

10.5. Теперь мы припишем каждой формуле E некоторый порядок e ('порядок E'). Одновременно для любого списка переменных Ψ, содержащего все переменные, имеющие свободные вхождения в Е, мы определим, при каких обстоятельствах функция ${}^e\varepsilon$ порядка е 'специально реализует' формулу Е при данном распределении Ψ чисел и функций как значений (переменных из) Ψ или, короче, при каких обстоятельствах ${}^e\varepsilon$'s — реализует-Ψ' Е (только функция ${}^e\varepsilon$ порядка е, равного порядку Е, может s-реализовать-Ψ Е).

1. Элементарная формула Р является формулой *порядка* 1. ${}^1\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ Р, если Р истинна-Ψ.

2. A & B является формулой *порядка* е = (а, b), где а — *порядок* А и b — *порядок* В. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ А & В, если $({}^e\varepsilon)_0$ s-*реализует*-Ψ А и $({}^e\varepsilon)_1$ s-*реализует*-Ψ В.

3. Формула $A \vee B$ имеет *порядок* е = (1, (а, b)), где а — *порядок* А и b — *порядок* В. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ $A \vee B$, если $({}^e\varepsilon\,(0))_0 = 0$ и $({}^e\varepsilon)_{1,0}$ s-*реализует*-Ψ А или $({}^e\varepsilon\,(0))_0 \neq 0$ и $({}^e\varepsilon)_{1,1}$ s-*реализует*-Ψ В.

4. Формула $A \supset B$ имеет *порядок* е = а * b, где а — *порядок* А и b — *порядок* В. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ $A \supset B$, если для любой ${}^a\alpha$, s-*реализующей*-Ψ А, ${}^b\{{}^e\varepsilon\}\,[{}^a\alpha]$ s-*реализует*-Ψ В.

5. $\neg A$ имеет *порядок* е = а * 1, где а — *порядок* А. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ $\neg A$, если при любой ${}^a\alpha$ неверно, что ${}^a\alpha$ s-*реализует*-Ψ А. (Эквивалентно, ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ $\neg A$, если ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ формулу $A \supset 1 = 0$ согласно случаю 4.)

6. $\forall x A$ является формулой *порядка* е = 1 * а, где а — *порядок* А. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ $\forall x A$, если при каждом x ${}^a\{{}^e\varepsilon\}\,[x]$ s-*реализует*-Ψ, x формулу А.

7. Формула $\exists x A$ имеет *порядок* е = (1, а), где а — *порядок* А. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ $\exists x A$, если $({}^e\varepsilon)_1$ s-*реализует*-Ψ, $({}^e\varepsilon\,(0))_0$ формулу А.

8. Формула $\forall\alpha A$ имеет *порядок* е = 1 * а, где а — *порядок* А. Функция ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ формулу $\forall\alpha A$, если при каждой α ${}^a\{{}^e\varepsilon\}\,[\alpha]$ s-*реализует*-Ψ, α формулу А.

9. Формула $\exists\alpha A$ имеет *порядок* е = (2, а), где а — *порядок* А. ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ формулу $\exists\alpha A$, если $({}^e\varepsilon)_1$ s-*реализует*-Ψ, ${}^1\{({}^e\varepsilon)_0\}$ формулу А.

Л е м м а 10.4. *Пусть* Ψ_1 *—список тех из переменных* Ψ, *которые имеют свободные вхождения в* Е, *и пусть* Ψ_1 *— список соответствующих им чисел и функций из* Ψ. *Тогда* ${}^e\varepsilon$ s-*реализует*-Ψ_1 *формулу* Е *в том и только в том случае, когда* ${}^e\varepsilon$ s-*реализует* Ψ Е.

Л е м м а 10.5. *Если* ${}^e\varepsilon_1$ s-*реализует*-Ψ Е *и* ${}^e\varepsilon_1 = {}_e{}^e\varepsilon_2$, *то* ${}^e\varepsilon_2$ s-*реализует*-Ψ Е.

Д о к а з а т е л ь с т в о индукцией с использованием леммы 10.2 в случаях 4, 6, 8.—

Мы говорим, что замкнутая формула Е s-*реализуема*. если некоторая общерекурсивная функция ${}^e\varepsilon$ s-реализует Е. Открытая формула называется s-*реализуемой*, если этим свойством обладает ее замыкание (п е р в о е о п р е д е л е н и е). Эквивалентно (доказательство следует ниже). Е является s-*реализуемой*, если существует общерекурсивная функция φ (общерекурсивная s-*реализующая функция для* Е *относительно* Ψ) такая, что для каждого Ψ функция $\varphi\,[\Psi]$ s-реализует-Ψ формулу Е (в т о р о е о п р е д е л е н и е). Это понятие s-реализуемости так же, как и выше (ср. п. 8.7), не зависит от выбора списка Ψ.

Чтобы проиллюстрировать эквивалентность приведенных двух определений в случае открытой формулы Е, рассмотрим, например, формулу Е с замыканием $\forall\alpha\forall x E$. Пусть е, f, g — соответственно порядки формул Е, $\forall x E$, $\forall\alpha\forall x E$ (f = 1 * е, g = 1 * f).

Предположим сначала, что φ — общерекурсивная функция и что (1) при любых α и x $\varphi\,[\alpha, x]$ (имеет порядок е и) s-реализует-α, x Е. Ввиду леммы 10.3 ${}^g\Lambda\alpha{}^f\Lambda x\varphi\,[\alpha, x]$ есть примитивно рекурсивная функция ${}^g\alpha$, которая, как мы сейчас покажем, s-реализует $\forall\alpha\forall x E$. Согласно разделу 8 определения нужно показать, что при каждой α функция ${}^f\{{}^g\alpha\}\,[\alpha]$ s-реализует-α $\forall x E$. Рассмотрим произвольную α. Ввиду (10.3) имеет место ${}^f\{{}^g\alpha\}\,[\alpha] =_f {}^f\Lambda x\varphi\,[\alpha, x]$, поэтому согласно лемме 10.5 достаточно показать, что ${}^f\Lambda x\varphi\,[\alpha, x]$ s-реализует-α $\forall x E$, т. е. по разделу 6 определения, что при каждом x ${}^e\{{}^f\Lambda x\varphi\,[\alpha, x]\}\,[x]$ s-реализует-α, x Е. Это следует из (1) по лемме 10.5, поскольку ввиду (10.3а) имеет место е $\{{}^f\Lambda x\varphi\,[\alpha, x]\}\,[x] = {}_e\varphi\,[\alpha, x]$.

Обратно, если ${}^g\varepsilon$ является общерекурсивной функцией, s-реализующей $\forall\alpha\forall x E$, то ввиду разделов 8 и 6 определения s-реализуемости $\lambda\alpha x^e\,\{{}^f\{{}^g\varepsilon\}\,[\alpha]\}\,[x]$ есть общерекурсивная s-реализующая функция для Е относительно α, x.

/ *T*, -Θ и *C* / модификации s-реализуемости (например, при Θ, $T \subseteq C$ свойство быть s-*реализуемой*-Θ/T формулой) и отношения «данная функция *C*/s-*реализует*-Ψ данную формулу» могут быть сформулированы так же, как и раньше (см. пп. 8.5, 8.7, 9.3).

10.6. Л е м м а 10.6. *Лемма 8.3 остается в силе при замене «реализовать-» на «s-реализовать-».*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случаи 2 и 7 трактуются в точности так, как и раньше.

С л у ч а и 1 и 5: элементарная формула или $\neg$A. Берем $^e0$ (конец п. 10.2), где e — порядок E.

С л у ч а й 3: A $\vee$ B. $\langle(\chi[\Theta](0))_0, \langle(\chi[\Theta])_{1,0\,A}, (\chi[\Theta])_{1,1B}\rangle\rangle$.

С л у ч а й 4: A $\supset$ B. $^e\Lambda^a\alpha\alpha^b\{\chi[\Theta]\}[^a\alpha]$, где a, b, e — порядки A, B, A $\supset$ B.

Изменения, требуемые при рассмотрении случаев 6, 8 и 9, аналогичны.

10.7. Л е м м а 10.7. *Для каждой формулы* E *порядка* e, *содержащей свободно только переменные из* Ψ *и не содержащей ни* $\vee$, *ни* $\exists$, *существует примитивно рекурсивная функция* $^e\varepsilon_E$ *порядка* e *такая, что при любом* Ψ:

(i) *если* $(E^e\varepsilon)$ [$^e\varepsilon$ *s-реализует-*Ψ E], *то* E *истинна-*Ψ;

(ii) *если* E *истинна-*Ψ, *то* $^e\varepsilon_E$ *s-реализует-*Ψ *формулу* E.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией. В соответствии с тем, что E имеет одну из форм P (элементарная формула), A & B, A $\supset$ B, $\neg$A, $\forall$xA или $\forall\alpha$A, в качестве $^e\varepsilon_E$ берем $\lambda t0$, $\langle{}^a\varepsilon_A, {}^b\varepsilon_B\rangle$, $^e\Lambda^a\alpha^b\varepsilon_B$, $^e0$, $^e\Lambda x^a\varepsilon_A$ и $^e\Lambda\alpha^a\varepsilon_A$, где a и b — порядки A и B. — Ср. замечание 11.9 (ниже).

§ 11. Специальная реализуемость и выводимость в интуиционистской формальной системе. 11.1. Л е м м ы 11.1, 11.2. *Леммы* 9.1 *и* 9.2 *остаются в силе, если в них вместо «*ε *реализует» читать «*$^e\varepsilon$ *s-реализует».*

Т е о р е м а 11.3. (a) *Если в интуиционистской формальной системе анализа* $\Gamma \vdash$ E *и формулы из* Γ *s-реализуемы, то* E *s-реализуема.* (b) *Аналогично, с заменой «s-реализуема» на «s-реализуема/T».*

(c), (d). *Утверждения* (c) *и* (d) *теоремы* 9.3 *остаются в силе, если вместо «реализуема» читать «s-реализуема».*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (Ср. с доказательством теоремы 9.3.)

(a) Мы будем подразумевать, что A (A(x), A (a), A(α, β)), B, C, R (a) (когда они встречаются) имеют соответственно порядки a, b, c, r. Элементарные подформулы имеют порядок 1. Порядки прочих подформул указываются верхними левыми индексами у знаков формальных операторов (BM, стр. 70).

1a. $A^d \supset (B^c \supset A)$ s-реализуется-Ψ посредством $^d\Lambda^a\alpha^c\Lambda^b\beta^a\alpha$. Действительно, эта функция имеет, ввиду леммы 10.3, требуемый порядок d = a $*$ c, где c = b $*$ a. Предположим, что (1) $^a\alpha$ s-реализует-Ψ формулу A. Согласно разделу 4 в п. 10.5 мы должны заключить из (1), что $^c\{^d\Lambda^a\alpha^c\Lambda^b\beta^a\alpha\}[^a\alpha]$ s-реализует-Ψ формулу B $\supset$ A. Однако по (10.3) имеет место $^c\{^d\Lambda^a\alpha^c\Lambda^b\beta^a\alpha\}[^a\alpha] =_c {}^c\Lambda^b\beta^a\alpha$. Поэтому, ввиду леммы 10.5, будет достаточно вывести из (1), что $^c\Lambda^b\beta^a\alpha$ s-реализует-Ψ B $\supset$ A. По лемме 10.3 $^c\Lambda^b\beta^a\alpha$ имеет требуемый порядок c = b $*$ a. Предположим, что (2) $^b\beta$ s-реализует-Ψ B. Мы должны установить, исходя из (1) и (2), что $^a\{^c\Lambda^b\beta^a\alpha\}[^b\beta]$ s-реализует-Ψ A. По (10.3) $^a\{^c\Lambda^b\beta^a\alpha\}[^b\beta] =_a {}^a\alpha$. Таким образом, требуемое следует из (1) по лемме 10.5.

1b, 7, 3, 4a, 4b, 10N, 10F, 11F, 11N трактуются так же как и раньше, с добавлением префикса s- и индексов порядка и с использованием леммы 10.5.

5a. $A^d \supset A^c \vee B$. $^d\Lambda^a\alpha\,\langle 0, \langle{}^a\alpha, {}^b0\rangle\rangle$ (конец п. 10.2).

5b. $B^d \supset A^c \vee B$. $^d\Lambda^b\beta\,\langle 1, \langle{}^a0, {}^b\beta\rangle\rangle$.

6. $(A^d \supset C)^i \supset ((B^e \supset C)^h \supset (A^f \vee B^g \supset C))$. $^i\Lambda^d\pi^h\Lambda^e\varrho^g\Lambda$ $^f\sigma\lambda t\,\overline{sg}\,((^f\sigma((0))_0)\cdot(^c\{^d\pi\}[(^f\sigma)_{1,0}])(t) + sg((^f\sigma(0))_0)\cdot(^c\{^e\varrho\}[(^f\sigma)_{1,1}])(t)$.

8^I. $^c\neg A^e \supset (A^d \supset B)$. $^e\Lambda^c\pi^d0$.

13. $A(0)^d \,\&\, ^c\forall x(A(x)^b \supset A(x'))^e \supset A(x)$. $^e_a\Lambda^d\alpha\varrho[x, {}^d\alpha]$, где ϱ определяется посредством

$$\varrho[0, {}^d\alpha] = (^d\alpha)_0,$$

$$\varrho[x', {}^d\alpha] = {}^a\{^b\{(^d\alpha)_1\}[x]\}[\varrho[x, {}^d\alpha]].$$

Это при использовании записи $\varrho[x, {}^d\alpha] = \lambda t\varrho(x, {}^d\alpha, t)$ примет вид

$$\varrho(0, {}^d\alpha, t) = \psi(^d\alpha, t),$$

$$\varrho(x', {}^d\alpha, t) \simeq \chi(x, {}^d\alpha, \lambda t\varrho(x, {}^d\alpha, t), t),$$

где ψ примитивно рекурсивна, χ частично рекурсивна и для $^d\alpha$, $^a\beta$ означенных порядков $\lambda t\psi(^d\alpha, t)$ и $\lambda t\chi(x, {}^d\alpha, {}^d\beta, t)$ являются (везде определенными) функциями порядка a. Таким образом, индукцией по x показывается, что для $^d\alpha$ означенного порядка $\lambda t\varrho(x, {}^d\alpha, t)$ имеет порядок a. То, что $\varrho(x, {}^d\alpha, t)$ частично, а следовательно, и специально рекурсивна, усматривается так же, как и раньше.

14, 17, $^x1.1$, 16, элементарные аксиомы, $^x2.1$ трактуются так же, как и раньше. 15: $^{1*1}0$.

П р а в и л а в ы в о д а. 2. A, A $\supset$ B/B. Используя обозначения п. 10.5, выберем список Ψ, включающий все переменные, входящие свободно в A $\supset$ B. По инд. предп. существуют общерекурсивные функции α и ψ такие, что для каждого Ψ $\alpha[\Psi]$ s-реализует-Ψ A и $\psi[\Psi]$ s-реализует-Ψ A $\supset$ B. Пусть $\varphi[\Psi] = {}^b\{\psi[\Psi]\}[\alpha[\Psi]]$. Для каждого Ψ $\alpha[\Psi]$ имеет порядок a, а $\psi[\Psi]$ имеет порядок e = a * b, так что ${}^b\{\psi[\Psi]\}[\alpha[\Psi]]$ является (везде определенной) функцией порядка b. Таким образом, функция $\varphi[\Psi]$ ($= \lambda s\varphi[\Psi, s]$) общерекурсивна. Для каждого Ψ $\varphi[\Psi]$ s-реализует-Ψ B.

9N, 9F, 12F, 12N рассматриваются так же, как и прежде.

С х е м а а к с и о м $^x26.3$c. ${}^f\forall\alpha^e\exists x[R(\bar\alpha(x))^d \,\&\, {}^c\forall y(R(\bar\alpha(y))^b \supset x=y)]^j \,\&\, {}^i\forall a[\mathrm{Seq}(a)^g \,\&\, R(a)^h \supset A(a)]^p \,\&\, {}^n\forall a[\mathrm{Seq}(a)^l \,\&\, {}^k\forall s A(a*2^{s+1})^m \supset A(a)]^q \supset A(1)$.

Мы продвигаемся так же, как и прежде (см. доказательство теоремы 9.3), вплоть до (8), добавляя теперь префикс s- и верхние индексы порядков. Сверх того, мы теперь замечаем, что при ${}^p\pi$ порядка p $R({}^p\pi, a)$ и $R_1({}^p\pi, a)$ *везде* определены независимо от того, верно или нет, что ${}^p\pi$ s-реализует-Ψ антецедент. Далее, определение $\eta({}^p\pi, a, u)$ для $a \in S_1^{p\pi}$ совпадает с некоторой рекурсией вида, соответствующего индуктивному определению $S_1^{p\pi}$ (ср. ВМ, стр. 233); назовем ее *бар-рекурсией*. С помощью соответствующей формы доказательства (ВМ, стр. 232) устанавливается, что всегда: (9a) $a \in S_1^{p\pi} \to \{\eta[{}^p\pi, a]$ (везде определена и) имеет порядок a$\}$. Однако, поскольку доказательство (8) использует допущение, что ${}^p\pi$ реализует антецедент, нам неизвестно, что $\eta[{}^p\pi, 1]$ всегда имеет порядок a, а это необходимо нам, чтобы завершить доказательство так же, как это делалось раньше.

Ниже упомянутое допущение не делается за исключением явно указанных случаев.

Мы определяем второй специально рекурсивный предикат $R_2({}^p\pi, a)$ следующим образом:

$$R_2({}^p\pi, a) \simeq [a = \bar\alpha_1(x) \text{ для } \alpha_1 = \lambda t(a)_t \dot- 1, \quad x \geqslant ({}^e\{({}^p\pi)_{0,0}\}[\alpha_1](0))_0].$$

Очевидно, **(10)** $R_1({}^p\pi, a) \to R_2({}^p\pi, a)$.

Покажем теперь, что имеет место **(11)** $(\alpha)(Ex)R_2({}^p\pi, \bar\alpha(x))$. Рассмотрим произвольную α. Пусть $x_0 = ({}^e\{({}^p\pi)_{0,0}\}[\alpha](0))_0$. При фиксированной ${}^p\pi$ порядка p, поскольку $\lambda\alpha x_0$ частично рекурсивна относительно ${}^p\pi$, вычисление x_0 использует только первые y_0 значений α при некотором y_0 (ср. ВМ, стр. 294 и 260). Положим $x = \max(x_0, y_0)$. Поскольку $x \geqslant y_0$, для $\alpha_1 = \lambda t(\bar\alpha(x))_t \dot- 1$ имеем $x_0 = ({}^e\{({}^p\pi)_{0,0}\}[\alpha_1](0))_0$. Теперь имеем $\bar\alpha(x) = \bar\alpha_1(x)$ вместе с $x \geqslant x_0$. Таким образом, получаем $R_2({}^p\pi, \bar\alpha(x))$.

Также имеет место **(12)** $R_2({}^p\pi, \bar\alpha(y)) \,\&\, \bar R_1({}^p\pi, \bar\alpha(y)) \to (Ex)_{x<y}R({}^p\pi, \bar\alpha(x))$. Действительно, полагая $\bar\alpha(y) = \bar\alpha_1(x)$, где $\alpha_1 = \lambda t(\bar\alpha(y))_t \dot- 1$, имеем $x = y > ({}^e\{({}^p\pi)_{0,0}\}[\alpha_1](0))_0 = x_1$. Тогда $\bar\alpha(x_1) = \bar\alpha_1(x_1)$, следовательно, $R({}^p\pi, \bar\alpha(x_1))$.

Пусть $S_2^{p\pi}$ — множество номеров последовательностей, запертых относительно $\lambda aR_2({}^p\pi, a)$.

Аналогично функции $\eta[{}^p\pi, a]$ найдем частично рекурсивную функцию $\eta_2[{}^p\pi, a] = \lambda u\eta_2({}^p\pi, a, u)$, удовлетворяющую условиям

$$\eta_2({}^p\pi, a, u) \simeq \begin{cases} {}^a0(u), \text{ если } R_2({}^p\pi, a) \,\&\, \bar R_1({}^p\pi, a), \\ \text{так же, как и прежде, если } R_1({}^p\pi, a), \\ \text{так же, как и прежде в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя (10), аналогично (9a) получаем **(13)** $a \in S_2^{p\pi} \to \{\eta_2[{}^p\pi, a]$ имеет порядок a$\}$. Согласно (11) получаем **(14)** $1 \in S_2^{p\pi}$. Следовательно, $\eta_2[{}^p\pi, 1]$ — функция порядка a.

Чтобы показать, что ${}^q\Lambda{}^p\pi\eta_2[{}^p\pi, 1]$ s-реализует-Ψ рассматриваемую аксиому, остается показать, что $\eta_2[{}^p\pi, 1]$ s-реализует-Ψ формулу A (1), когда ${}^p\pi$ s-реализует-Ψ антецедент. Таким образом, при этом допущении, имеющем теперь силу, рассмотрим множество $S^{p\pi}$ номеров последовательностей, гарантируемых, но не начально гарантированных относительно $\lambda aR_1({}^p\pi, a)$. (Ввиду (10), $S^{p\pi} \subseteq S_1^{p\pi} \subseteq S_2^{p\pi}$.) Ввиду (12) и (6), $a \in S^{p\pi} \to \bar R_2({}^p\pi, a) \,\&\, \bar R_1({}^p\pi, a)$. Таким образом, на $S^{p\pi}$ $\eta_2({}^p\pi, a, u)$ удовлетворяет той же бар-рекурсии, что и $\eta({}^p\pi, a, u)$. Следовательно, она является той же самой функцией с точностью до возможных различий в результатах операций посредством ${}^k\Lambda s$ в «остальных» случаях. Следовательно, по тем же соображениям, что и в (7), получаем **(15)**

$a \in S^{\mathrm{p}\pi} \to \{\eta_2[{}^{\mathrm{p}}\pi,\ a]$ s-реализует-Ψ, a формулу A (a)$\}$. Однако, ввиду (8) имеет место **(16)** $1 \in S^{\mathrm{p}\pi}$. Ввиду (15), (16) и леммы 11.1 (a) $\eta_2\,[{}^{\mathrm{p}}\pi,\ 1]$ s-реализует-Ψ A (1).

Схема аксиом ${}^{\mathrm{x}}$27.1. ${}^{\mathrm{c}}\forall\alpha\,{}^{\mathrm{b}}\exists\beta \mathrm{A}(\alpha, \beta)^{\mathrm{q}} \supset$

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{p}}\exists\tau\,{}^{\mathrm{n}}\forall\alpha\,\{{}^{\mathrm{h}}\forall t\,{}^{\mathrm{g}}\exists y\,[\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0^{\mathrm{f}}\ \& \\
&{}^{\mathrm{e}}\forall z\,(\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(z)) > 0^{\mathrm{d}} \supset y = z)]^{\mathrm{m}}\ \& \\
&{}^{\mathrm{l}}\forall\beta\,[{}^{\mathrm{j}}\forall t\,{}^{\mathrm{i}}\exists y\,\tau(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) = \beta(t) + 1^{\mathrm{k}} \supset \mathrm{A}(\alpha, \beta)]\}.
\end{aligned}
$$

Допустим, что ${}^{\mathrm{c}}\pi$ s-реализует-Ψ $\forall\alpha\exists\beta \mathrm{A}(\alpha, \beta)$. Тогда **(1)** при любой α $({}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{c}}\pi\}\,[\alpha])_1$ s-реализует-Ψ, α, β_1 формулу $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$; $\beta_1 = {}^{1}\{({}^{\mathrm{b}}(\{{}^{\mathrm{c}}\pi\}\ [\alpha])_0\}$. Пусть $\tau_1\,[{}^{\mathrm{c}}\pi,\ t] = \lambda s\tau_1({}^{\mathrm{c}}\pi,\ t,\ s) = \Lambda^1\alpha\beta_1(t) = \Lambda^1\alpha\,({}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{c}}\pi\}\,[{}^{1}\alpha])_0\,(\lambda xt)$. Далее по лемме 10.1 для каждого t функция $\tau_1\,[{}^{\mathrm{c}}\pi,\ t]$ имеет порядок 2, поэтому при любой α имеем **(2a)** $(t)\,(E!y)\,\tau_1\,({}^{\mathrm{c}}\pi,\ t,\ \bar{\alpha}(y)) > 0$ и (по (10.2)) $\{\tau_1\,[{}^{\mathrm{c}}\pi,\ t]\}\,(\alpha) = \beta_1(t)$, откуда по (10.1) получаем **(3a)** $(t)\,\tau_1\,({}^{\mathrm{c}}\pi,\ t,\ \bar{\alpha}(y_t)) = \beta_1(t) + 1$, где $y_t = \mu y\tau_1\,({}^{\mathrm{c}}\pi,\ t,\ \bar{\alpha}(y)) > 0$. Пусть $\tau = \lambda s\tau_1\,({}^{\mathrm{c}}\pi,\ (s)_0 \dot{-} 1,\ \prod_{i < \mathrm{lh}(s) \dot{-} 1}\,{}_1 p_i^{s_{i+1}})$. Рассмотрим произвольную функцию α. Согласно (2a), (3a) имеем: (2) $(t)\,(E!y)\,\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$, (3) $(t)\,\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y_t)) = \beta_1(t) + 1$, где $y_t = \mu y\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0$.

Мы продолжаем так же, как и прежде. Таким образом, полагая ${}^{\mathrm{h}}\varrho_0 = {}^{\mathrm{h}}\Lambda t\,\langle \mu y\tau\,(2^{t+1} * \bar{\alpha}(y)) > 0,\ \langle\lambda s0,\ {}^{\mathrm{e}}\Lambda z\,{}^{\mathrm{d}}\Lambda\sigma\lambda s0\rangle\rangle$, ${}^{\mathrm{l}}\varrho_1 = {}^{\mathrm{b}}\Lambda\beta\,{}^{\mathrm{k}}\Lambda^{\mathrm{j}}\Lambda^{\mathrm{i}}\sigma\,({}^{\mathrm{b}}\{{}^{\mathrm{c}}\pi\}\,[\alpha])_1$, получаем, что рассматриваемая аксиома s-реализуется-Ψ посредством ${}^{\mathrm{q}}\Lambda\,{}^{\mathrm{c}}\pi\,\langle{}^{2}\Lambda\tau,\ {}^{\mathrm{n}}\Lambda\alpha\langle{}^{\mathrm{h}}\varrho_0,\ {}^{\mathrm{l}}\varrho_1\rangle\rangle$.

11.2. Следствия 11.4—11.6. *Следствия* 9.4, 9.5 *(с новым доказательством) и* 9.6 *сохраняют свою силу при замене «реализуемости» «s-реализуемостью».*

11.3. Теорема 11.7. (a)[c] *Пусть формула* A (x, y) *выбрана по лемме* 8.5 *так, чтобы нумерически выражать некоторый общерекурсивный предикат $A(x, y)$. Классически формула* $\forall x\,[\neg\forall y\,\neg\,\mathrm{A}(x, y) \supset \exists y \mathrm{A}(x, y)]$ *реализуема.* (b) *Пусть* T (x, y) *есть* $\mathrm{T}_1((x)_0, (x_1), y)$, *где формула* $T_1(z, x, y)$ *выбрана согласно (методу из доказательства) лемме* 8.5 *так, чтобы нумерически выражать* $T_1(z, x, y)$ *(и так, что* x *свободна для* z *и* z *свободна для* y*). Тогда формула* $\forall x\,[\neg\,\forall y\,\neg\,\mathrm{T}(x, y) \supset \exists y \mathrm{T}(x, y)]$ *не s-реализуема.* Согласно #19 и леммам 5.2 и 4.2 T (x, y) нумерически выражает $T_1((x)_0,\ (x)_1,\ y)$.

(c) ${}^{\mathrm{C}}$*Пусть* $\mathrm{A}_0(x, y)$ *и* $\mathrm{A}_1(x, y)$ *выбраны по лемме* 8.5 *так, чтобы нумерически выражать соответственно общерекурсивные предикаты $A_0(x, y)$ и $A_1(x, y)$. Классически формула* $\forall x\,[\neg\,(\forall y \mathrm{A}_0(x, y)\ \&\ \forall y \mathrm{A}_1(x, y)) \supset \neg\,\forall y \mathrm{A}_0(x, y) \vee \neg\,\forall y \mathrm{A}_1(x, y)]$ *реализуема.*

(d) *Пусть* $\mathrm{W}_0(x, y)$ *есть* $\mathrm{T}_1((x)_1,\ x,\ y)\ \&\ \forall z_{z \leqslant y}\,\neg\mathrm{T}_1((x)_0,\ x,\ z)$, а $\mathrm{W}_1(x, y)$ *есть* $\mathrm{T}_1((x)_0,\ x,\ y)\ \&\ \forall z_{z \leqslant y}\,\neg\mathrm{T}_1((x)_1,\ x,\ z)$, *где формула* $z \leqslant y$ *элементарна. Тогда формула* $\forall x\,[\neg\,(\forall y\,\neg\,\mathrm{W}_0(x, y)\ \&\ \forall y\,\neg\,\mathrm{W}_1(x, y)) \supset \neg\,\forall y\,\neg\mathrm{W}_0(x, y) \vee \neg\forall y\,\neg\,\mathrm{W}_1(x, y)]$ *не s-реализуема.* Согласно ВМ, стр. 182, (C) и (E), $\mathrm{W}_0(x, y)$ и $\mathrm{W}_1(x, y)$ нумерически выражают соответственно $W_0(x, y)$ и $W_1(x, y)$ из ВМ, стр. 274.

Доказательство. (a) Рассматриваемая формула реализуется ввиду леммы 8.4a посредством функции $\Lambda x\Lambda a\,\langle\mu yA(x, y),\ \varepsilon_{\mathrm{A}(x, y)}\rangle$. Действительно, рассмотрим произвольное x. Предположим, что α реализует-x $\neg\forall y\,\neg\mathrm{A}(x, y)$. Тогда по лемме 8.4a (i) получаем $(\bar{y})\,\bar{A}(x, y)$, откуда классически следует $(Ey)\,A(x, y)$. Таким образом, формула A (x, y) истинна-x, $\mu yA(x, y)$, следовательно, по лемме 8.4a (ii) $\varepsilon_{\mathrm{A}(x, y)}$ реализует-x, $\mu yA(x, y)$ формулу A (x, y). Поэтому $\langle\mu yA(x, y),\ \varepsilon_{\mathrm{A}(x, y)}\rangle$ реализует-x формулу $\exists y \mathrm{A}(x, y)$.

(b) Предположим, что общерекурсивная функция ${}^{\mathrm{f}}\varepsilon$ s-реализует формулу ${}^{\mathrm{f}}\forall x\,[{}^{\mathrm{c}}\neg\,{}^{\mathrm{b}}\forall y^{\mathrm{a}}\,\neg\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{T}(x, y)^{\mathrm{e}} \supset {}^{\mathrm{b}}\exists y\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{T}(x, y)]$. Тогда для всех x выполняется **(1)** ${}^{\mathrm{e}}\{{}^{\mathrm{f}}\varepsilon\}\,[x]$ s-реализует-x формулу $\neg\forall y\,\neg\,\mathrm{T}(x, y) \supset \exists y T(x, y)$. По лемме 10.7 (ii) (и ее доказательству) получаем **(2)** $(\bar{y})\,\bar{T}_1((x)_0, (x)_1, y) \to \{{}^{\mathrm{c}}0$ s-реализует-x $\neg\forall y\,\neg\,\mathrm{T}(x, y)\}$. Теперь, если $(Ey)\,T_1((x)_0,\ (x)_1,\ y)$, то $(\bar{y})\,\bar{T}_1((x)_0,\ (x)_1,\ y)$, следовательно, по (2) и (1) ${}^{\mathrm{d}}\{{}^{\mathrm{e}}\{{}^{\mathrm{f}}\varepsilon\}\,[x]\}\,[{}^{\mathrm{c}}0]$ s-реализует-x формулу $\exists y\mathrm{T}(x, y)$, поэтому $({}^{\mathrm{d}}\{{}^{\mathrm{e}}\{{}^{\mathrm{f}}\varepsilon\}\,[x]\}\,[{}^{\mathrm{c}}0])_1$ s-реализует-x, $v(x)$ формулу T (x, y) при $v(x) = ({}^{\mathrm{d}}\{{}^{\mathrm{e}}\{{}^{\mathrm{f}}\varepsilon\}\,[x]\}\,[{}^{\mathrm{c}}0]\,(0))_0$.

Отсюда по лемме 10.7 (i) имеет место $T_1((x)_0,\ (x)_1,\ v(x))$. Обратное усматривается непосредственно. Таким образом, имеем **(3)** $(Ey)\,T_1((x)_0,\ (x)_1,\ y) \equiv T_1((x)_0,\ (x)_1,\ v(x))$, где $v(x)$ — только что определенная общерекурсивная функция. Подставляя $\langle x,\ x\rangle$ вместо x, получаем **(4)** $(Ey)\,T_1(x,\ x,\ y) \equiv T_1(x,\ x,\ v(\langle x,\ x\rangle))$ в противоречие с тем, что предикат $(Ey)\,T_1(x,\ x,\ y)$ не является общерекурсивным (ВМ, стр. 252).

(c) $\Lambda x \Lambda a \langle \varrho(x), \lambda t 0\rangle$, где

$$\varrho(x) \simeq \begin{cases} 0, \text{ если } \overline{A}_0(x, \mu y[\overline{A}_0(x, y) \vee \overline{A}_1(x, y)]), \\ 1, \text{ если } \overline{A}_0(x, \mu y[\overline{A}_0(x, y) \vee \overline{A}_1(x, y)]). \end{cases}$$

(d) Предположим, что общерекурсивная функция ${}^{h}\varepsilon$ s-реализует формулу ${}^{h}\forall x\, [{}^{d}\neg\, ({}^{b}\forall y^{a} \neg^{w} W_0(x, y)\ {}^{c}\&\ {}^{b}\forall y^{a} \neg^{w} W_1(x, y))^{g} \supset^{e} \neg^{b}\forall y^{a} \neg^{w} W_0(x, y)^{f} \vee^{e} \neg^{b}\forall y^{a} \neg^{w} W_1(x, y)]$. Тогда при всяком x имеет место (1) ${}^{g}\{{}^{h}\varepsilon\}[x]$ s-реализует-x $\neg(\forall y \neg W_0(x, y) \& \forall y \neg W_1(x, y)) \supset \neg \forall y \neg W_0(x, y) \vee \neg \forall y \neg W_1(x, y)$. По лемме 10.7(ii) имеем (2) $(y)\, \overline{W}_0(x, y) \& (y)\, \overline{W}_1(x, y) \to \{{}^{d}0$ s-реализует $\neg(\forall y \neg W_0(x, y) \& \forall y \neg W_1(x, y))\}$. Предположим (A) $(\exists y)\, W_0(x, y)$. Тогда $\overline{(y)}\, \overline{W}_0(x, y)$, следовательно, (B) $(y)\, \overline{W}_0(x, y) \& (y)\, \overline{W}_1(x, y)$. Кроме того, по BM, (формула (51), на стр. 274) имеем $(\overline{Ey})\, W_1(x, y)$, следовательно, (C) $(y)\, \overline{W}_1(x, y)$. Ввиду (B), (2) и (1) получаем (D) ${}^{f}\{{}^{g}\{{}^{h}\varepsilon\}[x]\}[{}^{d}0]$ s-реализует-x формулу $\neg \forall y \neg W_0(x, y) \vee \neg \forall y \neg W_1(x, y)$. Положим $v(x) = ({}^{f}\{{}^{g}\{{}^{h}\varepsilon\}[x]\}[{}^{d}0](0))_0$. Теперь (E) $v(x) = 0$, поскольку иначе $({}^{f}\{{}^{g}\{{}^{h}\varepsilon\}[x]\}[{}^{d}0])_{1,1}$ должна была бы s-реализовать-x $\neg \forall y \neg W_1(x, y)$ и и по лемме 10.7 (i) имело бы место $\overline{(y)}\, \overline{W}_1(x, y)$, что противоречит (C). Суммируя (начиная с (A)) сказанное, получаем (3) $(Ey)\, W_0(x, y) \to v(x) = 0$. Аналогично, можно получить (4) $(Ey)\, W_1(x, y) \to v(x) \neq 0$. Таким образом, $D_2 = \hat{x}\, [v(x) = 0]$ и $D_3 = \hat{x}\, [v(x) \neq 0] = \overline{D_2}$ являются дизъюнктными общерекурсивными (и тем более рекурсивно перечислимыми) множествами, соответственно содержащими множества $C_0 = \hat{x}\, (Ey)\, W_0(x, y)$ и $C_1 = \hat{x}\, (Ey)\, W_1(x, y)$, объединение которых есть множество всех натуральных чисел. Это противоречит результатам BM, стр. 276—277.

Замечание 11.8. Рассуждения в доказательстве (a) недостаточны в случае s-реализуемости, поскольку функция $\langle \mu y A(x, y), \varepsilon_{A(x, y)}\rangle$, вообще говоря, не везде определена; например, это так, если $A(x, y) \equiv T_1((x)_0, (x)_1, y)$. Таким образом, ${}^{f}\Lambda x^{e} \Lambda^{c} a\, \langle \mu y A(x, y), {}^{a}\varepsilon_{A(x, y)}\rangle$, вообще говоря, не является функцией порядка f. Рассуждения в доказательстве (b) недостаточны в случае реализуемости, поскольку в этом случае $v(x) = (\{\{\varepsilon\}[x]\}[\lambda x 0](0))_0$ — не общерекурсивная, а частично рекурсивная функция.

Замечание 11.9[c]. Теорема 11.7(a) для примитивно рекурсивного $A(x, y)$ получается непосредственным классическим применением леммы 8.4 b (ii), если обозначения и постулаты группы D расширить (в рамках схемы, приведенной в п. 5.1) так, чтобы они давали элементарную формулу A (x, y), выражающую $A(x, y)$. Ввиду этого лемма 8.4b не может сохранять свою силу в случае s-реализуемости независимо от того, как далеко мы расширили постулаты группы D. В частности, эта лемма становится неверной, если расширить группу D вплоть до появления представляющей функции предиката $T_1(z, x, y)$, поскольку в противном случае только что указанное применение этой леммы привело бы к противоречию с теоремой 11.7(b).

Следствие 11.10[C]. *Следующие классически доказуемые формулы формально неразрешимы в интуиционистской формальной системе анализа:*

(a) $\forall z \forall x\, [\neg \forall y \neg T_1(z, x, y) \supset$
$\exists y T_1(z, x, y)]$ (принцип Маркова M_1).

(b) $\forall x\, [\neg(\forall y \neg W_0(x, y) \& \forall y \neg W_1(x, y)) \supset$
$\neg \forall y \neg W_0(x, y) \vee \neg \forall y \neg W_1(x, y)]$

(некоторый пример классического закона де Моргана).

(c) $\forall x\, [\exists y T_1((x)_0, (x)_1, y) \vee \neg \exists y T_1((x)_0, (x)_1, y)]$ (закон исключенного третьего с одним квантором).

(Мы покажем интуиционистски, что каждая из этих трех формул недоказуема. Недоказуемость их отрицаний будет установлена классически.)

Доказательство. (a) Ввиду *25.3 M_1 эквивалентен $\forall x\, [\neg \forall y \neg T(x, y) \supset \exists y T(x, y)]$. Последняя формула, однако, недоказуема по разделу (b) теоремы 11.7 и теореме 11.3 (a). Далее согласно теореме 11.7(a), следствию 9.4 и теореме 9.3(a) формула $\neg \forall x\, [\neg \forall y \neg T(x, y) \supset \exists y T(x, y)]$ недоказуема. (c) Доказывается аналогично.

Заметим, что имеет место (c) $\vdash$ (a). Кроме того, нетрудно усмотреть, что (c) $\vdash$ (b). Вопрос о доказуемости двойных отрицаний рассмотренных формул, по-видимому, остается открытым. По результатам, относящимся к 1945-реализуемости (п. 8.6, абзац 6; BM, стр. 450—451) $\neg\neg$ (c) недоказуемо в интуиционистской арифметике, даже если включить в нее (как угодно далеко продвинутые) постулаты группы D, содержащие только числовые переменные.

ИНТУИЦИОНИСТСКИЙ КОНТИНУУМ

Ричард Ю. Весли[1]

§ 12. Введение. Мы намереваемся развернуть интуиционистскую теорию континуума в формальной системе главы I. Наши намерения заключаются, во-первых, в исследовании пригодности этой системы для такого изложения и, во-вторых, в достижении некоторого описания упомянутой теории. Как заметил Бет (**1959**, стр. 422), «*теория континуума* занимает центральное место в интуиционистской математике». Любая формальная система интуиционистского анализа должна обеспечивать средства для развертывания этой теории по меньшей мере вплоть до хорошо известной теоремы о равномерной непрерывности (§ 15 ниже). Такое развертывание может прояснить для некоторых читателей истоки интуиционизма, которые обычно (за исключением Гейтинга 1930, 1930а) рассматривались неформально.

Из многих источников (Брауэр **1918—1919**, **1924**, **1927**, **1928а** и т. д., Гейтинг **1952—1953**, **1956**) мы опираемся в основном (но не всецело) на две работы. В §§ 14—15 мы ближе всего следуем изложению Гейтинга **1956**. В § 16 мы формально доказываем некоторые менее известные теоремы Брауэра **1928а** (не представленные у Гейтинга **1952—1953** или **1956**).

Хотя главными предметами этой главы являются основания анализа и прояснение существующей интуиционистской теории континуума, мы все же сделали некоторые добавления к этой теории. В качестве одной детали, по-видимому, появляющейся здесь впервые, мы доказываем (*R 14.11 ниже) эквивалентность понятия острого различия (в наших обозначениях $\neq_s$), введенного Брауэром в работе **1928а**, и его же понятия отделенности $\#$, введенного в работе

[1] Эта глава является пересмотренной версией диссертации на степень доктора философии, написанной под руководством профессора С. К. Клини и принятой Висконсинским Университетом 28 мая 1962 г.

1918—1919, II, и обычно используемого в интуиционистских сочинениях о числовых генераторах (например, в работах Брауэра **1954** и Гейтинга **1956**). Наше доказательство эквивалентности опирается на принцип Брауэра (§ 7 выше).

Мы используем также эквивалентность $\neq_s$ и $\#$ для упрощения предположений в брауэровской формулировке **1928а** свойства свободной связности (*R 14.13 — *R14.14) и (в замечании 16.1) указываем причину, по которой Брауэр не сумел бы установить это свойство вполне так, как он его формулировал.

