McGRAW-HILL SERIES
IN HIGHER MATHEMATICS

E. H. SPANIER, Consulting Editor

FOUNDATIONS
OF
MATHEMATICAL LOGIC

by
HASKELL B. CURRY
Evan Pugh Research Professor in Mathematics
The Pennsylvania State University

*

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.
New York · San Francisco · Toronto · London
1963

ХАСКЕЛЛ Б. КАРРИ

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Перевод с английского
В. В. ДОНЧЕНКО

Под редакцией
Ю. А. ГАСТЕВА

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1969

УДК 517.12

Книга американского ученого посвящена детальному изучению основных понятий математической логики на современном этапе. Она содержит общую теорию формальных систем и исчислений. После детального обсуждения общеметодологических вопросов автор последовательно описывает исчисления, содержащие импликацию, отрицание и кванторы. Последняя глава знакомит читателя с некоторыми вопросами теории модальностей. Последовательный конструктивный подход характерен для всех доказательств и определений.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической логики, но она, безусловно, доступна всем, кто интересуется фундаментальными проблемами этого раздела математики.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

Х. Карри

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Редактор *А. Г. Крылов*
Художник *Г. И. Юдицкий*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов* Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в производство 2/VII 1968 г. Подписано к печати 24/I 1969 г.
Бумага № 1 60 × 90¹/₁₆ = 17,75 бум. л. 35,5 печ. л. Уч.-изд. л. 33,86
Изд. № 1/3669 Цена 2 р. 64 к. Зак. 360
(Темплан 1968 г. изд-ва «МИР», пор. № 9)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР

Москва, Трехпрудный пер., 9

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Название предлагаемой вниманию читателя книги Х. Б. Карри может быть прочитано двояко. Конечно, "основаниями" какой-либо дисциплины естественно прежде всего называть ее первые, самые элементарные главы ("основы", "элементы", "начала"). По другой — и не менее, пожалуй, прочной — традиции "основаниями" именуют совокупность концепций, на базе которых строится данная дисциплина, причем значение этих, обычно весьма тонких, концепций удается оценить не начинающему, а человеку, достаточно искушенному в предмете. Так, курс "оснований геометрии" читают не *до* традиционных геометрических курсов, а *после* (и никогда не читают *вместо* них); "основания математики" же большинству студентов-математиков (да и аспирантов) вообще слушать не приходится... (Синонимы "основы", "элементы", "начала", этимологически здесь также вполне уместные, в этом втором смысле употреблять как-то не принято.)

Но если геометр или вообще математик, обращаясь к основаниям (во втором смысле) своей науки, поневоле вторгается в область смежной державы — логики, то этого никак нельзя сказать о самих логиках: интерес к всяческим "основаниям", в том числе и основаниям логики (которая в известном смысле вся посвящена "основаниям") есть их, так сказать, профессиональный долг. Так что неудивительно, что перед "основами" (в первом смысле) логики, которым посвящена вторая половина книги Карри, четыре первые ее главы отводятся под "основания". И некоторая двусмысленность названия, обусловившая нетривиальность его перевода, по здравом размышлении была признана вполне уместной и хорошо характеризующей замысел и содержание книги.

О назначении книги и особенностях, выделяющих ее среди многочисленных руководств по логике, достаточно ясно сказал в своем предисловии автор. Можно лишь добавить, что (вопреки его предостережению) книга может быть интересна и полезна не только для систематизации и развития уже имеющихся знаний в области логики, но и для первоначального знакомства с ней.

Особенно поучительными и важными для начинающего представляются предварительный семантический анализ вводимых

понятий и различение семантических уровней, проводимые в первых четырех главах (и в начале каждой из остальных глав). Следует, правда, отметить, что воспользоваться всеми вводимыми здесь понятиями автору в полной мере не удается. Так, практически нигде не используется понятие нормального алгорифма, которому посвящен раздел 2E. То же отчасти относится и к весьма искусно различаемым нюансам в значениях слов 'expression', 'phrase', 'sentence', 'clause', 'statement', 'proposition', 'assertion', 'thesis' и т. п., частью из которых в дальнейшем опять-таки автор не пользуется, а некоторые другие без всякого ущерба отождествляет. Кстати, эти близкие по значениям термины вызвали значительные трудности при переводе. Английские прообразы выбранных в окончательной редакции перевода терминов приведены в указателе (и лишь в исключительных случаях, где возникает опасность двусмысленности — в тексте); русские же их эквиваленты во всех случаях, явным образом не подпадающих под терминологические соглашения автора, предлагается понимать в смысле, максимально естественном для каждого конкретного контекста.

Основное содержание книги, сосредоточенное в гл. V — VII, вполне перекрывается материалом соответствующих разделов "Введения в метаматематику" С. К. Клини (ИЛ, 1957) или "Введения в математическую логику", т. I, А. Чёрча (ИЛ, 1960). Несколько особняком стоит заключительная глава, посвященная модальностям. С одной стороны, модальные операторы не относятся к исчислению предикатов, справедливо квалифицируемому автором как фундамент ("основание") всей логики и математики, так что само включение их в книгу небесспорно. С другой стороны, изложение в этой главе носит несравненно более беглый характер, нежели в предыдущих. Правда, сам Карри оговаривает вспомогательный характер этой главы.

Карри, как и всякий крупный логик, активно интересуется философскими проблемами математики и логики, и этот интерес его, естественно, находит свое отражение в широких дискуссиях, которым по преимуществу посвящена вводная глава этой книги. Для философской позиции Карри (как и большинства его западных коллег) характерно довольно-таки подчеркнутое нежелание обсуждать связь математики и логики с лежащей за их пределами действительностью. Основное внимание он уделяет методологической стороне вопроса, причем оказывается, что "конструктивный неоформализм" Карри имеет достаточно много точек соприкосновения с концепциями, вполне приемлемыми для реально мыслящих математиков и логиков нашей страны: и в трактовке математики как совокупности *методов* изучения конкретных математических систем ("исчислений"), и в последовательно проводимой им методологической "конструктивной установке" (достаточно широкой, чтобы согласоваться с воззрениями не только конструктивистов в привычном для нас смысле слова, но и сторонников понимаемого в расширительном смысле гильбертовского финитизма) [1]).

Положительную часть своей программы Карри проводит весьма последовательно. Убедительность семантических мотивировок, тщательность и подробность доказательств, конструктивный их характер, широта диапазона рассматриваемых исчислений, внимательный подбор упражнений (как учебных, так и более серьезного плана), наконец краткие обзоры дальнейшей проблематики, подробно аннотированные ссылки на посвященную ей литературу и исторические комментарии, не загромождающие основной текст,— все это делает книгу Карри (с учетом сделанных выше оговорок) весьма привлекательной в качестве серьезного учебника по основам (основаниям!) математической логики для будущих специалистов в этой области [2]). Практически ни одно из имеющихся на русском языке руководств этой цели в полной мере не служит — они либо просто технически трудны для первого чтения (как упомянутые выше монографии Клини и Чёрча), либо (в силу краткости изложения) уделяют недостаточное внимание семантике, что опять-таки затрудняет пользование ими (это относится, например, к "Основам теоретической логики" Д. Гильберта и В. Аккермана (ИЛ, 1947), не говоря уже об эскизных изложениях типа "Математической логики" Р. Л. Гудстейна (ИЛ, 1961) и "Заметок по логике" Р. К. Линдона (изд-во "Мир", 1968)).

Впрочем, выбор той или иной книги для ознакомления с предметом — дело достаточно индивидуальное. Во всяком случае, я далек от мысли рекомендовать для этой цели исключительно книгу Карри, при всех отмеченных ее достоинствах. Легко представить, что громоздкость предварительных ее построений явится для многих читателей достаточным основанием предпочесть ей в качестве пособия по логике одну из упомянутых выше книг,

---

[1]) Главное создание Карри — комбинаторная логика, в которой его философская позиция получила наиболее выпуклое выражение, осталась по существу за рамками этой книги. О ней можно прочесть, например, статью С. А. Яновской "Логика комбинаторная" в томе 3 "Философской энциклопедии" (М., 1964) (подробнее см. монографию Карри и Фейса "Combinatory logic", цитируемую в настоящей книге как [CLgI]).

[2]) Гораздо более жесткое следование учебным программам обусловливает несравненно более скупой отбор материала в известной книге П. С. Новикова "Элементы математической логики" (Физматгиз, 1959), являющейся скорее учебником общего типа для университетов и педагогических институтов.

тем более, что на некоторых из них воспиталось уже не одно поколение активно работающих специалистов-логиков.

Конечно, специалист оценит по достоинству глубину семантического анализа автора и тщательность и широту его последующих рассмотрений. По своей направленности, кстати, эти рассмотрения явным образом перекликаются с приобретающими все бóльшую популярность в нашей стране исследованиями по общей теории исчислений и теории логического вывода, проводимых с конструктивных позиций (главным образом, силами ленинградской школы А. А. Маркова — Н. А. Шанина; не желая перегружать справочный аппарат книги, упомянем лишь последние публикации ленинградцев — сборники [КЛМ] под редакцией А. О. Слисенко и [ЛМИ] под редакцией В. П. Оревкова [1]), содержащие исчерпывающие библиографические ссылки). Наряду с недавним сборником переводов по теории логического вывода [МЛВ] под редакцией А. В. Идельсона и Г. Е. Минца книга Карри может с успехом служить введением к самостоятельной работе в этой области.

В заключение стоит, пожалуй, заметить, что „алгебраичность" схемы изложения Карри никоим образом не предполагает сколько-нибудь существенного использования теоретико-множественных представлений — напротив, его конструктивный подход в известном смысле даже полярен теоретико-модельной традиции школ А. Тарского, А. И. Мальцева и А. Робинсона.

Перевод "Оснований математической логики" на русский язык был начат по инициативе и под руководством покойной Софьи Александровны Яновской; предполагалось, что она будет его редактором. Завершая эту работу после безвременной кончины Софьи Александровны, я считаю своим долгом отметить, сколь многим я обязан ее помощи и советам—и не только в этом деле. Разумеется, всю ответственность за недочеты настоящего издания несет автор этих строк. Ряд чрезвычайно ценных замечаний и предложений внес внимательно прочитавший рукопись перевода и корректуру Г. Е. Минц; пользуюсь случаем выразить ему глубокую признательность. Я рад возможности поблагодарить профессора Х. Б. Карри, любезно сообщившего большое число исправлений к английскому изданию книги; все эти исправления (как и устранение немногочисленных технических погрешностей оригинала) внесены в русский текст без специальных оговорок.

Ю. А. Гастев

[1]) См. библиографию в конце книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение нескольких лет я читал общий курс логики для студентов старших курсов в Университете штата Пенсильвания. Вначале я мыслил его себе как вводный курс, предназначенный для лиц, которые, будучи хорошо подготовленными математически, недостаточно искушены в логике. Вскоре, однако, выяснилось, что такой курс еще более подходил бы для студентов, предварительно прослушавших сравнительно элементарный курс. Изложению такого элементарного курса и посвящена эта книга.

Я не хочу сказать этим, что моя книга предназначена для начинающих или для людей, не обладающих подготовкой, которая считается нормальной для студентов старших курсов. Но те, кому не нужно объяснять самые элементарные сведения о логической символике и кому не нужна усиленная тренировка в переводе понятий обычного языка на язык этой символики и обратно, могут изучать эту книгу, не обращаясь к другим источникам. Цель книги — дать обстоятельное изложение той части математической логики, которая поистине фундаментальна, не в теоретическом или философском смысле, но с точки зрения изучающего эту науку, той части, которой нужно как следует овладеть не только будущим специалистам-логикам, но и всем математикам, философам и ученым, кому так или иначе приходится иметь дело с логикой по роду своей работы.

Часть математической логики, выбранная для рассмотрения, может быть охарактеризована как конструктивная теория исчисления предикатов первой ступени. То, что это исчисление занимает центральное место в современной математической логике, неоспоримо. И именно конструктивные аспекты этого исчисления особенно важны для его более глубокого изучения. Более того, становится все очевиднее, что математики должны ясно сознавать разницу между конструктивным и неконструктивным, и вряд ли есть лучший путь помочь им в этом, чем дать отдельную трактовку конструктивного. Сказанное и побудило меня предпринять последовательное изложение этой фундаментальной области.

Характер изложения значительно отличается от обычного, в особенности от принятого в учебниках для начинающих. Традиционный подход к логическому исчислению состоит в рассмотрении его как некоторой формальной системы, причем единственной его особенностью по сравнению с другими формальными системами является то, что это исчисление должно быть формализовано более строго, так как мы не можем считать "логику" данной, и то, что можно интерпретировать логическое исчисление в терминах высказываний обычной речи. Мы же придерживаемся точки зрения, согласно которой наши системы можно интерпретировать посредством некоей более ограниченной совокупности высказываний, образующихся при оперировании с некоторой другой (не фиксированной) формальной системой. Происхождение этой точки зрения, поскольку я ее касаюсь, изложено в разделе 5S1. Эту точку зрения я разделяю с Лоренценом, который пришел к той же позиции независимо и на основе совершенно иной философии. Так как при изучении какой-либо формальной системы мы можем формулировать высказывания, истинность или ложность которых не может быть установлена средствами самой этой системы, избранный нами путь приводит к ситуациям, возникающим в традиционных теориях разве лишь в порядке исключения. При нашем способе изложения приходится параллельно иметь дело с многими различными системами логического исчисления; например, для определения отрицания открываются различные возможности.

С нашей точки зрения собственно логическое исследование есть составная часть общей методологии формальных систем и должно начинаться с изучения самих формальных систем. Поэтому после носящей вводный характер гл. 1 мы посвятим следующие две главы специально рассмотрению формальных методов как таковых. Эти вопросы пришлось излагать с особенной тщательностью, так как даже специалисты обнаруживают иногда недостаточное их понимание. В этой же главе кратко излагается теория нормальных алгорифмов Маркова. Далее идет довольно легкая гл. 4, рассказывающая о структурах и аналогичных алгебраических системах.

Изложение предмета книги как такового начинается с гл. 5. Общий метод исследования состоит в том, чтобы получить формулировку, выражающую смысл, который мы хотим придать логическим связкам, и затем вывести свойства, которые следуют из мотивированных таким образом предположений. Связки вводятся не все сразу; положительные связки — импликация, конъюнкция и дизъюнкция — вводятся в гл. 5, отрицание — в гл. 6, кванторы — в гл. 7, модальные операции — в гл. 8. Наиболее полное и подробное изложение — в гл. 5; дело здесь не только в том, что рассматриваемая в ней основная связка — импликация (конъюнкция и дизъюнкция относительно тривиальны, и их свойства выявляются, так сказать, по ходу дела) — является в некотором смысле центральной связкой логики, но и потому, что в этой главе устанавливаются общие принципы исследования; в последующих главах мы просто распространяем на новые операции результаты, уже полученные для ранее рассмотренных. В то же время мы ограничиваемся весьма краткой трактовкой модальностей; причины мы объясним во введении к гл. 8.

Избранный нами подход исходит в первую очередь из семантических соображений; в каждой новой главе рассматриваются некоторые новые аспекты. У такого расположения материала есть одна невыгодная сторона: когда доказательства теорем приходится распространять на случаи, которые не рассматривались при первоначальном доказательстве, легко упустить некоторые важные детали, считая, что доказательство проходит без изменений и для более общего случая. Случаи таких ошибок привести легко. Это — цена, которую приходится платить за выгоды семантического подхода. Но этот путь типичен для развития математики; мы постоянно распространяем результаты (часто с соответствующими модификациями) на ситуации, подобные, но не в точности совпадающие с теми, которые встречались первоначально.

В последних четырех главах широко используются методы Генцена. Они играют важную роль в раскрытии того факта, что доказательство может быть представлено в некоторой стандартной форме, из чего в дальнейшем получаются важные необходимые условия для выводимости. Эти соображения важны, но они не исчерпывают возможностей рассматриваемого метода. Когда читатель проследит изложение на протяжении всей книги, ему станет ясно, что генценовские правила имеют естественную интерпретацию непосредственно в терминах той семантической ситуации, которую мы пытаемся формализовать. Правила Генцена становятся, таким образом, инструментом семантического анализа. Основная теорема Генцена важна и в другом отношении: она показывает, что формулировка, полученная из рассмотрения семантической ситуации, соответствует этой ситуации. Иными словами, несправедливость теоремы Генцена свидетельствовала бы о том, что не были адекватно учтены некоторые свойства операций. Поэтому формулировки, для которых эта теорема несправедлива, должны рассматриваться с подозрением. Факты, рождающие это убеждение, не лежат на поверхности и не являются очевидными с самого начала, но оно крепнет по мере изучения предмета.

Так как эта книга предназначена для студентов, специализирующихся в логике, у нее есть некоторые черты, которые были бы неуместны в элементарном учебнике. Прежде всего — книга подробно документирована. Предполагается, что студенты будут приобретать опыт в исследованиях, для этого им нужно будет привыкнуть к обращению с литературой по своему предмету и время от времени использовать ее в поисках дополнительной информации. Поэтому я даю многочисленные ссылки, посвященные вспомогательным вопросам. Я без колебаний включал материалы на иностранных языках, хотя некоторые из них мало известны аспирантам, говорящим по-английски. Даже если изучающий не может прочитать соответствующий материал или если по некоторой другой причине этот материал ему недоступен, он хотя бы узнает, что́ именно он пропускает.

Каждая из восьми глав книги разбита на разделы, от трех до пяти в каждой главе, обозначенные буквами от A до E; кроме того, в каждой главе имеется дополнительный раздел S. Как свидетельствует его название, последний раздел довольно неформально трактует некоторые вопросы, которые различным образом дополняют основной текст. Здесь содержится исторический и библиографический комментарий и другие вспомогательные ссылки на литературу, обсуждение аспектов предмета, которые слишком специальны или, быть может, противоречивы, для того чтобы включать их в основной текст, и т. п. По поводу этого материала нужно иметь в виду два замечания. Первое — этот материал требует от читателя большей подготовки, чем та, которая предполагается для основного текста. Второе — этот материал скорее предназначен для постановки вопросов, нежели для сообщения определенной точки зрения. Последнее особенно относится к историческим комментариям: я старался полностью отразить материал, который я использовал при подготовке основного текста, но сверх того дал лишь ту информацию, которой фактически располагал.

В конце большинства разделов читатель найдет список упражнений. Они значительно отличаются друг от друга по степени трудности, но в целом здесь сравнительно мало практического материала того сорта, который обычно встречается в учебниках. Задачи, решение которых мне неизвестно, отмечены звездочкой; однако из этого не следует, что именно они являются самыми трудными. Для удобства читателей, которые могут использовать эту книгу для самоусовершенствования, даны ссылки на те места в литературе — иногда даже на более дальние места этой же книги,— где можно найти информацию, относящуюся к проблеме, а может быть, и решение; однако решения, найденные в указанных местах, часто могут быть улучшены.

Мне приятно выразить благодарность моему секретарю Веронике П. Зерби, оказавшей мне значительную помощь при подготовке рукописи, моим ассистентам Джозайе Б. Элфорду, Франклину С. Бреннеману и Фредерику К. Зерби за большую и кропотливую работу, проделанную, в частности, при подготовке библиографии. За финансовую поддержку, которая сделала возможной эту работу, я благодарен Национальному научному фонду США. Были учтены некоторые замечания студентов Уильяма Крэвена и Германа Дж. Бистерфельдта. Иллюстрации взяты из моей книги "Leçons de logique algébrique" и использованы с разрешения издательства Готье-Виллар. На заключительных этапах подготовки я получил значительную помощь от моего коллеги — профессора Уго Рибейро и моего ученика Луиса Э. Санчеса.

Хаскелл Б. Карри

ОБЪЯСНЕНИЕ СОГЛАШЕНИЙ

Исходя из расположения материала в этой книге, в ней приняты некоторые соглашения относительно ссылок.

Перекрестные ссылки. Система, используемая для обозначения частей книги и для ссылок от одной части к другой, по существу та же, что и в книге автора "Combinatory logic".

Главы данной книги обозначены арабскими цифрами. Ссылки на главы даются так: гл. 3.

Главы делятся на разделы, обозначенные заглавными латинскими буквами. Ссылка на раздел той же главы состоит в указании буквы, обозначающей раздел, перед которой пишется 'разд.'; например, разд. B. Для раздела другой главы при ссылках номер главы предшествует букве, обозначающей раздел; итак, разд. 5B обозначает главу 5, раздел B.

Разделы делятся на подразделы, обозначаемые арабскими цифрами. На подраздел в том же разделе ссылка дается цифрой, перед которой также стоит слово 'разд.'; например, разд. 5. На подраздел другого раздела дается ссылка цифрой, перед которой стоит обозначение раздела и, если необходимо, номер главы. Таким образом, разд. 5C3 и разд. C3 являются подразделами 3 разд. 5C и разд. C соответственно.

Иногда подразделы делятся на еще меньшие подразделения, обозначаемые буквами a, b, c; ссылки на эти подразделения делаются аналогично.

Теоремы и формулы нумеруются последовательно в пределах раздела. Когда ссылаются на теорему или формулу без указания раздела, то это значит, что ссылаются на теорему или формулу из того же раздела. В противном случае теорема сопровождается указанием раздела следующим образом: теорема D2 означает теорему 2 разд. D той же главы; теорема 5D2 означает теорему 2 разд. 5D. Номера формул заключены в скобки; благодаря этому их можно отличить от номеров подразделов. Если при ссылке указан только номер формулы, то речь идет о формуле из того же раздела. В противном случае дается обозначение раздела; например, (5) из разд. 5D. Следствия нумеруются добавлением

цифры к номеру теоремы; например, следствие 7.2 есть следствие 2 из теоремы 7.

Нумерация лемм, замечаний и примеров менее формальна. Если возможны неясности, то приводятся ссылки с явным указанием подраздела; например, замечание 2 из разд. 7А4.

В книге определения обычно вводятся неформально в основном тексте, причем новый термин выделяется курсивом; термины можно также затем найти в предметном указателе. В нескольких случаях, где требуется бóльшая степень формальности, определения выделяются подобно леммам и замечаниям.

Ссылки в квадратных скобках. Ссылки на библиографию делаются путем сокращений, состоящих из латинских букв, заключенных в квадратные скобки (например, [CLg]), с указанием или без указания автора. Более полное объяснение приведено во введении к библиографии.

Использование букв. За немногими исключениями использование букв в формулах соответствует установившейся математической практике. Укажем лишь несколько специальных букв, значение которых фиксировано во всей книге. Буквы B, C, F, I, K, S, W будут использоваться для обозначения специальных понятий комбинаторной логики. Эти специальные буквы будут использоваться в тех немногих случаях, когда имеется в виду связь с комбинаторной логикой; понятия, производные от этих специальных понятий, обозначаются так же, как в комбинаторной логике, но постоянных обозначений для них не вводится. Латинские буквы используются в основном тексте и в объяснениях, сопровождающих формулы, как сокращения; то же относится к греческим буквам Λ, Π и Σ. В гл. 6 буквам F и $\mathfrak{F}$ придаются фиксированные значения.

Специальные символы. Кавычки вида '...' используются по всей книге для указания того, что выражение, заключенное в них, упоминается, но не используется. Более подробные объяснения по этому поводу см. в разд. 2А3. Кавычки вида "..." употребляются в обычном смысле.

О соглашениях, связанных с символами, употребляемыми в качестве функторов, о точках в роли скобок и т. д. см. разд. 2А3 и 2А4.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математической логики естественно начать с вопроса о том, что такое математическая логика. Предварительный ответ на этот вопрос будет дан в разд. А. Затем мы более подробно рассмотрим вопрос о природе математики и связи математики с логикой. Для этого мы прежде всего обсудим в разд. В парадоксы логики и те выводы, которые следует извлечь из них по отношению к логике математики. Затем в разд. С мы перейдем к критике различных взглядов на природу математики. Наконец, в разд. D мы вернемся к взаимоотношению математики и логики. Цель главы — подготовить почву для формальных исследований, к которым мы обратимся, начиная с гл. 2.

А. ПРИРОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Мы начнем наше исследование с рассмотрения трех смыслов, в которых слово 'логика' употребляется в обычной речи.

Первый смысл мы имеем в виду, когда говорим, что "логика есть анализ и критика мышления" [1]). Рассуждая, мы из некоторых исходных данных выводим заключения. Мы замечаем, что эти заключения иногда верны, а иногда нет, и что иногда (но не всегда) ошибочность заключений объясняется ошибочностью некоторых из наших исходных данных. Постепенно мы убеждаемся, что на рассуждения, проводимые в согласии с определенными нормами, можно полагаться, если данные были правильны. Изучение такого рода норм, т. е. принципов правильного рассуждения, всегда считалось одной из задач философии. Чтобы отличать обсуждаемый смысл слова 'логика' от других смыслов этого слова, мы будем употреблять термин *философская логика*.

При изучении философской логики оказалось полезным применять математические методы, т. е. строить математические

[1]) См. Джонсон ([Lgc], ч. I, стр. XIII). Объяснение обозначений, встречающихся в этой и следующих ссылках, см. во введении к библиографии в конце книги.

системы, определенным образом связанные с логикой. Что́ представляют собой такие системы и какова природа связи их с философской логикой — это вопросы, которыми мы займемся позднее. Такие системы сами по себе могут, конечно, служить предметом исследования; по отношению к такому исследованию также обычно применяют термин 'логика'. Логика в этом смысле является ветвью математики. Чтобы отличить это значение слова 'логика' от других его значений, мы будем называть такую логику *математической логикой*.

В обоих предшествующих значениях слово 'логика' употреблялось как некоторое вполне определенное собственное имя. Но оно часто употребляется и как нарицательное имя, и при таком употреблении возникает третье значение слова 'логика', отличное от первых двух. Иначе говоря, 'логикой' можно называть и любую из конкретных систем (или теорий), являющихся предметом изучения математической или философской логики. Можно, например, говорить о различных классических логиках, модальных логиках, матричных логиках, аристотелевской логике, кантовской логике и т. д.

Соотношение между тремя значениями слова 'логика' можно несколько прояснить, сравнивая их с соответствующими значениями слова 'геометрия'. В первом значении геометрия есть наука о пространстве. По своему происхождению это слово означает 'измерение земли': считают, что геометрия началась с установления правил измерения, найденных еще учеными древнего Египта. Геометрия в этом смысле является частью физики. Но наряду с ней есть и геометрия как часть математики, в которой рассматриваются математические системы, связанные определенным образом с изучением пространства. Наконец, мы знаем много видов 'геометрий': мы можем говорить о проективной геометрии, о дифференциальной геометрии, о неархимедовой или недезарговой геометрии, о четырехмерной геометрии и так далее.

Математическая логика, таким образом, является ветвью математики, примерно так же связанной с анализом и критикой мышления, как геометрия с наукой о пространстве.

Большего от определения 'математической логики' пока нечего и желать. По сути дела, в попытках определить какую-либо область науки, точно ограничивая ее пределы, нет никакого толку; достаточно бывает сформулировать центральную идею или цель предмета, не претендуя на уточнение его границ. Приведенное здесь определение удобно своей достаточной широтой, допускающей известный простор для толкований. Мы сможем в дальнейшем говорить о "логических системах" или "логических алгебрах", не формулируя никакого точного критерия для решения вопроса, является ли какая-либо данная система "логической"; достаточно, чтобы такая система была хоть как-нибудь связана с "анализом мышления".

Отметим, что связь между геометрией и реальным пространством может быть совсем отдаленной, как, например, в случае конечной геометрии, недезарговой геометрии или геометрии с бесконечным числом измерений. У нас нет точных критериев, согласно которым та или иная система заслуживает имени 'геометрия'. По отношению к логике дело обстоит точно так же. Мы можем рассматривать и рассматриваем логики как некоторые формальные структуры, интересные с точки зрения философской логики тем, что они обнаруживают определенное формальное сходство с другими системами, истолковываемыми в качестве "логик" более очевидным образом.

Заметим также, что обычно, говоря о "геометрии", имеют в виду лишь математические аспекты этого предмета. В самом деле, этот математический аспект развился до такой степени, что когда хотят говорить о физическом аспекте геометрии, то приходится искать какой-нибудь другой термин. Аналогичная ситуация в области логики еще не возникла; возникнет ли она в будущем (как утверждают некоторые) или нет — решать не нам. Во всяком случае, все то, что говорилось здесь о философской и математической логике, полностью согласуется с современным употреблением этих слов.

Далее, хотя мы здесь всячески подчеркивали во избежание недоразумений различие между разными значениями слова 'логика', было бы ошибкой считать, что философская и математическая логика — совершенно различные предметы. В действительности они тесно связаны между собой. Математическая логика, как было сказано, полезна как средство изучения философской логики. Любая резкая граница между этими двумя аспектами логики была бы произвольной.

Наконец, математическая логика занимает особое место по отношению к остальной математике. Дело в том, что математика является дедуктивной наукой — по крайней мере в том смысле, что понятие строгого доказательства является центральным для всех ее разделов. Вопрос о том, что́ такое строгое доказательство, имеет логический характер и относится поэтому к компетенции логики. А поскольку этот вопрос касается математики, его целесообразно рассматривать в математической логике. Поэтому задача объяснения природы математической строгости принадлежит математической логике; можно сказать, что это — основная проблема математической логики. Частью этой проблемы является выяснение природы математической истинности, да и природы самой математики. Короче говоря, *математическая логика включает в себя изучение оснований математики.*

B. ЛОГИЧЕСКИЕ АНТИНОМИИ

Перейдем теперь к обсуждению (на интуитивной основе) природы математики и ее отношения к логике в обычном смысле этих слов. Рассмотрим прежде всего, как понималась математическая строгость в конце прошлого века.

Для математиков того времени доказательство было строгим, если оно было "строго логическим". Возьмем, например, теорему о том, что если действительная функция $f(x)$ непрерывна для $a \leqslant x \leqslant b$ и если, далее, $f(a) < 0 < f(b)$, то существует такое значение c, что $a < c < b$ и $f(c) = 0$. До эпохи арифметизации можно было только "усмотреть" истинность этого утверждения из того, что график $f(x)$, будучи непрерывной кривой, один конец которой расположен над осью x, а другой — под ней, должен пересечь ось x в некоторой точке. Но рассуждения, проводимые на таком уровне (в особенности это относится к рассуждениям о бесконечных рядах, не подкрепляемым надлежащей проверкой сходимости этих рядов), чреваты, как оказалось, противоречиями, так что потребовалось их уточнение. Такое уточнение было достигнуто, как известно, в результате рассмотрения функции как множества упорядоченных пар, арифметического определения непрерывности и "строго логического" доказательства вышеприведенной теоремы в терминах этих определений [1]).

Но в терминах какой логики можно было бы теперь описать такое доказательство? Конечно, это должна была быть не традиционная логика, так как в традиционной логике не выразимы рассуждения, использующие отношения (например, неравенство), играющие центральную роль в таком доказательстве. На самом деле математики того времени проводили, по-видимому, свои рассуждения, опираясь на логическую интуицию, которая никогда не формулировалась в виде явных принципов. Очевидно, молчаливо предполагалось, что эта интуиция имеет универсальный характер и обеспечивает абсолютно надежный критерий строгости.

В этой ситуации открытие на рубеже XIX и XX столетий рассуждений, совершенно справедливых с интуитивной точки зрения, но приводящих тем не менее к противоречиям, прозвучало как взрыв бомбы. Такие рассуждения теперь называются парадоксами, или антиномиями [2]). Некоторые из них были известны с древности, но связь их с охарактеризованной выше ситуацией не была осознана. Ввиду важности этих парадоксов для математической логики будет целесообразно рассмотреть здесь некоторые из них.

[1]) По этому поводу см. Блэк [RMP], особенно стр. 156—157.

[2]) Эти термины эквивалентны по значению. Некоторые, несомненно, хотели бы педантично провести различие между ними, но я думаю, что эти люди были введены в заблуждение ложной этимологией. 'Парадоксом' называется нечто не согласующееся с господствующим убеждением; слово это образовалось из παρά + δόξα, где δόξα значит 'мнение' или 'ожидание', а παρά значит вообще 'около', но часто имеет дополнительное значение 'не попасть в мишень и пройти выше нее', как в английском 'beside the point'. С другой стороны, 'антиномия' значит противоположное (ἀντί) закону или обычаю (νόμος). Хотя эти два слова и различны, я не вижу никакого этимологического оправдания требованию, чтобы одно из них предпочиталось другому для обозначения логического противоречия.

Парадокс Рассела [1]). Наша интуиция позволяет нам рассматривать классы объектов в свою очередь как некоторые объекты. Мы можем, например, говорить о классе всех стульев в этой комнате, классе всех людей, всех домов, натуральных чисел. Подобным же образом можно рассматривать классы классов и даже такие понятия, как класс всех классов или класс всех понятий. Все такие классы относятся к одному из двух сортов, которые мы назовем собственными и несобственными классами. Собственные классы — это такие классы, как класс людей, домов, чисел, которые не являются членами самих себя; несобственные классы — это такие классы, которые, как класс всех классов или класс всех понятий, являются членами самих себя. Пусть теперь R (расселовский класс) — класс всех собственных классов. Если R — собственный класс, то, так как R есть класс всех таких классов, R является членом R и, следовательно, R не является собственным классом. С другой стороны, если R не есть собственный класс, то R — не член R и потому R — собственный класс. Любое предположение ведет к противоречию.

Поучительно выразить этот парадокс в символической форме. Пусть высказывание о том, что x есть член класса y, символически обозначается

$$x \in y$$

где 'x' и 'y' — переменные, вместо которых можно подставить имена произвольных понятий, и пусть $\neg$ и $\rightleftarrows$ суть символы для отрицания и логической эквивалентности соответственно. Тогда, по определению R, мы имеем для произвольного x

$$x \in R \rightleftarrows \neg (x \in x)$$

[1]) Бертран Рассел (род. 1872) — английский философ, в соавторстве с А. Н. Уайтхедом написал [PMt]. Популярную биографию см. Леджет [BRP]; критический обзор его философии см. Шильп [PBR]. Рассматриваемый здесь парадокс описан в [PMt], стр. 79 и след. Этот парадокс сначала изложен скорее в применении к предикатам, чем к классам; ниже (стр. 101 и след.) приведена формулировка в терминах классов. Этот парадокс был сообщен в письме к Фреге (см. Фреге [GGA. II], стр. 253 и след.; ср. ниже сноску к разд. C2).

и, следовательно,

$$R \in R \rightleftarrows \neg (R \in R)$$

Поэтому утверждение $R \in R$ эквивалентно тому, что $R \in R$ ложно, и, следовательно, если оно истинно, то оно ложно, и наоборот.

Следующие два рассуждения, хотя и не парадоксальны, по своей природе близки к парадоксу Рассела и проливают некоторый свет на него.

Псевдопарадокс парикмахера [1]). Представьте себе, что совет одной деревни издал указ, что деревенский парикмахер (предполагается, что он единственный парикмахер в этой деревне) должен брить всех мужчин деревни, которые не бреются сами, и только этих мужчин. Кто же будет брить парикмахера?

Псевдопарадокс каталога [2]). Некоторая библиотека решила составить библиографический каталог, в который должны входить все те и только те библиографические каталоги, которые не включают себя. Включает ли такой каталог себя?

Эти рассуждения названы псевдопарадоксами, потому что здесь нет настоящего противоречия. В первом случае парикмахер не мог подчиняться закону, потому что он был нелепым, вроде того закона, который, как говорят, был издан в одном американском штате. Согласно этому закону, если два поезда подходят к пересечению дорог под прямым углом друг к другу, то каждый из них должен ждать, пока не пройдет другой. Точно так же библиотека просто не могла составить каталог, удовлетворяющий поставленным требованиям. Но такого рода объяснения неприменимы к парадоксу Рассела. В терминах логики, известной в XIX в., положение просто не поддавалось объяснению, хотя, конечно, в наш образованный век могут найтись люди, которые увидят (или подумают, что увидят), в чем же состоит ошибка.

Парадокс Бурали-Форти [3]). Этот первый (по времени опубликования) из математических парадоксов имеет более специальный характер. Он относится к теории трансфинитных порядковых чисел. Для читателей, знакомых с этой теорией, данный парадокс можно изложить следующим образом. В теории трансфинитных порядковых чисел показано, что: (1) каждое вполне упорядоченное множество имеет (единственное) порядковое число; (2) каждый

[1]) Этот вариант, кажется, принадлежит Расселу. Предметный указатель у Чёрча [BSL] ссылается на работу (под номером 111.25), которая была мне недоступна. Мой источник — несколько лекций, прочитанных М. Гейгером в Гёттингене в 1928 г.

[2]) См. Гонсет ([MR1], стр. 253).

[3]) Ч. Бурали-Форти (1861—1931)—итальянский математик, один из соавторов Дж. Пеано (1858—1932) в написании книги Formulaire de mathématiques, сыгравшей значительную роль в математической логике, особенно по части выработки символики. Книга Бурали-Форти [LMt] является наиболее доступным изложением логики Пеано.

отрезок множества порядковых чисел (т. е. любое подмножество этого множества, упорядоченное естественным образом, которое вместе с каждым порядковым числом содержит все предшествующие ему) имеет порядковое число, большее чем все порядковые числа этого отрезка; (3) множество B всех порядковых чисел, расположенных в естественном порядке, вполне упорядочено. Тогда в силу утверждений (3) и (1) B имеет некоторое определенное порядковое число β, а так как β содержится в B, то в силу утверждения (2) $\beta < \beta$, что является противоречием [1]).

Парадокс Кантора [2]). Этот парадокс, хотя и не был опубликован до 1932 г., был известен Кантору еще в 1899 г.; Рассел построил свой парадокс под его большим влиянием — во всяком случае, бóльшим, нежели влияние более раннего парадокса Бурали-Форти [3]). Парадокс Кантора относится к теории кардинальных чисел. Как известно, множество всех подмножеств множества M имеет кардинальное число, большее кардинального числа множества M. Это приводит к противоречию, если в качестве M взять множество всех множеств.

Рассмотрим теперь парадоксы иного вида, включающие в себя понятия описания и определения.

Парадокс лжеца. Этот парадокс известен в нескольких модификациях. Простейшая из них — парадокс, связанный с человеком, который говорит "Я лгу"; если он лжет, то он говорит правду, и наоборот. Другой вариант — парадокс критянина Эпименида, которому приписывается высказывание, что все утверждения, сделанные критянами, ложны (причем это следует понимать так, что все прочие утверждения, сделанные когда-либо критянами, определенно ложны). В более новых версиях фигурируют утверждения, согласно которым высказывание, описанное таким-то и таким-то образом, ложно, причем описание построено так, чтобы оно относилось и к самому данному утверждению. Этот парадокс произвел громадное впечатление на греков; ходит даже легенда, что он привел к самоубийству некоего Филита Косского. Первое упоминание об этом парадоксе принадлежит, по-видимому, Эвбулиду из Милета; какая-либо действительная связь Эпименида с любой из форм парадокса лжеца сомнительна [4]).

[1]) По поводу истории этого парадокса см. Копи [BFP]. Копи считает, что мнение Френкеля и Бар-Хиллела [FST] о том, что Кантор предвосхитил этот парадокс, недостаточно обосновано; сомнительными, во всяком случае, являются утверждения [стр. 12 и 20 русского издания [FST].— *Ред.*], что этот парадокс был известен Кантору в 1895 г.

[2]) Георг Кантор (1845—1918)—немецкий математик, создатель теории трансфинитных чисел и теории точечных множеств.

[3]) Большие основания для этого мнения дает сам Рассел [PMt]. См. также Копи [BFP].

[4]) Ссылки по поводу этого парадокса см. в разд. 1S6.

Парадокс Ришара [1]. Для доказательства несчетности множества всех арифметических функций рассуждают следующим образом. Допустим, что существует некоторый пересчет этого множества; пусть $f_m(n)$ — значение m-й функции в этом пересчете для аргумента n. Образуем такую функцию g, что для любого n

$$g(n) = f_n(n) + 1$$

Пусть p — номер функции g в этом пересчете, так что

$$g(n) = f_p(n)$$

Тогда

$$f_p(p) = g(p) = f_p(p) + 1$$

Так как это ведет к противоречию, то мы заключаем, что множество всех числовых функций несчетно.

Теперь предположим, что мы рассматриваем не множество всех числовых функций, а множество всех определимых функций. Под 'определимым' подразумевается, конечно, определимое средствами некоторого фиксированного языка, например (математического) русского [2] языка с фиксированным словарем и грамматикой. Так как число слов в языке конечно, то множество возможных его выражений счетно, и, следовательно, множество выражений, дающих определения числовых функций, а потому и множество самых определимых функций также должны быть счетны. Но ведь можно построить язык так, чтобы вышеприведенное рассуждение можно было провести в самом этом языке, так что мы снова приходим к неразрешимому противоречию.

Парадокс Берри [3]. Множество всех натуральных чисел, которые могут быть названы по-русски посредством числа слогов (или букв), меньшего некоторого конечного числа, безусловно, конечно; следовательно, должно существовать наименьшее из тех чисел, которые не могут быть так названы. Но "наименьшее целое число, которое не может быть названо по-русски меньше чем в пятьдесят слогов", есть выражение русского языка, содержащее менее пятидесяти слогов. Известны различные модификации этого парадокса.

Парадокс Греллинга. Некоторые русские прилагательные ('абстрактный', 'многосложный', 'русский' и т. п.) обозначают

[1]) Ссылки см. у Чёрча [BSL].

[2]) Здесь и в некоторых других местах оригинала речь идет, конечно, об английском языке, но все замечания и примеры естественно переносятся на русский язык; в дальнейшем мы эти очевидные отступления от авторского текста не оговариваем.— *Прим. перев.*

[3]) Уайтхед и Рассел ([PMt], ч. I, стр. 60).

свойство, которым они сами обладают. Назовем их автологичными, а все остальные прилагательные — гетерологичными. Так, прилагательные 'конкретный', 'односложный', 'зеленый' гетерологичны. Тогда если прилагательное 'гетерологичный' гетерологично, то оно автологично, и наоборот.

Парадокс Сколема. Это рассуждение, строго говоря, не является противоречием и потому не относится к главной теме этого раздела, и все же его уместно рассмотреть здесь, так как оно часто связывается с парадоксами и в широком смысле слова носит парадоксальный характер. Тут нам придется немного забежать вперед и сказать в двух словах то, о чем мы подробнее поговорим позже. Согласно известной теореме Лёвенгейма — Сколема, любая система, которая может быть формализована в исчислении предикатов первой ступени, такова, что если для нее имеется какая-нибудь модель, то непременно есть и счетная модель. Имеются различные системы логики высших порядков и теории множеств, средствами которых могут быть формализованы обычные доказательства несчетности и которые также удовлетворяют этой теореме. Конечно, это значит просто, что когда несчетное множество имеет пересчет, осуществляемый средствами модели, то этот пересчет не может быть получен, так сказать, внутри самой системы, из чего можно заключить, что подлинное положение вещей не может быть описано средствами никакой из таких систем. Это заключение кажется столь противоречащим нашей интуиции, что его естественно назвать 'парадоксом'.

Мы рассмотрели несколько типичных примеров парадоксов. Я не буду останавливаться на рассмотрении других парадоксов и на обсуждении многочисленных попыток объяснения возникающих трудностей. Но несколько общих замечаний будет целесообразно сделать уже здесь, поскольку они имеют прямое отношение к дальнейшему.

Английский логик Рамсей [1] в 1925 г. предложил удобную, по его мнению, классификацию парадоксов, при которой они делятся на две группы, названные Рамсеем группой A и группой B. Парадоксы Рассела, Бурали-Форти и Кантора являются примерами парадоксов группы A; другие из приведенных выше примеров парадоксов, от парадокса лжеца до парадокса Греллинга, относятся к группе B; парадокс Сколема не подпадает под эту классификацию, так как он вообще не является парадоксом в том смысле, как все остальные. По мнению Рамсея, парадоксы группы A содержат только понятия, которые естественно считать принадлежащими логике или математике, тогда как парадоксы

[1]) Умер в январе 1930 г., когда ему еще не исполнилось 27 лет. См. его [FML], стр. 20.

группы B содержат понятия именования, определения, истины и т. д., которые не являются строго математическими, но принадлежат скорее эпистемологии, лингвистике и т. п., так что эти парадоксы вообще незачем рассматривать. В наше время парадоксы рамсеевой группы A называют обычно *логическими* парадоксами, а парадоксы группы B — *семантическими* (иногда "эпистемологическими") парадоксами. Рамсей был не совсем прав, считая, что математикам не к чему интересоваться семантическими парадоксами, и некоторые из самых значительных результатов современной логики обязаны своим появлением как раз более глубокому изучению этих парадоксов. Поскольку два вида парадоксов были определены только на примерах, это различие довольно-таки расплывчато, и в современной логике проявляется тенденция вообще игнорировать его. И все же это различие сохраняет некоторое значение.