§ 13. Действительные числовые генераторы и действительные числа. Брауэр изучал в разных статьях различные формулировки континуума. Вообще говоря, он использует следующие два шага. Во-первых, он описывает некоторый частный вид «точек» (**1927**, стр. 60) или «действительных числовых генераторов» (термин Гейтинга **1956**, стр. 25; используется также другая терминология). Последние суть бесконечные последовательности и, например, могут быть бесконечными последовательностями рациональных чисел или двоичных дробей с некоторым условием сходимости (Брауэр **1928а**, стр. 5, Гейтинг **1956**, стр. 25—26), последовательностями вложенных двоичных интервалов с некоторым условием сходимости (Брауэр **1927**, стр. 60, **1949**, стр. 122) или последовательностями выбора рациональных чисел, производящими объекты, аналогичные дедекиндовым сечениям (Брауэр **1924—1927**, II, стр. 467). Во-вторых, он определяет некоторый предикат «равенства» (или «совпадения») над этими бесконечными последовательностями и «точечные ядра» (Брауэр **1927**, стр. 60) или «действительные числа» (Гейтинг **1956**, стр. 49) как классы эквивалентности относительно этого предиката равенства.

В этой форме, как «вид второго порядка» (ср. Гейтинг **1956**, стр. 49—50), континуум кажется неподходящим объектом для изучения в формальной системе. Однако элементы исходного вида точек или действительных числовых генераторов могут изучаться, и соответствующая теория развивается на этой базе. При таком подходе свойства действительных чисел будут проистекать в точности из тех свойств действительных числовых генераторов, которые зависят только от классов эквивалентности относительно предиката равенства (или совпадения), которым принадлежат эти генераторы.

Начиная с этого места, мы используем для действительного числового генератора (генераторов) сокращение д. ч. г.

Из упомянутых выше возможных видов д. ч. г. мы выберем вид сходящихся последовательностей двоичных дробей. Мы могли бы без труда развить предварительно в формальной системе теорию двоичных дробей (или рациональных чисел вообще). Однако мы находим более простым перейти прямо к сходящимся последовательностям. Мы рассматриваем только последовательности вида $\alpha(0)$, $\alpha(1)/2$, $\alpha(2)/2^2$, $\alpha(3)/2^3$, . . ., которые мы изучаем в формальной системе через последовательности $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\alpha(3)$, . . . числителей соответствующих дробей. Условие сходимости для таких последовательностей мы можем записать в виде $(k)\ (Ex)\ (p)\ |\ \alpha(x)/2^x - \alpha(x+p)/2^{x+p}\ | < 1/2^k$, формализированном в правой части *R 0.1. Если считать «$\alpha \in R$» сокращением этой формулы, *R 0.1 выполняется согласно *19 BM. Мы сокращаем $\alpha \in R \ \&\ \beta \in R$ как «$\alpha, \beta \in R$» и т. д. и аналогично поступаем для других употреблений «$\in$» (кроме того, $\neg\, \alpha \in$ сокращается как «$\alpha \notin$»).

$$\text{*R0.1.}\quad \vdash \alpha \in R \sim \forall k \exists x \forall p 2^k\ |\ 2^p\alpha(x) - \alpha(x+p)\ | < 2^{x+p}.$$

Эта формулировка критерия сходимости соответствует определению «последовательности Коши» у Гейтинга **1956** (стр. 25) с тем исключением, что мы используем последовательности двоичных дробей и из соображений удобства концентрируем наше внимание на неотрицательных двоичных дробях.

Условие сходимости Коши обычно записывается немного не так, именно, в нашем контексте $(k)\ (Ex)\ (p)\ (q)\ |\alpha(x+p)/2^{x+p} - \alpha(x+q)/2^{x+q}| < 1/2^k$. Это формализуется правой частью *R0.2, которую мы сокращаем как «$\alpha \in R_1$».

$$\text{*R0.2.}\quad \vdash \alpha \in R_1 \sim \forall k \exists x \forall p \forall q\ 2^k\ |\ 2^q\alpha(x+p) - 2^p\alpha(x+q)\ | < 2^{x+p+q}.$$

Однако эти две формулировки условия сходимости Коши эквивалентны.

$$\text{*R0.3.}\quad \vdash \alpha \in R \sim \alpha \in R_1.$$

Доказательство. I. Допустим $\alpha \in R$ и после $\forall$-удал. и перед $\exists$-удал. допустим (i) $\forall p 2^{k+1}\,|2^p\alpha(x) - \alpha(x+p)| < 2^{x+p}$. Тогда по $\forall$-удал. (ii) $2^{k+1}\,|2^p\alpha(x) - \alpha(x+p)| < 2^{x+p}$ и (iii) $2^{k+1}|2^q\alpha(x) - \alpha(x+q)| < 2^{x+q}$. Далее, $2^{k+1}|\,2^q\alpha(x+p) - 2^p\alpha(x+q)\,| \leqslant 2^{k+1}|\,2^q\alpha(x+p) - 2^{p+q}\alpha(x)\,| + 2^{k+1}|\,2^{p+q}\alpha(x) - 2^p\alpha(x+q)\,|$ [*11.5; *145b вместе с *3.9] $= 2^q2^{k+1}\,|\,2^p\alpha(x) - \alpha(x+p)\,| + 2^p2^{k+1}\,|\,2^q\alpha(x) - \alpha(x+q)\,|$ [*11.9 вместе с *3.3, *11.4] $< 2^q2^{x+p} + 2^p2^{x+q}$ [(ii), (iii), *145a, *144a, *134a] $= 2\cdot 2^{x+p+q}$, следовательно, по *145a (iv) $2^k\,|\,2^q\alpha(x+p) - 2^p\alpha(x+q)\,| < 2^{x+p+q}$ и по $\forall$-, $\exists$-и $\forall$-введ. $\alpha \in R_1$. II. Используем $p = 0$ в $\alpha \in R_1$ и заменяем связанную переменную q на p.

Следуя Гейтингу **1956** (стр. 53), мы рассматриваем также «канонические» д. ч. г. (сокращенно к. д. ч. г.), являющиеся последовательностями уже описанного типа с наперед установленной скоростью сходимости, задаваемой условием $(x)\ |\ \alpha(x)/2^x - \alpha(x')/2^{x'}\ | \leqslant 1/2^{x'}$. Это приводит к формуле в правой части *R 0.4, которую мы сокращаем посредством «$\alpha \in R'$».

$$\text{*R0.4.}\quad \vdash \alpha \in R' \sim \forall x\ |\ 2\alpha(x) - \alpha(x')\ | \leqslant 1.$$

Эквивалентные формулировки даются посредством

$$\begin{aligned}\text{*R0.5a—c.}\quad \vdash\ & |\,2\alpha(x) - \alpha(x')\,| \leqslant 1 \\ &\sim [2\alpha(x) \leqslant \alpha(x') + 1 \ \&\ \alpha(x') \leqslant 2\alpha(x) + 1] \\ &\sim [\alpha(x') + 1 = 2\alpha(x) \vee \alpha(x') = \\ &\qquad 2\alpha(x) \vee \alpha(x') = 2\alpha(x) + 1] \\ &\sim [2\alpha(x) \dot{-} 1 \leqslant \alpha(x') \leqslant 2\alpha(x) + 1].\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим доказываемую формулу посредством $A \sim B \sim C \sim D''$. Ввиду *2 и *16 достаточно доказать (a) $A \sim B$, (b) $B \supset C$, (c) $C \supset D$, (d) $D \supset B$. (a) Согласно *11.15a. (b) B дает 4 случая: $(=, <)$, $(<, <)$, $(<, =)$, $(=, =)$. Но случай $(=, =)$ невозможен, в то время как $(=, <)$, $(<, <)$, $(<, =)$ дают соответственно три случая C (ввиду *138a). (c) Согласно *6.15, $2\alpha(x) \dot{-} 1 \leqslant 2\alpha(x) < 2\alpha(x) + 1$. Ввиду этого D следует из любого из трех случаев C. (d) Допустим D. Тогда $2\alpha(x) \leqslant (2\alpha(x) \dot{-} 1) + 1$ [*8.1, *8.4] $\leqslant \alpha(x') + 1$ [D, *144b]. Следовательно, B.

Соображения, по которым целесообразно рассмотрение двух видов д. ч. г., состоят в том, что подход к теории через R дает некоторые преимущества в арифметике действительных чисел, (ср. замечание 14.1) в то время как подход через R′ позволяет привлечь в п. 14.1 концепцию потока. Эти два подхода приводят к идентичным (в смысле Брауэра **1924—1927**, 1, стр. 245—246) видам действительных чисел, как это мы формально установим, показав, что для каждого элемента одного вида существует равный ему элемент второго. Отображение из R′ в R дается посредством *R0.7; отображение же из R в R′ будет установлено в утверждении *R1.11 п. 14.3 после введения предиката равенства для д. ч. г.

*R.0.6. $\vdash \alpha \in R' \supset \forall p \forall x \mid 2^p \alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^p$.

*R0.7. $\vdash \alpha \in R' \supset \alpha \in R$.

Доказательство. *R0.6. Допустим $\alpha \in R'$. Мы выведем $\forall x \mid 2^p \alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^p$ индукцией по p. Инд. шаг. $\mid 2^{p'} \alpha(x) - \alpha(x+p') \mid \leqslant \mid 2^{p'} \alpha(x) - 2^p \alpha(x') \mid + \mid 2^p \alpha(x') - \alpha(x+p') \mid = 2^p \mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid + 2^p \alpha(x') - \alpha(x'+p) \mid < 2^p + 2^p$ [$\alpha \in R'$, инд. предп.] $= 2^{p'}$.

*R0.7. Допустим $\alpha \in R'$. Тогда $2^k \mid 2^p \alpha(k) - \alpha(k+p) \mid < 2^{k+p}$ [*R0.6]. Согласно $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. $\forall k \exists x \forall p 2^k \mid 2^p \alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^{x+p}$, т. е. $\alpha \in R$.

§ 14. Представление потоком; основные свойства континуума. 14.1. В *R0.8 мы показываем, что д. ч. г. второго типа образуют некоторый поток. Определение «Spr (σ)» и «$\alpha \in \sigma$» см. в п. 6.9.

*R0.8. $\vdash \exists \sigma [\mathrm{Spr}(\sigma) \& \sigma(1) = 0 \& \forall \alpha (\alpha \in \sigma \sim \alpha \in R')]$.

Доказательство. Мы вводим σ по лемме 5.5 (c) (ср. доказательство *26.4a), используя *23.5 [*23.2 вместе с *6.3], чтобы выразить a [σ (b) для b < a] в терминах $\bar{\sigma}(a)$ таким образом, что

$$(A)\quad \forall a \sigma(a) = \begin{cases} 0, \text{ если } a = 1 \vee [\mathrm{Seq}(a) \& \mathrm{lh}(a) = 1] \vee \\ \qquad [\mathrm{Seq}(a) \& \mathrm{lh}(a) > 1 \, \& \\ \qquad \mid 2((a)_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 2} \dot{-} 1) - \\ \qquad ((a)_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1} \dot{-} 1) \mid \leqslant 1 \\ \qquad \& \sigma(\prod_{i < \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1} p_i^{(a)_i}) = 0], \\ 1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Согласно *22.3, *B4 (вместе с *6.7), *22.1, *B6 и *143b (вместе с *3.10, *18.5) получаем

$$\mathrm{Seq}(a) \& \mathrm{lh}(a) > 1 \supset \prod_{i < \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1} p_i^{(a)_i} < a.$$

I. σ (1) = 0 очевидно.

IIa. В формуле Spr (σ) часть $\forall a [\sigma(a) = 0 \supset \mathrm{Seq}(a)]$ очевидна.

IIb. Чтобы вывести $\forall a [\sigma(a) = 0 \supset \exists s \sigma(a * 2^{s+1}) = 0]$, допустим (перед $\supset$- и $\forall$-введ.) σ (a) = 0. Случай 1: a = 1. Тогда $\sigma(a * 2^{0+1}) = \sigma(1 * 2^{0+1}) = \sigma(2^1) = 0$ ввиду *22.5, *22.7, *20.3, (A). По $\exists$-введ. $\exists s \sigma(a * 2^{s+1}) = 0$. Случай 2: $a \neq 1$. Тогда, ввиду (A), $\mathrm{Seq}(a) \& \mathrm{lh}(a) \geqslant 1$. Пусть t — сокращение для $a * 2^{2((a)_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1} \dot{-} 1)+1}$. Используя *22.8 и др., получаем $\mathrm{Seq}(t) \& \mathrm{lh}(a) = \mathrm{lh}(a) + 1 > 1$. Кроме того, $\mid 2((t)_{\mathrm{lh}(t) \dot{-} 2} \dot{-} 1) - ((t)_{\mathrm{lh}(t) \dot{-} 1} \dot{-} 1) \mid = \mid 2((a)_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1} \dot{-} 1) - 2((a)_{\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1} \dot{-} 1) \mid = 0 \leqslant 1$ и $\sigma(\prod_{i < \mathrm{lh}(t) \dot{-} 1} p_i^{(t)_i}) = \sigma(a) = 0$. Таким образом, по (A) σ (t) = 0, следовательно, по $\exists$-введ. $\exists s \sigma(a * 2^{s+1}) = 0$.

IIc. Чтобы вывести $\forall a [\mathrm{Seq}(a) \& \sigma(a) > 0 \supset \forall s \sigma(a * 2^{s+1}) > 0]$, допустим $\mathrm{Seq}(a) \& \sigma(a) > 0$. Согласно (A) $a \neq 1$, следовательно, $\mathrm{lh}(a * 2^{s+1}) > 1$. Таким образом, поскольку $\sigma(\prod_{i < \mathrm{lh}(a * 2^{s+1}) \dot{-} 1} p_i^{(a * 2^{s+1})_i}) = \sigma(a) > 0$, (A) дает $\sigma(a * 2^{s+1}) = 1 > 0$.

IIIa. Для доказательства $\forall \alpha [\alpha \in \sigma \sim \alpha \in R']$ сначала допустим $\alpha \in \sigma$. По $\forall$-удал. $\sigma(\bar{\alpha}(x'')) = 0$. Тогда согласно (A)

$$\mid 2((\bar{\alpha}(x''))_x \dot{-} 1) - ((\bar{\alpha}(x''))_{x'} \dot{-} 1) \mid \leqslant 1,$$

следовательно, $\mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid \leqslant 1$ и по $\forall$-введ. $\alpha \in R'$.

IIIb. Обратно, допустим $\alpha \in R'$. Индукция по x с двойным базисом (BM, стр. 174) с использованием (A) дает $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0$. По $\forall$-введ. $\alpha \in \sigma$.

14.2. В *R0.9p, x_1, x — различные переменные и A(p) — формула, в которой x_1 и x свободны для p.

*R0.9. $\vdash \forall p A(x_1 + p) \& x_1 \leqslant x \supset \forall p A(x + p)$.

*R0.10. $\vdash \forall p \forall q 2^k \mid 2^q \alpha(x_1 + p) - 2^p \alpha(x_1 + q) \mid < 2^{x_1+p+q} \& x_1 \leqslant x \supset \forall p \forall q 2^k \mid 2^q \alpha(x + p) - 2^p \alpha(x + q) \mid < 2^{x+p+q}$.

*R0.11. $\vdash \forall p 2^{k+1}|2^p\alpha(x_1)-\alpha(x_1+p)|<2^{x_1+p}\ \&$
$x_1\leqslant x \supset \forall p 2^k|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|<2^{x+p}$.

Доказательства. *R0.9. Допустим $\forall p A(x_1+p)\ \&\ x_1\leqslant x$. Допустим $x=x_1+c$ (ср. 5.5, абзац 4). По $\forall$-удал. $A(x_1+c+p)$, следовательно, $A(x+p)$. По $\forall$-введ. $\forall p A(x+p)$.

*R0.10. Допустим антецедент и $x=x_1+c$. Используя $\forall$-удал. с $c+p$ и $c+q$ вместо p и q, получаем $2^k|2^{c+q}\alpha(x_1+c+p)-2^{c+p}\alpha(x_1+c+q)|<2^{x_1+c+p+c+q}$. Деля на 2^c (т. е. используя *145a вместе с *11.9 и *3.9) и заменяя x_1+c на x, получаем $2^k|2^q\alpha(x+p)-2^p\alpha(x+q)|<2^{x+p+q}$.

*R0.11. Допустим антецедент. Переход от (i) к (iv) в доказательстве *R0.3 и $\forall$-введ. дают $\forall p\forall q 2^k|2^q\alpha(x_1+p)-2^p\alpha(x_1+q)|<2^{x_1+p+q}$. Таким образом, по *R0.10 $\forall p\forall q 2^k|2^q\alpha(x+p)-2^p\alpha(x+q)|<2^{x+p+q}$. Полагая $p=0$ и заменяя затем связанную переменную q на p, получаем $\forall p 2^k|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|<2^{x+p}$.

14.3. Предикат совпадения д. ч. г. (Гейтинг **1956**, стр. 26) выражается формулой, стоящей в правой части *R1.1. Эту формулу мы сокращенно записываем как «$\alpha\doteq\beta$». В *R1.3 $\alpha=\beta$ есть $\forall x(\alpha(x)=\beta(x))$ (ср. 4.5).

*R1.1. $\vdash \alpha\doteq\beta \sim \forall k\exists x\forall p 2^k|\alpha(x+p)-\beta(x+p)|<2^{x+p}$.

*R1.2. $\vdash \forall p\alpha(x+p)=\beta(x+p)\supset\alpha\doteq\beta$;
$\vdash \forall t_{t\geqslant x}\alpha(t)=\beta(t)\supset\alpha\doteq\beta$.

*R1.3. $\vdash \alpha=\beta\supset\alpha\doteq\beta$. *R1.4. $\vdash\alpha\doteq\alpha$.

*R1.5. $\vdash\alpha\doteq\beta\supset\beta\doteq\alpha$. *R1.6. $\vdash\alpha\doteq\beta\ \&\ \beta\doteq\gamma\supset\alpha\doteq\gamma$.

*R1.7. $\vdash\alpha\in R\ \&\ \alpha\doteq\beta\supset\beta\in R$.

Доказательства. *R1.2. Допустим $\forall t_{t\geqslant x}\alpha(t)=\beta(t)$. Тогда $\alpha(x+p)=\beta(x+p)$, поэтому $2^k|\alpha(x+p)-\beta(x+p)|=0$ [*11.2] $<2^{x+p}$, следовательно, по $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. $\alpha\doteq\beta$.

*R1.4. Из $\alpha=\alpha$ (абзац 5 п. 4.5) с помощью *R1.3.

*R1.5. Используем *11.4.

*R1.6. Допустим $\alpha\doteq\beta$, $\beta\doteq\gamma$. Пользуясь $\forall$-удал. и опуская $\exists x_1$, $\exists x_2$ для $\exists$-удал., получаем $\forall p 2^{k+1}|\alpha(x_1+p)-\beta(x_1+p)|<2^{x_1+p}$, $\forall p 2^{k+1}|\beta(x_2+p)-\gamma(x_2+p)|<2^{x_2+p}$. Полагая $x=\max(x_1,x_2)$ и используя *R0.9, *8.4, получаем $\forall p 2^{k+1}|\alpha(x+p)-\beta(x+p)|<2^{x+p}$, $\forall p 2^{k+1}|\beta(x+p)-\gamma(x+p)|<2^{x+p}$. Далее, $2^{k+1}|\alpha(x+p)-\gamma(x+p)|\leqslant 2^{k+1}|\alpha(x+p)-\beta(x+p)|+2^{k+1}|\beta(x+p)-\gamma(x+p)|$ [*11.5 и др.] $<2^{x+p}+2^{x+p}=2\cdot 2^{x+p}$. Таким образом, $2^k|\alpha(x+p)-\gamma(x+p)|<2^{x+p}$. По $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. получаем $\alpha\doteq\gamma$.

*R1.7. Допустим $\alpha\in R$, $\alpha\doteq\beta$. Пользуясь $\forall$-введ. и подготавливая $\exists$-удал., имеем $\forall p 2^{k+3}|2^p\alpha(x_1)-\alpha(x_1+p)|<2^{x_1+p}$, $\forall p 2^{k+2}|\alpha(x_2+p)-\beta(x_2+p)|<2^{x_2+p}$. Полагая $x=\max(x_1,x_2)$ и используя *R0.11 и *R0.9 вместе с *8.4, получаем

(i) $\forall p 2^{k+2}|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|<2^{x+p}$,

(ii) $\forall p 2^{k+2}|\alpha(x+p)-\beta(x+p)|<2^{x+p}$.

Следовательно ($\forall$-удаление с 0 в качестве p, *145a и т. д.), (iii) $2^{k+2}|2^p\beta(x)-2^p\alpha(x)|<2^{x+p}$. Далее, $2^{k+2}|2^p\beta(x)-\beta(x+p)|\leqslant 2^{k+2}|2^p\beta(x)-2^p\alpha(x)|+2^{k+2}|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|+2^{k+2}|\alpha(x+p)-\beta(x+p)|<2^{x+p}+2^{x+p}+2^{x+p}$ [(iii), (i), (ii)] $<2^{x+p+2}$. Таким образом, $2^k|2^p\beta(x)-\beta(x+p)|<2^{x+p}$. Согласно $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. $\beta\in R$.

*R1.8. $\vdash\exists b 2^{y+1}|2^ya-2^xb|\leqslant 2^{y+x}$.

*R1.9. $\vdash 2^{y+3}|2^pa-d|<2^{x+p}\ \&\ 2^{y+1}|2^ya-2^xb|\leqslant$
$2^{y+x}\supset 2^{y+3}|2^yd-2^{x+p}b|<2^{x+p+y}5$.

*R1.10. $\vdash\alpha,\ \gamma\in R\ \&\ \forall p 2^{z+4}|\alpha(w+p)-\gamma(w+p)|<$
$2^{w+p}\supset\exists\alpha'_{\alpha'\in R'}\exists\gamma'_{\gamma'\in R'}(\alpha'\doteq\alpha\ \&\ \gamma'\doteq\gamma\ \&$
$\forall x_{x\leqslant z}\alpha'(x)=\gamma'(x))$.

*R1.11. $\vdash\alpha\in R\sim\exists\alpha'_{\alpha'\in R'}\alpha'\doteq\alpha$.

Доказательства. *R1.8. Случай 1: $y\leqslant x$. Допустим $y+c=x$, $a=2^cq+r\ \&\ r<2^c$ (*146a). Подслучай 1.1: $2^{y+1}|2^ya-2^xq|\leqslant 2^{y+x}$. Используем $\exists$-введ. Подслучай 1.2: $2^{y+x}<2^{y+1}|2^ya-2^xq|=2^{y+1}|2^y$

$(2^cq+r)-2^{y+c}q|=2^{y+1}(2^yr)$ [*11.8]. Допустим поэтому $2^{y+x}+d'=2^{y+1}(2^yr)$. Тогда $2^{y+1}|2^ya-2^x(q+1)|=2^{y+1}|2^y(2^cq+r)-2^{y+c}(q+1)|=2^{y+1}|2^yr-2^{y+c}|$ [*11.7] $=2^{y+1}(2^x \dot{-} 2^yr)$ [$r<2^c$, *11.1, *6.11] $=2^{y+1+x} \dot{-} 2^{y+1}(2^yr)$ [*6.14] $=(2^{y+x}+2^{y+x}) \dot{-} (2^{y+x}+d')=2^{y+x} \dot{-} d'$ [*6.8] $\leqslant 2^{y+x}$ [*6.15]. Используем $\exists$-введ. Случай 2: $y>x$. Тогда $2^{y+1}|2^ya-2^x2^{y \dot{-} x}a|=0$ [*6.7, *11.2] $\leqslant 2^{y+x}$.

*R1.9. Допустим **(i)** $2^{y+3}|2^pa-d|<2^{x+p}$ и **(ii)** $2^{y+1}|2^ya-2^xb|\leqslant 2^{y+x}$. Тогда $2^{y+3}|2^{y+x}d-2^{2x+p}b|\leqslant 2^{y+3}|2^{y+x}d-2^{y+x+p}a|+2^{y+3}|2^{y+x+p}a-2^{2x+p}b|=2^{y+x}2^{y+3}|2^pa-d|+2^{x+p+2}2^{y+1}|2^ya-2^xb|<2^{y+x}2^{x+p}+2^{x+p+2}2^{y+x}$ [(i), (ii)] $=2^{2x+p+y}5$. Таким образом, $2^{y+3}|2^yd-2^{x+p}b|<2^{x+p+y}5$.

*R1.10. Допустим α, $\gamma \in R$ и **(i)** $\forall p 2^{z+4}|\alpha(w+p)-\gamma(w+p)|<2^{w+p}$. Выведем сначала **(a)** $\exists b \exists c\{\exists x \forall p 2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}b|<2^{x+p+y}5 \,\&\, \exists x \forall p 2^{y+3}|2^y\gamma(x+p)-2^{x+p}c|<2^{x+p+y}5 \,\&\, (y\leqslant z \supset b=c)\}$. Случай 1: $y \leqslant z$. Используя $\alpha \in R$, предположим для $\exists$-удал. **(ii)** $\forall p 2^{z+5}|2^p\alpha(x_1)-\alpha(x_1+p)|<2^{x_1+p}$. Полагая $x=\max(w, x_1)$ и используя (i) и (ii) вместе с *R0.9 и *R0.11, получаем: **(iii)** $\forall p 2^{z+4}|\alpha(x+p)-\gamma(x+p)|<2^{x+p}$, **(iv)** $\forall p 2^{z+4}|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|<2^{x+p}$. Ввиду *11.5 (и *145a) $\forall p 2^{z+3}|2^p\alpha(x)-\gamma(x+p)|<2^{x+p}$. Следовательно, в рассматриваемом случае ввиду *144b, *3.12 и $a\leqslant b \supset ac \leqslant bc$ [5.5, абзац 4] получаем **(v)** $\forall p 2^{y+3}|2^p\alpha(x)-\gamma(x+p)|<2^{x+p}$. Аналогично из (iv) получаем **(vi)** $\forall p 2^{y+3}|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|<2^{x+p}$. Используя *R1.8, допустим для $\exists$-удал. **(vii)** $2^{y+1}|2^y\alpha(x)-2^xb|\leqslant 2^{y+x}$. Ввиду *R1.9 вместе с (v) (или (vi)) и (vii) имеем:

(viii) $2^{y+3}|2^y\gamma(x+p)-2^{x+p}b|<2^{x+p+y}5$,

(ix) $2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}b|<2^{x+p+y}5$.

Ввиду *11, *100 **(x)** $y\leqslant z \supset b=b$. Из (ix), (viii), (x) при помощи $\forall$-, $\exists$- и &-введ. получаем (a). Случай 2: $y>z$. Используя α, $\gamma \in R$, допустим (для $\exists$-удал.) формулы, из которых согласно *R0.11 получим: **(xi)** $\forall p 2^{y+3}|2^p\alpha(x)-\alpha(x+p)|<2^{x+p}$, **(xii)** $\forall p 2^{y+3}|2^p\gamma(x)-\gamma(x+p)|<2^{x+p}$. Используя *R1.8, допустим (для $\exists$-удал.): **(xiii)** $2^{y+1}|2^y\alpha(x)-2^xb|\leqslant 2^{y+x}$, **(xiv)** $2^{y+1}|2^y\gamma(x)-2^xc|\leqslant 2^{y+x}$. Ввиду (xi), (xiii) (или (xii), (xiv)) и *R1.9, $2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}b|<2^{x+p+y}5$, $2^{y+3}|2^y\gamma(x+p)-2^{x+p}c|<2^{x+p+y}5$. Кроме того, в рассматриваемом случае имеет место $y\leqslant z \supset b=c$. Используя $\forall$-, $\exists$- и &-введ., получаем (a). Далее из (a), используя (дважды) *2.2, получаем

$$\exists\alpha'\exists\gamma'\{\forall y\exists x\forall p 2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y)|< 2^{x+p+y}5 \,\&\, \forall y\exists x\forall p 2^{y+3}|2^y\gamma(x+p)-2^{x+p}\gamma'(y)|< 2^{x+p+y}5 \,\&\, \forall y_{y\leqslant z}\alpha'(y)=\gamma'(y)\}.$$

Подготавливая $\exists$-удал. из этого, мы допустим формулу, из которой по &-удал. получаем:

(xv) $\forall y\exists x\forall p 2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y)|<2^{x+p+y}5$,

(xvi) $\forall y\exists x\forall p 2^{y+3}|2^y\gamma(x+p)-2^{x+p}\gamma'(y)|<2^{x+p+y}5$,

(xvii) $\forall y_{y\leqslant z}\alpha'(y)=\gamma'(y)$.

Из (xv) мы следующим образом выводим $\alpha' \in R'$. Применяя $\forall$-удал. (с y и $y+1$ в качестве y) и переходя к $\exists$-удал., мы допустим формулы, из которых согласно *R0.9 (и $\forall$-удал.) вытекают: **(xviii)** $2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y)|<2^{x+p+y}5$ и **(xix)** $2^{y+4}|2^{y+1}\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y+1)|<2^{x+p+y+1}5$. Далее, $2^{2y+x+p+4}|2\alpha'(y)-\alpha'(y+1)|=2^{2y+4}|2^{x+p+1}\alpha'(y)-2^{x+p}\alpha'(y+1)|\leqslant 2^{2y+4}|2^{x+p+1}\alpha'(y)-2^{y+1}\alpha(x+p)|+2^{2y+4}|2^{y+1}\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y+1)|=2^{y+2}2^{y+3}|2^y\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y)|+2^y2^{y+4}|2^{y+1}\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(y+1)|<2^{y+2}2^{x+p+y}5+2^y2^{x+p+y+1}5$ [(xviii), (xix)] $=2^{2y+x+p+1}15$. Отсюда $8|2\alpha'(y)-\alpha'(y+1)|<15$, следовательно, $|2\alpha'(y)-\alpha'(y+1)|\leqslant 1$ (поскольку $|2\alpha'(y)-\alpha'(y+1)|>1$ ведет к противоречию). Следовательно, **(xx)** $\alpha' \in R'$. Аналогично из (xvi) получаем: **(xxi)** $\gamma' \in R'$. Чтобы вывести из (xv) и (xx) $\alpha' \doteq \alpha$, допустим, применяя $\forall$-удал. (с $t=13\cdot 2^k$ в качестве y) к (xv) и подготавливая $\exists$-удал., $\forall p 2^{t+3}|2^t\alpha(x_1+p)-2^{x_1+p}\alpha'(t)|<2^{x_1+p+t}5$, откуда по *R0.9, полагая $x=\max(x_1, t)$, получаем **(xxii)** $2^{t+3}|2^t\alpha(x+p)-2^{x+p}\alpha'(t)|<2^{x+p+t}5$. Допустим (для

$\exists$-удал.): **(xxiii)** $x = t + c$. Тогда $t2^t \mid \alpha(x+p) - \alpha'(x+p) \mid \leqslant 2^t 2^{t+3} \mid \alpha(x+p) - \alpha'(x+p) \mid$ [*3.10; $a \leqslant b \supset ac \leqslant bc$] $= 2^{t+3} \mid 2^t\alpha(x+p) - 2^t\alpha'(x+p) \mid \leqslant 2^{t+3} \mid 2^t\alpha(x+p) - 2^{x+p}\alpha'(t) \mid + 2^{t+3} \mid 2^{x+p}\alpha'(t) - 2^t\alpha'(x+p) \mid < 2^{x+p+t}5 + 2^{t+3}2^t \mid 2^{c+p}\alpha'(t) - \alpha'(t+c+p) \mid$ [(xxii), (xxiii)] $< 2^{x+p+t}5 + 2^{t+3}2^t 2^{c+p}$ [*R0.6, (xx)] $= 2^{x+p}2^t 13$. Таким образом, $2^k \mid \alpha(x+p) - \alpha'(x+p) \mid < 2^{x+p}$. По $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. получаем **(xxiv)** $\alpha' \doteq \alpha$. Аналогично, ввиду (xvi) и (xxi) имеет место **(xxv)** $\gamma' \doteq \gamma$. Применяя (xx), (xxi), (xxiv), (xxv), (xvii), получаем $\exists\alpha'_{\alpha' \in R'}\exists\gamma'_{\gamma' \in R'}(\alpha' \doteq \alpha \,\&\, \gamma' \doteq \gamma \,\&\, \forall x_{x \leqslant z}\alpha'(x) = \gamma'(x))$.

*R1.11. I. Допускаем $\alpha \in R$ и используем *R1.10 с α, α в качестве α, γ. II. Используем *R0.7, *R1.7.

Закон исключенного третьего не выполняется для равенства $\doteq$ д. ч. г. α и β; в самом деле, при обобщении его по одной из переменных, скажем α, мы можем опровергнуть его, используя принцип Брауэра *27.6. (Ср. Брауэр **1928**a, стр. 7 п. 1, вместе с **1929**, стр. 161; **1954**, стр. 5 строки 7—9.) Мы сделаем это в *R9.23.

Вместе с тем закон (снятия) двойного отрицания выполняется для $\alpha \doteq \beta$ (ср. Брауэр **1928a**, стр. 8, строки 23—75, **1954**, стр. 5, строки 6—7, Гейтинг **1956**, стр. 26). Мы включили это утверждение в *R2.8.

14.4. Мы представим отношение отделенности между д. ч. г. (Брауэр **1954**, стр. 4, строки 13—14, Гейтинг **1956**, стр. 29) формулой, стоящей в правой части *R2.1 и сокращенно записываемой как «$\alpha \mathrel{\#} \beta$». Утверждения *R2.3, *R2.4, *R2.6, *R2.7 взяты из книги Гейтинга **1956**, стр. 29—30. В теореме 18.2 главы IV Клини показал, что обращение *R2.5 недоказуемо и (по классическим соображениям) неопровержимо.

*R2.1. $\vdash \alpha \mathrel{\#} \beta \sim \exists k \forall x \forall p 2^k \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid \geqslant 2^{x+p}$.

*R2.2. $\vdash \neg\, \alpha \mathrel{\#} \alpha$. *R2.3. $\vdash \alpha \mathrel{\#} \beta \supset \beta \mathrel{\#} \alpha$.

*R2.4. $\vdash \alpha \doteq \beta \,\&\, \alpha \mathrel{\#} \gamma \supset \beta \mathrel{\#} \gamma$.

*R2.5. $\vdash \alpha \mathrel{\#} \beta \supset \neg\, \alpha \doteq \beta$.

*R2.6. $\vdash \alpha, \beta, \gamma \in R \,\&\, \alpha \mathrel{\#} \beta \supset \alpha \mathrel{\#} \gamma \vee \beta \mathrel{\#} \gamma$.

*R2.7. $\vdash \alpha, \beta \in R \,\&\, \neg\, \alpha \mathrel{\#} \beta \supset \alpha \doteq \beta$.

*R2.8. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset (\neg\neg\, \alpha \doteq \beta \sim \neg\, \alpha \mathrel{\#} \beta \sim \alpha \doteq \beta)$.

Доказательства. *R2.4. Допустим $\alpha \doteq \beta$, $\alpha \mathrel{\#} \gamma$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим $\forall p 2^k \mid \alpha(x_1+p) - \gamma(x_1+p) \mid \geqslant 2^{x_1+p}$ и после $\forall$-удал. и подготавливая $\exists$-удал., допустим $\forall p 2^{k+1} \mid \alpha(x_2+p) - \beta(x_2+p) \mid < 2^{x_2+p}$. Полагая $x = \max(x_1, x_2)$ и используя *R0.9, $\forall$-удал. и *145b, получаем: (i) $2^{k+1} \mid \alpha(x+p) - \gamma(x+p) \mid \geqslant 2 \cdot 2^{x+p}$ и (ii) $2^{k+1} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid < 2^{x+p}$. Далее, $2^{k+1} \mid \beta(x+p) - \gamma(x+p) \mid \geqslant 2^{x+p}$, поскольку иначе $2^{k+1} \mid \alpha(x+p) - \gamma(x+p) \mid \leqslant 2^{k+1} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid + 2^{k+1} \mid \beta(x+p) - \gamma(x+p) \mid < 2^{x+p} + 2^{x+p}$ [ввиду (ii)] $= 2 \cdot 2^{x+p}$, что противоречит (i). По $\forall$- и $\exists$-введ. $\beta \mathrel{\#} \gamma$.

*R2.5. По *R2.2 и *R2.4.

*R2.6. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in R$ и $\alpha \mathrel{\#} \beta$. Подготавливая $\exists$-удал. из $\alpha \mathrel{\#} \beta$ и после &- и $\forall$-удал., $\exists$-удал. из $\alpha, \beta, \gamma \in R$, допустим формулы, из которых, пользуясь *R0.9 (и *145b) и *R0.11, получим: (i) $2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\beta(x) \mid \geqslant 8 \cdot 2^{x+p}$, **(ii)** $2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^{x+p}$, **(iii)** $2^{k+3} \mid 2^p\beta(x) - \beta(x+p) \mid < 2^{x+p}$, **(iv)** $2^{k+3} \mid 2^p\gamma(x) - \gamma(x+p) \mid < 2^{x+p}$. Далее, $2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\gamma(x) \mid \geqslant 4 \cdot 2^{x+p} \vee 2^{k+3} \mid 2^p\beta(x) - 2^p\gamma(x) \mid \geqslant 4 \cdot 2^{x+p}$, поскольку иначе $2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\beta(x) \mid \leqslant 2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\gamma(x) \mid + 2^{k+3} \mid 2^p\gamma(x) - 2^p\beta(x) \mid < 4 \cdot 2^{x+p} + 4 \cdot 2^{x+p} = 8 \cdot 2^{x+p}$, что противоречит (i). Случай 1: $2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\gamma(x) \mid \geqslant 4 \cdot 2^{x+p}$. Тогда (a) $2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - \gamma(x+p) \mid \geqslant 2 \cdot 2^{x+p}$, поскольку иначе $2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\gamma(x) \mid \leqslant 2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - \alpha(x+p) \mid + 2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - \gamma(x+p) \mid + 2^{k+3} \mid \gamma(x+p) - 2^p\gamma(x) \mid < 2^{x+p} + 2 \cdot 2^{x+p} + 2^{x+p}$ [ввиду (ii), (iv)] $= 4 \cdot 2^{x+p}$, что противоречит предположению рассматриваемого случая. Из (a) ввиду *145b получаем $2^{k+2} \mid \alpha(x+p) - \gamma(x+p) \mid \geqslant 2^{x+p}$, следовательно, по $\forall$- и $\exists$-введ. $\alpha \mathrel{\#} \gamma$ и по $\vee$-введ. $\alpha \mathrel{\#} \gamma \vee \beta \mathrel{\#} \gamma$. Случай 2: $2^{k+3} \mid 2^p\beta(x) - 2^p\gamma(x) \mid \geqslant 4 \cdot 2^{x+p}$. Аналогично, используя (iii) и (iv), получаем $\beta \mathrel{\#} \gamma$ и по $\vee$-введ. $\alpha \mathrel{\#} \gamma \vee \beta \mathrel{\#} \gamma$.

*R2.7. Допустим $\alpha, \beta \in R$ и $\neg\, \alpha \mathrel{\#} \beta$. Применяя $\forall$-удал. и подготавливая $\exists$-удал. из $\alpha \in R$, $\beta \in R$, допустим формулы, из которых согласно *R0.11 получим: (i) $\forall p 2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^{x+p}$, (ii) $\forall p 2^{k+3} \mid 2^p\beta(x) - \beta(x+p) \mid < 2^{x+p}$. Для доказательства приведением к нелепости допустим $2^{k+1} \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid \geqslant 2^x$. Тогда $4 \cdot 2^{x+p} \leqslant 2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\beta(x) \mid \leqslant 2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - \alpha(x+p) \mid +$

$2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid + 2^{k+3} \mid \beta(x+p) - 2^p\beta(x) \mid \leqslant 2^{x+p} + 2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid + 2^{x+p}$ [(i), (ii)] $\leqslant 2 \cdot 2^{x+p} + 2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid$. Следовательно, $2^{x+p} \leqslant 2^{k+2} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid$. По $\forall$- и $\exists$-введ. получаем $\alpha \mathrel{\#} \beta$, что противоречит $\neg \alpha \mathrel{\#} \beta$. Таким образом, имеет место **(iii)** $2^{k+1} \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid < 2^x$. Следовательно, $2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid \leqslant 2^{k+3} \mid \alpha(x+p) - 2^p\alpha(x) \mid + 2^{k+3} \mid 2^p\alpha(x) - 2^p\beta(x) \mid + 2^{k+3} \mid 2^p\beta(x) - \beta(x+p) \mid < 2^{x+p} + 4 \cdot 2^{x+p} + 2^{x+p}$ [(i), (iii), (ii)] $= 6 \cdot 2^{x+p} < 8 \cdot 2^{x+p}$. Таким образом, $2^k \mid \alpha(x+p) - \beta(x+p) \mid < 2^{x+p}$. По $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. получаем $\alpha \doteq \beta$.

*R2.8. Запишем это утверждение в виде «$\alpha, \beta \in R \supset (A \sim B \sim C)$». Допустим $\alpha, \beta \in R$. (a) $A \supset B$ согласно *R2.5, *12. (b) $B \supset C$ согласно *R2.7. (c) $C \supset A$ согласно *49a.

14.5. Из арифметических операций мы вводим только сложение $\alpha + \beta$ и вычитание $\alpha \dot{-} \beta$, $\mid \alpha - \beta \mid$. Рассмотрение умножения и деления, если бы это потребовалось, также не представляло бы никаких трудностей (ср. Гейтинг **1956**, стр. 31).

Наши новые аксиомы имеют первую форму из приведенных в п. 5.1. В *R3.3, *R3.4, *R4.3 — *R4.5, *R5.3 — *R5.6 мы имеем аналоги соответственно *117, *119, *6.3, *6.5, *6.8, ˣ11.1, *11.4, *11.7, *11.8 (таким образом, включаются в рассмотрение все равенства из теоремы 25 ВМ, стр. 168, и приведенные выше ˣ6.1 — *6.21, ˣ11.1—*11.15b, исключая 0, ′ и умножение). Каждое из этих утверждений получается при помощи $\forall$-введ. из (подстановочного примера) соответствующей теоремы ВМ или п. 5.5 (выше), и по *R1.3 каждое из этих утверждений имеет вариант с $=$, замененным на $\doteq$.

ˣR3.1. $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$.
*R3.2. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset \alpha + \beta \in R$.
*R3.3. $\vdash \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
*R3.4. $\vdash \alpha + \beta = \beta + \alpha$.
*R3.5. $\vdash \alpha \doteq \beta \sim \alpha + \gamma \doteq \beta + \gamma$.
*R3.6. $\vdash \alpha \mathrel{\#} \beta \sim \alpha + \gamma \mathrel{\#} \beta + \gamma$.
ˣR4.1. $(\alpha \dot{-} \beta)(x) = \alpha(x) \dot{-} \beta(x)$.
*R4.2. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset \alpha \dot{-} \beta \in R$.
*R4.3. $\vdash (\alpha + \beta) \dot{-} \beta = \alpha$.

*R4.4. $\vdash \alpha \dot{-} (\beta + \gamma) = (\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} \gamma$.
*R4.5. $\vdash (\alpha + \gamma) \dot{-} (\beta + \gamma) = \alpha \dot{-} \beta$.
*R4.6. $\vdash \alpha \doteq \beta \supset \alpha \dot{-} \gamma \doteq \beta \dot{-} \gamma$.
*R4.7. $\vdash \alpha \doteq \beta \supset \gamma \dot{-} \alpha \doteq \gamma \dot{-} \beta$.
ˣR5.1. $(\mid \alpha - \beta \mid)(x) = \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid$.
*R5.2. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset \mid \alpha - \beta \mid \in R$.
*R5.3. $\vdash \mid \alpha - \beta \mid = (\alpha \dot{-} \beta) + (\beta \dot{-} \alpha)$.
*R5.4. $\vdash \mid \alpha - \beta \mid = \mid \beta - \alpha \mid$.
*R5.5. $\vdash \mid (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) \mid = \mid \alpha - \beta \mid$.
*R5.6. $\vdash \mid (\alpha + \beta) - \beta \mid = \alpha$.
*R5.7. $\vdash \alpha \doteq \beta \supset \mid \alpha - \gamma \mid \doteq \mid \beta - \gamma \mid$.

Доказательства. *R3.2. Используем *R0.11, *11.5, *11.7.

*R3.5—*R3.6. Используем *11.7.

Замечание 14.1. В качестве контрпримера к *R3.2, в котором R, заменено на R′, можно указать $\vdash \lambda x 1 \in R' \,\&\, \neg \lambda x 1 + \lambda x 1 \in R'$. Аналогично контрпримеры для *R4.2 и *R5.2 с заменой R на R′ получаются, если в качестве α и β взять соответственно $\lambda x 2^{x'} \dot{-} 1$ и $\lambda x 1$.

14.6. Мы изучим два интуиционистски важных предиката порядка на континууме: «естественное упорядочение» или «измеримое естественное упорядочение» $<\circ$ (Брауэр **1928a**, стр. 8, **1951**; в книге Гейтинга **1956**, стр. 132, 35, употребляется термин «псевдоупорядочение» и символ $<$) и «виртуальное упорядочение» $\dot{<}$ (записывается как $<$ у Брауэра **1928a**, стр. 9, **1951** и как $\dot{<}$ у Гейтинга **1956**, стр. 132, 134).

Содержательно, предикат естественного порядка $\alpha <\circ \beta$ есть $(Ex)(Ek)(p)\, \beta(x+p)/2^{x+p} \dot{-} \alpha(x+p)/2^{x+p} \geqslant 1/2^k$. Мы выражаем это формально правой частью *R6.1, которая сокращается посредством «$\alpha <\circ \beta$» (и читается «α измеримо меньше, чем β»; ср. Брауэр **1951**) или «$\beta \circ> \alpha$». Мы пишем «$\alpha \leqslant\circ \beta$» или «$\beta \circ\geqslant \alpha$» вместо $\alpha <\circ \beta \vee \alpha \doteq \beta$, «$\alpha \circ> \beta, \gamma$» вместо $\alpha \circ> \beta \,\&\, \alpha \circ> \gamma$ и т. д.

Аналогично сокращению «$\alpha = \beta$» для $\forall x (\alpha(x) = \beta(x))$ мы принимаем сокращения «$\alpha \leqslant \beta$» и «$\beta \geqslant \alpha$» для $\forall x (\alpha(x) \leqslant \beta(x))$. Поскольку мы будем избегать использования соответствующих сокращений «$\alpha < \beta$» и «$\beta > \alpha$» для $\forall x (\alpha(x) < \beta(x))$, не имеющих здесь самостоятельного употребления, у нас не будет случая спутать $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \geqslant \alpha$ с дизъюнкцией $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

Мы далее сокращаем $\neg\alpha <\circ \beta$ посредством «$\alpha \not<\circ\, \beta$» и «$\beta \circ\!\not> \alpha$». В арифметике нет необходимости в таких сокращениях, так как $\neg\, a < b$ эквивалентно $a \geqslant b$ и $b \leqslant a$.

Использование *R1.3 — *R1.6 позволило нам оправдывать построение цепей функторов, связанных посредством $=$, $\doteq$. Теперь, используя дополнительно нижеследующие утверждения *R6.4, *R6.6 — *R6.8, *R6.10 — *R6.15, мы можем строить цепи д. ч. г., связанных посредством $=$, $\doteq$, $<\circ$, $\leqslant$, $\leqslant\circ$, $\circ\!\not>$ (или посредством $=$, $\doteq$, $\circ>$, $\geqslant$, $\circ\geqslant$, $\not<\circ$). Ср. BM, конец § 26.

Так, строя некоторую спускающуюся цепь от α к β, устанавливают, что во всяком случае $\alpha \circ\!\not> \beta$ (если $\leqslant$ и $\circ\!\not>$ не использовались при этом, то $\alpha \leqslant\circ\, \beta$; если использовалось $<\circ$, то $\alpha <\circ \beta$). Такая цепь появляется в доказательстве *R9.19, другие будут использованы в п. 15.3 и ниже.

Различные формулы арифметики, связанные с неравенствами, имеют аналоги в естественном упорядочении континуума, хотя мы и не можем вывести их во вполне той же равномерной манере, как это делалось в п. 14.5 с соответствующими аналогами в случае равенства. Примеры даются доказательствами *R6.16 — *R6.20.

Большинство из (следующих) теорем взяты из книги Гейтинга **1956**, стр. 36—37.

*R6.1. $\vdash \alpha <\circ \beta \sim \exists k \exists x \forall p\, 2^k(\beta(x+p) \dot- \alpha(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$.

*R6.2. $\vdash \alpha, \beta \in R \,\&\, \alpha \# \beta \supset \alpha <\circ \beta \vee \beta <\circ \alpha$.

*R6.3. $\vdash \alpha <\circ \beta \supset \alpha \# \beta$. *R6.4. $\vdash \alpha <\circ \beta \supset \neg\, \alpha \doteq \beta$.

*R6.5. $\vdash \alpha, \beta \in R \,\&\, \alpha \not<\circ\, \beta \,\&\, \beta \not<\circ\, \alpha \supset \alpha \doteq \beta$.

*R6.6. $\vdash \alpha <\circ \beta \,\&\, \beta <\circ \gamma \supset \alpha <\circ \gamma$.

*R6.7. $\vdash \alpha <\circ \beta \supset \beta \not<\circ\, \alpha$. *R6.8. $\vdash \alpha \not<\circ\, \alpha$.

*R6.9. $\vdash \alpha, \beta, \gamma \in R \,\&\, \alpha <\circ \beta \supset \alpha <\circ \gamma \vee \gamma <\circ \beta$.

*R6.10. $\vdash \alpha, \beta, \gamma \in R \,\&\, \alpha \circ\!\not> \beta \,\&\, \beta <\circ \gamma \supset \alpha <\circ \gamma$.

*R6.11. $\vdash \alpha, \beta, \gamma \in R \,\&\, \alpha <\circ \beta \,\&\, \beta \circ\!\not> \gamma \supset \alpha <\circ \gamma$.

*R6.12. $\vdash \alpha, \beta, \gamma \in R \,\&\, \alpha \circ\!\not> \beta \,\&\, \beta \circ\!\not> \gamma \supset \alpha \circ\!\not> \gamma$.

*R6.13. $\vdash \alpha \doteq \beta \,\&\, \alpha <\circ \gamma \supset \beta <\circ \gamma$.

*R6.14. $\vdash \alpha \doteq \beta \,\&\, \gamma <\circ \alpha \supset \gamma <\circ \beta$.

*R6.15. $\vdash \alpha \leqslant \beta \supset \alpha \circ\!\not> \beta$.

*R6.16. $\vdash \alpha <\circ \beta \sim \alpha + \gamma <\circ \beta + \gamma$.

*R6.17. $\vdash |\alpha - \gamma| \circ\!\not> |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma|$.

*R6.18. $\vdash \beta \circ\geqslant \gamma \supset (\alpha + \beta) \dot- \gamma \doteq \alpha + (\beta \dot- \gamma)$.

*R6.19. $\vdash \alpha \circ> \beta,\ \gamma \sim \alpha \dot- \gamma \circ> \beta \dot- \gamma$.

*R6.20. $\vdash \alpha <\circ \beta,\ \gamma \sim \gamma \dot- \alpha \circ> \gamma \dot- \beta$.

Доказательства. *R6.2. Допустим $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha \# \beta$. Перед $\exists$-удал. и после $\forall$-удал. допустим формулы, из которых согласно *R0.9 и *R0.11 получим: (i) $\forall p\, 2^k\, |\alpha(x+p) - \beta(x+p)| \geqslant 2^{x+p}$, (ii) $\forall p\, 2^{k+2}\, |2^p\alpha(x) - \alpha(x+p)| < 2^{x+p}$, (iii) $\forall p\, 2^{k+2}\, |2^p\beta(x) - \beta(x+p)| < 2^{x+p}$. После $\forall$-удал. из (i) с 0 в качестве p (и *145b) имеем $|2^{k+2+p}\alpha(x) - 2^{k+2+p}\beta(x)| \geqslant 4 \cdot 2^{x+p}$. Случай 1: $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$. Тогда по *11.14 (i') $2^{k+2+p}\beta(x) \geqslant 2^{k+2+p}\alpha(x) + 4 \cdot 2^{x+p}$. Однако ввиду (ii) и (iii) вместе с *11.15 имеет место (ii') $2^{k+2}\alpha(x+p) < 2^{k+2+p}\alpha(x) + 2^{x+p}$, (iii') $2^{k+2+p}\beta(x) < 2^{k+2}\beta(x+p) + 2^{x+p}$. Теперь $2^{k+2}\beta(x+p) \geqslant 2^{k+2}\alpha(x+p) + 2 \cdot 2^{x+p}$, поскольку иначе мы ввиду (ii') и (iii') пришли бы к противоречию с (i'). Следовательно, $2^{k+1}\beta(x+p) \dot- 2^{k+1}\alpha(x+p) \geqslant 2^{x+p}$. По $\forall$- и $\exists$-введ. $\alpha <\circ \beta$ и по $\vee$-введ. $\alpha <\circ \beta \vee \beta <\circ \alpha$.

*R6.4. Согласно *R6.3, *R2.5.

*R6.5. По *R6.2, *R2.7 (вместе с *63, *12).

*R6.7. Используем *R0.9.

*R6.9. Допустим $\alpha, \beta, \gamma \in R$ и $\alpha <\circ \beta$. Ввиду *R6.3, *R2.6 и *R6.2 $(\alpha <\circ \gamma \vee \gamma <\circ \alpha) \vee (\beta <\circ \gamma \vee \gamma <\circ \beta)$. Однако $\gamma <\circ \alpha$ вместе с $\alpha <\circ \beta$ ввиду *R6.6 дает $\gamma <\circ \beta$, а $\beta <\circ \gamma$ приводит к $\alpha <\circ \gamma$. Следовательно, $\alpha <\circ \gamma \vee \gamma <\circ \beta$.

*R6.10.—*R6.12. На основании *R6.9.

*R6.13. Допустим $\alpha \doteq \beta$, $\alpha <\circ \gamma$. Подготавливая $\exists$-удал. и после $\forall$-удал. допустим формулы, из которых по *R0.9 получим: (i) $\forall p\, 2^{k+1}\, |\alpha(x+p) - \beta(x+p)| < 2^{x+p}$, (ii) $\forall p\, 2^k(\gamma(x+p) \dot- \alpha(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$. Используя (i) и *11.15, получаем (iii) $2^{k+1}\beta(x+p) < 2^{k+1}\alpha(x+p) + 2^{x+p}$. Ввиду (ii) $2^{k+1}\gamma(x+p) \dot- 2^{k+1}\alpha(x+p) \geqslant 2^{x+p+1} = 2^{x+p} + 2^{x+p}$, следовательно, по *6.17 и др. $2^{k+1}\gamma(x+p) \dot- (2^{k+1}\alpha(x+p) + 2^{x+p}) \geqslant 2^{x+p}$. Таким образом, $2^{k+1}\gamma(x+p) \dot- 2^{k+1}\beta(x+p) \geqslant 2^{k+1}\gamma(x+p) \dot- (2^{k+1}\alpha(x+p) + 2^{x+p})$ [*6.18, (iii)] $\geqslant 2^{x+p}$, следовательно, $\beta <\circ \gamma$.

*R6.15. Допустим $\alpha \leqslant \beta$, т. е. $\forall x \alpha(x) \leqslant \beta(x)$ и (подготавливая $\exists$-удал.) $\forall p\, 2^k(\alpha(x+p) \dot- \beta(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$.

*R6.22. Допустим $\alpha, \beta \in R'$. I. Применяем *R6.21 с α, α, β в качестве α, γ, β. II. Используем *R6.15, *R6.14.

Предикат виртуального порядка выражается формулой $\alpha \circ\!\!\not> \beta \mathbin{\&} \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$, которую мы сокращаем посредством «$\alpha \dot{<} \beta$» или «$\beta \dot{>} \alpha$». Утверждения *R7.2 — *R7.4, *R7.10 и *R7.11 являются обработками аксиом виртуального порядка, приведенных в работах Брауэра **1924—1927**, II, стр. 53, **1928a**, стр. 8, и Гейтинга **1956**, стр. 134. Первая эквивалентность в *R7.8, *R7.9 есть просто расшифровка «$\alpha \not<\!\circ\, \beta$».

*R7.1. $\vdash \alpha \dot{<} \beta \sim \alpha \circ\!\!\not> \beta \mathbin{\&} \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$.

*R7.2. $\vdash \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \gamma \supset \beta \dot{<} \gamma$.

*R7.3. $\vdash \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \mathbin{\&} \gamma \dot{<} \alpha \supset \gamma \dot{<} \beta$.

*R7.4. $\vdash \alpha, \beta, \gamma \in R \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \beta \mathbin{\&} \beta \dot{<} \gamma \supset \alpha \dot{<} \gamma$.

*R7.5. $\vdash \alpha, \beta \in R \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \beta \supset \neg\, \alpha \dot{>} \beta$.

*R7.6. $\vdash \neg\, \alpha \dot{<} \alpha$.

*R7.7. $\vdash \alpha <\!\circ\, \beta \supset \alpha \dot{<} \beta$.

*R7.8. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset (\alpha \not<\!\circ\, \beta \sim \neg \alpha <\!\circ\, \beta \sim \neg \alpha \dot{<} \beta)$.

*R7.9. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset (\neg \alpha \not<\!\circ\, \beta \sim \neg\neg\, \alpha <\!\circ\, \beta \sim \neg\neg\, \alpha \dot{<} \beta \sim \alpha \dot{<} \beta)$.

*R7.10. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \sim \neg\, \alpha \dot{<} \beta \mathbin{\&} \neg\, \alpha \dot{>} \beta)$.

*R7.11. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset (\alpha \dot{<} \beta \sim \neg \alpha \dot{>} \beta \mathbin{\&} \neg \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$.

Доказательства. *R7.4. Допустим $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \dot{<} \beta$. Следовательно, (i) $\alpha \circ\!\!\not> \beta$ и (ii) $\neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$. Допустим, также $\beta \dot{<} \gamma$ или просто (iii) $\beta \circ\!\!\not> \gamma$. Используя (i) и (iii) (помимо $\alpha, \beta, \gamma \in R$) в *R6.12, получаем $\alpha \circ\!\!\not> \gamma$. Чтобы доказать $\neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \gamma$, допустим $\alpha \stackrel{\circ}{=} \gamma$. Используя это и (iii) в *R6.13, получаем $\alpha \not<\!\circ\, \beta$. Используя последнее и (i) в *R6.5, получаем $\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$, что противоречит (ii).

*R7.9. По *R7.8, *25, *49b.

Формула, стоящая в правой части *R8.1 (ниже) и сокращаемая как «$\alpha \in [\delta_1, \delta_2]$», выражает тот факт, что α, δ_1, δ_2 являются д. ч. г. такими, что α принадлежит замкнутому интервалу $[\delta_1, \delta_2]$ (ср. Брауэр **1924—1927**, II, стр. 454, **1928a**, стр. 9, строки 17—13 снизу, Гейтинг **1956**, стр. 52).

*R8.1. $\vdash \alpha \in [\delta_1, \delta_2] \sim \alpha, \delta_1, \delta_2 \in R \mathbin{\&} \neg\, (\alpha \dot{<} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \delta_2) \mathbin{\&} \neg\, (\alpha \dot{>} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{>} \delta_2)$.

*R8.2. $\vdash \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \mathbin{\&} \alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \beta \in [\delta_1, \delta_2]$.

*R8.3. $\vdash \delta_1 \stackrel{\circ}{=} \delta_1' \mathbin{\&} \alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \alpha \in [\delta_1', \delta_2]$.

*R8.4. $\vdash \delta_2 \stackrel{\circ}{=} \delta_2' \mathbin{\&} \alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \alpha \in [\delta_1, \delta_2']$.

*R8.5. $\vdash \alpha, \beta \in R \supset \alpha, \beta \in [\alpha, \beta]$.

*R8.6. $\vdash \alpha, \delta_1, \delta_2 \in R \mathbin{\&} \delta_1 \circ\!\!\not> \delta_2 \supset \{\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \sim (\alpha \not<\!\circ\, \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \circ\!\!\not> \delta_2)\}$.

Доказательства. *R8.5. (Ср. предшествующее утверждение *R0.1.) Используем *R7.6.

*R8.6. Пусть $\alpha, \delta_1, \delta_2 \in R$ и (i) $\delta_1 \circ\!\!\not> \delta_2$. I. Допустим (ii) $\neg\, (\alpha \dot{<} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \delta_2)$ и (iii) $\neg\, (\alpha \dot{>} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{>} \delta_2)$. Если $\alpha <\!\circ\, \delta_1$, то по (i) и *R6.11 $\alpha <\!\circ\, \delta_2$. Таким образом, применяя *R7.7 (дважды) и &-введ., получаем $\alpha \dot{<} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \delta_2$, что противоречит (ii). Таким образом, $\alpha \not<\!\circ\, \delta_1$. Аналогично, используя *R6.10 для получения противоречия с (iii), приходим к $\alpha \circ\!\!\not> \delta_2$. II. Допустим $\alpha \not<\!\circ\, \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \circ\!\!\not> \delta_2$. Ввиду *R7.8 $\neg \alpha \dot{<} \delta_1 \mathbin{\&} \neg \alpha \dot{>} \delta_2$, откуда $\neg\, (\alpha \dot{<} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{<} \delta_2) \mathbin{\&} \neg\, (\alpha \dot{>} \delta_1 \mathbin{\&} \alpha \dot{>} \delta_2)$. Таким образом, $\alpha \in [\delta_1, \delta_2]$.

14.7. Нам будет удобно иметь в формально пригодном виде кое-что из теории видов конечных двоичных дробей или, говоря точнее, теории некоторых д. ч. г., соответствующих конечным двоичным дробям. Нетрудно убедиться, что функтор $a \cdot 2^{-m}$ (обычно сокращаемый как «$a2^{-m}$») из аксиомы ^{x}R9.1 дает при интерпретации некоторый д. ч. г., соответствующий двоичной дроби $a \cdot 2^{-m}$. Это обозначение не является двусмысленным, так как у нас нет никаких других способов употребления отрицательной степени.

Мы принимаем сокращение «a» для $a \cdot 2^{-0}$ в тех контекстах в которых очевидно, что a — функтор (а не терм). Таким образом, в *R9.18 «0» есть сокращение для $0 \cdot 2^{-0}$.

^{x}R9.1. $(a \cdot 2^{-m})(x) = [a/2^{m \dot{-} x}] \cdot 2^{x \dot{-} m}$.

*R9.2. $\vdash a2^{-m} \in R'$.

*R9.3. $\vdash 2^k a 2^{-(m+k)} = a2^{-m}$.

*R9.4. $\vdash a2^{-m} \stackrel{\circ}{=} b2^{-n} \sim 2^n a = 2^m b \sim a2^{-m} = b2^{-n}$, *R9.5. $\vdash a2^{-m} \stackrel{\circ}{=} b2^{-m} \sim a = b \sim a2^{-m} = b2^{-m}$.

*R9.6. $\vdash m = n \sim a2^{-m} \stackrel{\circ}{=} a2^{-n}$ [1]).

*R9.7. $\vdash a2^{-m} <_\circ b2^{-n} \sim 2^n a < 2^m b$.

*R9.8. $\vdash a2^{-m} <_\circ b2^{-m} \sim a < b$.

*R9.9. $\vdash a2^{-m} + b2^{-n} \stackrel{\circ}{=} (2^n a + 2^m b)\, 2^{-(m+n)}$.

*R9.10. $\vdash a2^{-m} + b2^{-m} \stackrel{\circ}{=} (a + b)\, 2^{-m}$.

*R9.11. $\vdash a2^{-m} \dot{-} b2^{-n} \stackrel{\circ}{=} (2^n a \dot{-} 2^m b)\, 2^{-(m+n)}$.

*R9.12. $\vdash a2^{-m} \dot{-} b2^{-m} \stackrel{\circ}{=} (a \dot{-} b)\, 2^{-m}$.

*R9.13. $\vdash |\, a2^{-m} - b2^{-n} \,| \stackrel{\circ}{=} |\, 2^n a - 2^m b \,|\, 2^{-(m+n)}$.

*R9.14. $\vdash |\, a2^{-m} - b2^{-m} \,| \stackrel{\circ}{=} |\, a - b \,|\, 2^{-m}$.

Доказательства. *R9.2. Согласно *R0.4, ˣR9.1 нам нужно доказать (перед ∀-введ.) утверждение (a) $|\, 2\, [a/2^{m \dot{-} x}]\, 2^{x \dot{-} m} - [a/2^{m \dot{-} x'}]\, 2^{x' \dot{-} m} \,| \leqslant 1$. Случай 1: $x < m$. Тогда (i) $x \dot{-} m = x' \dot{-} m = 0$, (ii) $m \dot{-} x' < m \dot{-} x$ [*6.20], (iii) $m \dot{-} x = (m \dot{-} x') + 1$. Используя (i), приводим (a) к виду: (b) $|\, 2\, [a/2^{m \dot{-} x}] - [a/2^{m \dot{-} x'}] \,| \leqslant 1$. Ввиду *13.4 (iv) $a = 2^{m \dot{-} x}\, [a/2^{m \dot{-} x}] + \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x}) = 2^{m \dot{-} x'}\, [a/2^{m \dot{-} x'}] + \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x'})$. По *12.3 вместе с *3.9 имеет место (v) $\mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x}) < 2^{m \dot{-} x}$, $\mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x'}) < 2^{m \dot{-} x'} < 2^{m \dot{-} x}$ [используем также (ii) и 3.12]. Поэтому $2^{m \dot{-} x'}\, |\, 2\, [a/2^{m \dot{-} x}] - [a/2^{m \dot{-} x'}] \,| = |\, 2^{m \dot{-} x}\, [a/2^{m \dot{-} x}] - 2^{m \dot{-} x'}\, [a/2^{m \dot{-} x'}] \,|$ [используем (iii)] $= |\, (a \dot{-} \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x})) - (a \dot{-} \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x'})) \,|$ [(iv)] $= |\, \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x}) - \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x'}) \,|$ [*11.11 вместе с (iv)] $< 2^{m \dot{-} x}$ [*11.12, *8.6 вместе с (v)]. Следовательно, ввиду (iii) $|\, 2\, [a/2^{m \dot{-} x}] - [a/2^{m \dot{-} x'}] \,| < 2$, поэтому выполняется (b). Случай 2: $x \geqslant m$. Теперь (a) приводится к $|\, 2\, [a/2^0]\, 2^{x \dot{-} m} - [a/2^0]\, 2^{(x \dot{-} m)+1} \,| \leqslant 1$. Далее используем *13.6, *11.2.

*R9.3. Нам нужно доказать (a) $[2^k a/2^{(m+k) \dot{-} x}]\, 2^{x \dot{-} (m+k)} = [a/2^{m \dot{-} x}]\, 2^{x \dot{-} m}$. Случай 1: $x < m$. Тогда $x \dot{-} m = x \dot{-} (m + k) = 0$ и $k + (m \dot{-} x) = (m + k) \dot{-} x$ и (a) приводится к $[2^k a/2^{(m+k) \dot{-} x}] = [a/2^{m \dot{-} x}]$. По *13.5 это будет получаться, если мы установим, что $2^k a = 2^{(m+k) \dot{-} x}$

[1]) Очевидно, импликация справа налево в *R9.6 имеет место только при $a \neq 0$.— *Прим. перев.*

$[a/2^{m \dot{-} x}] + 2^k\, \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x})\ \&\ 2^k\, \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x}) < 2^{(m+k) \dot{-} x}$. Однако согласно *13.4 и *12.3 (вместе с *107 и *145a) $2^k a = 2^{k+(m \dot{-} x)}\, [a/2^{m \dot{-} x}] + 2^k\, \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x})\ \&\ 2^k\, \mathrm{rm}\,(a,\ 2^{m \dot{-} x}) < 2^{k+(m \dot{-} x)}$. Случай 2: $m \leqslant x < m + k$. Теперь (a) редуцируется так: $[2^k a/2^{(m+k) \dot{-} x}] = [a/1]\, 2^{x \dot{-} m}$. Однако $k = (m + k) \dot{-} m \geqslant (m+k) \dot{-} x$ [*6.18]. Таким образом, $[2^k a/2^{(m+k) \dot{-} x}] = [2^{k \dot{-} ((m+k) \dot{-} x)}\, a2^{(m+k) \dot{-} x} + 0/2^{(m+k) \dot{-} x}] = 2^{k \dot{-} ((m+k) \dot{-} x)} a$ [*13.18, ˣ13.1] $= 2^{x \dot{-} m} a$ [*6.9 и др.] $= [a/1] 2^{x \dot{-} m}$ [*13.6]. Случай 3: $m + k \leqslant x$. Ввиду *13.6 (a) принимает вид $2^k a2^{x \dot{-} (m+k)} = a2^{x \dot{-} m}$.

*R9.4. Запишем доказываемое в виде $A \sim B \sim C$. Достаточно доказать (a) $A \supset B$, (b) $B \supset C$, (c) $C \supset A$. (a) Допустим $a2^{-m} \stackrel{\circ}{=} b2^{-n}$. Используя *R1.1 и ˣR9.1, допустим $\forall p 2^{m+n} |\, [a/2^{m \dot{-} (x+p)}]\, 2^{(x+p) \dot{-} m} - [b/2^{n \dot{-} (x+p)}]\, 2^{(x+p) \dot{-} n} \,| < 2^{x+p}$. Тогда по ∀-удал.

$$2^{m+n} |\, [a/2^{m \dot{-} (x+m+n)}]\, 2^{(x+m+n) \dot{-} m} - [b/2^{n \dot{-} (x+m+n)}]\, 2^{(x+m+n) \dot{-} n} \,| < 2^{x+m+n}.$$

Это приводится к виду $2^{m+n+x}\, |\, a2^n - b2^m \,| < 2^{m+n+x}$, откуда следует $|\, a2^n - b2^m \,| < 1$ и, таким образом, $|\, a2^n - b2^m \,| = 0$. Итак, согласно *11.2 $2^n a = 2^m b$. (b) Допустим $2^n a = 2^m b$. Случай 1: $m \leqslant n$. Пусть $n = m + k$. Тогда $2^{m+k} a = 2^m b$, откуда $2^k a = b$. Таким образом, $b\, 2^{-n} = 2^k a2^{-n} = 2^k a2^{-(m+k)} = a2^{-m}$ [*R9.3]. Случай 2: $m > n$. Аналогично. (c) Согласно *R1.3.

*R9.7. I. Так же, как и в (a) *R9.4 с использованием *R6.1 вместо *R1.1, получаем $2^k\, (b2^m \dot{-} a2^n) \geqslant 2^{m+n}$, следовательно, $b2^m \dot{-} a2^n > 0$, поэтому согласно *6.12 $b2^m > a2^n$. II. Докажем сначала (i) $a < b \supset a2^{-m} <_\circ b2^{-m}$ следующим образом. Допустим $a < b$. Тогда $2^m\, ((b2^{-m})\, (m + p) \dot{-} (a2^{-m})\, (m + p)) = 2^{m+p}\, (b \dot{-} a) \geqslant 2^{m+p}$, следовательно, $a2^{-m} <_\circ b2^{-m}$. Теперь приспособим (b) из *R9.4. Так, например, в случае 1 будем теперь иметь $2^k a < b$. Поэтому ввиду (i) $b2^{-n}\ {}_\circ\!> 2^k a2^{-n} =$ и т. д.

*R9.9. Ввиду *R1.2 это вытекает из

$$(a2^{-m} + b2^{-n}\, (m + n + p) = ((2^n a + 2^m b)\, 2^{-(m+n)})\, (m + n + p),$$

последнее же легко выводится с помощью ˣR3.1, ˣR9.1 и др.

*R9.10. Из *R9.9 с помощью *R9.3.

*R9.15. $\vdash \alpha \in R' \supset |\alpha(m)\,2^{-m} - \alpha| \circ\!\not> 1 \cdot 2^{-m}$.

*R9.16. $\vdash \alpha \in R' \supset \alpha \not< \circ\, (\alpha(m) \dot{-} 1)\, 2^{-m}$.

*R9.17. $\vdash \alpha \in R' \supset \alpha \circ\!\not> (\alpha(m) + 1)\, 2^{-m}$.

*R9.18. $\vdash \alpha \not<\circ\, 0$.

*R9.19. $\vdash \alpha, \beta \in R \,\&\, \alpha <\circ\, \beta \supset \exists a \exists m\, (\alpha <\circ\, a2^{-m} <\circ\, \beta)$.

*R9.20. $\vdash \beta \in R' \supset \exists \alpha_{\alpha \in R'} (\bar{\alpha}(y) = \bar{\beta}(y) \,\&\, \alpha \stackrel{\circ}{=} (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y})$.

*R9.21. $\vdash \beta \in R' \supset \exists \alpha_{\alpha \in R'} (\bar{\alpha}(y) = \bar{\beta}(y) \,\&\, \alpha \stackrel{\circ}{=} (\beta(y) + 1)\, 2^{-y})$.

Доказательства. *R9.15. Пусть $\alpha \in R'$ и $|\alpha(m)\,2^{-m} - \alpha| \circ\!> 1 \cdot 2^{-m}$. Допустим для $\exists$-удал. $\forall p 2^k(|[\alpha(m)/2^{m \dot{-} (x+p)}]\, 2^{(x+p) \dot{-} m} - \alpha(x+p)| \dot{-} [1/2^{m \dot{-} (x+p)}]\, 2^{(x+p) \dot{-} m}) \geqslant 2^{x+p}$. Применяя $\forall$-удал. с $m+p$ в качестве p, приводим это к виду $2^k(|\alpha(m)\, 2^{x+p} - \alpha(m+x+p)| \dot{-} 2^{x+p}) \geqslant 2^{m+x+p}$, откуда по *3.9 и *6.12 следует $|2^{x+p}\alpha(m) - \alpha(m+x+p)| > 2^{x+p}$, что противоречит ввиду *R0.6 условию $\alpha \in R'$.

*R9.16. Допустим $\alpha \in R'$, $\alpha <\circ\, (\alpha(m) \dot{-} 1)\, 2^{-m}$, а следовательно, подготавливая $\exists$-удал. и после $\forall$-удал., допустим также $2^k(((\alpha(m) \dot{-} 1)2^{-m})(x+m+p) \dot{-} \alpha(x+m+p)) \geqslant 2^{x+m+p}$. Тогда $((\alpha(m) \dot{-} 1)2^{-m})(x+m+p) \dot{-} \alpha(x+m+p) > 0$, откуда $[\alpha(m) \dot{-} 1/2^{m \dot{-} (x+m+p)}]\, 2^{(m+x+p) \dot{-} m} \dot{-} \alpha(x+m+p) > 0$, что приводит к $(\alpha(m)\, 2^{x+p} \dot{-} 2^{x+p}) \dot{-} \alpha(x+m+p) > 0$. Тогда $2^{x+p}\alpha(m) \dot{-} \alpha(x+m+p) > 2^{x+p}$, откуда $|2^{x+p}\alpha(m) - \alpha(m+x+p)| > 2^{x+p}$, что ввиду *R0.6 противоречит $\alpha \in R'$.

*R9.19. Пусть $\alpha, \beta \in R$ и (i) $\alpha <\circ\, \beta$. Используя *R1.11, допустим (ii) $\alpha' \in R' \,\&\, \alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha$, (iii) $\beta' \in R' \,\&\, \beta' \stackrel{\circ}{=} \beta$. Согласно (i) и *R6.13—*R6.14 получаем (iv) $\alpha' <\circ\, \beta'$. Допустим $\forall p 2^k(\beta'(x+p) \dot{-} \alpha'(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$. Тогда $\beta'(x+2+k) \dot{-} \alpha'(x+2+k) \geqslant 2^{k+2} > 3$, следовательно, (v) $\beta'(x+2+k) \dot{-} 1 > \alpha'(x+2+k) + 2$. Таким образом, $\alpha \stackrel{\circ}{=} \alpha'$ [(ii)] $\circ\!\not> (\alpha'(x+2+k)+1)\, 2^{-(x+2+k)}$ [*R9.17] $<\circ\, (\alpha'(x+2+k)+2)\, 2^{-(x+2+k)}$ [*R9.8] $<\circ\, (\beta'(x+2+k) \dot{-} 1)\, 2^{-(x+2+k)}$ [(v), *R9.8] $\circ\!\not> \beta'$ [*R9.16] $\stackrel{\circ}{=} \beta$ [(iii)]. По $\exists$-введ. $\exists a \exists m\, (\alpha <\circ\, a2^{-m} <\circ\, \beta)$.

*R9.20. Допустим $\beta \in R'$. Используя лемму 5.5 (a), положим

$$\forall x \alpha(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{если } x \leqslant y, \\ 2^{x \dot{-} y}\beta(y) \dot{-} (2^{x \dot{-} y} \dot{-} 1), & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Тогда $\bar{\alpha}(y) = \bar{\beta}(y)$. Мы выведем (a) $|2\alpha(x) - \alpha(x')| \leqslant 1$. Случай 1: $x < y$. Используем $\beta \in R'$. Случай 2: $x = y$. Тогда $|2\alpha(x) - \alpha(x')| = |2\beta(y) - (2\beta(y) \dot{-} (2 \dot{-} 1))| = |(2\beta(y) \dot{-} 0) - (2\beta(y) \dot{-} 1)|$ [*6.1, лемма 5.2] $\leqslant |0 - 1|$ [*11.13] $= 1$. Случай 3: $x > y$. Тогда $|2\alpha(x) - \alpha(x')| = |2(2^{x \dot{-} y}\beta(y) \dot{-} (2^{x \dot{-} y} \dot{-} 1)) - (2^{x' \dot{-} y}\beta(y) \dot{-} (2^{x' \dot{-} y} \dot{-} 1))| = |(2^{x' \dot{-} y}\beta(y) \dot{-} (2^{x' \dot{-} y} \dot{-} 2)) - (2^{x' \dot{-} y}\beta(y) \dot{-} (2^{x' \dot{-} y} \dot{-} 1))|$ [*6.14, *6.6 вместе с предположением данного случая] $\leqslant |2 - 1|$ [*11.13] $= 1$. Из (a) по $\forall$-введ. получаем $\alpha \in R'$. Наконец, $2^k|\alpha(y+k'+p) - ((\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y})(y+k'+p)| = 2^k|(2^{k'+p}\beta(y) \dot{-} (2^{k'+p} \dot{-} 1)) - (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{k'+p}|$ [*R9.1 и т. д.] $\leqslant 2^k|(2^{k'+p} \dot{-} 1) - 2^{k'+p}|$ [*6.14, *11.13] $\leqslant 2^k|1 - 0|$ [*11.13] $= 2^k < 2^{y+k'+p}$. По $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. $\alpha \stackrel{\circ}{=} (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}$.

*R9.21. Аналогично, полагая

$$\forall x \alpha(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{если } x \leqslant y, \\ 2^{x \dot{-} y}\beta(y) + (2^{x \dot{-} y} \dot{-} 1), & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Используя *R9.20 и *R9.21 вместе с принципом Брауэра (для чисел), мы опровергнем сейчас (обобщенный) закон исключенного третьего для $\stackrel{\circ}{=}$. Приводимое доказательство *R9.22, исходя из *R9.20 и *R9.21, по существу принадлежит Клини, который в марте 1963 г. дал более простое доказательство *R9.22, нежели в диссертации автора этих строк (где этот результат выводился непосредственно из настоящего *R1.11). Мы несколько изменили доказательство Клини, чтобы получить последовательно доказательства *R9.20, *R9.21 и *R9.22.

*R9.22. $\vdash \beta \in R' \supset \neg \forall \alpha_{\alpha \in R'} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$.

*R9.23. $\vdash \beta \in R \supset \neg \forall \alpha_{\alpha \in R} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$.

*R9.24. $\vdash \beta \in R \supset \neg \forall \alpha_{\alpha \in R} (\alpha <\circ\, \beta \vee \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \alpha \circ\!> \beta)$.

*R9.25. $\vdash \beta \in R \subset \neg \forall \alpha_{\alpha \in R} (\alpha \dot{<} \beta \vee \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta)$.

Доказательства. *R9.22. Допустим (i) $\beta \in R'$ и $\forall \alpha_{\alpha \in R'} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$. Используя *27.6 вместе с *R0.8 и опуская $\exists\tau$ для $\exists$-удал., допустим (ii) $\forall\alpha_{\alpha\in R'}\exists y \{\forall x [\tau(\bar\alpha(x)) > 0 \supset y = x] \,\&\, \{(\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \,\&\, \tau(\bar\alpha(y)) = 1) \vee (\neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \,\&\, \tau(\bar\alpha(y)) = 2)\}\}$. Отсюда, используя (i) и опуская $\exists y$, получаем (iii) $\forall x [\tau(\bar\beta(x)) > 0 \supset y = x] \,\&\, \{(\beta \stackrel{\circ}{=} \beta \,\&\, \tau(\bar\beta(y)) = 1) \vee (\neg\beta \stackrel{\circ}{=} \beta \,\&\, \tau(\bar\beta(y)) = 2)\}$. Согласно *R1.4 $\beta \stackrel{\circ}{=} \beta$. Таким образом, по (iii) имеем (iv) $\tau(\bar\beta(y)) = 1$. Используя *R9.20 и *R9.21 вместе с (i), допустим (v) $\alpha_1 \in R' \,\&\, \bar\alpha_1(y) = \bar\beta(y) \,\&\, \alpha_1 \stackrel{\circ}{=} (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}$ и (vi) $\alpha_2 \in R' \,\&\, \bar\alpha_2(y) = \bar\beta(y) \,\&\, \alpha_2 \stackrel{\circ}{=} (\beta(y)+1)\, 2^{-y}$. Теперь $(\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y} \stackrel{\circ}{=} \alpha_1$ [(v)] $\stackrel{\circ}{=} \beta$ [(v), (iv), (ii)] $\stackrel{\circ}{=} \alpha_2$ [(vi), (iv), (ii)] $\stackrel{\circ}{=} (\beta(y) + 1)\, 2^{-y}$ [(vi)]. Таким образом, по *R9.5 $\beta(y) \dot{-} 1 = \beta(y) + 1$, что (ввиду разбора случаев $(\beta(y) \leqslant 1$, $\beta(y) > 1)$) невозможно.

*R9.23. Допустим $\beta \in R$. Используя *R 1.11, допустим, подготавливая $\exists$-удал., $\beta' \in R' \,\&\, \beta' \stackrel{\circ}{=} \beta$. По *R9.22 (i) $\neg\, \forall\alpha_{\alpha\in R'} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta' \vee \neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta')$. Ввиду *R0.7 и $\beta' \stackrel{\circ}{=} \beta$ имеем $[\alpha \in R \supset \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta] \supset [\alpha \in R' \supset \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta' \vee \neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta']$. Отсюда по *69 и *12 получаем (ii) $\neg\forall\alpha_{\alpha\in R'} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta' \vee \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta') \supset \neg\, \forall\alpha_{\alpha\in R} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$. Далее используем (i) вместе с (ii).

*R9.24. Допустим $\beta \in R$ и $\forall\alpha_{\alpha\in R} (\alpha <\!\circ\, \beta \vee \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \alpha \circ\!\!> \beta)$. Используя *R6.4, получаем $\forall\alpha_{\alpha\in R} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$. Однако по $\supset$-удал. из *R9.23 имеет место $\neg\, \forall\alpha_{\alpha\in R} (\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta)$.

§ 15. Теорема о равномерной непрерывности.

15.1. Мы установим формально теорему о равномерной непрерывности функции, определенной на каждом действительном числе, представленном д. ч. г., в замкнутом интервале $[\delta_1, \delta_2]$, где $\delta_1 \circ\!\!\not> \delta_2$. (Эту теорему без условия $\delta_1 \circ\!\!\not> \delta_2$ см. Гейтинг **1956**, стр. 58; первоначальные версии у Брауэра **1923a**, стр. 5, **1924**, стр. 193, **1927**, стр. 67, относятся к [0, 1]).

Предварительный результат *R10.1 устанавливает, что для каждой пары д. ч. г. α и γ, достаточно близких друг к другу в том смысле, что $|\alpha - \gamma|$ мало, существуют к. д. ч. г. α' и γ' (такие, что $\alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha$, $\gamma' \stackrel{\circ}{=} \gamma$, «близкие друг к другу» в том смысле, что их начальные сегменты совпадают.

*R10.1. $\vdash \alpha, \gamma \in R \,\&\, |\alpha - \gamma| <\!\circ\, 1 \cdot 2^{-(z+4)} \supset$
$\exists\alpha'_{\alpha'\in R'}\exists\gamma'_{\gamma'\in R'} (\alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha \,\&\, \gamma' \stackrel{\circ}{=} \gamma \,\&$
$\forall x_{x\leqslant z}\alpha'(x) = \gamma'(x))$.

Доказательство. Допустим $\alpha, \gamma \in R$, $|\alpha - \gamma| <\!\circ\, 1 \cdot 2^{-(z+4)}$. Допустим $\forall p 2^k ((1 \cdot 2^{-(z+4)})(x+p) \dot{-} (|\alpha - \gamma|)(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$. Используя $\forall$-удал. с $z+4+p$ в качестве p, полагая $w = x+z+4$ и производя преобразования, получаем $2^k (2^{(w+p) \dot{-} (z+4)} \dot{-} |\alpha(w+p) - \gamma(w+p)|) \geqslant 2^{w+p}$. Таким образом, $2^{(w+p) \dot{-} (z+4)} \dot{-} |\alpha(w+p) - \gamma(w+p)| > 0$, следовательно, по *6.12 и др. $2^{z+4}|\alpha(w+p) - \gamma(w+p)| < 2^{w+p}$ и по $\forall$-введ. $\forall p 2^{z+4}|\alpha(w+p) - \gamma(w+p)| < 2^{w+p}$. Далее используем *R1.10.