Парадоксы бесспорно показывают, что логика — в том интуитивном виде, какой она имела в конце прошлого столетия, — не годится в качестве четкого критерия строгости математического доказательства. Абсолютная строгость, которая, как думали тогда, была достигнута арифметизацией анализа, оказалась иллюзией. Это, конечно, не значит, что математике угрожает опасность полного крушения. Кризисы бывали и раньше, но крушения не произошло. И хотя парадоксы произвели изрядный фурор, число математиков, вплотную интересующихся ими, да и вообще вопросами обоснования, относительно мало. Это и естественно — у математиков хватает других проблем. Кроме того, мы знаем, что нестрогие методы восемнадцатого столетия использовались математиками для вывода важных результатов в ряде областей вплоть до совсем недавнего времени; этими методами все еще пользуются современные инженеры, и нестрогость этих методов не мешает строить плотины Гранд Кули или ядерные реакторы. Но проблема объяснения парадоксов по-прежнему открыта и по-прежнему важна. Парадоксам посвящена обширная литература, было предложено большое число объяснений, но до сих пор ни одно из этих объяснений нельзя считать общепризнанным. Похоже на то, что требуется полная реформа логики, и математическая логика может стать главным инструментом для проведения этой реформы.

C. ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ

Поскольку математическая логика должна изучаться математическими методами, в отношении к ней проявляются различные взгляды на природу математики. Сразу же скажем, что в этом вопросе единства нет. Это вполне нормально — каждая точка зрения предлагает проблемы и методы, которых не предлагают

другие. Мы начнем наше обсуждение в разд. 1 с перечисления различных взглядов на природу математики. В разд. 2 мы рассмотрим два примера, которые позволят нам проиллюстрировать некоторые из этих взглядов. Наконец, в разд. 3 будет сделано несколько критических замечаний.

1. Взгляды на природу математики. Различные точки зрения на природу математики делятся на две основные группы. Мы будем называть их контенсивизмом и формализмом. Согласно *контенсивизму* [1]), математика имеет определенный предмет, определенное содержание; объекты, фигурирующие в математических утверждениях, считающихся в математическом обиходе понятными, — числа, множества, отношения, функции и т. д., — в каком-то смысле существуют, и математические утверждения истинны как раз в той степени, в какой они согласуются с фактами. С точки же зрения *формализма*, математика характеризуется скорее своим методом, нежели предметом изучения; ее объекты или не определяются, или если и определяются, то таковы, что подлинная их природа несущественна, так что замена одних категорий объектов на другие может и не повлиять на истинность теории. Мы должны, например, отнести к формализму любую точку зрения, согласно которой математика имеет дело с символами, ибо, хотя символику можно и фиксировать, никто не станет утверждать, что существенным является выбор конкретной символики. В противоположность этому для контенсивизма характерно признание однозначной определенности математических объектов.

Контенсивизм можно далее разделить на две основные линии. Представители одной из них, известной под именем *платонизма* [2]), утверждают, по сути дела, что понятия числа и множества существуют в действительности (независимо от нашего знания о них) и что классическая математика, хотя и нуждается в более серьезном обосновании, в действительности не является ненадежной. Другие контенсивисты, напротив, считают, что в математике есть нечто гнилое и что значительную часть классического анализа следует отбросить. Эту разновидность уместно назвать *критическим контенсивизмом*. Каждая из названных двух разновидностей контенсивизма в свою очередь проявляется в различных модификациях.

Можно было бы подумать, что парадоксы делают несостоятельными некоторые наиболее крайние формы платонизма. Но если понимать платонизм так, как он был охарактеризован выше, это

---

[1]) Слово 'контенсивный' (англ. contensive) впервые было введено в [АРМ] как перевод немецкого '*inhaltlich*' [содержательный. — *Ред.*].

[2]) Этот термин не следует смешивать с термином 'платонизм', используемым философами. В том смысле, в каком он используется здесь, этот термин впервые применил Бернайс [PMt].

будет неверно. Ведь в каждом из этих парадоксов формулируется предложение, цель которого — построить высказывание, эквивалентное своему отрицанию. Если такое высказывание истинно или ложно, то оно истинно и ложно одновременно, и мы в самом деле получим парадокс; но мы не получим никакого противоречия, если предположим, что построенное предложение вообще не является высказыванием, т. е. что оно не является ни истинным, ни ложным. То, что такое заключение не слишком нелепо, становится очевидным, если мы заменим фразу, фигурирующую в парадоксе лжеца, на "это высказывание истинно"; теперь противоречия нет, но в предложенном утверждении нет и никакой информации. Иными словами, противоречия возникают не из самих "противоречивых понятий", а из свойств, которые им приписываются [1]). Тем не менее парадоксы показывают, что если принять этот взгляд, то нельзя при этом придерживаться логики в ее наивной форме.

Вероятно, платонизм — это тот взгляд, которого более или менее подсознательно придерживается большинство математиков, не занимающихся специально вопросами обоснования. Это также позиция пионеров математической логики Фреге (см. разд. 2*a*) и Рассела; ее и сегодня защищают некоторые выдающиеся логики.

Главенствующая в настоящее время разновидность критического контенсивизма называется *интуиционизмом*. Интуиционистская доктрина изложена в работах Брауэра [2]), первая из которых опубликована в 1907 г.; термин этот иногда употребляется в расширенном смысле, охватывающем ряд похожих теорий, в том числе теорий предшественников Брауэра. Доктрина эта исходит из существования так называемой изначальной интуиции, с помощью которой человеческий разум "строит" натуральные числа и континуум. Согласно этой доктрине, существуют только те математические объекты, которые человеческий разум строит указанным способом. Построение это — необходимо конечное, так что такие понятия, как множество всех натуральных чисел, не могут рассматриваться как законченные конструкции—их следует рассматривать лишь как нечто находящееся в процессе роста. Подобно этому бесконечная последовательность заменяется последовательностью выборов, которые могут быть совершенно свободными и непредсказуемыми или ограниченными некоторым законом. Поэтому теория интуиционизма имеет две характерные черты: (1) конструктивный характер и (2) определенное метафизическое обоснование, в терминах которого должна быть объяснена онтология математических сущностей. Эти две стороны будет удобно обсудить по отдельности.

[1]) Ср. [GKL], стр. 515. Следует заметить, что то же самое рассуждение применимо к определениям пустых понятий. Так, понятие, выраженное словами 'король Франции', не бессмысленно, так как мы всегда можем сказать, является ли данный объект королем Франции или нет. Мы не получим противоречия (с реальной действительностью), если предположим, что 'король Франции' обозначает объект некоторого вида; мы получим противоречие только в том случае, когда допустим, что этот объект в действительности является королем Франции (ср. [rev. R]). Употребляя терминологию Фреге, можно было бы сказать, что такое выражение имеет смысл (Sinn), но не имеет денотата (Bedeutung) [см. Чёрч [IML], § 01.—*Ред.*].

[2]) Л. Э. Я. Брауэр (1881—1966)—известный голландский математик; был профессором Амстердамского университета. Известен также своими выдающимися работами по топологии.

Попытаемся пояснить понятие конструктивного на следующем примере, принадлежащем Гейтингу [1]). Рассмотрим два определения:

1. p — наибольшее простое число такое, что $(p-1)$ — также простое число; если же такого числа не существует, то $p=1$.

2. q — наибольшее простое число такое, что $(q-2)$ — также простое число; если же такого числа не существует, то $q=1$.

Здесь ясно, что высказывание 1 определяет единственное число, именно $p=3$. С другой стороны, в настоящее время неизвестно способа вычисления числа q. Конечно, если бы проблема "простых близнецов" была решена, построение числа q было бы закончено, но до того времени никакое построение, направленное на вычисление q, не может быть в действительности проведено. Даже рассуждение вида "Если $q=1$, то A истинно; если $q>1$, то A также истинно" не может быть принято как конструктивное доказательство того, что A истинно, потому что, пока мы не знаем значения q, мы не можем решить, какая из альтернатив верна, и построение в этом месте обрывается [2]). Отсюда должно быть ясно, почему интуиционисты отрицают закон исключенного третьего в построениях, включающих в себя бесконечные совокупности. Ограничение конструктивными методами имеет своим результатом разрушение большой части современной математики, а некоторые остающиеся положения изменяются так, что становятся почти неузнаваемыми. Интуиционистская теория множеств, например, представляется совершенно новым предметом; это впечатление усугубляется еще тем, что используемая терминология такова, что она скорее усиливает, чем уменьшает различия.

[1]) Гейтинг [Int], стр. 1—2.

[2]) С конструктивной точки зрения связку 'если $-_1$, то $-_2$' следует понимать (см. разд. 3A2) как означающую, что существует эффективный процесс (разд. 2A5) получения заключения из посылки. Это эффективное построение, конечно, обрывается, если мы не можем решить, какая из двух посылок истинна.

Интуиционистская метафизика, с другой стороны, очень туманна. В диссертации Брауэра [1]) изначальная интуиция связывается с интуицией времени [2]), но я не знаю, до какой степени интуиционисты считают эту мысль существенной. Однако они, кажется, все еще постулируют следующие характерные черты своей изначальной интуиции: (1) это мыслительная деятельность человеческого мозга; (2) она не зависит от языка; интуиционистское построение не нужно связывать с каким-либо языковым выражением, и хотя язык необходим для сообщения результатов, этот язык может дать только несовершенное воспроизведение чистой мысли, которая одна лишь является точной; (3) она не может быть адекватно описана никакими заранее составленными правилами: доказательство справедливо, когда оно является построением, отдельные шаги которого непосредственно очевидны; независимо от того, каковы данные правила, можно найти правильное доказательство, которое не согласуется с этими правилами; (4) она имеет априорный характер—в том смысле, что не зависит от опыта; (5) она имеет объективный характер и одинакова у всех мыслящих существ.

Перед тем как перейти к обсуждению формализма, следует предупредить одно возможное недоразумение. Уже в XIX в.[3]) многие понимали, что математика часто имеет дело с "системами постулатов". В таких ситуациях область математики можно охарактеризовать заданием системы постулатов, например постулатов для понятия группы, поля, отношения "между", евклидовой геометрии и т. д.; тогда теоремы этой области являются утверждениями, полученными из постулатов "логической дедукцией". Хотя первоначальные понятия такой системы постулатов не определены, рассматриваемый взгляд еще не является формализмом в том смысле, в каком он понимается в данной книге. Ведь каждая теорема такой системы постулатов на самом деле утверждает, что определенное свойство первоначальных понятий (или отношение между ними), а именно свойство (или отношение), выраженное в утверждении теоремы, является логическим следствием свойств (или отношений), установленных в постулатах [4]). Трудность теперь заключается в определении термина 'логическое следствие'. До тех пор пока этот термин не объяснен, вообще нельзя составить

[1]) Брауэр [GLW].

[2]) Может быть, родственной кантовской априорной интуиции пространства и времени. Неевклидова геометрия опровергает априорную интуицию пространства.

[3]) Можно сказать, даже в древности. Но идеи древних были иными. По поводу развития идей XIX в. см. Нагель [FMC].

[4]) "Первоначальные понятия" являются, таким образом, связанными переменными в некотором предложении чистой логики.

себе мнение о природе математики. Объяснение можно дать с любой из кратко набросанных здесь точек зрения и соответствующим образом классифицировать взгляды на математику.

Наиболее известная разновидность формализма (многие вообще думают, что это единственный вид формализма) выражена в позиции Гильберта [1]). Основная его мысль состояла в том, что трансфинитные понятия математики являются идеальными конструкциями человеческого разума. Он допускал, что существуют определенные "финитные" интуитивные рассуждения, которые a priori абсолютно верны; трансфинитные понятия, не укладывающиеся в рамки таких рассуждений, он считал продуктами мысли, примерно так же относящимися к финитным интуитивным процессам, как мнимые числа к действительным. Мы можем свободно образовывать такие идеальные продукты, подчиняясь только одному основному ограничению — не впадать в противоречия. Гильберт предложил метод установления непротиворечивости обычной математики, основанный на рассмотрении языка, средствами которого формулируется математика. Этот язык нужно формулировать так полно и так точно, чтобы математические рассуждения можно было рассматривать как выводы согласно точно установленным правилам — правилам, которые являются механическими в том смысле, что правильность их применения можно проверить, рассматривая сами символы как конкретные физические объекты, безотносительно к тому значению, которое они могли бы или не могли бы иметь. Формализованные таким образом рассуждения должны были стать предметом нового раздела математики, который он назвал метаматематикой. В метаматематике Гильберт допускал только финитные, абсолютно определенные методы рассуждения. Его программа состояла в том, чтобы установить этими средствами непротиворечивость классической математики. Реализация этой программы гарантировала бы тогда абсолютную надежность математики на все времена.

Эта программа натолкнулась, однако, на серьезное препятствие; в 1931 г. Гёдель [2]) показал, что непротиворечивость достаточно богатой теории не может быть установлена средствами, которые могут быть формализованы в самой этой теории. Поэтому теория либо противоречива, либо не подходит для формализации доказательства собственной непротиворечивости. Это обстоятельство привело к расхождению во мнениях среди современных фор-

[1]) Давид Гильберт (1862—1943)—немецкий математик, профессор Гёттингенского университета; многие считают, что он — величайший математик своего времени.

[2]) Курт Гёдель (род. 1906)—австрийский математик (родился в Чехословакии), профессор Института высших исследований в Принстоне, Нью-Джерси. Ссылки и обсуждение см. в разд. 3A1h и 3S1.

малистов; точнее, оно усилило уже существовавшее расхождение во мнениях. Некоторые считают, что непротиворечивость математики нельзя установить только на априорных основаниях и что математика должна быть обоснована каким-то иным путем. Другие утверждают, что существуют виды рассуждений, которые априорны и конструктивны в более широком смысле, и что в терминах этих рассуждений программа Гильберта может быть осуществлена. Третьи полагают, что результаты Гёделя свидетельствуют о несостоятельности формалистической концепции в целом — во всяком случае, в ее крайней форме. Есть и такая группа логиков, которые утверждают, что формализм должен быть дополнен "семантическими" рассмотрениями платонистского характера [1]).

2. Примеры. Чтобы проиллюстрировать сказанное, я рассмотрю здесь с различных точек зрения два математических понятия. Невозможно обсудить в связи с каждым понятием все точки зрения, но обсуждение типичных точек зрения будет полезно.

a. Натуральные числа. С определенной платонистской точки зрения натуральные числа определяются как классы эквивалентных классов: два класса считаются эквивалентными, если существует взаимно-однозначное отображение одного из них в другой. Число 1 есть класс всех таких классов, что в каждом из них существует элемент, обладающий тем свойством, что другой элемент является членом класса тогда и только тогда, когда он равен этому элементу [2]). Если дано число n, то число $n+1$ есть класс таких классов, что, удаляя из каждого из них по одному элементу, мы образуем классы, принадлежащие классу n. В этом смысле натуральные числа определены однозначно [3]); здесь, однако, необходимо сделать два замечания. Во-первых, парадоксы заставляют платониста определять натуральные числа различных "типов"; во-вторых, он опасается, что если n достаточно велико, то классов с n элементами [1]) может и не быть, и для предотвращения этой возможности ему приходится постулировать специальную "аксиому бесконечности" [2]).

Интуиционисты рассматривают натуральные числа как объекты чистого мышления, порожденные изначальной интуицией. Это иногда объясняют следующим образом. Мы берем некоторый объект или восприятие, отвлекаемся от его природы и таким образом строим понятие единицы. Мы понимаем, что эту единицу можно разделить на две и тем самым породить новую единицу; эту новую единицу в свою очередь можно разделить и т. д. до бесконечности. Натуральные числа в совокупности не образуют никакого класса.

Формалист говорит не о "натуральных числах", а о множестве, или системе, натуральных чисел. Любая система объектов — безразлично, какой природы, — порождаемая из некоторого исходного объекта посредством некоторой одноместной операции таким образом, что каждый новый порожденный объект отличен от всех ранее образованных и что процесс может продолжаться неограниченно, подходит в качестве множества натуральных чисел. Формалист может осуществить этот процесс (и так обычно и делает), представляя числа посредством символов; он выбирает некоторый символ, скажем вертикальную черту '|', в качестве исходного объекта и берет в качестве упомянутой операции приписывание справа к данному выражению еще одного символа '|'. Но он понимает, что существуют и другие интерпретации; например, если принять платонистскую или интуиционистскую метафизику, то системы платонистов или интуиционистов вполне подойдут для этой цели.

Ряд платонистов [3]) возражают против формалистской концепции, считая, что она никак не объясняет процесс счета, т. е. не объясняет, что́ же значит, что такой-то класс имеет n предметов. На это формалист — и, вероятно, также и интуиционист — возра-

---

[1]) Ссылки по поводу этого абзаца см. в разд. S4*b*. [Об ультраинтуиционизме см. работы А. С. Есенина-Вольпина.—*Ред.*]

[2]) Это часто выражается символически так:

$$\alpha \in 1 \rightleftarrows \exists x \forall y\, (y \in \alpha \backsim y = x).$$

[3]) Эта идея принадлежит, по существу, немецкому логику Готтлобу Фреге (1848—1925) и изложена в его работе [GGA]. У Фреге был исключительно острый и тонкий ум, и следы его гения все еще глубоко остались в сердце математической логики. К сожалению, у него был очень скверный характер, и говорят, он был очень жесток в своей критике современников. Может быть, поэтому он так долго не получал признания. Признание только-только начало приходить к нему, когда Рассел написал ему, что в его системе возникает противоречие (парадокс Рассела). Второй том [GGA] в то время уже был в печати. Последствия были для Фреге трагическими. Хотя ему тогда было всего пятьдесят пять лет и он прожил после этого более двадцати лет, он больше не опубликовал ни одной значительной работы по логике. (См. Чёрч [BSL], п. 49, и биографию, написанную Чёрчем, в словаре Рунса [DPh].)

[1]) То есть принадлежащих классу n.

[2]) Ср. ниже, разд. D. [Если множество значений, которые могут принимать переменные в формулах, определяющих конкретные натуральные числа, конечно и содержит, например, не более k различных элементов, то все формулы, посредством которых мы попытались бы — подобно тому как это сделано в примечании 2 к стр. 32 для выражения $\alpha \in 1$ — определить принадлежность α классу n, для всех $n > k$ оказались бы эквивалентными (тождественно ложными!), так что любые n и m такие, что $n > k$ и $m > k$, определенные таким образом, попросту совпадали бы. Этим и мотивируется необходимость введения аксиомы, постулирующей бесконечность предметной области.— *Ред.*]

[3]) Например, Рассел ([PMt], стр. VI) и Рамсей ([FML], стр. 2).

зит, что такое объяснение легко дать: класс содержит n элементов в точности тогда, когда он находится во взаимно-однозначном соответствии с классом, образованным обрезанием числового ряда на числе n.

b. Аксиома выбора. Это аксиома теории множеств, утверждающая, что для любого данного класса попарно непересекающихся непустых классов существует класс, содержащий в точности по одному элементу из каждого из этих непересекающихся классов. С точки зрения платонистов вопрос об истинности аксиомы выбора имеет фактический, объективный характер, так что одни платонисты в соответствии со своей позицией принимают аксиому выбора, другие отрицают ее, а есть и такие, кто принимает ее с рядом ограничений. (Последние две группы можно, конечно, причислять к критическому контенсивизму.) Интуиционист не может даже сформулировать аксиому выбора и притворяется, что не понимает ее. Формалист же может, например, сказать: "Я могу сформулировать системы, в которых аналог аксиомы выбора имеет место — с различными ограничениями или без таковых; я могу также сформулировать системы, в которых эта аксиома не предполагается, а также — при определенных ограничениях — системы, в которых эта аксиома неверна. Какая из этих систем самая полезная — решайте сами, быть может, исходя из того, зачем вам эта система нужна. Так или иначе, все эти системы являются видами математики, и их нужно рассматривать как таковые".

3. Критические замечания. Дискуссия в разд. 1 была предпринята с целью изложить современные взгляды на природу математики. Здесь я сделаю несколько более спорных критических замечаний.

Против всех видов контенсивизма имеются два основных возражения: во-первых, что критерий строгости в лучшем случае неясен и, во-вторых, что он основывается на метафизических соображениях сомнительного характера. Эти возражения взаимосвязаны. Будет удобно обсудить их в применении сначала к интуиционизму, а затем к платонизму.

Вспомним пять свойств изначальной интуиции, которые были перечислены в разд. 1. Согласно третьему из этих свойств, невозможно дать точное определение строгого доказательства. Построение является верным, когда оно представляет собой конечную последовательность шагов, каждый из которых непосредственно очевиден для ума. Если два разума не согласны относительно того, что непосредственно очевидно, то нет объективного критерия, который разрешал бы их спор. Это показывает, что критерий строгости доказательства неясен. Что касается метафизического характера этого критерия, то достаточно заметить, что с определенных философских позиций пять характеристик изначальной интуиции

неприемлемы — по крайней мере совместно. Эмпирик, например, утверждает, что не существует априорного знания, а потому не существует и априорной интуиции, которая может быть использована как критерий истины. Далее, есть мыслители, защищающие тезис о том, что мышление невозможно без языка. Наконец, если бы даже мы признали существование интуиции, удовлетворяющей первым четырем свойствам, то представляется очень сомнительным, чтобы она удовлетворяла и пятому свойству, а без этого пятого свойства интуиционистская математика вообще не является объективной наукой. Поэтому интуиционист требует существования интуиции, имеющей объективную и доязыковую природу, и хотя это онтологическое предположение согласуется с определенными типами философии, оно остается всего-навсего предположением и притом — с точки зрения других философских направлений — в высшей степени сомнительным и метафизическим [1]).

Что же касается платонизма, то едва ли нужно говорить, что приписывание реального существования всем инфинитистским понятиям математики есть метафизическое допущение, в высшей степени противное определенным типам мышления, включая интуиционистский. Поэтому платонизм еще гораздо более метафизичен, нежели интуиционизм. Однако с точки зрения критерия строгости положение платонизма гораздо лучше, потому что большинство платонистов допускает возможность формализации (в смысле, который вскоре будет объяснен). В самом деле, в большинстве платонистских теорий нет иного критерия строгости, чем критерий, выведенный из формализации, и этот критерий точен, коль скоро формализация строга и совершенна.

Детальным изучением определенных видов формализма мы займемся в следующей главе. Там мы увидим, что формализм может предложить концепцию строгого доказательства, которая объективна и точна, и что эта концепция свободна от метафизических допущений того вида, который, как мы только что отмечали, характерен для интуиционизма и платонизма. Поскольку мы хотели бы считать математику объективной наукой, не нуждающейся в метафизических допущениях, в этой книге принята формалистская точка зрения.

Для разъяснения нашей позиции необходимо, однако, сделать еще несколько замечаний. Естественно, эти замечания могут потребовать и дальнейших разъяснений.

Прежде всего, из теоремы Гёделя о неполноте, упомянутой в конце разд. 1, видно, что никакая формальная теория не может одна охватить всю математику. Поэтому формализм не следует отождествлять со взглядом, что такая теория существует. Разно-

[1]) Ср. [OFP], стр. 6.

видность формализма, которой придерживается автор этих строк, утверждает скорее, что сущность математики заключается в формальном методе как таковом и что она включает различные виды формальных теорий, а также обсуждение взаимоотношения формальных теорий друг с другом и их отношения к другим доктринам. В этом смысле *математика есть наука о формальных методах.*

Формалистская теория содержит по определению ряд нефиксированных элементов или параметров, т. е., как уже говорилось выше, элементов, значения которых могут меняться. Если эти элементы определены конкретным содержательным образом, то получившая интерпретацию теория становится содержательной теорией. Назовем подобную теорию формализованной содержательной теорией. Если, кроме того, истинные утверждения формализованной теории приемлемы с некоторой содержательной точки зрения, то мы скажем, что формальная теория согласуется с этой точкой зрения. Поэтому могут быть формальные теории, согласующиеся с платонизмом, и теории, согласующиеся с интуиционизмом. Таким образом, между формализованной содержательной теорией и первоначальной содержательной теорией имеется фундаментальное различие. Ведь доказательство или иное рассуждение, проведенное в формальной теории, остается истинным независимо от ее интерпретации. Если строгость определяется формальной теорией — как это имеет место для многих видов платонизма, — то строгость остается объективным фактом независимо от того, принимаются предположения содержательной теории или нет. Более того, различные виды формализма, которые отличаются друг от друга в отношении содержательной интерпретации, могут рассматриваться одновременно. Поэтому формализм не является доктриной, которая отрицает или исключает те или иные содержательные доктрины; он одинаково независим от любой формы контенсивизма и одинаково согласуется с каждой из этих форм.

Из этого следует, что изложенная выше критика метафизических предпосылок различных видов контенсивизма не опровергает позиций этих содержательных теорий. Цель наша состояла отнюдь не в таком опровержении. Утверждалось просто, что определение истины в математике не должно зависеть ни от каких метафизических допущений. Те, кто принимает такого рода допущения, естественно, предпочтут формальные теории, которые согласуются с ними. Так или иначе, эти формальные теории показывают, какие следствия вытекают из таких метафизических допущений. Так как формальные системы, согласующиеся с различными точками зрения, могут рассматриваться одновременно, то вполне допустимо, что различные теории принимаются для различных целей. Поэтому формализации математики, ориентированные на платонизм, кажутся проще и находятся в большем согласии с привычной математической практикой, а потому и более подходящи для обычных теоретических целей; что же касается формализаций математики, ориентированных на интуиционизм, то они соответствуют тем случаям, когда важно действительное проведение операций, как, например, в рекурсивной арифметике или в операциональных теориях физики. Формализм не предрешает ответа на такие вопросы — он допускает возможность различных видов математики, сосуществующих бок о бок.

Выше было сказано, что интуиционизм имеет два аспекта — метафизический и конструктивный. Последний не зависит от первого. Понятие конструктивности очень важно для математики. Интуиционисты совершенно правы, подчеркивая эту важность, и они, безусловно, участвовали в развитии конструктивизма. Но отнюдь не только они [1]). Понятие финитного построения, играющее основную роль в метаматематике Гильберта, в действительности имеет еще более строгий характер. Это видно хотя бы из следующего. Примерно в 1930 г. Гейтинг предложил формализацию арифметики, согласующуюся с интуиционизмом. Несколько позже Гёдель [2]) показал, что классическую арифметику можно интерпретировать в интуиционистской арифметике. Таким образом, непротиворечивость классической арифметики удается доказать интуиционистскими методами, тогда как строго финитное доказательство этой непротиворечивости противоречило бы теореме Гёделя о неполноте. Поэтому с финитной точки зрения в интуиционистской арифметике есть некий неконструктивный элемент; в чем именно он заключается, я не знаю. Позднейшие усовершенствования понятия конструктивности были предложены бывшими формалистами. Таким образом, становление понятия конструктивности обязано взаимодействию между интуиционистами, формалистами и, быть может, представителями других направлений, и каждая из этих партий внесла свой вклад в прояснение этого вопроса.

Большинство тезисов, выдвинутых интуиционистами, если снять с них метафизический налет, приемлемы для формализма. То, что это верно по отношению к конструктивизму, уже отмечалось в предыдущем абзаце. Что же касается мнения о том, что понятие интуитивно верного доказательства не может быть охвачено никакой единой формализацией, то мы уже говорили, что теорема Гёделя именно об этом и свидетельствует, так что математическое доказательство как раз и является примером такого "становящегося" понятия, какими, согласно интуицио-

[1]) О претензиях интуиционистов по этому поводу см. Брауэр [IB F].
[2]) В его работе [IAZ].

нистской позиции, являются бесконечные множества. Мы можем допустить также, чтобы в математику вошла некоторая доля интуиции, при условии, что нам разрешается рассматривать эту интуицию как имеющую существенно лингвистическую природу или как естественное развитие опыта безотносительно к некоей априорной истине. Для нас неприемлем лишь тезис, гласящий, что математика, мотивированная любыми другими соображениями, не имеет ни малейшей ценности.

Более того, мы даже требуем, чтобы формализм был абсолютно свободен от каких бы то ни было допущений, которые можно было бы счесть в каком-либо смысле метафизическими. Для излагаемой нами теории также существенны некоторые допущения, проявляющиеся в ряде абстракций. Первое из таких допущений подразумевается при использовании таких терминов, как 'символ' и 'выражение'; эти термины обозначают не индивидуальные знаки на бумаге или на доске — для них мы примем термин *инскрипции*,— а классы таких инскрипций, имеющих "одинаковую форму". Поэтому одно и то же выражение может иметь несколько "вхождений". Теория, объектами которой могут служить только конкретные предметы, известна под именем *номинализма*. Вероятно, можно дать номиналистскую трактовку формализма, но здесь мы не пытаемся сделать это. Вторая абстракция относится к ограниченности в пространстве и во времени. Мы считаем, что любой процесс, для которого число операций конечно, конструктивен, хотя для действительного осуществления такого процесса может не хватить места и времени даже в масштабах Вселенной. Поэтому здесь имеет место известная идеализация опыта — в точности такая же, как и в других науках. Третья абстракция, согласно которой процесс, состоящий из бесконечного множества действий, может мыслиться законченным, характерна для неконструктивной точки зрения. Эта абстракция употребляется в современных "семантических" дискуссиях о формальных теориях. И надо сказать, что такие смеси формализма и платонизма играют немаловажную роль в современной логике; впрочем, в нашей книге, посвященной основаниям математической логики, мы не будем их касаться.

Зададим, наконец, вопрос: до какой степени абсолютная надежность присуща математике? Поиск абсолютной надежности был, очевидно, основной мотивировкой для концепций Брауэра и Гильберта. Но нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Зачем, скажем, нам так уж нужно быть уверенными в непротиворечивости теории или в том, что ее можно вывести с помощью абсолютно определенной интуиции чистого времени, прежде чем использовать эту теорию? Ведь ни к какой другой науке мы не предъявляем таких требований. В физике,

например, теории всегда гипотетичны; мы принимаем теорию, коль скоро на ее основе можно делать полезные предсказания, и видоизменяем или отвергаем ее, коль скоро этого сделать нельзя. Именно так случалось и с математическими теориями, когда в связи с обнаружением в них противоречий приходилось модифицировать не оспариваемые до того времени математические доктрины. Так почему мы не можем поступать так же и в будущем? Используя формалистскую концепцию для объяснения того, что представляет собой теория, мы принимаем теорию, коль скоро она полезна, удовлетворяет некоторым условиям естественности и простоты, разумным для своего времени, и коль скоро известно, что эта теория не введет нас в заблуждение. Мы должны держать наши теории под постоянным наблюдением, чтобы видеть, что эти условия выполнены, и чтобы получить все основанные на догадках доказательства адекватности теорий, которые мы можем получить. Теорема Гёделя утверждает, что это все, что мы можем сделать; эмпирическая философия науки утверждает, что это все, что мы должны сделать. Более того, поскольку оценка полезности теории зависит от ее назначения, можно для различных целей принимать по-разному построенные теории, так что интуиционистская и классическая математики могут сосуществовать.

D. МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Читатель, хоть немного знакомый с современной популярной литературой по основаниям математики, удивится, быть может, тому, что в предыдущем изложении ни разу не встречалось слово "логицизм" [1]). Логицизм, известный обычно как учение, согласно которому математика сводима к "чистой логике", часто упоминался наряду с интуиционизмом и формализмом как одно из трех основных направлений в вопросе о природе математики [2]). При ближайшем рассмотрении, однако, видно, что понятие 'логицизм' расплывчато, поскольку термин "чистая логика" не определен [3]). Фактически логицизм является не единым взглядом на природу математики в целом, а специальным тезисом об отношении логики к математике. Этот тезис заслуживает некоторого обсуждения, которое возвратит нас к теме разд. A.

Сначала ясно представим себе исторические факты, относящиеся к термину 'логицизм'. Этот термин первоначально применялся к системам Фреге и Рассела. Эти ученые осознали то обстоятельство (которое мы уже отмечали в разд. C1), что любую математическую теорему в аксиоматической системе можно рассма-

[1]) Иногда говорят "логистицизм" и соответственно "логистический".
[2]) Особенно в тридцатые годы; см., например, Харди [MPr].
[3]) Мы уже отмечали это в начале обсуждения формализма в разделе C1.

тривать как некоторое утверждение о логическом следовании. Они заметили, однако, что кроме терминов, которые играют в таком утверждении роль связанных переменных, существуют еще и константы; например, слово 'два' в утверждении "квадратное уравнение имеет два корня" имеет фиксированное значение. Они выдвинули тезис о том, что все константы, встречающиеся в математике, могут быть определены в терминах определенных "логических констант"; в частности, натуральные числа определялись как свойства классов (мы говорили уже об этом при рассмотрении первого примера в разд. C2). Таким путем любую математическую теорему можно трактовать как утверждение некоторой "логики". Логика, в терминах которой нужно было производить подобное объяснение, определенно была платонистской, и потому таковыми же нужно считать и теории логицистов [1]). С течением времени термин 'логицизм' стал применяться к работам других ученых, вдохновленных работами Фреге и Рассела, например Рамсея, Витгенштейна, Льюиса, Карнапа и Куайна. Работы последних имеют определенно формалистский характер. Таким образом, 'логицизм' является скорее именем для группы исторически связанных теорий, чем характеристикой некоторой точки зрения, стоящей в одном классификационном ряду с рассмотренными в разд. C. Более того, существует ряд систем, родство которых с логицизмом сомнительно, и неясно, имеет ли этот термин одно и то же значение у разных авторов.

Только что упомянутые различные теории имеют, однако, ряд общих черт. Логика, к которой сводится математика, является не философской логикой в смысле разд. A, а специальным видом математической системы. Логицисты принимают определение натурального числа по Фреге; в этом отношении они противостоят как системам, рассматривающим натуральные числа в качестве первоначальных объектов (например, системе Гильберта), так и системам, определяющим их другими путями (например, теории множеств [2]), комбинаторной логике [3])). Используемая ими логика

[1]) По отношению к Фреге это преобладающий взгляд. О противоположном мнении см. Бергман [FHN]. По отношению к Расселу это очень ясно видно, например, из введения к второй части его [PMt].

[2]) В абстрактной теории множеств (ср. разд. S4*b*) можно определить 0 как пустое множество, а $n + 1$ либо как множество, единственным элементом которого является число n (Цермело), либо как множество, состоящее из всех натуральных чисел, не превосходящих n (фон Нейман). Последнее имеет то преимущество, что множество, представляющее число n, имеет в точности n элементов. Выбор того или иного способа зависит, по-видимому, от того, рассматривается ли абстрактная теория множеств как логицистическая система.

[3]) См. Карри и Фейс [CLg], стр. 6 и след. и 174, и ссылки, которые приводились ранее; эта тема будет рассматриваться подробнее во II томе [CLg].

является существенно классической, т. е. она основана на двузначной алгебре высказываний, а парадоксы в ней не возникают благодаря тому, что выражения, построенные с нарушением "теории типов" или какой-нибудь ее модификации, считаются в ней лишенными смысла. Наконец, большинство логицистов убеждено, что логика принципиально единственна. Эти свойства можно принять за характерные черты логицизма [1]).

Ранние возражения против логицизма состояли в том, что он требует — по крайней мере в том виде, в каком он имеется у Рассела,— аксиом, которые неестественно причислять к "логическим". Ярким примером является "аксиома бесконечности", которая утверждает, что существует бесконечно много "индивидов", т. е. объектов наинизшего типа [2]). Позднее теорема Гёделя показала, что никакая формализованная система логики не может быть адекватной базой математики, так что если вообще следует поддержать тезис логицизма, то этот тезис должен относиться скорее к некоторого рода иерархии логик, чем к одной логике. Наконец, можно осмысленным образом рассматривать системы, отличающиеся от классических тем, что в них будут неверны определенные законы классической логики; интерпретация этих новых систем с позиции логицизма, мягко выражаясь, совершенно неестественна.

Что же касается формализма, то с его позиций (это, кстати, относится и к некоторым другим позициям) математическую систему можно охарактеризовать объективно, не предполагая ничего, что было бы естественно называть "логикой". Это и будет фактически проделано в следующей главе. Именно это делает возможным математическую логику, так как иначе применение математики для целей, упомянутых в разд. A, образовывало бы круг. Системы, предложенные логицистами (по крайней мере если придать этим системам достаточно точную форму), относятся к числу таких математических систем. Следовательно, то, что можно вполне рассматривать как часть логицистического тезиса, а именно, что математику можно разумным образом применить к логике, так что некоторые математические системы являются

[1]) Это устраняет некоторые — хотя и не все — неясности, указанные в конце предыдущего абзаца.

[2]) Термин 'индивид' означает здесь объект, который — если рассматривать его в данной системе — не является множеством; совокупность индивидов составляет наинизший тип. В абстрактной теории множеств также есть "аксиома бесконечности", но здесь она имеет другой смысл. При обычном изложении этой теории нет никаких индивидов — все объекты теории суть множества; существует бесконечно много множеств, и аксиома бесконечности утверждает, что некоторая определенная бесконечная совокупность множеств образует множество. В любом случае аксиома утверждает существование множеств (или классов) с бесконечным числом элементов.

логическими по своей природе, согласуется с принятой нами позицией. Следует ли идти дальше и отождествлять математику и логику — это зависит от того, как определять логику. Позиция, излагаемая в этой книге, такова, что некоторые неясные утверждения, сделанные в разд. A, достаточны для рабочего определения, и с этой точки зрения математику и логику не следует отождествлять.

На близкий вопрос о том, как следует характеризовать математическую логику в границах математики, можно будет дать лучший ответ после того, как мы кончим эту книгу [1]). Ясно, во всяком случае, что один из неотъемлемых атрибутов логической системы состоит в том, что эту систему необходимо формулировать настолько явно, чтобы не предполагать логику заранее заданной; в дальнейшем мы увидим, как это можно сделать. Обычная математика может быть основана на некоторой логике, которая предполагается заранее заданной, и вполне вероятно, что для различных целей могут использоваться различные логики такого рода. Задача математической логики состоит в исследовании таких логик и их взаимоотношения. В частности, математическая логика должна разрабатывать технику, которой математики могут с уверенностью пользоваться, с учетом специфической природы логики, положенной в основу математики (например, в зависимости от того, включена ли в эту логику аксиома выбора). Это один из путей, на котором математическая логика может способствовать прогрессу математики как целого.

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Следующие указания предназначены, чтобы помочь читателю найти в современной литературе материал, который дополняет эту книгу. Ссылки делаются на библиографию в конце книги в соответствии с приведенными там объяснениями. Ссылки эти будет удобно классифицировать следующим образом: (1) общие систематические изложения математической логики, все еще представляющие интерес в настоящее время; (2) библиографические пособия, включая специальные журналы, реферативные журналы, библиографические указатели и т. п.; (3) исторический материал, включая классиков, и материал, не представляющий интереса с точки зрения современности (хотя во многом остающийся по-прежнему поучительным); (4) материал, относящийся к специальным областям математической логики, которые не

[1]) Было сделано много попыток более точно охарактеризовать те математические системы, которые являются логическими, но никакая из них не была принята достаточно единодушно, чтобы здесь можно было одобрить ее.

излагаются в данной книге, а зачастую и в общих работах, указанных в разд. (1); (5) источники, на основе которых создана данная работа, а также другие или расширенные трактовки тем, затронутых в книге; (6) материал, специально относящийся к соответствующей главе. Читателю следует иметь в виду естественную ограниченность такого перечня, и ему следует дополнить этот список общими источниками библиографической информации. Ссылки, сделанные здесь, относятся к книге как целому или к данной главе; ссылки, относящиеся к последующим главам, будут даны в конце соответствующих глав.

1. Общие систематические работы. Эти работы мы представим в виде нескольких подразделов.

a. Следующие книги являются наиболее важными общими трактатами, каждый из которых является стандартным изложением некоторой точки зрения: Чёрч [IML$_2$]; Гильберт и Бернайс [GLM]; Клини [IMM]; Лоренцен [EOL]; Куайн [MLg]; Шютте [BTh]. В этот же список следует включить работы Карнапа, но чтобы получить полное представление о его (в более строгом смысле) логических результатах, нужно привести несколько работ, а именно, [LSS], [ISm], [FLg], [MNc]. Монументальный труд Уайтхеда и Рассела [PMt] мы относим к разд. 3. В эту группу можно отнести также некоторые работы, приведенные здесь в разд. *b* и *e*.

b. Несколько более элементарными, похожими на учебники, хотя и содержащими оригинальные результаты, являются работы Фитча [SLg], Ладриера [LIF] (обширное исследование); Прайора [FLg], Куайна [MeL], Розенблюма [EML] и Россера [LMt].

c. Существует ряд элементарных работ, ценность которых состоит в основном в популярности изложения, но представляющих некоторый интерес и для подготовленных студентов и аспирантов. На английском языке такими работами являются следующие (некоторые из них сначала появились на других языках или были затем переведены на другие языки): Карнап [ISL]; Гудстейн [MLg]; Гильберт и Аккерман [PML]; Леблан [IDL]; Нагель и Ньюмен [GPr]; Куайн [ELg], [MeL]; Розенблюм [EML]; Саппс [ILg]; Тарский [ILM]; Уилдер [IFM]. На немецком языке — Карнап [ESL]; Гильберт и Аккерман [GZT]; Лоренцен [FLg]; Шольц [VGZ] (несколько более обширная). На других языках — Бланше [ILC]; Фейс [Lgs]; Мостовский [LMt]; Новиков [ЭМЛ] [1]). Книга Тарского [ILM] является дополненным изданием работы,

[1]) Кроме указанных автором, мы включили в библиографию недавно переведенные на русский язык книги Линдона [ЗПЛ], Мендельсона [IML] и Столла [ЛМА]. Первая представляет собой чрезвычайно сжатый очерк основных идей современной логики в духе теории моделей. Вторая —

которая сначала появилась на польском языке; она была переведена на несколько языков. Этот список не исчерпывает всех элементарных учебников, но я выбрал из них те, которые мне кажутся наиболее подходящими. Я не привел здесь книг, о которых у меня нет соответствующей информации.

d. Следующие работы являются более краткими исследованиями или обзорами: Гермес [GLM]; Гермес и Марквальд [GLM]; Гермес и Шольц [MLg]; Шмидт [MGL]; Мостовский [PSI]. Первые четыре работы — на немецком языке, последняя имеется на русском, английском, немецком и польском языках. Есть написанные компетентными авторами статьи в Британской энциклопедии (см. обзор в *J. Symb. Logic*, **23**, стр. 22—29), Американской энциклопедии (см. обзор в *J. Symb. Logic*, **23**, стр. 207—209) и (большей частью принадлежащие А. Чёрчу) в словаре Рунса [DPh]. Книга Бохенского [PLM], имеющаяся теперь на английском, французском и немецком языках, является справочником, содержащим формулы и определения со ссылками.

e. Следующие работы по своей природе являются критическими обозрениями или же тяготеют к философской точке зрения: Бет [FMt]; Блэк [NMt]; Дубислав [PMG]; Френкель и Бар-Хиллел [FST]; Ладриер [LIF]; Строусон [ILT]; Вайсман [EMD]; Вейль [PMN]; Уилдер [IFM]. Некоторые из этих работ можно было бы также привести в разд. *a*. Книга Уилдера предназначена для изучающих математику на уровне тех, кто в Америке готовится к ученой степени бакалавра.

2. Библиографические пособия. В настоящее время существует шесть журналов, специально предназначенных для публикования оригинальных работ и обозрений в области математической логики, а именно следующие: *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung* (ФРГ); *Journal of Symbolic Logic* (США); *Logique et analyse* (Бельгия); *Notre Dame Journal of Formal Logic* (США); *Studia Logica* (Польша); *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* (ГДР) [1]). Большое количество других математических и философских журналов также публикует работы в этой области; есть публикации более чем на двадцати языках.

Journal of Symbolic Logic публикует также обзоры почти всей современной литературы. Каждые два года публикуются подборки

основательный учебник логики (в широком смысле, включая основы теории алгорифмов, формальной арифметики и аксиоматической теории множеств) университетского типа. Наконец, третья — очень прозрачное изложение основ общей теории множеств и логики для малоподготовленного читателя; особый интерес в книге представляет последняя глава, посвященная булевым алгебрам.— *Прим. ред.*

[1]) Следует указать также *Fundamenta Mathematicae* (Польша) и труды Новосибирского семинара «Алгебра и логика».—*Прим. ред.*

обзоров, рецензий и рефератов по авторам, а каждые пять лет — по темам. Рефераты более математических по своему характеру работ публикуются также в *Mathematical Reviews* и *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*. Рефераты в *Journal of Symbolic Logic*, пожалуй, более глубоки и критичны, но они появляются обычно позднее других, причем смежные разделы математики освещаются сравнительно мало. Обзоры, большей частью на польском языке, публикуются в *Studia Logica*. В СССР издается Реферативный журнал "Математика".

Обширная библиография, составленная А. Чёрчем [BSL], появилась в 1936 г. С учетом опубликованных позднее дополнений она, по-видимому, является самой полной библиографией работ с 1666 по 1935 г. Обзорный отдел *Journal of Symbolic Logic* поддерживает эту библиографию на современном уровне. Обширную библиографию можно найти также в книгах Френкеля [EML_3], [AST], Френкеля и Бар-Хиллела [FST] и Ладриера [LIF]. Более старая библиография, которая еще может быть полезной, содержится в книге Льюиса [SSL]. Библиография с бóльшим отбором и с классификацией имеется у Бета [SLG], Бохенского [PLM], Чёрча [BBF], Гермеса и Шольца [MLg], Леблана [IDL] и Шмидта [MGL].