Пусть δ_1 и δ_2 — к. д. ч. г., причем $\delta_1 \leqslant \delta_2$. Тогда *R10.2 утверждает существование некоторого веера. В доказательстве теоремы равномерной непрерывности мы устанавливаем, что замкнутый интервал $[\delta_1, \delta_2]$ совпадает (Гейтинг **1956**, стр. 54) с этим веером. (Ср. Брауэр **1924**, стр. 192, **1928a**, стр. 5)

*R10.2. $\vdash \delta_1, \delta_2 \in R' \,\&\, \delta_1 \leqslant \delta_2 \supset \exists\sigma \{\mathrm{Spr}(\sigma) \,\&$
$\sigma(1) = 0 \,\&\, \forall a [\sigma(a) = 0 \supset \exists b \forall s (\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant b)] \,\&\, \forall\alpha (\alpha \in \sigma \sim$
$\alpha \in R' \,\&\, \delta_1 \leqslant \alpha \leqslant \delta_2)\}$.

Доказательство. Пусть $\delta_1, \delta_2 \in R'$, $\delta_1 \leqslant \delta_2$. Введем по лемме 5.5 (с) (ср. доказательство *R0.8) σ следующим образом:

$$
\text{(A)} \quad \forall a \sigma(a) = \begin{cases} 0, \text{ если } a = 1 \vee [\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \mathrm{lh}(a) = 1 \,\&\\ \quad \delta_1(0) \leqslant (a)_0 \dot{-} 1 \leqslant \delta_2(0)] \vee \\ \quad [\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \mathrm{lh}(a) > 1 \,\&\\ \quad |2((a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}2} \dot{-} 1) - \\ \quad ((a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} \dot{-} 1)| \leqslant 1 \,\&\\ \quad \sigma(\prod_{i<\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}) = 0 \,\&\\ \quad \delta_1(\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1) \leqslant (a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} \dot{-} 1 \leqslant \\ \quad \delta_2(\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1)], \\ 1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}
$$

IIb. Допустим $\sigma(a) = 0$. Случай 1: $a = 1$. Тогда $\mathrm{Seq}(a * 2^{\delta_1(0)+1}) \,\&\, \mathrm{lh}(a * 2^{\delta_1(0)+1}) = 1 \,\&\, \delta_1(0) = (a * 2^{\delta_1(0)+1})_0 \dot{-} 1 \leqslant \delta_2(0)$ $[\delta_1 \leqslant \delta_2]$. Поэтому согласно (A) $\sigma(a * 2^{\delta_1(0)+1}) = 0$ и по $\exists$-введ. $\exists s \sigma(a * 2^{s+1}) = 0$. Случай 2: $a \neq 1$. Ввиду (A) $\mathrm{Seq}(a) \,\&\, \mathrm{lh}(a) \geqslant 1 \,\&\, \delta_1(\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1) \leqslant (a)_{\mathrm{lh}(a)\dot{-}1} \dot{-} 1 \leqslant \delta_2(\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1)$. Подслучай 2.1: $\delta_1(\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1) =$

$(a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1$. Полагая t равным $a * 2^{\delta_1(lh(a))+1}$, мы выводим $Seq(t) \,\&\, lh(t) > 1$, $|2((t)_{lh(t)\dot-2} \dot- 1) - ((t)_{lh(t)\dot-1} \dot- 1)| = |2\delta_1(lh(a) \dot- 1) - \delta_1(lh(a))| \leqslant 1$ $[\delta_1 \in R']$, $\sigma(\prod_{i<lh(t)\dot-1} p_i^{(t)_i}) = \sigma(a) = 0$, $\delta_1(lh(t) \dot- 1) = \delta_1(lh(a)) = (t)_{lh(t)\dot-1} \dot- 1 \leqslant \delta_2(lh(a))$ $[\delta_1 \leqslant \delta_2]$ $= \delta_2(lh(a))$ $[\delta_1 \leqslant \delta_2]$ $= \delta_2(lh(t) \dot- 1)$. Таким образом, по (A) $\sigma(t) = 0$. Ввиду $\exists$-введ. $\exists s\sigma(a * 2^{s+1}) = 0$. Подслучай 2.2: $(a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1 = \delta_2(lh(a) \dot- 1)$. Аналогично. Подслучай 2.3: $\delta_1(lh(a) \dot- 1) < (a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1 < \delta_2(lh(a) \dot- 1)$. Пусть t есть $a * 2^{2((a)_{lh(a)\dot-1}\dot-1)+1}$. Тогда $Seq(t) \,\&\, lh(t) > 1 \,\&\, \sigma(\prod_{i<lh(t)\dot-1} p_i^{(t)_i}) = 0$ и $|2((t)_{lh(t)\dot-2} \dot- 1) - ((t)_{lh(t)\dot-1} \dot- 1)| = |2((a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1) - 2((a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1)| = 0$. По предположению рассматриваемого случая имеем (i) $\delta_1(lh(a) \dot- 1) + 1 \leqslant (a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1 \leqslant \delta_2(lh(a) \dot- 1) \dot- 1$. Таким образом, $\delta_1(lh(t) \dot- 1) = \delta_1(lh(a)) \leqslant 2\delta_1(lh(a) \dot- 1) + 1$ $[\delta_1 \in R',$ *R0.5a$]$ $< 2(\delta_1(lh(a) \dot- 1) + 1) \leqslant 2((a)_{lh(a)\dot-1} \dot- 1)$ $[(i)]$ $= (t)_{lh(t)\dot-1} \dot- 1 \leqslant 2(\delta_2(lh(a) \dot- 1) \dot- 1)$ [i] $= 2\delta_2(lh(a) \dot- 1) \dot- 2 \leqslant 2\delta_2(lh(a) \dot- 1) \dot- 1$ [*6.18] $\leqslant \delta_2(lh(a))$ $[\delta_2 \in R'$, *R0.5a — c$]$ $= \delta_2(lh(t) \dot- 1)$. Таким образом, по (A) $\sigma(t) = 0$. По $\exists$-введ. $\exists s\sigma(a * 2^{s+1}) = 0$.

IIIa. Допустим $\alpha \in \sigma$. Как показано выше, $\alpha \in R'$. Кроме того, по $\forall$-удал. с 1 в качестве x и (A) $\delta_1(0) \leqslant \alpha(0) \leqslant \delta_2(0)$ и по $\forall$-удал. с $x + 2$ в качестве x и (A) $\delta_1(x + 1) \leqslant \alpha(x + 1) \leqslant \delta_2(x + 1)$. Следовательно, разбором случаев индукции (ВМ, стр. 169) и $\forall$-введением устанавливается $\delta_1 \leqslant \alpha \leqslant \delta_2$.

IIIb. Допустим $\alpha \in R' \,\&\, \delta_1 \leqslant \alpha \leqslant \delta_2$. Индукцией по x с двойным базисом показываем, что $\sigma(\bar{\alpha}(x)) = 0$. По $\forall$-введ. $\alpha \in \sigma$.

IV. Чтобы доказать $\forall a[\sigma(a) = 0 \supset \exists b \forall s(\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant b)]$, допустим (i) $\sigma(a) = 0$ и (ii) $\sigma(a * 2^{s+1}) = 0$. Ввиду (i) и IIa имеет место $Seq(a)$ и тогда из (ii) и (A) разбором случаев ($lh(a) = 0$, $lh(a) > 0$) получаем $s \leqslant \delta_2(lh(a))$.

15.2. Пусть $F(\alpha, \beta)$ — предикат, формально выражаемый формулой $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$. Пусть δ_1, δ_2 — д. ч. г. Необходимое условие того, что $F(\alpha, \beta)$ есть представляющий предикат некоторой функции из действительных чисел, представленных д. ч. г. α из $[\delta_1, \delta_2]$, в действительные числа, представленные д. ч. г. β, дается формально следующей формулой (предполагается, что γ, ζ свободны для α, β в $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$ и не входят свободно в $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$).

$$\mathfrak{A}(\mathrm{F}, \delta_1, \delta_2){:}\ \forall\alpha\forall\gamma\forall\beta\forall\zeta\{\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \,\&\, \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \gamma \,\&\, \mathrm{F}(\alpha, \beta) \,\&\, \mathrm{F}(\gamma, \zeta) \supset \beta, \zeta \in R \,\&\, \beta \mathrel{\overset{\circ}{=}} \zeta\}.$$

Замечание 15.1. Следует отметить, что $\mathfrak{A}(\mathrm{F}, \delta_1, \delta_2)$ не обладает ни одним из свойств замещения **(a)** $\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \gamma \,\&\, \mathrm{F}(\alpha, \beta) \supset \mathrm{F}(\gamma, \beta)$ и **(b)** $\beta \mathrel{\overset{\circ}{=}} \zeta \,\&\, \mathrm{F}(\alpha, \beta) \supset \mathrm{F}(\alpha, \zeta)$. Действительно, если $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$ есть $\alpha \in R' \,\&\, \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta$, то $\vdash \mathfrak{A}(\mathrm{F}, \delta_1, \delta_2)$ (ввиду *R0.7, *R1.7, *R1.6 и *R1.5) и вместе с тем $\vdash \lambda x1 \mathrel{\overset{\circ}{=}} \lambda x2 \,\&\, \mathrm{F}(\lambda x1, \lambda x1)$ и $\vdash \neg \mathrm{F}(\lambda x2, \lambda x1)$ (так что замыкание (a) опровержимо). Аналогично, беря в качестве $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$ формулу $\beta \in R' \,\&\, \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta$, имеем $\vdash \mathfrak{A}(\mathrm{F}, \delta_1, \delta_2)$, и вместе с тем $\vdash \lambda x \mathrel{\overset{\circ}{=}} \lambda x2 \,\&\, \mathrm{F}(\lambda x1, \lambda x1)$ и $\vdash \neg \mathrm{F}(\lambda x1, \lambda x2)$.

Четвертый член конъюнкции в гипотезах *R10.3 ниже утверждает, что функция, представляемая посредством $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$, везде определена на $[\delta_1, \delta_2]$. Заключение при интерпретации соответствует обычной форме определения равномерной непрерывности.

*R10.3. $\vdash \delta_1, \delta_2 \in R \,\&\, \delta_1 \circ\!\!\not> \delta_2 \,\&\, \mathfrak{A}(\mathrm{F}, \delta_1, \delta_2) \,\&\,$
$\forall\alpha\{\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \exists\beta \mathrm{F}(\alpha, \beta)\} \supset$
$\forall n \exists m \forall\alpha\forall\gamma\forall\beta\forall\zeta\{|\alpha - \gamma| <\!\circ\, 1 \cdot 2^{-m} \,\&\,$
$\alpha, \gamma \in [\delta_1, \delta_2] \,\&\, \mathrm{F}(\alpha, \beta) \,\&\, \mathrm{F}(\gamma, \zeta) \supset$
$|\beta - \zeta| <\!\circ\, 1 \cdot 2^{-n}\}$.

Доказательство. Допустим $\delta_1, \delta_2 \in R$, **(i)** $\delta_1 \circ\!\!\not> \delta_2$, **(ii)** $\mathfrak{A}(\mathrm{F}, \delta_1, \delta_2)$, **(iii)** $\forall\alpha\{\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \exists\beta \mathrm{F}(\alpha, \beta\}$. Используя *R1.11, допустим (перед $\exists$-удал.) **(iv)** $\delta_1' \in R' \,\&\, \delta_1' \mathrel{\overset{\circ}{=}} \delta_1$, **(v)** $\delta_2' \in R' \,\&\, \delta_2' \mathrel{\overset{\circ}{=}} \delta_2$. Согласно (i) и *R6.13 — *R6.14 $\delta_1' \circ\!\!\not> \delta_2'$. Используя *R6.22, допустим **(vi)** $\delta_1'' \in R' \,\&\, \delta_1'' \mathrel{\overset{\circ}{=}} \delta_1' \,\&\, \delta_1'' \leqslant \delta_2'$. Согласно *R6.14 **(vii)** $\delta_1'' \circ\!\!\not> \delta_2'$. Используя (vi), (v) и *R10.2, допустим конъюнкцию утверждений **(viii)** $Spr(\sigma) \,\&\, \sigma(1) = 0 \,\&\, \forall a[\sigma(a) = 0 \supset \exists b \forall s(\sigma(a * 2^{s+1}) = 0 \supset s \leqslant b)]$ и **(ix)** $\forall\alpha(\alpha \in \sigma \sim \alpha \in R' \,\&\, \delta_1'' \leqslant \alpha \leqslant \delta_2']$. Чтобы получить (x), допустим $\alpha \in \sigma$. Тогда последовательно $\alpha \in R' \,\&\, \delta_1'' \leqslant \alpha \leqslant \delta_2'$ [(ix)], $\alpha \in R' \,\&\, \alpha \not<\!\circ\, \delta_1'' \,\&\, \alpha \circ\!\!\not> \delta_2'$ [*R6.15], $\alpha \in R' \,\&\, \alpha \in [\delta_1'', \delta_2']$ [*R8.6, (v) — (vii)] и $\alpha \in R' \,\&\, \alpha \in [\delta_1, \delta_2]$ [*R8.3, (vi), (iv); *R8.4, (v)]. Используя (iii), допустим $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$. Из (ii) (и *R1.4) следует $\beta \in R$. Поэтому, записывая $b = 2^x 3^{\beta(x)}$, допустим $\forall p 2^{n+2} |2^p (b)_1 - \beta((b)_0 + p)| < 2^{(b)_0+p}$. Записывая это как «$G(n, \beta, b)$» и используя &-,

$\exists$-, $\supset$- и $\forall$-введ., получаем (x) $\forall n \forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists b \exists \beta (G(n, \beta, b) \& F(\alpha, \beta))$. Рассмотрим *27.8 (§ 7, п. 4) как утверждение вида $A \& B \& C \supset D$ и напишем «$A(n, \alpha, b)$» вместо $A(\alpha, b)$ из этого утверждения (так что C, D станут теперь $C(n)$, $D(n)$). Согласно *69 и *89 $A \& B \& \forall n C(n) \supset \forall n D(n)$. Это вместе с $A \& B$, имеющимся согласно (viii), и $\forall n C(n)$, имеющимся ввиду (x), дает $\forall n D(n)$. Таким образом, допустим: **(xi)** $\forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists b \forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = \alpha(x) \supset \exists \beta (G(n, \beta, b) \& F(\gamma, \beta))\}$. Чтобы получить заключение *R10.3, допустим **(xii)** $|\alpha - \gamma| <\circ 1 \cdot 2^{-(z+4)} \& \alpha, \gamma \in [\delta_1, \delta_2] \& F(\alpha, \beta) \& F(\gamma, \zeta)$. Используя *R10.1 (и *R8.1), допустим **(xiii)** $\alpha', \gamma' \in R' \& \alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha \& \gamma' \stackrel{\circ}{=} \gamma \& \forall x_{x \leqslant z} \alpha'(x) = \gamma'(x)$. Тогда **(xiv)** $\forall x_{x<z} \alpha'(x) = \gamma'(x)$. Ввиду *R8.2—*R8.4 и (iv)—(vi) $\alpha', \gamma' \in [\delta_1'', \delta_2']$, следовательно, по (vii) и *R8.6 имеют место **(xv)** $\alpha' \not< \circ\, \delta_1''$, **(xvi)** $\alpha' \circ\!\not> \delta_2'$, **(xvii)** $\gamma' \not< \circ\, \delta_1''$, **(xviii)** $\gamma' \circ\!\not> \delta_2'$. Согласно (xiii) и (v) $\alpha', \gamma', \delta_2' \in R'$. Поэтому ввиду *R6.21 и (xvi), (xviii), (xiv) получаем **(xix)** $\alpha'', \gamma'' \in R'$, **(xx)** $\alpha'' \stackrel{\circ}{=} \alpha' \& \alpha'' \leqslant \delta_2' \& \forall x (\alpha'(x) \leqslant \delta_2'(x) \sim \alpha''(x) = \alpha'(x)) \& \forall x (\alpha'(x) \geqslant \delta_2'(x) \sim \alpha''(x) = \delta_2'(x))$, **(xxi)** $\gamma'' \stackrel{\circ}{=} \gamma' \& \gamma'' \leqslant \delta_2' \& \forall x (\gamma'(x) \leqslant \delta_2'(x) \sim \gamma''(x) = \gamma'(x)) \& \forall x (\gamma'(x) \geqslant \delta_2'(x) \sim \gamma''(x) = \delta_2'(x))$, **(xxii)** $\forall x_{x<z} \alpha''(x) = \gamma''(x)$. Ввиду (vi) $\alpha'', \gamma'', \delta_1'' \in R$. Ввиду (xv) и (xvii) вместе с (xx), (xxi) и *R6.13 $\alpha'' \not< \circ\, \delta_1'' \& \gamma'' \not< \circ\, \delta_1''$. Таким образом, используя *R6.23, имеем **(xxiii)** $\alpha''', \gamma''' \in R'$, **(xxiv)** $\alpha''' \stackrel{\circ}{=} \alpha'' \& \alpha''' \geqslant \delta_1'' \& \forall x (\alpha''(x) \geqslant \delta_1''(x) \sim \alpha'''(x) = \alpha''(x)) \& \forall x (\alpha''(x) \leqslant \delta_1''(x) \sim \alpha'''(x) = \delta_1''(x))$, **(xxv)** $\gamma''' \stackrel{\circ}{=} \gamma'' \& \gamma''' \geqslant \delta_1'' \& \forall x (\gamma''(x) \geqslant \delta_1''(x) \sim \gamma'''(x) = \gamma''(x)) \& \forall x (\gamma''(x) \leqslant \delta_1''(x) \sim \gamma'''(x) = \delta_1''(x))$, **(xxvi)** $\forall x_{x<z} \alpha'''(x) = \gamma'''(x)$. Ввиду (xiii), (xx) — (xxi) и (xxiv) — (xxv) имеет место **(xxvii)** $\alpha \stackrel{\circ}{=} \alpha''' \& \gamma \stackrel{\circ}{=} \gamma'''$. Мы выводим $\alpha'''(x) \leqslant \delta_2'(x)$ следующим образом. С л у ч а й 1: $\alpha''(x) \leqslant \delta_1''(x)$. Тогда $\alpha'''(x) = \delta_1''(x)$ [(xxiv)] $\leqslant \delta_2'(x)$ [(vi)]. С л у ч а й 2: $\alpha''(x) > \delta_1''(x)$. Тогда $\alpha'''(x) = \alpha''(x)$ [(xxiv)] $\leqslant \delta_2'(x)$ [(xx)]. Поэтому, используя также (xxiv), получаем $\delta_1''(x) \leqslant \alpha'''(x) \leqslant \delta_2'(x)$, а следовательно, по $\forall$-введ. и $\delta_1'' \leqslant \alpha''' \leqslant \delta_2'$. Аналогично $\delta_1'' \leqslant \gamma''' \leqslant \delta_2'$. Согласно (xxiii) и (ix) $\alpha''' \in \sigma$ и $\gamma''' \in \sigma$. Поэтому, используя (xi), допустим (после $\forall$-удал. с γ''' в качестве α и перед $\exists$-удал.) $\forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = \gamma'''(x) \supset \exists \beta (G(n, \beta, b) \& F(\gamma, \beta))\}$. С помощью $\forall$-удал. с α''' и γ''' соответственно вместо γ и используя (xxvi), получаем $\exists \beta (G(n, \beta, b) \& F(\alpha''', \beta))$ и $\exists \beta (G(n, \beta, b) \& F(\gamma''', \beta))$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим **(xxviii)** $G(n, \beta', b) \&$

$F(\alpha''', \beta')$, **(xxix)** $G(n, \zeta', b) \& F(\gamma''', \zeta')$. Теперь $\forall p 2^{n+2} | 2^p (b)_1 - \beta'((b)_0 + p) | < 2^{(b)_0+p}$ и $\forall p 2^{n+2} | 2^p (b)_1 - \zeta'((b)_0 + p) | < 2^{(b)_0+p}$. Записывая $x = (b)_0$ и используя *11.5, получаем **(xxx)** $\forall p 2^{n+1} | \beta'(x+p) - \zeta'(x+p) | < 2^{x+p}$. Далее $2^{n+1}((1 \cdot 2^{-n})(x+n+p) \dot{-} | \beta'(x+n+p) - \zeta'(x+n+p) |) = 2^{n+1+x+p} \dot{-} 2^{n+1} | \beta'(x+n+p) \dot{-} \zeta'(x+n+p) |$ [*R9.1 и др.] $> 2^{n+1+x+p} \dot{-} 2^{x+n+p}$ [(xxx), *6.20 вместе с его гипотезой $a < c$, даваемой посредством $c \dot{-} b > 0$] $= 2^{x+n+p}(2 \dot{-} 1) \geqslant 2^{x+n+p}$. Таким образом, по $\forall$- и $\exists$-введ. получаем **(xxxi)** $| \beta' - \zeta' | <\circ 1 \cdot 2^{-n}$. Используя (xii), (xxviii) и (xxviii), получаем $\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \& \alpha \stackrel{\circ}{=} \alpha''' \& F(\alpha, \beta) \& F(\alpha''', \beta')$. Таким образом, согласно (ii) $\beta \stackrel{\circ}{=} \beta'$. Аналогично $\zeta \stackrel{\circ}{=} \zeta'$. Поэтому согласно (xxxi) и *R5.7, *R5.4, *R6.13 $| \beta - \zeta | <\circ 1 \cdot 2^{-n}$.

15.3. Используя *R10.3, мы установим, что описанный континуум «неразложим» (Брауэр **1927**, стр. 66, **1928a**, стр. 11, строки 4—9, Гейтинг **1956**, стр. 59) по крайней мере при всяком предикате $C(\alpha)$, выразимом некоторой формулой $C(\alpha)$ нашей системы.

*R10.4. $\vdash \delta_1, \delta_2 \in R \& \delta_1 \circ\!\not> \delta_2 \&$
$\forall \alpha \forall \gamma \{\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \& \alpha \stackrel{\circ}{=} \gamma \supset (C(\alpha) \sim C(\gamma))\} \& \forall \alpha \{\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset C(\alpha) \vee \neg C(\alpha)\} \supset$
$\forall \alpha (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset C(\alpha)) \vee \forall \alpha (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \neg C(\alpha))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим $\delta_1, \delta_2 \in R$ и остальные посылки доказываемой импликации. Используя *R1.11, допустим (i) $\delta_1' \in R' \& \delta_1' \stackrel{\circ}{=} \delta_1$. Теперь ввиду *R6.14 и *R8.3 имеем: **(ii)** $\delta_1' \circ\!> \delta_2$, **(iii)** $\forall \alpha \forall \gamma \{\alpha \in [\delta_1', \delta_2] \& \alpha \stackrel{\circ}{=} \gamma \supset (C(\alpha) \sim C(\gamma))\}$, **(iv)** $\forall \alpha \{\alpha \in [\delta_1', \delta_2] \supset C(\alpha) \vee \neg C(\alpha)\}$. Пусть $F(\alpha, \beta)$ есть $[\beta \stackrel{\circ}{=} 0 \& C(\alpha)] \vee [\beta \stackrel{\circ}{=} 1 \& \neg C(\alpha)]$. Чтобы получить (v), допустим $\alpha \in [\delta_1', \delta_2] \& \alpha \stackrel{\circ}{=} \gamma \& F(\alpha, \beta) \& F(\gamma, \zeta)$. Согласно (iii) $C(\alpha) \sim C(\gamma)$. Теперь из $F(\alpha, \beta) \& F(\gamma, \zeta)$ разбором случаев ($C(\alpha)$, $\neg C(\alpha)$) получаем $\beta \stackrel{\circ}{=} \zeta$ и (ввиду *R9.2, *R0.7, *R1.7) $\beta, \zeta \in R$. По &-, $\supset$- и $\forall$-введ. получаем (v) $\mathfrak{A}(F, \delta_1', \delta_2)$. Допуская $\alpha \in [\delta', \delta_2]$ и используя (iv), имеем $C(\alpha) \vee \neg C(\alpha)$, следовательно, разбором случаев (используя *R1.4) получаем $\exists \beta F(\alpha, \beta)$. Таким образом, имеем **(vi)** $\forall \alpha \{\alpha \in [\delta_1', \delta_2] \supset \exists \beta F(\alpha, \beta)\}$. Используя $\delta_1' \in R$ (из (i)), $\delta_2 \in R$, (ii), (v) и (vi) в *R10.3, допустим **(vii)** $\forall \alpha \forall \gamma \forall \beta \forall \zeta \{| \alpha - \gamma | <\circ 1 \cdot 2^{-m} \&$

$\alpha, \gamma \in [\delta_1', \delta_2] \;\&\; F(\alpha, \beta) \;\&\; F(\gamma, \zeta) \supset |\beta - \zeta| <_\circ 1 \cdot 2^{-1}\}$. Мы выведем (a) $\forall\alpha\forall\gamma\, \{|\alpha - \gamma| <_\circ 1 \cdot 2^{-m} \;\&\; \alpha, \gamma \in [\delta_1', \delta_2] \supset (C(\alpha) \sim C(\gamma))\}$. Допустим $|\alpha - \gamma| <_\circ 1 \cdot 2^{-m} \;\&\; \alpha, \gamma \in [\delta_1', \delta_2]$. Ввиду (vi) допустим $F(\alpha, \beta)$ и $F(\gamma, \zeta)$. Согласно (vii) $|\beta - \zeta| <_\circ 1 \cdot 2^{-1}$, следовательно, по *R6.7 $|\beta - \zeta| \circ\!\!\not> 1 \cdot 2^{-1}$. С тем, чтобы получить $C(\alpha) \supset C(\gamma)$, допустим $C(\alpha)$. Ввиду $F(\alpha, \beta)$ $\beta \circeq 0$. Теперь $\zeta \circeq 1$ вело бы к $|\beta - \zeta| \circeq |0 - 1| \circeq 1$ [*R9.14] $\circ\!> 1 \cdot 2^{-1}$ [*R9.7]. Таким образом, $\neg\, \zeta \circeq 1$, следовательно, из $F(\gamma, \zeta)$ получаем $\zeta \circeq 0 \;\&\; C(\gamma)$, а следовательно, и $C(\gamma)$. Таким образом, по $\supset$-введ. $C(\alpha) \supset C(\gamma)$. Аналогично, $C(\gamma) \supset C(\alpha)$. По &-введ. $C(\alpha) \sim C(\gamma)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем (a). Ввиду *R8.5 (viii) $\delta_1' \in [\delta_1', \delta_2]$. Тогда по (iv) имеет место (ix) $C(\delta_1') \vee \neg C(\delta_1')$.

Случай 1: $C(\delta_1')$. Мы выведем

$$\text{(b)}\quad \alpha \in R' \;\&\; \alpha(m+2) = \delta_1'(m+2) = \delta_1'(m+2) + a \;\&\; \alpha \in [\delta_1', \delta_2] \supset C(\alpha)$$

индукцией по a с двойным базисом (BM, стр. 174) следующим образом. Первый базис. Допустим $\alpha \in R'$, (i') $\alpha(m+2) = \delta_1'(m+2) + 0$ и (ii') $\alpha \in [\delta_1', \delta_2]$. Тогда $|\alpha - \delta_1'| \circ\!\!\not> |\alpha - \alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)}| + |\alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)} - \delta_1'|$ [*R6.17] $= |\alpha - \alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)}| + |\delta_1'(m+2)\, 2^{-(m+2)} - \delta_1'|$ [(i'), *R9.5 и др.] $\circ\!> 1 \cdot 2^{-(m+2)} + 1 \cdot 2^{-(m+2)}$ [*R9.15 (дважды) вместе с $\alpha \in R'$ или $\delta_1' \in R'$, *R6.16 (дважды)] $\circeq 1 \cdot 2^{-(m+1)}$ [*R9.10, *R9.3] $<_\circ 1 \cdot 2^{-m}$ [*R9.7]. Таким образом, используя также (ii') и (viii), получаем $|\alpha - \delta_1'| <_\circ 1 \cdot 2^{-m} \;\&\; \alpha, \delta_1' \in [\delta_1', \delta_2]$. Согласно (a) $C(\alpha) \sim C(\delta_1')$. Ввиду предположения рассматриваемого случая имеем $C(\alpha)$. Второй базис. Допустим $\alpha \in R'$, (i'') $\alpha(m+2) = \delta_1'(m+2) + 1$, (ii'') $\alpha \in [\delta_1', \delta_2]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\alpha - \delta_1'| \circ\!\!\not> |\alpha - \alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)}| + |\alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)} - {}&\\ \delta_1'(m+2)\, 2^{-(m+2)}| + |\delta_1'(m+2) \cdot 2^{-(m+2)} - {}&\\ \delta_1'| \text{ [*R6.17] } \circ\!\!\not> 1 \cdot 2^{-(m+2)} + |\alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)} - {}&\\ \delta_1'(m+2)\, 2^{-(m+2)}| + 1 \cdot 2^{-(m+2)} \text{ [*R9.15] } = {}&\\ 1 \cdot 2^{-(m+2)} + |(\delta_1'(m+2) + 1)\, 2^{-(m+2)} - \delta_1'(m+2) \cdot 2^{-(m+2)}| + {}&\\ 1 \cdot 2^{-(m+2)} \text{ [(i'')] } \circeq 1 \cdot 2^{-(m+2)} + 1 \cdot 2^{-(m+2)} + {}&\\ 1 \cdot 2^{-(m+2)} \text{ [*R9.10, *R5.6] } \circeq 3 \cdot 2^{-(m+2)} \text{ [*R9.10] } <_\circ {}&\\ 1 \cdot 2^{-m} \text{ [*R9.7]}.&\end{aligned}$$

Таким образом, используя также (ii'') и (viii), имеем $|\alpha - \delta_1'| <_\circ 1 \cdot 2^{-m} \;\&\; \alpha, \delta_1' \in [\delta_1', \delta_2]$. Согласно (a) $C(\alpha) \sim C(\delta_1')$ и по предположению случая 1 получаем $C(\alpha)$. Инд. шаг. Допустим $\alpha \in R'$, (i''') $\alpha(m+2) = \delta_1'(m+2) + a''$, (ii''') $\alpha \in [\delta_1', \delta_2]$ и (второе) инд. предп. Согласно *R9.2 имеем (iii''') $(\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)} \in R'$. По *R9.1 и др. (iv''') $((\delta_1'(m+2) + a') \cdot 2^{-(m+2)})(m+2) = \delta_1'(m+2) + a'$. Кроме того, (v''') $(\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)} \not<\circ (\delta_1'(m+2) + 1)\, 2^{-(m+2)}$ [*R9.8] $\not<\circ \delta_1'$ [*R9.17], (vi''') $(\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)} = ((\delta_1'(m+2) + a'') \dot{-} 1)\, 2^{-(m+2)}$ [*R9.5] $= (\alpha(m+2) \dot{-} 1) \cdot 2^{-(m+2)}$ [(i''')] $\circ\!\!\not> \alpha$ [*R9.16] $\circ\!\!\not> \delta_2$ [(ii'''), *R8.6 вместе с (ii) и $\alpha, \delta_1', \delta_2 \in R$]. Комбинируя (v''') и (vi''') с *R8.6 (вместе с (ii), (iii''') и др.), получаем (vii''') $(\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)} \in [\delta_1', \delta_2]$. Из (iii'''), (iv''') и (vii''') по инд. предп. получаем (viii''') $C((\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)})$. Далее, (ix''') $|\alpha - (\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)}| \circ\!\!\not> |\alpha - (\delta_1'(m+2) + a'')\, 2^{-(m+2)}| + |(\delta_1'(m+2) + a'')\, 2^{-(m+2)} - (\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)}| \circeq |\alpha - (\delta_1'(m+2) + a'')\, 2^{-(m+2)}| + 1 \cdot 2^{-(m+2)} = |\alpha - \alpha(m+2)\, 2^{-(m+2)}| + 1 \cdot 2^{-(m+2)}$ [(i''')] $\circ\!\!\not> 1 \cdot 2^{-(m+2)} + 1 \cdot 2^{-(m+2)} \circeq 1 \cdot 2^{-(m+1)} <_\circ 1 \cdot 2^{-m}$. Ввиду (a) и (ix'''), (ii'''), (vii''') $C(\alpha) \sim C((\delta_1'(m+2) + a')\, 2^{-(m+2)}$, следовательно, по (viii''') $C(\alpha)$. Теперь из (b) мы следующим образом выводим (c) $\forall\alpha\, (\alpha \in [\delta_1', \delta_2] \supset C(\alpha))$. Допустим $\alpha \in [\delta_1', \delta_2]$. Используя *R1.11, допустим $\alpha' \in R' \;\&\; \alpha' \circeq \alpha$. Согласно *R8.2 $\alpha' \in [\delta_1', \delta_2]$, откуда по (ii) и др. и *R8.6 получаем $\alpha' \not<\circ \delta_1'$. Используя *R6.24, допустим $\alpha'' \in R' \;\&\; \alpha'' \circeq \alpha' \;\&\; \alpha'' \geqslant \delta_1'$. Согласно *R8.2 $\alpha'' \in [\delta_1', \delta_2]$. Ввиду $\alpha'' \geqslant \delta_1'$ допустим $\alpha''(m+2) = \delta_1'(m+2) + a$. Согласно (b) $C(\alpha'')$. Кроме того, $\alpha'' \circeq \alpha$. Поэтому согласно (iii) имеет место $C(\alpha)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем (c). Из (c), используя (i) и *R8.3, получаем $\forall\alpha\, (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset C(\alpha))$. По $\vee$-введ. отсюда следует $\forall\alpha\, (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset C(\alpha)) \vee \forall\alpha\, (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \neg C(\alpha))$.

Случай 2. Аналогично получаем $\forall\alpha\, (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \neg C(\alpha))$.

§ 16. Структура континуума. 16.1. В работе «Структура континуума» (Брауэр **1928a**) Брауэр обсуждает семь свойств континуума (стр. 6—7), давая в большинстве случаев как интуиционистские контрпримеры к классическим теоремам, так и (вообще говоря, без доказательств) интуиционистски истинные аналоги этих классических результатов. Для свойства дискретности наше утверждение *R9.23 соответствует контрпримеру Брауэра (стр. 7 внизу, п. 1); никаких интуиционистских аналогов в данном случае не приводится. В связи со следующим по порядку свойством (п. 2, стр. 7—9) см. п. 14.6 выше, где брауэровские аксиомы виртуального порядка выведены для $\dot{<}$. В случае остальных свойств мы сосредоточимся скорее на достижении интуиционистских теорем, нежели на получении контрпримеров. Эти результаты появляются как *R12.2 (плотность в себе), *R12.4 (компактность), *R13.8 (всюду плотность), *R14.12 и *R14.11 (сепарабельность в себе), *R14.13 (свободная связность). Как отмечалось во введении (к этой главе), в последних двух случаях мы упростили и (в последнем случае) усилили формулировки Брауэра. (Сказанному соответствуют пп. 3,7, 6, 4, 5 цитированной работы Брауэра.)

16.2. Отношения включения и строгого включения замкнутых интервалов формально выражаются соответственно правыми частями (и сокращаются левыми частями) в *R11.1 и *R11.2. Утверждение *R11.3 было доказано в работе Брауэра **1924—1927**, II, стр. 454, примечание 1.

*R11.1. $\vdash [\delta_1, \delta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2] \sim \delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2 \in R \,\&\, \forall\alpha\, (\alpha \in [\delta_1, \delta_2] \supset \alpha \in [\eta_1, \eta_2])$.

*R11.2. $\vdash [\delta_1, \delta_2] \subset [\eta_1, \eta_2] \sim [\delta_1, \delta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2] \,\&\, \neg\, [\eta_1, \eta_2] \subseteq [\delta_1, \delta_2]$.

*R11.3. $\vdash [\delta_1, \delta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2] \sim \delta_1, \delta_2 \in [\eta_1, \eta_2]$.

*R11.4. $\vdash \delta_1, \delta_2 \in R \supset [\delta_1, \delta_2] \subseteq [\delta_1, \delta_2]$.

*R11.5. $\vdash \neg\, [\delta_1, \delta_2] \subset [\delta_1, \delta_2]$.

*R11.6. $\vdash [\delta_1, \delta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2] \,\&\, [\eta_1, \eta_2] \subseteq [\theta_1, \theta_2] \supset [\delta_1, \delta_2] \subseteq [\theta_1, \theta_2]$.

*R11.7. $\vdash [\delta_1, \delta_2] \subset [\eta_1, \eta_2] \,\&\, [\eta_1, \eta_2] \subset [\theta_1, \theta_2] \supset [\delta_1, \delta_2] \subset [\theta_1, \theta_2]$.

Доказательства. *R11.3. I. Допустим $[\delta_1, \delta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2]$. Следовательно, $\delta_1, \delta_2 \in R$ и $\delta_1, \delta_2 \in [\delta_1, \delta_2] \supset \delta_1, \delta_2 \in [\eta_1, \eta_2]$, откуда, используя *R8.5, получаем $\delta_1, \delta_2 \in [\eta_1, \eta_2]$. II. Пусть $\delta_1, \delta_2 \in [\eta_1, \eta_2]$. Следовательно, (i) $\delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2 \in R$, (ii) $\neg\, (\delta_1 \dot{<} \eta_1 \,\&\, \delta_1 \dot{<} \eta_2) \,\&\, \neg\, (\delta_1 \dot{>} \eta_1 \,\&\, \delta_1 \dot{>} \eta_2)$ и (iii) $\neg\, (\delta_2 \dot{<} \eta_1 \,\&\, \delta_2 \dot{<} \eta_2) \,\&\, \neg\, (\delta_2 \dot{>} \eta_1 \,\&\, \delta_2 \dot{>} \eta_2)$. Перед $\supset$- и $\forall$-введ. допустим (iv) $\alpha \in [\delta_1, \delta_2]$, следовательно, (v) $\neg\, (\alpha \dot{<} \delta_1 \,\&\, \alpha \dot{<} \delta_2) \,\&\, \neg\, (\alpha \dot{>} \delta_1 \,\&\, \alpha \dot{>} \delta_2)$.

Допустим для приведения к нелепости (a) $\alpha \dot{<} \eta_1 \,\&\, \alpha \dot{<} \eta_2$. Допуская $\alpha \dot{>} \delta_1 \vee \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_1$, мы разбором случаев с использованием *R7.4 (вместе с (i), (iv)) и *R7.2 выведем $\delta_1 \dot{<} \eta_1 \,\&\, \delta_1 \dot{<} \eta_2$ в противоречие с (ii). Следовательно, $\neg\, (\alpha \dot{>} \delta_1 \vee \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_1)$, откуда по *63 получаем $\neg\, \alpha \dot{>} \delta_1 \,\&\, \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_1$. Ввиду *R7.11 (а также (i), (iv)) $\alpha \dot{<} \delta_1$. Аналогично $\alpha \dot{<} \delta_2$ и по &-введ. $\alpha \dot{<} \delta_1 \,\&\, \alpha \dot{<} \delta_2$, что противоречит (v). Таким образом, отвергая (a), получаем $\neg\, (\alpha \dot{<} \eta_1 \,\&\, \alpha \dot{<} \eta_2)$. Аналогично, $\neg\, (\alpha \dot{>} \eta_1 \,\&\, \alpha \dot{>} \eta_2)$. По &-введ. $\neg\, (\alpha \dot{<} \eta_1 \,\&\, \alpha \dot{<} \eta_2) \,\&\, \neg\, (\alpha \dot{>} \eta_1 \,\&\, \alpha \dot{>} \eta_2)$, следовательно, по (i) и (iv) $\alpha \in [\eta_1, \eta_2]$.

*R11.6. Допустим (i) $[\delta_1, \delta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2]$ и (ii) $[\eta_1, \eta_2] \subseteq [\theta_1, \theta_2]$. Согласно (i) и *R11.3 $\delta_1, \delta_2 \in [\eta_1, \eta_2]$. Таким образом, по (ii) $\delta_1, \delta_2 \in [\theta_1, \theta_2]$ и по *R11.13 $[\delta_1, \delta_2] \subseteq [\theta_1, \theta_2]$.

*R11.7. Допустим (i) $[\delta_1, \delta_2] \subset [\eta_1, \eta_2]$ и (ii) $[\eta_1, \eta_2] \subset [\theta_1, \theta_2]$. Согласно *R11.6 $[\delta_1, \delta_2] \subseteq [\theta_1, \theta_2]$. При допущении $[\theta_1, \theta_2] \subseteq [\delta_1, \delta_2]$ из (i) и *R11.6 следует $[\theta_1, \theta_2] \subseteq [\eta_1, \eta_2]$, что противоречит (ii). Следовательно, $\neg\, [\theta_1, \theta_2] \subseteq [\delta_1, \delta_2]$.

16.3. Мы будем представлять последовательности действительных чисел последовательностями вида $\lambda x\varphi\,(2^0 3^x)$, $\lambda x\varphi\,(2^1 3^x)$, $\lambda x\varphi\,(2^2 3^x)$, ..., где $(n)\, \lambda x\varphi\,(2^n 3^x) \in R$.

^{x}R12.1. $\varphi_{[n]}\,(x) = \varphi\,(2^n 3^x)$.

В случае, когда символ «$\varphi_{[n]}$» используется без аргумента, он сокращает $\lambda x\varphi_{[n]}\,(x)$ (т. е. $\lambda x f_i\,(n, x, \varphi)$) для символа f_i, введенного аксиомой ^{x}R12.1. (Ср. п. 5.1.)

16.4. Мы установим теперь свойство континуума быть «плотным в себе» (Брауэр **1928a**, стр. 9, от строки 6 снизу до строки 2 стр. 10, а также стр. 7, строки 11—12). Это означает — и мы это покажем — что для каждого д.ч.г. α существует последовательность строго вложенных замкнутых интервалов такая, что α принадлежит каждому из этих интервалов, и если произвольный д. ч. г. β принадлежит всем этим интервалам, то $\beta \stackrel{\circ}{=} \alpha$.