3. Исторический материал. Нам удобно будет по отдельности говорить о современном периоде (считая его условно, скажем, с 1920 г.) и о собственно "исторических" временах (естественно, жесткой границы между этими периодами провести нельзя). Что касается современности, то здесь приходится удовлетвориться появляющимися время от времени обзорами. Классическим же временам посвящены специальные систематизированные труды.

a. Много исторической информации, частично систематизированной, содержится в книге Бета [FMt]. Особое внимание уделяется в ней деятельности различных школ, их взаимоотношению друг с другом и с философскими идеями. Примерно то же можно сказать про работы Френкеля, особенно про книгу Френкеля и Бар-Хиллела [FST]; впрочем, содержание этой книги носит все же главным образом математический характер; книга снабжена обширной, почти исчерпывающей библиографией [1]). Богатым источником информации несколько другого рода является книга Чёрча [IML_2], содержащая обширные ссылки и замечания, относящиеся к авторам математических идей. Шольц [MJL], обсуждая работы Лукасевича, также временами дает много информации

[1]) В русском издании [FST] библиография значительно пополнена за счет упоминаемых в этой книге работ из [AST] Френкеля и более поздних публикаций (1957—1965 гг.).— *Прим. ред.*

такого рода. Можно также упомянуть работы Котарбиньского [LPO] (о развитии логики в Польше) и Яновской [ОМЛ] и [МЛО] (о развитии логики в СССР). См. также общие исследования, отмеченные в разд. 1*e*.

b. Известно несколько общих трактатов по истории логики. Из них, на мой взгляд, наиболее интересными являются работы Бохенского [FLg], [AFL], Йоргенсена [TFL], Льюиса [SSL] (период от Лейбница до 1918 г.), Муди [TCM], Бёнера [MLg] (последние две работы — по истории средневековой логики). Краткая библиография работ по истории логики дана в книгах Чёрча [BBF] и Гермеса и Шольца [MLg]; более обширную библиографию см. у Бохенского [FLg] [1]).

c. Избранный список важных работ, которые слишком стары, чтобы их включить в разд. 1, можно найти у Бета [FMt] и [SLG], Чёрча [BBF], Гермеса и Шольца [MLg], Леблана [IDL]. У Чёрча в [BSL] работы, которые составитель считал особенно важными, отмечены звездочкой. Некоторые из классических работ стали сейчас более доступными благодаря недавним публикациям работ Фреге на английском и немецком языках и изданию второго и третьего томов трудов Пеано, содержащих большинство его ранних логических работ [2]).

4. Специальные вопросы. Чтобы помочь читателю составить представление о месте предмета этой книги в математической логике как целом, я упомяну некоторые из путей, по которым математическая логика выходит за рамки "оснований". Изложение и ссылки, приведенные здесь, предназначены лишь для того, чтобы приблизительно очертить направление исследований, не претендуя на полное и технически правильное изложение полученных результатов; да и не обо всех возможных направлениях будет здесь идти речь.

Эта книга рассказывает об "исчислении предикатов" первой ступени, в котором мы рассматриваем пропозициональные функции, определенные на фиксированной области "индивидов", причем высказывания и пропозициональные функции не входят в эту область; кроме того, используемые методы строго конструктивны и сравнительно несложны. Здесь можно пойти дальше в двух направлениях. С одной стороны, можно рассматривать исчисления высшего порядка, в которых высказывания или пропозициональные функции (а потому и множества и т. д.) могут быть аргументами других функций. С другой стороны, можно пользоваться более далеко идущими методами. В некотором смысле промежуточными являются системы, в которых числа

[1]) См. также книгу Стяжкина [ФМЛ].— *Прим. ред.*
[2]) См. также [FrG] Фреге и др.—*Прим. ред.*

явно вводятся в область аргументов. Ниже, в разд. *a* — *c*, я кратко расскажу о трех основных разновидностях логических исчислений высшего порядка, в разд. *d* — о системах, в которых в качестве первоначальных объектов берутся натуральные числа, а в разд. *e* — о ряде других вопросов. Обсуждение более глубоких методов мы отложим до разд. 3S3.

a. *Теория типов*. Основной принцип этой теории состоит в том, что логические понятия (высказывания, индивиды, пропозициональные функции) располагаются в иерархию "типов" и что функция может иметь в качестве своих аргументов лишь понятия, которые предшествуют ей в этой иерархии.

Классической работой в этом направлении является "Principia mathematica" Уайтхеда и Рассела; ей предшествовал ряд работ (о работах самого Рассела см. у Чёрча [BSL]; относительно его предшественников см. Шрёдер [VAL] и Чёрч [SAS]), сама она опиралась на труды Фреге и Пеано. Элементарное изложение философских принципов теории типов см. Рассел [IMP]. Форма этой теории, предложенная в книге Уайтхеда и Рассела [PMt], известна как "разветвленная" теория типов; Рамсей [FMt] предложил свести ее к "упрощенной" теории типов, и этой идее следовали в последующих теориях. После Уайтхеда и Рассела [PMt] не было такого обширного трактата. По поводу критических замечаний см. Френкель и Бар-Хиллел [FST] и Бет [FMt]; краткий обзор дан у Гильберта и Аккермана [GZT] и у Вана и Мак-Нотона ([SAT], стр. 11—15) [1]). Чёрч [FST] дает точную формулировку одной части теории типов. Генкин [CTT] изучал проблемы полноты. В некоторых формах данной теории иерархия может быть трансфинитной [2]).

Несколько вариантов теории типов появилось сравнительно недавно. К ним, например, относятся теории Лоренцена [EOL], Вана [FMt] и Шютте (см., например, его [BTh], гл. 9), хотя они сильно отличаются от первоначальной позиции; теории Куайна, которые мы здесь рассматриваем отдельно (см. разд. *c*), также идут от теории типов. Японский математик Г. Такеути предложил генценовскую формулировку теории типов, которую он назвал GLC (general logical calculus [3])). Его "основная гипотеза" состоит в том, что элиминационная теорема (т. е. теорема об устранимости сечений, разд. 5D) справедлива для этого исчисления. Близкие идеи были выдвинуты в цикле статей Куроды [4]). Вообще в этой области в настоящее время ведутся очень активные

[1]) Одна форма теории типов разработана в книге Карнапа [ISL].
[2]) См., например, книгу Эндрюса [TTV].— *Прим. ред.*
[3]) Общее логическое исчисление.— *Прим. ред.*
[4]) [ILM].—*Прим. ред.*

исследования. Теорема Гёделя, конечно, не позволяет рассчитывать на доказательство основной гипотезы конструктивными методами.

b. Аксиоматическая теория множеств. Основные характеристики этой теории следующие: (1) пропозициональные функции рассматриваются экстенсионально, т. е. функции, имеющие одни и те же значения истинности для одних и тех же значений аргументов, отождествляются; 2) пропозициональные функции более чем одного аргумента могут быть сведены к пропозициональным функциям одного аргумента, т. е. к классам; (3) имеется класс, элементы которого называются множествами; класс может быть элементом другого класса тогда и только тогда, когда он является множеством; (4) множества характеризуются генетически, согласно их построению, таким образом, что слишком обширные классы, например класс всех множеств, не могут (в предположении непротиворечивости теории) допускаться в качестве множеств. Примеры аксиом: аксиома множества-степени, утверждающая, что класс всех подмножеств любого данного множества является множеством, и аксиома выделения (*Aussonderungsaxiom*), утверждающая, что для любого данного множества всякий его подкласс является множеством.

Аксиоматическая теория множеств исходит от развивавшейся Кантором в конце прошлого века наивной теории множеств, точно так же как теория типов исходит от Фреге,— известно, что теории Кантора и Фреге были чреваты противоречиями. Основные статьи Кантора были собраны и опубликованы (см. Кантор [GAb]). Первая аксиоматическая система теории множеств содержится в работе Цермело [UGL]. Эта теория была позднее расширена, усовершенствована и видоизменена Френкелем, Сколемом, фон Нейманом, Бернайсом, Гёделем, Аккерманом и Азриелем Леви. Краткий очерк этого развития см. у Вана и Мак-Нотона [SAT]; полное историческое и критическое изложение см. у Френкеля и Бар-Хиллела [FST], ср. также Бет [FMt], гл. 14; более поздние виды этой теории см. у Гёделя [CAC], Бернайса и Френкеля [AST] и в различных публикациях Леви; в качестве учебника можно использовать книгу Саппса [AST]. Относительно более глубоких технических результатов этой теории (безотносительно к ее аксиоматическим основам), включая теорию трансфинитных чисел, см. Хаусдорф [GZM] (первое издание содержит материал, не включенный в последующие издания [1]); Камке [MLh], Серпинский [LNT], [CON], Бахман [TZh]. Бо́льшая часть современных исследований в этой теории связана с ролью аксиомы выбора, континуум-гипотезой и предположениями, относящимися к существованию недостижимых чисел; относительная непротиворечивость первых двух предположений является темой работы Гёделя [CAC] [1]).

c. Теории Куайна. Третьей разновидностью исчисления высшего порядка является исчисление, предложенное Куайном. Это исчисление можно рассматривать как синтез теории типов и аксиоматической теории множеств. После ряда работ по теории типов (см., например, [SLg]) и теории множеств (см. ряд статей в *Journal of Symbolic Logic*) Куайн выдвинул в [NFM] весьма радикальное предложение: заменить основное требование самой важной аксиомы теории множеств — аксиомы выделения,— заключающееся в том, что класс, про который утверждается, что он является множеством, является подклассом ранее имеющегося множества, требованием, чтобы свойство, определяющее этот класс, удовлетворяло ограничениям теории типов при некотором возможном распределении типов для элементов этого класса. Куайн называет свойство, удовлетворяющее этому требованию, "стратифицированным" свойством; предложенное им видоизменение формы аксиомы выделения гласит, грубо говоря, что каждое стратифицированное свойство определяет множество. Куайн не разработал детально теорию, предложенную в его работе [NFM]; это было сделано лишь значительно позднее в работе Россера [LMt]. Сам Куайн, введя в теорию еще ряд допущений, изложил усовершенствованный вариант системы в трактате [MLg]. Линдон и Россер (см. Россер [BFP]) нашли в первом издании этой книги противоречие; но его оказалось возможным исправить, и во втором издании противоречий не обнаружено [2]).

Система Куайна имеет ряд странных черт. В отличие от любой из систем аксиоматической теории множеств эта система содержит универсальное множество, а дополнение любого множества также является множеством. В то же время мы спасены от парадокса Кантора (разд. 1B) тем, что класс всех одноэлементных подмножеств любого множества не может считаться множеством, находящимся во взаимно-однозначном соответствии с самим данным множеством. Швейцарский математик Шпеккер изучил систему Куайна; в частности, в своей работе [ACQ] он опроверг аксиому выбора для системы Куайна, описанной в [NFM].

[1]) Но включенный в основном в русское издание 1937 г., хотя перевод делался со второго немецкого издания. — *Прим. ред.*

[1]) А их независимость от других аксиом теории множеств — темой работ П. Дж. Коэна (см., например, его книгу [SCH]).— *Прим. ред.*

[2]) На самом деле устранение противоречия (антиномии Бурали-Форти) было произведено лишь в третьем издании [MLg] (1951); во втором издании (1947) ошибка не была устранена. См. подробнее примечание к стр. 183 русского издания [FST] Френкеля и Бар-Хиллела.— *Прим. ред.*

d. Арифметические системы. В работах, о которых шла речь выше, понятие натурального числа и другие арифметические понятия определяются через понятие множества (или некоторое эквивалентное понятие). Это, как уже отмечалось в разд. D, вообще характерно для логицизма. Обратимся теперь к группе направлений, в которых понятие натурального числа по той или иной причине рассматривается как первоначальное.

Обладая этой общей для всех них особенностью, такие теории в остальном весьма различны. Тут и интуиционистские теории, и теории Гильберта, приводящие к системе Z Гильберта и Бернайса [GLM] и ее обобщениям. Обсуждение современного состояния этих теорий мы отложим до разд. 6. Здесь же коротко расскажем об основополагающих работах — хотя и давних, но все еще заметно влияющих на современные исследования в области оснований математики.

Главным из этих основополагающих исследований была работа Дедекинда [WSW], породившая в известном смысле всю современную рекурсивную арифметику (см. разд. 3S3). Пеано в своей работе "Arithmetices principia" разработал символическую теорию натуральных чисел; в этой работе он отметил, что обязан своими идеями Дедекинду, а также работе Г. Грассмана, опубликованной в 1861 г. Постулаты, установленные Пеано в работах [APN] и [CNm], под именем "постулатов Пеано" вошли неотъемлемой частью в современные учебники по математике. Эти постулаты образуют, например, основу развития арифметики для целей обычной математики (без формализации логики), которая содержится в работе Ландау [GLA]. Гильбертовская система Z состоит по существу в добавлении этих постулатов вместе с рекурсивными определениями суммы и произведения к исчислению предикатов первой ступени (с равенством).

После Пеано следующий важный шаг сделал Сколем [BEA]. В этой статье высказана идея о том, что конструктивная арифметика может быть построена без кванторов. От этой идеи и берет свое начало рекурсивная арифметика (см. разд. 3S3).

К этому направлению можно отнести также работы Лоренцена и Шютте, упомянутые, поскольку в них используются идеи теории типов, или "*Schichten*" [1]), в разд. *a*.

e. Другие направления. Не все направления специальных логических исследований естественно укладываются в схему предыдущих разделов. В самом деле, мы уже отмечали, например, с какой натяжкой относятся к теории типов работы Лоренцена и Шютте. Обратимся теперь к теориям, еще хуже укладывающимся в классификационные рамки.

[1]) Слоев (*нем.*).—*Прим. перев.*

Примером таких теорий служит комбинаторная логика. Фактически она посвящена фундаментальным вопросам, относящимся ко всем направлениям. Теория λ-конверсий Чёрча рассматривается в данной книге как часть комбинаторной логики. Краткое описание и ссылки см. в разд. 3D4 и 3D5.

Беман в своей работе [WLM] высказал идею, согласно которой парадоксы обязаны своим происхождением неустранимым определениям. Система, основанная на этой идее, появилась только через несколько лет в его работе [PKL]. Несмотря на очевидные различия, эта система представляется очень близкой к исчислению λ-конверсий Чёрча. Предложенные впоследствии Аккерманом и Шютте системы логики без теории типов сформулированы (по крайней мере в начальной стадии) под явным влиянием работ Бемана. По поводу этих систем см. работу Шютте [BTh] и сделанные там ссылки.

Другая система логики без теории типов — это "базисная логика" Фитча. Последние публикации об этой системе — работы Фитча [QCF] и [EVE]; в них есть ссылки на предыдущие публикации.

Пожалуй, одну из наиболее тонких систем предложил польский логик Лесьневский (1886—1939). По-видимому, она имела номиналистическую тенденцию. Эта система, однако, очень трудна для понимания. Во всяком случае, единственно доступную из опубликованных работ Лесьневского [GZN] понять нелегко. Никто — если не считать тех, кто имел прямой контакт с автором, — не берется утверждать, что понял эту работу, а изложение взглядов Лесьневского, которое удовлетворило бы всех его учеников, еще не сделано. Информацию о его взглядах можно найти у Слупецкого [SLP], [SLC], [GML] и Гжегорчика [SLR]. Котарбиньский [LPO] дает общий очерк польской логики с акцентом на философские вопросы и почти без технических деталей. См. также Джордан [DML].

Математическая логика начинает непосредственно применяться в ряде областей. Применения к лингвистике будут упомянуты позже (разд. 2S1) при изложении семиотики. Известны также применения к теории электрических сетей, теории автоматов, кибернетике и др.

5. Источники. Эта книга основана на курсе лекций, прочитанных в Университете штата Пенсильвания. Часть ее, относящаяся к генценовским методам, является переработкой [TFD]; чисто алгебраическая часть основана на [LLA], а часть, относящаяся к формальным методам вообще, — на [CLg], гл. 1 и 2. Эти работы содержат и ссылки на источники; что же касается методов, то более полные указания на источники даны в [CLg], разд. 1S1. Поэтому я ограничусь наиболее важными источниками и материа-

лом, появившимся слишком недавно, чтобы быть включенным в предыдущие библиографии, и некоторыми источниками дополнительной информации (см. также разд. 5S1).

По поводу формальных методов вообще следует обратиться к работам Шмульяна [TFS] и Лоренцена [EOL]. Приводимые здесь идеи можно также сравнить с определением понятия "*Kodifikat*" у Шмидта [VAL]. Статьи [CFS], [IFI], [DFS] содержат изложение специальных вопросов, которые будут рассмотрены в соответствующем месте.

Классическим источником, посвященным методам вывода, является работа Генцена [ULS]. Она недавно была переведена на французский язык с краткими примечаниями Фейса и Ладриера [1]). Библиографию и краткие исторические замечания можно найти в [IAL]. Важная информация о методах Генцена содержится у Клини [IMM] (гл. 15 и в меньшей степени гл. 4—8) и [PIG] и у Куайна [MeL], [NDd]; Бернайс [LCl] кратко и неформально излагает T-правила. Такого же рода технику использует Фитч [SLg]. Семантические таблицы Бета являются в некотором отношении усовершенствованием правил Генцена. Эти таблицы описаны в работе Бета [FMt], гл. 8, 11 и 15; по поводу источников см. его [SFF], [SCI]. Немецкие авторы стремятся отказаться от техники Генцена и видоизменить обычные формулировки так, чтобы сохранить выгоды генценовских методов без их формальной техники. Это похоже на попытки развить теорию групп, не вводя абстрактную групповую операцию на том основании, что в любом практическом случае групповая операция может быть определена через другие операции рассматриваемой системы. Другими словами, эти авторы настаивают на интерпретации понятий, которые в этой книге и у Генцена взяты в качестве первоначальных; у этих авторов, конечно, должны быть различные интерпретации для классических и неклассических теорий. С учетом этих оговорок работы Шютте [SVS], [SWK] и Шмидта [VAL] можно считать развитием идей Генцена и даже вкладом в абстрактную теорию вывода. Связь с генценовскими методами — хотя и менее очевидную — можно усмотреть также в работе Шютте [BTh]. Работы Лоренцена (хотя он не склонен упоминать работу Генцена и, похоже, даже не ознакомился как следует с ней) также наводят на размышления по этому поводу. Чёрч [IML_2] посвящает методам вывода лишь несколько упражнений.

По поводу более общепринятой дедуктивной трактовки алгебры высказываний и исчисления предикатов см. особенно Чёрч [IML],

[1]) В числе других основополагающих работ по теории логического вывода эта работа Генцена переведена на русский язык и включена в сборник [МЛВ] под редакцией А. В. Идельсона и Г. Е. Минца.— *Прим. ред.*

Гильберт и Бернайс [GLM], Клини [IMM], Шмидт [VAL]. В первой из этих книг подробно рассматривается одна дедуктивная система и содержится много исторических и критических замечаний о других разновидностях (вплоть до 1951 г.). Монографии Гильберта и Бернайса и Клини посвящены тому, что мы здесь (начиная с гл. 5) называем H-системами; книга Гильберта и Бернайса [GLM] является, по существу, главным источником, содержащим их теории, но в этой книге относительно мало ссылок; книга Клини содержит много позднейших улучшений, показывающих влияние Генцена, и обращает внимание на доказуемость в интуиционистской системе. Книга Шмидта [VAL] является довольно энциклопедическим изложением алгебры высказываний (второй том должен излагать исчисление предикатов); автор, пожалуй, слишком заботился о том, чтобы его книгу можно было читать без карандаша и бумаги; в ней также мало исторического материала. Но книга содержит много информации и подробных доказательств, которые нелегко найти в другом месте. Куайн трактует исчисление высказываний с точки зрения тавтологий, и его книга [MeL] является стандартным образцом такого подхода; его теория кванторов имеет ряд характерных черт, о которых уместно будет сказать позже (гл. 7). По поводу основных эпитеорем исчисления предикатов см. Чёрч [IML_2], Клини [IMM], Гильберт и Бернайс [GLM]; эти эпитеоремы с более элементарной точки зрения трактуются также в книге Гильберта и Аккермана [GZT].

6. Ссылки к гл. 1. Материал, изложенный в разд. A, использовался в течение нескольких лет как введение к курсу, упомянутому в разд. 5; он содержался также в начале работы [LLA].

Литература, относящаяся к парадоксам, весьма обширна. Общее и всестороннее изложение см. Бет [FMt], гл. 17, Френкель и Бар-Хиллел [FST], гл. 1. В последней книге дана (на стр. 16—18 [1])) почти исчерпывающая и классифицированная библиография. Из критической литературы я считаю наиболее возбуждающими мысли работы Стениуса [PLA] и Шпеккера [AML]. Клини ([IMM], § 11 [2])) довольно подробно обсуждает некоторые парадоксы. Кратко говорится о парадоксах в статье Чёрча [PLg]; особенное внимание уделено парадоксу лжеца. Кемпнер [PCS] дает полупопулярную трактовку. Уилдер [IFM] обсуждает парадокс Рассела и его значение для математики; книга эта интересна тем, что автор не является логиком по профессии. О парадоксе лжеца см. Бет [FMt], стр. 485, Френкель и Бар-Хиллел [FST], стр. 11 [3]), Тарский [SCT], [WBF], Бохенский [FLg] (пп. 23—25),

[1]) Стр. 29—30 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) И § 12.—*Прим. ред.*
[3]) Стр. 22—23 русского издания.— *Прим. ред.*

Прайор [ECr], Клини [IMM], стр. 39 [1]), Вейль [PMN], стр. 228, Чёрч [PLg].

По поводу обсуждения природы математики вообще см. Карри [OFP], Клини [IMM], гл. 3, Вейль [PMN], Бет [FMt], ч. V и IX, Френкель и Бар-Хиллел [FST], Уилдер [IFM], ч. II, Блэк [NMt].

О платонистской концепции математики элементарное изложение см. в книге Рассела [IMP]; по поводу дальнейших деталей см. ссылки в разд. 4*a*. Критический комментарий см. также у Бернайса [PMt] и Гёделя [RML], [WIC].

Последним и наиболее авторитетным изложением точки зрения интуиционизма является книга Гейтинга [Int]. Впрочем, автор излагает в основном интуиционистскую математику, мало касаясь более глубоких вопросов философии интуиционизма и его истории. Дополнения см. Гейтинг [CIL], [FMI] (даются история и ссылки, говорится о предшественниках интуиционизма, включая Кронекера, Пуанкаре, Бореля и др.), Брауэр [HBP], Бет [FMt] (гл. 15), Френкель и Бар-Хиллел [FST] (гл. 4). Уилдер [IFM] дает хорошее изложение интуиционистской математики с точки зрения постороннего. Для более глубокого знакомства с философией интуиционизма, вероятно, нужно читать по-голландски; например, понятие временно́й интуиции явно содержится в работе Брауэра [GLW], но, по-видимому, не упоминается в переводах на английский и немецкий языки (см., однако, работу Брауэра [CPM] и цитаты из нее у Бета [FMt], стр. 618). См. также Вейль [PMN], который занимает позицию, промежуточную между интуиционизмом и гильбертовским формализмом, обнаруживая глубокое понимание взглядов обеих школ.

Краткое резюме работ и позиции Гильберта см. у Бернайса [HGG], Вейля [DHM], стр. 635—645; ср. также Гейтинг [FMI], стр. 37—60. Образцовой классической работой в этой области является монография Гильберта и Бернайса [GLM] (закончена Бернайсом). Не́которые из логических статей Гильберта были помещены в третьем томе Гильберта [GAb], а также в его [GLG_7]; однако при перепечатке некоторые места были опущены. Работу Шютте [BTh] можно рассматривать как продолжение программы Гильберта в одном из нескольких возможных направлений. См. также Крайзель [HPr].

Несколько и́ные оттенки формализма представлены Гудстейном [CFr], [NMS] и Лоренценом [EOL], [LRF].

По поводу теоремы Гёделя и семантических результатов, упомянутых в конце разд. C, см. разд. 3S1.

Изложение трех уровней абстракции в конце разд. C3 основано на работе Шанина [ЛПА]. По поводу номиналистских взглядов

[1]) Стр. 41—42 русского издания.— *Прим. ред.*

см. Бет [FMt], гл. 16 и ссылки, приведенные там, а также Гилмор [AST].

Изложение взаимоотношения между логикой и математикой в разд. D является пересмотренным вариантом изложения автора [OFP], гл. 12; дополнительно укажем Рассела [PMt], особенно введение ко второму изданию. О возможности иных логик см., например, Чёрч [LEM], Льюис [ASL].

Термин 'финитный' (*англ.* 'finitary'), использованный в разд. C1 при описании конструктивных методов, был введен Клини [IMM], стр. 63 [1]), как перевод немецкого 'finit'.

[1]) Стр. 61 русского издания.— *Прим. ред.*

Глава 2

ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В предыдущей главе изложение намеренно велось на интуитивном уровне. В связи с этим такие термины, как 'формальная теория', 'математическая система', 'приемлемо' и т. д., употреблялись в неформальном смысле, который считался сам собою разумеющимся. В данной главе, специально посвященной рассмотрению формализмов, все такого рода термины будут формально определены, после чего — за немногими (оговоренными позже) исключениями — они будут употребляться лишь в соответствии с этими формальными определениями.

Мы начнем в разд. А с общих рассмотрений предварительного характера. В разд. В мы определим "теорию" как класс утверждений и рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к этому понятию в его наиболее общей форме. В разд. С мы определим систему как теорию, элементарные утверждения которой относятся определенным образом к "формальным объектам". Специализацией этих понятий мы будем заниматься в разд. D. Наконец, в разд. Е излагается понятие алгорифма, принадлежащее А. А. Маркову; оно позволит нам уточнить ряд понятий, введенных в разд. А, и для этой цели кажется удобнее других эквивалентных ему понятий.

А. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

В этом разделе мы займемся рядом вопросов, касающихся использования языка, а также объяснением формальной терминологии, которая будет употребляться на протяжении всей книги. Некоторые из этих терминов уже употреблялись в неформальном смысле, который не всегда в точности совпадает с формальным. Формальный смысл следует рассматривать как уточнение неформального. Другие термины, например 'теория', 'система', будут уточнены позже.

1. U-язык. Результаты любого исследования (в том числе и настоящего) одни люди сообщают другим посредством языка. Уместно с самого начала обратить внимание читателя на этот очевидный факт, дать имя используемому языку и точно

выяснить некоторые его черты. Мы назовем этот используемый язык U-*языком*.

Невозможно исчерпывающе описать U-язык. Все, что мы можем сказать об этом языке, — это то, что он содержит совокупность языковых правил, которые мы понимаем в данный момент. Это может показаться туманным, но в этой туманной области мы чувствуем себя не хуже, чем в любой другой области знания. Любое научное исследование связано с той же неопределенностью. Поэтому не стоило бы обращать внимание на это обстоятельство, если бы в действительности язык не был ближе к нашей работе, чем к другим областям. Мы не утверждаем, что мысль возможна без языка, и поэтому мы с самого начала обязаны обратить некоторое внимание на U-язык. Но так как мы не можем исчерпывающе описать его, то мы можем лишь описать некоторые из его черт и явно оговорить случаи, таящие в себе опасность неправильного понимания.

U-язык имеет следующие черты: (1) Он для каждого конкретного контекста единственен: если бы нам и пришлось говорить о нескольких различных U-языках, то все равно мы пользовались бы лишь одним из них и этот язык был бы U-языком; о других мы только говорили бы и поэтому никакой из них не был бы U-языком. (2) Он содержит формальную терминологию и другие лингвистические средства — такие, как использование букв для обозначения переменных, — которые обычно понимаются математиками при соответствующей степени подготовленности. (3) Он не является неизменным, но постоянно находится в процессе развития; время от времени мы можем вводить новые термины и новую символику; точно так же мы можем соглашаться использовать старые термины в новом смысле или же отказаться от них вообще. (4) Хотя U-язык прежде всего по необходимости довольно неясен, все же при аккуратном употреблении мы можем достичь любой разумной степени точности — так же как мы можем измерять длину с точностью до миллионных долей дюйма, используя последние достижения человеческих рук и человеческого разума. Абсолютная точность недостижима в области измерений; не нужно предполагать, что ее можно достигнуть и при использовании U-языка.

Изложение парадоксов в разд. 1В, которое производилось на U-языке, привело многих к утверждению, что U-язык противоречив. Так и будет, если его использовать неосторожно, а неосторожность обычно вызывает неприятности в любом виде деятельности. Изложение платонизма в разд. 1С1 показывает, что можно избежать парадоксов, если употреблять слово 'утверждение' с определенными предосторожностями. Точной природой этих предосторожностей мы займемся позднее. Пока будет достаточно

сказать, что мы используем U-язык для описания определенных, более или менее конкретных видов деятельности и для вывода некоторых следствий из этого описания с помощью финитных конструктивных процессов, вроде тех, которые допускались Гильбертом. Интуитивная убежденность в том, что на этом пути не возникнет никаких противоречий, на самом деле очень сильна; вопрос о том, достигнет ли эта убежденность степени абсолютной уверенности, оставляется на усмотрение читателя [1]).

2. Языки и выражения. В недавние годы одна школа мыслителей утверждала, что многие проблемы можно решить или по меньшей мере прояснить, критически рассматривая язык, на котором они выражены. Это утверждение вызвало к жизни целую науку о символах, которая была названа *семиотикой*. Определенная терминология, возникающая из этой науки (или предлагаемая ею), будет введена здесь для использования в дальнейшем. Позднее будут введены и другие термины этого рода; здесь мы ограничимся несколькими терминами, которые будут использованы непосредственно в этой главе.

Основным понятием семиотики является понятие *языка*. Язык в наиболее общем смысле этого слова определяется двумя видами соглашений. Во-первых, фиксируется *алфавит*, т. е. определенный набор объектов, называемых *символами* (или *буквами*), которые можно воспроизводить в неограниченном количестве, подобно обычным печатным буквам или фонемам речи. Во-вторых, существуют правила, указывающие, как из букв можно образовать определенные комбинации, называемые *выражениями*, или *словами* [2]). Обычно выражения представляют собой произвольные линейные последовательности букв, в которых могут быть повторения одной и той же буквы; в этом случае язык называется *линейным*. Скажем, в линейном языке, алфавит которого состоит из трех букв

$$a, \quad b, \quad c$$

примерами выражений будут

$$a, \quad abcba, \quad bcccaa, \quad abcbabcccaa$$

В этом семиотическом понятии языка безразлично, используется ли язык с целью общения между людьми; если он используется таким образом, то мы назовем его *коммуникативным языком*. Язык в обычном лингвистическом смысле мы будем называть *естественным языком*.

[1]) Ср. замечания в конце разд. 1С3.

[2]) В некоторых контекстах термин 'слово' будет употребляться вместо 'выражение'. Однако этого нельзя делать всегда, так как термин 'слово' может употребляться и неформально, что может привести к коллизии с формальным употреблением.

Термины 'буква', 'символ' и 'выражение' осмыслены для любого языка, естественного и искусственного. В частности, они осмыслены для U-языка. Для этих и других семиотических терминов мы будем использовать букву 'U', чтобы указать, что они относятся к U-языку; поэтому у нас могут быть U-символы и U-выражения. Очевидно, U-язык является коммуникативным языком, который понимают как автор, так и читатель; это язык, которым действительно пользуются.

Из вышеизложенного очевидно, что выражения (включая символы) являются не единичными конкретными физическими объектами, но типами, или видами, таких объектов в том же смысле, как яблоки, деревья, люди, которые могут встречаться во многих экземплярах. Индивидуальные знаки на бумаге, которые представляют собой экземпляры выражений, мы будем называть *инскрипциями* [1]). При более номиналистическом подходе понятие инскрипции было бы фундаментальным и мы говорили бы об *эквиморфных* (имеющих одну и ту же форму) инскрипциях, а не об инскрипциях, являющихся экземпляром одного и того же выражения. Но более удобно вводить выражения и говорить об одном и том же выражении, а не об эквиморфности инскрипций. Итак, мы осуществляем первую из двух абстракций, упомянутых в разд. 1С3; мы осуществляем также вторую абстракцию, так как предполагаем, что выражения могут быть любой длины. По-видимому, было бы нетрудно преобразовать сказанное здесь так, чтобы не использовать этих абстракций, но мы здесь не будем пытаться делать это [2]).

Иногда мы желаем говорить о выражениях как об объектах. Для этих целей нам нужны имена для выражений. Конечно, можно было бы использовать само выражение в качестве своего имени; этот способ, который известен под названием *автонимного способа речи*, особенно выгоден, когда упоминаемое выражение не употребляется в U-языке, например когда говорят, что греческое слово $\widehat{\sigma\eta\mu\alpha}$ означает 'знак'. С другой стороны, если это не так, то существует некоторая опасность смешения упоминания выражения с его обычным использованием.

Скажем, могло бы возникнуть искушение вывести из предложений

Джон рыжеволос
Джон есть имя из четырех букв

заключение о том, что некоторое имя из четырех букв имеет рыжие волосы. В первом предложении некоторое собственное имя

[1]) Этот термин первоначально относился к письменным языкам, но в несколько расширительном смысле его можно применять и к устной речи.

[2]) Задача эта, однако, по меньшей мере не тривиальна.— *Прим. ред.*

используется для обозначения некоторого человека, во втором это имя лишь упоминается. Чтобы избежать этой опасности, в качестве имени выражения используют экземпляр самого этого выражения, заключенный в кавычки. Так как это более формальное использование кавычек, то для этой цели мы берем *одинарные кавычки*, употребляя обычные *двойные кавычки* для всех иных способов использования кавычек в U-языке. При таком понимании именем из четырех букв будет 'Джон', а не Джон. Это соглашение весьма удобно; оно уже использовалось несколько раз в данной работе и будет постоянно использоваться в будущем в тех случаях, когда контекст или иные соглашения U-языка не сделают этого излишним [1]).

Только что описанная система обозначений не застрахована от опасностей неумелого обращения [2]). Ведь выражение, заключенное в кавычки, является неделимой единицей в U-языке — если угодно, новым символом, — и подстановки, обычно производимые на место определенных букв и выражений U-языка, не могут осуществляться внутри кавычек. Когда нужны такие "кавычечные функции", требуются дополнительные средства. Они иногда будут вводиться в связи с объяснением обозначений. В таких случаях трудностей, вообще говоря, можно избежать, используя подходящим образом выбранное выражение U-языка; например, когда мы желаем ввести имя 'Джон Доу' (которое ранее не встречалось в том же контексте) для человека, описанного некоторым образом, мы говорим просто "Джон Доу есть человек, который...", а не "'Джон Доу' есть имя человека, который...". Так мы вводим новое имя без кавычек, что позволяет пользоваться обычными правилами U-языка по отношению к переменным [3]).

[1]) Так будет, в частности, тогда, когда упоминаемое выражение выделяется в отдельную строку. В ряде примеров, связанных с глаголами вроде 'называть', я не буду пытаться придерживаться строго единообразного употребления.

[2]) См. упражнение 2 в конце этого раздела.

[3]) Ср. "квазикавычки" Куайна ([MLg], разд. 6). Куайну требовалось это средство, потому что он должен был упоминать выражения в своих формальных рассуждениях. У нас этого нет, и употребление, принятое в тексте, обычно достаточно ясно. Для тех редких случаев, когда желательно выражаться более явно, мы используем следующий способ речи:

Выражение вида A, где a_1, a_2, ... суть ...

где вместо 'A' подставляется имя некоторого выражения B, а вместо 'a_1', 'a_2', ... — имена букв b_1, b_2, ..., входящих в B. После этих подстановок следует принять некоторые соглашения, позволяющие обозначать окончательные выражения, полученные подстановкой выражений, удовлетворяющих установленным условиям, вместо букв b_1, b_2, ... в B. Ряд деталей и вариаций вполне можно предоставить здравому смыслу читателя.

Иногда мы хотим говорить о каком-либо языке L_1 на каком-нибудь другом языке L_2. В таком случае L_1 обычно называют *языком-объектом* (или *предметным языком*), а L_2 — *метаязыком*. Не исключено, что L_1 и L_2 могут перекрываться. Обычно язык-объект будет определенной, обусловленной специальным соглашением частью U-языка, а метаязык — остающейся после удаления L_1 частью U-языка. Но иногда нам может понадобиться говорить о двух языках L_1 и L_2, относящихся друг к другу как язык-объект и метаязык соответственно; в этом случае мы используем третий язык L_3, обычно называемый *метаметаязыком*. Таким путем мы можем образовывать иерархии языков с любым числом уровней. Однако независимо от того, сколько существует уровней, U-язык будет наивысшим уровнем: если существуют два уровня, то U-язык будет метаязыком; если три уровня — то метаметаязыком и т. д. В последнем случае термины 'U-язык' и 'метаязык' нужно различать [1]).

3. Грамматика. Если мы изучаем коммуникативный язык с точки зрения значения, которое он передает, то выражения языка не образуют естественного класса символических комбинаций. Гораздо важнее другой класс комбинаций, образующих объекты, к которым применяются правила построения предложений. Мы назовем изучение правил, определяющих предложения языка, его *грамматикой*, а комбинации символов, образующие грамматические единицы, — его *фразами*. Скажем, в предложении

Джон носил и серый, и черный костюмы

части

носил и
кост
носил и сер

являются выражениями, а части

Джон
и серый, и черный...
и — — — и...

— фразами (точки и черточки в последних двух примерах обозначают места, которые должны быть заполнены). Первые примеры показывают, что не все выражения являются фразами, последние — что не все фразы являются выражениями.

Существует три основных класса фраз, а именно, имена, предложения и функторы. *Имя* называет некоторый объект (действительный или воображаемый); *предложение* выражает утверждение, а *функтор* есть средство соединения фраз для образования других фраз. Мы назовем имена и предложения *замкнутыми*

[1]) Ср. [LMF], разд. II; см. также разд. S4.

фразами, чтобы отличить их от функторов. Что касается функторов, то фразы, соединяемые функтором, мы будем называть его *аргументами*, а результат соединения — его *значением*. Функторы, очевидно, можно классифицировать по числу и виду их аргументов, а также по характеру значений. Например, если некоторый функтор соединяет m аргументов типов $X_1, X_2, \ldots, X_m$ соответственно, чтобы образовать значение, принадлежащее типу Y, то мы скажем, что он принадлежит типу

$$\mathsf{F}_m X_1 \ldots X_m Y$$

Такие "типы", образованные из базисных типов n (noun [1]) и s (sentence [2]) с помощью "операторов функциональности" F_n, мы будем называть *грамматическими категориями* [3].

Чтобы добиться полной общности, мы должны допускать функторы, аргументами которых также служат функторы; много примеров таких функторов имеется в лингвистике. Что касается значения, то заметим, что

$$\mathsf{F}_1 X(\mathsf{F}_1 YZ), \qquad \mathsf{F}_3 UVW(\mathsf{F}_2 XYZ)$$

являются теми же самыми категориями, что и соответственно

$$\mathsf{F}_2 XYZ, \qquad \mathsf{F}_5 UVWXYZ$$

и т. д. Мы можем поэтому сделать следующее: или (1) потребовать, чтобы $m = 1$, но допускать, чтобы значение функтора было функтором, так что в результате мы определим все F_m через F_1, или (2) допускать функторы с любым числом аргументов, но потребовать, чтобы значение было замкнутым, и в этом случае мы говорим о значении как о *замыкании*. По первому пути обычно идут в лингвистике и на нем основано сведéние к одной операции, которое будет рассмотрено позднее (в разд. 2D2); второй путь соответствует духу обычной математики, и именно его мы примем. В соответствии с этим значение функтора впредь будет называться его *замыканием*, а число аргументов, которое теперь определено однозначно, — его *степенью*. Функторы степени m мы будем называть *m-местными*, или *m-арными*; при $m = 1$ и $m = 2$ мы будем ниже соответственно пользоваться терминами 'унарный' [4] и 'бинарный'.

Предыдущее изложение грамматики является, конечно, очень эскизным. Для адекватной грамматической теории естественного

[1]) Имя.— *Прим. ред.*

[2]) Предложение.— *Прим. ред.*

[3]) По поводу примеров фраз из обычного английского языка и математики см. [LAG], разд. 6, а также [CLg], стр. 264 и 274, и [TFD], разд. 15.

[4]) Некоторые авторы предпочитают термин 'сингулярный'. О причинах, по которым мы предпочитаем термин 'унарный', см. в конце [rev. C] и исправление в [DFS], сноска 4.

языка нам нужно было бы иметь несколько видов имен, а может быть, и предложений. Но категории n (имя) и s (предложение) дают нам базис, который подходит для большинства целей; необходимые уточнения будут вводиться по ходу дела.

Основные виды функторов, которые встречаются в нашей работе, следующие: *операторы*, преобразующие имена в имена, *глаголы*, или *предикаторы*, преобразующие имена в предложения, *коннекторы*, преобразующие предложения в предложения, и *субнекторы*, преобразующие предложения в имена. Удобно также иметь термины, указывающие на значения этих фраз, и говорить, что такая-то фраза имеет такое-то значение (или *десигнат*). Термины, используемые для этой цели, приведены в следующей таблице:

Фраза	*Десигнат*
Фраза	Десигнат, элемент
Имя	Объект, об
Предложение	Высказывание
Клауза [1])	Утверждение [1])
Функтор	Функция
Оператор	Операция
Глагол (предикатор)	Глагольная [2]) функция (предикат)
Коннектор	Союз
Субнектор	Субнекция

Использование этой двойной терминологии не предполагает обращения ни к какой философии, постулирующей существование этих значений как каких-то сверхъестественных сущностей таинственной природы. По сути дела это употребление можно рассматривать как чисто риторическое. Можно, например, рассматривать высказывание как класс предложений, в некотором смысле эквивалентных друг другу, точно так же как выражения являются классами эквиморфных инскрипций. Однако так как я не даю способа судить о том, когда предложения эквивалентны, — другими словами, не даю критерия тождественности высказываний, — то читатель свободен интерпретировать отношение обозначения любым способом, которым он желает, например вообще не различать предложения и высказывания. Удвоение терминов имеет ту выгоду, что оно не связывает нас ни с каким конкретным видом философии; оно вводит, так сказать, свободный параметр, который можно приспособить так, чтобы удовлетворить различным философским предрассудкам. Туманное указание, которое оно дает об уровне абстракции, все же, пожалуй, лучше, чем ничего: оно хотя бы дает пищу для размышлений.

[1]) См. гл. 5

[2]) См. разд. 7A3.

В качестве общего соглашения U-языка мы примем, что фраза, которая грамматически не является именем, может иногда использоваться в номинальном контексте как имя для своего десигната. Этим условием нам иногда придется пользоваться.

4. Обращение с функторами. Здесь будет установлен ряд правил довольно специальной природы, относящихся к обращению с функторами. Изложение ведется на формальном уровне и может быть пропущено до тех пор, пока оно не потребуется.

Для упоминания функторов нужны обозначения, столь же эффективные, как кавычки для упоминания выражений. Так как по определению функторы являются способами комбинации, то выделение функтора будет неполным, пока не будет показано, как получить замыкание из аргументов функтора. Для этого требуются пробелы или иные способы указания мест, на которые должны быть поставлены аргументы, а также должен быть указан порядок заполнения этих пробелов. Для этой цели мы будем пользоваться черточками с числовыми индексами. Скобки для указания содержимого аргументов должны считаться частью функтора. Поэтому полным обозначением для оператора сложения будет '$(-_1) + (-_2)$'.

Однако данная система обозначений сложнее, чем это необходимо для большинства целей. Многие функторы принадлежат к одному из следующих трех типов: *префиксы*, которые пишутся перед аргументами, *инфиксы* — бинарные функторы, которые пишутся между аргументами, и *суффиксы*, которые пишутся после аргументов. Префиксы и суффиксы могут иметь любую степень; можно показать, что, если за каждым префиксом и суффиксом закрепить постоянную степень, то можно обойтись без скобок [1]). Инфиксы требуют скобок; общепринятые правила употребления скобок, предусматривающие, в частности, возможность опускать лишние скобки, мы будем считать известными. В соответствии со сказанным достаточно рассматривать функторы этих трех типов как простые символы. Такой простой символ будет называться *аффиксом*. Когда такой аффикс употребляется как имя без кавычек, его следует понимать как имя для функции; с кавычками аффикс, конечно, является именем самого функтора.

[1]) Этот результат получил Я. Лукасевич, польский логик (1878—1956), который долгое время был профессором философии Варшавского университета. Он известен своими работами по многозначным логикам и по истории логики. Краткий обзор его работ см. у Мостовского [OSJ], а также (менее популярно, но более детально) у Борковского и Слупецкого [LWJ], Котарбиньского [JLW], Шольца [MJL], Собоциньского [MJL]. Библиография работ Лукасевича появилась также в *Studia Logica*, 5, стр. 9—11, и 8, стр. 63. О происхождении его системы обозначений см. Борковский и Слупецкий [LWJ], стр. 24. Эта система обозначений более полно излагается дальше.