*R12.2. $\vdash \alpha \in R \supset \exists\varphi\exists\psi \{\forall n\, [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subset [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \,\&\, \forall n \alpha \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \,\&\, \forall\beta\, (\forall n \beta \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \supset \beta \stackrel{\circ}{=} \alpha)\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in R$. Используя *R1.11, допустим (i) $\alpha' \in R' \mathbin{\&} \alpha' \doteq \alpha$. Используя лемму 5.3(a), введем φ и ψ так, что: **(ii)** $\forall a \varphi(a) = ((\alpha'(a)_0) \dot{-} 1)\cdot 2^{-(a)_0})((a)_1)$, **(iii)** $\forall a \psi(a) = ((\alpha'((a)_0) + 2)\, 2^{-(a)_0})((a)_1)$. Теперь $\varphi_{[n]}(x) = ((\alpha'(n) \dot{-} 1)\, 2^{-n})(x)$, следовательно, по ($^{\times}$0.1 и) $\forall$-введ. **(iv)** $\forall n \varphi_{[n]} = (\alpha'(n) \dot{-} 1)\, 2^{-n}$. Аналогично, **(v)** $\forall n \psi_{[n]} = (\alpha'(n) + 2)\, 2^{-n}$. Согласно *R9.2 (и *R0.7) имеем **(vi)** $\forall n \varphi_{[n]}, \psi_{[n]} \in R$. Ввиду *R9.8 **(vii)** $\forall n \varphi_{[n]} <_\circ \psi_{[n]}$, следовательно, по *R6.7 **(viii)** $\forall n \varphi_{[n]} \mathbin{{}_\circ\!\not>} \psi_{[n]}$.

I. Используя *R0.5 a—c и (i) получаем **(ix)** $2\alpha'(n) \dot{-} 2 \leqslant \alpha'(n+1) \dot{-} 1$. Далее **(x)** $\varphi_{[n]} = (\alpha'(n) \dot{-} 1)\, 2^{-n}$ [(iv)] $= (2\alpha'(n) \dot{-} 2)\, 2^{-(n+1)}$ [*R9.3] $\leqslant_\circ (\alpha'(n+1) \dot{-} 1)\cdot 2^{-(n+1)}$ [(ix), *R9.8, *R9.5] $= \varphi_{[n+1]} <_\circ \psi_{[n+1]}$ [(vii)] $= (\alpha'(n+1)+2)\cdot 2^{-(n+1)} <_\circ (2\alpha'(n)+4)\, 2^{-(n+1)}$ [*R0.5a и др.] $= (\alpha'(n)+2)\, 2^{-n} = \psi_{[n]}$. (x), По *R7.7 (и (vi)), мы легко получаем **(xi)** $[\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subseteq [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$, **(xii)** $\psi_{[n]} \notin [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}]$. Согласно *R8.5 $\psi_{[n]} \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$, что вместе с (xii) дает **(xiii)** $\neg [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \subseteq [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}]$. Из (xi) и (xiii) по &- и $\forall$-введ. получаем **(xiv)** $\forall n [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subset [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$.

II. Имеем также $\alpha' \mathbin{\not<_\circ} (\alpha'(n) \dot{-} 1)\, 2^{-n}$ [*R9.16, (i)] $= \varphi_{[n]}$. Кроме того, $\alpha' \mathbin{{}_\circ\!\not>} (\alpha'(n)+1)\cdot 2^{-n}$ [*R9.17] ${}_\circ\!\not>$ $(\alpha'(n)+2)\, 2^{-n}$ [*R9.8, *R6.7] $= \psi_{[n]}$. Таким образом, $\alpha' \mathbin{\not<_\circ} \varphi_{[n]} \mathbin{\&} \alpha' \mathbin{{}_\circ\!>} \psi_{[n]}$, следовательно, по *R8.6 (вместе с (i), (vi), (viii)) $\alpha' \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$ и по *R8.2 $\alpha \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$. По $\forall$-введ. получаем **(xv)** $\forall n \alpha \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$.

III. Допустим $\forall n \beta \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$. Используя *R1.11, получим **(xvi)** $\beta' \in R' \mathbin{\&} \beta' \doteq \beta$. Ввиду *R8.2 **(xvii)** $\forall n \beta' \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$. Допустим для приведения к нелепости (a) $\alpha' <_\circ \beta'$. Допустим $\forall p 2^k (\beta'(x+p) \dot{-} \alpha'(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$. Согласно $\forall$-удал. $2^k (\beta'(x+2+k) \dot{-} \alpha'(x+2+k)) \geqslant 2^{x+2+k}$, откуда $(\beta'(x+2+k) \dot{-} \alpha'(x+2+k)) \geqslant 2^{x+2} > 3$. Таким образом, $\beta'(x+2+k) > \alpha'(x+2+k) + 3$ и $\beta'(x+2+k) \dot{-} 1 > \alpha'(x+2+k) + 2$. Теперь $\beta' \mathbin{\not<_\circ} (\beta'(x+2+k) \dot{-} 1)\, 2^{-(x+2+k)} \mathbin{{}_\circ\!>} (\alpha'(x+2+k) + 2)\, 2^{-(x+2+k)} = \psi_{[x+2+k]}$. Таким образом, согласно *R8.6 (вместе с (viii), (vi)) $\beta' \in [\varphi_{[x+2+k]}, \psi_{[x+2+k]}]$, что противоречит (xvii). Отвергая (a), получаем **(xviii)** $\alpha' \mathbin{\not<_\circ} \beta'$. Аналогично (используя *R9.17, (iv)) получаем **(xix)** $\alpha' \mathbin{{}_\circ\!\not>} \beta'$. По (xviii), (xix) (вместе с (i) и (xvi)) и *R6.5 $\beta' \doteq \alpha'$, следовательно, $\beta \doteq \alpha$. По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем **(xx)** $\forall \beta (\forall n \beta \in [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \supset \beta \doteq \alpha)$.

16.5. Мы установим некоторую форму компактности, определенную Брауэром в работе **1928a**, стр. 12, строки 20—32. Соответствующее утверждение состоит в том, что в континууме нет «пустых вложенных интервалов», что означает невозможность последовательности вложенных замкнутых интервалов I_n такой, что для каждого д. ч. г. α существует натуральное число n_α, при котором α не лежит в I_{n_α}. Это выражается формально посредством *R12.4. Утверждение *R12.3 является полезной леммой.

*R12.3. $\vdash \forall n [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subseteq [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \supset$
$\forall n \forall m_{m \leqslant n} [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \subseteq [\varphi_{[m]}, \psi_{[m]}]$.

*R12.4. $\vdash \neg \exists \varphi \exists \psi \{\forall n [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subseteq [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$
$\mathbin{\&} \forall \alpha_{\alpha \in R} \exists b \alpha \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]\}$.

Доказательства. *R12.13. Допустим посылку (i) доказываемой импликации. Ввиду *R11.1 $\varphi_{[m]}, \psi_{[m]} \in R$. Мы выведем $[\varphi_{[m+p]}, \psi_{[m+p]}] \subseteq [\varphi_{[m]}, \psi_{[m]}]$ индукцией по p следующим образом. Базис. Используем *R11.4. Инд. шаг. Используя *R11.6, получаем

$$[\varphi_{[m+p']}, \psi_{[m+p']}] \subseteq [\varphi_{[m+p]}, \psi_{[m+p]}] \ [(i)] \subseteq [\varphi_{[m]}, \psi_{[m]}]$$

[инд. предп.].

*R12.4. Допустим (подготавливая $\exists$-удал.) **(i)** $\forall n [\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subseteq [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$ и **(ii)** $\forall \alpha_{\alpha \in R} \exists b \alpha \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]$. Согласно (i) имеет место **(iii)** $\forall n \varphi_{[n]}, \psi_{[n]} \in R$. Используя *R1.11, допустим **(iv)** $\varphi' \in R' \mathbin{\&} \varphi' \doteq \varphi_{[0]}$, **(v)** $\psi' \in R' \mathbin{\&} \psi' \doteq \psi_{[0]}$. С помощью леммы 5.3(a) введем **(vi)** $\delta_1 = 0$ и **(vii)** $\delta_2 = \varphi'(0) + \psi'(0) + 1$. Согласно *R9.2 **(viii)** $\delta_1, \delta_2 \in R'$. Ввиду *R9.18 **(ix)** $\delta_1 \mathbin{{}_\circ\!\not>} \delta_2$. Ввиду $^{\times}$R9.1 $\delta_2(x+1) = 2\delta_2(x)$ и поэтому по $\forall$-введ. **(x)** $\forall x \delta_2(x+1) = 2\delta_2(x)$. Далее, $\delta_1(x) = 0 \leqslant \delta_2(x)$, следовательно, по $\forall$-введ. **(xi)** $\delta_1 \leqslant \delta_2$. Выведем **(a)** $[\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}] \subseteq [\delta_1, \delta_2]$ индукцией по n следующим образом. Базис. Согласно *R9.18 $\varphi' \mathbin{\not<_\circ} \delta_1$. Кроме того, $\varphi' \mathbin{{}_\circ\!\not>} (\varphi'(0) + 1)\, 2^{-0}$ [*R9.17, (iv)] ${}_\circ\!\not>$ $(\varphi'(0) + \psi'(0) + 1)\, 2^{-0}$ [*R9.8, *R9.5; *R6.7, *R6.8] $= \delta_2$. Таким образом, по *R8.6 (а также (ix) и пр.) $\varphi' \in [\delta_1, \delta_2]$ и по *R8.2 и (iv) $\varphi_{[0]} \in [\delta_1, \delta_2]$. Аналогично, $\psi_{[0]} \in [\delta_1, \delta_2]$. Ввиду *R11.3 получаем $[\varphi_{[0]}, \psi_{[0]}] \subseteq [\delta_1, \delta_2]$. Инд. шаг. Ввиду *R11.6 имеем $[\varphi_{[n+1]}, \psi_{[n+1]}] \subseteq [\varphi_{[n]}, \psi_{[n]}]$ [(i)] $\subseteq [\delta_1, \delta_2]$ [инд. предп.]. Используя (viii) и (xi) в *R10.2, получаем **(xii)** $\mathrm{Spr}(\sigma) \mathbin{\&} \sigma(1) = 0 \mathbin{\&}$

$\forall a\,[\sigma(a)=0 \supset \exists b \forall s\,(\sigma(a*2^{s+1})=0 \supset s \leqslant b)]$, **(xiii)** $\forall \alpha\,[\alpha \in \sigma \sim \alpha \in R' \;\&\; \delta_1 \leqslant \alpha \leqslant \delta_2]$. При допущении $\alpha \in \sigma$ (xiii) (и *R0.7) дают $\alpha \in R$, откуда по (ii) $\exists b \alpha \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]$. С помощью $\supset$- и $\forall$-введ. получаем **(xiv)** $\forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists b \alpha \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]$. Используя (xii) и (xiv) в *27.8, допустим **(xv)** $\forall \alpha_{\alpha \in \sigma} \exists b \forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = \alpha(x) \supset \gamma \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]\}$. С целью получить (xx) допустим **(xvi)** $\mathrm{Seq}(a) \;\&\; \mathrm{lh}(a) = z \;\&\; \forall x_{x<z} (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1 \leqslant \delta_2(x) \;\&\; \forall x_{x<z \dot{-} 1} \mid 2((a)_x \mathbin{\dot{-}} 1) - ((a)_{x'} \mathbin{\dot{-}} 1) \mid \leqslant 1$; последнюю формулу мы будем сокращать посредством «$B(a, z, \delta_2)$». Введем ν посредством

$$\textbf{(xvii)} \qquad \forall x \nu(x) = \begin{cases} (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1, & \text{если } x < z, \\ 2^{x \dot{-} (z \dot{-} 1)}((a)_{z \dot{-} 1} \mathbin{\dot{-}} 1), & \text{если } x \geqslant z. \end{cases}$$

Таким образом, **(xviii)** $\forall x_{x<z} \nu(x) = (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1$. Мы выведем **(b)** $\mid 2\nu(x) - \nu(x') \mid \leqslant 1$. С л у ч а й 1: $x < z \mathbin{\dot{-}} 1$. Тогда $z > 1$, так что $x' < (z \mathbin{\dot{-}} 1) + 1 = z$. Таким образом, $\mid 2\nu(x) - \nu(x') \mid = \mid 2((a)_x \mathbin{\dot{-}} 1) - ((a)_{x'} \mathbin{\dot{-}} 1) \mid \leqslant 1$ [(xvi), инд. предп.] С л у ч а й 2: $x = z \mathbin{\dot{-}} 1$. П о д с л у ч а й 2.1: $z = 0$. Тогда ввиду (xvi) $a = 1$. Таким образом, $\mid 2\nu(x) - \nu(x') \mid = \mid 0 - 0 \mid \leqslant 1$. П о д с л у ч а й 2.2: $z \geqslant 1$. Тогда $x < z$ и $x' = z$. Таким образом, $\mid 2\nu(x) - \nu(x') \mid = \mid 2((a)_x \mathbin{\dot{-}} 1) - 2((a)_x \mathbin{\dot{-}} 1) \mid = 0 \leqslant 1$. С л у ч а й 3: $x > z \mathbin{\dot{-}} 1$. Тогда $x \geqslant z$. Таким образом, $\mid 2\nu(x) - \nu(x') \mid = \mid 2 \cdot 2^{x \dot{-} (z \dot{-} 1)}((a)_{z \dot{-} 1} \mathbin{\dot{-}} 1) - 2^{x' \dot{-} (z \dot{-} 1)}((a)_{z \dot{-} 1} \mathbin{\dot{-}} 1) \mid = 0 \leqslant 1$. Из (b) по $\forall$-введ. получаем **(xix)** $\nu \in R'$. [Мы выведем сейчас **(c)** $\nu(x) \leqslant \delta_2(x)$ индукцией по x следующим образом. Б а з и с. Разбором случаев ($z = 0$, $z > 0$) получаем $\nu(0) = (a)_0 \mathbin{\dot{-}} 1$ [(xvii)] $\leqslant \delta_2(0)$ [(xvi)]. И н д. ш а г. С л у ч а й 1: $x' < z$. Используем (xvii) и (xvi). С л у ч а й 2: $x' \geqslant z$. Тогда $\nu(x') = 2^{x' \dot{-} (z \dot{-} 1)}((a)_{z \dot{-} 1} \mathbin{\dot{-}} 1) = 2 \cdot 2^{x \dot{-} (z \dot{-} 1)}((a)_{z \dot{-} 1} \mathbin{\dot{-}} 1) = 2\nu(x)$ [по подслучаям $x' > z$ и $x' = z$] $\leqslant 2\delta_2(x)$ [инд. предп.] $= \delta_2(x')$ [(x)]. Из (c) по $\forall$-введ. получаем $\nu \leqslant \delta_2$. Аналогично (xi) имеем место $\delta_1 \leqslant \nu$. Согласно (xiii) и (xix) $\nu \in \sigma$. Ввиду (xv) $\exists b \forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = \nu(x) \supset \gamma \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]\}$. Ввиду (xviii) $\exists b \forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1 \supset \gamma \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]\}$. По $\supset$- и $\forall$-введ. (снимая (xvi)) получаем **(xx)** $\forall a \{B(a, z, \delta_2) \supset \exists b \forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1 \supset \gamma \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]\}\}$. Согласно замечанию 4.1 и тексту п. 5.5, предшествующему *15.1, имеем $B(a, z, \delta_2) \vee \neg B(a, z, \delta_2)$. Таким образом, по случаям получаем $\forall a \exists b \{[B(a, z, \delta_2) \;\&$

$\forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1 \supset \gamma \notin [\varphi_{[b]}, \psi_{[b]}]\}] \vee [\neg B(a, z, \delta_2) \;\&\; b = 0]\}$. Используя *2.2, получаем **(xxi)** $\forall a \{[B(a, z, \delta_2) \;\&\; \forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = (a)_x \mathbin{\dot{-}} 1 \supset \gamma \notin [\varphi_{[\beta(a)]}, \psi_{[\beta(a)]}]\}] \vee [\neg B(a, z, \delta_2) \;\&\; \beta(a) = 0]\}$. Пусть $t = \max_{i \leqslant \bar{\delta}_2(z)} \beta(i)$. Мы выведем противоречие следующим образом. Ввиду (a) и *R11.3 $\varphi_{[t]} \in [\delta_1, \delta_2]$. Ввиду *Ri.11 **(xxii)** $\varphi'_t \in R' \;\&\; \varphi'_t \stackrel{\circ}{=} \varphi_{[t]}$. Далее, $\varphi'_t \in [\delta_1, \delta_2]$, следовательно, по *R8.6 (вместе с (ix) и др.) $\varphi'_t \circ\!\!\not> \delta_2$. Таким образом, используя *R6.22, получаем **(xxiii)** $\varphi''_t \in R' \;\&\; \varphi''_t \stackrel{\circ}{=} \varphi_{[t]} \;\&\; \varphi''_t \leqslant \delta_2$. Аналогично (xi), $\delta_1 \leqslant \varphi''_t$. Поэтому согласно (xiii) имеем **(xxiv)** $\varphi''_t \in \sigma$. Ввиду (xxiii) вместе с *23.1, *B21, *3.12 и др. $\overline{\varphi''_t}(z) \leqslant \bar{\delta}_2(z)$. Поэтому, полагая $s = \beta(\overline{\varphi''_t}(z))$, согласно *H7 получаем **(xxv)** $s \leqslant t$. Используя *23.5 и *23.2, мы легко выводим $B(\overline{\varphi''_t}(z), z, \delta_2)$ из (xxiii), разбирая случаи ($z \leqslant 1$, $z > 1$) при установлении последней части конъюнкции. Таким образом, согласно (xxi) и *23.2 имеем $\forall \gamma_{\gamma \in \sigma} \{\forall x_{x<z} \gamma(x) = \varphi''_t(x) \supset \gamma \notin [\varphi_{[s]}, \psi_{[s]}]\}$. Отсюда ввиду (xxiv) следует $\varphi''_t \notin [\varphi_{[s]}, \psi_{[s]}]$, поэтому по (xxiii) и *R8.2 $\varphi_{[t]} \notin [\varphi_{[s]}, \psi_{[s]}]$. Однако по *R12.3, (i) и (xxv) $[\varphi_{[t]}, \psi_{[t]}] \subseteq [\varphi_{[s]}, \psi_{[s]}]$, следовательно, по *R11.3 $\varphi_{[t]} \in [\varphi_{[s]}, \psi_{[s]}]$.

16.6. Формула, стоящая справа в *R13.1 и сокращаемая как «$\alpha \in (\delta_1, \delta_2)$», выражает утверждение, что α является д. ч. г. из открытого интервала (δ_1, δ_2) или, другими словами, что α расположено «между» δ_1 и δ_2 (Брауэр **1928a**, стр. 9, строки 13—10 снизу; в связи с *R13.5 см. строки 8—6 снизу).

*R13.1. $\vdash \alpha \in (\delta_1, \delta_2) \sim \alpha \in [\delta_1, \delta_2] \;\&\; \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_1 \;\&\; \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_2$.

*R13.2. $\vdash \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \;\&\; \alpha \in (\delta_1, \delta_2) \supset \beta \in (\delta_1, \delta_2)$.

*R13.3. $\vdash \delta_1 \stackrel{\circ}{=} \delta'_1 \;\&\; \alpha \in (\delta_1, \delta_2) \supset \alpha \in (\delta'_1, \delta_2)$.

*R13.4. $\vdash \delta_2 \stackrel{\circ}{=} \delta'_2 \;\&\; \alpha \in (\delta_1, \delta_2) \supset \alpha \in (\delta_1, \delta'_2)$.

*R13.5. $\vdash \alpha, \delta_1, \delta_2 \in R \;\&\; \delta_1 \mathrel{\dot{<}} \delta_2 \supset \{\alpha \in (\delta_1, \delta_2) \sim \delta_1 \mathrel{\dot{<}} \alpha \mathrel{\dot{<}} \delta_2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *R13.5. Пусть α, δ_1 $\delta_2 \in R$ и (i) $\delta_1 \mathrel{\dot{<}} \delta_2$. I. Допустим **(ii)** $\alpha \in [\delta_1, \delta_2]$, **(iii)** $\neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_1 \;\&\; \neg\, \alpha \stackrel{\circ}{=} \delta_2$. Используя (i) и (ii) (и *R7.4), получаем $\neg\, \alpha \mathrel{\dot{<}} \delta_1 \;\&\; \neg\, \alpha \mathrel{\dot{>}} \delta_2$. Отсюда ввиду (iii) и *R7.11 получаем $\delta_1 \mathrel{\dot{<}} \alpha \;\&\; \alpha \mathrel{\dot{<}} \delta_2$. II. Используем *R7.11.

*R13.8 утверждает, что континуум «всюду плотен» (Брауэр **1928а**, стр. 12, строки 4—9). *R13.6 и *R13.7 используются в доказательстве *R13.8.

*R13.6. $\vdash \forall x \mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid \leqslant 2 \supset$
$$\forall p \forall x \mid 2^p \alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^{p+1}.$$

*R13.7. $\vdash \forall x \mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid \leqslant 2 \supset \alpha \in R.$

*R13.8. $\vdash \alpha, \beta \in R \;\&\; \neg\, \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \supset \exists \gamma_{\gamma \in R}\, \gamma \in (\alpha, \beta).$

Доказательства. *R13.6. Допуская (i) $\forall x \mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid \leqslant 2$, мы выводим $\forall x \mid 2^p\alpha(x) - \alpha(x+p) \mid < 2^{p+1}$ индукцией по p следующим образом. *Инд. шаг.* $\mid 2^{p'}\alpha(x) - \alpha(x+p') \mid \leqslant 2^p \mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid + \mid 2^p\alpha(x') - \alpha(x'+p) \mid < 2^{p+1} + 2^{p+1}$ [(i), инд. предп.] $= 2^{p'+1}$.

*R13.7. Допустим $\forall x \mid 2\alpha(x) - \alpha(x') \mid \leqslant 2$. Ввиду *R13.6 $2^k \mid 2^p\alpha(k+1) - \alpha(k+1+p) \mid < 2^{k+1+p}$, следовательно, $\alpha \in R$.

*R13.8. Допустим $\alpha, \beta \in R$, (i) $\neg\, \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta$. Ввиду *R1.11 имеем (**ii**) $\alpha' \in R' \;\&\; \alpha' \mathrel{\overset{\circ}{=}} \alpha$, (**iii**) $\beta' \in R' \;\&\; \beta' \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta$. Введем γ по лемме 5.3 (а) так, что

$$\text{(A)}\quad \forall x \gamma(x) = \min(\alpha'(x);\ \beta'(x)) + [\max(\alpha'(x),\ \beta'(x)) \dot{-} \min(\alpha'(x),\ \beta'(x))/2].$$

Таким образом, мы можем написать $\gamma(x) = b + [a \dot{-} b/2]$ [где $a \geqslant b$ по *8.8] $\leqslant b + [a \dot{-} b/1]$ [*13.11] $= b + (a \dot{-} b)$ [*13.6] $= a$ [*6.7]. Таким образом, получаем (**iv**) $\forall x \min(\alpha'(x), \beta'(x)) \leqslant \gamma(x) \leqslant \max(\alpha'(x), \beta'(x))$. Мы теперь выведем (**v**) $(\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} 1 \leqslant 2\gamma(x) \leqslant \alpha'(x) + \beta'(x)$ и (**vi**) $(\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} 1 \leqslant \gamma(x') \leqslant \alpha'(x) + \beta'(x) + 1$. *Случай* 1: $\alpha'(x) \leqslant \beta'(x) \;\&\; \alpha'(x') \leqslant \beta'(x')$. Чтобы получить (v), мы рассмотрим случаи, вытекающие из *12.3 вместе с $r < 2 \sim r = 0 \vee r = 1$ (приспосабливаем ВМ, стр. 179, строки 6—7 сверху). *Случай* A: $\mathrm{rm}(\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x), 2) = 0$. Тогда по *13.4 $\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x) = 2[\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x)/2]$. Поэтому $2\gamma(x) = 2\alpha'(x) + 2[\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x)/2]$ [(A), предположение случая 1, *7.2, *8.2] $= 2\alpha'(x) + (\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x)) = \alpha'(x) + \beta'(x)$ [*6.6, *6.3]. *Случай* B: $\mathrm{rm}(\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x), 2) = 1$. Тогда аналогично получаем $\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x) = 2[\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x)/2] + 1$, следовательно, $\beta'(x) \geqslant \alpha'(x) + 1$. Теперь $2\gamma(x) = 2\alpha'(x) + ((\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x)) \dot{-} 1) = 2\alpha'(x) + (\beta'(x) \dot{-} (\alpha'(x) + 1))$

[*6.5] $= (2\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} (\alpha'(x) + 1)$ [*6.6] $= (\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} 1$ [*6.5, *6.3]. Для доказательства (vi) рассмотрим ряд случаев. *Случай* A′: $\alpha'(x') < 2\alpha'(x) \;\&\; \beta'(x') < 2\beta'(x)$. Тогда $2\alpha'(x) \geqslant 1 \;\&\; 2\beta'(x) \geqslant 1$ и $\alpha'(x') = 2\alpha'(x) \dot{-} 1 \;\&\; \beta'(x') = 2\beta'(x) \dot{-} 1$ [*R0.5a—b, (ii), (iii)]. Таким образом, $\gamma(x') = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [(2\beta'(x) \dot{-} 1) \dot{-} (2\alpha'(x) \dot{-} 1)/2] = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [2\beta'(x) \dot{-} 2\alpha'(x)/2]$ [*6.9, *6.7] $= (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + (\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x))$ [*6.14, *13.8, ×13.1] $= (2\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} (1 + \alpha'(x))$ [*6.6 дважды, *6.5] $= (\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} 1$ [*6.5, *6.3].

Случай B′: $\alpha'(x') < 2\alpha'(x) \;\&\; \beta'(x') = 2\beta'(x)$. Аналогично, $\gamma(x') = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [2\beta'(x) \dot{-} (2\alpha'(x) \dot{-} 1)/2] = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [(2\beta'(x) + 2) \dot{-} (2\alpha'(x) + 1)/2] = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [((2\beta'(x) + 2) \dot{-} 2\alpha'(x)) \dot{-} 1/2] = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + (((\beta'(x) + 1) \dot{-} \alpha'(x)) \dot{-} 1)$ [*13.9, *13.7] $= (\alpha'(x) + \beta'(x)) \dot{-} 1$. *Случай* C′: $\alpha'(x') < 2\alpha'(x) \;\&\; \beta'(x') > 2\beta'(x)$. Аналогично, $\gamma(x') = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [(2\beta'(x) + 1) \dot{-} (2\alpha'(x) \dot{-} 1)/2] = (2\alpha'(x) \dot{-} 1) + [(2\beta'(x) + 2) \dot{-} 2\alpha'(x)/2]$ и т. д. *Случаи* D′ — I′ рассматриваются аналогично. *Случай* 2: $\alpha'(x) \geqslant \beta'(x) \;\&\; \alpha'(x') \geqslant \beta'(x')$. Симметрично случаю 1. *Случай* 3: $\alpha'(x) \leqslant \beta'(x) \;\&\; \alpha'(x') \geqslant \beta'(x')$. *Подслучай* 3.1: $\alpha'(x) < \beta'(x)$. Но тогда $\alpha'(x') \leqslant 2\alpha'(x) + 1$ [*R0.5a—c, (ii)] $\leqslant 2\beta'(x) \dot{-} 1 \leqslant \beta'(x')$; таким образом, этот подслучай следует из случая 1. *Подслучай* 3.2: $\alpha'(x) = \beta'(x)$. Тогда $\alpha'(x) \geqslant \beta'(x)$ и, таким образом, этот подслучай следует из случая 2. *Случай* 4: $\alpha'(x) \geqslant \beta'(x) \;\&\; \alpha'(x') \leqslant \beta'(x')$. Симметрично случаю 3. Из (v) и (vi) получаем $|2\gamma(x) - \gamma(x')| \leqslant 2$, следовательно, по $\forall$-введ. и *R13.7 имеем (**vii**) $\gamma \in R$. Чтобы получить (viii), допустим (**a**) $\gamma \mathrel{<\!\circ} \alpha'$ и для приведения к нелепости (**b**) $\gamma \mathrel{<\!\circ} \beta'$. Исходя из этого, допустим $\forall p 2^{k_1} (\alpha'(x_1 + p) \dot{-} \gamma(x_1 + p)) \geqslant 2^{x_1+p}$ и $\forall p 2^{k_2} (\beta'(x_2 + p) \dot{-} \gamma(x_2 + p)) \geqslant 2^{x_2+p}$ и, используя *R0.9, получим $\forall p \alpha'(x+p) > \gamma(x+p)$ и $\forall p \beta'(x+p) > \gamma(x+p)$. Тогда $\alpha'(x) > \gamma(x)$ и $\beta'(x) > \gamma(x)$, таким образом, по *7.6 $\min(\alpha'(x), \beta'(x)) > \gamma(x)$, что противоречит (iv). Поэтому, отвергая (b), получаем $\gamma \mathrel{\not<\!\circ} \beta$. По $\supset$-введ., снимая (a), получим (**viii**) $\gamma \mathrel{<\!\circ} \alpha' \supset \gamma \mathrel{\not<\!\circ} \beta'$ и по контрапозиции $\neg\, \gamma \mathrel{\not<\!\circ} \beta' \supset \neg\, \gamma \mathrel{<\!\circ} \alpha'$. Согласно *R7.8, *R7.9, (ii), (iii) и (vii) $\gamma \mathrel{\dot{<}} \beta' \supset \neg\, \gamma \mathrel{\dot{<}} \alpha'$, следовательно, по *58b

$\neg(\gamma \dot{<} \alpha' \,\&\, \gamma \dot{<} \beta')$. Симметрично $\neg(\gamma \dot{>} \alpha' \,\&\, \gamma \dot{>} \beta')$. По &-введ. вместе с (ii), (iii) и (vii) имеем $\gamma \in [\alpha', \beta']$ и отсюда по (ii), (iii) и *R8.3 — *R8.4 (ix) $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Чтобы доказать $\neg\gamma \stackrel{\circ}{=} \alpha$, допустим (c) $\gamma \stackrel{\circ}{=} \alpha'$. Сперва опровергнем (d) $\gamma <\circ\, \beta'$. Допустим, исходя из (c), (d) и *R0.9, (e) $\forall p 2^{k+1} |\gamma(x+p) - \alpha'(x+p)| < 2^{x+p}$ и $\forall p 2^{k_1}(\beta'(x+p) \dot{-} \gamma(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$. Тогда $\forall p \beta'(x+p) > \gamma(x+p)$. Используя также (iv) (поскольку $\min(a, b) = a \vee \min(a, b) = b$), получаем (f) $\forall p \alpha'(x+p) \leqslant \gamma(x+p) < \beta'(x+p)$. Полагая, что t есть $x+k+1+p$, выводим (g) $\forall p 2^k(1 + (\gamma(t) \dot{-} \alpha'(t))) < 2^t$ следующим образом. С л у ч а й 2: $\gamma(t) - \alpha'(t) \neq 0$. Тогда $2^k(1 + (\gamma(t) \dot{-} \alpha'(t))) \leqslant 2^{k+1}(\gamma(t) \dot{-} \alpha'(t)) < 2^t$ [(e)]. Теперь $\gamma(t) \geqslant ((\alpha'(t) + \beta'(t)) \dot{-} 1) \dot{-} \gamma(t)$ [(v), *6.17, *6.3] $= ((\alpha'(t) + \beta'(t)) \dot{-} \gamma(t)) \dot{-} 1$ [*6.5] $= (\alpha'(t) + (\beta'(t) \dot{-} \gamma(t))) \dot{-} 1$ [*6.6, (f)]. Таким образом, имеет место (h) $(1 + \gamma(t)) \dot{-} \alpha'(t) \geqslant \beta'(t) \dot{-} \gamma(t)$. Тогда $2^k |\beta'(t) - \gamma(t)| = 2^k(\beta'(t) \dot{-} \gamma(t))$ [(f)] $\leqslant 2^k((1 + \gamma(t)) \dot{-} \alpha'(t))$ [(h)] $= 2^k(1 + (\gamma(t) \dot{-} \alpha'(t)))$ [*6.6, (f)] $< 2^t$ [(g)]. По $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. $\beta' \stackrel{\circ}{=} \gamma$, что противоречит (d) ввиду *R6.4. Следовательно, $\gamma \not<\circ\, \beta'$. Аналогично, $\gamma \circ\!\!\not> \beta'$. По *R6.5 $\gamma \stackrel{\circ}{=} \beta'$. Согласно (c) $\alpha' \stackrel{\circ}{=} \beta'$ и по (ii), (iii) $\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$, что противоречит (i). Следовательно, отрицая (c), получаем $\neg\gamma \stackrel{\circ}{=} \alpha'$. Согласно (ii) $\neg\gamma \stackrel{\circ}{=} \alpha$. Симметрично $\neg\gamma \stackrel{\circ}{=} \beta$. По &-введ. вместе с (ix) получаем (x) $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

16.7. Чтобы выразить «острое различие» двух д. ч. г. (Брауэр **1928a**, стр. 10, строки 27—33), мы используем формулу в правой части *R14.1, сокращаемую как «$\alpha \neq_s \beta$». (В связи с *R14.2 ср. Брауэр **1928a**, стр. 10, примечание 7.)

*R14.1. $\vdash \alpha \neq_s \beta \sim \neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \,\&\, \forall\gamma_{\gamma\in R}\{\gamma \notin (\alpha, \beta) \supset$

$(\neg\gamma \dot{>} \alpha \,\&\, \neg\gamma \dot{>} \beta) \vee (\neg\gamma \dot{<} \alpha \,\&\, \neg\gamma \dot{<} \beta)\}$.

*R14.2. $\vdash \alpha, \beta \in R \,\&\, \alpha \neq_s \beta \supset \alpha \dot{<} \beta \vee \beta \dot{<} \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в а. *R14.2. Допустим $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha \neq_s \beta$. Тогда (i) $\neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$ и (ii) $\alpha \notin (\alpha, \beta) \supset (\neg\alpha \dot{>} \alpha \,\&\, \neg\alpha \dot{>} \beta) \vee (\neg\alpha \dot{<} \alpha \,\&\, \neg\alpha \dot{<} \beta)$. Ввиду *R1.4 $\alpha \notin (\alpha, \beta)$. Используя также *R7.6, приводим (ii) по *41 и *45 к виду $\neg\alpha \dot{>} \beta \vee \neg\alpha \dot{<} \beta$. Тогда по (i) и *R7.11 $\alpha \dot{<} \beta \vee \beta \dot{<} \alpha$.

Как мы покажем в *R14.11, для д. ч. г. острое различие эквивалентно отношению отделенности из *R2.1. Утверждения *R14.3 — *R14.10 устанавливают существование некоторого потока с подходящими свойствами, подготавливая использование принципа Брауэра (*27.6) в доказательстве *R14.11.

*R14.3. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset \forall x(\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 2 \supset \beta(x') \dot{-} \alpha(x') \geqslant 2)$.

*R14.4. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset \forall x(\beta(x) \dot{-} \alpha(x) > 2 \supset \beta(x') \dot{-} \alpha(x') > 2)$.

*R14.5. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset \forall x(\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 2 \,\&\, \beta(x') \dot{-} \alpha(x') = 2 \supset \alpha(x') = 2\alpha(x) + 1 \,\&\, \beta(x') = 2\beta(x) \dot{-} 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в а. *R14.3. Допустим $\alpha, \beta \in R'$ и $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 2$. Тогда $2\beta(x) \dot{-} 1 = 2\alpha(x) + 3$. Таким образом, $\beta(x') \dot{-} \alpha(x') \geqslant (2\beta(x) \dot{-} 1) \dot{-} \alpha(x')$ [$\beta \in R'$, R0.5a—c, *6.17] $\geqslant (2\beta(x) \dot{-} 1) \dot{-} (2\alpha(x) + 1)$ [$\alpha \in R'$, *R0.5a—c, *6.18] $= (2\alpha(x) + 3) \dot{-} (2\alpha(x) + 1) = 2$.

*R14.4. Допустим $\alpha, \beta \in R'$ и $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) > 2$. Тогда $2\beta(x) \dot{-} 1 > 2\alpha(x) + 3 > 2\alpha(x) + 1$. Таким образом, $\beta(x') \dot{-} \alpha(x') \geqslant (2\beta(x) \dot{-} 1) \dot{-} (2\alpha(x) + 1) > (2\alpha(x) + 3) \dot{-} (2\alpha(x) + 1)$ [*6.19] $= 2$.

*R14.5. Допустим $\alpha, \beta \in R'$, $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 2$ и $\beta(x') - \alpha(x') = 2$. Если $\alpha(x') \neq 2\alpha(x) + 1$, то по *R0.5a $\alpha(x') \leqslant 2\alpha(x)$, следовательно, $2 = \beta(x') \dot{-} \alpha(x') \geqslant \beta(x') \dot{-} 2\alpha(x) \geqslant (2\beta(x) \dot{-} 1) \dot{-} 2\alpha(x) = 2(\beta(x) \dot{-} \alpha(x)) \dot{-} 1 = 3$. Поэтому, $\alpha(x') = 2\alpha(x) + 1$. Аналогично, $\beta(x') = 2\beta(x) \dot{-} 1$.

*R14.6. $\vdash \alpha, \beta \in R' \,\&\, \alpha \leqslant \beta \supset$
$\exists\alpha'_{\alpha'\in R'} \exists\beta'_{\beta'\in R'} \{\alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha \,\&\, \beta' \stackrel{\circ}{=} \beta \,\&\, \alpha' \leqslant \beta' \,\&\, \forall x(\beta'(x) \dot{-} \alpha'(x) = 2 \supset \beta'(x') \dot{-} \alpha'(x') > 2)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим (i) $\alpha \in R'$, (ii) $\beta \in R'$, (iii) $\alpha \leqslant \beta$. Введем α' и β', используя лемму 5.5(b) и (a) и беря $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 2 \,\&\, \beta(x') \dot{-} \alpha(x') = 2$ в качестве $A(\alpha, \beta, x)$.

$$(\mathrm{A1}) \qquad \alpha'(0) = \begin{cases} \alpha(0) + 1, & \text{если } A(\alpha, \beta, 0), \\ \alpha(0) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$(\mathrm{A2}) \quad \forall x \alpha'(x') = \begin{cases} \alpha(x') + 1, & \text{если } A(\alpha, \beta, x) \,\&\, \alpha(x) \neq 2\alpha'(x) + 1, \\ \alpha(x') & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \beta'(x) = \begin{cases} \alpha(x) + 1, & \text{если } A(\alpha, \beta, x) \,\&\, \alpha(x) = 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1, \\ \beta(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда легко получаем (iv) $\forall x (\alpha(x) \leqslant \alpha'(x) \leqslant \alpha(x) + 1)$, (v) $\forall x (A(\alpha, \beta, x) \,\&\, \alpha(x) \neq 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1 \supset \alpha'(x) = \alpha(x) + 1)$ и (vi) $\forall x (\neg A(\alpha, \beta, x) \supset \alpha'(x) = \alpha(x) \,\&\, \beta'(x) = \beta(x))$.

I. Мы выведем $|2\alpha'(x) - \alpha'(x')| \leqslant 1$, а следовательно (по $\forall$-введ.), $\alpha' \in R'$. Случай 1: $A(\alpha, \beta, x) \,\&\, \alpha(x) \neq 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1$. Подслучай 1.1: $A(\alpha, \beta, x') \,\&\, \alpha(x') \neq 2\alpha'(x) + 1$. Тогда по *R14.5 $\alpha(x') = 2\alpha(x) + 1$. Ввиду (v) $\alpha'(x) = \alpha(x) + 1$ и $\alpha'(x') = \alpha(x') + 1$. Таким образом, $|2\alpha'(x) - \alpha'(x')| = |2(\alpha(x) + 1) - (\alpha(x') + 1)| = |(2\alpha(x) + 2) - (2\alpha(x) + 2)| = 0 \leqslant 1$. Подслучай 1.2: $\neg A(\alpha, \beta, x') \vee \alpha(x') = 2\alpha'(x) + 1$. По предположению рассматриваемого случая и (v) получаем $\alpha'(x) = \alpha(x) + 1$. Таким образом, $|2\alpha'(x) - \alpha'(x')| = |2(\alpha(x) + 1) - \alpha(x')|$ [(A2)] $= |(2\alpha(x) + 4) - (\alpha(x') + 2)|$ [*11.7] $= |2\beta(x) - \beta(x')|$ [$A(\alpha, \beta, x)$] $\leqslant 1$ [ii]. Случай 2: $\neg A(\alpha, \beta, x) \vee \alpha(x) = 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1$. Мы выведем (a) $\alpha'(x) = \alpha(x)$ следующим образом. Случай A: $x = 0$. Согласно (iv) $\alpha'(0) \geqslant \alpha(0)$. Следовательно, $\alpha(0) \neq 2\alpha'(0) + 1$, откуда по предположению случая 2 $\neg A(\alpha, \beta, 0)$. Согласно (A1) $\alpha'(0) = \alpha(0)$. Случай B: $x > 0$. Используем предположение случая 2. Подслучай 2.1: $A(\alpha, \beta, x') \,\&\, \alpha(x') \neq 2\alpha'(x) + 1$. Тогда по (v) имеем (i′) $\alpha'(x') = \alpha(x') + 1$. Согласно (a) $\alpha(x') \neq 2\alpha(x) + 1$. Ввиду (i) и *R0.5a—b $\alpha(x') + 1 = 2\alpha(x) \vee \alpha(x') = 2\alpha(x)$. Мы выведем (b) $\alpha'(x') = 2\alpha(x) \vee \alpha'(x') = 2\alpha(x) + 1$. Случай A: $\alpha(x') + 1 = 2\alpha(x)$. Тогда $\alpha'(x') = \alpha(x') + 1$ [(i′)] $= 2\alpha(x)$. Случай B:

$\alpha(x') = 2\alpha(x)$. Тогда $\alpha'(x') = \alpha(x') + 1 = 2\alpha(x) + 1$. Теперь, разбирая случаи из (b) и используя (a), получаем $|2\alpha'(x) - \alpha'(x')| \leqslant 1$. Подслучай 2.2: $\neg A(\alpha, \beta, x') \vee \alpha(x') = 2\alpha'(x) + 1$. Тогда $|2\alpha'(x) - \alpha'(x')| = |2\alpha(x) - \alpha(x')|$ [(a), (A2)] $\leqslant 1$ [(i)].