Другим примером, когда уместна сокращенная система обозначений, является обычное для математики понятие функции. В этом случае полное обозначение имело бы вид '$f(-_1, -_2, \ldots, -_n)$', где 'f' — буква (или слово, выступающее в роли буквы), но если нет опасности путаницы (обусловленной какими-нибудь особыми обстоятельствами), то достаточно использовать функциональную букву (т. е. то, что здесь обозначено через 'f') без кавычек как имя для функции и в кавычках как имя для функтора [1]).

Специальные функторы. В следующей таблице приводится для ссылок список функторов, которые будут употребляться в формальном смысле. Здесь в первом столбце приводится аффикс, во втором столбце — его значение (или схема перевода для его замыкания), а в третьем столбце — место в книге, где он вводится или где можно найти дальнейшую информацию.

Бинарные инфиксные коннекторы

$\rightarrow$	Если $-_1$, то $-_2$ (или: $-_1$, только если $-_2$)	§ 3A2 [2])
$\rightleftarrows$	$-_1$ тогда и только тогда, когда $-_2$	
или	$-_1$ или $-_2$	§ 3A2
&	$-_1$ и $-_2$	§ 3A2

Бинарные инфиксные глаголы

$\equiv$	$-_1$ есть то же самое (по определению), что $-_2$	§ 3C3
$=$	$-_1$ равно $-_2$	
$\leqslant$	$-_1$ предшествует $-_2$	
$\subseteq$	$-_1$ включено в $-_2$	§ 2B1

Унарные глаголы

$\vdash$	— утверждается	§ 2D1
$\dashv$	— отвергается	§ 6A3

Бинарные инфиксные операторы

$\supset$	$-_1$ (им)плицирует $-_2$	(операция (им)пликации)	§ 4C1
∞	$(-_1 \supset -_2) \wedge (-_2 \supset -_1)$	(операция эквиваленции)	§ 4D3
$\vee$	$-_1$ ad $-_2$	(сложение, дизъюнкция)	§ 4A1
$\wedge$	$-_1$ con $-_2$	(умножение, конъюнкция)	§ 4A1

Унарные операции

$\neg$	(операция отрицания)	§ 6A3
$\Box$	(операция необходимости)	§ 8A2

[1]) Это правило и аналогичное правило в конце предыдущего абзаца являются специальными случаями общего правила из конца разд. 3.

[2]) Этот инфикс употребляется в теории алгорифмов (разд. 2E) в ином смысле.

Точечная система обозначений. Когда посредством итерации такого рода функторов образуются сложные фразы, число скобок может оказаться столь большим, что полученное выражение трудно читать. Чтобы облегчить чтение в этом случае, были предложены многочисленные средства, из которых мы уже упоминали исключение лишних скобок. Одно из таких средств известно как точечная система обозначений, которая используется довольно широко. Она объясняется следующим образом.

Основная идея здесь состоит в том, что скобки заменяются группами точек так, что более внешним скобкам соответствует большее число точек, и в том, что левая и правая скобки различаются по их положению по отношению к соответствующему аффиксу. Тогда сразу же можно увидеть, где находятся главные знаки операций, и структуру фразы можно легче представить. К сожалению, когда пытаются точно установить правила для этой системы обозначений, то обнаруживают, что это довольно сложное дело, и поэтому многие авторы избегают этой системы обозначений [1]). Однако у нее есть ряд преимуществ; поэтому мы будем ее использовать — правда, довольно умеренно — в тех местах книги, где придется рассматривать формальные вопросы.

Желательно так изменить эту систему обозначений, чтобы включить стандартные правила опускания скобок и чтобы эта система более соответствовала обычному употреблению скобок. Измененные правила таковы.

Группу точек по обе стороны бинарного инфикса или с правой стороны унарного префикса мы будем называть *пунктом* (не исключается возможность того, что число точек равно нулю). Пункт, стоящий справа от аффикса, мы будем называть *правым пунктом*; пункт, стоящий слева, — *левым пунктом*; начало и конец всего выражения также будут правым и левым пунктами соответственно. Эти пункты будут располагаться в порядке старшинства согласно правилам, которые сейчас будут приведены. Каждый пункт указывает, что аргумент с соответствующей стороны аффикса должен распространяться от этого пункта в указанном направлении до ближайшего старшего пункта противоположного направления. Так определенное выражение будет называться *областью действия* пункта. Отношение старшинства должно быть транзитивным отношением, порожденным следующими правилами, причем правило, стоящее в этом списке раньше,

[1]) Систему обозначений Лукасевича (см. сноску на стр. 64) гораздо легче описать и трактовать теоретически, но она никоим образом не легче и для ее чтения требуется значительная практика. Можно использовать точки для того, чтобы облегчить эту систему обозначений, но это не было сделано (ср., однако, использование пустых промежутков в книге Бохенского [NLL]).

применяется (если это возможно) до любого правила, стоящего позже: (1) начало и конец всего выражения старше любого пункта внутри этого выражения; (2) пункт, относящийся к коннектору, старше пункта, относящегося к глаголу; (3) пункт, относящийся к глаголу, старше пункта, относящегося к оператору; (4) пункт с бо́льшим числом точек старше пункта с меньшим числом точек; (5) пункт, относящийся к функтору, стоящему раньше в таблице разд. 3, старше пункта для функтора, стоящего в этой таблице позже; (6) левый пункт старше правого пункта (правило группировки влево).

Применяя эти правила в случаях, когда имеются скобки, следует трактовать выражения, заключенные в скобки, как некие единицы. Если дана пара соответствующих друг другу скобок, то выражение внутри их является "целым выражением" для любого пункта внутри его, и область действия любого пункта вне пары скобок либо содержит всю "единицу", либо не содержит ее совсем.

Эти правила были установлены в предположении, что никакой пункт не содержит в своей области действия старшего пункта того же направления [1]). Можно было бы установить более сложные правила, допускающие такую возможность, но удобства точечной системы обозначений при этом потерялись бы. На практике мы достигаем большей ясности, используя больше точек, чем это строго необходимо, и разумно комбинируя точки с явными скобками, так что старший пункт в формуле можно увидеть сразу.

Легко изменить правила так, чтобы включить сюда случай, когда простое расположение рядом двух объектов используется как бинарный функтор, как при умножении в обычной алгебре. В этом случае никакого аффикса нет. Мы можем, однако, предположить, что имеется фиктивный аффикс и что пункты с обеих его сторон содержат одно и то же число точек; тогда аффикс и одну из точек можно удалить. Оставшийся пункт нужно рассматривать как левый и правый пункты одновременно.

5. Процессы и классы. Кроме более или менее символических соглашений, которые мы только что рассмотрели, необходимо разъяснить некоторые термины, относящиеся к более логически устроенной части U-языка. Это термины, с которыми читатель уже знаком; цель данного рассмотрения — не определить их формально,

[1]) Однако правила допускают в этом случае пункты, стоящие внутри некоторого пункта того же старшинства. Поэтому мы можем интерпретировать

$$A_1 \supset . A_2 \supset . \ldots \supset . A_n \supset B$$

для любого значения n.

но уточнить их употребление. Мы рассмотрим здесь понятия эффективного процесса, определенного вопроса и класса (совокупности).

Эффективный процесс. Предположим, что мы имеем определенные преобразования, которые можно фактически производить над определенными элементами. Предположим, что у нас есть предписание, определяющее последовательность преобразований, которые надо применять одно за другим к какому-то элементу. Будем говорить, что предписание определяет эффективный процесс для достижения определенной цели по отношению к элементу, если при условии, что этот элемент задан, предписание однозначно определяет такую последовательность преобразований, что цель достигается за конечное число шагов. Никогда не должно быть неопределенности, решение которой требует бесконечного числа возможностей. Поэтому понятие эффективного процесса родственно понятию конструкции в интуиционистском значении этого слова, но понятие эффективного процесса сохраняет всю строгость гильбертовской финитистской позиции и не зависит от какой-либо идеалистической интуиции, будь то интуиция времени или какая-нибудь иная.

Обычно предписание определяет эффективный процесс одновременно для многих элементов, т. е. процесс определен в общих терминах, включающих параметры. В таких случаях элементы, для которых определены преобразования, называются *допустимыми элементами*. Тогда описание процесса должно быть таким, чтобы мы совершенно определенно знали следующее: (1) является ли данный элемент допустимым; (2) если дан допустимый элемент, то какое именно преобразование следует применять и каков будет его результат; (3) когда достигнута цель? Тогда если дан допустимый элемент, то для этого элемента процесс будет эффективным, если мы дополнительно знаем, что цель действительно достигается в конечное число шагов. В таких случаях мы скажем, что предписание определяет *эффективный процесс* и что этот процесс *применим* к тем элементам, для которых он действительно является эффективным в смысле предыдущего абзаца.

Примером таких процессов являются нормальные алгорифмы Маркова, которые мы изучим в разд. 2Е. Здесь допустимые элементы являются выражениями в языке с конечным алфавитом; они, очевидно, удовлетворяют условию (1). Наконец, признаком достижения цели является выполнение одного из определенных специально указанных преобразований или, в некоторых случаях, получение элемента, для которого никакое дальнейшее преобразование не определено. Очень многие виды эффективных процессов можно осуществить такими алгорифмами; есть эвристические доводы для утверждения о том, что все эффективные процессы можно осуществить с их помощью.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что "преобразование" является функцией одного аргумента. Понятие эффективного процесса можно распространить на случай, когда результат преобразования определяется двумя или более элементами. В действительности этот случай можно свести к предыдущему, принимая упорядоченные последовательности элементов за новые элементы.

Определенные вопросы. Будем говорить, что вопрос является определенным, если на него можно ответить утвердительно или отрицательно и существует эффективный процесс для нахождения такого ответа. Поэтому такой вопрос относится к истинности некоторого определенного высказывания, причем это высказывание в этом случае является элементом, с которого начинается процесс.

Это понятие можно распространить на одновременное рассмотрение допустимых высказываний точно так же, как в случае эффективного процесса. Нам приходится иметь дело с процессом, элементами которого являются определенные высказывания, а целью — установление их истинности или ложности. Вопрос является *определенным*, если существует такой эффективный процесс, применимый к каждому допустимому высказыванию. Если существует эффективный процесс, который применим всегда, когда допустимое высказывание истинно, то вопрос называется *полуопределенным* [1]).

В этих определениях, по-видимому, имеется некоторый круг. Мы позднее вернемся к обсуждению этого вопроса. Пока же заметим лишь, что вопрос о том, применим ли эффективный процесс к данному элементу, всегда является полуопределенным и может как быть, так и не быть определенным.

Концептуальные классы. Мы часто должны будем формулировать посредством U-языка свойства (или отношения), которые определяют чисто интуитивным (содержательным) путем совокупность элементов или понятий. Чтобы отличить такие интуитивные совокупности от "множеств" или "классов", вводимых на более поздних стадиях [2]) (и понимаемых скорее как

---

[1]) Например, если α — рекурсивное множество натуральных чисел. то вопрос о том, принадлежит ли натуральное число n множеству α, является определенным; если α — рекурсивно-перечислимый класс, то тот же самый вопрос является полуопределенным. Допустимыми элементами являются высказывания о том, что некоторое определенное число принадлежит α.

[2]) Изучения логики (например, в теории множеств), но не в этой книге.

объекты некоторого теоретического изучения, чем как интуитивные понятия), мы назовем их *концептуальными классами* (или отношениями). Элементы, которые можно рассматривать как члены таких классов, мы будем называть допустимыми элементами.

Будем говорить, что концептуальный класс является определенным, если вопрос о том, принадлежит ли допустимый элемент этому классу, является определенным. Подобным же образом мы будем говорить о концептуальном классе как о полуопределенном, если соответствующий вопрос о принадлежности этому классу является полуопределенным.

Индуктивный класс представляет собой концептуальный класс, который порожден из определенных исходных элементов рядом выделенных способов комбинации [1]). Точнее это значит следующее. Пусть $\mathfrak{X}$ — рассматриваемый класс. Тогда $\mathfrak{X}$ определен двумя видами правил, называемых *начальными правилами* (I) и *правилами порождения* (II). Начальные правила определяют *начальные элементы*; последние образуют определенный класс, скажем $\mathfrak{B}$, часто называемый *базисом* $\mathfrak{X}$. Правила порождения определяют фиксированный — обычно, но не обязательно, конечный — класс способов комбинации, скажем $\mathfrak{M}$; с каждым таким способом μ связывается определенное число, называемое его степенью; это значит, что применение любого такого способа μ степени n к последовательности n аргументов, каждый из которых является элементом $\mathfrak{X}$, дает элемент $\mathfrak{X}$; далее предполагается, что вопрос о том, получается ли элемент описанным выше способом из данных аргументов, является определенным. Предполагается также, что каждый элемент $\mathfrak{X}$ может быть получен с помощью эффективного процесса (в обобщенном смысле), который начинается с определенных начальных элементов и на каждом шаге которого способ комбинации из $\mathfrak{M}$ применяется к уже построенным аргументам. Это требование, часто называемое *правилом замыкания*, следует понимать как часть определения индуктивного класса, и поэтому не обязательно формулировать его явно в определении конкретного $\mathfrak{X}$.

Иногда определение индуктивного класса $\mathfrak{X}$ формулируют следующим образом. $\mathfrak{X}$ есть класс, определенный перечисляемыми ниже тремя свойствами: (1) $\mathfrak{X}$ включает в себя базис; (2) $\mathfrak{X}$ замкнут относительно способов комбинации; (3) $\mathfrak{X}$ есть подкласс любого класса, удовлетворяющего условиям 1 и 2. Из этого определения не видно, что $\mathfrak{X}$ есть совокупность элементов,

[1]) Термин 'способ комбинации' предполагает, что мы имеем дело с функциями любого числа аргументов. Не исключена возможность того, что имеется всего один аргумент.

которые можно получить из исходных элементов итерациями способов комбинации. Это определение носит поэтому платонистский характер, что, с нашей точки зрения, вызывает возражения.

В предыдущем изложении не требовалось, чтобы существовало не более одного элемента, полученного из данных элементов $Y_1, \ldots, Y_n$ с помощью некоторого способа комбинации. Это условие, однако, выполняется во многих интересных случаях. В случае когда способ комбинации удовлетворяет этому условию, он будет называться *детерминативным*.

Понятие индуктивного класса может употребляться в любом из следующих двух случаев (и, возможно, в других): (1) элементы являются объектами, а способы комбинации — операциями; (2) элементы являются высказываниями, а способы комбинации — связками.

При некоторых ограничениях ниже (в разд. 6) будет показано, что индуктивный класс всегда является полуопределенным. При особых обстоятельствах он бывает и определенным, но во многих интересных случаях это не так.

Для некоторых целей (например, там, где не нужно придерживаться строго конструктивной точки зрения) может оказаться выгодным как-нибудь ослабить требование определенности в определении индуктивного класса. В этом случае мы можем говорить об "обобщенном индуктивном классе" или, может быть, о "полуиндуктивном классе".

Остается прокомментировать явный круг в вышеприведенном изложении. Этот круг действительно возникает, так как в условии (1) для эффективного процесса мы фактически сказали, что допустимые элементы образуют определенный (концептуальный) класс, тогда как понятие определенного класса зависит от понятия эффективного процесса. Это снова возвращает нас к заключению, что эти термины не определяются формально. Мы должны в действительности начинать с некоторого исходного класса допустимых элементов, определенность которого несомненна. В качестве такого класса мы можем взять класс выражений некоторого языка с конечным алфавитом, например U-языка или некоторой его части. (Ввиду замечаний в разд. 3 можно отождествить понятие с U-выражением, которое обозначает его.) В терминах этих элементов мы можем порождать эффективные процессы, другие определенные классы и т. д. Если принять тезис Маркова (или Чёрча) (см. разд. Е1), то понятие эффективного процесса можно определить с высокой степенью точности.

6. Конструкции. Процесс получения элемента X, принадлежащего индуктивному классу $\mathfrak{X}$, посредством итерации способов

комбинации будет называться *конструкцией* X (относительно $\mathfrak{X}$). Мы изучим здесь некоторые формальные вопросы, связанные с конструкциями. Удобнее будет рассматривать сначала первый из двух случаев, упомянутых в конце разд. 5, а именно случай, когда элементы представляют собой объекты, а способы комбинации являются операциями. Изменив соответствующим образом терминологию, например заменив выражение 'имя элемента' выражением 'предложение, обозначающее высказывание', мы автоматически перенесем наши заключения и на другие случаи. Однако мы будем продолжать использовать буквы 'μ' и '$\mathfrak{M}$', как в разд. 5.

В связи с такими конструкциями мы рассмотрим диаграммы некоторого специального вида, называемые *древовидными диаграммами*. Древовидная диаграмма $\mathfrak{D}$ состоит из *узлов*, соединяемых друг с другом следующим образом. Имеется единственный нижний узел, и каждый узел, не являющийся нижним узлом, соединен с единственным узлом, расположенным ниже. Далее, каждому узлу, не являющемуся верхним узлом, приписана единственная операция μ из $\mathfrak{M}$, и число узлов, соединенных с этим узлом и находящихся над ним, в точности равно степени μ. Пусть $\mathfrak{C}$ — конструкция элемента X. Мы скажем, что древовидная диаграмма $\mathfrak{D}$ ассоциирована с $\mathfrak{C}$, если существует взаимно-однозначное соответствие между узлами $\mathfrak{D}$ и элементами $\mathfrak{X}$, встречающимися в $\mathfrak{C}$, удовлетворяющее следующим условиям: нижний узел соответствует X, и если Y образован в $\mathfrak{C}$ применением операции μ к аргументам $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ в указанном порядке, то узлу, соответствующему Y, приписывается та же операция μ и расположенные выше узлы, соединенные с данным узлом, при расположении слева направо в точности соответствуют $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. В этом случае верхние узлы будут соответствовать начальным элементам. Мы будем говорить, что древовидная диаграмма $\mathfrak{D}$ *размечена* (относительно конструкции $\mathfrak{C}$), если каждый узел $\mathfrak{D}$ сопоставлен с именем соответствующего элемента $\mathfrak{C}$. На практике мы можем осуществить такую размеченную диаграмму $\mathfrak{D}$ следующим способом. В качестве узлов мы берем экземпляры имен различных элементов из $\mathfrak{X}$, которым соответствуют эти узлы; над каждым узлом, не являющимся верхним, мы проводим горизонтальную линию, а справа от нее пишем имя операции, участвующей в образовании этого узла; над чертой мы пишем узлы, соответствующие аргументам, к которым применялась операция, в том же порядке. Следовательно, если мы в качестве операций возьмем сложение, умножение и возведение в квадрат и используем обозначения элементарной алгебры, то размеченная древовидная диаграмма для $a^2b + ac$ будет

иметь следующий вид:

$$\cfrac{\cfrac{a}{a^2}\,\mathrm{sq}\;\;b}{a^2b}\times\cfrac{a\quad c}{ac}\times\over{a^2b+ac}+$$

Здесь 'sq' используется как имя для операции возведения в квадрат; остальные имена понятны без объяснений.

Ясно, что элемент принадлежит индуктивному классу $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда существует конструкция этого элемента. Так как вопрос о том, соответствует ли древовидная диаграмма конструкции данного элемента из $\mathfrak{X}$, всегда является определенным, то индуктивный класс всегда является полуопределенным.

Конструкции, древовидные диаграммы и размеченные древовидные диаграммы подобны выражениям в том, что они могут существовать в бесконечном числе экземпляров. Если даны два экземпляра конструкции, то мы скажем, что они являются экземплярами одной и той же конструкции, когда они имеют одну и ту же древовидную диаграмму и одни и те же элементы, соответствующие одним и тем же узлам, т. е. одну и ту же размеченную древовидную диаграмму. (Если элемент, полученный посредством операции из данных аргументов, единственен, то было бы достаточно в дополнение к тождеству древовидных диаграмм иметь одни и те же начальные элементы на всех верхних узлах.) Вообще говоря, один и тот же элемент X может иметь несколько различных конструкций. В тех случаях, когда любому X из $\mathfrak{X}$ соответствует единственная конструкция, мы говорим, что индуктивный класс $\mathfrak{X}$ *монотектоничен* [1]); если же какому-нибудь элементу может соответствовать более одной конструкции, то мы скажем, что индуктивный класс *политектоничен*. Мы позднее познакомимся с примерами классов обоих типов.

Теперь мы рассмотрим понятие, родственное понятию конструкции, а именно, понятие *конструкционной последовательности*. Это такая последовательность, что каждый ее член либо является начальным элементом, либо строится из некоторых впереди стоящих элементов посредством некоторой операции. Очевидно, конструкционную последовательность можно образо-

[1]) Этот термин означает то же самое, что и термин 'тектонический' в [CFS]. Он был введен в [LAG] из тех соображений, что термином 'политектонический' обозначают противоположное свойство. Если существует эффективный процесс получения конструкции для любого допустимого X, то $\mathfrak{X}$ *эффективно монотектоничен*. В этой книге значение слова 'эффективно' всегда будет ясно из контекста.

вать из конструкции различными путями. Единственным требованием является то, что X должен предшествовать Y в последовательности всегда, когда Y расположен ниже X в соответствующей древовидной диаграмме, то есть всегда, когда, начиная с X [1]), мы можем достичь Y через некоторое число шагов, каждый из которых переводит нас из одного узла в другой узел, соединенный с ним и лежащий ниже его. Последовательность может содержать даже лишние элементы, т. е. элементы, которые не являются необходимыми в конструкции. Одна из таких последовательностей, *нормальная конструкционная последовательность* из $\mathfrak{C}$, получается из размеченной древовидной диаграммы нумерацией узлов сверху вниз и слева направо. Точнее, это единственная конструкционная последовательность, удовлетворяющая следующим дополнительным условиям: (1) ее элементами являются все элементы из $\mathfrak{C}$, причем повторяющиеся элементы, если таковые есть, считаются различными; (2) если X и Y используются в качестве аргументов при образовании некоторого элемента (т. е. узлы для X и Y соединены с одним и тем же узлом, расположенным непосредственно ниже их) и X левее Y, то X предшествует Y, а также любому такому Z, что Y ниже Z. Например, последовательности

$$a,\ b,\ c,\ a^2,\ ac,\ a^2b,\ a^2b+ac$$

$$a,\ b,\ c,\ c,\ a^2,\ b^2,\ ac,\ ad,\ a^2b,\ abc,\ a^2b+ac$$

$$a,\ a^2,\ b,\ a^2b,\ a,\ c,\ ac,\ a^2b+ac$$

являются конструкционными последовательностями для приведенной выше конструкции $a^2b + ac$; последняя из приведенных последовательностей является нормальной конструкционной последовательностью.

Очевидно, X принадлежит $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда X является последним членом конструкционной последовательности. Но для того чтобы по конструкционной последовательности восстановить конструкцию, необходимо дать некоторую дополнительную информацию, а именно операцию и аргументы, используемые при образовании любого терма. Эта дополнительная информация может быть названа *анализом* [2]) конструкционной последовательности. Для того чтобы сделать определенным вопрос о том, является ли произвольная последовательность элементов конструкционной или нет, мы должны как-то усилить требования определенности по отношению к операциям, а именно, должно

[1]) Строго говоря, с узла, соответствующего X. Но для целей данного изложения разрешается отождествлять элементы с их именами.

[2]) Этот термин принадлежит Клини [IMM], стр. 87 [стр. 82 русского издания.— *Ред.*].

быть определено не только то, получается ли X из $Y_1, \ldots, Y_n$ с помощью некоторой операции μ при данных $Y_1, \ldots, Y_n$, X и μ, но также и то, получается ли X с помощью некоторой операции μ из какой-нибудь подпоследовательности $Y_1, \ldots, Y_n$ при данных $Y_1, \ldots, Y_n$, X [1]), причем, если ответ положителен, то требуется, чтобы число возможностей было конечным.

Дальнейших подробностей, относящихся к конструкциям, мы коснемся в разд. 3B1.

7. Натуральные числа. То, что в U-языке мы должны использовать понятия, связанные с понятием натурального числа, очевидно уже из того, что нам пришлось говорить о степени функтора, которая есть число его аргументов. Поэтому уместно специально остановиться на рассмотрении того, что́ имеют в виду, говоря об интуитивном употреблении числовых понятий.

Мы употребляем натуральные числа как фишки для счета. Сущность этого процесса была уже объяснена в разд. 1C2*a*. Мы можем выбрать определенные слова, образующие предложение в U-языке; из этих предложений мы можем образовывать стандартные (концептуальные) классы, соответствующие каждому числу, и класс имеет n членов тогда и только тогда, когда существует взаимно-однозначное соответствие между его членами и членами подходящего стандартного класса. Большего нам не требовалось.

Позднее мы формализуем понятие числа способами, которые будут объяснены в должное время. Затем мы можем ввести дальнейшие арифметические понятия и использовать их в нашем изучении. Этим мы займемся в разд. D и в гл. 3.

Нет никакой необходимости связывать с понятием числа какую-либо идеалистическую концепцию — платонистскую, основанную на временно́й интуиции, или какую-нибудь еще. Точно так же не обязательно, чтобы числа вводились как формальные первоначальные понятия, так что формализованная арифметика не обязательно предшествует любому другому виду логического исследования.

Упражнения

1. Предположим, мы согласились, что U-язык — обычный русский язык, за исключением того, что мы можем образовывать имена выражений как в U-языке, так и в греческом языке с помощью одинарных кавычек; '*a*' есть имя из U-языка, обозначающее первую букву греческого алфавита, и автонимное упо-

[1]) Ср. Чёрч [IML$_2$], примечание 121 [стр. 375 русского издания.— *Ред.*].

требление не разрешается. Рассмотреть выражения, записанные в следующей строке:

a, α, альфа, $\ddot{a}\lambda\varphi\alpha$, '$a$', '$\alpha$', 'альфа', '$\ddot{a}\lambda\varphi\alpha$', "$a$", "$\alpha$"

Выписать все истинные U-предложения, образованные подстановкой указанных выражений на место черточки (черточек) в следующие выражения:

a. —— есть U-выражение.
b. —— есть выражение греческого языка.
c. —— есть буква.
d. —— есть слово, состоящее более чем из одной буквы.
e. ——_1 обозначает ——_2.
f. ——_1 есть часть ——_2.
g. —— содержит кавычки.
h. —— есть выражение обычного русского языка.
i. —— содержит греческие буквы.

2. Следующие высказывания можно встретить (быть может, с некоторыми вариациями) в серьезных логических работах последних тридцати лет. Имея в виду, что во всех случаях, кроме случая (*e*), авторы намеревались установить некоторые общие принципы, согласно которым можно производить подстановку вместо букв, критически разобрать употребление кавычек в этих высказываниях.

(*a*) Рассмотрим два высказывания 'P' и 'Q' символической логики, которые являются переводами предложений 'A' и 'B' русского языка. Тогда '$(P \& Q)$' — высказывание, являющееся переводом 'A и B'.

(*b*) Утверждение "Если x и y — числа, то $x + y = y + x$" нарушает правило употребления имен предметов, когда говорят об этих предметах. Это утверждение следует правильно записать так: "Если 'x' и 'y' — числа, то '$x + y$' = '$y + x$' ".

(*c*) Если 'P'— обозначение некоторого утверждения, то отрицание этого утверждения обозначается через '$\neg P$'.

(*d*) Если 'A' и 'B' истинны, то 'A & B' истинно.

(*e*) Если бы мы хотели утверждать, что Чикаго лежит между Нью-Йорком и Денвером, то мы могли бы использовать букву C для обозначения Чикаго и D — для обозначения Денвера, но использовать NY для обозначения Нью-Йорка было бы ошибочно.

(*f*) Конъюнктивное высказывание 'p и q' будет обозначаться через '$p \cdot q$'. Точка означает, что оба высказывания утверждаются совместно. Следовательно, '$p \cdot q$' можно читать так: 'и p, и q'.

(*g*) Вместо 'не p' мы будем писать '$\neg p$'.

3. Предполагая, что основными грамматическими категориями являются n (имя) и s (предложение) и что другие категории образуются с помощью F_n, определить грамматические категории следующих фраз:

'——_1 любят ——_2' в 'Лошади любят овес'.
'——_1 доставляют ——_2 ——_3' в 'Собаки доставляют своим хозяевам много радости'.
'—— а' в 'Генри — друг Джона'.
'что ——' в 'Я знаю, что Анна счастлива'.
'слишком ——' в 'Рубашка Эдуарда слишком велика'.
'еще ——' в 'Рубашка Эдуарда еще более велика'.

(Ср. [CLg], стр. 274, 275.)

4. Предполагая, что основными категориями являются N (число) и S (утверждение или высказывание) и что мы придерживаемся наивной теоретико-множественной точки зрения (при которой множества, отношения и функции трактуются как объекты), определить категории следующих выражений:

(*a*) 2
(*b*) Функция "факториал".
(*c*) Простота (т. е. свойство быть простым числом).
(*d*) Делимость одного числа на другое.
(*e*) Наибольший общий делитель.
(*f*) Наименьшее значение одноместной числовой функции.
(*g*) Свойство монотонности числовой функции.
(*h*) Операция вычисления конечной разности.
(*i*) Конечность множества чисел.
(*j*) Мажорирование одной функции другой функцией.

(Ср. [CLg], стр. 264—265.)

5. Пусть 'n' и 's' — сокращения для 'имя' и 'предложение' соответственно; привести примеры из обыкновенного или математического языка для следующих выражений:

(*a*) F_2nnn
(*b*) F_1ss
(*c*) F_1sn
(*d*) F_2sss
(*e*) $\mathsf{F}_1\,(\mathsf{F}_2nns)\,(\mathsf{F}_2nns)$.

(Ср. замечания к упражнениям 3 и 4.)

6. Предполагая, что '$\neg$' — унарный префикс, а '$\supset$', '$\wedge$', '$\vee$' — бинарные инфиксы, осуществить бесскобочную запись, обеспечивающую однозначность чтения следующих формул. При этом использовать соглашения относительно точек из разд. 4, считая, что бинарные инфиксы старше префикса, а

порядок старшинства среди инфиксов таков: '$\supset$', '$\vee$', '$\wedge$'.

(*a*) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(*b*) $(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C)))$

(*c*) $(A \supset (B \supset (A \wedge B))$

(*d*) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

(*e*) $(A \wedge (B \vee C)) \supset ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

(*f*) $(A \supset (B \supset C)) \supset (\neg (A \supset C) \supset \neg (A \supset B))$

(*g*) $(A_1 \supset B_1) \supset ((A_2 \supset B_2) \supset (\ldots \supset (A_n \supset B_n) \ldots))$

(*h*) $\vdash \neg (\neg (\neg (\neg A)) \supset (\neg (\neg B))) \rightarrow \vdash A \supset B$

('$\rightarrow$' определена, как в разд. 4). (По поводу (*a*) — (*d*) см. [TFD], стр. 43; по поводу (*g*) ср. [UDB] (3). По поводу дальнейших упражнений такого рода см. Россер [LMt], стр. 23, пример II 2.1.)

7. Записать следующие формулы, пользуясь обычными обозначениями элементарной алгебры (косая черта '/' используется для деления):

(*a*) $a - . b + c : - : a + c . - . b + c$

(*b*) $a - b . / . a + b : - : a + b . / . a - b = - . 4ab / . a^2 - b^2$

(*c*) $a_1 + . 1 / . a_2 + . 1 / . \ldots + . 1 / . a_n$

(Ср. Россер [LMt], стр. 23, пример II 2.2.)

8. Показать, что если мы исходим из конечного алфавита, то слова в этом алфавите образуют индуктивный класс; далее провести рассуждение, подкрепляющее тезис о том, что этот класс является определенным, указав эффективный процесс для решения вопроса о том, является ли данное выражение словом.

9. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс слов в бесконечном алфавите

$$C,\ N,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,$$

определяемых индуктивно (при автонимном способе речи):

(*a*) Все $a_1, a_2, \ldots$ принадлежат $\mathfrak{X}$.

(*b*) Если X и Y принадлежат $\mathfrak{X}$, то NX и CXY также принадлежат $\mathfrak{X}$.

Показать, что $\mathfrak{X}$ — определенный класс. (Это специальный случай системы обозначений Лукасевича, упомянутой в разд. 4. Некоторые решения были опубликованы; см., например, [CFS], разд. 6; [LLA], приложение, разд. 2; Розенблюм [EML], разд. IV, I и ссылки, данные там на стр. 205. Ср. ниже упражнение E5.)

10. Написать размеченную древовидную диаграмму и соответствующую нормальную конструкционную последовательность для конструкции с помощью операций сложения, вычитания и деления формулы A элементарной алгебры, определяемой следующим образом:

$$A \equiv \frac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}}$$

(выбрать и использовать подходящие сокращения для фраз-компонент).

11. Предположим, что дана последовательность вместе с информацией о том, что она конструкционная. Какая еще информация необходима для того, чтобы определить конструкцию однозначно?

12. Показать, что следующие условия достаточны для того, чтобы каждый элемент X индуктивного класса $\mathfrak{X}$ имел однозначную конструкцию: (*a*) элемент, полученный посредством операции, отличен от любого исходного элемента; (*b*) элементы, полученные посредством различных операций или посредством одной операции из различных аргументов, всегда различны. Рассмотреть далее аналогию между этими двумя свойствами, правилами (I), (II) и правилом замыкания [1]), с одной стороны, и постулатами Пеано для натуральных чисел — с другой. ([CLg], разд. 2E7.)

B. ТЕОРИИ

В этом разделе теория будет определена как класс высказываний. Мы рассмотрим здесь формулировку этого определения и получающиеся из него следствия, не требующие никаких предположений относительно объектов, фигурирующих в высказываниях теории.

1. Теории вообще. Мы будем исходить из непустого определенного класса $\mathfrak{E}$ высказываний, которые мы назовем *элементарными высказываниями*. Как уже говорилось в разд. A5, это значит, что вопрос о том, является ли данное U-выражение высказыванием из $\mathfrak{E}$, есть определенный вопрос. Высказывания из $\mathfrak{E}$ называются элементарными, чтобы отличить их от других высказываний U-языка, которые могут быть образованы из них или говорить о них; позднее мы назовем некоторые из этих последних высказываний "эпивысказываниями", но пока нам этот термин не нужен.

Теория (над $\mathfrak{E}$) определяется как некоторый концептуальный класс таких элементарных высказываний. Пусть $\mathfrak{T}$ — такая теория; элементарные высказывания, которые принадлежат $\mathfrak{T}$, мы назовем *элементарными теоремами* $\mathfrak{T}$; мы будем говорить также, что эти элементарные высказывания *истинны* для $\mathfrak{T}$. Тогда для данной теории $\mathfrak{T}$ элементарная теорема является истинным эле-

[1]) См. 2A5, стр. 70.— *Прим. ред.*

ментарным высказыванием. Таким образом, теория — это способ выбора подкласса истинных высказываний из числа высказываний, принадлежащих $\mathfrak{E}$. Мы будем теперь говорить, что высказывания из $\mathfrak{E}$ являются элементарными высказываниями (для) теории $\mathfrak{T}$ [1]).

Используемая здесь терминология показывает, что истинность или ложность элементарных высказываний предполагается известной нам безотносительно к $\mathfrak{T}$. Поэтому U-предложения, выражающие эти высказывания, должны содержать некоторые конституэнты или параметры, значения которых не фиксированы, пока не определена $\mathfrak{T}$. Другими словами, это *формальные высказывания*, противопоставляемые в этом отношении *содержательным высказываниям*, истинность или ложность которых нам известны заранее. Конечно, можно утверждать, что такое употребление неправильно, что элементы из $\mathfrak{E}$ не являются высказываниями до тех пор, пока не фиксировано значение этих неопределенных конституэнтов, и что поэтому для каждой $\mathfrak{T}$ мы должны постулировать отдельное $\mathfrak{E}$. Это, однако, вопрос терминологии. Есть два довода в пользу принятого здесь употребления. Во-первых, оно удобно тем, что позволяет нам говорить о двух или более теориях с одним и тем же $\mathfrak{E}$. Во-вторых, оно согласуется с обычным употреблением слова 'предложение' [2]), ибо русское выражение

Он осёл

безусловно, является предложением, и притом таким, которое читатели, должно быть, слышали, и все же нельзя судить о его истинности или ложности, пока оно не заключено в контекст, из которого будет ясно, что означает слово 'он' и в каком смысле употребляется слово 'осёл'. Позднее мы обратимся к вопросу, каким образом могут появиться такие неопределенные конституэнты, но пока мы вполне можем обойтись без этого.

Хотя приведенное выше понятие теории является очень общим, все же ряд понятий, относящихся к теориям, может быть определен через него. Во-первых, мы можем сказать, что, по определению, теория $\mathfrak{T}_1$ является *подтеорией* другой теории $\mathfrak{T}_2$, или что $\mathfrak{T}_2$ является *расширением* (или надтеорией) $\mathfrak{T}_1$, если каждая элементарная теорема $\mathfrak{T}_1$ является также элементарной теоремой $\mathfrak{T}_2$ [3]). Тот факт, что $\mathfrak{T}_1$ является подтеорией $\mathfrak{T}_2$, мы обозначим следующим образом (обозначение заимствовано из теории множеств):

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$$

[1]) Не исключено, что мы можем иметь теории с различными классами $\mathfrak{E}$.

[2]) Напомним, что 'предложение' и 'утверждение' можно отождествить.

[3]) При этом предполагается, что $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ имеют одно и то же $\mathfrak{E}$, но это определение можно распространить и на случай различных $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$, лишь бы

$$\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}_2$$

Мы можем, далее, определить *непротиворечивую* теорию как теорию, которая не охватывает всего $\mathfrak{E}$, и *разрешимую* теорию как теорию, являющуюся определенным классом.

Такое определение непротиворечивости может показаться немного странным. Оно мотивируется следующим образом [1]). В теориях, основанных на обычном исчислении предикатов, элементарные высказывания имеют вид

$$\vdash P \qquad (1)$$

где P—"формула", а '$\vdash$' обозначает одноместный предикат доказуемости. В таком исчислении есть операция отрицания. Такая теория считалась бы "противоречивой", если бы какая-нибудь формула и ее отрицание были бы одновременно доказуемы, и из такого "противоречия" по правилам исчисления следует, что доказуема каждая формула. Следовательно, теория, содержащая противоречие, была бы противоречивой в смысле данного здесь определения. Обратно, если бы теория была противоречива согласно настоящему определению, то в ней одновременно доказывались бы любая формула P и ее отрицание и таким образом получилось бы противоречие. Поэтому для теорий, основанных на исчислении предикатов, эти два определения эквивалентны. Предлагаемое определение, однако, применимо при гораздо более общих условиях, причем оно имеет тот же самый неприятный смысл: независимо от того, есть отрицание или нет, противоречивая теория бесполезна.

Термин 'первоначальный остов', который будет введен позже (в разд. C1) для систем, имеет смысл и для теорий и может при случае применяться к ним.

2. Дедуктивные теории. Теория $\mathfrak{T}$ называется *дедуктивной*, если $\mathfrak{T}$ является индуктивным классом (элементарных высказываний, конечно). Из определений в разд. A5 и 1 следует, что исходные элементы образуют разрешимую теорию $\mathfrak{A}$. Элементы из $\mathfrak{A}$ будут называться *аксиоматическими высказываниями*, или *аксиомами* [2]). Способы комбинации тогда образуют некоторое множество (скажем, $\mathfrak{R}$) *дедуктивных правил*, или правил вывода; каждое из них дает элементарную теорему, когда соответствующее число элементарных теорем дано в качестве *посылок*. Правила называются *детерминативными* (ср. разд. A5), если образованные с их помощью элементарные высказывания однозначно определяются посылками. Иногда правила и аксиомы бывает удобно называть одним термином '*постулаты*'.

[1]) Это рассуждение приводится в работе Поста [1GT].

[2]) Для целей настоящего изложения удобнее более короткий термин, но позднее, когда нам придется обсуждать аксиоматические формулы, нам понадобится и более длинный.

Конструкция, удовлетворяющая этим условиям, называется (*формальным* [1])) *доказательством*. Элементарные теоремы — это в точности те элементарные утверждения, для которых существует доказательство.

Иногда рассматривают теории, в которых есть правила с неэлементарными посылками, но эти правила тем не менее таковы, что заключение можно считать полученным конструктивно. Мы не можем заниматься такими теориями, пока мы позднее не введем понятие эпитеории. Однако такие теории имеют многие характерные черты дедуктивных теорий, определенных здесь. Мы будем говорить, что такие теории являются дедуктивными в обобщенном смысле [2]). Многое из того, что мы говорим здесь, будет применимо и к таким теориям.

Другое обобщение понятия дедуктивной теории возникает, когда мы ослабляем ограничения на определенность, так что $\mathfrak{T}$ является полуопределенным классом. Такая теория будет названа *полудедуктивной*. В полудедуктивной теории понятие доказательства может не быть эффективным.

Для дедуктивной теории — а также для некоторых из ее обобщений — мы можем следующим образом определить понятие *полноты*. Дедуктивная теория $\mathfrak{T}$ полна, если присоединение к ее аксиомам элементарного высказывания, не являющегося элементарной теоремой, при сохранении правил неизменными делает теорию противоречивой — иными словами, когда теория не допускает непротиворечивого собственного аксиоматического расширения. (Согласно этому определению, любая противоречивая теория полна; по этому вопросу имеются некоторые расхождения в употреблении термина *полнота*.) Этот вид полноты называется полнотой в *смысле Поста* [3]). Это довольно сильное свойство; оно не имеет места для большинства сколько-нибудь важных систем, но справедливо для формулировки классического двузначного исчисления высказываний, включающей правило подстановки и modus ponens.

3. Отношения следования. Пусть $\mathfrak{T}$ — фиксированная (полу)-дедуктивная теория с аксиомами $\mathfrak{A}$ и правилами $\mathfrak{R}$. Полудедуктивная теория, образованная добавлением к $\mathfrak{A}$ дополнительных аксиом при сохранении правил вывода и $\mathfrak{E}$ [4]) неизменными, называется *аксиоматическим расширением* $\mathfrak{T}$. Расширение будет

[1]) Термином 'формальный' мы будем пользоваться там, где есть опасность смешения с другими видами доказательства.

[2]) Дедуктивные теории в более узком смысле можно тогда назвать *элементарными дедуктивными теориями*. Ср. разд. 2D3.

[3]) Это понятие было введено Постом [IGT].

[4]) Новые аксиомы тогда должны принадлежать первоначальному $\mathfrak{E}$.

дедуктивной теорией, если дополнительные аксиомы образуют разрешимую теорию и если определенность правил вывода не нарушена при расширении. Данное определение имеет смысл, даже когда $\mathfrak{A}$ и, следовательно, $\mathfrak{T}$ (т. е. класс элементарных теорем) пусты.

Предположим, что дополнительные аксиомы образуют теорию $\mathfrak{B}$. Тогда аксиоматическое расширение $\mathfrak{T}$ будет называться (дедуктивным) замыканием $\mathfrak{B}$ и обозначаться $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$ [1]). Далее мы будем говорить, что высказывание X является *следствием* $\mathfrak{B}$ относительно $\mathfrak{T}$, если X содержится в $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$.

Операция перехода от $\mathfrak{B}$ к $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$ есть операция замыкания — в том смысле, в каком это слово обычно понимается в математике. Она имеет следующие свойства:

I $\quad \mathfrak{B} \subseteq \mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$

II $\quad \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})) \subseteq \mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$

III $\quad \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \rightarrow \mathrm{Cn}(\mathfrak{B}_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\mathfrak{B}_2)$

Эти свойства характеризуют отношение замыкания вообще. Дедуктивное замыкание обладает еще следующим свойством:

IV Если X содержится в $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$, то существует конечная подтеория $\mathfrak{C}$ теории $\mathfrak{B}$, такая, что X содержится в $\mathrm{Cn}(\mathfrak{C})$.

Дальнейшее изучение операции замыкания принадлежит к той части нашей тематики, которая называется эпитеорией и которая будет рассматриваться в гл. 3. Но эта операция упоминается здесь потому, что ряд логических учений берет в качестве основного скорее понятие отношения следования, чем понятие дедуктивной теории. С этой точки зрения правила $\mathfrak{R}$ устанавливают отношение *непосредственного следования*; тогда $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$ является по существу наименьшим классом, содержащим ($\mathfrak{A}$ и) $\mathfrak{B}$, который замкнут относительно непосредственного следования (т. е. относительно $\mathfrak{R}$). В силу сказанного в разд. A5 в этом случае $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$ будет по существу таким же, что и определенное выше. Ясно, что если $\mathfrak{B}$ пусто, то $\mathrm{Cn}(\mathfrak{B})$ совпадает с $\mathfrak{T}$.

В терминах отношения следования можно охарактеризовать *полноту в смысле Поста* (разд. 2); а именно $\mathfrak{T}$ полна, если каждое высказывание из $\mathfrak{E}$ является следствием (относительно $\mathfrak{T}$) любого высказывания X, не входящего в $\mathfrak{T}$.

4. Интерпретация теорий. До сих пор мы рассматривали теорию исключительно как концептуальный класс высказываний,

[1]) 'Cn' здесь является сокращением английского слова 'consequence' (следствие). По поводу его введения см. Тарский [LSM], стр. 63. (Это перевод статьи Тарского [FBM].)

не касаясь ее отношения к другим понятиям. Очевидно, что теория, понимаемая как класс высказываний, который можно определить любым из допустимых способов, представляет для нас интерес только при условии, что есть некоторая связь между этой теорией и какой-то содержательной областью, т. е. некоторой областью, известной нам независимо от теории. Теория полезна при условии, что она дает нам возможность делать какие-нибудь предсказания относительно этой содержательной области.

Такое отношение между теорией и содержательной областью означает наличие много-однозначного соответствия между элементарными высказываниями теории и определенными содержательными высказываниями, относящимися к этой области. В таком случае мы говорим, что у нас есть *интерпретация* теории в этой содержательной области. Мы будем говорить, что эта интерпретация полна, если каждому элементарному высказыванию теории соответствует некоторое содержательное высказывание; в противном случае интерпретация будет *частичной*. Соответствующее содержательное высказывание называют *интерпретантом* исходного элементарного высказывания; если не стремиться к предельной педантичности, его также можно называть интерпретацией. Таким образом, интерпретантом элементарного высказывания физической теории может служить высказывание, допускающее экспериментальную проверку; большинство физических теорий содержит высказывания, не допускающие прямой экспериментальной проверки, так что их интерпретации лишь частичны.

Интерпретация называется *правильной*, если интерпретант каждой элементарной теоремы (т. е. каждого истинного элементарного высказывания) является истинным. Интерпретация называется *адекватной* (или относительно полной), если каждое элементарное высказывание, интерпретант которого истинен, есть теорема. Эти термины являются аналогами непротиворечивости и полноты неинтерпретированной теории. Они относятся к интерпретации и, следовательно, к некоторой содержательной области; но если таковая фиксирована, то их можно относить и к самой теории. Если содержательная область имеет эмпирическую природу, то и эти понятия имеют эмпирический характер.

Как уже было сказано, мы обычно изучаем теорию потому, что желаем ее использовать для некоторой цели. Если теория годится для такого использования, то мы скажем, что она *приемлема* для данной цели. Приемлемость теории во всяком случае предполагает ее правильность. Для суждения о приемлемости может потребоваться вся доступная нам информация, касающаяся истинности, но из двух правильных теорий одна может быть более приемлемой, например в силу ее большей простоты, естественности, большей удовлетворительности с эстетической или философской точки зрения и т. п. Приемлемость относительна: она зависит как от наших знаний в данный момент, так и от цели или предполагаемого использования. Теория может быть приемлема сегодня и неприемлема завтра или она может быть приемлема для одной цели и неприемлема для другой.

Интерпретация в том понимании, которое принято здесь, является соответствием между высказываниями; при этом каждый из соответствующих друг другу членов является высказыванием с собственным критерием истинности. Этот способ речи, по-видимому, имеет преимущество перед способом, подразумевающим, что каждое высказывание имеет два вида истинности — формальную и содержательную. Заметим, что интерпретация не обязательно предполагает приписывание "значений" конституэнтам элементарного высказывания, предопределяющих значение истинности этого высказывания. Интерпретация— это всегда соответствие между высказываниями, независимо от того, как именно установлено это соответствие [1]).

Упражнения

В нижеследующем предполагается, что $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... и т. д. — расширения некоторой фиксированной теории $\mathfrak{T}$. Символы '$=$', '$\subseteq$', '$\cup$', '$\cap$' употребляются в обычном теоретико-множественном смысле, а именно как обозначение равенства множеств, включения, объединения и пересечения соответственно. Ссылки в круглых скобках, начинающиеся с 'T', — это ссылки на теоремы из статьи Тарского [FBM], где можно найти большое количество более сложных высказываний подобного рода.

1. Показать, что дедуктивное замыкание удовлетворяет свойствам I — IV (ср. T.1).

2. Показать, что

$$\mathrm{Cn}(\mathfrak{B}) \cup \mathrm{Cn}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{Cn}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = \mathrm{Cn}(\mathfrak{B} \cup \mathrm{Cn}(\mathfrak{C})) = \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\mathfrak{B}) \cup \mathrm{Cn}(\mathfrak{C}))$$

(T.2).

3. Назовем $\mathfrak{B}$ дедуктивно замкнутой, если

$$\mathrm{Cn}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$$

Показать, что если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ дедуктивно замкнуты, то и $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ дедуктивно замкнута, но $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$, вообще говоря, не является дедуктивно замкнутой.

---

[1]) В этом отношении наше употребление этого термина отличается от принятого у Карнапа [ISm].

4. Назовем $\mathfrak{B}$ аксиоматизируемой [1]), если она имеет то же дедуктивное замыкание, что и некоторая конечная теория $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$. Показать, что объединение любого конечного числа аксиоматизируемых теорий аксиоматизируемо (ср. Т.20).

5. Назовем теорию $\mathfrak{B}$ независимой, если никакое ее утверждение не является следствием остальных. Сформулировать это условие в терминах операции Cn; показать далее, что следующие условия необходимы и достаточны для независимости:

(*a*) $\mathfrak{B} \cap \mathrm{Cn}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C}$ для всех $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$

(*b*) $\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \subseteq \mathfrak{B} \,\&\, \mathrm{Cn}(\mathfrak{C}_1) = \mathrm{Cn}(\mathfrak{C}_2) \rightarrow \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$ для всех $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$

(Т.31).

6. Показать, что свойства, перечисленные в предыдущих упражнениях, абстрактно следуют из свойств I — IV, т. е. они имеют место, если теория рассматривается как подмножество некоторого множества $\mathfrak{E}$ объектов, не обязательно являющихся элементарными высказываниями, и что Cn — унарная операция на этих подмножествах, такая, что выполняются свойства I — IV. Какую роль играет свойство IV в этом доказательстве (если оно играет какую-то роль)? Показать далее, что если потребовать, чтобы в свойстве III $\mathfrak{B}_1$ была конечна, то III становится обращением IV и что при этом (т. е. если взять IV как эквивалентность, а также I, II) III излишне (Т.1).

С. СИСТЕМЫ

В разд. B1 было указано, что элементарные высказывания, на которых основана теория, непременно содержат ряд неопределенных конституэнтов или параметров; иными словами, они являются формальными высказываниями. Мы там не касались способа, которым были введены эти параметры. Теперь мы установим, что параметры появляются как неопределенные объекты, о которых делаются утверждения, что некоторые из них обладают определенными свойствами или что между ними имеют место определенные отношения. Теория, утверждения которой образуются таким образом, будет названа *системой*. Мы рассмотрим здесь два вида систем и обсудим их природу и взаимоотношение.

1. Системы вообще. Как объяснено во введении к этому разделу, мы здесь постулируем определенный концептуальный класс объектов, называемых *формальными объектами*, и концептуальный класс предикатов, называемых *базисными предикатами*, причем каждому из базисных предикатов сопоставляется определенное число, называемое его *степенью*. Элементарные высказывания — это как раз те высказывания, в которых утверждается, что такой-то базисный предикат удовлетворяется для некоторой упорядоченной последовательности формальных объектов, число членов которой равно степени этого предиката. Мы можем пока символически записать такое утверждение в виде

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) \qquad (1)$$

где 'a_1', . . ., 'a_n' — сокращения для имен некоторых конкретных формальных объектов, Ф — сокращение для n-аргументного глагола, обозначающего базисный предикат степени n, а скобки и запятые обычным образом указывают, что Ф применяется к аргументам a_1, . . ., a_n. Если предположить, что формальные объекты образуют определенный класс и что то же самое верно для базисных предикатов (при этом предполагается, что степень предиката определяется однозначно), то ясно, что элементарные утверждения образуют определенный (концептуальный) класс.

Существует, как мы увидим в разд. 2 и 3, два основных варианта понятия системы, которые отличаются друг от друга в отношении природы формальных объектов. Прежде чем рассматривать эти варианты, уместно привести здесь ряд предварительных соображений, которые относятся к обоим типам систем.

Для того чтобы представить такую систему в U-языке, необходимо решить проблему обозначения формальных объектов и базисных предикатов, а также указать средства для соединения их с целью образовать U-предложения, выражающие основные утверждения. Эти обозначения в совокупности образуют язык в семиотическом смысле; этот язык здесь называется A-*языком*. Входящие в этот язык имена, т. е. имена формальных объектов, будут называться A-*именами*, а его глаголы, обозначающие базисные предикаты, будут называться A-*глаголами* (про каждый из них мы скажем, что этот глагол имеет ту же степень, что и степень предиката, который он обозначает). Предложения A-языка, выражающие элементарные высказывания, мы будем называть A-*предложениями*. Таким образом, A-язык содержит лингвистические средства, достаточные для выражения элементарных высказываний.

Было бы, однако, неверным сказать буквально, что A-язык — это не тот язык, о котором здесь говорят; на самом деле A-язык добавляется к U-языку для использования внутри его. A-имена являются частным случаем U-имен, A-глаголы — частным случаем U-глаголов и A-предложения — частным случаем U-предложений. Добавление этой новой терминологии к U-языку ничем

[1]) Слово 'аксиоматизируемая' употребляется в литературе и в других значениях. Тогда для случая, который мы здесь имеем в виду, следует употреблять выражение 'конечно аксиоматизируемая'.

существенным не отличается от любой другой процедуры введения формальных выражений в U-язык.

В дальнейшем для использования в А-языке системы (или семейства систем) нам будет удобно иметь специальную терминологию, которой мы и будем пользоваться, кроме особых случаев. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ пусть система содержит m_n базисных предикатов степени n. Если $m_n > 0$, то для $k = 1, 2, \ldots, m_n$ пусть $\varphi_k^{(n)}$ есть k-й предикат степени n [1]); его замыкание для аргументов $X_1, \ldots, X_n$ обозначим через

$$\varphi_k^{(n)} X_1 X_2 \ldots X_n$$

Если $m_n = 0$, то $\varphi_k^{(n)}$ не существует ни для какого k [2]).

На соображения, относящиеся к формальным объектам и элементарным утверждениям, обычно ссылаются как на *морфологию* системы. Морфология системы противопоставляется *собственно теории*, которая относится к теории, построенной на основе этой морфологии. Следует отметить, что в системе может и не быть никаких базисных предикатов — в этом случае мы говорим о системе как о *чистой морфологии*. Правила, определяющие систему, будут названы ее *первоначальным остовом*.

2. Синтаксические системы. Первый из двух видов систем, который мы рассмотрим, — это так называемые синтаксические системы. В такой системе формальные объекты рассматриваются как выражения некоторого языка-объекта. Назовем этот язык О-*языком*. Тогда имеется определенный запас О-*символов*, или *букв*, составляющих О-*алфавит*; формальные объекты являются конечными последовательностями этих букв.

Один путь представления объектов в виде индуктивного класса состоит в том, чтобы понимать их как образованные приписыванием справа каждый раз по букве. Если допускается пустое выражение, то его можно считать единственным исходным элементом; в противном случае мы должны считать исходным элементом каждую букву. Операция — приписывание буквы справа; число этих операций равно числу букв. Тогда выражения

[1]) Для некоторых целей предпочтительнее иметь единый список предикатов φ_k и положить степень φ_k равной n_k.

[2]) Заметим, что мы здесь используем оборот U-языка, упоминаемый в связи с "кавычечными функциями" в разд. А3. Более точным (и громоздким) образом нам следовало бы сказать: "А-глаголы представляют собой префиксы вида '$\varphi_k^{(n)}$', где 'n' и 'k' — некоторые числа, причем 'n' означает степень, а 'k' — индекс в перечислении предикатов этой степени, если таковые имеются; А-предложения имеют вид '$\varphi_k^{(n)} X_1 X_2 \ldots X_n$', где '$n$' и '$k$' те же, что и раньше, а 'X_1', ..., 'X_n' — А-имена". В дальнейшем расшифровка эллиптических оборотов и указание аргументов предоставляются читателю.

образуют индуктивный (причем монотектонический) класс; синтаксическую систему, понимаемую таким образом, мы будем называть *аффиксативной системой*. Как мы увидим дальше, это понятие в некоторых отношениях неудовлетворительно.

Второй путь состоит в том, чтобы понимать выражения как индуктивный класс, в котором буквы являются начальными элементами и существует единственная бинарная операция, называемая *сочленением*. Мы иногда символически обозначаем ее в А-языке (а следовательно, и в U-языке) через '$\wedge$', используя этот знак как бинарный инфикс (т. е. помещая его между аргументами, как '$+$' в элементарной алгебре), а иногда просто приписываем аргументы этой операции друг к другу (как умножение в алгебре). Значение этой операции таково: если X и Y — выражения, то $X \wedge Y$ образуется приписыванием Y непосредственно после X (справа от него). Итак, если 'α', 'β' — буквы, X есть '$\alpha\alpha\beta$', Y есть '$\beta\beta\alpha$', то $X \wedge Y$ есть '$\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha$'. Ясно, что выражения являются теперь индуктивным классом; но так как сочленение ассоциативно, то этот класс политектоничен. Таким образом, '$\alpha\beta\alpha$' имеет две конструкции:

$$\dfrac{\dfrac{\text{'}\alpha\text{'} \quad \text{'}\beta\text{'}}{\text{'}\alpha\beta\text{'}} \quad \text{'}\alpha\text{'}}{\text{'}\alpha\beta\alpha\text{'}} \qquad \dfrac{\text{'}\alpha\text{'} \quad \dfrac{\text{'}\beta\text{'} \quad \text{'}\alpha\text{'}}{\text{'}\beta\alpha\text{'}}}{\text{'}\alpha\beta\alpha\text{'}}$$

Синтаксическую систему такого вида мы назовем *конкатенативной* [1]) системой.

Рассмотрим теперь два примера. В обоих мы предположим, что алфавит состоит из трех букв a, b, c [2]) (где 'a' есть имя 'α', 'b' — имя 'β' и т. д.), и будем обозначать сочленение простым приписыванием элементов друг к другу в А-языке.

Буквы 'X', 'Y', 'Z' используются как "U-переменные" (разд. 3D1), т. е. как местоимения для неопределенных О-выражений.

Пример 1. (Самы, первая форма.)

Элементарные высказывания. Три унарных предиката:

—— есть сам;
—— есть тетел;
—— есть тантет.

Аксиомы. a есть сам.
aca есть тантет.

[1]) От англ. concatenation (сочленение). — *Прим. перев.*

[2]) В примере 2 не используется буква c.

Правила. X есть сам $\rightarrow Xb$ есть сам.
X есть сам и Y есть сам $\rightarrow XcY$ есть тетел.
XcY есть тантет $\rightarrow XbcYb$ есть тантет.

Пример 2. (Самы, вторая форма.)

Элементарные высказывания. Один бинарный и один унарный предикаты:

—— есть сам.
$——_1 = ——_2$.

Аксиомы. a есть сам.
$a = a$

Правила. X есть сам $\rightarrow Xb$ есть сам.
$X = Y \rightarrow Xb = Yb$

Замечания по поводу этих примеров. Можно легко убедиться, что в обоих примерах самы являются выражениями вида

a	(т. е. 'α')
ab	(т. е. '$\alpha\beta$')
abb	(т. е. '$\alpha\beta\beta$')

и что $X = Y$ в примере 2 тогда и только тогда, когда XcY является тантетом в примере 1, а именно когда X и Y — один и тот же сам.

Эти системы были описаны как конкатенативные системы. Если бы мы должны были формулировать их как аффиксативные системы, то в примере 2 это не вызвало бы трудностей, но с примером 1 возникло бы серьезное затруднение: мы не могли бы установить правила, не привлекая операции сочленения (см. ниже разд. D3).

Широко распространенная разновидность синтаксической системы [1]), известная под именем *исчисления*, имеет следующие характерные свойства. Формальные объекты берутся в смысле операции сочленения. Дедуктивная теория, основанная на этой системе, содержит два вида правил, называемых *правилами образования* и *правилами преобразования* соответственно. Правила образования устанавливают, что́ является предложением в О-языке, так что правила образования включают в себя предикат "быть О-предложением" в качестве базисного. Правила преобразования определяют отношение следования среди О-предложений аналогично тому, как это описано для элементарных высказываний (или U-предложений) в разд. 2B3. Как мы уже видели,

[1]) Например, Карнап [LSL]. Исчисление в смысле Лоренцена [EOL] — несколько иное понятие. Ср. [CFS].

это эквивалентно определению семейства систем, зависящих от класса начальных предложений — аксиоматических О-предложений — как от параметра, причем в каждой из этих систем главный базисный предикат — это предикат "быть О-теоремой". Некоторые авторы не настаивают на определенности, которую мы здесь требуем, так что их системы являются только полудедуктивными.

Система примера 1 является исчислением в этом смысле, если мы рассматриваем тетелы как О-предложения, а тантеты — как О-теоремы. Как показывает этот пример, для описания системы могут понадобиться дополнительные (иногда называемые "вспомогательными") базисные предикаты, например "быть самом". Системы типа системы примера 2, имеющие бинарные базисные предикаты, не допускаются в качестве исчислений (хотя такие предикаты и могут, конечно, фигурировать как вспомогательные). Теория λ-конверсий в том виде, в каком ее представляет Чёрч, является менее тривиальным примером системы с бинарным базисным предикатом [1]); в ней нет никаких аналогов, по крайней мере непосредственных, таких понятий, как О-предложение и О-теорема.

В связи с такими исчислениями следует остерегаться смешивать значения слова 'предложение' в выражениях 'О-предложение' и 'U-предложение'. В последнем случае слово 'предложение' само является частью U-языка и предполагают, что оно так понимается. В первом же случае оно означает индуктивный класс выражений, понимаемых как некоторые формы. Являются ли эти выражения в действительности предложениями в обычном понимании этого слова или нет — так же безразлично, как то, например, напоминают ли они нам обезьян в зоопарке. Именно по этой причине эти термины переведены на венгерский язык, где 'сам' (т. е. '*szám*') означает 'число', 'тетел' (т. е. '*tétel*') означает 'предложение', а 'тантет' (т. е. '*tantét*') означает 'теорема'. Этим я хотел бы вытравить семантический (т. е. относящийся к значению) оттенок, который часто вкрадывается при использовании слова 'предложение'. В то же время я надеюсь, что яснее выявится основное различие между понятиями, которые мы выражаем в А-языке — и, следовательно, в U-языке, — т. е. глаголами и предложениями, и понятиями, которые мы просто называем.

Опять-таки, даже если мы утверждаем, что говорим о О-языке, не обязательно явно показывать этот язык. Можно делать те или иные замечания о президенте США, не обязательно имея

[1]) Модифицированная и строгая формулировка теории λ-конверсий как исчисления в смысле Лоренцена см. [CFS], пример 7.

перед собой это лицо. Если явно и приводят О-язык, то только с целью иллюстрации. Не только это, но и точная природа О-букв совершенно не имеют значения. Итак, я выше говорил, что О-буквы для системы самов состоят из греческих букв a и b (т. е. 'α' и 'β'), но на самом деле безразлично, являются ли a и b греческими буквами, египетскими иероглифами, двумя различными и воспроизводимыми видами кирпича или двумя видами шумов. Все, что нам нужно выявить, — это А-имена этих букв; все, что нам нужно знать об этих буквах, — это то, что они подобны звеньям различных сортов, которые можно соединять в цепи. В дальнейшем О-язык явно не приводится; символы, которые появляются, когда мы говорим об О-буквах, — это А-имена, которыми их называют.

Мы договоримся пользоваться следующей стандартной терминологией, если нет ничего более подходящего: О-буквы будут обозначаться через a_0, a_1, . . ., а сочленение будет, как и выше, указываться либо последовательной записью аргументов, либо инфиксом '$\wedge$'. Может быть любое число букв, но это число всегда можно свести к двум, так как мы можем заменить первоначальные буквы самами.

Мы будем употреблять самы как натуральные числа способом, описанным в разд. А7. При этом естественные обозначения

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

мы предпочтем записям

$$a,\ ab,\ abb,\ \ldots$$

а функцию 'следующий за' обозначим штрихом.

3. Об-системы. Во втором типе дедуктивной системы, который мы назовем *об-системой*, формальные объекты образуют монотектонический индуктивный класс. Элементы этого индуктивного класса называются *обами*, его начальные элементы — *атомами*, а способы комбинации — (*исходными* [1])) *операциями*. Каждый об является, таким образом, результатом конструкции из атомов посредством исходных операций; ввиду свойства монотектоничности эта конструкция единственна. Поэтому об может быть отождествлен с такой конструкцией, воплощенной, если угодно, в виде древовидной диаграммы (или нормальной конструкционной последовательности); в этом отношении об противопоставляется О-выражению, которое воплощается в виде линейного ряда. За исключением указанных свойств, безразлично, что́

[1]) Термин 'исходный' будет использоваться в тех случаях, когда мы хотим явно отличить операции, входящие в первоначальный остов, от других операций, вводимых, например, определениями; в других случаях этот термин можно опустить.

представляют собой обы, и бесцветное слово 'об' выбрано нарочно, чтобы подчеркнуть это безразличие.

Система примера 2, а в действительности любая аффиксативная синтаксическая система, является примером об-системы. Это сразу следует из вышеприведенного.

Другие примеры об-систем мы можем найти среди тех синтаксических систем, в которых есть особый концептуальный класс "правильно построенных выражений", называемых здесь *вефами* [1]), причем класс этот монотектоничен и исчерпывает все выражения, играющие сколько-нибудь заметную роль в системе. Почти все системы, рассматриваемые в современной математической логике и математике, имеют такой характер.

Рассмотрим теперь некоторые другие примеры об-систем.

Пример 3. (Обобщенные самы.)

А т о м ы. a (всего один атом).

О п е р а ц и и. n унарных операций: результат применения k-й операции к аргументу X есть Xb_k. Одна бинарная операция: результат ее применения к аргументам X, Y в указанном порядке есть $X \wedge Y$.

Э л е м е н т а р н ы е в ы с к а з ы в а н и я. Один бинарный предикат — равенство, дающий элементарные высказывания вида

$$X = Y$$

А к с и о м ы. Если X, Y, Z — обы, то следующие выражения являются аксиоматическими высказываниями:

$$X \wedge a = X$$
$$X \wedge Yb_k = (X \wedge Y)\, b_k$$

П р а в и л а.

1. Если $X = Y$, то $Y = X$.
2. Если $X = Y$ и $Y = Z$, то $X = Z$.
3. Если $X = Y$, то $Xb_k = Yb_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.
4. Если $X = Y$ и $U = V$, то $X \wedge U = Y \wedge V$ [2]).

[1]) Обычно говорят 'wff' — сокращение от 'well formed formula' (правильно построенная формула). Термин 'веф' ('wef') выбран здесь ради удобства произношения.

[2]) Это правило в данной формулировке детерминативно. Если детерминативность нас не интересует, то мы можем разбить это правило на более простые правила:

Если $X = Y$, то $X \wedge Z = Y \wedge Z$.

Если $X = Y$, то $Z \wedge X = Z \wedge Y$.

Но чтобы сделать эти правила детерминативными, нам нужна такая посылка, как "$Z = Z$", а тогда правила будут не проще, чем вышеприведенное правило 4.

В этом примере содержится бесконечно много аксиом, ибо при каждых конкретных фиксированных значениях X и Y получается своя аксиома [1]). Такой способ задания бесконечной совокупности аксиом с использованием U-переменных типа 'X', 'Y' называется *схемой аксиом*. Здесь мы хотим порекомендовать читателю попытаться показать ассоциативность рассматриваемой бинарной операции [2]).

Следующий пример является вариантом примера 3.

Пример 4. (Ассоциативная система.)

Атомы. $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Операции. Одна двуместная операция, подобная последней операции из примера 3.

Элементарные высказывания. Те же, что и в примере 3.

Аксиомы. Если X, Y, Z — любые обы, то

(1) $$X = X$$

(2) $$(X \wedge (Y \wedge Z)) = ((X \wedge Y) \wedge Z)$$

Правила. Совпадают с правилами 1, 2, 4 примера 3. Примеры 3 и 4 можно рассматривать как формулировку синтаксической системы в виде об-системы (ср. разд. 5 и 6).

Пример 5. (Пропозициональная алгебра.)

Атомы. Бесконечная последовательность $p_1, p_2, \ldots$.

Операции. Одна унарная, одна бинарная. Их замыкания для аргумента X и для аргументов X, Y соответственно будут иметь вид

$$\neg X \qquad (X \supset Y)$$

(Последнее выражение можно читать "X имплицирует Y".)

Элементарные высказывания. Один одноместный базисный предикат, образующий высказывания вида

$$\vdash X$$

где X — об.

---

[1]) Вот примеры порожденных таким образом аксиом:

$$ab_2b_1 \wedge a = ab_2b_1$$

$$ab_2b_1 \wedge ab_2b_3b_5 = (ab_2b_1 \wedge ab_2b_3)\, b_5$$

[2]) Ср. упражнение 2.

Аксиомы. Если X, Y, Z — любые обы, то

$$\vdash (X \supset (Y \supset X))$$

$$\vdash ((X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z)))$$

$$\vdash ((\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y))$$

Правила. Если $\vdash (X \supset Y)$ и $\vdash X$, то $\vdash Y$.

В этом примере имеется бесконечная последовательность различных атомов — "пропозициональных переменных". Никакие свойства этих атомов не используются, за исключением того, что они образуют бесконечную последовательность. Следовательно, мы можем получить систему строго конечной морфологии, использовав следующим образом самы в роли пропозициональных переменных.

Пример 6. (Конечная форма пропозициональной алгебры.)

Атомы. a (один атом).

Операции. Две унарные и одна бинарная с замыканиями (для аргументов X, Y)

$$Xb, \qquad \neg X, \qquad (X \supset Y)$$

Элементарные высказывания. Три унарных предиката, порождающие элементарные высказывания следующего вида:

$S(X)$ (X есть сам)

$P(X)$ (X есть суждение)

$\vdash X$ (X утверждается)

Аксиомы. $S(a)$.

Правила.

Если $S(X)$, то $S(Xb)$.

Если $S(X)$, то $P(X)$.

Если $P(X)$, то $P(\neg X)$.

Если $P(X)$ и $P(Y)$, то $P(X \supset Y)$.

Если $P(X)$, $P(Y)$, то $\vdash (X \supset (Y \supset X))$.

Если $P(X)$, $P(Y)$, $P(Z)$,
то $\vdash ((X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$.

Если $P(X)$, $P(Y)$, то $\vdash ((\neg Y \supset \neg X) \supset (X \supset Y))$.

Если $\vdash (X \supset Y)$ и $\vdash X$, то $\vdash Y$.

Для того чтобы определить об-систему, мы должны, конечно, выбрать некоторый систематический способ приписывания А-имени каждому обу. Каждый конкретный такой способ мы будем называть *реализацией* системы. Для произвольной формальной системы мы примем (если какие-либо особые соображения не повлияют на наш выбор) следующую реализацию, подобную реализации в разд. 1 и 2. Атомы $a_0, a_1, a_2, \ldots$ образуют конечную

или бесконечную последовательность; k-я операция степени n — $\omega_k^{(n)}$, а ее замыкание для аргументов $X_1, \ldots, X_n$ —

$$\omega_k^{(n)} X_1 \ldots X_n$$ [1])

Скобки тогда не обязательны; в действительности можно показать, что эта система обозначений монотектонична в том смысле, что каждая конструкция описывается однозначно. Эту реализацию мы будем называть *стандартной реализацией по Лукасевичу*. Реализация, отличающаяся от нее выбором символов, но сохраняющая ее основную идею использования префиксных функций фиксированной степени без скобок, также будет называться реализацией по Лукасевичу (но не стандартной).

Следует подразумевать, что в понятие оба формальной системы включается ряд вырожденных случаев. Так, мы можем иметь чистую морфологию обов без базисных предикатов и, следовательно, без соответствующей теории; мы можем рассматривать об-системы без операторов и т. д. Для некоторых целей уместно рассматривать атомы как операторы степени 0.

4. Представление системы. Было подчеркнуто, что точная природа формальных объектов формальной системы любого вида не играет роли. Любой способ рассмотрения формальных объектов как некоторых конкретных объектов, полученных из опыта, называется *представлением* системы при условии, что содержательные объекты сохраняют структуру формальных объектов. Поэтому, когда мы в примере 1 говорили, что a есть 'α' и b есть 'β', и вводили соглашение, что сочленение А-имен должно указывать на сочленение обозначаемых ими О-выражений, мы вводили представление системы.

Ограничение, требующее, чтобы содержательные объекты сохраняли структуру формальных объектов, важно. Оно означает, что для каждого формального объекта имеется отдельный содержательный объект, а в случае об-системы оно означает существование отдельного объекта для каждой конструкции. Это значит, далее, что операции можно изобразить как способы комбинации содержательных объектов. Выражаясь формально, должно существовать взаимно-однозначное соответствие, изоморфное по отношению к операциям и способам комбинации, между формальными объектами (или их именами, в качестве которых служат А-имена) и содержательными объектами представления.

[1]) Ср. объяснение обозначения $\varphi_k^{(n)}$ в разд. 1. Заметим, что я объясняю использование символа в U-языке, говоря, что́ представляет собой десигнат; при этом символ используется, а не упоминается. Этот способ речи более естественен, чем иносказания, использовавшиеся в разд. 1. Как и в разд. 1, иногда удобно также перенумеровать операции в одной последовательности; при этом k-я операция будет обозначаться ω_k, а ее степень — n_k.

Представление не следует смешивать с интерпретацией. Согласно определению из разд. B4, интерпретация есть соответствие между формальными утверждениями и некоторыми содержательными утверждениями, и она определена для теории вне зависимости от того, является эта теория системой или нет; представление же есть соответствие между формальными объектами и содержательными объектами, и оно определено для чистой морфологии безотносительно к теории, которая на ней строится; более того, на истинность элементарных утверждений не влияет представление. Мы остановимся на этом подробнее в разд. 5.

Содержательные объекты представления могут быть выбраны различными путями. Для тех, кто склонен к этому, подходят абстрактные идеи или платонистские понятия или же в качестве содержательных объектов могут быть выбраны объекты более конкретной природы. Но выбор представления не влияет на доказательства теорем.

Рассмотрим теперь несколько специальных способов представления более или менее частных видов.

Во-первых, сами А-имена, поскольку они дают единственное имя каждому формальному объекту и должны отражать структуру этих объектов, по определению образуют представление. Это представление называется *автонимным представлением*.

Во-вторых, всякая формальная система произвольного типа имеет синтаксическое представление. Это тривиально, так как автонимное представление является синтаксическим, но из любого автонимного представления мы получаем другие синтаксические представления, если мы в автонимном представлении заменим его буквы новыми, быть может внеся некоторые изменения в операторы [1]). В частности, мы будем рассматривать реализацию по Лукасевичу (стандартную или нестандартную) как представление, даже если мы рассматриваем ее в А-языке. Такое представление мы будем называть *представлением по Лукасевичу*; если же эта реализация к тому же стандартна, мы назовем ее *стандартным представлением по Лукасевичу*.

В связи с синтаксическим представлением стоит заметить, что выражениями, соответствующими обам, не могут быть все выражения подходящего О-языка, образованные посредством сочленения, так как последние политектоничны. Если мы назовем выражения, которые действительно возникают, *вефами* (т. е. правильно построенными выражениями [2])), то обы являются вефами и вефы образуют монотектонический индуктивный класс выражений. Такая система может быть названа *эвтактической* в про-

[1]) Способы получения такого представления рассмотрены в [CFS], разд. 4.

[2]) См. замечания перед примером 3 в разд. 3.

тивоположность *пантактической* системе, в которой могут встречаться всевозможные выражения [1]).

Перенумерацией букв и последующей заменой чисел соответствующими самами мы можем свести такое представление к представлению в виде выражений в алфавите $\{a, b\}$ [2]).

Наконец, можно указать синтаксическое представление, в котором в алфавит О-языка входит только один символ. Так как слова в языке с единственным символом различаются только числом вхождений этого символа, то подобное представление сводится к представлению системы в терминах натуральных чисел. Такое представление называется *гёделевским представлением*, а числовое представление формального объекта — его *гёделевым номером*. В связи с этим представлением мы с удобством можем использовать обычные арифметические обозначения. Для такого использования есть различные пути [3]). Для синтаксической системы один из простейших путей состоит в том, чтобы приписать буквам простые числа, а затем приписать последовательности

$$X_1 X_2 \ldots X_n$$

гёделев номер

$$2^{g_1} \cdot 3^{g_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{g_n}$$

где p_k — k-е простое число, а g_k — гёделев номер X_k. Для обсистемы мы можем приписать обу

$$\omega_k X_1 X_2 \ldots X_{n_k}$$

число

$$2^n \cdot 3^k \cdot 5^{g_1} \cdot \ldots \cdot p_{n_k+2}^{g_{n_k}}$$

Эту процедуру можно видоизменить бесчисленным количеством способов. Для случаев, в которых появляется только конечное число конституэнтов, возможны гораздо более простые представления (с помощью упорядоченных n- или k-адических разложений вместо разложений на простые множители и т. п. [4])).

Можно задавать систему и не имея в виду никакого конкретного ее представления. Такая система называется *абстрактной*. Из сказанного ясно, что абстрактная система может быть любого типа.

[1]) Например, системы примеров 1 и 2 являются эвтактическими причем самы образуют вефы.

[2]) См. ниже разд. D2.

[3]) См. [CFS], пример 6, стр. 256 и далее.

[4]) См. [CFS].

5. Интерпретация системы. Понятие интерпретации было введено в разд. B4 по отношению к теории. Здесь мы рассмотрим специализацию этого понятия в применении к системам.

Для этой цели мы сначала определим понятие соответствия, сходное с понятием представления, за исключением того, что один и тот же содержательный объект может быть поставлен в соответствие двум или более различным формальным объектам. Такое соответствие мы назовем *оценкой*; она будет производиться относительно концептуального класса $\mathfrak{V}$, состоящего из содержательных объектов, называемых *значениями*, которые приписываются формальным объектам. Например, мы можем образовать оценку для примера 5 над классом $\mathfrak{V}$, состоящим из 0 и 1, произвольно приписывая одно из этих значений каждому атому; тогда другие обы примут значения, определенные обычными таблицами истинности, причем роль истины играет 1. Или вернемся к примеру 3. Пусть значения будут словами в алфавите $c_1, c_2, \ldots, c_n$, включая пустое слово. Пусть атому a приписывается пустое слово, причем если обам X, Y приписываются слова X', Y' соответственно, то будем обу Xb_k приписывать слово $X'c_k$, а обу $X \wedge Y$ — слово $X'Y'$. Ни одна из этих оценок не может быть представлением, так как в первом случае одно и то же значение приписывается бесконечному числу обов, а во втором случае обам, дающим разные конструкции одного и того же слова, будет приписано одно и то же значение, хотя сами эти обы различны.

В примерах, рассмотренных в предыдущем абзаце, оценка определялась так: придавались значения атомам, а значения других обов определялись с помощью содержательных операций. Случаи типа примера 6 требуют небольшого обобщения. При этом обычно начинают с того, что приписываются значения самам и с этого момента процесс идет так же, как в примере 5. Самы образуют то, что позднее (разд. 3D2) будет названо *квазиатомами*.

Если дана оценка, то мы можем определить интерпретацию, сопоставляя с каждым базисным предикатом его *интерпретант* — предикат, определенный на значениях. Интерпретацию, определенную таким образом, мы будем называть *прямой интерпретацией*. Скажем, в примере 5 мы получаем прямую интерпретацию, взяв в качестве интерпретанта для $\vdash$ свойство быть равным 1, а в примере 3 прямая интерпретация получается, если взять в качестве интерпретанта для равенства отношение "иметь одно и то же значение". Интерпретация в каждом из этих случаев верна; во втором случае она к тому же адекватна [1]).

[1]) См. упражнение 3 в конце этого раздела.

Вернемся к примеру 5 и опишем другую интерпретацию. Скажем, что об X является тавтологией, если он принимает значение 1 при каждой подходящей оценке с помощью таблиц истинности. Тогда в качестве интерпретации для элементарного утверждения

$$\vdash X$$

возьмем утверждение о том, что X (или связанная с ним функция от значений) является тавтологией. То, что эта интерпретация правильна, можно легко доказать по индукции [1]); то, что она адекватна, вытекает из одной простой (эпи)теоремы классической алгебры высказываний. И все же это не прямая интерпретация, по крайней мере в финитном смысле [2]). Это типично для систем, включающих обы, которые называются переменными, ибо им не приписывают одного содержательного значения, но разрешают изменяться в определенной области.

Интерпретации только что упомянутого вида близки тому, что обычно называется *моделями*. Это понятие определено для систем, основанных на исчислении предикатов первой ступени. Не имея возможности вдаваться в подробности, отметим здесь лишь следующее: основная идея состоит в том, что существует семейство оценок на определенной области значений и каждому элементарному высказыванию приписывается некоторая содержательная функция, определенная на множестве таких оценок. Интерпретантом такого высказывания является высказывание о том, что эта функция истинна для всех оценок. Это *полумодель*; полумодель является моделью тогда и только тогда, когда она правильна.

6. Сравнение синтаксической и об-систем. Вопрос о взаимоотношении этих двух типов систем был предметом обсуждения с различных сторон в предыдущем изложении. Удобно будет свести вместе эти более или менее разбросанные замечания и добавить к ним некоторые другие, чтобы иметь более систематический взгляд на природу этих систем [3]).

Во-первых, ни для какого типа систем не предполагается, что предметом рассмотрения математики непременно являются символы. Оба типа систем могут быть представлены в терминах выражений; фактически это можно делать в терминах выражений

[1]) См. упражнение 8.

[2]) Можно было бы сказать, что в этом случае обы становятся некоторыми функциями истинности, определенными на всех приписываниях значений истинности атомам, и что мы действительно имеем оценку, в которой значения являются функциями истинности. Но такое значение не является конечным. Следовательно, это есть значение только в обобщенном смысле.

[3]) Ср. также разд. S3 и S4.

любого алфавита, содержащего два и более символов и (в обобщенном смысле) в терминах алфавита с одним только символом, т. е. в терминах чисел. Но ни в одном случае не навязывается конкретный выбор алфавита. Свойства, которые принимаются в расчет, ничего общего не имеют с природой самих символов, никогда не говорят, например, что 'x' составлен из двух пересекающихся линий. Аккуратнее было бы сказать, что в математике мы занимаемся устройствами, которые могут посредством многочисленных способов комбинации образовывать предметы различных отличимых друг от друга родов, интересуемся теми свойствами, которые не меняются при изменении элементов или при замене одних способов комбинаций другими, однотипными с первыми. Эти устройства можно воплотить либо в виде цепей из звеньев различного рода (в случае синтаксической системы), либо в виде древовидных конструкций (в случае об-системы).

Во-вторых, каждый из двух типов систем можно свести к другому. Возможность синтаксического представления, изложенного в разд. 4, показывает, что об-система может быть сведена к эвтактической синтаксической системе. Обратное сведение для произвольной синтаксической системы показано в принципе в примерах 3 и 4. В случае систем, обычно используемых для логических целей, можно пойти даже дальше. Ведь эти системы — эвтактические и монотектонические, а такие системы, так сказать, одновременно принадлежат к обоим типам.

С определенной точки зрения понятие об-системы является более строгим, чем понятие конкатенативной системы. В последней ассоциативность операции сочленения должна предполагаться заранее. Поэтому доказательство в конкатенативной системе похоже на доказательство геометрической теоремы с помощью чертежа. Может быть, и верно, что не следует изгонять такое интуитивное основание полностью (так как оно нужно при проверке конструкции), но в об-системе оно используется в меньшей степени.

Кроме того, в об-системе меньше подчеркиваются лингвистические детали. Предположим, например, что нужно было бы взять пример 6 с автонимным представлением; тогда получилась бы конкатенативная система, алфавит которой состоит из букв

$$a,\ b,\ (,\ ),\ \neg,\ \supset$$

Если бы требовалось заменить эти буквы другими, скажем

$$\alpha,\ \beta,\ [,\ ],\ \sim,\ >$$

то всякий согласился бы, что это просто другое представление той же самой конкатенативной системы. Но если бы нужно было

перейти к стандартному представлению по Лукасевичу, то полученная конкатенативная система была бы столь отлична от первоначальной, что ее рассматривали бы как новую систему, тогда как с точки зрения об-системы она была бы лишь иным представлением первоначальной системы. Поэтому об-система инвариантна для более широкого класса изменений в представлении, чем конкатенативная система. Следовательно, об-система согласуется с тенденцией математики, состоящей в том, чтобы искать существенные, инвариантные образования—такие, как векторы, проективные геометрии, топологические пространства и т. д.

До сих пор мы говорили о неинтерпретированных формальных системах. Но такие системы, по крайней мере наиболее важные [1]), не приходят к нам первоначально в чистом виде, чтобы потом обрасти интерпретацией; скорее наоборот: сначала мы имеем содержательную дисциплину, а из нее уже с помощью процесса *формализации* строим формальную систему. В следующих пяти абзацах мы рассмотрим понятие формализации более детально.

Первая стадия формализации состоит в формулировке дисциплины как дедуктивной теории с такой точностью, чтобы о правильности основных выводов этой теории можно было судить объективно, рассматривая язык, на котором они выражены. Мы получаем тогда по существу то, что в разд. 1С было названо формализованной содержательной теорией [2]). Пусть L — язык, на котором выражены элементарные высказывания.

Теперь возможны два различных направления формализации. Первое заключается в том, что мы используем L как О-язык некоторой синтаксической системы; этот метод мы назовем *метасемиозисом*, а полученную при этом систему — *метасистемой* относительно первоначальной дисциплины (или L). Второе направление состоит в том, что мы продолжаем использовать L в U-языке, но изменяем его значение или "абстрагируемся" от его значения, так что L становится А-языком формальной системы; этот второй метод мы назовем *абстракцией*. Новая формальная система может быть либо синтаксической, либо об-системой; она может быть абстрактной или же мы можем предпочесть иметь в виду представление или какую-нибудь иную интерпретацию. Можно говорить и о промежуточных направлениях, и вообще различие между этими двумя направлениями, если и разрешить

[1]) Неевклидова геометрия, например, не возникает из физической геометрии посредством формализации, но появляется по аналогии из евклидовой геометрии. Системы, образованные таким путем по аналогии, могут быть названы вторичными. Как показывает данный пример, они могут играть очень важную роль в методологии науки.

[2]) Эта стадия была достигнута Фреге и Расселом. Можно, конечно, выделить и множество более ранних стадий, но они не будут нас здесь интересовать.

модифицировать L до начала формализации, оказывается, как мы увидим, не столь уж принципиальным.

Принимая метасемиотический метод, нужно изобрести некоторый новый А-язык, скажем M, для ссылки на язык L. Существует несколько возможностей сделать это. Можно, как делал Гильберт, использовать L автонимно; в разд. А2 показано, что этот метод чреват некоторыми опасностями. Можно использовать для M совершенно особую символику, например когда мы используем 'a' как имя для 'α' в разд. 2. В этом случае новые странные обозначения могут значительно затруднить понимание. (Достаточно ли, кстати, оказался искушенным читатель, чтобы не поразиться замечанию в конце разд. 2, где говорилось, что О-буквами в примере 1 являются греческие буквы a и b?) Принятый здесь метод использования имен, образованных с помощью кавычек, хотя и имеет выгодные стороны, все же таит в себе трудности, которые почти так же серьезны, как и опасности автонимного метода (см. упражнение А2). Даже когда этот метод применяется с осторожностью, как у Куайна и Карнапа, символика оказывается довольно-таки вычурной.

В противоположность этому, если применяется метод абстракции, то продолжают использовать знакомый язык — во всяком случае, способами, напоминающими нам его первоначальный смысл. Главная опасность здесь состоит в том, что нас могут ввести в заблуждение естественные, но неверные ассоциации. Однако математики привыкли к трудностям такого рода; эти трудности встречаются не только в математике, но и при всяком обобщении. Можно использовать различные средства, чтобы избежать ловушек: мы можем иметь в виду различные представления или интерпретации, включая автонимное; можем производить и разумные изменения в L.

Мы включили в понятие абстракции случаи, когда мы приходим к формальной системе любого из видов. Если система — синтаксическая, то это сводится в принципе [1]) к превращению L в подходящий О-язык, а затем к применению метасемиозиса. Такие случаи примыкают к обоим направлениям; в частности, к обоим направлениям принадлежит гильбертовский тип метасистемы с автонимным представлением. Но эти виды абстракции довольно искусственны. Если абстракция развивается естественно, т. е. сохраняется по крайней мере существенная грамматика L и отвергается обозначение имен из L или замена их другими, то практически во всех интересных с точки зрения логики случаях приходят к об-системе.

[1]) Могут, вероятно, встречаться исключения, но нас они не интересуют.