II. Мы выведем сейчас $|2\beta'(x) - \beta'(x')| \leqslant 1$, а следовательно (по $\forall$-введ.), и $\beta' \in R'$. Случай 1: $A(\alpha, \beta, x) \,\&\, \alpha(x) = 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1$. Подслучай 1.1: $A(\alpha, \beta, x') \,\&\, \alpha(x') = 2\alpha'(x) + 1$. Ввиду *R14.5 $\alpha(x') = 2\alpha(x) + 1$. Теперь $|2\beta'(x) - \beta'(x')| = |2(\alpha(x) + 1) - (\alpha(x') + 1)|$ [(B)] $= |(2\alpha(x) + 2) - (2\alpha(x) + 2)| = 0 \leqslant 1$. Подслучай 1.2: $\neg A(\alpha, \beta, x') \vee \alpha(x') \neq 2\alpha'(x) + 1$. Тогда $\alpha(x') = 2\alpha(x) + 1$ (используем *R14.5) и $\beta(x') = \alpha(x') + 2$ (используем предположение данного случая). Таким образом, $|2\beta'(x) - \beta'(x')| = |2(\alpha(x) + 1) - \beta(x')|$ [(B)] $= |(\alpha(x') + 1) - (\alpha(x') + 2)| = 1$. Случай 2: $\neg A(\alpha, \beta, x) \vee \alpha(x) \neq 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1$. Подслучай 2.1: $A(\alpha, \beta, x') \,\&\, \alpha(x') = 2\alpha'(x) + 1$. Если $\alpha'(x) \neq \alpha(x)$, то по (iv) $\alpha'(x) = \alpha(x) + 1$, $\alpha(x') = 2\alpha'(x) + 1$ [предп. подслучая] $= 2(\alpha(x) + 1) + 1 = 2\alpha(x) + 3$, что по *R0.5a противоречит (i). Поэтому (i″) $\alpha'(x) = \alpha(x)$. Таким образом, по предположению данного подслучая (ii″) $\alpha(x') = 2\alpha(x) + 1$ и, кроме того, по *R14.4 (вместе с $A(\alpha, \beta, x')$) (iii″) $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) \leqslant 2$. Допустим для приведения к нелепости (a′) $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 2$. Тогда, используя $A(\alpha, \beta, x')$ (из предположения данного подслучая), получаем $A(\alpha, \beta, x)$. Тогда по предположению рассматриваемого случая $\alpha(x) \neq 2\alpha'(x \dot{-} 1) + 1$. Далее по (v) $\alpha'(x) = \alpha(x) + 1$, что противоречит (i″). Таким образом, отвергая (a′), получаем (iv″) $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) \neq 2$. Если $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 0$, то $\beta(x') = \alpha(x') + 2$ [предп. данного подслучая] $= 2\alpha(x) + 3$ [(ii″)] $\geqslant 2\beta(x) + 3$ [*6.11], что противоречит (ii) по *R0.5a. Таким образом, $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) \neq 0$. Тогда по (iii″) и (iv″) $\beta(x) \dot{-} \alpha(x) = 1$. Поэтому $|2\beta'(x) - \beta'(x')| = |2\beta(x) - (\alpha(x') + 1)|$ [(B)] $= |2(\alpha(x) + 1) - (\alpha(x') + 1)| = |(2\alpha(x) + 2) - (2\alpha(x) + 2)|$ [(ii″)] $= 0 \leqslant 1$. Подслучай 2.2: $\neg A(\alpha, \beta, x') \vee \alpha(x') \neq 2\alpha'(x) + 1$. Тогда $|2\beta'(x) - \beta'(x')| = |2\beta(x) - \beta(x')| \leqslant 1$ [(ii)].

III. Из (iv) по *11.15a получаем $|\alpha'(k' + p) - \alpha(k' + p)| \leqslant 1$. Тогда $2^k |\alpha'(k' + p) - \alpha(k' + p)| < 2^{k' + p}$, следовательно, по $\forall$-, $\exists$- и $\forall$-введ. $\alpha' \doteq \alpha$.

IV. Мы сейчас выведем $|\beta'(k'+p)-\beta(k'+p)|\leqslant 1$, а следовательно, $\beta'\doteq\beta$. Случай 1: $A(\alpha,\beta,k'+p)\ \&\ \alpha(k'+p)=2\alpha'((k'+p)\dot{-}1)+1$. Тогда $\beta(k'+p)=\alpha(k'+p)+2$. Таким образом, $|\beta'(k'+p)-\beta(k'+p)|=|(\alpha(k'+p)+1)-(\alpha(k'+p)+2)|$ [B] $=1$. Случай 2: $\neg A(\alpha,\beta,k'+p)\vee\alpha(k'+p)\neq 2\alpha'((k'+p)\dot{-}1)+1$. Тогда $|\beta'(k'+p)-\beta(k'+p)|=|\beta(k'+p)-\beta(k'+p)|=0\leqslant 1$.

V. Мы выведем $\alpha'(x)\leqslant\beta'(x)$, а следовательно, $\alpha'\leqslant\beta'$. Случай 1: $A(\alpha,\beta,x)$. Подслучай 1.1: $\alpha(x)=2\alpha'(x\dot{-}1)+1$. Тогда $\alpha'(x)\leqslant\alpha(x)+1$ [(iv)] $=\beta'(x)$ [(B)]. Подслучай 1.2: $\alpha(x)\neq 2\alpha'(x\dot{-}1)+1$. Тогда $\alpha'(x)=\alpha(x)+1$ [(v)] $<\alpha(x)+2=\beta(x)$ [предп. рассматриваемого случая] $=\beta'(x)$ [(B)]. Случай 2: $\neg A(\alpha,\beta,x)$. Тогда $\alpha'(x)=\alpha(x)$ [(vi)] $\leqslant\beta(x)$ [(iii)] $=\beta'(x)$ [(vi)].

VI. С целью доказать (x) допустим **(vii)** $\beta'(x)\dot{-}\alpha'(x)=2$. Допустим для приведения к нелепости (a″) $A(\alpha,\beta,x)$. Случай 1: $\alpha(x)=2\alpha'(x\dot{-}1)+1$. Тогда $\beta'(x)\dot{-}\alpha'(x)=(\alpha(x)+1)\dot{-}\alpha'(x)$ [(B)] $\leqslant(\alpha(x)+1)\dot{-}\alpha(x)$ [(iv)] $=1$, что противоречит (vii). Случай 2: $\alpha(x)\neq 2\alpha'(x\dot{-}1)+1$. Тогда $\beta'(x)\dot{-}\alpha'(x)=\beta(x)\dot{-}\alpha'(x)$ [(B)] $=\beta(x)\dot{-}(\alpha(x)+1)$ [(v)] $=(\beta(x)\dot{-}\alpha(x))\dot{-}1=2\dot{-}1$ [(a″)] $=1$, что противоречит (vii). Таким образом, $\neg A(\alpha,\beta,x)$, следовательно, **(viii)** $\beta(x)\dot{-}\alpha(x)\neq 2\vee\beta(x')\dot{-}\alpha(x')\neq 2$. Согласно (vi) $\alpha'(x)=\alpha(x)\ \&\ \beta'(x)=\beta(x)$. Таким образом, используя (vii) и (viii), получаем **(ix)** $\beta(x')\dot{-}\alpha(x')\neq 2$. Поэтому $\neg A(\alpha,\beta,x')$. Согласно (vi) $\alpha'(x')=\alpha(x')\ \&\ \beta'(x')=\beta(x')$. Следовательно, по (ix) $\beta'(x')\dot{-}\alpha'(x')\neq 2$. Таким образом, по *R14.3, I, II и (vii) $\beta'(x')\dot{-}\alpha'(x')>2$. Согласно $\supset$- и $\forall$-введ. **(x)** $\forall x(\beta'(x)\dot{-}\alpha'(x)=2\supset\beta'(x')\dot{-}\alpha'(x')>2)$.

В *R14.8 (ниже) $A(\gamma,\alpha,\beta,y)$ есть

$$\forall x[(x\leqslant y\supset\gamma(x)=\alpha(x))\ \&\ (x>y\supset\gamma(x)=\beta(x))].$$

*R14.7. $\vdash\ \alpha,\beta\in R'\ \&\ \beta(x)\dot{-}\alpha(x)>2\supset|\beta-\alpha|\not<_\circ 1\cdot 2^{-x}$.

*R14.8. $\vdash\ \alpha,\beta\in R'\ \&\ \alpha\leqslant\beta\ \&\ \forall x(\beta(x)\dot{-}\alpha(x)=2\supset\beta(x')\dot{-}\alpha(x')>2)\ \&\ |\beta-\alpha|<_\circ 1\cdot 2^{-(y+2)}\supset\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\alpha,\beta,y)\vee\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\beta,\alpha,y)$.

Доказательства. *R14.7. Допустим **(i)** $\alpha,\beta\in R'$, **(ii)** $\beta(x)\dot{-}\alpha(x)>2$. Тогда $3\cdot 2^{-x}\leqslant_\circ|\beta(x)-\alpha(x)|2^{-x}$ [(ii), *R9.8, *R9.5] $\doteq|\beta(x)2^{-x}-\alpha(x)2^{-x}|$ [*R9.14] $\circ\!\not>|\beta(x)2^{-x}-\beta|+|\beta-\alpha|+|\alpha-\alpha(x)2^{-x}|$ [*R6.17] $\circ\!\not> 1\cdot 2^{-x}+|\beta-\alpha|+1\cdot 2^{-x}$ [*R9.15, (i); *R6.16] $\doteq 2\cdot 2^{-x}+|\beta-\alpha|$. Отсюда, используя *R6.16, получаем $|\beta-\alpha|\not<_\circ 1\cdot 2^{-x}$.

*R14.8. Допустим **(i)** $\alpha\in R'$, **(ii)** $\beta\in R'$, **(iii)** $\alpha\leqslant\beta$, **(iv)** $\forall x(\beta(x)\dot{-}\alpha(x)=2\supset\beta(x')\dot{-}\alpha(x')>2)$, **(v)** $|\beta-\alpha|<_\circ 1\cdot 2^{-(y+2)}$. С целью получить (vi) допустим **(a)** $x\leqslant y+1$ и для приведения к нелепости допустим (b) $\beta(x)\dot{-}\alpha(x)\geqslant 2$. По случаям из (b), используя *R14.4 и (iv), получаем $\beta(x')\dot{-}\alpha(x')>2$. Теперь $|\beta-\alpha|\not<_\circ 1\cdot 2^{-x'}$ [*R14.7] $\circ\!\geqslant 1\cdot 2^{-(y+2)}$ [(a) вместе с *R9.5, *R9.7, *3.12], что противоречит (v). По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем **(vi)** $\forall x(x\leqslant y+1\supset\beta(x)\dot{-}\alpha(x)\leqslant 1)$. Согласно (vi) $\beta(y)\dot{-}\alpha(y)\leqslant 1$. Выведем **(c)** $\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\alpha,\beta,y)\vee\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\beta,\alpha,y)$. Случай 1: $\beta(y)\dot{-}\alpha(y)=0$. Введем γ по лемме 5.5(a):

$$\text{(A)}\qquad \forall x\gamma(x)=\begin{cases}\alpha(x), & \text{если}\ \ x\leqslant y,\\ \beta(x), & \text{если}\ \ x>y.\end{cases}$$

Тогда $A(\gamma,\alpha,\beta,y)$. Выведем $|2\gamma(x)-\gamma(x')|\leqslant 1$. Случай A: $x<y$. Используем (i). Случай B: $x=y$. Тогда $|2\gamma(x)-\gamma(x')|=|2\alpha(y)-\beta(y')|=|2\beta(y)-\beta(y')|$ [предп. случая 1, (iii)] $\leqslant 1$ [(ii)]. Случай C: $x>y$. Используем (ii). По $\forall$-введ. $\gamma\in R'$. Используя &-, $\exists$- и $\vee$-введ., получаем (c), Случай 2: $\beta(y)\dot{-}\alpha(y)=1$. Тогда (i′) $2\beta(y)\dot{-}1=2\alpha(y)+1$. Ввиду (vi) $\beta(y')\dot{-}\alpha(y')\leqslant 1$. Подслучай 2.1: $\beta(y')\dot{-}\alpha(y')=0$. Введем γ согласно (A), как было сделано выше. Тогда $A(\gamma,\alpha,\beta,y)$. Выведем $|2\gamma(x)-\gamma(x')|\leqslant 1$. Случай A: $x<y$. Используем (i). Случай B: $x=y$. Тогда $|2\gamma(x)-\gamma(x')|=|2\alpha(y)-\beta(y')|=|2\alpha(y)-\alpha(y')|$ [предп. подслучая, (iii)] $\leqslant 1$ [(i)]. Случай C: $x>y$. Используем (ii). По $\forall$-введ. $\gamma\in R'$. По &-, $\exists$- и $\vee$-введ. получаем (c). Подслучай 2.2: $\beta(y')\dot{-}\alpha(y')=1$. Тогда (ii′) $\beta(y')>\alpha(y')$. Если $2\alpha(y)>\alpha(y')$, то по (i′) $2\beta(y)\dot{-}1>\alpha(y')$ и тогда $1=\beta(y')\dot{-}\alpha(y')$ [предп. подслучая] $\geqslant(2\beta(y)\dot{-}1)\dot{-}\alpha(y')$ [(ii), *R0.5a — c, *6.17] $>(2\beta(y)\dot{-}1)\dot{-}2\alpha(y)$ [*6.20] $=(2\alpha(y)+1)\dot{-}2\alpha(y)$ [(i′)] $=1$. Следовательно,

$2\alpha(y) \leqslant \alpha(y')$. П о д с л у ч а й 2.2.1: $2\alpha(y)=\alpha(y')$. Если $\beta(y') > 2\beta(y) \dot{-} 1$, то $1 = \beta(y') \dot{-} \alpha(y')$ [предп. подслучая] $> (2\beta(y) \dot{-} 1) \dot{-} \alpha(y')$ [(ii'), *6.19] $= (2\alpha(y)+1) \dot{-} 2\alpha(y)$ [(i'), предп. подслучая 2.2.1] $= 1$. Отсюда $\beta(y') \leqslant 2\beta(y) \dot{-} 1$, следовательно, по *R0.5a—c и (i') (iii') $\beta(y') = 2\alpha(y)+1$. Введем γ, как выше, согласно (A). Таким образом, $A(\gamma, \alpha, \beta, y)$. Выведем $|2\gamma(x) - \gamma(x')| \leqslant 1$. С л у ч а й B: $x = y$. Тогда $|2\gamma(x) - \gamma(x')| = |2\alpha(y) - \beta(y')| = |2\alpha(y) - (2\alpha(y)+1)|$ [(iii')] $= 1$. По $\forall$-введ. $\gamma \in R'$. По &-, $\exists$-, и $\vee$-введ. получаем (c). П о д с л у ч а й 2.2.2: $2\alpha(y) < \alpha(y')$. По (i) и *R0.5a (i'') $2\alpha(y)+1 = \alpha(y')$. Введем γ следующим образом:

$$\text{(B)}\qquad \forall x \gamma(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{если } x \leqslant y, \\ \alpha(x), & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Тогда $A(\gamma, \beta, \alpha, y)$. Выведем $|2\gamma(x) - \gamma(x')| \leqslant 1$. С л у ч а й A: $x<y$. Используем (ii). С л у ч а й B: $x = y$. Тогда $|2\gamma(x)-\gamma(x')| = |2\beta(y) - \alpha(y')| = |2\beta(y) - (2\alpha(y)+1)|$ [(i'')] $= |(2\alpha(y)+2) - (2\alpha(y)+1)|$ [предп. случая 2] $=1$. С л у ч а й C: $x > y$. Используем (i). По $\forall$-введ. $\gamma \in R'$. По &-, $\exists$- и $\vee$-введ. получаем (c).

*R14.9. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset \exists\sigma\{Spr(\sigma) \& \sigma(1) = 0 \& \forall\gamma[\gamma\in\sigma \sim \gamma \in R' \& \forall x(\gamma(x) = \alpha(x) \vee \gamma(x) = \beta(x))]\}$.

*R14.10. $\vdash \forall x(\gamma(x) = \alpha(x) \vee \gamma(x) = \beta(x)) \supset \gamma \notin (\alpha, \beta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в а. *R14.9. Допустим (i) $\alpha \in R'$, (ii) $\beta\in R'$. Введем σ посредством леммы 5.5(c) (ср. доказательства *R0.8, *R10.2) так, что

$$\text{(A)}\qquad \forall a \sigma(a) = \begin{cases} 0, \text{ если } a = 1 \vee \{Seq(a) \& lh(a) = 1 \& [(a)_0 \dot{-} 1 = \alpha(0) \vee (a)_0 \dot{-} 1 = \beta(0)]\} \vee \{Seq(a) \,\&\, lh(a) > 1 \,\&\, |2((a)_{lh(a)\dot{-}2} \dot{-} 1) - ((a)_{lh(a)\dot{-}1} \dot{-} 1)| \leqslant 1 \,\&\, \sigma(\prod_{i<lh(a)\dot{-}1} p_i^{(a)_i}) = 0 \,\&\, [(a)_{lh(a)\dot{-}1} \dot{-} 1 = \alpha(lh(a)\dot{-}1) \vee (a)_{lh(a)\dot{-}1}\dot{-}1 = \beta(lh(a)\dot{-}1)]\}, \\ 1 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

IIb. Допустим $\sigma(a) = 0$ с целью вывести $\exists s\sigma(a*2^{s+1}) = 0$. С л у ч а й 1: $a=1$. Тогда согласно (A) $\sigma(a*2^{\alpha(0)+1})=0$. С л у ч а й 2: $a\neq 1$. Тогда по (A) имеем $Seq(a) \& lh(a) \geqslant 1 \& [(a)_{lh(a)\dot{-}1} \dot{-} 1 = \alpha(lh(a)\dot{-}1) \vee (a)_{lh(a)\dot{-}1} \dot{-} 1 = \beta(lh(a)\dot{-}1)]$. П о д с л у ч а й 2.1: $(a)_{lh(a)\dot{-}1} \dot{-} 1 = \alpha(lh(a)\dot{-}1)$. Используя (A) и (i), получаем $\sigma(a*2^{\alpha(lh(a))+1}) = 0$. П о д с л у ч а й 2.2: $(a)_{lh(a)\dot{-}1}\dot{-}1 = \beta(lh(a)\dot{-}1)$. Используя (A) и (ii), получаем $\sigma(a*2^{\beta(lh(a))+1}) = 0$.

IIIa. Допустим (a) $\gamma\in\sigma$. По $\forall$-удал. $\sigma(\bar\gamma(x'')) = 0$, откуда, используя (A), получаем $|2\gamma(x) - \gamma(x')| \leqslant 1$. По $\forall$-введ. $\gamma\in R'$. По $\forall$-удал. из (a) имеем $\sigma(\bar\gamma(x')) = 0$, следовательно, из (A), разбирая случаи ($x=0$, $x>0$), получаем $\gamma(x) = \alpha(x) \vee \gamma(x) = \beta(x)$. По $\forall$-введ. $\forall x(\gamma(x) = \alpha(x) \vee \gamma(x) = \beta(x))$.

IIIb. Допустим $\gamma\in R' \& \forall x(\gamma(x)=\alpha(x) \vee \gamma(x) = \beta(x))$. Индукцией по x с двойным базисом получаем $\sigma(\bar\gamma(x)) = 0$. По $\forall$-введ. $\gamma\in\sigma$.

*R14.10. Допустим (i) $\forall x(\gamma(x) = \alpha(x) \vee \gamma(x) = \beta(x))$ и для приведения к нелепости (a) $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Следовательно, $\alpha\in R$ и $\gamma\in R$. Если $\gamma \circ\!> \alpha$, то, допуская $\forall p 2^k(\gamma(x+p) \dot{-} \alpha(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$, мы последовательно выводим $\gamma(x+p)\neq\alpha(x+p)$, $\gamma(x+a) = \beta(x+p)$ [(i)] и $\gamma \stackrel{\circ}{=} \beta$ [$\forall$-введ., *R1.2], что противоречит (ii). Поэтому $\gamma \circ\!\not> \alpha$. Аналогично, $\gamma \not<\!\circ\, \alpha$. По *R6.5 (вместе с $\alpha, \gamma \in R$) $\gamma \stackrel{\circ}{=} \alpha$, что противоречит (ii). Таким образом, отвергая (a), получаем $\gamma \notin (\alpha, \beta)$.

*R14.11. $\vdash \alpha, \beta\in R \supset (\alpha \neq_s \beta \sim \alpha \# \beta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим $\alpha,\beta\in R$.

I. Допустим (i) $\alpha\neq_s\beta$. Используя *R1.11, допустим (ii) $\alpha'\in R' \& \alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha$, (iii) $\beta' \in R' \& \beta' \stackrel{\circ}{=}\beta$. Согласно (i), *R14.2 и *R7.2 — *R7.3 $\alpha' \dot{<} \beta' \vee \beta' \dot{<} \alpha'$.

С л у ч а й 1: $\alpha' \dot{<} \beta'$. Тогда, используя (*R7.1, (ii), (iii)) *R6.22, допустим (iv) $\alpha''\in R' \& \alpha'' \stackrel{\circ}{=} \alpha' \& \alpha'' \leqslant \beta'$. Используя *R14.6 вместе с (iv) и (iii), допустим (v) $\alpha'''\in R' \& \beta''\in R' \& \alpha''' \stackrel{\circ}{=}\alpha'' \& \beta''\stackrel{\circ}{=}\beta' \& \alpha'''\leqslant\beta'' \& \forall x(\beta''(x) \dot{-} \alpha'''(x) = 2 \supset \beta''(x') \dot{-} \alpha'''(x') > 2)$. Согласно (ii) — (v) имеем (vi) $\alpha''' \stackrel{\circ}{=} \alpha'' \stackrel{\circ}{=} \alpha' \stackrel{\circ}{=} \alpha \& \beta'' \stackrel{\circ}{=} \beta' \stackrel{\circ}{=} \beta$. Применяя *R14.9 (вместе с (v)), допустим (vii) $Spr(\sigma) \& \sigma(1) = 0 \& \forall\gamma[\gamma\in\sigma \sim \gamma\in R' \& \forall x(\gamma(x) = \alpha'''(x) \vee \gamma(x) = \beta''(x))]$. Чтобы получить (viii), допустим $\gamma\in\sigma$. Тогда $\gamma \in R' \&$

$\forall x (\gamma(x) = \alpha'''(x) \vee \gamma(x) = \beta''(x))$. Согласно *R14.10 $\gamma \notin (\alpha''', \beta'')$, следовательно, по (vi) вместе с *R13.3—*R13.4 $\gamma \notin (\alpha, \beta)$. Таким образом, по (i) вместе с *R14.1 и $\gamma \in R'(\neg \gamma \dot{>} \alpha \,\&\, \neg\gamma \dot{>} \beta) \vee (\neg\gamma \dot{<} \alpha \,\&\, \neg \gamma \dot{<} \beta)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. имеем **(viii)** $\forall\gamma_{\gamma\in\sigma}\{(\neg\gamma\dot{>}\alpha \,\&\, \neg\gamma\dot{>}\beta)\vee(\neg\gamma\dot{<}\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot{<}\beta)\}$. Применяя *27.6 вместе с (vii) и (viii), допустим **(ix)** $\forall\gamma_{\gamma\in\sigma}\exists y\{\forall x[\tau(\bar\gamma(x))>0\supset y=x]\,\&\,\{(\neg\gamma\dot>\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot>\beta\,\&\,\tau(\bar\gamma(y))=1)\vee(\neg\gamma\dot<\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot<\beta\,\&\,\tau(\bar\gamma(y))=2)\}\}$. По (vii) и (v) $\alpha'''\in\sigma$. Таким образом, используя (ix), допустим (x) $\forall x[\tau(\bar{\alpha}'''(x))>0\supset y_1=x]\,\&\,\{(\neg\alpha'''\dot>\alpha\,\&\,\neg\alpha'''\dot>\beta\,\&\,\tau(\bar\alpha'''(y_1))=1)\vee(\neg\alpha'''\dot<\alpha\,\&\,\neg\alpha'''\dot<\beta\,\&\,\tau(\bar\alpha'''(y_1))=2)\}$. По предположению данного случая и (vi) получаем $\alpha'''\dot<\beta$. Следовательно, ввиду (x) получаем **(xi)** $\tau(\bar\alpha'''(y_1))=1$. Аналогично (x) и (xi) имеем **(xii)** $\forall x[\tau(\bar\beta''(x))>0\supset y_2=x]\,\&\,\{(\neg\beta''\dot>\alpha\,\&\,\neg\beta''\dot>\beta\,\&\,\tau(\bar\beta''(y_2))=1)\vee(\neg\beta''\dot<\alpha\,\&\,\neg\beta''\dot<\beta\,\&\,\tau(\bar\beta''(y_2))=2)\}$, **(xiii)** $\tau(\bar\beta''(y_2))=2$. Пусть $y=\max(y_1,y_2)$. Допустим для приведения к нелепости **(xiv)** $|\beta''-\alpha'''| <\circ\, 1\cdot 2^{-(y+2)}$. Тогда по *R14.8 вместе с (v) $\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\alpha''',\beta'',y)\vee\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\beta'',\alpha''',y)$. Случай A: $\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\alpha''',\beta'',y)$. Допустим **(xv)** $\gamma\in R'\,\&\,A(\gamma,\alpha''',\beta'',y)$. Тогда $\forall x(x<y_1\supset\gamma(x)=\alpha'''(x))$, следовательно, **(xvi)** $\tau(\bar\gamma(y_1))=\tau(\bar\alpha'''(y_1))=1$ [(xi)]. По (vii) вместе с (xv) $\gamma\in\sigma$, поэтому, используя (ix), получаем **(xvii)** $\forall x[\tau(\bar\gamma(x))>0\supset z=x]\,\&\,\{(\neg\gamma\dot>\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot>\beta\,\&\,\tau(\bar\gamma(z))=1\vee(\neg\gamma\dot<\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot<\beta\,\&\,\tau(\bar\gamma(z))=2)\}$. Используя (xvi) в (xvii), получаем $z=y_1$. Таким образом, по (xvi) $\tau(\bar\gamma(z))=1$, следовательно, по (xvii) получаем **(xviii)** $\neg\gamma\dot>\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot>\beta$. Однако ввиду (xv) $2^k|\gamma(y'+p)-\beta''(y'+p)|=0<2^{y'+p}$, следовательно, $\gamma\doteq\beta''\doteq\beta'$ [(vi)] $\dot>\alpha'$ [предп. случая 1] $\doteq\alpha$ [(vi)], что противоречит (xviii). Случай B: $\exists\gamma_{\gamma\in R'}A(\gamma,\beta'',\alpha''',y)$. Аналогично. Таким образом, отвергая (xiv), получаем $|\beta''-\alpha'''| \not<\circ\, 1\cdot2^{-(y+2)} \circ\!> 1\cdot 2^{-(y+3)}$ [*R9.7]. Допустим, таким образом,

$\forall p\, 2^k((|\beta''-\alpha'''|(x+p) \dot- (1\cdot2^{-(y+3)})(x+p))\geqslant 2^{x+p}$. Тогда по *6.15 и др. $2^k(|\beta''-\alpha'''|)(x+p)\geqslant 2^{x+p}$, откуда по *R5.1 и $\forall$- и $\exists$-введ. получаем $\beta''\#\alpha'''$. Следовательно, по (vi) вместе с *R2.4 и *R2.3 имеет место $\alpha\#\beta$.

Случай 2: $\beta'\dot<\alpha'$. Аналогично. (Допущения симметричны по α, β.)

II. Допустим (i) $\alpha\#\beta$. По *R2.5 **(ii)** $\neg\alpha\doteq\beta$. Допустим **(iii)** $\gamma\in R$, **(iv)** $\gamma\notin(\alpha,\beta)$. Мы должны вывести (a) $(\neg\gamma\dot>\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot>\beta)\vee(\neg\gamma\dot<\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot<\beta)$. По *R6.2, (i) (вместе с условием $\alpha,\beta\in R$) имеем $\alpha<\circ\,\beta\vee\beta<\circ\,\alpha$. Случай 1: $\alpha<\circ\,\beta$. Согласно *R6.7 **(v)** $\alpha\circ\!>\beta$. По *R6.9 (и $\alpha,\beta\in R$, (iii)) $\alpha<\circ\,\gamma\vee\gamma<\circ\,\beta$. Подслучай 1.1: $\alpha<\circ\,\gamma$. По *R6.7 **(vi)** $\gamma\not<\circ\,\alpha$ и по *R6.4 **(vii)** $\neg\gamma\doteq\alpha$. Для приведения к нелепости допустим (b) $\gamma<\circ\,\beta$. По *R6.7 $\gamma\circ\!\not>\beta$. Отсюда, используя *R8.6, (v) и (vi), получаем (c) $\gamma\in[\alpha,\beta]$. Ввиду (b) и *R6.4 $\neg\gamma\doteq\beta$. Отсюда, используя (vii) и (c), получаем $\gamma\in(\alpha,\beta)$, в противоречие с (iv). Таким образом, отвергая (b), приходим к $\gamma\not<\circ\,\beta$. Из (vi) и *R7.8 получаем $\neg\gamma\dot<\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot<\beta$, а следовательно, по V-введ. (a). Подслучай 1.2: $\gamma<\circ\,\beta$. Аналогично. Случай 2: $\beta<\circ\,\alpha$. Аналогично. По $\supset$-, $\forall$- и $\supset$-введ. получаем $\forall\gamma_{\gamma\in R}(\gamma\notin(\alpha,\beta)\supset(\neg\gamma\dot>\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot>\beta)\vee(\neg\gamma\dot<\alpha\,\&\,\neg\gamma\dot<\beta))$. Отсюда ввиду (ii) получаем $\alpha\neq_s\beta$.

В нашей формулировке «сепарабельности в себе» (Брауэр **1928a**, стр. 10, строки 33—37) мы используем $\alpha\#\beta$, а не $\alpha\neq_s\beta$ (что в связи с *R14.11 устраняет нетривиальную часть предложения Брауэра).

*R14.12. $\vdash \alpha,\beta\in R\,\&\,\alpha\#\beta\supset\exists a\exists m(a2^{-m}\in(\alpha,\beta))$.

Доказательство. Допустим $\alpha,\beta\in R$ и $\alpha\#\beta$. По *R6.2 $\alpha<\circ\,\beta\vee\beta<\circ\,\alpha$. Случай 1: $\alpha<\circ\,\beta$. Используя *R9.19, допустим (перед $\exists$-удал.) $\alpha<\circ\,a2^{-m}<\circ\,\beta$. Согласно *R7.7 $\alpha\dot<a2^{-m}\dot<\beta$. Тогда ввиду *R13.5 (вместе с *R9.2 и др.) $a2^{-m}\in(\alpha,\beta)$. Случай 2: $\beta<\circ\,\alpha$. Аналогично.

16.8. Рассмотрим пару $A(\gamma)$, $B(\gamma)$ видов д. ч. г. со следующими свойствами: 1) $A(\gamma)\,\&\,B(\zeta)\to\gamma\dot<\zeta$; 2) для любых двух д. ч. г. α, β из $[0, 1]$ таких, что $\alpha\neq_s\beta\,\&\,\alpha\dot<\beta$,

или при каждом γ из $[0, 1]$ выполняется $\overline{\gamma \dot{>} \alpha} \to A(\gamma)$ или при каждом таком γ выполняется $\gamma \dot{<} \beta \to B(\gamma)$. Единичный континуум $[0, 1]$ мы называем свободно связным, если для каждой пары видов $A(\gamma)$, $B(\gamma)$ описанного только что типа существует д. ч. г. η из $[0, 1]$ такой, что при любом γ из $[0, 1]$ $\gamma \dot{<} \eta_1 \to A(\gamma)$ и $\gamma \dot{>} \eta \to B(\gamma)$. (ср. Брауэр **1928a**, стр. 11, строки 14—3 снизу). Брауэр требовал последнего только от таких $A(\gamma)$, $B(\gamma)$, из которых «составлен» $[0, 1]$ (стр. 10 внизу) в том смысле, что невозможно γ из $[0, 1]$ такое, что не имеет места ни $A(\gamma)$, ни $B(\gamma)$. Мы в действительности не нуждаемся в этом ограничении при установлении свободной связности в *R14.14.

В *R14.13 мы рассматриваем обобщение результата Брауэра на полный континуум $[0, \infty]$. Мы добавляем предположение, что $B(\gamma)$ имеет хотя бы один элемент. (В противном случае теорема для $[0, \infty)$ стала бы неверной.) Вместо $\alpha \neq_s \beta \,\&\, \alpha \dot{<} \beta$ мы используем более простой эквивалент $\alpha <\circ \beta$ ($\supset$ по *R14.11 вместе с *R6.2, *R7.1, $\subset$ по *R6.3, *R14.11, *R7.7) и вместо $\neg\, \gamma \dot{>} \alpha$ мы употребляем $\gamma \circ\!\not> \alpha$ (что равносильно в силу *R7.8). Далее, в заключении мы берем $\dot{<}$ вместо $<\circ$ по соображениям, приведенным ниже в замечании 16.1.

*R14.13. $\vdash \forall\gamma_{\gamma\in R}\forall\zeta_{\zeta\in R}\{A(\gamma) \,\&\, B(\zeta) \supset \gamma \dot{<} \zeta\} \,\&$
$\forall\alpha_{\alpha\in R}\forall\beta_{\beta\in R}\{\alpha <\circ \beta \supset \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset$
$A(\gamma)] \vee \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\circ \beta \supset B(\gamma)]\} \,\&$
$\exists b B(b2^{-0}) \supset \exists\eta_{\eta\in R}\{\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\circ \eta \supset A(\gamma)] \,\&$
$\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ> \eta \supset B(\gamma)]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим гипотезы (i) — (iii) (доказываемой импликации). Ввиду (ii), *R9.2 и *R9.8 имеем

$$\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> a2^{-m} \supset A(\gamma)] \vee \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\circ (a+1)2^{-m} \supset B(\gamma)].$$

Разбирая случаи и используя $\forall$-введ., получаем

$$\forall a \forall m \exists y \{[\{\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> a2^{-m} \supset A(\gamma)] \,\&\, y=0\} \vee \{\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\circ (a+1)2^{-m} \supset B(\gamma)] \,\&\, y=1\}] \,\&\, y \leqslant 1\}.$$

Применяя *25.7, допустим

(iv) $\forall a \forall m \{[\{\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> a2^{-m} \supset A(\gamma)] \,\&\, \varkappa(\langle a, m\rangle) = 0\} \vee \{\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\circ (a+1)2^{-m} \supset B(\gamma)] \,\&\, \varkappa(\langle a, m\rangle) = 1\}] \,\&\, \varkappa(\langle a, m\rangle) \leqslant 1\}$.

Допустим, исходя из (iii), **(v)** $B(b2^{-0})$. Для приведения к нелепости допустим $\varkappa(\langle b, 0\rangle) = 0$. Согласно (iv) $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> b2^{-0} \supset A(\gamma)]$. Ввиду *R9.2 и *R9.8 имеем $A(b2^{-0})$. Поэтому согласно (i) и (v) $b2^{-0} \dot{<} b2^{-0}$, что противоречит *R7.6. Следовательно, $\varkappa(\langle b, 0\rangle) \neq 0$. Таким образом, по (iv) получаем **(vi)** $\varkappa(\langle b, 0\rangle) = 1$. Используя #E, возьмем $\mu y_{y\leqslant b}\varkappa(\langle y, 0\rangle) = 1$ в качестве M. Введем η по лемме 5.5 (b) (случаи исчерпывающие ввиду (iv)):

(A) $\eta(0) = M$,

$$\forall x \eta(x') = \begin{cases} 2\eta(x) \dot{-} 1, & \text{если } \varkappa(\langle 2\eta(x) \dot{-} 1, x'\rangle) = 1, \\ 2\eta(x), & \text{если } \varkappa(\langle 2\eta(x) \dot{-} 1, x'\rangle) = 0 \,\&\, \varkappa(\langle 2\eta(x), x'\rangle) = 1, \\ 2\eta(x) + 1, & \text{если } \varkappa(\langle 2\eta(x) \dot{-} 1, x'\rangle) = 0 \,\&\, \varkappa(\langle 2\eta(x), x'\rangle) = 0. \end{cases}$$

Используя *R0.5b — a, получаем **(vii)** $\eta \in R'$, следовательно, **(viii)** $\eta \in R$. Мы выведем

(ix) $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\circ (\eta(x) \dot{-} 1)2^{-x} \supset A(\gamma)] \,\&$
$\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ> (\eta(x) + 1)2^{-x} \supset B(\gamma)]$

индукцией по x. Б а з и с. Согласно (A) $\eta(0) = M$. Чтобы ниже получить (a), допустим $\gamma \in R$ и $\gamma <\circ (M \dot{-} 1)2^{-0}$. Тогда по *R9.18 (вместе с *6.4) $M > 0$. Таким образом, $M \dot{-} 1 < M$. Следовательно, по (vi) и *E5 $\varkappa(\langle M \dot{-} 1, 0\rangle) \neq 1$. Поэтому согласно (iv) (и *R6.7) получаем $A(\gamma)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. имеем **(a)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\circ (\eta(0) \dot{-} 1)2^{-0} \supset A(\gamma)]$. С целью получить (b) (ниже) допустим $\gamma \in R$ и $\gamma \circ> (M+1)2^{-0}$. Согласно (vi) и *E5 $\varkappa(\langle M, 0\rangle) = 1$. Таким образом, по (iv) $B(\gamma)$. Используя $\supset$- и $\forall$-введ., получаем **(b)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ> (\eta(0) + 1)2^{-0} \supset B(\gamma)]$. И н д. ш а г. Мы используем случаи (те же самые, что и в (A)), чтобы вывести **(c)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\circ (\eta(x') \dot{-} 1)2^{-x'} \supset A(\gamma)]$ и **(d)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ> (\eta(x') + 1)2^{-x'} \supset B(\gamma)]$. С л у ч а й 1: $\varkappa(\langle 2\eta(x) \dot{-} 1, x'\rangle) = 1$. Ввиду (A) $\eta(x') = 2\eta(x) \dot{-} 1$. Чтобы получить (c), допустим $\gamma \in R$ и $\gamma <\circ (\eta(x') \dot{-} 1)2^{-x'} = (2\eta(x) \dot{-} 2)2^{-x'} =$

$(\eta(x) \dot- 1)\, 2^{-x}$ [*R9.3]. По инд. предп. имеем $A(\gamma)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем (c). Чтобы получить (d), допустим $\gamma \in R$ и $\gamma \circ\!> (\eta(x')+1)\, 2^{-x'} = ((2\eta(x) \dot- 1)+1)\, 2^{-x'}$. По (iv) и предп. рассматриваемого случая имеем $B(\gamma)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем (d). Случай 2: $\varkappa(\langle 2\eta(x) \dot- 1, x'\rangle) = 0 \,\&\, \varkappa(\langle 2\eta(x), x'\rangle) = 1$. Аналогично. Случай 3: $\varkappa(\langle 2\eta(x) \dot- 1, x'\rangle) = 0 \,\&\, \varkappa(\langle 2\eta(x), x'\rangle) = 0$. Аналогично. По $\forall$-введ. (и *87) из (ix) получаем **(x)** $\forall x \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\!\circ\, (\eta(x) \dot- 1)\, 2^{-x} \supset A(\gamma)] \,\&\, \forall x \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!> (\eta(x)+1)\, 2^{-x} \supset B(\gamma)]$. Чтобы получить (xi), допустим $\gamma \in R$ и $\gamma <\!\circ\, \eta$. Используя *R1.11, допустим $\gamma' \in R' \,\&\, \gamma' \stackrel{\circ}{=} \gamma$. Тогда $\gamma' <\!\circ\, \eta$. Допустим $\forall p\, 2^k (\eta(x+p) \dot- \gamma'(x+p)) \geqslant 2^{x+p}$, откуда $2^k (\eta(x+k+2) \dot- \gamma'(x+k+2)) \geqslant 2^{x+k+2}$, откуда $\eta(x+k+2) \dot- \gamma'(x+k+2) \geqslant 4$. Теперь $\gamma \stackrel{\circ}{=} \gamma' \circ\!\not> (\gamma'(x+k+2)+1)\, 2^{-(x+k+2)}$ [*R9.17] $<\!\circ\, (\eta(x+k+2) \dot- 1)\, 2^{-(x+k+2)}$ [*R9.8]. Используя (x), получаем $A(\gamma)$. По $\supset$- и $\forall$-введ. имеем **(xi)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\!\circ\, \eta \supset A(\gamma)]$. Аналогично имеем **(xii)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!> \eta \supset B(\gamma)]$. Комбинируя (viii), (xi) и (xii), получаем $\exists\eta_{\eta\in R}\{\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\!\circ\, \eta \supset A(\gamma)] \,\&\, \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!> \eta \supset B(\gamma)]\}$.

Используя *R14.13, мы докажем свободную связность [0, 1]. Будем считать $\alpha \in I$ сокращением для $\alpha \in R \,\&\, \alpha \circ\!\not> 1$; последнее ввиду *R8.6, *R9.18 и др. эквивалентно $\alpha \in [0, 1]$.

*R14.14. $\vdash \forall\gamma\{A(\gamma) \vee B(\gamma) \supset \gamma \in I\} \,\&$

$\forall\gamma\forall\zeta\{A(\gamma) \,\&\, B(\zeta) \supset \gamma \dot< \zeta\} \,\&$

$\forall\alpha_{\alpha\in I}\forall\beta_{\beta\in I}\{\alpha <\!\circ\, \beta \supset \forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset A(\gamma)] \vee$

$\forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \not<\!\circ\, B \supset B(\gamma)]\} \supset$

$\exists\eta_{\eta\in I}\{\forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma <\!\circ\, \eta \supset A(\gamma)] \,\&$

$\forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \circ\!> \eta \supset B(\gamma)]\}$.