Вот пока и все о процессе формализации. Наше обсуждение этого процесса выявило следующие положения, относящиеся к теме сравнения двух типов систем. Об-система представляет собой естественный продукт процесса абстракции. Конкатенативная система, если уж она существует, возникает только при чрезмерном внимании к символике. Именно по этой причине почти все синтаксические системы, возникающие при формализации, являются эвтактическими и монотектоническими, и нет никакой нужды (кроме как, возможно, для установления монотектонического свойства вефов) рассматривать слова, не являющиеся правильно построенными. Поэтому об-система ближе к действительному ходу мысли. Она больше подходит к возможности представления или интерпретации в терминах содержательного предмета. Более того, естественно использовать символику способами, которые меньше отклоняются от обычного использования. Трудности при этом носят тот же характер, что и в других ветвях современной абстрактной математики, и с ними можно справиться знакомыми средствами.

С другой стороны, понятие синтаксической системы имеет некоторые преимущества в конкретности. Как заметил Гильберт [1]), наши рассуждения верны лишь тогда, когда они основаны на операциях с конкретными объектами, которые мы непосредственно создаем. Для того чтобы охарактеризовать эффективный процесс в разд. A5, мы должны были предположить определенные допустимые элементы, которые непосредственно нужно понимать как таковые. Далее, всякая мысль сообщается посредством языка, и поэтому естественно наиболее определенными из таких допустимых воображаемых элементов считать слова в конечном алфавите. Определение формальной системы требует выбора A-языка, имена которого (как правило) являются такими словами. Поэтому в исследованиях по природе эффективного процесса (и в других подобных делах) нам нужны синтаксические рассмотрения, особенно та часть семиотики, называемая *тектоникой*, которая занимается отношением лингвистических выражений к конструкциям.

В результате полезными оказываются обе точки зрения и важно осознавать их отношение друг к другу. При изучении об-систем нужно знать, что возможно синтаксическое представление и что A-имена образуют монотектоническую лингвистическую структуру. При изучении синтаксической логики первое, что делают (осознавая это или нет),— это представляют ее в виде об-системы [2]). Поэтому система, чтобы быть полезной как логика, должна (при современном состоянии нашего познания) принадлежать к обоим видам.

[1]) См. цитату в разд. S3.

[2]) Это может быть верно даже в лингвистике. Ср. [LAG].

Упражнения

Некоторые из этих упражнений включают эпитеоретические методы, которые систематически не излагаются до гл. 3. Термины, которые в дальнейшем будут формально определены, пока должны считаться само собой разумеющимися.

1. Привести полностью формальное доказательство следующих элементарных теорем примера 3:

(*a*) $$ab_1b_2b_3 = ab_1 \wedge ab_2b_3$$

(*b*) $$(a \wedge ab_2b_1) \wedge (ab_1b_3 \wedge ab_2) = ab_2b_1b_1 \wedge ab_3b_2$$

2. Показать, что операция сочленения из примера 3 ассоциативна. Привести эффективный процесс для доказательства любого конкретного примера схемы теорем

$$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$$

Ср. доказательство ассоциативного закона в элементарной арифметике, например, у Дедекинда [WSW] или Ландау [GLA].

3. Показать, что прямая интерпретация примера 3, которая описана в разд. 5, правильна и адекватна.

4. Показать, что пример 4 имеет прямую интерпретацию в непустых словах алфавита $\{c_1, \ldots, c_n\}$, где равенство интерпретируется как тождество, и что эта интерпретация правильна и адекватна.

5. Показать, что пример 4 имеет представление в подмножестве обов примера 3 и что это представление является также правильной и адекватной прямой интерпретацией. Что вы можете сказать про обратное соответствие? Сказали ли бы вы, что примеры 3 и 4 эквивалентны, и если да, то в каком именно смысле?

6. Показать, что если X, Y, Z — обы примера 5, то следующие выражения являются элементарными теоремами:

(*a*) $$\vdash Y \supset Z . \supset : X \supset Y . \supset . X \supset Z$$

(*b*) $$\vdash X \supset . Y \supset Z . \supset : Y \supset . X \supset Z$$

(*c*) $$\vdash X \supset Y \supset . X \supset Z . \supset . X \supset . Y \supset Z$$

(*d*) $$\vdash X \supset Y . \supset . \neg Y \supset \neg X$$

(*e*) $$\vdash X \supset \neg X \supset \neg X$$

(Шмидт [VAL], разд. 80—82; ср. также ниже гл. 5 и 6. По поводу точечной системы обозначений см. разд. A4.)

7. Указать эффективный процесс для представления произвольной об-системы в словах O-языка с алфавитом, состоящим из двух символов. ([CFS], пример 5.)

8. Проверить утверждения, сделанные в разд. 5 об интерпретации примера 5 с помощью таблиц истинности.

9. Показать, что пример 5 имеет представление в терминах тех обов примера 6, для которых справедливо $P(X)$, и что если $\vdash$ примера 5 интерпретируется как $\vdash$ примера 6, то интерпретация правильна и адекватна.

10. Пусть X, Y, U, V — обы примера 3 (или примера 4) и

$$X \wedge U = Y \wedge V$$

Показать, что существует такой об Z, что либо $X = Y \wedge Z$ и $V = Z \wedge U$, либо $Y = X \wedge Z$ и $U = Z \wedge V$.

11. Показать, что если изменить обычные таблицы истинности так, что $\neg X$ всегда принимает значение 1, то получающаяся тавтологическая интерпретация для примера 5 неверна, но что она будет верна, если третью схему аксиом опустить или заменить схемами аксиом (*d*) и (*e*) упражнения 6. Что можно сказать относительно независимости третьей схемы аксиом примера 5? Показать, что две другие схемы аксиом независимы в том же смысле. (Шмидт [VAL], разд. 83.)

12. Группа обычно определяется как такой класс G элементов, для которого удовлетворяются следующие постулаты:

*G*1. Любым двум элементам a, b из G соответствует единственный элемент $a \circ b$ из G.

*G*2. Для всех элементов a, b, c из G

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

*G*3. Существует такой элемент i из G, что для всех a из G

$$a \circ i = a$$

*G*4. Если дан элемент a из G, то существует другой элемент a' из G, такой, что

$$a \circ a' = i$$

Назовем равенство, включающее переменные для произвольных элементов G, элементарным групповым тождеством, если оно получается из *G*1 — *G*4 по обычным правилам для равенства и подстановки вместо переменных. Сформулировать такую об-систему G^* с атомами e_1, e_2, e_3, . . . и исходным предикатом $=$, что элементарными теоремами G^* являются в точности те равенства, которые становятся элементарными групповыми тождествами тогда, когда e_1 оценивается как i, а e_2, e_3,... — как неопределенные элементы G. ([APM], стр. 226; [TFD], стр. 8; [LLA], стр. 33—35.)

D. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ

Мы рассмотрим здесь некоторые специальные формы, к которым могут быть сведены системы.

1. Предикатные типы. Система, в которой имеется единственный базисный предикат, являющийся бинарным отношением, называется *системой с (бинарным) отношением*, или *реляционной системой*. Если теория системы такова, что отношение это рефлексивно и транзитивно, то система называется *квазиупорядоченной*; если отношение обладает свойствами равенства, то система называется *эквациональной*. Большинство систем обычной математики — эквациональные системы.

Вторым типом системы является система, в которой имеется единственный базисный одноместный предикат. Базисный предикат выделяет некоторый класс формальных объектов; это согласуется с обычной точкой зрения, по которой формальные объекты являются О-предложениями. Назовем эти объекты О-теоремами, или *утверждениями*. Этот тип системы естественно назвать *ассерторическим* [1]) типом; другое название — *логистический* [2]) *тип* — объясняется тем, что этот тип преобладает в фундаментальных логических исследованиях. Для единственного предиката мы будем употреблять префикс '$\vdash$', так что элементарные высказывания имеют вид

$$\vdash X \tag{1}$$

где X — формальный объект. Знак '$\vdash$' мы будем называть *знаком утверждения*. Часто этот предикат выражается словами: '— доказуемо' (Гильберт) или '— входит в T' (Хантингтон).

Произвольную систему можно свести к системе ассерторического типа. В каком смысле это верно, можно понять из того, как фактически выполняется такое сведéние. Пользуясь стандартной системой обозначений, о которой говорилось в конце разд. С1, сопоставим каждому базисному предикату $\varphi_k^{(n)}$ новый оператор $\pi_k^{(n)}$. Теперь заменим каждое элементарное высказывание вида

$$\varphi_k^{(n)} X_1 X_2 \ldots X_n \tag{2}$$

соответствующим элементарным высказыванием

$$\vdash \pi_k^{(n)} X_1 X_2 \ldots X_n \tag{3}$$

Мы получим тогда новую ассерторическую систему, эквивалентную старой в том смысле, что элементарные высказывания одной из систем можно с сохранением истинности перевести в элементарные высказывания другой системы.

[1]) От assertion (утверждение). — *Прим. ред.*

[2]) См. разд. S1.

Сделаем по поводу этого сведе́ния одну оговорку. При представлении системы, а особенно при установлении ее правил, может оказаться удобным использовать предикаты в U-языке, которые мы не хотим явно выделять из среды остальных предикатов. Другими словами, мы хотим трактовать эти предикаты неформально. Поэтому свойство быть обом или O-выражением и вообще свойство быть формальным объектом можно не упоминать, так как оно справедливо для всех формальных объектов, встречающихся в изложении. Однако добавление новых операций может расширить область формальных объектов и правила могут потерять свою справедливость, если U-переменные, относящиеся к формальным объектам, не ограничивать формальными объектами в прежнем смысле. Чтобы быть уверенными в том, что мы избежали такого рода трудностей, необходимо ввести явно такие предикаты U-языка, прежде чем производить вышеуказанное сведение.

В качестве примера рассмотрим сведе́ние из примера 2 разд. C2. Используем '$\square$' в качестве бинарного инфикса для операции, которая должна заменять равенство, и пусть '$\sigma(\text{———})$' используется как функтор для одноместной операции, которая должна заменить '——— есть сам'. Тогда постулаты примера 2 принимают вид

$$\vdash \sigma(a)$$
$$\vdash a \square a$$

Если $\vdash \sigma(X)$, то $\vdash \sigma(Xb)$
Если $\vdash \sigma(X)$, $\vdash \sigma(Y)$, $\vdash X \square Y$, то $\vdash Xb \square Yb$

В этом случае введение σ не затрагивает равенства (т. е. элементарные теоремы вида

$$\vdash X \square Y$$

остались бы теми же, если бы мы опустили первый и третий постулаты и посылки, относящиеся к σ, в четвертом постулате). Но в общем случае это неверно (см. упражнения 1 и 2 в конце этого раздела).

В ассерторической системе возникает двусмысленность в отношении аксиом. До сих пор мы понимали аксиому как некоторое элементарное высказывание; аксиома всегда выражалась предложением в U-языке. Скажем, высказывание

$$\vdash (p_1 \supset (p_2 \supset p_1)) \tag{4}$$

является аксиомой системы примера 5. Но термин 'аксиома' естественнее относить к самому утверждаемому обу, чем к высказыванию об утверждаемости, и многие делают именно так. С этой точки зрения вместо (4) в качестве аксиомы рассматривается об

$$(p_1 \supset (p_2 \supset p_1)) \tag{5}$$

Поэтому аксиома есть нечто скорее называемое, чем утверждаемое. В большинстве случаев слово 'аксиома' разрешается использовать в обоих смыслах, причем различие устанавливается по контексту; но когда различие важно, мы будем говорить о (4) как о *аксиоматическом утверждении*, тогда как (5) будет *аксиоматическим обом*. Там, где, как в примере 5, представляется уместным называть обы "высказываниями", мы будем говорить о (5) как о "аксиоматическом высказывании".

Знак утверждения часто используется в записях вида

$$X_1, \ldots, X_m \vdash Y \tag{6}$$

для указания того, что если $X_1, \ldots, X_m$ присоединены к системе как новые аксиоматические обы, то Y есть высказывание расширенной системы. Поэтому (6) представляет (формальное) отношение следования, соответствующее (1). Это употребление не противоречит (1) (ибо для $m = 0$ оба определения совпадают), а является его расширением. В этом смысле '$\vdash$' можно читать как "влечет" или "дает".

По некоторым более специальным причинам удобно оставлять два или более одноместных предикатов. Такая система может быть названа мультиассерторической. Примерами могут служить примеры 1 и 6. Однако это просто вопрос удобства, ибо в принципе всегда можно осуществить вышеупомянутое сведе́ние.

Современные логические системы, как правило, задаются в ассерторической форме. Дело в том, что системы этого типа проще устроены и потому их, безусловно, удобнее использовать в вопросах, относящихся к основаниям математики. Но системы с отношением более похожи на те, что употребляются в обычной математике. Самая ранняя из современных логических систем — алгебра Буля [1]) — была эквациональной. Многочисленные аналогии между логикой и алгеброй, установленные в последние годы, привели к возрождению интереса к реляционным логическим системам [2]), изучение которых обещает быть весьма плодотворным. Так как реляционную систему всегда можно свести к ассерторической с помощью использованного уже выше метода, а обратное сведе́ние можно осуществить, взяв формальный объект 1 и опре-

[1]) Джордж Буль (1815—1864) — английский математик, профессор математики в Королевском колледже (Корк, Ирландия) с 1849 по 1864 г. Список его логических работ см. у Чёрча [BSL]. Можно сказать, что современная математическая логика началась с основных работ Буля, опубликованных в 1847 и 1854 гг. Он также активно работал в области теории дифференциальных и разностных операторов; ему принадлежит также одна из первых теорем об алгебраических инвариантах.

[2]) См., например, Халмош [BCA] и работы Тарского по цилиндрическим алгебрам (разд. 7S2).

делив (1) как

$$1 = X$$

то очевидно, что обе формы в принципе эквивалентны. В этой книге, поскольку особое внимание в ней уделяется вопросам обоснования, основную роль будет играть ассерторический тип, но вообще будут встречаться оба типа.

Здесь, по-видимому, будет уместно несколько подробнее остановиться на различии между алгеброй как разделом обычной математики и описываемой здесь эквациональной об-системой. В первом случае считают заранее существующим некоторый класс "элементов" и операции понимают как установление соответствия между этими элементами. Поэтому если дана n-ка элементов, то операция степени n "приписывает" ей в качестве значения некоторый заранее существующий элемент. Более того, равенство считается заранее заданным и равные элементы отождествляются, хотя бы они являлись значениями разных операций или одной операции, примененной к различным n-кам. В об-системе, однако, заранее задаются только атомы и операции; операция не приписывает элемент чему-то, что существовало до него, а строит новый; обы порождаются из атомов с помощью операций, и свойство монотектоничности требует, чтобы разные конструкции давали разные результаты; равенство является отношением, имеющим место между этими обами при обстоятельствах, явно фиксированных правилами системы [1]).

2. Упрощения формальных объектов. В предыдущем разделе речь шла о преобразованиях, затрагивающих базисные предикаты. Здесь мы сделаем ряд замечаний, относящихся к формальным объектам. Рассматриваемые способы редукции довольнотаки формальны и используются для достаточно специальных целей. Для вопросов обоснования важна, однако, сама возможность таких сведе́ний.

Первое замечание состоит в том, что в об-системе мы можем обойтись одним бинарным предикатом. Для этой цели мы сопоставим каждому элементу некоторый новый атом; тогда замыкание первоначальной операции мы сможем заменить такой серией шагов, что k-й шаг серии будет замыканием бинарной операции, применимой к результату $(k-1)$-го шага (или к новому атому в случае первого шага) и к k-му аргументу. Эту новую операцию мы назовем *приложением*; ее замыкание символически обозначается простым приписыванием аргументов друг к другу, причем скобки опускаются по принципу ассоциации налево.

[1]) Ср. [CLg], стр. 17. Можно показать, что точку зрения абстрактной алгебры можно счесть частным случаем второй точки зрения в качестве интерпретации (см. упражнение C12, а также разд. 5A4).

Так, если g — атом, заменяющий n-местную операцию ω, то мы заменяем любой об $\omega X_1 X_2 \ldots X_n$ на $(gX_1X_2 \ldots X_n)$, где последнее выражение образуется сначала путем приложения g к X_1, затем его результата к X_2 и т. д. Предположим, что мы считаем такой новый об g *функцией* степени n; тогда интерпретация приложения заключается в том, что она применяется к функции степени n и к обу X и образует функцию степени $n-1$, получаемую из функции степени n подстановкой X на первое аргументное место. Например, если A — функция сложения, то $(A1)$ будет функцией, которая обращает x в $1+x$, а $(A12)$, т. е. $((A1)2)$, будет $1+2$, т. е. 3. Конечно, это преобразование вводит в систему новые обы, причем некоторые из них (скажем, (AA)) будут бессмысленными в вышеуказанной интерпретации, но от такого рода трудностей можно избавиться посредством тех же модификаций предикатной структуры, что описывались в разд. 1.

Второе замечание относится к упоминавшейся уже несколько раз возможности того, что букв или атомов может быть бесконечно много. Для системы действительно фундаментальной природы это неудовлетворительно, так как единственный путь понимать бесконечный класс конструктивно — это представлять его себе как индуктивный класс некоторого рода. Поэтому такой бесконечный класс исходных элементов имеет смысл только тогда, когда система строится на базе некоторой другой, более фундаментальной системы. Для целей обоснования мы можем, однако, использовать самы примеров 1 и 2 разд. C. В случае синтаксической системы мы можем перенумеровать буквы и заменить их в порядке нумерации самами. В результате мы получим новый O-язык, основанный на двух буквах a и b; так как a указывает промежутки между буквами, то первоначальные буквы восстанавливаются однозначно. В случае об-системы мы можем заменить атомы самами; последние можно рассматривать как порожденные из a операцией приписывания b справа. Если имеется операция приложения, то мы можем обойтись одним-единственным атомом и порождать все обы последовательными приложениями этого атома к самому себе. Модификации этой процедуры для случая двух или более отдельных последовательностей, двояко упорядоченных бесконечных последовательностей и т. п. в принципе не вызывают затруднений [1]). Конечно, некоторые из этих редукций будут искусственными, и если число элементов конечно и не слишком велико, то наиболее сложные редукции осуществлять незачем.

[1]) См., например, [CLg], стр. 30—32; [DTC], стр. 17, сноска 3.

Здесь мы все время исходим из того, что множество рассматриваемых элементов счетно. Но надо сказать, что с конструктивной точки зрения вообще нет никаких несчетных бесконечных совокупностей. Рассмотрения, связанные с такими совокупностями, должны или включать какие-то платонистские допущения, или же основываться на формализованной теории множеств, которая может быть развита лишь на гораздо более поздней стадии.

3. Элементарные системы. Рассматриваемое теперь упрощение касается дедуктивных правил системы. Оно не всегда осуществимо, так что его следует понимать как специальное ограничение, определяющее некоторый класс систем.

Пусть правила системы имеют вид

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m \longrightarrow \mathfrak{B}$$

где U-предложения $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$ построены из A-имен и некоторых U-переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью одних лишь операторов, обозначающих операции системы, и глаголов, выражающих ее базисные предикаты; иными словами, здесь $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}$ — элементарные высказывания в расширении данной системы, образованном присоединением к ней $x_1, \ldots, x_n$ в качестве дополнительных атомов. Тогда, считая $x_1, \ldots, x_n$ определенными элементарными выражениями или обами, мы получаем некоторые конкретные правила. Правила такого рода мы будем называть *элементарными правилами*, а систему, содержащую только такие правила, — *элементарной системой*.

В ассерторической об-системе элементарное правило имеет вид

$$X_1, \ldots, X_m \vdash Y$$

где $X_1, \ldots, X_m, Y$ — обы, образованные из атомов и переменных $x_1, \ldots, x_n$ посредством операций системы. Сказанное верно только для конкатенативной системы; только в этом случае выражения $X_1, \ldots, X_m, Y$ получаются из букв $x_1, \ldots, x_n$ посредством операции сочленения. Все системы в примерах 1—6 разд. С элементарны — при условии, что системы примеров 1 и 2 понимаются как конкатенативные.

В качестве примера неэлементарного правила мы можем взять последнее правило системы примера 1, считая эту систему аффиксативной.

Если XcY — тантет, то и $XbcYb$ — тантет. Здесь X и Y аналогичны $x_1, \ldots, x_n$. Но ни XcY, ни $XbcYb$ не могут быть образованы с помощью операций системы, даже если X и Y допускаются как буквы, так как приписывание Y справа не является операцией системы. Для того чтобы установить такое правило, нужно было бы ввести операцию сочленения (или что-либо ей подобное), которая не использовалась при образовании формальных объектов. Такие операции называются *вспомогательными*.

Другим примером служит правило подстановки. Скажем, для системы примера 5 это правило имело бы вид

$$P \vdash P^*$$

где P — об, а P^* получается из P посредством подстановок. Рассмотрим тот случай, когда вместо p_2 подставляется об M. Тогда, для того чтобы получить P^*, нужно взять конструкцию P и заменить p_2 на M в каждом верхнем ее узле. В точности к тому же результату приведет использование рекурсивного определения:

$$\begin{aligned} p_2^* &\equiv M \\ p_i^* &\equiv p_i \quad \text{для} \quad i \neq 2 \\ (\neg Q)^* &\equiv \neg Q^* \\ (P \supset Q)^* &\equiv P^* \supset Q^* \end{aligned}$$

Мы видим, что подстановка является исключительно сложной вспомогательной операцией; правила, посредством которых она определяется, неэлементарны [1]).

Если такое правило подстановки формулируется как правило вывода, то в примере 5 можно было бы обойтись без схем аксиом. В самом деле, заменяя схемы аксиом в примере 5 отдельными аксиомами, мы получим следующий пример.

Пример 7. Мы сохраняем формулировку примера 5 с тем отличием, что введем правило подстановки в том виде, как оно сформулировано выше, а схемы аксиом заменим тремя следующими индивидуальными аксиомами:

$$\begin{aligned} &\vdash p_1 \supset (p_2 \supset p_1) \\ &\vdash (p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3)) \\ &\vdash (\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset (p_1 \supset p_2) \end{aligned}$$

В этом примере элементарные теоремы в точности те же, что и в примере 5 (ср. разд. 3А3).

Хотя в ряде случаев нам и приходится допускать неэлементарные правила, все же от них всегда приятно избавиться. При этом от возможностей типа аффиксативной формулировки примера 1 приходится отказаться.

Упражнения

1. Проверить, что в ассерторической форме (разд. 1) примера 2 (разд. С2) существуют обы, которые не являются самами (т. е. не являются обами самого примера 2), но что введение σ не нарушает равенства.

[1]) По поводу некоторых обобщений, многократной подстановки и др. см. [DSR].

2. Сформулировать ассерторическую форму для примера 3 (разд. C2) и показать, что в этом случае необходим предикат, аналогичный σ (но ограничения на X и Y в схемах аксиом достаточны).

3. Представить пример 5 в форме реляционной системы.

4. Доказать конструктивно (т. е. с помощью эффективного процесса), что если отождествить одинаково обозначенные обы в системах примеров 5 и 7, то элементарные теоремы этих систем одни и те же (разд. 3D3).

Е. АЛГОРИФМЫ

В разд. A5 мы говорили о понятии эффективного процесса. Мы рассмотрим здесь способы уточнения этого понятия, позволяющие более четко формулировать правила, порождающие принципы и соответствия, фигурирующие в описании представлений, оценок, интерпретаций и т. п.

Алгорифмом обычно называют некоторое уточнение описания эффективного процесса. Здесь мы наложим дополнительное ограничение, состоящее в том, что в качестве допустимых элементов для процесса следует выбирать формальные объекты некоторой системы; при этом, однако, вовсе не предполагается, что все формальные объекты этой системы непременно допустимы.

1. Марковские алгорифмы. Описываемое ниже понятие алгорифма принадлежит Маркову. Он называет свои алгорифмы "нормальными алгорифмами". Поскольку, однако, слово 'нормальный' употребляется во многих других значениях и так как эти именно алгорифмы составляют основное содержание работ Маркова, рассматривающего их во всей полноте, мы будем называть их *марковскими алгорифмами*. В дальнейшем, если не будет специальных оговорок, мы часто будем называть марковские алгорифмы просто "алгорифмами". Имеются весьма сильные эвристические доводы в пользу того, что любой эффективный процесс над формальными объектами некоторой системы может быть описан в виде марковского алгорифма [1]).

Предположим сначала, что имеется некоторый язык-объект с алфавитом $\mathfrak{A}$. Мы образуем алфавит $\mathfrak{B}$, являющийся расширением алфавита $\mathfrak{A}$, добавив к $\mathfrak{A}$ некоторые дополнительные буквы,

[1]) В этом состоит так называемый тезис Маркова [сам А. А. Марков называет обычно этот тезис принципом нормализации. — *Ред.*]. Он родствен тезису Чёрча (Клини [IMM], § 62), который утверждает то же самое относительно другого вида эффективного процесса, определенного в терминах рекурсивных функций и гёделевского представления. Доказано, что оба эти уточнения понятия эффективного процесса эквивалентны (ср. упражнение 12); поэтому тезисы Чёрча и Маркова также эквивалентны.

называемые *вспомогательными буквами*. Алгорифмом тогда называют ряд предписаний вида

$$A_i \rightarrow B_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

где непосредственно после стрелки может стоять точка. Здесь $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ — фиксированные выражения [1]) в алфавите $\mathfrak{B}$ (возможно, пустые), а '$\rightarrow$' имеет особое значение, которое не следует смешивать со значением, приписываемым этому знаку в разд. 2A4. Каждая из строчек вида (1) в алгорифме называется *командой* алгорифма, команды, содержащие точку, — *заключительными командами*, остальные команды — *незаключительными командами*; слова алфавита $\mathfrak{B}$, стоящие слева и справа в (1), называются соответственно *антецедентом* и *консеквентом* команды (1).

Пусть E — выражение в алфавите $\mathfrak{B}$. Говорят, что k-я команда *применима* к E, если имеется вхождение A_k в E. В этом случае выполнение k-й команды над E состоит в замене первого (т. е. самого левого) вхождения A_k на B_k [2]).

Процесс, устанавливаемый алгорифмом (1), применяется к такому E следующим образом. Мы ищем первую команду, которая применима к E. Если такой команды нет, то процесс обрывается на E. В противном случае мы выполняем первую команду, которая применима к E, и эта команда преобразует E в E'. Если эта команда является заключительной, то процесс обрывается на E'. Если же команда не заключительная, то мы начинаем сначала, только в роли E выступает E'. Процесс продолжается до тех пор, пока мы либо не применим заключительную команду, либо не придем к выражению, к которому не применима никакая команда; в последнем случае мы скажем, что алгорифм или процесс *блокируется*. Говорят, что алгорифм *применим* к E, если процесс обрывается, но не блокируется [3]).

В этом описании не упоминаются вспомогательные буквы. Дело в том, что описание имело бы смысл и в том случае, если бы вспомогательных букв не было вообще; тогда $\mathfrak{B}$ совпадал бы с $\mathfrak{A}$ и мы сказали бы, что алгорифм является алгорифмом *в* $\mathfrak{A}$. Но в практически интересных случаях требуется, чтобы E было словом в $\mathfrak{A}$, а при выполнении некоторых команд вводятся вспомогательные буквы. В этом случае мы будем говорить, что алго-

[1]) Термин А. А. Маркова — '*слово*' в алфавите $\mathfrak{B}$; в дальнейшем изложении этой терминологии придерживается и автор. — *Прим. ред.*

[2]) Различные вхождения можно отличать друг от друга, выделяя сегменты E, лежащие слева от них. Таким образом, термину 'вхождение' можно придать объективное значение. Ср. разд. 3B1.

[3]) В определение применимости можно включить и последнюю возможность. В таком случае это обстоятельство следует явно оговорить.

рифм является алгорифмом *над* $\mathfrak{A}$. Если алгорифм L применим к E, то слово, которое получится после обрыва процесса, мы назовем $L(E)$, или результатом применения L к E.

Рассмотрим теперь некоторые примеры алгорифмов. В этих примерах буквы 'x', 'y', 'z' и т. д. будут использоваться как обозначения неопределенных букв алфавита $\mathfrak{A}$ и команда, содержащая эти переменные, будет пониматься как целый ряд команд, в которых вместо переменных сделаны всевозможные подстановки букв алфавита $\mathfrak{A}$ в лексикографическом порядке. В качестве имен для вспомогательных букв используются строчные греческие буквы.

Построим сначала алгорифм для копирования выражения, т. е. для преобразования выражения E в EE. Такой алгорифм называют *алгорифмом удвоения*.

Предположим сначала, что у нас перед E стоит α, т. е. что мы преобразовали E в αE; как это сделать, мы увидим позднее. Тогда серией команд вида

$$\alpha x \longrightarrow x\beta x\alpha \tag{2}$$

мы копируем начальную букву x и "помечаем" копию вспомогательной буквой β. Теперь α может образовывать комбинацию со следующей буквой справа, затем еще со следующей буквой и т. д. — до тех пор, пока α не перейдет в конец выражения. В этот момент, если первоначальное выражение имело, скажем, вид

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n$$

то мы придем к

$$x_1\beta x_1x_2\beta x_2x_3\beta x_3 \ldots x_n\beta x_n\alpha$$

Серией команд вида

$$\beta xy \longrightarrow y\beta x \tag{3}$$

отмеченные копии букв будут сдвинуты направо от неотмеченных без изменения порядка букв, так что мы будем иметь окончательно

$$x_1x_2 \ldots x_n\beta x_1\beta x_2 \ldots \beta x_n\alpha$$

Мы можем теперь выбросить буквы β и α с помощью команд

$$\beta \longrightarrow \tag{4}$$
$$\alpha \longrightarrow . \tag{5}$$

Эти команды преобразуют αE в EE при условии, что они расположены в правильном порядке. Порядок команд (2) и (3) несуществен, но команда (4) должна следовать за ними, чтобы предотвратить преждевременное выкидывание β, а (5) должна следовать за (4), чтобы процесс мог закончиться.

Чтобы завершить построение алгорифма, мы должны поставить начальное α перед E. Это может быть осуществлено командой

$$\longrightarrow \alpha \tag{6}$$

называемой *начальной командой* [1]), появляющейся в конце списка команд. Ведь так как левые части (2)—(5) все содержат вспомогательные буквы, а в E нет вспомогательных букв, то никакая из этих команд не применима к E; с другой стороны, так как пустое слово встречается в начале каждого слова, то команда (6) применима и даст желательный результат. Однако, после того как α однажды допущена, всегда будет применима одна из остальных команд, пока мы не дойдем до команды (5) и в этом случае процесс закончится. Это средство для запуска алгорифма может быть использовано во всех случаях, где не допускается блокирование остальной части алгорифма (и в некоторых других случаях, в которых разрешается повторение алгорифма).

Для случая, когда $\mathfrak{A}$ состоит из двух букв a и b, полный алгорифм будет таков:

$$\alpha a \longrightarrow a\beta a\alpha$$
$$\alpha b \longrightarrow b\beta b\alpha$$
$$\beta aa \longrightarrow a\beta a$$
$$\beta ab \longrightarrow b\beta a$$
$$\beta ba \longrightarrow a\beta b$$
$$\beta bb \longrightarrow b\beta b$$
$$\beta \longrightarrow$$
$$\alpha \longrightarrow .$$
$$\longrightarrow \alpha$$

Поучительно посмотреть, как видоизменить алгорифм, чтобы копирование происходило в обратном порядке. Для этого достаточно отметить копию справа от α и немедленно сдвинуть ее направо. При этом нужно предусмотреть, чтобы в том случае, когда больше не останется смежных пар αx и βx, α стирала β и исчезала сама. Алгорифм будет иметь следующий вид:

$$\alpha x \longrightarrow x\alpha\beta x$$
$$\beta xy \longrightarrow y\beta x$$
$$\alpha\beta x \longrightarrow x\alpha$$
$$\alpha \longrightarrow .$$
$$\longrightarrow \alpha$$

[1]) Иногда начальной командой вообще называют любую команду с пустой левой частью.

Здесь опять порядок первых двух команд не играет роли, но остальные команды должны следовать за ними в указанном порядке.

Рассмотрим еще пример. Предположим, что даны два алгорифма L_1 и L_2 и мы желаем построить алгорифм L_3, который сначала выполняет процесс L_1 до тех пор, пока он не закончится, а затем над результатом выполняет процесс L_2. Предположим, что оба алгорифма L_1 и L_2 — в некотором алфавите $\mathfrak{A}$, так что все используемые нами вспомогательные буквы вводятся как дополнительные в L_3. Тогда построение L_3 может быть выполнено в четыре этапа следующим образом:

1°. Пусть L_1' получен из L_1 заменой команд вида

$$A \to B \qquad A \to .B \tag{7}$$

соответственно на

$$A \to B \qquad A \to \alpha B \tag{8}$$

(т. е. заменой каждой точки некоторой новой вспомогательной буквой [1])) и затем добавлением (6) в конце. Мы поставим L_1' в конце L_3. Если все команды L_3, предшествующие L_1, содержат вспомогательные буквы слева, то L_3 до момента появления α оперирует с любым словом E в алфавите $\mathfrak{A}$ так же, как L_1, и если $L_1(E) = F$, то результатом будет F', полученное вставкой α в F. Команда (6) учитывает возможность того, что L_1 блокируется.

2°. Пусть для каждого слова E в алфавите $\mathfrak{A}$ слово E^γ получается из E добавлением γ в начале и после каждой буквы алфавита $\mathfrak{A}$, так что если E пусто, то E^γ есть γ, а если E есть, например, $a_1a_2a_3$, то E^γ есть $\gamma a_1\gamma a_2\gamma a_3\gamma$. Пусть L_2' получается из L_2 заменой команд вида (7) соответственно на

$$A^\gamma \to B^\gamma \qquad A^\gamma \to .B^\gamma \tag{9}$$

причем точка остается как раз там, где она была первоначально. Тогда условия

$$G = L_2(F) \qquad G^\gamma = L_2'(F^\gamma) \tag{10}$$

эквивалентны. Пусть L_2'' получается из L_2' преобразованием, аналогичным преобразованию первого этапа, за исключением того, что α заменяется на δ, а команда

$$\gamma \to \delta$$

[1]) В дальнейшем я буду описывать это изменение, говоря, что точка заменяется на α. Строго говоря, это неверно, ибо точка есть U-символ, а α — вспомогательная буква, т. е. O-символ; значит, 'α' есть U-символ, стоящий вместо неопределенного O-символа, и то, что заменяет точку, не есть ни α, ни 'α', а некоторое имя α — безразлично, какое именно. Вряд ли, однако, такой сокращенный способ выражения может вести к недоразумениям.

заменяет (6). Мы поместим L_2'' в L_3 непосредственно перед L_1'. Тогда если все команды L_3, стоящие перед L_2'', содержат слева хотя бы одну вспомогательную букву, отличную от γ, то L_3 (вплоть до введения δ) преобразует любое F^γ, для которого выполняется (10), в G', образованное вставкой δ в G^γ.

3°. Затем мы поставим в начало L_3 команды, которые преобразуют слово F', полученное на этапе 1°, в соответствующее слово F^γ. Это можно сделать следующими командами:

$$x\alpha \to \alpha x$$
$$\alpha \to \beta$$
$$\beta x \to \gamma x\beta$$
$$\beta \to \gamma$$

Здесь первая команда сдвигает α в начало, вторая, применимая лишь тогда, когда α стоит вначале, заменяет α на β, а третья и четвертая команды завершают преобразование к F^γ.

4°. Наконец, как только появилось δ, мы выкидываем γ и замыкаем алгорифм командами, которые должны предшествовать L_2'', но могут стоять или раньше, или позже команд, описанных на этапе 3°:

$$\gamma x\delta \to \delta\gamma x$$
$$\delta \to \varepsilon$$
$$\varepsilon\gamma x \to x\varepsilon$$
$$\varepsilon\gamma \to .$$

Полный алгорифм таков:

$x\alpha \to \alpha x$ $\alpha \to \beta$ $\beta x \to \gamma x\beta$ $\beta \to \gamma$	этап 3°
$\gamma x\delta \to \delta\gamma x$ $\delta \to \varepsilon$ $\varepsilon\gamma x \to x\varepsilon$ $\varepsilon\gamma \to .$	этап 4°
L_2''	этап 2°
L_1'	этап 1°

Легко видеть, что этот алгорифм удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к L_3.

Как мы видели в предыдущих примерах, порядок команд в алгорифме может играть существенную роль. Но если две какие-

нибудь команды Γ_1 и Γ_2 никогда не могут применяться одновременно, то безразлично, в каком порядке Γ_1 и Γ_2 появляются. Это, в частности, относится к тому случаю, когда две буквы α_1 и α_2 таковы, что самое большее одна из этих букв может встречаться в любом слове, появляющемся при работе алгорифма, и что α_1 входит в левую часть Γ_1, а α_2 — в левую часть Γ_2[1]). С другой стороны, если Γ_1 и Γ_2 таковы, что левая часть Γ_1 является собственным начальным отрезком левой части Γ_2, то Γ_2 никогда не будет выполняться, если она идет после Γ_1, и потому Γ_2 является излишней, если она не появляется перед Γ_1.

2. Челночные алгорифмы. Мы рассмотрим здесь некоторые разновидности марковских алгорифмов, обладающие рядом технических преимуществ. Эти разновидности будут введены в два этапа. На обоих этапах мы будем предполагать, что имеется класс вспомогательных букв, называемых *челноками*, таких, что каждое слово, над которым производится работа, содержит самое большее один из челноков и что эти челноки контролируют ход вычисления — в смысле, который мы сейчас объясним. Для обозначения челноков мы используем строчные греческие буквы [2]); для других вспомогательных букв, которые играют роль указателей мест, мы будем использовать знаки препинания и другие аналогичные символы.

На первом этапе мы просто накладываем следующие условия: (1) существует единственная команда, появляющаяся в конце алгорифма, такая, что ее левая часть пуста, а правая является челноком; (2) любая другая команда содержит в левой части в точности один челнок; (3) каждая команда, не являющаяся заключительной, содержит справа в точности один челнок; (4) заключительная команда не содержит челнока справа. Команда, фигурирующая в условии (1), будет, как и в разд. 1, называться *начальной командой*, а челнок, имеющийся в ней,— *начальным челноком*. Алгорифм, для которого выполнены условия (1) — (4), будет называться *получелночным алгорифмом*.

Если у нас есть алгорифм, удовлетворяющий приведенным условиям, и мы начинаем со слова E, не содержащего челноков, то может применяться только начальная команда. После этого мы все время будем иметь слово в точности с одним челноком до тех пор, пока не достигнем заключительной команды; в этом случае процесс останавливается, а челноки исчезают [1]). Поэтому условия для перестановочности, упомянутые в конце разд. 1, выполняются для команд, содержащих слева различные челноки. Будем говорить, что команды с одним и тем же челноком слева принадлежат одной *фазе* [2]). Алгорифм может быть построен так, что все команды, принадлежащие одной фазе, будут собраны вместе, а сами фазы можно располагать в произвольном порядке. Естественно ожидать, что различные фазы соответствуют важным подпроцессам в процессе, определяемом алгорифмом. Если, далее, каждая фаза заканчивается командой, левая часть которой состоит из одного лишь этого челнока, то алгорифм не сможет блокироваться.

Прежде чем идти дальше, остановимся, чтобы посмотреть, как описанный выше алгорифм удвоения может быть задан в виде получелночного алгорифма. В процессе удвоения существует два основных этапа, а именно, копирование букв и сдвиг копий вправо. С этими двумя стадиями мы связали буквы α и β, но хотя α действует как челнок, β так не действует. Предположим теперь, что мы заменили в (2) β указателем места $+$. Когда α достигает правого конца выражения, пусть он превращается в челнок γ, который движется налево до тех пор, пока он не встретит один из этих указателей места, а затем превращает этот указатель в β. Итак,

$$x\gamma \longrightarrow \gamma x$$
$$+\gamma \longrightarrow \beta$$

Затем команда (3) будет двигать βx (т. е. x, ранее отмеченное предшествовавшим знаком $+$) направо. По достижении βx правого конца β превращается в γ, и процесс продолжается до тех пор, пока γ не достигнет начала слова. Но в этом случае копия слова, которую мы должны иметь, будет обращенной. Чтобы предотвратить обращение, имеется два способа. Первый из них состоит в том, чтобы указатель места следующим образом восстанавливался:

$$\beta \longrightarrow \gamma + \qquad (11)$$

Затем необходимо иметь команды для выбрасывания этих указателей:

$$\begin{aligned} \gamma &\longrightarrow \delta \\ \delta x &\longrightarrow x\delta \\ \delta + &\longrightarrow \delta \\ \delta &\longrightarrow . \end{aligned} \qquad (12)$$

[1]) Это свойство заведомо выполняется, если Γ_1 — команда этапа 3°, а Γ_2 — команда этапа 4° из алгорифма L_3 предыдущего абзаца.

[2]) Чернявский [КНА] употребляет более наглядную символику; его чрезвычайно ясное описание этой изящной специализации нормальных алгорифмов Маркова, очень отчетливо выявляющее ряд важных идей теории алгорифмов, не требует от читателя никакой специальной подготовки, выходящей за рамки разд. 2Е1 этой книги. — *Прим. ред.*

[1]) Так как один челнок вводится начальной командой, то незаключительные команды не меняют числа челноков, а заключительные команды уменьшают его на единицу.

[2]) У В. С. Чернявского — 'элементу'. — *Прим. ред.*

Второй способ состоит в замене α на $\gamma+$, а (11) — на

$$\beta x+ \to \gamma + x$$

Тогда мы сможем заключить алгорифм командой

$$\delta+ \to .$$

Выгода этого способа состоит в том, что если мы пожелаем сохранить в результате $+$ как разделительный знак,— что часто бывает удобно,— то мы можем совсем опустить δ-фазу. Весь алгорифм тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha x &\to x + x\alpha && (13)\\ \alpha &\to \gamma + \\ \beta x y &\to y\beta x \\ \beta x+ &\to \gamma + x && (14)\\ x\gamma &\to \gamma x \\ +\gamma &\to \beta && (15)\\ \gamma &\to . \\ &\to \alpha \end{aligned}$$

Как видно из приведенного примера, новый алгорифм содержит больше команд, нежели первоначальный. Но он удобен тем, что композиция алгорифмов упрощается и систематизируется. Вернемся, например, к образованию L_3 из L_1 и L_2 (см. конец разд. 1). Все, что здесь нужно сделать [1]),— это заменить точку в заключительных командах L_1 челноком α [2]), не совпадающим с уже имеющимся и таким, что α движется к началу и затем превращается в начальный челнок L_2 [3]). Назовем этот процесс *подстановкой L_2 в выходы L_1*. Можно также построить более сложные формы композиции. Скажем, если L_1 имеет несколько выходов (т. е. заключительных команд), то мы можем подставить различные L_2 в различные выходы. Более того, некоторые из L_2 могут совпадать с L_1 [4]); при этом, разумеется, возникает итерационный процесс. Опять-таки, если мы заменим определенные челноки в алгорифме челноком и указателем, а затем используем новый челнок для того, чтобы привести в действие некоторый

[1]) Мы должны прежде всего предположить, что челноки в L_1 и L_2 выбраны так, что нет опасности смешения команд из L_1 и из L_2. Это всегда возможно, так как челноки являются вспомогательными буквами и могут быть выбраны произвольно.

[2]) Ср. примечание к соответствующему построению разд. 1.

[3]) Начальная команда L_2, конечно, опускается.

[4]) Наличие одинаковых челноков в двух алгорифмах L_1 не приводит к коллизии, так как L_1 нужно повторить.

другой процесс, возвращаясь по окончании этого другого процесса к указателю, то мы можем вставлять одни процессы в другие (например, считать шаги с целью произвести некоторое другое действие, зависящее от числа шагов). Можно поэтому довольно просто составлять большое число сложных композиций.

Используя только что установленный факт, мы можем показать, что для произвольного марковского алгорифма L можно найти получелночный алгорифм L', который с любым словом E в $\mathfrak{A}$ действует так же, как L.

Рассмотрим сначала случай, когда L состоит из одной команды

$$A \to B \qquad (16)$$

где

$$A \equiv a_1 a_2 \ldots a_m; \qquad B \equiv b_1 b_2 \ldots b_n$$

Пусть α — начальный челнок для L'. Если $m = 0$, то команды

$$\begin{aligned} \alpha &\to . B \text{ (выход 1)} && (17)\\ &\to \alpha \end{aligned}$$

подойдут для L'. Пусть $m > 0$; заставим α проходить первоначальное слово E в поисках a_1:

$$\begin{aligned} \alpha x &\to x\alpha \qquad \text{для } x \not\equiv a_1 \\ \alpha a_1 &\to * \beta_1 \\ \alpha &\to . \qquad \text{(выход 2)} \end{aligned}$$

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — новые челноки, не совпадающие с другими буквами [1]). Для $i < m$ пусть β_i проверяет, совпадает ли соседняя справа буква с a_{i+1}, и в случае отрицательного ответа заменяет эту букву на γ; иными словами,

$$\begin{aligned} \beta_i a_{i+1} &\to a_{i+1}\beta_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \beta_i &\to \gamma \end{aligned}$$

Если появляется β_m, то это указывает, что найдено первое вхождение A. Тогда мы сможем стереть A и заменить его на B с помощью команд

$$\begin{aligned} x\beta_m &\to \beta_m \\ *\beta_m &\to . B \quad \text{(выход 1)} && (18) \end{aligned}$$

Если появляется γ, то это указывает, что вхождение A не нашлось, и соответствующее действие производится согласно командам

$$\begin{aligned} x\gamma &\to \gamma x \\ *\gamma &\to a_1\alpha \end{aligned}$$

[1]) Нужно иметь m различных челноков (если мы не используем указатели), хотя некоторые из a_i могут и совпадать.