Доказательство. Допустим гипотезы (i)—(iii). Пусть $B'(\gamma)$ есть $\neg\neg(B(\gamma) \vee \gamma \dot> 1)$. Чтобы вывести (iv) (ниже), допустим $\gamma, \zeta \in R$ и $A(\gamma)$. Ввиду (i) $\gamma \in I$. Допуская $B(\zeta) \vee \zeta \dot> 1$, мы выведем $\gamma \dot< \zeta$ разбором случаев (используя (ii) в первом случае). Таким образом, по *12 и *R7.9 $B'(\zeta) \supset \gamma \dot< \zeta$. Следовательно, имеем **(iv)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}\forall\zeta_{\zeta\in R}\{A(\gamma) \,\&\, B'(\zeta) \supset \gamma \dot< \zeta\}$. С целью получить (v) допустим $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha <\!\circ\, \beta$. Ввиду *R6.9 $\alpha <\!\circ\, 1 \vee 1 <\!\circ\, \beta$. Мы выве-

дем (a) $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset A(\gamma)] \vee \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\!\circ\, \beta \supset B'(\gamma)]$. Случай 1: $\alpha <\!\circ\, 1$. Используя *R9.19, допустим $\alpha <\!\circ\, a_1 2^{-m_1} <\!\circ\, 1$ и $\alpha <\!\circ\, a_2 2^{-m_2} <\!\circ\, \beta$. По *R9.4, *R9.7 и др. $a_1 2^{-m_1} \leqslant\!\circ\, a_2 2^{-m_2} \vee a_1 2^{-m_1} \circ\!> a_2 2^{-m_2}$. Отсюда, разбирая случаи, мы выводим формулу, исходя из которой, можем допустить **(i')** $\alpha <\!\circ\, a2^{-m} <\!\circ\, 1$, **(ii')** $\alpha <\!\circ\, a2^{-m} <\!\circ\, \beta$. Ввиду (iii) (с α, $a2^{-m}$ в качестве α, β) и (i') имеем $\forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset A(\gamma)] \vee \forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \not<\!\circ\, a2^{-m} \supset B(\gamma)]$. Подслучай 1.1: $\forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset A(\gamma)]$. Тогда $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset A(\gamma)]$, следовательно, получаем (a). Подслучай 1.2: $\forall\gamma_{\gamma\in I}[\gamma \not<\!\circ\, a2^{-m} \supset B(\gamma)]$. Допустим $\gamma \in R$ и $\gamma \not<\!\circ\, a2^{-m}$. Если $\gamma \in I$, то $B(\gamma)$, следовательно, $B(\gamma) \vee \gamma \dot> 1$. Если $\gamma \notin I$, то $\neg\, \gamma \circ\!\not> 1$, следовательно, (*R7.9) $\gamma \dot> 1$, поэтому $B(\gamma) \vee \gamma \dot> 1$. Таким образом, $\gamma \in I \vee \gamma \notin I \supset B(\gamma) \vee \gamma \dot> 1$. Отсюда по *12 и *63 $\neg(B(\gamma) \vee \gamma \dot> 1) \supset \gamma \notin I \,\&\, \neg\, \gamma \notin I$. Таким образом, $\neg\neg(B(\gamma) \vee \gamma \dot> 1)$, т. е. $B'(\gamma)$. Поэтому $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\!\circ\, a2^{-m} \supset B'(\gamma)]$. Ввиду (ii') $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\!\circ\, \beta \supset B'(\gamma)]$, следовательно, получаем (a). Случай 2: $1 <\!\circ\, \beta$. Мы выведем $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\!\circ\, \beta \supset B'(\gamma)]$. Таким образом, имеем **(v)** $\forall\alpha_{\alpha\in R}\forall\beta_{\beta\in R}\{\alpha <\!\circ\, \beta \supset \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset A(\gamma)] \vee \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\!\circ\, \beta \supset B'(\gamma)]\}$. Кроме того, легко вывести $B'(2)$, а следовательно, и **(vi)** $\exists b B'(b2^{-0})$. Используя (iv), (v), (vi) в *R14.13, допустим: **(vii)** $\eta \in R$, **(viii)** $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma <\!\circ\, \eta \supset A(\gamma)] \,\&\, \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!> \eta \supset B'(\gamma)]$. Для приведения к нелепости допустим **(b)** $\eta \circ\!> 1$. Используя *R9.19, допустим $1 <\!\circ\, b2^{-n} <\!\circ\, \eta$. Из $1 <\!\circ\, b2^{-n}$ получаем $B'(b2^{-n})$. Из $b2^{-n} <\!\circ\, \eta$ и (viii) получаем $A(b2^{-n})$. Тогда по (iv) $b2^{-n} \dot< b2^{-n}$. Таким образом, отвергая (b), получаем $\eta \circ\!\not> 1$, откуда по (vii) $\eta \in I$.

Замечание 16.1. Здесь невозможно установить модификацию *R14.13, в которой $<\!\circ$ ($\circ\!>$) заменено в заключении на $\dot<$ ($\dot>$) и добавлено брауэровское предположение $\neg\exists\gamma_{\gamma\in R}[\neg A(\gamma) \,\&\, \neg B(\gamma)]$. Действительно, мы покажем, что если доказуем пример (A) такого утверждения, в котором $\gamma \leqslant\!\circ\, \rho$ и $\gamma \circ\!> \rho$ взяты в качестве $A(\gamma)$, $B(\gamma)$, то доказуема будет и формула $\rho, \gamma \in R \supset (\rho <\!\circ\, \gamma \sim \rho \dot< \gamma)$, выражающая эквивалентность $<\!\circ$ и $\dot<$ для д. ч. г. Эта эквивалентность отрицалась Брауэром в работах **1949**, **1951** и ее недоказуемость показана Клини в п. 18.2 главы IV ниже (ср. теорема 18.2). Итак, допустим (i) $\rho \in R$. Мы сперва выведем предположения (A). Ia. Допустим $\gamma, \zeta \in R$, $\gamma \leqslant\circ \rho$, $\zeta \circ\!> \rho$. Тогда $\gamma <\circ \zeta$, следовательно, $\gamma \dot{<} \zeta$. Ib. Допустим $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha <\circ \beta$. Согласно *R6.9 и (i) $\alpha <\circ \rho \vee \rho <\circ \beta$. Случай 1: $\alpha <\circ \rho$. Допустим $\gamma \in R$ и $\gamma \circ\!\not> \alpha$. Тогда $\gamma <\circ \rho$, следовательно, $\gamma \leqslant\circ \rho$. По $\supset$-, $\forall$- и $\vee$-введ. получаем $\forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \circ\!\not> \alpha \supset \gamma \leqslant\circ \rho] \vee \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \not<\circ \beta \supset \gamma \circ\!> \rho]$. Случай 2: $\rho <\circ \beta$. Аналогично, допуская $\gamma \in R$ и $\gamma \not<\circ \beta$ и выводя $\gamma \circ\!> \rho$. Ic. Используя (i) и *R1.11, допустим $\rho' \in R' \,\&\, \rho' \doteq \rho$. Тогда $\rho \doteq \rho' \circ\!\not> (\rho'(0) + 1)\, 2^{-0}$ [*R9.17] $<\circ (\rho'(0) + 2)\, 2^{-0}$, следовательно, $\exists b\, (b2^{-0} \circ\!> \rho)$. Id. Перед $\exists$-удал. и $\neg$-введ. допустим $\gamma \in R \,\&\, \neg\gamma \leqslant\circ \rho \,\&\, \gamma \circ\!\not> \rho$. Используя *63, получаем $\gamma \not<\circ \rho \,\&\, \neg\gamma \doteq \rho$. Ввиду *R6.5 $\gamma \doteq \rho$. II. Теперь, используя (A), после $\supset$-удал. и предваряя $\exists$-введ., имеем (ii) $\eta \in R \,\&\, \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \dot{<} \eta \supset \gamma \leqslant\circ \rho] \,\&\, \forall\gamma_{\gamma\in R}[\gamma \dot{>} \eta \supset \gamma \circ\!> \rho]$. Допустим для приведения к нелепости (a) $\rho <\circ \eta$. Используя *R13.8, допустим $\gamma \in R \,\&\, \gamma \in (\rho, \eta)$. Тогда по *R8.6 и (a) имеем (b) $\gamma \not<\circ \rho \,\&\, \gamma \circ\!\not> \eta \,\&\, \neg\gamma \doteq \rho \,\&\, \neg\gamma \doteq \eta$. Таким образом, $\gamma \dot{<} \eta$. По (ii) $\gamma \leqslant\circ \rho$, что противоречит (b). Отвергая (a), получаем (iii) $\rho \not<\circ \eta$. Допустим для приведения к нелепости $\rho \circ\!> \eta$. По *R7.7 $\rho \dot{>} \eta$. По (ii) $\rho \circ\!> \rho$, что противоречит *R6.8. Следовательно, $\rho \circ\!\not> \eta$. Теперь согласно *R6.5 $\rho \doteq \eta$. Таким образом, по (ii) $\forall\gamma_{\gamma\in R}(\gamma \dot{>} \rho \supset \gamma \circ\!> \rho)$. Это вместе с *R7.7 дает $\forall\gamma_{\gamma\in R}(\rho <\circ \gamma \sim \rho \dot{<} \gamma)$.

Аналогично, к эквивалентности $<\circ$ и $\dot{<}$ ведет соответствующая модификация *R14.14. Действительно, используя вместо (A) аналогичный пример (**B**), мы получаем (i) $\rho \in I \supset \forall\gamma_{\gamma\in I}(\gamma \dot{>} \rho \supset \gamma \circ\!> \rho)$. Допустим (**ii**) $\alpha, \beta \in R$ и (**iii**) $\alpha \dot{>} \beta$. Полагая $\gamma = 1 \dot{-} (1 \dot{-} (\alpha \dot{-} \beta))$ (ср. ^{x}7.1), мы можем установить (**iv**) $\gamma \in I$, (**v**) $\gamma \dot{>} 0$ [используя (iii)] и (**vi**) $\gamma \circ\!> 0 \supset \alpha \circ\!> \beta$. Используя $0 \in I$, (iv) и (v) в (i) и получившийся результат в (vi), мы после $\supset$-введ. получаем $\alpha, \beta \in R \supset (\alpha \dot{>} \beta \supset \alpha \circ\!> \beta)$.

О ПОРЯДКЕ НА КОНТИНУУМЕ

С. К. Клини

§ 17. Введение и предварительные замечания. 17.1. В своей статье «О порядке на континууме и отношении истинности к непротиворечивости» **1951** Брауэр рассматривает пять пар свойств действительных чисел и высказывает ряд утверждений о соотношениях членов этих пар. (В этой статье он ссылается в связи с доказательствами на свои голландские статьи **1948b** и **1949a**. Однако три пары свойств обсуждаются также в его английской статье **1948**, стр. 1248.)

Мы перечислим эти утверждения и в точности укажем (независимо от **1948a** или **1948**), какие из них могут быть установлены на базе формальной системы глав I и III. (Приводимые здесь результаты, за исключением основывающихся на §§ 10—11 главы II (см. п. 18.2), были в предварительной форме получены в мае 1955 г. еще до того, как глава III (Весли) была написана.)

Мы избрали для этих исследований статью Брауэра **1951** (хотя могли бы выбрать и работу **1948**), поскольку она содержит доступные примеры результатов, которые Брауэр достиг применением только одного нового метода, введенного в статье **1948** и использованного в работах **1948a**, **1948b**, **1949**, **1949a** и в более поздних статьях. Упомянутый метод основывается на «определении» последовательности выбора $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$ таким образом, что $\alpha(x+1)$ зависит от того, решил или нет «творческий субъект» между выборами $\alpha(x)$ и $\alpha(x+1)$ некоторую проблему, которую мы в данное время не умеем решать. Этот метод анализировался и обсуждался в работах ван Данцига **1949** и Гейтинга **1956** (раздел 8.1.1) в связи с приложением его в голландской статье Брауэра **1948a**, в которой последний объявил установленной недоказуемость $\overline{\alpha \doteq 0 \to \alpha \# 0}$ для действительных чисел α.

Чтобы привести этот пример — в основных чертах, как у Гейтинга **1956** — будем считать, что P — предложение, для которого неизвестен никакой метод, ведущий к доказательству $\overline{P}$ или к доказательству $\overline{\overline{P}}$. Тогда «творческий субъект» может последовательно выбирать целую часть и цифры в двоичном разложении $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ действительного числа α согласно следующему правилу: все время выбирается 0 до тех пор, пока между выборами α_x и α_{x+1} для него впервые не станет очевидной истинность $\overline{P}$ или истинность $\overline{\overline{P}}$; в таком случае он выбирает $\alpha_{x+1} = 1$. Теперь $\alpha \overset{\circ}{=} 0$ означало бы, что $\overline{P}$ никогда не станет известным этому (любому!) творческому субъекту, следовательно, получаем $\overline{\overline{P}}$. Кроме того, поскольку $\overline{\overline{P}}$ также никогда не станет известным, имеет место $\overline{\overline{\overline{P}}}$, что противоречит $\overline{\overline{P}}$. Таким образом, $\overline{\alpha \overset{\circ}{=} 0}$. Однако мы не имеем оснований заключить, что $\alpha \# 0$ (как это получалось бы, если бы $\overline{\alpha \overset{\circ}{=} 0} \rightarrow \alpha \# 0$ было доказано), поскольку $\alpha \# 0$ означало бы, что мы можем найти некоторый интервал, отделяющий α от 0, однако такой интервал мы можем знать только в том случае, когда нам уже известно, как найти решение проблемы, имеет ли место $\overline{P}$ или $\overline{\overline{P}}$. Таким образом, $\alpha \# 0$ не доказано, хотя $\overline{\alpha \overset{\circ}{=} 0}$ уже установлено. (Вместе с тем $\alpha \# 0$ не абсурдно, т. е. не имеет места $\overline{\alpha \# 0}$, поскольку тогда мы имели бы $\alpha \overset{\circ}{=} 0$; ср. *R 2.7 в главе III. Аналогично не имеет места $\overline{\overline{\alpha \overset{\circ}{=} 0} \rightarrow \alpha \# 0}$, поскольку тогда мы имели бы $\overline{\alpha \# 0}$; ср. ВМ, *60d.)

Немедленное возражение аргументам Брауэра состоит в том, что конкретное действительное число α не было определено математически; высказанное выше «определение» ставит «α» в зависимость от непредсказуемой активности некоторого «творческого субъекта».

Ван Данциг **1949** попытался преодолеть это возражение разработкой некоторой «объективистской» или «формальной» версии, контрастирующей с брауэровской «субъективистской» версией. С этой целью ван Данциг вводит как параметр последовательность $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ конечных множеств «выводов», где выводы из ω_x выполняются между выборами α_x и α_{x+1}, причем $\alpha_{x+1} = 1$, если в ω_x имеется вывод $\overline{P}$ или вывод $\overline{\overline{P}}$, но никакой такой вывод не встречается в ω_y при любом $y < x$. (В противном случае $\alpha_{x+1} = 0$; кроме того, считаем $\alpha_0 = 0$.) Таким образом, α превращается в α^ω (обозначение наше). Ван Данциг после ссылки на стр. 955 на «существование предложений, неразрешимых внутри той или иной фиксированной формальной системы» (Гёдель), говорит, что «выводы» должны производиться «согласно правилам некоторой заданной семантической метасистемы». Эта концепция, несмотря на некоторые детальные предположения, приводимые ван Данцигом, представляется автору данных строк существенно неясной. Однако, если попытаться тем не менее подступиться к этой неясности, то данная ван Данцигом переформулировка рассуждений Брауэра, как кажется, переходит в следующее. Разрешается ставить кванторы над всеми такими последовательностями «выводов» ω. Если ни в какой такой последовательности нет «вывода» $\overline{P}$ («вывода» $\overline{\overline{P}}$), то $\overline{\overline{P}}$ (соответственно $\overline{\overline{\overline{P}}}$). Поэтому имеет место (i) $(\overline{\omega})\ \alpha^\omega \overset{\circ}{=} 0$. Кроме того, если $\alpha^\omega \# 0$, то в ω имеется «вывод» $\overline{P}$ или «вывод» $\overline{\overline{P}}$, ввиду чего до тех пор, пока мы не в состоянии решить проблему, имеет ли место $\overline{P}$ или $\overline{\overline{P}}$, утверждение (ii) $(E\omega)\ \alpha^\omega \# 0$ остается недоказуемым. Однако, как мы сейчас увидим, недоказуемость $\overline{\alpha \overset{\circ}{=} 0} \rightarrow \alpha \# 0$ теперь не получается. Мы можем квантифицировать эту импликацию, чтобы получить (iii) $(E\omega)\ \overline{\alpha^\omega \overset{\circ}{=} 0} \rightarrow (E\omega)\ \alpha^\omega \# 0$. Однако, чтобы использовать (iii) вместе с (i) для достижения противоречия с (ii), мы должны были бы сначала преобразовать (i) в $(E\omega)\ \overline{\alpha^\omega \overset{\circ}{=} 0}$, что мы можем сделать только классически.

Гейтинг **1956** утверждает, что не очень важно, выражаем ли мы обсуждаемый результат в терминах Брауэра или ван Данцига, или называем мы его математическим результатом или нет, если только мы понимаем, что при этом подразумевается. Затем Гейтинг говорит, что данный результат показывает, что было бы глупо искать доказательство эквивалентности отношений $\overline{\alpha \overset{\circ}{=} \beta}$ и $\alpha \# \beta$ между действительными числами α и β. (Импликация $\alpha \# \beta \rightarrow \overline{\alpha \overset{\circ}{=} \beta}$ известна; ср. *R2.5.)

В неформальном интуиционизме необходимо заботиться об опознании оснований утверждений вида «A не имеет силы (или недоказуемо)» в отличие от утверждений вида «A абсурдно», что есть просто $\bar{A}$. В некоторых случаях, подобных случаю утверждения «закон исключенного третьего $A \vee \bar{A}$ не имеет силы», основание состоит просто в том, что $A \vee \bar{A}$ хотя само и не является абсурдным (ср. *51a BM, стр. 110), однако имеет абсурдные следствия, например, некоторые утверждения вида $(a)\,(A\,(a) \vee \bar{A}(a))$ (ср. *27.17). Если мы допускаем кванторы по пропозициональным переменным, то замыкание исходного утверждения $(A)\,(A \vee \bar{A})$ абсурдно. В случае $\overline{\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \rightarrow \alpha \# \beta}$ никакие абсурдные следствия при интуиционистских выводах прежнего типа не предъявлялись.

В формальном интуиционизме «недоказуемость» приобретает свой метаматематический смысл, так что она не представляет здесь никакой проблемы, если только не предполагается варьировать рассматриваемую формальную систему. Семантические методы позволят нам показать, что в формальной системе интуиционистского анализа глав I и III формула $\forall\beta_{\beta\in R}\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \supset \alpha \# \beta)$ недоказуема, однако (классически) не имеет абсурдных следствий. (Родственное замечание было сделано Крайзелом в работе **1962с**, однако его $=$, $\#$ не есть $\stackrel{\circ}{=}$, $\#$ для действительных числовых генераторов; ср. замечание 18.6.)

Таблица 1

		$\overline{\beta\in R \,\&\, \beta \dot{>} 0 \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R} B_1}$
$A_1: \alpha \stackrel{\circ}{=} \alpha$	$B_1: \alpha \circ\!\not> \beta \vee \alpha \not<\!\circ\, \beta$	$\beta\in R \,\&\, \beta \dot{>} 0 \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_1 \supset B_1)$
		$\overline{\forall\beta_{\beta\in R}\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \supset \alpha \# \beta)}$
		$\forall\beta_{\beta\in R}\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \supset \alpha <\!\circ\, \beta \vee \alpha \circ\!> \beta)$
$A_2: \neg\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$	$B_2: \alpha \dot{<} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta$	$\overline{\forall\beta_{\beta\in R}\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_2 \supset B_2)}$
$A_3: \alpha \not<\!\circ\, \beta$	$B_3: \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \alpha \circ\!> \beta$	$\beta\in R \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_3 \supset B_3)$
$A_4: \alpha \dot{>} \beta$	$B_4: \alpha \circ\!> \beta$	$\overline{\forall\beta_{\beta\in R}\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_4 \supset B_4)}$
$A_5: \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta$	$B_5: \alpha \stackrel{\circ}{=} \beta \vee \alpha \circ\!> \beta$	$\forall\beta_{\beta\in R}\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_5 \supset B_5)$
		$\beta\in R \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\neg B_5 \supset A_5)$
		$\beta\in R \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\alpha \dot{<} \beta \supset A_5)$

17.2. Мы перечисляем в таблице 1 пять пар свойств $(A_i,\ B_i)$, рассмотренных Брауэром **1951**, пользуясь

обозначениями главы III Весли (а также BM и главы I), употребляемыми на это время неформально. Подразумевается, что α, β имеют областью изменения R (см. *R0.1). Первые четыре свойства взяты из таблицы Брауэра **1951** (стр. 358), а пятое $(A_5,\ B_5)$ из его примечания 3.

Континуум Брауэра включает все действительные числа, тогда как Весли в третьей главе рассматривает только неотрицательные числа. Благодаря этому Весли упростил обозначения, не уклонившись при этом ни от каких фундаментальных проблем; включение в рассмотрение отрицательных действительных чисел добавило бы лишь незначительные, неинтересные детали. Следовательно, в формализации Весли 0 (т. е. $0 \cdot 2^{-0}$) является граничной точкой с несколько специальным статусом. По этим причинам при воспроизведении утверждений Брауэра, включающих B_1, оказывается невозможным использовать 0, как это делал Брауэр. Мы могли бы просто заменить 0 на 1 во всех рассматриваемых свойствах, однако мы предпочли обобщить их на любое $\beta \in R$ (добавив, где это нужно, условие $\beta \dot{>} 0$). Вместо $\neg\,\alpha \dot{<} \beta$ (как прямого перевода текста Брауэра на язык наших обозначений) мы обычно пишем $\alpha \not<\!\circ\, \beta$, что эквивалентно ввиду *R7.8.

Для первых четырех пар свойств Брауэр утверждает, что $\neg\neg B_i$ эквивалентно A_i, однако $\neg\neg B_i$ не эквивалентно B_i. Утверждаемую эквивалентность мы запишем как

a_i: $\neg\neg\, B_i \sim A_i$,

что (с посылкой β, $\alpha \in R$), как будет показано в п. 17.3, доказуемо. Согласно *51b, *49a и *25 имеет место $\neg\neg(\neg\neg B_i \sim B_i)$. Поэтому утверждаемая неэквивалентность не передается посредством $\neg(\neg\neg B_i \sim B_i)$ или $\forall\alpha_{\alpha\in R}\neg(\neg\neg B_i \sim B_i)$, что приводит к $\neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\neg B_i \sim B_i)$ как правдоподобному представлению. Используя *49a вместе с *45 и a_i, последнее можно упростить до $\neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_i \supset B_i)$. Брауэр в примечании 1, стр. 1248 работы **1948**, говорит, что под «неэквивалентностью» он подразумевает абсурдность эквивалентности (а не ее недоказуемость). Для второй и четвертой пар мы обнаружим, что при такой трактовке соответствующие брауэровские утверждения неэквивалентности (упомянутые выше) незащитимы.

В случае пятой пары, если мы правильно понимаем язык Брауэра (который говорит об «обратном» утверждении для предложения, не записанного явно в виде импликации), он утверждает неэквивалентность B_5 свойству A_5 (незащитимо), эквивалентность $\neg B_5$ и $\neg A_5$ и неэквивалентность $\neg\neg B_5$ и A_5. С использованием

b: $B_5 \supset A_5$

(доказываемого ниже) утверждаемая эквивалентность упрощается до

c: $\neg B_5 \supset \neg A_5$.

Ввиду b, c, *13 и *45 утверждаемые неэквивалентности правдоподобным образом представляются просто как $\neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(A_5 \supset B_5)$ и $\neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(\neg\neg B_5 \supset A_5)$. (Представления $\neg(B_5 \sim A_5)$ и $\neg(\neg\neg B_5 \sim A_5)$ опровергаются следующим образом. По *51b и др. $\neg\neg(\neg\neg A_5 \sim A_5)$. Тогда по высказанной выше эквивалентности $\neg\neg(\neg\neg B_5 \sim A_5)$. Отсюда и из $\neg\neg(\neg\neg B_5 \sim B_5)$ по *25 и *24 получаем $\neg\neg(B_5 \sim A_5)$.)

Таким образом, для установления утверждений Брауэра, касающихся пяти пар свойств из работы **1951**, мы докажем шесть положительных формул a_1, a_2, a_3, a_4, b, c и шесть «не импликаций» (точнее, отрицаемых обобщенных импликаций).

Упомянутые шесть положительных формул мы кратко докажем в п. 17.3.

Из шести «не импликаций» мы докажем только три, показанные в правом столбце таблицы 1 с сохранением соответствующих отрицаний («$\neg\forall$»). Остальные три мы записали, опуская знак $\neg$ перед $\forall$ и в замкнутой форме. Получившиеся формулы, как мы покажем, формально неразрешимы. Эта работа будет упорядочена следующим образом. В правый столбец таблицы 1 включены четыре новых формулы, в том числе одна, выражающая импликацию $\overline{\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \to \alpha \# \beta}$ (ср. п. 17.1). Выводимости d — j, показанные стрелками в этой таблице, мы немедленно установим в п. 17.3. Первая и последняя (подчеркнутые) формулы будут доказаны в п. 18.1. Вторая подчеркнутая формула, как мы (классически) покажем в п. 18.2, реализуема, а третья и четвертая подчеркнутые формулы не s-реализуемы.

17.3. a_1. $\beta, \alpha \in R \supset (\neg\neg B_1 \sim A_1)$. Допустим $\beta, \alpha \in R$. I. По *R 1.4 $\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \alpha$, т. е. A_1, следовательно, по *11 $\neg\neg B_1 \supset \supset A_1$. II. Допустим $\alpha \mathrel{\circ\!>} \beta \;\&\; \alpha \mathrel{<\!\circ} \beta$. Тогда по *R6.6 $\alpha \mathrel{<\!\circ} \alpha$, что противоречит *R 6.8. Таким образом, $\neg(\alpha \mathrel{\circ\!>} \beta \;\&\; \alpha \mathrel{<\!\circ} \beta)$, следовательно, по *58 c—d получаем $\neg\neg(\alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta \vee \alpha \mathrel{\not<\!\circ} \beta)$, т. е. $\neg\neg B_1$.

a_2. Допустим $\beta, \alpha \in R$. Теперь $\neg\neg(\alpha \mathrel{\dot<} \beta \vee \alpha \mathrel{\dot>} \beta) \sim \neg(\neg\alpha \mathrel{\dot<} \beta \;\&\; \neg\alpha \mathrel{\dot>} \beta)$ [*63] $\sim \neg\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta$ [*R 7.10].

a_3. Допустим $\beta, \alpha \in R$. Далее $\neg\neg(\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \vee \alpha \mathrel{\circ\!>} \beta) \sim \neg(\neg\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \;\&\; \alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta)$ [*63] $\sim \neg\alpha \mathrel{\dot<} \beta$ [*R 7.1] $\sim \alpha \mathrel{\not<\!\circ} \beta$ [*R 7.8].

a_4. *R 7.9.

b. *R 7.7 (без допущения $\beta, \alpha \in R$).

c. Допустим $\beta, \alpha \in R$. Используя *R 7.8, имеем $\neg\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \;\&\; \alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta \supset \neg\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \;\&\; \neg\alpha \mathrel{\dot>} \beta$. Далее используем *63.

e. I. *R 6.2. II. *R 6.3, *R2.3.

i. Нам нужно показать, что $\beta, \alpha \in R$, $\neg\neg B_5 \supset A_5 \vdash \neg\alpha \mathrel{\dot<} \beta \supset A_5$. Однако по *R7.8 и a_3 $\beta, \alpha \in R \vdash \neg\alpha \mathrel{\dot<} \beta \supset \neg\neg B_5$.

§ 18. Опровержение или доказательство независимости некоторых классических свойств порядка.

18.1. После того как мы получим *R15.2 и *R15.3, три аналогичных результата будут следовать по стрелкам d, i, j в таблице 1 (и три других результата этого рода суть *R9.23—*R9.25, установленные в главе III).

Приводимые ниже доказательства *R15.1—*R15.3 принадлежат Весли. Они используют некоторые из далеких результатов главы III и короче исходных авторских доказательств (не использовавших ничего, следующего за *R9.2).

*R15.1. $\vdash \beta \in R' \;\&\; \beta \mathrel{\dot>} 0 \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R'}(\alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta \vee \alpha \mathrel{\not<\!\circ} \beta)$.

*R15.2. $\vdash \beta \in R \;\&\; \beta \mathrel{\dot>} 0 \supset \neg\forall\alpha_{\alpha\in R}(\alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta \vee \alpha \mathrel{\not<\!\circ} \beta)$.

Доказательства. *R15.1. Допустим (a) $\beta \in R' \;\&\; \beta \mathrel{\dot>} 0$ и $\forall\alpha_{\alpha\in R'}(\alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta \vee \alpha \mathrel{\not<\!\circ} \beta)$. Применяя *27.6 вместе с *R0.8 и опуская $\exists\tau$, подготавливая $\exists$-удал., допустим (b) $\forall\alpha_{\alpha\in R'}\exists y\{\forall x[\tau(\bar\alpha(x)) > 0 \supset y = x] \;\&\; \{(\alpha \mathrel{\circ\!\not>} \beta \;\&\; \tau(\bar\alpha(y)) = 1) \vee (\alpha \mathrel{\not<\!\circ} \beta \;\&\; \tau(\bar\alpha(y)) = 2)\}\}$. Используя это вместе с (a) и опуская $\exists y$ перед $\exists$-удал., имеем

(c) $(\beta \mathrel{\circ\!\not>} \beta \;\&\; \tau(\bar\beta(y)) = 1) \vee (\beta \mathrel{\not<\!\circ} \beta \;\&\; \tau(\bar\beta(y)) = 2)$.

Мы начнем с несколько более сложного *случая* 2: $\tau(\bar{\beta}(y)) = 2$. Используя *R9.20 вместе с (a), допустим (d) $\alpha \in R'$, (e) $\bar{\alpha}(y) = \bar{\beta}(y)$, (f) $\alpha \overset{\circ}{=} (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}$. По *R9.16, (a) и (f) имеем (g) $\beta \not<\!\circ\, \alpha$. Используя (d), (e) и предположение данного случая в (b), получаем (h) $\alpha \not<\!\circ\, \beta$. Теперь (i) $\beta \overset{\circ}{=} \alpha$ [(g), (h), *R6.5] $\overset{\circ}{=} (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}$ [f]. Следовательно, по (a) и *R7.1 имеем (j) $\beta(y) > 1$. Пусть (k) $\gamma = (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}$ [лемма 5.3(a)]. По *R9.2 (l) $\gamma \in R'$. Таким образом, исходя из (b), допустим $\forall x\, [\tau(\bar{\gamma}(x)) > 0 \supset z = x]\ \&\ \{(\gamma \circ\!\not> \beta\ \&\ \tau(\bar{\gamma}(z)) = 1) \vee (\gamma \not<\!\circ\, \beta\ \&\ \tau(\bar{\gamma}(z)) = 2)\}$. *Подслучай* 2.2: $\tau(\bar{\gamma}(z)) = 2$. Пусть (m) $w = \max(z, y)$. Используя (l) и $\exists$-удал. из *R9.20 с γ, w в качестве β, y, допустим (n) $\delta \in R'$, (o) $\bar{\delta}(w) = \bar{\gamma}(w)$, (p) $\delta \overset{\circ}{=} (\gamma(w) \dot{-} 1)\, 2^{-w}$. Используя (m), (0) и *23.4, получаем $\bar{\delta}(z) = \bar{\gamma}(z)$, откуда по предположению подслучая $\bar{\tau}(\delta(z)) = 2$. Используя это и (n) в (b), получаем $\delta \not<\!\circ\, \beta$ (Однако $\delta \overset{\circ}{=} (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}(w) \dot{-} 1)\, 2^{-w}$ [(p), (k)] $= ((\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{w \dot{-} y} - 1)\, 2^{-w}$ [^{x}R9.1, (m) и др.] $<\circ\, (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{w \dot{-} y} \cdot 2^{-w}$ [*R9.8, (j), *6.16] $= (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{w \dot{-} y} 2^{-(y+(w \dot{-} y))}$ [(m), *6.7] $= (\beta(y) \dot{-} 1)\, 2^{-y}$ [*R9.3] $\overset{\circ}{=} \beta$[(i)].

Подслучай 2.1: $\tau(\bar{\gamma}(z)) = 1$. Аналогично, но с использованием *R9.21. *Случай* 1: $\tau(\bar{\beta}(y)) = 1$. Аналогично случаю 2 с использованием вначале *R9.21 (и без вывода (j)).

*R15.2. Следует из *R15.1 (с использованием *R1.11, *R7.3, *R1.5, *R0.7, *R6.13, *R6.14) так же, как *R9.23 следует из *R9.22.

*R15.3. $\vdash \beta \in R \supset \neg\, \forall \alpha_{\alpha \in R}\, (\neg \alpha \dot{<} \beta \supset \alpha \overset{\circ}{=} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta)$.

Доказательство. Допустим $\beta \in R$ и (a) $\forall \alpha_{\alpha \in R}\, (\neg \alpha \dot{<} \beta \supset \alpha \overset{\circ}{=} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta)$. Теперь (b) β, $\beta + 1 \in R$ [*R3.2, *R9.2, *R0.7]. Кроме того, $\beta = \beta + 0$ [^{x}R9.1, ^{x}13.1] $<\circ\, \beta + 1$ [*R9.8, *R6.16, *R3.4], так что (c) $\beta_0 \circ\!\not> \beta + 1$ [*R6.7] и (d) $\neg\, \beta \overset{\circ}{=} \beta + 1$ [*R6.4]. Ввиду *R1.5 и *R1.6 имеем (e) $\forall \alpha \forall \gamma\, [\alpha \in [\beta, \beta + 1]\ \&\ \alpha \overset{\circ}{=} \gamma \supset (\alpha \overset{\circ}{=} \beta \sim \gamma \overset{\circ}{=} \beta)]$. Чтобы получить (f), допустим $\alpha \in [\beta, \beta + 1]$. По *R8.1 $\alpha \in R$. Таким образом, по *R8.6, (b) и (c) $\alpha \not<\!\circ\, \beta$, следовательно, по *R7.8 $\neg\, \alpha \dot{<} \beta$, поэтому по

(a) $\alpha \overset{\circ}{=} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta$, откуда по *R7.1 $\alpha \overset{\circ}{=} \beta \vee \neg\, \alpha \overset{\circ}{=} \beta$. По $\supset$- и $\forall$-введ. получаем (f) $\forall \alpha\, (\alpha \in [\beta, \beta + 1] \supset \alpha \overset{\circ}{=} \beta \vee \neg \alpha \overset{\circ}{=} \beta)$. Согласно *R 10.4 (с $\alpha \overset{\circ}{=} \beta$ в качестве $C(\alpha)$), а также (b), (c), (e) и (f) имеем $\forall \alpha\, (\alpha \in [\beta, \beta + 1] \supset \alpha \overset{\circ}{=} \beta) \vee \forall \alpha\, (\alpha \in [\beta, \beta + 1] \supset \neg\, \alpha \overset{\circ}{=} \beta)$. *Случай* 1: $\forall \alpha\, (\alpha \in [\beta, \beta + 1] \supset \alpha \overset{\circ}{=} \beta)$. Тогда по *R8.5 вместе с (b) получаем $\beta + 1 \overset{\circ}{=} \beta$, что противоречит (d). *Случай* 2: $\forall \alpha\, (\alpha \in [\beta, \beta + 1] \supset \alpha \overset{\circ}{=} \beta)$. Аналогично получаем $\neg \beta \overset{\circ}{=} \beta$ в противоречие с *R1.4.

18.2. Когда мы установим теоремы 18.1, 18.2 и 18.4, формальная неразрешимость пяти формул, не содержащих $\neg\, \forall$, таблицы п. 17.2, будет следовать (недоказуемость — интуиционистски, неопровержимость — классически) из теорем 11.3(a), 9.3(a) и следствия 9.4, а также стрелок e, f, g, h таблицы 1 (с доказательствами п. 17.3).

*R15.4. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset (\alpha \circ\!> \beta \sim \exists x\, \alpha(x) \dot{-} \beta(x) > 2)$.

*R15.5. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset (\alpha \# \beta \sim \exists x\, |\alpha(x) - \beta(x)| > 2)$.

*R15.6. $\vdash \alpha, \beta \in R' \supset (\alpha \overset{\circ}{=} \beta \sim \forall x\, |\alpha(x) - \beta(x)| \leqslant 2)$.

Доказательства. *R15.4. Допустим $\alpha, \beta \in R'$. I. Подготавливая $\exists$-удал. из $\alpha \circ\!> \beta$, допустим $\forall p\, 2^k (\alpha(x + p) \dot{-} \beta(x + p)) \geqslant 2^{x+p}$. Тогда $2^k (\alpha(x + k + 2) \dot{-} \beta(x + k + 2)) \geqslant 2^{x+k+2} \geqslant 2^{k+2}$, следовательно, $\alpha(x + k + 2) \dot{-} \beta(x + k + 2) \geqslant 2^2 > 2$, поэтому $\exists x\, \alpha(x) \dot{-} \beta(x) > 2$. II. Подготавливая $\exists$-удал., допустим $\alpha(x) \dot{-} \beta(x) > 2$. Тогда $\alpha(x) \dot{-} \beta(x) \geqslant 3$, поэтому (a) $3 \cdot 2^p \leqslant 2^p (\alpha(x) \dot{-} \beta(x)) = 2^p \alpha(x) \dot{-} 2^p \beta(x)$. Далее, $\alpha(x + p) + 2^p > 2^p \alpha(x)$ [*R0.6, *11.15] $\geqslant 3 \cdot 2^p + 2^p \beta(x)$ [(a)] $= 2 \cdot 2^p + 2^p \beta(x) + 2^p > 2 \cdot 2^p + \beta(x + p)$ [*R0.6, *11.15], следовательно, $\alpha(x + p) \dot{-} \beta(x + p) \geqslant 2^p$. Таким образом, $2^x (\alpha(x + p) \dot{-} \beta(x + p)) \geqslant 2^{x+p}$, откуда при помощи $\forall$-, $\exists$- и $\exists$-введ. получаем $\alpha \circ\!> \beta$.

*R15.5. Допустим $\alpha, \beta \in R'$. I. Допустим $\alpha \# \beta$. Согласно *R6.2 (вместе с *R0.7) имеем $\beta \circ\!> \alpha \vee \alpha \circ\!> \beta$. *Случай* 1: $\beta \circ\!> \alpha$. По *R15.4 $\exists x\, \beta(x) \dot{-} \alpha(x) > 2$, следовательно, $\exists x\, |\alpha(x) - \beta(x)| > 2$. II. Подготавливая $\exists$-удал. допустим $|\alpha(x) - \beta(x)| > 2$. Согласно *11.14a имеем $\alpha(x) > \beta(x) + 2 \vee \beta(x) > \alpha(x) + 2$. *Случай* 1: $\alpha(x) > \beta(x) + 2$. Тогда $\alpha(x) \dot{-} \beta(x) > 2$, откуда по $\exists$-введ. и *R15.4 $\alpha \circ\!> \beta$, следовательно, по *R6.3 (и *R2.3) $\alpha \# \beta$.

*R15.6. Допустим $\alpha,\ \beta \in R'$. Тогда $\alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \sim \neg \alpha \# \beta$ [*R2.8] $\sim \neg\ \exists x \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid > 2$ [*R15.5] $\sim \forall x \neg \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid > 2$ [*86] $\sim \forall x \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid \leqslant 2$ [*139—*141].

Теорема 18.1^{C}. *С классической точки зрения формула*

(1) $\forall \beta_{\beta \in R} \forall \alpha_{\alpha \in R} (\neg \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \supset \alpha \# \beta)$

реализуема.

Доказательство. Ввиду *R1.11 вместе с *R1.6, *R1.5, *R2.4 и *R2.3 формула (1) выводима из

(2) $\forall \beta_{\beta \in R'} \forall \alpha_{\alpha \in R'} (\neg \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \supset \alpha \# \beta)$.

Ввиду *R15.6 и *R15.5 (2) выводима из

(3) $\forall \beta \forall \alpha [\neg \forall x \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid \leqslant 2 \supset \exists x \mid \alpha(x) - \beta(x) \mid > 2]$.

Ввиду #15 и #D (ВМ, стр. 205—206) и п. 5.5 мы можем считать области действия кванторов $\forall x$ и $\exists x$ в (3) элементарными. Формула (3) классически истинна. Следовательно, по лемме 8.4b (ii) эта формула реализуема. По теореме 9.3(a) такова же и формула (1).

Теорема 18.2. *Формула*

(4) $\forall \beta_{\beta \in R} \forall \alpha_{\alpha \in R} (\alpha \mathrel{\dot{>}} \beta \supset \alpha \mathrel{\circ>} \beta)$

не является s-реализуемой.

Доказательство. Из (4) по *R0.7 и *R7.1 мы можем вывести

(5) $\beta,\ \alpha \in R' \ \&\ \alpha \mathrel{\not<\circ} \beta \ \&\ \neg \alpha \mathrel{\overset{\circ}{=}} \beta \supset \alpha \mathrel{\circ>} \beta$

и, следовательно, по *R6.15, *R15.6 и *R15.4

(6) $\beta,\ \alpha \in R' \ \&\ \alpha \geqslant \beta \ \&\ \neg \forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2 \supset \exists y \alpha(y) \dot{-} \beta(y) > 2$.

Отсюда мы ниже выведем

(7) $\forall x [\neg \forall y \neg T(x, y) \supset \exists y T(x, y)]$,

где $T(x, y)$ взято из теоремы 11.7(b).

С этой целью мы допустим

(a) $\neg \forall y \neg T(x, y)$

и приведем вывод $\exists y T(x, y)$ из (a) и (6) с фиксированным x. По лемме 8.8 $T_1(z, x, y) \vee \neg T_1(z, x, y)$, откуда подстановкой получаем

(b) $T(x, y) \vee \neg T(x, y)$.

Поэтому для любого натурального числа b мы можем допустить, подготавливая $\exists$-удал. из лемм 5.3 (b) и 5.5 (b),

(c) $\beta(0) = b$,
$\forall y \beta(y') = 2\beta(y)$;

(d) $\alpha(0) = b + 1$,

$$\forall y \alpha(y') = \begin{cases} 2\alpha(y) \dot{-} 1, & \text{если } \neg T(x, y), \\ 2\alpha(y), & \text{если } T(x, y). \end{cases}$$

Используя соответственно *R0.5a—b, индукцию по y и (f), получаем

(e) $\beta,\ \alpha \in R'$. (f) $\alpha(y) \geqslant \beta(y) + 1$. (g) $\alpha \geqslant \beta$.

Установим теперь

(h) $\alpha(y) > \beta(y) + 1 \supset \alpha(y') > \beta(y') + 2$.

Допустим $\alpha(y) > \beta(y) + 1$. Тогда $\alpha(y') \geqslant 2\alpha(y) \dot{-} 1 \geqslant 2(\beta(y) + 2) \dot{-} 1 = 2\beta(y) + 3 = \beta(y') + 3 > \beta(y') + 2$.— Установим далее

(i) $\forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2 \supset \forall y \alpha(y) = \beta(y) + 1$.

Допустим (A) $\forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2$. Теперь $\alpha(y) = \beta(y) + 1$, поскольку иначе по (f) $\alpha(y) > \beta(y) + 1$, откуда по (h) $\alpha(y') > \beta(y') + 2$, так что $\mid \alpha(y') - \beta(y') \mid > 2$ в противоречие с (A). По $\forall$-введ. получаем $\forall y \alpha(y) = \beta(y) + 1$.— Теперь мы установим индукцией по y

(j) $\{\alpha(y) = \beta(y) + 1 \sim \forall z_{z > y} \neg T(x, z)\}$ &
$\{\alpha(y) > \beta(y) + 1 \sim \exists z_{z > y} T(x, z)\}$.