Эти команды и составляют искомый алгорифм L'. Заметим, что мы приходим к выходу 1, если команда (16) применима, и к выходу 2, если (16) неприменима.

Теперь рассмотрим случай, когда L состоит из команд

$$A_j \to B_j \qquad j = 1, 2, \ldots, p \tag{19}$$

Пусть L'_j — алгорифм для j-й команды, подобный только что построенному. Из L'_j мы образуем L' с помощью композиции, техника которой описана тремя абзацами выше. Допустим, что L'_j дал выход 1. Тогда мы обрываем процесс, если j-я команда (19) является заключительной, и переходим к L'_1 в противном случае. Допустим теперь, что L'_j дал выход 2. Тогда мы переходим к L'_{j+1}, если $j \leqslant p-1$, и обрываем процесс (указывая блокировку), если $j = p$. Итак, L' определен, а значит, получелночный алгорифм является не менее общим, чем марковский.

На этом мы закончим изложение первого этапа рассматриваемой нами специализации. На втором этапе мы примем следующие дополнительные условия: (5) левая и правая части любой команды содержат самое большее одну букву, не являющуюся челноком; слева эта буква всегда появляется с одной и той же стороны челнока во всех командах одной фазы. Поэтому челнок оперирует с одной буквой, появляющейся всегда либо справа, либо слева от него; в первом случае челнок называется правосторонним, а во втором — левосторонним. Получелночный алгорифм, удовлетворяющий условию 5, и называется *челночным алгорифмом*.

Все команды (за исключением (17) и (18)) получелночного алгорифма L', который, как только что показано, эквивалентен данному марковскому алгорифму L, удовлетворяют условию 5. Но введя новые челноки $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, команду (17) можно выполнить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\alpha \to \delta_1 \\ &\delta_k \to b_k \delta_{k+1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ &\delta_n \to . \end{aligned}$$

Таким же образом может быть выполнена и команда (18). Поэтому и челночный алгорифм является не менее общим, чем марковский. Но он может потребовать большего числа челноков, чем получелночный алгорифм.

Вернемся к алгорифму удвоения. Из того, что мы сейчас доказали, следует, что процесс удвоения можно осуществить с помощью челночного алгорифма. Но поучительнее будет непосредственно выписать такой алгорифм, нежели приводить его как пример общей теории. Предположим, что для каждой буквы x_i алфавита $\mathfrak{A}$ мы имеем челнок ξ_i; тогда βx_i можно заменить на ξ_i.

Если мы сделаем это, то условию 5 будут удовлетворять все команды получелночного алгорифма удвоения, кроме (13) и (15). Чтобы оперировать с (13), нам нужно новое множество челноков ξ'; тогда мы сможем заменить (13) на

$$\begin{aligned} \alpha x &\to \xi' x \\ \xi' &\to x\delta \\ \delta &\to +\varepsilon \\ \varepsilon x &\to x\alpha \end{aligned}$$

Мы сэкономим один из этих челноков, если заменим (13) на

$$\alpha x \to x x + \alpha \tag{20}$$

что в свою очередь можно заменить на

$$\begin{aligned} \alpha x &\to x\xi' \\ \xi' &\to x\delta \\ \delta &\to +\alpha \end{aligned}$$

Затем вместо (14) мы возьмем

$$\begin{aligned} \xi + &\to \theta x \\ \theta &\to \gamma + \end{aligned}$$

а вместо (15) у нас будет (так как β не использовалось)

$$+\gamma \to \beta$$

и одна из команд

$$\begin{aligned} \beta x &\to \xi \qquad \text{[если мы использовали (13)]} \\ x\beta &\to \xi \qquad \text{[если мы использовали (20)]} \end{aligned}$$

Весь алгорифм после замены (13) на (20) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha x &\to x\xi' \\ \alpha &\to \gamma + \\ \xi' &\to x\delta \\ \delta &\to +\alpha \\ x\gamma &\to \gamma x \\ +\gamma &\to \beta \\ \gamma &\to . \\ x\beta &\to \xi \\ \xi y &\to y\xi \end{aligned}$$

$$\xi + \longrightarrow \theta x$$
$$\theta \longrightarrow \gamma +$$
$$\longrightarrow \alpha$$

Хотя переход от марковских алгорифмов к получелночным удобен при построении конкретных алгорифмов, осуществляющих какие-нибудь данные процессы, настаивать на применении челночных алгорифмов было бы неразумно. Важность челночных алгорифмов определяется главным образом тем, что облегчается сравнение с другими формами эффективных процессов. Например, можно прямо показать, что понятие челночного алгорифма эквивалентно определенному типу машин Тьюринга, из чего следует (рассуждение довольно громоздко, но в принципе совершенно элементарно), что понятие челночного алгорифма как характеристика понятия конструктивности эквивалентно другим известным понятиям, употребляемым для той же цели [1]).

3. Обобщения. Понятие алгорифма можно обобщить различными путями. Мы здесь рассмотрим некоторые из этих обобщений, а вместе с тем и вопрос о том, как относятся алгорифмы к другим видам формальных понятий.

Понятие марковского алгорифма предполагает, что процесс, описываемый алгорифмом, состоит в оперировании с О-выражением в некотором конечном О-алфавите. Но нетрудно так видоизменить это понятие, чтобы применять его к обам в некоторой об-системе. В этом случае вместо вспомогательных букв мы имеем вспомогательные атомы и вспомогательные операции. Тогда A_i и B_i будут обами. Выполнение k-й команды можно объяснить, используя понятие размеченной древовидной диаграммы, следующим образом. Рассмотрим тот экземпляр A_k, который встречается первым в нормальной конструкционной последовательности; часть дерева, которая дает конструкцию A_k, заменяют конструкцией B_k и делают соответствующие изменения в отметках нижележащих узлов. Более полно мы рассмотрим такие замены позже [2]). Если используют А-язык, предложенный в конце разд. С3, и автонимное представление, то эта замена является специальным случаем замены для выражений.

Понятие алгорифма можно видоизменить и различными другими путями. Например, простое видоизменение состоит в том, чтобы явно допустить только команды, которые разрешается выполнять лишь однажды. Тогда такая команда, как (6), отмеченная соответствующим образом, может находиться на своем естественном

[1]) См. упражнение 12 в конце этого раздела. По поводу других определений конструктивности см. Клини [IMM], особенно § 62.
[2]) См. разд. 3В и 3С.

месте в начале алгорифма. Было предложено другое видоизменение; оно состояло в том, что после выполнения некоторой команды все команды, предшествующие ей, исключаются из дальнейшего использования. Я не знаю, каков эффект некоторых из этих видоизменений.

Если бы мы отказались от того, что команды, выполняемые на любой стадии, и конкретное вхождение заменяемого антецедента определены однозначно, то команды (1) для алгорифма можно было бы рассматривать как дедуктивные правила некоторой ассерторической конкатенативной системы. Эти команды являются подстановками; они эквивалентны дедуктивным правилам

$$XA_iY \vdash XB_iY \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (21)$$

где X и Y — неопределенные слова (в том смысле, что 'X' и 'Y' занимают места, на которые можно подставить имя произвольного слова), а A_i и B_i — фиксированные слова. Такая система принадлежит к типу систем, введенных Постом [1]); данный конкретный вид системы известен как двусторонняя система Поста без аксиом. Так как в этой системе нет аксиом, то в ней нет элементарных теорем, но правила определяют отношение следования, описанное в разд. В3. Система, полученная применением данной системы к слову E, образуется добавлением $\vdash E$ в качестве единственной аксиомы.

Было предложено [2]) называть *деривативной формальной системой* такую систему, в которой выделен особый подкласс выводов — так называемые *деривации*. При этом предполагается, что вопрос о том, является ли данный вывод деривацией,—определенный. *Алгорифм* можно тогда определить как деривативную формальную систему, удовлетворяющую следующим условиям: (1) в системе нет аксиом; (2) система ассерторическая; (3) правила системы — однопосылочные элементарные (разд. D3); (4) правила (во всяком случае постольку, поскольку они применяются в деривациях) являются детерминативными; (5) в деривации по отношению к данной посылке можно применить не более одного правила; (6) имеются некоторые условия, определяющие окончание деривации, и вопрос о том, выполнены ли эти условия, является определенным. Применение такого алгорифма к формальному объекту E дает систему, получающуюся добавлением E в качестве единственной аксиомы. Если L — алгорифм, то $L^{\bullet}(E)$ — формальный объект, утверждаемый в заключительном высказывании оконченной деривации.

Легко видеть, что марковский алгорифм является алгорифмом и в смысле данного определения. Это справедливо и по отношению

[1]) Пост [FRG]; Порт [SPA]. [См. также Мальцев [АРФ].—*Ред*].
[2]) См. Порт [SPA].

к другим видам алгорифмов. Один из наиболее интересных — так называемый алгорифм Поста, основанный на односторонней системе Поста, т. е. на системе, правила которой вместо (21) имеют вид

$$AX \vdash XB \tag{22}$$

Показано, что алгорифмы Поста эквивалентны марковским алгорифмам [1]).

Упражнения

1. Построить алгорифм для преобразования конечной последовательности букв в последовательность, образованную теми же буквами, написанными в обратном порядке.

2. Построить челночный алгорифм удвоения, используя только одно множество челноков, соответствующих буквам алфавита $\mathfrak{A}$ (в дополнение к челнокам, не зависящим от $\mathfrak{A}$).

3. Для каждого целого положительного числа n и для каждой буквы a пусть a^n означает слово, состоящее из n последовательных вхождений a. Пусть $\mathfrak{A}$ — алфавит $\{|, *\}$. Показать, что существуют такие алгорифмы L_1, L_2, L_3, что

$$L_1(|^m * |^n) = |^s, \qquad \text{где } s = m+n$$
$$L_2(|^m * |^n) = |^p, \qquad \text{где } p = mn$$
$$L_3(|^m * |^n) = |^q * |^r, \qquad \text{где } m = qn+r \quad (r \leqslant n)$$

4. Пусть

$$A_{ij} \to B_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, n_i$$

— r конечных последовательностей команд. Построить алгорифм L, который действует так же, как и алгорифм, в команде которого, применяемой к любому E, числа i и j определены следующим образом: i — наименьшее число, такое, что для некоторого j имеется вхождение A_{ij} в E, а j — наименьшее число, такое, что имеется вхождение A_{ij}, начинающееся не правее начала любого A_{ik} (для $k \neq j$).

5. Дана об-система с конечным числом атомов и конечным числом операторов. Построить алгорифм над алфавитом стандартного представления по Лукасевичу, преобразующий слово алфавита во вспомогательную букву t, если это слово правильно построено, и во вспомогательную букву f в противном случае. ([TEA]; ср. [CFS], разд. 6.)

6. Построить алгорифм, применимый к словам в алфавите $\{a, b, \neg, \supset, (,)\}$ примера 6, для проверки того, является ли

[1]) См. Ассер [NPA].

слово в этом алфавите тавтологией в смысле обычных двузначных таблиц истинности. Пусть этот алгорифм преобразует первоначальное слово в t, если оно является тавтологией, в f, если оно правильно построено, но не является тавтологией, и в n, если оно неправильно построено. (Здесь n, t, f — вспомогательные буквы.) ([TEA].)

7. Пусть L_1, L_2, . . ., L_m — m алгорифмов, и пусть $\mathfrak{A}$ — объединение их алфавитов. Пусть L_i преобразует слово X в Y_i. Пусть * не принадлежит $\mathfrak{A}$. Показать, что существует такой алгорифм L_0, что L_0 преобразует X в

$$Y_1 * Y_2 * \cdots * Y_m$$

и неприменим ни к какому X, к которому применимы не все L_1, L_2, . . ., L_m.

8. Пусть L_1 и L_2 — два алгорифма. Пусть $L_1(X)$ — результат применения L_1 к слову X; $L_2(X)$ определяется аналогично. Построить такой алгорифм L_3, что (*a*) если $L_1(X)$ завершается в m шагов, а $L_2(X)$ не завершается менее чем в m шагов, то $L_3(X) = L_1(X)$; (*b*) если $L_2(X)$ завершается в m шагов, а $L_1(X)$ не завершается менее чем в m шагов, то $L_3(X) = L_2(X)$; (*c*) если ни $L_1(X)$, ни $L_2(X)$ не заканчивают работу, то $L_3(X)$ тоже не заканчивает работу.

9. (Теорема Нагорного.) Пусть $\mathfrak{A}$ — непустой алфавит; показать, что любой алгорифм L над $\mathfrak{A}$ эквивалентен относительно слов E в $\mathfrak{A}$ алгорифму L' в алфавите, получающемся из $\mathfrak{A}$ добавлением одной вспомогательной буквы. (Нагорный [УТП], ср. Чернявский [КНА]. Пусть α_1, . . ., α_n — вспомогательные буквы для L, a — буква алфавита $\mathfrak{A}$, β — новая вспомогательная буква, a^k — последовательность, состоящая из k букв a; тогда α_k заменяется на $\beta\beta a \beta a^k \beta a \beta\beta$.)

10. (Универсальный алгорифм.) Если L является алгорифмом (1) в фиксированном алфавите $\mathfrak{A}$ и $+$, $*$, $:$, $!$ суть буквы, не входящие в $\mathfrak{A}$, то слово

$$P^L \qquad A_1 +\circ B_1 : A_2 +\circ B_2 : \cdots : A_n +\circ B_n$$

где '$\circ$' следует заменить на '!', если соответствующая команда (1) является заключительной, и опустить в противном случае, называется программой L. Показать, что существует такой алгорифм U над алфавитом $\mathfrak{A} \cup \{+, *, :, !\}$, что для любого такого L и любого слова E в $\mathfrak{A}$

$$U(P^L * E) = L(E)$$

(здесь подразумевается, что существование одной из частей равенства влечет существование другой). (Марков [ТАл$_2$]. Челночный

алгорифм, удовлетворяющий сформулированным требованиям, явно приведен Чернявским [КНА]; он содержит 122 команды.)

11. (Теорема о невозможности.) Пусть $\mathfrak{B}$ — алфавит упражнения 10. Показать, что не существует марковского алгорифма, L над $\mathfrak{B}$, применимого к слову в $\mathfrak{B}$ в точности тогда, когда оно является программой алгорифма в $\mathfrak{A}$, и неприменимого (в $\mathfrak{B}$) к собственной программе. (Марков [ТАл$_2$], гл. 5; в этой книге приведено много других примеров алгорифмически неразрешимых проблем.)

12. (Теорема Детловса.) Пусть $\mathfrak{A}$ — алфавит упражнения 3. Говорят, что числовая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ — алгорифмическая, если существует такой алгорифм L над $\mathfrak{A}$, что

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \rightleftarrows L(|^{x_1} * |^{x_2} * \cdots * |^{x_n}) = |^{y}$$

где '$\rightleftarrows$' определено, как в разд. А4. Функция называется вполне алгорифмической, если для произвольных чисел $x_1, \ldots, x_n$ существует такое y, что обе стороны вышеприведенной эквивалентности истинны. Показать, что необходимым и достаточным условием алгорифмичности функции f является частичная рекурсивность f, а необходимым и достаточным условием вполне алгорифмичности f — общерекурсивность f. (Детловс [АлР]. Ассер [TMM] прямо доказывает эквивалентность алгорифмичности и вычислимости по Тьюрингу; более просто это сделал, используя челночные алгорифмы, Чернявский [КНА]. Ср. ниже разд. 3С.)

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Исторические и библиографические комментарии. По поводу общих ссылок на разд. А — D этой главы см. разд. 1S5 и ссылки относительно формализма в разд. 1S6. Следующие ссылки дополняют вышеуказанные.

По поводу исследований в области семиотики вообще см. Моррис [FTS] и Карнап [FLM]; более обстоятельные трактовки см. Моррис [SLB], Карнап [LSS], [ISm], [FLg], [MNc], Мартин [TDn], [SPr], Кемени [NAS], Штегмюллер [WPI]. Этот предмет проникает в философию и психологию языка и в лингвистику. Примеры более философски или психологически окрашенных работ: Браун [WTh], Огден и Ричардс [MMn], Куайн [WOb]. Работы лингвистического характера, которым я больше всего обязан, приведены в [LAG]. Сборник Американского математического симпозиума [SLM], в котором появилась [LAG], содержит несколько других интересных статей, посвященных взаимоотношению языка и математики. Дальнейшие ссылки даны в [CLg], стр. 37, в библиографиях к вышеприведенным работам и в связи со специальными вопросами, рассматриваемыми ниже. См. также разд. 3 и 4.

Понятие U-языка первоначально содержалось в докладе на X Международном философском конгрессе в 1948 г. Резюме этого доклада, подготовленное несколькими месяцами позже, см. в [LFS], а полный его текст — в [LMF]. См. также [TFD], § 14, [CLg], разд. 1D3.

По поводу использования кавычек см. Куайн [MLg$_2$], стр. 23 и след., Леблан [IDL], стр. 2 и след., Саппс [ILg], гл. 6, Экснер и Росскопф [LEM], разд. 1.3 и 1.4, особенно упражнения на стр. 15—16. Первым логиком, использовавшим кавычки описанным выше образом, был Фреге, но лингвисты с той же целью использовали их по крайней мере еще в 1765 г. (см. [TFD], стр. 12, сноска 16).

Термин 'грамматика' был предложен в [MSL] и, кроме того, в [LFS]. По этому поводу см. [LAG] (возникла на базе [LSG]) и цитируемые в ней работы, а также [TFD], § 15. Операторы функциональности F_n изучались в теории функциональности в комбинаторной логике ([CLg], гл. 8—10); примеры функторов, принадлежащих к различным категориям, даны в [CLg], стр. 264 и 274.

Объяснение точечной системы обозначений взято из [CLg], разд. 2B5*a*. По поводу истории и побочных замечаний отсылаем читателя туда или к [TFD], стр. 43, сноска 15.

Понятие индуктивного класса было сформулировано Клини [IMM], стр. 20 [1]), 258 и след. [2]). Имеются некоторые незначительные расхождения в деталях. Клини называет правила, по которым определяется индуктивный класс, "индуктивным определением"; начальные правила он называет "базисными пунктами" определения, а порождающие правила —"индуктивными пунктами"; все вместе они образуют "прямые пункты" и противопоставляются правилам замыкания, которые Клини называет "косвенными пунктами".

Понятие конструкции и связанные с ним понятия описаны (с некоторыми видоизменениями) согласно [CLg], разд. 2B (это изложение в свою очередь основано на [DSR]). Идея представления доказательства как древовидной конструкции, конечно, была известна давно; она играет существенную роль в работе Генцена [ULS] и в предшествовавших ей работах Герца (см. его [ASB] и более ранние статьи, упоминаемые Чёрчем [BSL]) и была явно использована в теории доказательства некоторыми членами школы Гильберта (см., например, Гильберт и Бернайс [GLM. I], стр. 221, 426); я не знаю происхождения этой идеи.

По поводу разд. В отметим, что различие, проводимое здесь между теорией и системой, является отступлением от терминоло-

[1]) Стр. 25 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) Стр. 231 и след. русского издания (§ 53). — *Прим. ред.*

гии, принятой в моих предыдущих работах; по поводу мотивировки см. разд. 2. (Следует заметить, что система является частным случаем теории, так что употребление термина 'теория' в отношении того, что в действительности является системой, не является ошибкой.) О непротиворечивости и полноте в смысле Поста см. Пост [IGT]. Тарский [FBM] приводит обширный список теорем о формальных теориях вообще (в смысле, принятом в этой книге; он называет их "множествами предложений" и называет 'системой' такое множество, если оно дедуктивно замкнуто); он использует методы, которые мы рассмотрим в следующей главе. Работу Герца (упомянутую в предыдущем абзаце) также следует считать относящейся к теориям. Литература, посвященная теориям как таковым (мы имеем в виду именно теоретические исследования, а не трактовки конкретных систем), относительно немногочисленна.

Включение как синтаксических, так и об-систем в общее понятие 'формальной системы' опять-таки является нововведением настоящей книги (см. разд. 2). Об-системы соответствуют тому, что я прежде называл формальными системами. О них, а особенно о их отношении к синтаксическим системам, см. [CFS], [DFS] и [IFI], которые содержат некоторые небольшие изменения по сравнению с работами, приведенными в разд. 1S5. Изложение в разд. C отражает дальнейшие изменения. Вообще об-системы мало рассматривались в литературе; ср., однако, Эрбран [RTD], стр. 54 и след.

Системы, рассматриваемые в других работах по математической логике, обычно являются синтаксическими, и их формулировки можно найти в большинстве общих работ по математической логике (разд. 1S1, 1S3 и 1S5). Особенно аккуратные их формулировки содержатся у Гермеса [Smt]; Тарского [BBO], [WBF]; Шрётера [AKB], [WIM]; Генкина [ASM], [SAT]; Розенблюма [EML]. Они в принципе показывают, что синтаксическую систему можно сформулировать как об-систему; по этому поводу ср. примеры 3 и 4 и [CFS]. Точные формулировки, идущие несколько в ином направлении, имеются у Лоренцена [EOL] и Поста [FRG]. Последняя работа показывает, что ассерторическую конкатенативную систему довольно общего вида можно свести к такой системе с одной лишь аксиомой и правилами вида (22) из разд. E; об этой работе сообщает Розенблюм [EML], гл. 5, а также — более кратко — Порт [SPA], разд. 6, и Дэвис [CUn], гл. 6. По поводу рассматриваемого в разд. E понятия алгорифма (имеющего чисто синтаксическую основу) довольно детальная информация (в основном на русском языке) содержится в литературе, указанной в разд. E.

Следующие замечания касаются примеров в разд. C и D. Пример 1 (причем с этими же венгерскими названиями основных категорий) первоначально появился в [LSG], адресованной гуманитарной аудитории. Пример 2, представленный здесь как видоизменение примера 1, в сущности совпадает с примером 1 из [OFP]; пример 1 скорее является видоизменением примера 2, нежели наоборот. Пример 3 является тривиальным видоизменением примера 3 из [OFP] и в принципе взят у Гермеса [Smt]. Пример 4 является очевидным видоизменением примера 3. Пример 5 по существу является сокращенной системой аксиом классического исчисления высказываний, принадлежащей Фреге. Это сокращение получено Лукасевичем (см. Лукасевич и Тарский [UAK], стр. 35, сноска 9); по поводу дальнейшего развития см. Шмидт [VAL], §§ 79—84. Примеры 6 и 7 являются видоизменениями примера 5. По поводу других примеров об-систем см. [OFP], гл. 5.

В разд. D этой книги впервые вводится термин 'ассерторическая система'. До сих пор я пользовался термином 'логистическая система', но такое употребление последнего термина находится в конфликте с другими его значениями. В остальном разд. D содержит мало нового по сравнению с [CLg], разд. 1E. Только что упомянутые исследования Поста являются по существу добавлениями к теме разд. D.

Символ '$\vdash$' был введен Фреге (см., например, его [GGA], стр. 9 и след.), который дал отдельные интерпретации его горизонтальной и вертикальной частям. Позднее этот символ был принят (но без раздельного употребления горизонтальной и вертикальной частей) у Уайтхеда и Рассела [PMt]. Использование его как одноместного глагола является, конечно, естественным видоизменением традиций Фреге, а также Уайтхеда и Рассела [PMt]. Использование его для утверждения правил (типа (6) разд. D) идет от Россера ([MLV], стр. 130; см. также его [LMt], стр. 56 и след.). Россер ([LMt], стр. 57) предлагает читать '$\vdash$' как 'дает' или 'дают' и называет '$\vdash$' словом "турникет" [1]).

Разд. E об алгорифмах основан главным образом на работах Маркова. На первых двухстах страницах его книги [ТАл$_2$] исключительно подробно рассматриваются основные свойства алгорифмов (в разд. E1). Более краткое изложение того же вопроса в [ТАл$_1$] Маркова вполне подходит для читателя, желающего самостоятельно разработать вопрос детально. Систематических исследований этих вопросов на западноевропейских языках пока мало. Некоторую информацию можно получить из двух статей Ассера [TMM] и [NPA]; в первой из них рассматривается эквивалентность алгорифмичности числовой функции и ее вычислимости на машине Тьюринга, во второй — эквивалентность марковских алгорифмов и алгорифмов Поста, упомянутых в конце разд. E3. Краткое изло-

[1]) По-русски (на логических семинарах) говорят "штопор". — *Прим. ред.*

жение имеется также у Порта [SPA]; но Порт признается, что он не знает русского языка, так что его исследование целиком основано на обзорах.

К проблемам теории алгорифмов, как уже говорилось, примыкает работа Поста [FRG]. Теоремами о неразрешимости наряду с Постом и его последователями очень интересуются советские ученые. Высшим достижением в этой области является доказательство неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, полученное Новиковым [АНП] [1]). Эти вопросы, естественно, относятся уже к теме гл. 3.

Некоторые из дальнейших теорем о алгорифмах включаются в изложение разд. E2 и E3 и в упражнения в конце разд. E. Изложение разд. 2 основано на работе Чернявского [КНА]. Эта статья дает доступную трактовку, которую можно понять без детального знакомства с работами Маркова. Она включает в себя рассмотрение теоремы Нагорного (упражнение E9), универсального алгорифма (упражнение E10) и доказательство эквивалентности понятий челночного алгорифма (а следовательно, и марковского алгорифма) и машины Тьюринга (ср. упражнение E12).

Ссылки к разд. E3 даны в тексте.

2. Замечания по терминологии. Уже отмечалось, что в используемой здесь терминологии есть ряд изменений по сравнению с моими предыдущими работами. Такие изменения необходимы для продвижения вперед. Однако они всегда вызывают опасность путаницы, особенно когда изменения появляются в работах того же автора. Для читателей, имевших случай обращаться к моим прежним работам, следующее объяснение обстоятельств, связанных с этими изменениями, может помочь избежать неправильного понимания.

В [CLg] и [TFD] термин 'формальная система' применялся лишь по отношению к тому, что́ выше мы назвали об-системой. Понятие формальной системы было центральным в ряде статей, которые приводятся в [CLg], разд. 1S1. Сначала употреблялось название "абстрактная теория", после этого стали говорить просто "теория" или "система". К этим словам стали добавлять эпитеты 'абстрактный' и 'формальный', причем с течением времени все более усиливалась тенденция употреблять последний. В 1937 г. было решено фиксировать термин 'формальная система'. Это изменение затронуло ряд статей[2]) (приведенных в [CLg], разд. 1S1), опубликованных с 1939 по 1942 г.

[1]) См. также работы учеников П. С. Новикова: С. И. Адяна [ОАП], А. А. Фридмана [СТГ], К. А. Михайловой и др., а также работы Буна (напр., [WDU], [WPr]). — *Прим. ред.*

[2]) Из них первой была опубликована [RDN]. Она должна была появиться в *Journal of Unified Science* среди материалов Международного конгресса во имя Единства Науки, проходившего в Гарвардском университете в сентябре 1939 г., но почти все оттиски, за исключением трехсот, розданных участникам Конгресса, погибли при бомбардировке Роттердама. Перепечатка этой статьи, при таинственных обстоятельствах появившаяся в сборнике *Dialectica* в 1954 г., очевидно, сделана с машинописного экземпляра, посланного Гонсету 22 июня 1939 г.

В то же время Клини в [IMM], стр. 62 [1]), определил понятие 'формальной системы' в применении лишь к синтаксическим системам. Далее в этой же книге он употребляет термин 'обобщенная арифметика' для об-системы особого вида, в которой имеется по одной операции каждой степени; общий случай, конечно, можно свести к этому, взяв новые объекты для представления операций (ср. разд. D2) и затем заменяя замыкание операции степени n замыканием операции Клини степени $n + 1$, в которой первым аргументом является новый об, представляющий первоначальную операцию. Определение Клини производит впечатление (несомненно, неумышленное) того, что его определение 'формальной системы' точно следует концепции Гильберта. Но Гильберт интересовался одной вполне определенной системой — системой для математики (или существенной ее части) как целого, и в его статьях нет упоминаний о общем понятии формальной системы; свой метод он скорее был склонен называть "аксиоматическим", чем "формальным".

Ныне сходные черты двух видов формальных систем важнее, чем их различия. Более того, с общей точки зрения разд. 1C оба эти вида формальны. По-видимому, лучше использовать термин 'формальная система' в применении к обоим видам и употреблять более специальные термины 'синтаксическая система' и 'об-система' тогда, когда нужно провести различие между видами. Термин 'формальная система' начинает появляться в других контекстах в смыслах, согласующихся с обсуждаемым.

Читатель должен иметь в виду, что не все, кто писал о формальных системах, понимали этот термин в том смысле, что и здесь. Например, реферат Чёрча на переиздание заметки [RDN] явно свидетельствует о различии пониманий автора и референта.

Наше употребление термина 'формальная система' освобождает термины 'абстрактный' и 'теория' для других целей. Поэтому мы здесь используем оба последних термина в формальных смыслах, которые объясняются в соответствующих местах. Употребление слова 'теория' здесь является новым, употребление же слова 'абстрактный' восходит по меньшей мере к [CLg].

[1]) Стр. 60 русского издания. — *Прим. ред.*

Но довольно о 'формальных системах'. Рассмотрим теперь некоторые другие термины, в использовании которых были сделаны изменения.

Формальные объекты об-системы сначала назывались "сущностями". Это слово было переведено на немецкий язык как '*Etwas*'. Термин 'сущность' (*entity*) оставался без изменения в моих статьях на английском языке до 1937 г., когда вместо него я начал употреблять слово 'терм', а для обозначения атомов — слово ,знак' (*token*), соответствовавшее немецкому '*Zeichen*'. Но эти слова имеют другие значения в U-языке, из чего стало ясно, что употребление слова 'терм' как формального термина приводит к ошибкам. В 1949 г. слово 'терм' было заменено на 'об'; эта замена была сделана слишком поздно, чтобы повлиять на [TFD], [STC], [PBP], но была учтена в [SFL], [TCm] и др.

Замена в разд. D1 термина 'логический' на 'ассерторический' уже комментировалась (в разд. 1).

Другая тройка терминов, употребление которых пришлось пересмотреть,—это 'суждение' (*proposition*), 'высказывание' (*statement*) и 'предложение' (*sentence*). Термин 'суждение' скомпрометирован в глазах многих видных логиков тем, что философы пользовались им крайне туманным образом. Но так как это философское употребление не касается нас, то мы свободны определять и использовать этот термин любым путем, которым мы пожелаем. Сначала я употреблял его в смысле 'утверждение' (*statement*). Но с написанием [TFD] стало желательно указывать различие между тем, что́ утверждается в U-языке, и тем, что́ только упоминается в нем. Слово 'утверждение' употребляется здесь для первого, 'высказывание'— для последнего. Это — важное различие, независимо от того, какие взгляды могут быть по поводу онтологии данных понятий. Что касается слова 'предложение', то я использую его как грамматический термин. В настоящее время имеется тенденция использовать это слово во всех трех вышеупомянутых смыслах, как немецкое слово '*Satz*'. Но эта тенденция делает изложение скорее менее, чем более точным. Философские вопросы этого употребления излагаются в [IFI]. Мы займемся этим далее, в разд. 3 и 5A.

По отношению к функторам в [TFD] было предложено называть два основных их вида (в зависимости от того, что́ является их значениями — имена или предложения) "юнктором" и "нектором". (Предложение возникло после чтения одной работы О. Есперсена.) В соответствии с этим употреблением то, что здесь названо "оператором", было бы названо "адъюнктором" или, возможно, "конъюнктором". Этому предложению никогда не следовали. В настоящем контексте термин 'оператор' кажется более естественным. Но в контекстах, где слово 'оператор' может понадобиться в некотором другом смысле, термины 'адъюнктор' и 'конъюнктор' могут пригодиться.

3. Метаматематика. При чтении работ формалистов по современной математической логике бросаются в глаза многочисленные слова, начинающиеся с префикса 'мета': 'метаязык', 'метасистема', 'метатеорема', 'металогика', 'метаисчисление', 'метасемиозис' (разд. C6), немецкое '*Metaaussagenkalkül*'. Все эти термины приписываются Гильберту. Фактически же Гильберт использовал только термин 'метаматематика', остальные термины были введены его последователями по аналогии. Есть опасность, что изучающий упустит из виду то, что́ в действительности представляет собой метаматематика и на каком принципе основаны эти аналогии. Для того чтобы прямо придерживаться темы, я изложу здесь некоторый дополнительный материал, касающийся идей Гильберта и их отношения к понятиям этой книги. Делая это, я буду пользоваться терминологией, принятой в книге, хотя она может и совершенно отличаться от терминологии Гильберта. Более того, я не буду пытаться описывать эволюцию мысли Гильберта — по этому поводу см. ссылки в разд. 1S6,— но опишу впечатление, которое возникает после чтения ряда его статей, появившихся в начале 20-х годов нашего столетия.

Гильберт берет как данную обычную математику, выраженную в определенной символике. Точная природа этой символики не интересует нас, но символика образует язык L в смысле разд. C6. Гильбертовская метаматематика является тогда дисциплиной, в которой рассуждают о выражениях этого языка в синтаксической системе. Поэтому L становится синтаксическим O-языком.

В метаматематике мы делаем утверждения; однако эти утверждения уже не выражаются фразами O-языка, но говорят о этих фразах. Эти утверждения, конечно, нужно выразить в некотором языке. Гильберт не ввел никакого специального названия для этого языка, но это как раз то, что мы назвали здесь U-языком.

Рассмотрим теперь, что же именно мы делаем в метаматематике. Мы должны прежде всего уметь распознавать O-символы (т. е. символы обычной математики) и иметь возможность сказать, когда данный символ является одним из них. Мы должны уметь распознавать O-выражения как последовательности O-символов, а среди O-выражений — подкласс, члены которого мы выше называли вефами (правильно построенными выражениями). Наконец, мы должны уметь распознавать, когда последовательность таких вефов — сопровождаемая дополнительными указаниями или без таковых — является доказательством. Веф, являющийся конечным вефом доказательства, называется доказуемым вефом, или теоремой. Основная цель, к которой стремился Гильберт,

заключалась в том, чтобы охарактеризовать теоремы каким-либо объективным образом, в частности показать, что определенные виды вефов не являются теоремами (непротиворечивость), а если возможно, то и найти пути решения вопроса о том, является ли произвольный данный веф теоремой (проблема разрешения). Вся эта деятельность является синтаксической по природе; истинность или ложность утверждения метаматематики зависит только от структуры рассматриваемых О-выражений. В конечном счете это зависит от эквиморфности (см. разд. А2) О-инскрипций.

Итак, U-язык должен содержать имена для О-выражений, глаголы для того, чтобы делать вышеупомянутые утверждения о О-выражениях, а также дополнительные лингвистические средства для указания доказательств конструкций, общих утверждений о целых классах О-выражений и т. д. В качестве имен для О-выражений Гильберт использовал сами эти выражения. Что касается второго и третьего из упомянутых элементов, то, хотя Гильберт и признавал необходимость дополнительных символов, которые он называл "знаками для сообщения" (*Mitteilungszeichen*) и которые должны были употребляться как обычно в математике (большей частью как U-переменные в смысле разд. 3D4), все же всюду, где возможно, он предпочитал использовать слова обычного языка и, в частности, выражал глаголы такими словами, как

—— ist ein Zeichen (есть знак)
—— ist eine Formel (есть формула)
—— ist beweisbar (доказуемо)
—— kommt in —— (—— входит в ——)

Метаматематика, таким образом, содержит все утверждения о том, что то или иное выражение доказуемо. Назовем их элементарными утверждениями метаматематики. Назовем часть метаматематики, ограниченную элементарными утверждениями (вместе с предварительными соображениями, необходимыми для их формулировки), элементарной метаматематикой. В таком случае элементарная метаматематика является, очевидно, метасистемой в смысле разд. С6 с автонимным представлением. Далее, часть U-языка, содержащая первые два из перечисленных в предыдущем абзаце видов выражений, будет образовывать А-язык этой системы. На основе элементарной метаматематики можно развить остальную часть метаматематики путями, которые мы рассмотрим в следующей главе. Метаматематика является поэтому метасистемой, образованной метасемиотическим путем из обычной математики, но, поскольку она автонимна, ее можно столь же хорошо считать образованной путем абстракции (разд. С6). Таким образом, концепцию Гильберта можно подвести под принятую в этой книге.

Автонимное представление Гильберта — несмотря на доводы в пользу противного — совершенно безупречно, коль скоро мы не связываем никакого значения с О-выражениями (ср. разд. 2А2). Но мы хотим приписывать значения О-выражениям; более того, аргументы Гёделя, Тарского и других показывают, что мы, поступая так, обогащаем содержание нашей науки. Следовательно, стоит избегать автонимного представления. Для этого имеются два существенно различных метода.

Первый метод, в настоящее время являющийся общеупотребительным, состоит в изменении А-имен. Здесь возникает ряд возможностей, рассмотренных при изложении метасемиозиса в разд. С6. Этому методу присущи отмеченные там недостатки [1]).

Второй из упомянутых методов состоит в изменении всего О-языка. Например, Шольц ([GZM.I], первое издание, стр. 26; второе издание, стр. 19) предлагает писать утверждения О-языка жирным шрифтом (нем. "*fett*" или "*Blockschift*"), а упоминание про О-букву в А-языке — соответствующими буквами обычного шрифта. Можно, конечно, быть еще более последовательным. Жаль, что Шольц не выделил красных чернил для обозначения О-символов, тогда даже при самом беглом обзоре стало бы ясно, что в книге Шольца нигде практически нет красных чернил, за исключением приведенных страниц. Мы уже отмечали в разд. С3, что незачем явно задавать О-язык — читатель может строить его согласно своему воображению. Тогда нам приходится иметь дело с абстрактной синтаксической системой. Далее, поскольку вефы гильбертовского О-языка монотектоничны, получающаяся система является об-системой и абстракцию можно продолжить далее, пока не получится абстрактная об-система. Таким путем и понятие

[1]) Вот яркий пример затруднений, возникающих при принятии второй из отмеченных в разд. С6 концепций. Определение 13 у Тарского ([WBF], стр. 296, или [LSM], стр. 179) содержит техническую ошибку там, где утверждается, что пять данных аксиом, характеризуюших по предположению булеву алгебру, действительно удовлетворяются на пятиэлементной немодулярной структуре (см. гл. 4, рис. 2, *d*). Ошибка состоит в том, что пятая из указанных аксиом является неправильным переводом девятой аксиомы одной из систем аксиом Хантингтона [SIP]. Эта ошибка появилась в польском издании работы Тарского, опубликованном в 1933 г.; она прошла незамеченной при переводах сначала на немецкий, а затем на английский и была лишь случайно обнаружена в 1956 г. Как писал Тарский 8 мая 1957 г., "кажется странным, что до сих пор ни я, ни кто-либо иной не заметил ошибки (хотя статью, вероятно, читали многие)". Конечно, на заключения Тарского не повлияли детали его формулировки булевой алгебры, и никто даже не пытался заниматься довольно трудной механической задачей проверки того, действительно ли аксиомы утверждают то, что предполагалось. Если бы аксиомы были выражены на обычном теоретико-множественном языке, вряд ли подобная ситуация возникла бы.

абстрактной об-системы можно подвести под точку зрения Гильберта. На это заключение не влияет ни тот факт, что к нему — по крайней мере в работе [ALS], — автор пришел совершенно иным путем, используя Уайтхеда и Рассела [PMt] в качестве отправной точки, ни то (упомянутое в разд. 2) обстоятельство, что Гильберт не имел дела (по крайней мере явно) с общим понятием формальной системы.

У Гильберта, конечно, были определенные причины предпочесть синтаксическое представление, а именно его конкретность, упомянутая в конце разд. С6. Сам Гильберт по этому поводу говорит следующее (из его книги [NBM], стр. 162 и след., опуская сноску; ср. его [GLM], стр. 1):

"Как мы видели, абстрактное оперирование с объемами и содержаниями понятий оказалось недостаточным и ненадежным. В качестве предпосылки для применения логических заключений и для проведения логических операций мы должны уже иметь нечто в нашем представлении; именно, там должны быть некоторые внелогические дискретные объекты, которые, очевидно, являются непосредственными основами для любого рассуждения. Если мы требуем, чтобы логические заключения были верными, то нужно, чтобы эти объекты во всех их частях были обозримы и чтобы обнаружение, различение и последовательность этих объектов были непосредственно наглядными для нас вместе с самими объектами, как нечто такое, что нельзя свести к чему-то другому. Коль скоро я принимаю эту точку зрения. объектами теории чисел — в полную противоположность Фреге и Дедекинду — являются для меня сами знаки, форму которых можно распознавать наверняка, всегда и всюду, независимо от места и времени, от особых условий, в которых был начертан знак, а также от незначительных различий в исполнении знаков. В этом состоит твердая философская установка, которую я считаю важным для оснований чистой математики — как и вообще для всей научной мысли, для понимания и для сообщения; *вначале* — так звучит это здесь — *стоит знак*."

Точно сказано! Но здесь утверждается лишь, что нужно иметь возможность синтаксического представления, а не то, что нужно фактическое и явное задание этого представления. Если же настаивать на том, чтобы непременно сделать последнее, а автонимное представление отвергать, то для большинства целей было бы лучше использовать схему Шольца. Кроме того, я не вижу оснований, почему бы древовидные образования вроде предложенных в [APM] не подходили столь же хорошо в качестве возможных представлений для об-системы.

Во всех этих рассуждениях я не пользовался термином 'метаязык'. Гильберт этого тоже не делал, хотя он и говорил о "знаках для сообщения" (*Mitteilungszeichen*) и мог бы точно так же говорить о "языке для сообщения" (*Mitteilungssprache*). Согласно Карнапу (см. его [LSL], стр. 9; на стр. 4 для обозначения употребляемого им языка он использует термин 'синтаксический язык'), общее использование приставки 'мета' по аналогии с 'метаматематикой'

исходит от "варшавской логической школы". Термин 'метаязык' (*Metasprache*) появляется, в обобщенном смысле, у Тарского ([BBO] и [WBF]), а соответствующий английский термин '*metalanguage*' в этом общем смысле — у Карнапа [ISm]. Трудности в связи с этим термином состоят в том, что метасемиотический процесс можно итерировать, и образуется метаметаязык, в котором говорят о метаязыке. Но поскольку метасемиозис можно применять лишь к языку формализованной структуры, этого нельзя сделать, если метаязык отождествляется с U-языком. Я поэтому предлагаю использовать термин 'метаязык' в смысле А-языка метасистемы. Тогда метасемиозис можно итерировать столько раз, сколько мы пожелаем, и U-язык всегда будет верхним языком. Все это очень родственно идеям Гильберта, реализуемым обычно не слишком четко (ср. разд. А2; само это предложение было выдвинуто в [LMF]).

4. Семиотические системы. Общие ссылки на семиотику были приведены в разд. 1. Здесь я сделаю набросок некоторых из дальнейших путей развития семиотики и приведу ряд критических замечаний. Источниками последних являются [MSL], [LFS], [LMF], [CLg], разд. 1S2.

Семиотическая теория (или система) — это теория, в которой мы говорим о символах или выражениях некоторого языка или языков. Эта теория может не быть формальной системой, но мы будем считать, что она является таковой по крайней мере частично, так что имеет смысл говорить о ее А-языке. Такая система обязательно является интерпретированной; в ней мы делаем определенные утверждения о языке или языках, понятные нам.

Моррис и Карнап разделили предмет семиотики на три части, или "измерения": *синтактику*, *семантику* и *прагматику*. Пусть нам дана теория $\mathfrak{S}$, относящаяся к языку L. Говорят, что $\mathfrak{S}$ является синтаксической (относительно L), если утверждения $\mathfrak{S}$ относятся только к "синтаксису" L, т. е. к структуре его выражений как цепочек символов; $\mathfrak{S}$ является семантической относительно L, если значения — т. е. десигнаты — определенных выражений также принимаются во внимание, и $\mathfrak{S}$ является прагматической, если говорится также об отношениях между языком L и теми, кто им пользуется в психологическом, физиологическом, практическом или каком-либо еще аспекте. Прагматикой мы не будем заниматься (это специальная тема книги Мартина [SPr]), но о других двух частях следует сделать ряд замечаний. Несмотря на кажущуюся объективность проведенной выше трихотомии, не всегда ясно, когда система является синтаксической, а когда семантической.

Эту трудность можно проиллюстрировать, сославшись на пример 1. Предположим, что, как было предложено в разд. С3, a, b и c

представляют собой соответственно 'α', 'β' и 'γ', что L — множество выражений, составленных из этих трех букв, и что $\mathfrak{S}$—система примера 1. Тогда $\mathfrak{S}$ — семантическая система относительно L. Если самами служат выражения, образованные приписыванием нуля или большего числа букв b после a, тетелами — выражения, образованные вставкой c между двумя самами, а тантетами — тетелы, в которых два сама, окружающие c, совпадают, то мы имеем правильную интерпретацию $\mathfrak{S}$, и $\mathfrak{S}$ является синтаксической относительно L. Но если мы, кроме того, знаем, что тетелы являются предложениями L, т. е. что они обозначают утверждения, когда используется L, то $\mathfrak{S}$ является семантической. При этих обстоятельствах $\mathfrak{S}$ является и синтаксической, и семантической. Это тем более верно, если мы знаем, что тантеты являются истинными предложениями и что самы обозначают числа.