Ввиду *140 [*58b, *86] левые (правые) части этих эквивалентностей взаимно исключают друг друга. Поэтому, если мы выведем оба члена одной из эквивалентностей, то эта эквивалентность будет следовать согласно *11, *16, а другая — согласно *10a, *16. Инд. шаг. Согласно (f) имеем два случая. Случай 1: $\alpha(y) = \beta(y) + 1$. По инд. предп. $\forall z_{z<y} \neg T(x, z)$. Согласно (b) имеем два подслучая. Подслучай 1.1: $T(x, y)$. Тогда $\exists z_{z<y'} T(x, z)$. Кроме того, $\alpha(y') = 2\alpha(y)$ [(d)] $= 2(\beta(y) + 1)$ [предп. случая 1] $= 2\beta(y) + 2 = \beta(y') + 2 > \beta(y') + 1$. Случай 2: $\alpha(y) > \beta(y) + 1$. По инд. предп. $\exists z_{z<y} T(x, z)$, следовательно, $\exists z_{z<y'} T(x, z)$. Ввиду (h) $\alpha(y') > \beta(y') + 1$.— На основании (j) получаем $\forall y \alpha(y) = \beta(y) + 1 \supset \forall y \neg T(x, y)$.

Комбинируя это с *2 в (i) и используя контрапозицию *12 и (a), получаем

(k) $\neg \forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2$.

Если $\exists y \alpha(y) \dot{-} \beta(y) > 2$, то $\exists y \alpha(y) > \beta(y) + 1$ и согласно (j) $\exists y T(x, y)$. Таким образом,

(l) $\exists y \alpha(y) \dot{-} \beta(y) > 2 \supset \exists y T(x, y)$.

Используя (e), (g), (k) в (6) и получающийся результат в (l), получаем

(m) $\exists y T(x, y)$.

Используя $\exists$-удал. из лемм 5.3(b) и 5.5(b), чтобы освободиться от допущений (c) и (d), $\supset$-введ., чтобы освободиться от (a), и $\forall$-введ., мы получаем выводимость формулы (7) из (6), а следовательно, и из (4).

По теореме 11.7(b) формула (7) не является *s*-реализуемой. По теореме 11.3(a) этим же свойством обладает и формула (4).

З а м е ч а н и е 18.3. Согласно (c) $\beta = \boldsymbol{b} [= \boldsymbol{b} 2^{-0}$, ^{x}R9.1], так что приведенное доказательство показывает, что формула $\forall \alpha_{\alpha \in R} (\alpha \dot{>} \boldsymbol{b} \supset \alpha \circ\!> \boldsymbol{b})$ не s-реализуема. Незначительная модификация доказательства позволяет также установить не s-реализуемость формулы $\exists x \forall p 2\beta(x + p) \leqslant \beta(x + p') \leqslant 2\beta(x + p) + 1 \supset \forall \alpha_{\alpha \in R} (\alpha \dot{>} \beta \supset \alpha \circ\!> \beta)$.

Т е о р е м а 18.4. *Формула*

(8) $\forall \beta_{\beta \in R} \forall \alpha_{\alpha \in R} (\neg \alpha \overset{\circ}{=} \beta \supset \alpha \dot{<} \beta \vee \alpha \dot{>} \beta)$

не является s-*реализуемой*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (8) согласно *R0.7 и *R7.1 мы можем вывести

(9) $\beta, \alpha \in R' \,\&\, \neg \alpha \overset{\circ}{=} \beta \supset \alpha \circ\!\not> \beta \vee \alpha \not<\!\circ\, \beta$,

а следовательно, по *R15.6 и *R15.4

(10) $\beta, \alpha \in R' \,\&\, \neg \forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2 \supset$
$\neg \exists y \alpha(y) > \beta(y) + 2 \vee \neg \exists y \beta(y) > \alpha(y) + 2$.

Отсюда мы ниже выведем

(11) $\forall x [\neg (\forall y \neg W_0(x, y) \,\&\, \forall y \neg W_1(x, y)) \supset$
$\neg \forall y \neg W_0(x, y) \vee \neg \forall y \neg W_1(x, y)]$,

где $W_0(x, y)$ и $W_1(x, y)$ взяты из теоремы 11.7(d).

Согласно сказанному допустим

(a) $\neg (\forall y \neg W_0(x, y) \,\&\, \forall y \neg W_1(x, y))$.

По лемме 8.8, подстановке и средней части замечания 4.1 имеем

(b_0) $W_0(x, y) \vee \neg W_0(x, y)$,
(b_1) $W_1(x, y) \vee \neg W_1(x, y)$.

Легко формализуемое доказательство из ВМ, стр. 274 (51), дает

(c) $\neg (\exists y W_0(x, y) \,\&\, \exists y W_1(x, y))$,

следовательно,

(d) $\neg (W_0(x, y) \,\&\, W_1(x, y))$.

Таким образом, для любого натурального числа $b > 0$ мы можем допустить, подготавливая $\exists$-удал. из лемм 5.3(b) и 5.5(b),

(e) $\beta(0) = \boldsymbol{b}$
$\beta(y') = 2\beta(y)$;

$$\alpha(0) = \boldsymbol{b},$$

(f) $$\forall y \alpha(y') = \begin{cases} 2\alpha(y) \dot{-} 1, & \text{если } W_0(x, y) \,\&\, \neg W_1(x, y), \\ 2\alpha(y), & \text{если } \neg W_0(x, y) \,\&\, \neg W_1(x, y), \\ 2\alpha(y)+1, & \text{если } \neg W_0(x, y) \,\&\, \neg W_1(x, y). \end{cases}$$

Используя соответственно *R0.5a—b и индукцию по y, получим

(g) $\beta, \alpha \in R'$. (h) $\beta(y) = 2^y \boldsymbol{b} > 0$.

Теперь мы установим индукцией по y

(i) $\{\alpha(y) < \beta(y) \sim \exists z_{z<y} W_0(x, z)\} \,\&$
$\{\alpha(y) = \beta(y) \sim \forall z_{z<y} (\neg W_0(x, z) \,\&\, \neg W_1(x, z))\} \,\&$
$\{\alpha(y) > \beta(y) \sim \exists z_{z<y} W_1(x, z)\}$.

Ввиду *140, *141 [(c) и др.] левые [правые] части взаимно исключают друг друга и т. д. (ср. (j) в доказательстве теоремы 18.2). И н д. ш а г. С л у ч а й 1: $\alpha(y) < \beta(y)$. По инд. предп. $\exists z_{z<y} W_0(x, z)$, следовательно, $\exists z_{z<y'} W_0(x, z)$. Кроме того, $\alpha(y') \leqslant 2\alpha(y)$ [поскольку (c) исключает третий случай в (f)] $< 2\beta(y)$ [предп. случая 1] $= \beta(y')$. С л у ч а й 2: $\alpha(y) = \beta(y)$. П о д с л у ч а й 2.1: $W_0(x, y) \,\&\, \neg W_1(x, y)$. Тогда $\exists z_{z<y'} W_0(x, z)$. Кроме того, $\alpha(y') = 2\alpha(y) \dot{-} 1$ [(f)] $= 2\beta(y) \dot{-} 1$ [предп. случая 2] $< 2\beta(y)$ [*6.16 вместе с $2\beta(y) > 0$, вытекающим из (h)] $= \beta(y')$. П о д с л у ч а й 2.2: $\neg W_0(x, y) \,\&\, \neg W_1(x, y)$. По инд. предп. $\forall z_{z<y} (\neg W_0(x, z) \,\&\, \neg W_1(x, z))$. Таким обра-

зом, $\forall z_{z<y'} (\neg W_0(x, z) \& \neg W_1(x, z))$ и т. д. — Далее имеем

(j_0) $\beta(y) > \alpha(y) \supset \beta(y'') \geqslant \alpha(y'') + 4$,
(j_1) $\alpha(y) > \beta(y) \supset \alpha(y'') \geqslant \beta(y'') + 4$.

Действительно, допустим $\beta(y) > \alpha(y)$. Тогда по (i) и (c) $\neg \exists y W_1(x, y)$. Следовательно, $\alpha(y') + 2 \leqslant 2\alpha(y) + 2 = 2(\alpha(y) + 1) \leqslant 2\beta(y) = \beta(y')$ и $\alpha(y'') + 4 \leqslant 2\alpha(y') + 4 = 2(\alpha(y') + 2) \leqslant 2\beta(y') = \beta(y'')$.— Далее

(k) $\forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2 \supset \forall y \alpha(y) = \beta(y)$.

В самом деле, допустив $\alpha(y) < \beta(y)$, мы имели бы по (j_0) $\mid \alpha(y'') - \beta(y'') \mid \geqslant 4$.— Согласно (k) вместе с (i) имеем $\forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2 \supset \forall y (\neg W_0(x, y) \& \neg W_1(x, y))$, следовательно, по *87, контрапозиции и (a) получаем

(l) $\forall y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid \leqslant 2$.

Теперь мы установим

(m_0) $\neg \exists y \alpha(y) > \beta(y) + 2 \supset \neg \forall y \neg W_0(x, y)$,
(m_1) $\neg \exists y \beta(y) > \alpha(y) + 2 \supset \neg \forall y \neg W_1(x, y)$.

Допустим $\neg \exists y \alpha(y) > \beta(y) + 2$, следовательно, $\forall y \alpha(y) \leqslant \beta(y) + 2$ и по (j_1) имеет место (A) $\forall y \alpha(y) \leqslant \beta(y)$. Допустим также $\forall y \neg W_0(x, y)$, откуда по (i) получим $\forall y \neg \alpha(y) < \beta(y)$. Таким образом, по (A) $\forall y \alpha(y) = \beta(y)$, следовательно, по (i) $\forall y (\neg W_0(x, y) \& \neg W_1(x, y))$. Это ввиду *87 противоречит (a).—Используя (g) и (l) в (10), а также (m_0) и (m_1) в получающемся результате, имеем

(n) $\neg \forall y \neg W_0(x, y) \vee \neg \forall y \neg W_1(x, y)$.

З а м е ч а н и е 18.5. При помощи данного доказательства или (для $m > 0$) его простой модификации устанавливается, что формула $\forall \alpha_{\alpha \in R} (\neg \alpha \doteq b2^{-m} \supset \alpha \dot{<} b2^{-m} \vee \alpha \dot{>} b2^{-m})$ не s-реализуема при любом $b > 0$ и любом m.

З а м е ч а н и е 18.6. Комбинируя несколько выводов (именно, e + g в п. 17.3, вывод (7) из (4) в доказательстве теоремы 18.2, начало доказательства следствия 11.10 (a)), мы можем вывести из

(1) $\forall \beta_{\beta \in R} \forall \alpha_{\alpha \in R} (\neg \alpha \doteq \beta \supset \alpha \# \beta)$

(см. доказательство теоремы 18.1) принцип Маркова

M_1: $\forall z \forall x [\neg \forall y \neg T_1(z, x, y) \supset \exists y T_1(z, x, y)]$

(см. начало п. 10.1).— Незначительно изменяя доказательство теоремы 18.2, мы вместо этого можем вывести из (4), а также по e + g из (1) формулу

(3′) $\forall \beta \forall \alpha [\neg \forall y \neg \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid > 2 \supset \exists y \mid \alpha(y) - \beta(y) \mid < 2]$.

Обратно, из (3′) мы можем вывести (3), а следовательно (по доказательству теоремы 18.1), и (1). Таким образом, *любые две из формул* (1), (4), (3) *взаимно выводимы друг из друга.*— Формула (3′) сходна по форме с M_1, однако содержит функциональные переменные. Непосредственное распространение принципа Маркова с алгорифмов для одноместных теоретико-числовых функций на алгорифмы для функционалов типа 2 таково:

M_1': $\forall z \forall \alpha [\neg \forall y \neg T_0^1(\tilde{\alpha}(y), z, y) \supset \exists y T_0^1(\tilde{\alpha}(y), z, y)]$,

где $T_0^1(w, z, y)$ выбрано по лемме 8.5 (методу ее доказательства) так, чтобы нумерически выражать $T_0^1(w, z, y)$ (ВМ, стр. 259—260). Эта формула M_1' выводима из (1) по существу так же, как M_1 и (3′). Обратно, неформальные (но предположительно формализуемые) рассуждения в теории рекурсивных функционалов показывают, что (3′) вытекает из M_1'. — Таким образом, поскольку обращения (1) и (4) доказуемы (*R2.5, *R7.7), *принцип Маркова, распространенный на функционалы в виде* (3′) *и, предположительно, в виде* M_1', *взаимно выводим с*: (i) *эквивалентностью неравенства* $\neg \alpha \doteq \beta$ *отделенности* $\alpha \# \beta$; (ii) *эквивалентностью виртуального упорядочения* $\alpha \dot{<} \beta$ *псевдоупорядочению* $\alpha <_\circ \beta$ *континуума Брауэра.*— Из (3′) или

(3″) $\forall \beta \forall \alpha [\neg \forall y \alpha(y) = \beta(y) \supset \exists y \alpha(y) \neq \beta(y)]$

(ср. ван Роотселар **1960**, Крайзел **1962 c**) мы можем, используя $\forall$-удал. с $\beta_1 = \lambda y 0$ и $\alpha_1 = \lambda y \overline{sg}(\alpha(y)) + 2$ или соответственно $\alpha_1 = \lambda y\, \overline{sg}(\alpha(y))$, вывести

(3‴) $\forall \alpha \& \neg \forall y \neg \alpha(y) = 0 \supset \exists y \alpha(y) = 0]$,

и обратно, используя $\alpha_1 = \lambda y t(\alpha, \beta, y)$ для стандартной формулы $t(\alpha, \beta, y) = 0$, эквивалентной $\mid \alpha(y) - \beta(y) \mid > 2$ или соответственно $\alpha(y) \neq \beta(y)$ (ср. п. 5.5, текст, предшествующий *14.1), мы можем вывести из (3‴) формулы (3′) и (3″). Таким образом, *каждые две из формул* (3′), (3″) *и* (3‴) *взаимно выводимы друг из друга.*

БИБЛИОГРАФИЯ[1])

С. К. Клини

Даты, набранные полужирным шрифтом в сочетании с именем автора (например, Брауэр **1907**), отсылают к настоящей библиографии; в случае употребления обычного шрифта (например, Брауэр 1908) имеется в виду библиография «Введения в метаматематику» (ВМ) Клини 1952b.

Белинфанте (Belinfante M. J.)

1929. Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen, Sitzunsgber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 639—660.

Бет (Beth E. W.)

1947. Semantical considerations on intuitionistic mathematics, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sci. **50**, 1246—1251 (= Indag. math. **9**, 572—577).

1955. Les fondements logiques des mathématiques, 2-е пересмотренное и расширенное изд., Paris-Louvains.

1955a. Semantic entailment and formal derivability, Mededelingen der Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Afd. letterkunde, n.s. **18**, № 13, 309—342.

1956. Semantic construction of intuitionistic logic, там же **19**, № 11, 357—388.

1959. The foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.) [Русский перевод выдержек из §§ 67, 68, 70, 92: Э. В. Бет, Метод семантических таблиц, в сб. «Математическая теория логического вывода», «Наука», М., 1967, 191—199.]

1959a. Remarks on intuitionistic logic, Constructivity in mathematics, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 15—25.

Биркгоф (Birkhoff G.)

1940. Lattice theory, Amer. Math. Soc. Coll. publ. **25**, N.Y., 2-е изд., 1948. [Русский перевод второго издания: Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, М., 1952.]

Бишоп (Bishop E.)

1966°. The constructive development of abstract analysis, Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Тезисы докладов, 1966, 31—39.

[1]) Знаком ° помечены работы, добавленные переводчиками. Эти дополнения никоим образом не претендуют на полноту. Добавлены в основном работы обзорного характера (содержащие дальнейшую библиографию), например, Минц **1975**, ван Дален **1973**, а также работы на русском языке.— *Прим. перев.*

1967°. Foundations of constructive analysis, N.Y.

1970°. Mathematics as a numerical language, Intuitionism and Proof Theory, Proc. of the summer conference at Buffalo, N.Y., 1968, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-London, 53—71.

Бишоп, Ченг (Bishop E., Cheng H.)

1972°. Constructive measure theory, Memoirs Amer. Math. Soc., 116.

Борель (Borel E.)

1898. Leçons sur la théorie des fonctions, Paris (Gauthier-Villars). (Leçons sur la théorie des fonctions; principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions), Paris (Gauthier-Villars), 1950.

1922. Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions, Paris (Gauthier-Villars).

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

1907. Over de grondslagen der wiskunde, диссертация, Amsterdam — Leipzig.

1912. Intuitionisme en formalisme, Groningen. (Английский перевод: Intuitionism and formalism, Bull. Amer. Math. Soc. **20** (1913—1914), 81—96.)

1918—1919. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz ausgeschlossenen Dritten, [I] Erster Teil: Algemeine Mengenlehre, Verhand. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam (Eerste sectie) **12**, № 5 (1918); [II] Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen, там же **12**, № 7 (1919).

1919. Intuitionistische Mengenlehre, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **28**, 203—208 (также в Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sci. **23**, 949—954).

1921. Besitzt jede reele Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? Math. Ann. **83**, 201—210.

1923a. Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Verhand. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. (Eerste sectie) **13**, № 2 (Исправления **1924**, примечание 1).

1924. Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sci. **27**, 189—193.

1924a. Bemerkungen zum Beweis der gleichmässigen Stetigkeit voller Funktionen, там же 644—646.

1924—1927. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, I, Math. Ann. **93** (1924—1925), 244—257 (исправления там же **95**, 472); II, там же **95** (1925—1926), 453—472 (исправления там же **96**, 488); III, там же, **96** (1926—1927), 451—488.

1925. Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein **33**, 251—256.

1927. Über Definitionsbereiche von Funktionen, Math. Ann. **97**, 60—75.

1928a. Die Strukture des Kontinuums, Wien.

1929. Mathematik, Wissenschaft und Sprache, Monatsh. Math. Phys. **36**, 153—164.

1948. Consciousness, philosophy and mathematics, Proceedings of the Xth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948), Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1949, 1235—1249.
1948a. Essentieel negatieve eigenschappen, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sci. 51, 963—964 (= Indag. math. 10, 322—323).
1948b. Opmerkingen over het beginsel van het uitgesloten derde en over negatieve asserties, там же, 51, 1239—1243 (= Indag. math. 10, 383—387).
1949. De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatie in het continuum, там же 52, 122—124 (= Indag. math. 11, 37—39).
1949a. Contradictoriteit der elementaire meetkunde, там же 52, 315—316 (= Indag. math. 11, 89—90).
1951. On order in the continuum, and the relation of truth to non-contradictority, там же 54 (или Indag. math. 13), 357—358.
1952. Historical background, principles and methods of intuitionism, South African J. Sci. 49, 139—146.
1954. Points and spaces, Canad. J. Math. 6, 1—17.

Вейль (Weyl H.)
1918°. Das Kontinuum, Leipzig (перепечатано в 1932 г.).
1934° (год русского издания). О философии математики, Сборник работ (перев. с нем.), ГТТИ.

Весли (Vesley R. E.)
1963. On strengthening intuitionistic logic, Notre Dame J. Formal Logic 4, 80.

Гал, Россер, Скотт (Gál J. L., Rosser J. B., Scott D.)
1958. Generalization of a lemma of G. F. Rose, J. Symbolic Logic 23, 137—138.

Гейтинг (Heyting A.)
1925. Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde, Thesis, Amsterdam, Groningen.
1927. Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation, Math. Ann. 98, 465—490.
1927a. Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie, там же 491—538.
1929. De telbaarheidspraedicated van Prof. Brouwer, Nieuw archief voor wiskunde, 2 s. 16, № 2, 47—58.
1941. Untersuchungen über intuitionistische Algebra, Verhand. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. (Eerste sectie) 18, № 2.
1952—1953. Inleiding tot de intuitionistische wiskunde, Mimeographed notes by J.J. de Jongh on lectures in 1952—1953, Amsterdam.
1953. Espace de Hilbert et intuitionnisme, Les méthodes formelles en axiomatique (à Paris [7—9] Decembre 1950), Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, XXXVI, Paris, 59—64.

1953a. Sur la théorie intuitionniste de la mesure, Bull. Soc. Math. Belg. 6, 70—78.
1955. Les fondements des mathématiques: Intuitionnisme. Théorie de la démonstration, Paris — Louvain.
1956. Intuitionism. An introduction, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.) [Русский перевод: А. Гейтинг, Интуиционизм, «Мир», М., 1965.]
1959. (ред.) Constructivity in mathematics, Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam, [August 26—31] 1957, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.).

Гёдель (Gödel K.)
1933. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, Ergebn. math. Kolloq., Heft 4 (за 1931—1932, вышла из печати в 1933), 39—40.
1958. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12 (№ 47/48), 280—287. [Русский перевод: К. Гёдель, Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения, в сб. «Математическая теория логического вывода», «Наука», М., 1967, 499—510.]

Гливенко В. И.
1928. Sur la logique de M. Brouwer, Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci., ser. 5, 14, 225—228.

Грисс (Griss G. F. C.)
1944. Negatieloze intuitionistische wiskunde, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Versl. v.d. gew. vergad. d. Afd. Natuurk. 53, № 5, 261—268.
1946—1951. Negationless intuitionistic mathematics, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc., ser. A 49 (1946), 1127—1133; 53 (1950), 456—463; 54 (1951), 193—199, 452—471 (=Indag. Math. 8, 675—681; 12, 108—115; 13, 193—199, 452—471).
1955. La mathématique intuitionniste sans négation, Nieuw archief voor wiskunde, ser. 3, 3, № 3, 134—142.

Дайсон, Крайзел (Dyson V. H., Kreisel G.)
1961. Analysis of Beth's semantic construction of intuitionistic logic, part II of Technical Report No. 3, Appl. Math. and Statist. Labor., Stanford Univ., Stanford, Calif.

Дален ван (van Dalen D.)
1963. Extention problem in intuitionistic plane projective geometry, Thesis, Amsterdam (Drukkerij Holl.)
1973°. Lectures on intuitionism, Lect. Notes Math. 337, 1—94.

Данциг (van Dantzig D.)
1942. On the affirmative content of Peano's theorem on differential equations, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sci. 45, 367—373 (= Indag. math. 4, 140—146).
1949. Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicated, там же 52, 949—957 (= Indag. math. 11, 347—355).

Девис (Davis M.)
1958. Computability and unsolvability, N.Y., Toronto — London (McGraw-Hill).

Д е й к м а н (D i j k m a n J. G.)
1948. Recherche de la convergence négative dans les mathématiques intuitionistes, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sci. **51**, 681—682 (= Indag. math. **10**, 232—243).
1952. Convergentie en divergentie in de intuitionistische wiskunde, Thesis Amsterdam, 's-Gravenhage. (Резюме на английском языке.)
Д е к к е р (D e k k e r J. C. E.)
1962 (ред.) Recursive function theory [Symposium at New York, April 6—7, 1961], Proc. Symp. Pure Math. **5**, Amer. Math. Soc., Providence, R. J., 1962.
Д е к к е р, М а й х и л л (D e k k e r J. C. E., M y h i l l J.)
1960. Recursive equivalence types, Univ. of Calif. publ. in math., n.s. **3**, № 3, 67—214.
Д р а г а л и н А. Г.
1973°. К интуиционистской теории моделей, История и методология естественных наук, вып. XIV, Математика и механика, Изд-во МГУ, 106—126.
1974°. Конструктивные модели теорий интуиционистских последовательностей выбора, в сб. «Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам», «Наука», М., 214—252.
Е р ш о в Ю. Л.
1973°. Теория нумераций, спецкурс для студентов-математиков НГУ, часть 2; Вычислимые нумерации морфизмов, Новосибирск.
1974°. О модели G теории BR, ДАН СССР **217**, № 5, 1004—1006.
Ж е г а л к и н И. И.
1936. О проблеме разрешимости в брауэровской логике предложений, Тр. 2-го Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 24—30 июня 1934, т. 2, М.—Л., 1936, 437. Устанавливается существование разрешающей процедуры для брауэровского пропозиционального исчисления. (Генцен 1934—1935 поступило 21 июля 1933.)
К а б а к о в Ф. А.
1963. Выводимость некоторых реализуемых формул исчисления высказываний, Z. math. Logik Grundl. Math. **9**, 97—104.
К а р р и, Ф е й с (C u r r y H. B., F e y s R.)
1958. Combinatory logic, vol. 1, Amsterdam (North-Holland Publ. Co).
К ё н и г (K ö n i g D.)
1926. Sur les correspondences multivoques des ensembles, Fundam. math. **8**, 114—134.
К л а у а (K l a u a D.)
1961. Konstruktive Analysis, Mathematische Forschungsberichte, XI, Berlin.
К л и н и (K l e e n e S. C.)
1952a. Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols, Mem. Amer. Math. Soc., № 10, 27—68. (Исправления в J. Symbolic Logic **19**, 63.)
1952b. Introduction to metamathematics, Amsterdam — Groningen — N.Y. — Toronto. [Русский перевод: С. К. К л и н и, Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957. Ниже следуют (с указанием страниц русского перевода ВМ) те из приводимых в оригинале библиографии исправлений, которые не учтены в русском переводе ВМ: 1) на стр. 147, строки 7—8 сверху, п. (ii), читать: «она содержит в точности только переменные $a_1, \ldots, a_n$», 2) там же, строки 10—12 сверху, после «(как элементарные называющие формы)» читать: «если A_i $(t_1, \ldots, t_{n_i})$ и A_j $(u_1, \ldots, u_{n_j})$ не являются одной и той же формулой ни при каких термах $t_1, \ldots, t_{n_i}, u_1, \ldots, u_{n_j}$», 3) на стр. 301, строка 4 снизу, после «В т о р о й м е т о д» вставить «для одновременно определенных $Q_1, \ldots, Q_m$», 4) на стр. 360 в (Ia) заменить «E′ есть E″» на «$\vdash$ E′ $\sim$ E″».]
1955. Arithmetical predicates and functions quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. **79**, 312—340. Исправления там же **80** (1955), 386, **81** (1956), 524, а также в Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1006.
1955a. On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals (second paper), Amer. J. Math. **77**, 405—428. Исправления в библиографии к **1959**.
1955b. Hierarchies of number-theoretic predicates, Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 193—213.
1956. A note on computable functionals, Koninkl Nederl. Akad. Wetensch., Proc. Ser. A **59** (или Indag. math. **18**), 275—280.
1957. Realizability. Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University **1**, 100—104 (2-е издание: Princeton, N.J. (Communications Research Division, Institute for Defense Analyses), 1960), воспроизведено в Constructivity in mathematics, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1959, 285—289. Исправления: на стр. 101, строка 5 сверху (или во 2 изд. на стр. 287, строка 2 сверху) после «variable» читать «free»; на стр. 101 (в 4) заменить β на γ (в 1959 и 1960 (4) исправлено).
1957a. Реферат Бета **1956**, J. Symbolic Logic **22**, 363—365.
1958. Mathematical logic: constructive and non-constructive operations, Proc. Intern. Congr. Math., Edinburg, 14—21 August 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 137—153. Исправления: на стр. 149, строка 8 сверху, заменить «H_{n+1} (a)» на «$H_{(n+1)}$ (a)».
1959. Recursive functionals and quantifiers of finite types I, Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 1—52. Исправления в библиографии к **1963**.
1959a. Countable functionals, Constructivity in mathematics, Amsterdam (North-Holland Bubl. Co.), 81—100. Исправления: на стр. 83 в средней строчке определения $\alpha^2(s)$ первое вхождение «$(s)_1$» заменить на «$(s)_1 + 1$». Полный перечень исправлений см. в библиографии к **1963**.
1959b. Quantification of number-theoretic functions, Compositio math. **14**, 23—40. Исправления: на стр. 26, вторая строка снизу, перед «recursive» вставить «suitable».
1960. Realizability and Shanin's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences, Logique et analyse,

3^e Année, Oct. 1960, 11—12, 154—165. Исправление: на стр. 164, строка 4 сверху, перед «A_3» вставить «γ».
1962. Herbrand-Gödel-style recursive functionals of finite types, Recursive function theory, Proc. Symp. Pure Math. **5**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 49—75.
1962a. Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms, J. Symbolic Logic **27**, 11—18. Исправление: на стр. 16, строки 11 и 16 сверху, заменить «$\vdash$» на «$|$». An addendum, там же **28** (1963), 154—156.
1963. Recursive functionals and quantifiers of finite types, II. Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 106—142. Основные исправления: на стр. 129 в 4-й строке в LXIX перед вторым вхождением «q_1» вставить «;»; на стр. 135 в 4-й строке сверху примечания 24 заменить «E_2'» на «E_1'», и там же в 3-й строке снизу заменить «Togué» на «Tugué»; на стр. 142, строка 6 сверху, заменить «τ^{j-1}» на «τ^{j-1}».

Клини, Пост (Kleene S. C., Post E. L.)
1954. The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, Ann. Math. **59**, 379—407. Исправление: на стр. 404 в (56) предпоследнее вхождение «$=$» заменить на «$\neq$».

Колмогоров А. Н.
1924—1925. О принципе tertium non datur, Матем. сб. **32**, 646—667.
1932. Zur Deutung der Intuitionistischen Logik, Math. Z. **35**, 58—65.

Крайзел (Kreisel G.)
1958. Mathematical significance of consistency proofs, J. Symbolic Logic **23**, 155—182. Результат, содержащийся в замечании 6.1 на стр. 172, усилен в 1959b.
1958a. Elementary completeness properties of intuitionistic logic with a note on negations of prenex formulae, там же **23**, 317—330.
1958b. A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs, там же, 369—388.
1959. Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types, Constructivity in mathematics, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 101—128.
1959a. The non-derivability of $\neg (x)\ A\ (x) \rightarrow (Ex)\ \neg A\ (x)$, A primitive recursive, in intuitionistic formal systems (резюме), J. Symbolic Logic **23**, 456—457.
1959b. Inessential extensions of Heyting's arithmetic by means of functionals of finite type (резюме), там же **24**, 284.
1959c. Inessential extensions of intuitionistic analysis by functionals of finite type (резюме), там же, 284—285.
1959d. Reflection principle for subsystems of Heyting's (first order) arithmetic (H) (резюме), там же, 322.
1966. Реферат Бета **1956**, Zentralbl. Math. Grenzgeb. **73**, 249—250.
1961. Explicit definability in intuitionistic logic (резюме), J. Symbolic Logic **25**, 389—390.
1962. On weak completeness of intuitionistic predicate logic, там же **27**, 139—158.

1962a. Foundations of intuitionistic logic, Logic, methodology and philosophy of science, Stanford Univ. Press, 198—210. [Русский перевод: Г. Крейсел, Основания интуиционистской логики, в сб. «Математическая логика и ее применения», «Мир», М., 1965.]
1962b. Реферат Бета **1959a**, Zentralbl. Math. Grenzgeb. **91**, 9—11.
1962c. Реферат Роотселара **1960**, там же **95**, 242—243.
1962d. Proof theoretic results on intuitionistic first order arithmetic (HA) (резюме), J. Symbolic Logic **27**, 379—380.
1962e. Proof theoretic results on intuitionistic higher order arithmetic (резюме), там же, 380.
1962f. Consequences of Brouwer's bar theorem (резюме), там же, 380—381.

Крайзел, Патнам (Kreisel G., Putnam H.)
1957. Eine Unableitbarkeitsbeweismethode für den intuitionistischen Aussagenkalkül, Arch. math. Logik Grundlagenforsch. **3**, 74—78.

Крайзел, Трулстра (Kreisel G., Troelstra A. S.)
1970°. Formal systems for some branches of intuitionistic analysis, Ann. Math. Logic **1**, 229—387.

Кроль М. Д.
1976°. К топологическим моделям интуиционистского анализа. Один контрпример, Матем. заметки **19**, № 6, 859—862.

Курода (Kuroda S.)
1951. Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik, Nagoya Math. J. **2**, 35—47.

Кушнер Б. А.
1973°. Лекции по конструктивному математическому анализу, М., «Наука».

Леблан, Белнап (Leblanc H., Belnap N. D., Jr.)
1962. Intuitionism reconsidered, Notre Dame J. Formal Logic **3**, 79—82.

Лоор, де (de Loor B.)
1925. Die hoofstelling van die algebra van intuitionistiese standpunt, Thesis, Amsterdam.

Лузин Н. Н.
1927. Sur les ensembles analytiques, Fundam. Math. **10**, 1—95.
1930. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs application, Paris (Gauthier-Villars). [Русский перевод: Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, Гостехиздат, М., 1953.]

Лукасевич (Lukasiewicz J.)
1952. On the intuitionistic theory of deduction, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc., ser. A **55** (или Indag. math. **14**), 202—212.

Майхилл (Myhill J.)
1968°. Formal systems of intuitionistic analysis, I, Logic, methodology and philosophy of science, III, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 161—178.
1970°. Formal systems of intuitionistic analysis, II, Intuitionism and proof theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 151—162.

1975°. Constructive set theory, J. Symbolic Logic **40**, 347—382.

Маккинси, Тарский (McKinsey J. C. C., Tarski A.)
1946. On closed elements in closure algebras, Ann. Math. **47**, 122—162.

Макколл (McCall S.)
1962. A simple decision procedure for one-variable implication/negation formulae in intuitionistic logic, Notre Dame J. Formal Logic **3**, 102—122.

Марков А. А.
1951c. Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **38**, М., Изд. АН СССР, 176—189.
1954. Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **42**, М., Изд. АН СССР.
1954a. О непрерывности конструктивных функций, УМН **9**, № 3 (61), 226—229.
1962°. О конструктивной математике, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **67**, М., Изд. АН СССР, 8—14.
1965°. Комментарии редактора перевода, в кн.: А. Гейтинг, Интуиционизм, М., «Мир».
1970°. О логике конструктивной математики, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., № 2, 7—29.

Мартин-Лёф (Martin-Löf P.)
1970°. Notes on constructive mathematics, Almqvist & Wiskell, Stockholm, 1970. [Русский перевод: П. Мартин-Лёф, Очерки по конструктивной математике, «Мир», М., 1975.]

Маэхара (Maehara S.)
1954. Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der klassischen, Nagoya Math. J. **7**, 45—64.

Медведев Ю. Т.
1962. Финитные задачи, ДАН СССР **142**, № 5, 1015—1018.

Минц Г. Е.
1975°. Теория доказательств (Арифметика и анализ), Итоги науки и техники **13**, сер. Алгебра. Топология. Геометрия, ВИНИТИ.

Мостовский (Mostowski A.)
1961 (организатор). Infinitistic methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 2—9 September 1959, Oxford — London — N.Y. — Paris (Pergamon Press), Warszawa (Pánstwowe Wydawnictwo Naukowe).

Нагель, Саппес, Тарский (Nagel E., Suppes P., Tarski A.)
1962 (редакторы). Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford Univ. Press.

Нисимура (Nishimura J.)
1960. On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus, J. Symbolic Logic **25**, 327—331.

Ониси (Ohnishi M.)
1953. On intuitionistic functional calculus, Osaka Math. J. **5**, 203—209 (см. де Йонг 1948).

Петер (Péter R.)
1951. Rekursive Funktionen, Budapest. [Русский перевод: Р. Петер, Рекурсивные функции, ИЛ, М., 1954.]

Пильчак Б. Ю.
1950. О проблеме разрешимости для исчисления задач, ДАН СССР **75**, № 6, 773—776.
1952. Об исчислении задач, Укр. матем. ж. **4**, № 2, 174—194. (Ср. Крайзел — Патнам **1957**, 78.)

Порт (Porte J.)
1958. Une propriété du calcul propositionnel intuitioniste, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc., ser. A **61** (или Indag. math. **20**), 362—365.

Расёва (Rasiowa H.)
1951. Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis, Fundam. math. **38**, 101—126.
1954. Constructive theories, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, **2**, 121—124.
1954a. Algebraic models of axiomatic theories, Fundam. math. **41**, 291—310.

Расёва, Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.).
1953. Algebraic treatment of the notion of satisfability, Fundam. math. **40**, 62—95.
1954. On existential theorems in non-classical functional calculi, там же **41**, 21—28.
1955. An application of lattices to logic, там же **42**, 83—100.
1959. Formalisierte intuitionistische elementare Theorien, Constructivity in mathematics, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.).

Ригер (Rieger L.)
1949. On the lattice theory of Brouwerian propositional logic, Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Carolinae, № 189, Prague.

Риддер (Ridder J.)
1950—1951. Formalistische Betrachtungen über intuitionistische und verwandte logische Systeme, I—VII, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc., ser. A **53** (1950), 327—336, 446—455, 787—799, 1375—1389 (= Indag. math. **12**, 75—84, 98—107, 231—243, 445—459) и **54** (1951) (или Indag. math. **13**), 94—105, 169—177, 226—236.

Робинсон (Robinson T. Th.)
1963. Interpretations of Kleene's metamathematical predicate Г | A in intuitionistic arithmetic N, Dissertation, Princeton.

Роджерс (Rogers H., Jr.)
1964. Recursive functions and effective computability, Mc Graw-Hill, N.Y. [Русский перевод: Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир», М., 1972.]

Роотселар, ван (van Rootselar B.)
1952. Un problème de M. Dijkman, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Proc., ser. A **55** (или Indag. math. **14**), 405—407.
1960. On intuitionistic difference relations, там же, **63** (или Indag. math. **22**), 316—322. Исправления там же **66** (или Indag. math. **25**) (1963), 132—133. (Ср. Крайзел **1962c**).

Р о с с е р (R o s s e r J. B.)
1957 (ред.). Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University, в трех томах, 2-е изд., Princeton, 1960.
Р о у з (R o s e G. F.)
1953. Propositional calculus and realizability, Trans. Amer. Math. Soc. 75, 1—19 (Ср. Яськовский 1936; Пильчак 1952; Гал, Россер, Скотт 1958; Медведев 1962.)
С а к с (S a c k s G. E.)
1963. Degrees of unsolvability, Ann. Math. Studies, № 55, Princeton Univ. Press.
С и к о р с к и й (S i k o r s k i R.)
1959. Der Heytingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume, Constructivity in mathematics, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.).
С к о т т (S c o t t D.)
1957. Completeness proofs for the intuitionistic sentential calculus, Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logik in 1957 at Cornell University, 231—242; 2-е изд., Princeton, N. J., 1960.
1960. Реферат Скулема 1958, Math. Rev. 21, 1031—1032.
С к у л е м (S k o l e m Th.)
1958. Remarks on the connection between intuitionistic logic and a certain class of lattices, Math. Scand. 6, 231—236. (Ср. Скотт 1960.)
С п е к т о р (S p e c t o r C.)
1962. Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. Recursive function theory, Proc. Symposia Pure Math. 5, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1—27.
С т о у н (S t o n e M. H.)
1937—1938. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logic, Časopis pro pestováni matematiky a fysiky 67, 1—25.
Т а р с к и й (T a r s k i A.)
1938. Der Aussagengkalkül und die Topologie, Fundam. math. 31, 103—134.
Т а р с к и й, М о с т о в с к и й, Р о б и н с о н (T a r s k i A., M o s t o w s k i A., R o b i n s o n R. M.)
1953. Undecidable theories, Amsterdam (North-Holland Publ. Co.).
Т р а х т е н б р о т Б. А.
1960. Алгоритмы и машинное решение задач, М., Физматгиз.
Т р у л с т р а (T r o e l s t r a A. S.)
1969°. Principles of Intuitionism, Lect. Notes Math. 95.
1975°. Markov's principle and Markov's rule for theories of choice sequences, Lect. Notes Math. 500, 370—383.
У м е з а в а (U m e z a w a T.)
1955. Über die Zwischensysteme der Aussagenlogik, Nagoya Math. J. 9, 181—189.
1959. On intermediate propositional logics, J. Symbolic Logic 24, 20—36.

1959a. On logics intermediate between intuitionistic and classica predicate logic, там же, 141—153.
У с п е н с к и й В. А.
1960. Лекции о вычислимых функциях, М., Физматгиз.
Ф р о й д е н т а л ь (F r e u d e n t h a l H.)
1936. Zum intuitionistischen Raumbegriff, Compositio math. 4, 82—111.
Х а р д и, Р а й т (H a r d y G. H., W r i g h t E. M.)
1954. An introduction to the theory of numbers, Oxford (Clarendon).
Х а р р о п (H a r r o p R.)
1956. On disjunctions and existential statements in intuitionistic system of logic, Math. Ann. 132, 347—361.
1960. Concerning formulas of the types $A \to B \vee C$, $A \to (Ex)\, B(x)$ in intuitionistic formal system, J. Symbolic Logic 25, 27—32.
Х а ч а т р я н М. А.
1977°. О некоторых теоремах анализа в формальной системе Клини — Весли, Матем. заметки 21, № 1, 109—116.
Х е р м е с (H e r m e s H.)
1961. Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit: Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen. Grundl. math. Wissensch. 109, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg.
Ч ё р ч, Р о с с е р (C h u r c h A., R o s s e r J. B.)
1936. Some properties of conversion, Trans. Amer. Math. Soc. 39, 472—482.
Ш а н и н Н. А.
1953. О некоторых операциях над логико-арифметическими формулами, ДАН СССР 93, № 5, 779—782.
1954. О погружениях классического логико-арифметического исчисления в конструктивное логико-арифметическое исчисление, там же 94, № 2, 193—196.
1955. О некоторых логических проблемах арифметики, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 43, М., Изд. АН СССР.
1958. О конструктивном понимании математических суждений, там же 52, 226—311.
1958a. Об алгорифме конструктивной расшифровки математических суждений, Z. math. Logik Grundl. Math. 4, 293—303.
1962°. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 67, М., Изд. АН СССР, 15—294.
Ш м и д т (S c h m i d t H. A.)
1958. Un procédé maniable de décision pour la logique propositionnelle intuitionniste, Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales, 57—66. Colloque Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXX, editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

Шмульян (Smullyan R.)
1959. Theory of formal systems, Mass. Inst. Technol. (также Ann. Math. studies, № 47, Princeton Univ. Press, 1961).
Шрётер (Schröter K.)
1956. Über den Zusammenhang der in den Implikationsaxiomen vollständigen Axiomensysteme des zweiwertigen mit denen des intuitionistischen Aussagenkalküls, Z. math. Logik Grundl. Math. **2**, 173—176.
1957. Eine Umformung des Heytingschen Axiomensystems für den intuitionistischen Aussagenkalkül, **3**, 18—29.
Шютте (Schütte K.)
1962. Der Interpolationszatz der intuitionistischen Prädikatenlogik, Math. Ann. **148**, 192—200.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Некоторые из приводимых в первом разделе указателя обозначений могут использоваться и неформально (с возможной заменой прямого шрифта на курсив). Употребление полужирного шрифта при наборе номеров страниц означает, что соответствующее обозначение встречается также в указателе обозначений ВМ, стр. 510. Обозначения из ВМ, использованные без специальных упоминаний, содержатся только в указателе ВМ, стр. 510.

Символы и обозначения, используемые формально

Символы и обозначения, используемые только неформально