Подобная же, но еще более сложная ситуация возникает в связи с примером 6. Пусть L имеет алфавит, состоящий из 'N', 'C' и бесконечной последовательности σ, членами которой являются 's_0', 's_1', 's_2', ... Пусть π — множество выражений, полученных из членов σ повторным использованием 'N' в качестве унарного префикса и 'C' в качестве бинарного префикса (представление по Лукасевичу). Пусть a есть 's_0' и если X является членом σ, то пусть Xb будет ближайший следующий член σ. Далее если X и Y содержатся в π, то пусть $\neg X$ будет результатом приписывания 'N' перед X, а $X \supset Y$ — результатом записи сначала 'C', затем X, затем Y. Пусть τ — подкласс π, состоящий из тавтологий, т. е. из тех слов, которые всегда принимают значение 1 при любой оценке, приписывающей значения '0' и '1' элементам 's_0', 's_1', . . ., причем значения $\neg X$ и $X \supset Y$ получаются из обычных истинностных таблиц как в разд. С5. Тогда если X — любое слово из L, то существуют эффективные процессы для решения вопроса о том, входит ли X в σ, в π или в τ. Пусть $S(X)$, $P(X)$, $\vdash X$ интерпретируются как утверждения о том, что X входит соответственно в σ, π или τ. Тогда мы имеем правильную интерпретацию примера 6 и при такой интерпретации пример 6 является семиотической системой над L. Более того, эта система—синтаксическая. Если мы добавим информацию о том, что выражения из π становятся предложениями, когда вместо переменных подставляются предложения из L, то эта система становится семантической, и она тем более будет семантической, если мы добавим информацию о том, что предложения, полученные при подобной подстановке в выражения из τ, будут истинными предложениями в L. Но из-за этого система не перестает быть синтаксической.

Мы видим, что в определениях понятий 'синтаксический' и 'семантический' есть некоторая неопределенность. Попытаемся быть более точными. Определим синтаксические и семантические

утверждения относительно L; тогда результаты можно будет обычным путем распространить на синтаксические или семантические теории или системы. Предположим, что мы имеем дело с утверждениями, истинность которых может быть установлена либо из синтаксических соображений, т. е. из рассмотрений, касающихся структуры L-выражений как цепочек (конечных последовательностей) L-символов, либо из семантических соображений, т. е. из учета L-десигнатов, либо из тех и других (исключая, таким образом, прагматические соображения). Тогда *синтаксическое утверждение* — это утверждение, истинность которого можно определить из одних синтаксических соображений; *семантическое утверждение* — это утверждение, дающее информацию о десигнатах. Ясно, что утверждение, а следовательно, и система могут быть синтаксическими и семантическими в одно и то же время. Семантическое утверждение, не являющееся синтаксическим, можно назвать *строго семантическим*; утверждение, не несущее никакой семантической информации,— *чисто синтаксическим*. Конечно, мы могли бы определить термины иначе, но эти кажутся мне самыми удобными. Утверждения, являющиеся одновременно и семантическими, и синтаксическими, имеют огромную важность. Мы пытаемся сделать наши понятия синтаксическими, для того чтобы иметь определения доказательства; действительно, в этом состоит цель дедуктивных систем; мы хотим, чтобы наши понятия были семантическими, для того чтобы их можно было применять. Все примеры семантических понятий в книге Карнапа [ISm] с этой точки зрения являются также синтаксическими (ср. [LSF]). Строго семантические понятия встречаются в теории истинности Тарского (его [WBF]), где они ассоциируются с неконструктивными понятиями; чисто синтаксические понятия встречаются в теории алгорифмов и т. п.

Заметим, кстати, что вопрос, синтаксической или семантической является ситуация,— это не вопрос о том, интерпретируется система или нет (она интерпретируется или может интерпретироваться в любом случае), а вопрос о том, какова информация относительно языка L. Синтаксическая система в смысле разд. С2 будет синтаксической и в настоящем смысле — если О-язык не дан, то его можно добавить,— но семантической она будет только тогда, когда О-язык представляет собой язык L, о котором имеется некоторая информация.

Приведенные выше примеры иллюстрируют также то, что семантическая информация может вводиться в несколько этапов. Ссылаясь на первый пример, мы можем различать три этапа и в соответствии с ними три подразделения семантики.

1°. Мы можем знать, что выражения из L являются предложениями. Этот этап представляет собой *грамматику* разд. А3.

Он соответствует "правилам образования" Карнапа. В примере 1 предложения — это тетелы.

2°. Мы можем знать, каковы истинные предложения или утверждения языка L. Этот этап в [LFS] был назван *алететикой*. Он соответствует "правилам истинности" Карнапа. В примере 1 мы знаем алететику тогда, когда мы знаем, что истинные предложения являются тантетами.

3°. Мы можем знать десигнаты и других выражений языка L. Это — *ономатика* ([LFS] и [CLg], разд. 1S2), соответствующая "правилам обозначения" Карнапа. Чтобы задать ономатику примера 1, нам нужно знать, что a обозначает 0 (где '0' — числительное в U-языке) и что суффикс 'b' обозначает функцию 'следующий за' в области чисел.

Можно, конечно, предположить, что каждое из этих подразделений в свою очередь подразделяется далее. Из этих подразделений я упомяну только тектонику (разд. C6), занимающуюся способами, по которым конструкции (разд. A6) можно представить с помощью выражений. Ее можно считать подразделом грамматики. (Предложения о подразделении ономатики, выдвинутые в [LFS], никогда не были реализованы.)

Для каждого из этих подразделений имеется соответствующий эпитет, который можно применять к 'утверждению' или 'системе'. Можно применять их и к 'языку', как, например, тогда, когда интерпретируют утверждение о том, что L является алететическим языком, в том смысле, что мы знаем, какие L-выражения обозначают истинные предложения. Поэтому A-язык любой формальной системы является алететическим, но если система абстрактна, то он не является ономатическим.

В предшествующих определениях есть ряд тонкостей, заслуживающих некоторого дальнейшего обсуждения.

Пусть нам нужно построить ономатическую систему $\mathfrak{S}$ над некоторым O-языком L; пусть M — A-язык $\mathfrak{S}$. Тогда M должен содержать имена для выражений в L и способы для установления взаимоотношений между этими выражениями. Эта часть M_1 языка M образует A-язык синтаксической системы $\mathfrak{S}_1$ над L; M_1 будет, следовательно, метаязыком в смысле разд. 3. Но, кроме M_1, M должен будет содержать еще способы указания на десигнаты L; таким образом, M должен содержать часть M_2, которая должна быть переводом L (может быть, самим L). К тому же M должен во всяком случае содержать предикат, выражающий отношение обозначения. Если $\mathfrak{S}$ формализован в виде формальной системы $\mathfrak{S}^*$ и если эта формализация происходит метасемиотическим путем, то A-язык системы $\mathfrak{S}^*$, возможно, все же будет третьим языком N; но если формализация проходит посредством абстракции, то мы можем отождествить N с M, а $\mathfrak{S}^*$ с $\mathfrak{S}$ (т. е. мы можем предполагать, что формализация проведена заранее).

Термины 'метаязык' и 'метасистема' были определены в разд. C3 и S3 для синтаксических систем. Встает вопрос, как можно распространить эти термины на более общие семиотические теории, отличая приведенные ранее значения посредством эпитета 'синтаксический'. Теперь $\mathfrak{S}_1$ является синтаксической метасистемой, а M_1 — синтаксическим метаязыком (относительно L), но мы должны помнить, что сам M_1 является алететическим языком, так что мы должны различать значения дополнительных эпитетов в применении к 'языку' и 'метаязыку'. По аналогии было бы естественно также сказать, что $\mathfrak{S}$ является ономатической метасистемой относительно L и что M является ономатическим метаязыком. Но предложение назвать $\mathfrak{S}^*$ метасистемой L внесло бы путаницу, так как N является метаязыком. Поэтому для общей ситуации больше подходит термин 'семиотическая система' (это — исправление [CLg], разд. 1S2).

Эти рассмотрения показывают сложность ситуации в отношении семиотических систем. Предложенная здесь терминология не общепринята [1]), так что в каждом случае читателю придется уяснить, как данный автор проводит эти и родственные различия (если он вообще это делает).

[1]) О так и не преодоленных до конца трудностях, возникающих при попытке взаимно-однозначного отображения английских терминов автора в некоторое множество русских терминов, уже говорилось в предисловии редактора. Считая безусловно интересными соображения автора по этому поводу (см. стр. 136 и 250), я полагаю, однако, что несмотря на весьма красноречивые объяснения мотивов предлагаемой им терминологической революции, ему не удалось исчерпывающим образом обосновать свои рекомендации (это относится ко многим неологизмам Карри). Впрочем, для понимания основного материала книги (гл. V—VIII) сказанного автором вполне достаточно. Более того, читатель при желании вообще может ограничиться терминологическими установками, принятыми в предисловии В. А. Успенского к русскому изданию книги Чёрча [IML$_2$]. — *Прим. ред.*

Глава 3

ЭПИТЕОРИЯ

В предыдущей главе мы занимались природой формальной системы; в этой главе мы изучаем пути, по которым мы развиваем наши знания о такой системе. Такое развитие не заключается лишь в выводе элементарных теорем последовательно друг за другом. Как только система определена, мы можем считать ее данной и формулировать дальнейшие высказывания о ней в U-языке. Такие высказывания называются *эпивысказываниями*, а в случае их истинности — *эпитеоремами*; префикс 'эпи' будет использоваться вообще для указания на понятия, заключающие в себе такой выход за пределы конкретных применений дедуктивных правил. В этой главе мы будем рассматривать соображения о эпитеоретических процессах вообще. Будет сформулирован ряд соглашений, важных для дальнейшего, и будет установлено и доказано несколько эпитеорем, относящихся к довольно общим видам систем.

С этого момента мы будем предполагать, что системы, с которыми мы имеем дело, являются об-системами. Нетрудно было бы ввести некоторые видоизменения, позволяющие отнести все сказанное далее к системам других типов, но в этом не видно особой нужды.

Различные разделы этой главы перекрываются друг с другом до такой степени, что невозможно расположить разделы по порядку, не вводя предварительно понятий, которые строго определяются лишь далее. Это особенно относится к разд. A; точно так же термины 'U-переменная' и 'неопределенная', хотя формально определяются лишь в разд. D, необходимы ранее. В подобных случаях достаточно будет того первоначального представления, которое имеется у читателя, до тех пор пока позднее не будет проведено более подробное рассмотрение.

A. ПРИРОДА ЭПИТЕОРИИ

Изучение эпитеории уместно начать с того, чтобы привести несколько примеров, вначале безотносительно к их истинности. После этого мы изучим критерии истинности для некоторых

из более простых видов таких эпивысказываний. Это даст нам некоторое представление о природе эпитеории. Оно проложит путь для изучения некоторых сложных типов эпитеорем в дальнейших разделах этой главы и фактически во всей книге.

1. Примеры эпивысказываний. Ряд примеров эпивысказываний и эпитеоретических свойств был рассмотрен в гл. 2. Попытаемся составить приблизительную классификацию некоторых из этих примеров, а также нескольких новых примеров. Эта классификация включает в себя несколько важных типов, но мы не намереваемся делать ее исчерпывающей. Цифры в квадратных скобках относятся к примерам 1—6 гл. 2. При обращении с самами будут использоваться обычные обозначения для чисел.

a. Комбинации конечного числа элементарных высказываний с помощью обычных пропозициональных связок; например,

(*a*1) $0=0\,\&\,1=2$ [2]

(*a*2) $2=4\longrightarrow 3=6$ [2]

(*a*3) $1\neq 2$ (т. е. неверно, что $1=2$) [2]

(*a*4) $\vdash p_1\supset p_2\,\&\vdash p_2\supset p_3\longrightarrow\vdash p_1\supset p_3$ [5]

b. Утверждения, относящиеся к расширению системы тем или иным путем. Система может быть расширена любым из следующих способов: (1) добавлением новых атомов (*атомическое расширение*); (2) добавлением новых операций (*операциональное расширение*); (3) добавлением новых аксиом (*аксиоматическое расширение*) и (4) добавлением новых правил (*инференциальное расширение*). У нас могут быть расширения, в которых эти процессы комбинируются; если новые элементы являются только атомами и операциями, то мы имеем *об-расширение*, а если вводятся новые аксиомы и правила, то мы говорим о *пропозициональном*, или *теоретическом*, расширении; могут быть также комбинации, которые включают в себя оба эти вида. Например, понятие аксиоматического расширения подпадает под определение

$$X_1,\ \ldots,\ X_m\vdash Y$$

для ассерторической системы в разд. 2D1. Вот примеры эпитеорем этого типа:

(*b*1) В расширении, образованном присоединением аксиомы

$$2=4$$

мы имеем

$$3=5$$ [2]

(*b*2) Если в дополнение к аксиоме (*b*1) мы добавим правило

Если $X=Y$ и $Y=Z$, то $X=Z$

то

$$3 = 7 \qquad [2]$$

(*b*3) $$p_1 \supset p_2,\ p_2 \supset p_3 \vdash p_1 \supset p_3 \qquad [5]$$

c. Утверждения об обах, остающиеся верными при любом расширении. Примеры (в которых X, Y, Z обозначают произвольные обы):

(*c*1) $$\vdash X \supset X \qquad [5]$$

(*c*2) $$X = Y \rightarrow Xbb = Ybb \qquad [2]$$

d. Утверждения об обах, не всегда остающиеся справедливыми при расширении; например (X, Y, Z означают то же, что и в *c*):

(*d*1) $$X = X \qquad [2]$$

(*d*2) $$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z \text{ [1]} \qquad [3]$$

e. Утверждения об элементарных теоремах (дающие необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторое высказывание было такой теоремой), например,

(*e*1) Каждая элементарная теорема имеет вид

$$X = X$$

где X — об (сам). [2]

(*e*2) (Дедукционная теорема). Для любых обов X и Y

Если $X \vdash Y$, то $\vdash X \supset Y$ [5]

f. Свойства системы как целого, например непротиворечивость, полнота (в смысле Поста), разрешимость и т. д.

g. Отношения системы к другим системам, включая, возможно, ее собственные подсистемы или расширения (поэтому сюда относятся и все примеры *b*); отображения одной системы на другую и т. д. Например, когда мы используем числовые индексы для указания некоторой последовательности, мы в действительности отображаем обы этой последовательности на самы. Дальнейшими иллюстрациями являются указанные в разд. 2C отношения между примерами 1 и 2, между примерами 3 и 4 и между примерами 5 и 6. К этому же типу относятся редукции к специальному виду, рассмотренные в 2D1 и 2D2.

h. Отношения к посторонним рассмотрениям, инфинитистским предположениям, содержательным интерпретациям. Сюда относятся вопросы интерпретации, если они по существу связаны с какими-нибудь интуитивными допущениями; однако интерпретация одной формальной системы средствами другой подпадает под пункт *g*.

[1]) Ср. упр. 2C2.

В число эпитеорем мы должны также включать теоремы о формальных системах вообще, о системах, удовлетворяющих широким общим условиям или как-то относящихся к другим таким системам. Поэтому эквивалентности, упомянутые выше в *g*, справедливы для широкого класса систем.

Эпитеоремы исключительно важны для современной математической логики. Следующие примеры являются одними из наиболее известных.

Может быть, самой известной является теорема Гёделя о неполноте. На нее мы уже ссылались в разд. 1C. Она утверждает, грубо говоря, что в любой формальной системе, которая непротиворечива и достаточно богата для использования в математических целях, можно конструктивно найти элементарное утверждение, которое не является ни доказуемым, ни формально опровержимым. Отсюда следует — как мы видели в разд. 1C,— что безнадежно рассчитывать на то, чтобы одна формальная система служила формализацией всей математики, и теорема Гёделя показывает, что мы должны быть в состоянии доказывать эпитеоремы о системе, которые, содержательно говоря, выходят за рамки того, что может быть выражено элементарными теоремами. Гёдель заключает, что никакая система такого рода не годится для формализации доказательства собственной непротиворечивости. Теорема сначала была доказана для некоторой формализации, основанной на работе Уайтхеда и Рассела [PMt], и как эпитеорема этой (или любой другой специальной) системы она подпадает под *f*, но доказательство можно распространить на широкий класс систем.

Другими примерами эпитеорем являются теорема Лёвенгейма — Сколема и теорема Гёделя о полноте. Это эпитеоремы обычного "классического" исчисления предикатов; они неконструктивны по своей природе, так что подпадают под *h*. Первая из них гласит, что если "формула" (или, более общо, множество формул) этого исчисления имеет модель, то она имеет счетную модель. Вторая утверждает, что формула, верная в любой счетной модели, доказуема.

2. Фундаментальные критерии истинности. Как объяснялось в начале разд. A, в разд. 1 не предпринималось попытки рассматривать критерии истинности эпиутверждений, приведенных там. Обратимся теперь к этой проблеме.

В этой книге мы будем рассматривать только класс эпитеорем, которые мы называем *конструктивными*. Они характеризуются тем, что мы признаем их истинными только тогда, когда мы имеем эффективный процесс, который в любом конкретном случае, подпадающем под формулировку этих теорем, действительно приводит к определенному решению.

Чтобы понять сущность этого ограничения, рассмотрим эпиутверждение (*a*3). Что́ значит, что элементарное утверждение ложно? А что́ значит, что оно истинно? Элементарные теоремы образуют индуктивный класс, и элементарное утверждение принадлежит этому классу в точности тогда, когда имеется его конструкция, т. е. формальное доказательство. Чтобы показать, что элементарное утверждение ложно, мы должны эффективно показать, что невозможно никакое его формальное доказательство. Это сводится к показу того, что каждое доказательство ведет к заключению, отличному от данного элементарного утверждения; тем самым утверждения с отрицанием сводятся к утверждениям типа разд. 1*e*. Поэтому, для того чтобы конструктивно установить ложность элементарного утверждения, мы должны указать эффективный процесс, показывающий, что любая элементарная теорема имеет некоторую определенную структурную характеристику, которой не имеет данное элементарное утверждение. В случае эпиутверждения (*a*3) это нетрудно сделать. В самом деле, мы увидим позднее, что мы можем эффективно установить эпитеорему (*e*1); из нее мы получим (*a*3), так как обы в обеих частях равенства имеют различные конструкции. Но в общем случае этого сделать невозможно. Действительно, теорема Гёделя о неполноте показывает, что существуют системы, в которых мы не можем эффективно установить ложность отдельного элементарного утверждения [1]). В таких случаях отрицание элементарного утверждения просто описывает цель, которой мы не можем достичь.

Это рассуждение, которое совершенно сходно с рассуждением, выдвигаемым интуиционистами (но совершенно по-другому аргументируемым), показывает, что мы не можем понимать пропозициональные связки чересчур наивно. Необходимо изучать свойства, которые эти связки имеют в том или ином контексте. Это изучение для сложных случаев, когда связки свободно комбинируются, займет большую часть дальнейшего изложения в этой книге. Сделанные здесь замечания являются предварительными и в принципе охватывают лишь простейший случай, именно случай, когда объединяются элементарные утверждения.

Для конъюнкции и дизъюнкции ситуация относительно проста. В случае конъюнкции если 'A' и 'B' обозначают предложения [2]),

[1]) Поскольку эффективное доказательство невыводимости элементарного утверждения было бы эффективным доказательством непротиворечивости системы, то такое доказательство противоречило бы — по крайней мере в принципе — второй теореме Гёделя о неполноте.

[2]) Буквы 'A', 'B' (и позднее также 'C') следует понимать как сокращения для предложений; они также используются в тексте как имена для соответствующего утверждения. Это пример общего соглашения относительно U-языка, которое было упомянуто в конце разд. 2A3.

то выражение

$$A \,\&\, B$$

является сокращением для утверждения, которое истинно тогда, когда A и B оба истинны; с другой стороны, выражение

$$A \text{ или } B$$

является сокращением для утверждения, которое мы считаем доказанным в точности тогда, когда у нас есть либо доказательство A, либо доказательство B, либо доказательство обоих. В частности — по причинам, которые были установлены в разд. 1C1,— мы не допускаем возможности того, что мы можем утверждать A или B, не будучи уверены в истинности какого-нибудь из них.

Ситуация в случае импликации сложнее. Обычная табличная (или материальная) импликация тесно связана с отрицанием. Ее можно применять в случаях вроде (*a*2), где основная система разрешима, но в общем случае для материальной импликации имеют место те же возражения, что приведены выше для отрицания.

В контексте, где важна конструктивная точка зрения, мы будем понимать утверждение

$$A \longrightarrow B \tag{1}$$

где 'A' и 'B' — сокращения для предложений, как истинное тогда и только тогда, когда существует эффективный процесс получения доказательства того, что B справедливо, из доказательства того, что A справедливо; здесь мы не исключаем возможности того, что не существует никакого доказательства справедливости A. В этом смысле (*a*2) верно. Вот еще один пример. Пусть X — об из примера 5 разд. 2C3 и пусть Y получается из X заменой некоторого оба Z на p_1. Если мы сделаем эту замену во всем доказательстве $\vdash X$, то мы превратим его в доказательство $\vdash Y$. Так как это эффективный процесс, то мы имеем

$$\vdash X \longrightarrow \vdash Y \tag{2}$$

В случае когда A является конъюнкцией элементарных утверждений $A_1, \ldots, A_m$, а B является элементарным утверждением, есть другой путь, подходящий для характеристики (1) [1]). Рассмотрим (1) как правило, добавляемое к данной системе для получения выводного расширения. Скажем, что (1) является *допустимым правилом*, если каждая элементарная теорема этого инференциального расширения является также элементарной теоремой исходной системы. Поэтому если (1) истинно в смысле, опре-

[1]) Эта идея принадлежит Лоренцену. См., например, его [EOL].

деленном в предыдущем абзаце, то (1) является допустимым правилом. Действительно, рассмотрим в расширенной системе любое доказательство с заключением C [1]). Если (1) не используется в этом доказательстве, то оно является доказательством в исходной системе. В противном случае можно исключить первое применение (1), ибо в древовидной диаграмме доказательства доказательство каждого из $A_1, \ldots, A_m$ должно стоять выше первого узла, где применяется (1), и из этих доказательств мы можем построить доказательство B в исходной системе; это доказательство может заменить доказательство с использованием (1). Продолжая идти дальше тем же путем, мы последовательно исключим применения (1) до тех пор, пока не получим доказательства C в исходной системе. Влечет ли конструктивная допустимость то, что (1) справедливо в смысле, определенном в предыдущем абзаце, не ясно. Однако, используя платонистскую аргументацию, мы можем показать, что это так. Ведь если нет доказательства для A, то (1) верно; в противном случае доказательство A с последующим применением (1) для вывода B было бы выводом B в расширенной системе; следовательно, B должно быть выводимо в исходной системе.

В предположениях последнего абзаца относительно A и B условие (1) выполняется, в частности, если B является теоремой в аксиоматическом расширении, образованном добавлением A (или $A_1, \ldots, A_m$) к аксиомам, ибо мы преобразуем доказательство того, что A справедливо, в доказательство того, что B справедливо, просто добавлением дополнительных шагов, необходимых для вывода B из A. В этом случае мы говорим, что B *формально выводимо* из A. То, что это отношение сильнее, нежели (1), показывается тем, что ни ($a2$) разд. 1 [2]), ни в общем случае (2), где X, Y таковы, как там указано, не имеют места в смысле формальной выводимости. Отношение

$$X_1, \ldots, X_m \vdash Y$$

определенное для ассерторической системы в разд. 2D1, является аналогом в смысле формальной выводимости для

$$\vdash X_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \vdash X_m \rightarrow Y$$

Это рассуждение завершает изучение простых случаев для пропозициональных связок, которые появляются в примерах из $1a$. В рассуждении также принимались во внимание примеры из $1b$, относящиеся к аксиоматическим расширениям [а именно, ($b1$) и ($b3$)]. Идеи обобщения, затронутые в разд. $1c$ — $1e$, настолько интересны, что мне кажется целесообразным посвятить им специальный разд. 3.

[1]) Заметим, что конструктивно C является элементарной теоремой только тогда, когда нам дано его формальное доказательство.

[2]) Если мы, скажем, добавим $1=2$ к примеру 2 в качестве аксиомы, то мы получим $1=2$, $2=3$, $3=4$ и т. д. в расширенной системе, но без правила транзитивности для $=$ мы не получим $2=4$. Ср. разд. 6A2.

3. Эпитеоретическое обобщение. Теперь мы займемся проблемой объяснения критерия истинности для эпиутверждений, рассматривавшейся нами в разд. 2, в применении к общим эпиутверждениям из разд. $1c$ — $1e$ относительно обов и элементарных теорем. Так как обы и элементарные теоремы являются индуктивными классами, то эта проблема сводится к проблеме конструктивных общих утверждений о элементах индуктивного класса.

Существует два источника такого рода обобщений. С одной стороны, в нашем распоряжении могут быть, как часть наших данных, утверждения, содержащие U-переменные [1]) или параметры, причем эти U-переменные или параметры могут замещаться любыми элементами данного класса. Поэтому правила и схемы аксиом примера 5 (разд. 2C3) верны в этом смысле для произвольных обов, так что они по определению будут верны вне зависимости от того, как расширялась система. Следствия, выведенные из этих данных, будут верны для всех определений параметров; как покажут примеры, которые вскоре будут приведены, этим путем выводятся теоремы из $1c$. Этот вид обобщения будет назван *схематическим обобщением*. С другой стороны, может оказаться необходимым вывести общее утверждение прямо из определения класса. В этом случае мы говорим о *индуктивном обобщении*, или *обобщении по индукции*.

Чтобы проиллюстрировать схематическое обобщение, проведем доказательство эпитеоремы ($c1$). Для этого мы обозначим первую и вторую схемы аксиом примера 5 через 'PK' и 'PS' соответственно. Тогда вывод выглядит следующим образом (шаги нумеруются слева и обосновываются справа; здесь X, Y — произвольные обы):

1.	$\vdash (X \supset (Y \supset X)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset X))$	по PS
2.	$\vdash X \supset (Y \supset X)$	по PK
3.	$\vdash (X \supset Y) \supset (X \supset X)$	из 1, 2 по правилу
4.	$\vdash (X \supset (X \supset X)) \supset (X \supset X)$	взяв $X \supset X$ в качестве Y [2])
5.	$\vdash X \supset (X \supset X)$	по PK
6.	$\vdash X \supset X$	из 4, 5 по правилу

[1]) См. разд. D1.

[2]) То есть мы рассматриваем 'Y' как сокращение для '$X \supset X$'. Мы могли бы написать '$X \supset X$' вместо 'Y' на шагах 1—3, но удобнее оставить 'Y' неопределенным до шага 4.

Это пример так называемой *схемы доказательств*; она становится доказательством, если мы возьмем в качестве X любой конкретный об.

Другой путь представления такой схемы доказательств — обобщаемый обычным путем на случай m U-переменных — состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{S}$ — данная система, и пусть $\mathfrak{S}'$ — атомическое расширение $\mathfrak{S}$, образованное добавлением новых атомов $x_1, \ldots, x_m$ без каких-либо новых аксиом, за исключением того, что, конечно, U-переменные для произвольных обов $\mathfrak{S}$ в формулировке правил и схем аксиом $\mathfrak{S}$ становятся U-переменными для произвольных обов $\mathfrak{S}'$. Такие дополнительные обы называются (*присоединенными* [1])) *неопределенными*. Теперь любую элементарную теорему $\mathfrak{S}'$ можно правильно интерпретировать [2]) как ту элементарную схему теорем $\mathfrak{S}$, которая получается в результате подстановки различных переменных для произвольных обов $\mathfrak{S}$ вместо присоединенных неопределенных обов; действительно, доказательство в $\mathfrak{S}'$ становится схемой доказательств для $\mathfrak{S}$, если такая подстановка проведена повсюду. Более того, таким путем можно получить любую схему доказательств, ибо схема доказательств для $\mathfrak{S}$ будет также схемой доказательств для $\mathfrak{S}'$, и если ограничить значения U-переменных неопределенными обами, то можно получить доказательство в $\mathfrak{S}'$, из которого указанными подстановками можно восстановить первоначальную схему доказательств. Если мы определим элементарную схему теорем как схему, которая может быть получена с помощью некоторой схемы доказательств, то такая схема теорем по существу означает то же самое, что элементарная теорема в подходящем атомическом расширении. Поэтому такие эпитеоремы являются и эпитеоремами в смысле примера 1*b*.

Данное рассуждение применимо не только к элементарным теоремам, но и к схематическим формам эпитеорем, рассмотренных в разд. 2. Например, эпитеорема (*c*2) является схематическим утверждением о формальной выводимости. Ее доказательство является следующим доказательством в об-расширении, в котором x и y — добавленные неопределенные обы:

$$\begin{aligned} x &= y && \text{по допущению} \\ xb &= yb && \text{по правилу примера 2} \\ xbb &= ybb && \text{по тому же правилу} \end{aligned}$$

Это рассуждение может применяться к любому виду эпитеорем, поскольку оно совершенно схематично.

[1]) Позднее мы рассмотрим возможность введения и других видов неопределенных.

[2]) См. разд. 2B4.

В случае системы типа примера 5 (разд. 2C3) не обязательно присоединять неопределенные, ибо неопределенные уже были построены в системе. В этой системе мы имеем эпитеорему типа 1*e*, утверждающую, что любой об может быть подставлен вместо одного из p_i.

Обратимся теперь к индуктивным обобщениям. Предположим, что мы имеем индуктивный класс $\mathfrak{X}$ с начальными элементами $\mathfrak{B}$ и операциями $\mathfrak{O}$. Для того чтобы показать, что каждый член X из $\mathfrak{X}$ обладает определенным свойством P, достаточно установить два следующих принципа: (1) каждый элемент $\mathfrak{B}$ обладает свойством P; (2) любой элемент, образованный применением операции ω из $\mathfrak{O}$ к элементам, которые обладают свойством P, также будет обладать свойством P. Действительно, зная эти два принципа (в конструктивном смысле, конечно), мы можем указать эффективный процесс для превращения конструктивного доказательства того, что X содержится в $\mathfrak{X}$, в конструктивное доказательство того, что X обладает свойством P, следующим образом. Мы можем конструктивно знать, что X содержится в $\mathfrak{X}$ только тогда, когда нам действительно дана конструкция $\mathfrak{C}$, оканчивающаяся X. С $\mathfrak{C}$ связана некоторая древовидная диаграмма $\mathfrak{D}$. Элементы $\mathfrak{C}$, соответствующие верхним узлам $\mathfrak{D}$, обладают свойством P по принципу 1. Затем, переходя вниз по дереву от узла к узлу — скажем, в порядке нормальной конструкционной последовательности,— мы можем показать, что другие элементы $\mathfrak{C}$ также обладают свойством P. Поэтому в конце концов мы покажем, что X обладает свойством P.

Существует два вида доказательства по индукции, соответствующие двум главным типам индуктивных классов: обам и элементарным теоремам (или следствиям некоторого базиса). В первом случае мы говорим о доказательстве методом *структурной индукции*, во втором — о доказательстве по *дедуктивной индукции*. Обычная математическая индукция с настоящей точки зрения является структурной индукцией по системе самов; она так часто встречается в связи с последовательностями (ср. 1*g*), что стоит считать ее третьим видом — *натуральной индукцией*. В любом случае принципы 1 и 2 называются соответственно *базисным шагом* и *индуктивным шагом* [1]) доказательства по индукции.

В качестве примера применения структурной индукции мы докажем эпитеорему (*d*1). Базисный шаг справедлив, так как

$$a = a$$

[1]) Эти термины по существу исходят от Клини. В своей книге [IMM], стр. 22 [стр. 27 русского издания. — *Ред.*], он употребляет термины 'базис' и 'индукционный шаг'.

является аксиомой примера 2. Индуктивный шаг справедлив, так как

$$X = X \longrightarrow Xb = Xb$$

является непосредственным применением второго правила.

Обращением эпитеоремы ($d1$) является эпитеорема ($e1$), которая доказывается методом дедуктивной индукции. Базисный шаг справедлив, так как единственная аксиома имеет указанный вид. Индуктивный шаг справедлив, так как применяемое правило превращает утверждение указанного вида в другое утверждение указанного вида. Другим примером эпитеорем этого типа является принцип подстановки для примера 5 (рассмотренный в разд. 2D3); он был по существу использован нами при рассмотрении схем доказательств.

Доказательства методом структурной или дедуктивной индукции могут принимать несколько видов. Поэтому в одном виде доказательства методом дедуктивной индукции мы явно показываем, что свойство имеет место для Γ, если она является аксиомой, а также что свойство имеет место для посылок Γ, если Γ получается посредством правила вывода. В другом виде доказательства мы можем предположить, что имеется последовательность $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, образующая доказательство Δ, а затем показать, что каждое Γ_k обладает свойством, если все предшествующие ему (если таковые имеются) обладали этим свойством. Опять-таки мы можем провести и натуральную индукцию по n (т. е. по длине Δ). Эти виды доказательства эквивалентны друг другу, и выбор между ними в дальнейшем будет определяться различными конкретными факторами [1]).

4. Другие эпитеоремы. Остальные, более сложные типы эпитеорем будут рассмотрены здесь более кратко. Многие из них весьма трудны; поскольку они, однако, явно выходят за рамки "оснований" математической логики, они не будут подробно рассматриваться в этой книге. Что касается эпитеорем из $1f$, то понятие непротиворечивости было определено в разд. 2B1, полнота в смысле Поста — в разд. 2B2, разрешимость — в разд. 2B1. Из сделанных там и позже объяснений должно быть видно, что критерии истинности для таких эпитеорем должны существовать.

В дальнейшем изложении будет особенно важен тип эпитеоретического процесса, подпадающий под $1g$, и потому мы упомянем его здесь. Много-однозначное отображение

$$a \sim a^*$$

[1]) Читателю стоит поупражняться в преобразовании конкретных доказательств из одного вида в другой.

обов системы $\mathfrak{S}$ в обы системы $\mathfrak{S}^*$ называется *гомоморфизмом* $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{S}^*$, если выполнены следующие условия. Каждой исходной операции ω_i и исходному предикату φ_j из $\mathfrak{S}$ соответствуют операция ω_i^* и предикат φ_j^* из S^* (в каждом случае той же степени), такие, что $\omega_i (a_1, \ldots, a_{m_i})^*$ есть об $\omega_i^* (a_1^*, \ldots, a_{m_i}^*)$ и, далее,

$$\varphi_j (a_1, \ldots, a_{n_j}) \longrightarrow \varphi_j^* (a_1^*, \ldots, a_{n_j}^*)$$

Очевидно, гомоморфизм является правильной прямой интерпретацией $\mathfrak{S}$ в обах $\mathfrak{S}^*$. Достаточные условия того, что оценка обов $\mathfrak{S}$ как обов $\mathfrak{S}^*$ является гомоморфизмом, заключаются в том, чтобы удовлетворялись условия для операций, чтобы аксиомы $\mathfrak{S}$ преобразовывались в теоремы $\mathfrak{S}^*$ и дедуктивные правила $\mathfrak{S}$ преобразовывались в допустимые правила $\mathfrak{S}^*$. *Эндоморфизм* $\mathfrak{S}$ есть, по определению, гомоморфизм $\mathfrak{S}$ в себя. Эти термины особенно полезны в том случае, когда $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ — интерпретируемые системы; в этом случае могут быть сделаны и дальнейшие уточнения (см. разд. 5A4), но эти термины иногда полезны и при общих обстоятельствах, упоминаемых здесь.

Упражнения

Читатель должен доказать или опровергнуть столько эпитеорем, приведенных в разд. 1, сколько он сможет. По поводу других примеров см. упражнения к разд. 2C и 2D.

B. ЗАМЕНА И МОНОТОННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

В этом разделе мы займемся определениями и теоремами, связанными с понятием замены в об-системе и со свойствами монотонности по отношению к такой замене. Для этого потребуются некоторые дополнительные технические рассмотрения, относящиеся к конструкциям. Доказываются некоторые общие теоремы о квазиупорядочении и отношении эквивалентности; хотя эти теоремы относительно просты, они применимы к многим известным системам.

1. Предварительные объяснения. Понятие индуктивного класса элементов $\mathfrak{X}$, образованного из начальных элементов $\mathfrak{A}$ с помощью порождающих принципов $\mathfrak{O}$, знакомо нам из разд. 2A5. Здесь предполагается, что $\mathfrak{X}$ — класс обов, что $\mathfrak{A}$ — также класс обов, обычно (но не обязательно) являющихся атомами или квазиатомами, и что $\mathfrak{O}$ — класс операций, с помощью которых из одних обов образуются другие. При этих обстоятельствах мы назовем (элементы) $\mathfrak{X}$ *комбинациями* (элементов) $\mathfrak{A}$ посредством (элементов) $\mathfrak{O}$. Комбинация $\mathfrak{A}$ посредством $\mathfrak{O}$ называется *соб-*

ственной, если она не является комбинацией никакого собственного подмножества $\mathfrak{A}$.

Когда $\mathfrak{A}$ является классом атомов, а $\mathfrak{O}$ — классом исходных операций системы $\mathfrak{S}$, то комбинации $\mathfrak{A}$ посредством $\mathfrak{O}$ суть не что иное, как обы $\mathfrak{S}$. Однако допустимы и другие возможности. Поэтому $\mathfrak{A}$ не обязательно состоит из атомов и может включать в себя обы, не являющиеся атомами [1]); точно так же $\mathfrak{O}$ не обязательно состоит из исходных операций и может включать в себя операции, определенные некоторым специальным образом.

При изложении в разд. 2А6 был опущен ряд технических терминов, относящихся к конструкциям и древовидным диаграммам, с тем чтобы не загромождать изложение излишними техническими деталями. Но поскольку эти термины позднее понадобятся, они сейчас будут объяснены. Заметим, что при принимаемых здесь общих предположениях конструкция не обязательно единственна. Действительно, в системе самов *abbb* как комбинация *a* с помощью операций приписывания справа *b* и приписывания справа *bb* имеет три различные конструкции.

Пусть $\mathfrak{C}$ — конструкция оба X из $\mathfrak{X}$, и пусть $\mathfrak{D}$ — связанная с ней древовидная диаграмма. Тогда мы назовем X *конечным пунктом* $\mathfrak{C}$. Далее, *исходными данными* $\mathfrak{C}$ будут обы в $\mathfrak{A}$, которые соответствуют верхним узлам $\mathfrak{D}$. Об Y называется *компонентой* X, если он соответствует некоторому узлу в $\mathfrak{D}$; *собственной компонентой* называется компонента, соответствующая узлу, отличному от нижнего. *Ветвь* $\mathfrak{D}$ — это такая последовательность узлов, что любой ее член присоединен к предшествующему ему члену снизу; ветвь, начинающаяся верхним узлом и заканчивающаяся нижним узлом, называется *максимальной ветвью*. Узел Y расположен *над* узлом Z (а Z — *под* Y), если Z и Y расположены на одной ветви и Z в данной последовательности идет за Y. Эти термины, относящиеся к $\mathfrak{D}$, можно по метонимии распространить на $\mathfrak{C}$; действительно, узлы можно отождествлять с соответствующими компонентами. Более того, если Y — компонента, то компоненты, расположенные над Y, вместе с самой Y образуют конструкцию с конечным пунктом Y; эта конструкция называется *конструкцией* Y, *определенной* $\mathfrak{C}$, а соответствующая древовидная диаграмма — *поддеревом в* $\mathfrak{D}$, *определенным* Y. Наконец, если Y — компонента X в $\mathfrak{C}$, то будет существовать ветвь, начинающаяся с узла, соответствующего компоненте Y, и кончающаяся нижним узлом; соответствующая последовательность компонент, начинающаяся Y и кончающаяся X, будет называться *композицией от* Y *к* X *в* $\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — конструкция X, а Y — компонента в $\mathfrak{C}$. Тогда

[1]) Они не обязаны даже быть квазиатомами в смысле разд. D2.

будет существовать композиция от Y к X в $\mathfrak{C}$. Если Y входит как компонента более одного раза, то для каждого вхождения будет отдельная композиция. Соответственно мы определим *вхождение* Y в X (относительно $\mathfrak{C}$) как композицию от Y к X (в $\mathfrak{C}$). Это соответствует обычной практике в отношении синтаксических систем, где вхождение отождествляется с начальным сегментом, оканчивающимся последней буквой вхождения. Если рассматриваемая синтаксическая система — аффиксативная, то понятие вхождения в этом смысле можно рассматривать как частный случай рассмотренного здесь понятия.

Такую композицию можно охарактеризовать как последовательность $U_1, U_2, \ldots, U_n$, такую, что $U_1 \equiv Y$, $U_n \equiv X$ и

$$U_{k+1} \equiv \varphi_k(U_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

где φ_k — одноместная операция, полученная фиксацией всех аргументов некоторой операции ω из $\mathfrak{O}$, за исключением одного. Мы будем иногда называть φ_k *компонентными операциями* композиции.

Пусть теперь дано вхождение Y в X. Об X', получающийся из X путем *замены* этого вхождения Y на Y', определяется так: пусть U_k, φ_k таковы, как выше, и пусть

$$U'_1 \equiv Y'$$
$$U'_{k+1} \equiv \varphi_k(U'_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Тогда

$$X' \equiv U'_n$$

Мы можем распространить это определение на замену в элементарной теореме, просто трактуя предикат, как если бы он был операцией.

2. Теорема о замене. Пусть инфикс '$\boldsymbol{R}$' обозначает отношение (т. е. бинарный предикат) между обами, и пусть φ — одноместная операция, преобразующая об в об. Мы скажем, что φ *прямо монотонна* относительно $\boldsymbol{R}$, если для всех обов X и Y

$$X\boldsymbol{R}Y \rightarrow \varphi X \boldsymbol{R} \varphi Y$$

Мы скажем, что φ *обратно монотонна* относительно $\boldsymbol{R}$, если для всех обов X и Y

$$X\boldsymbol{R}Y \rightarrow \varphi Y \boldsymbol{R} \varphi X$$

Пусть теперь $\psi(X)$ получено из X с помощью последовательности операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, и пусть каждая из φ_k либо прямо, либо обратно монотонна относительно $\boldsymbol{R}$. Если число обратно монотонных операций φ четно, то ψ прямо монотонна относительно $\boldsymbol{R}$; если же это число нечетно, то она обратно монотонна. Это легко показать натуральной индукцией по n. Любая обратно монотон-

ная операция φ меняет, так сказать, отношение $\boldsymbol{R}$ на обратное; четное число таких перемен оставляет $\boldsymbol{R}$ неизменным, а нечетное число эквивалентно одной перемене.

Теорема о замене, на которую мы будем ссылаться впоследствии как на ТЗ, формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть U — компонента X, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компонентные операции вхождения U в X. Пусть каждая φ_k прямо или обратно монотонна относительно $\boldsymbol{R}$. Пусть замена этого вхождения U на V преобразует X в Y. Тогда если число обратно монотонных φ_k четно, то*

$$U\boldsymbol{R}V \rightarrow X\boldsymbol{R}Y$$

а если это число нечетно, то

$$U\boldsymbol{R}V \rightarrow Y\boldsymbol{R}X$$

Доказательство немедленно следует из предыдущего рассуждения.

Примеры. Пусть в алгебре высказываний

$$\varphi_1(X) \equiv Z \supset X$$
$$\varphi_2(X) \equiv X \supset Z$$
$$\varphi_3(X) \equiv \neg X$$

где Z — фиксированный об, и пусть $\boldsymbol{R}$ таково, что

$$X\boldsymbol{R}Y \rightleftarrows \vdash X \supset Y$$

Тогда φ_1 прямо монотонна относительно $\boldsymbol{R}$ (для каждого фиксированного Z), в то время как φ_2 и φ_3 обратно монотонны. (Это доказывается в обычной алгебре высказываний [1].) Тогда если для конкретных обов X, Y, Z мы имеем

$$\vdash X \supset (Y \supset Z)$$

и если

$$\vdash X' \supset X, \quad \vdash Y' \supset Y, \quad \vdash Z \supset Z',$$

то

$$\vdash X' \supset (Y' \supset Z')$$

Если $\boldsymbol{R}$ симметрично, то между прямой и обратной монотонностью нет никакой разницы. Поэтому правило замены эквивалентных в алгебре высказываний является специальным случаем ТЗ.

В связи с некоторыми дальнейшими соображениями удобно будет поменять ролями $\boldsymbol{R}$ и φ, т. е. говорить, что $\boldsymbol{R}$ прямо (обратно) монотонно относительно φ, а не что φ прямо (обратно) монотонна относительно $\boldsymbol{R}$.

[1]) См. гл. 5.

3. Монотонные отношения. *Монотонное отношение* — это такое отношение $\boldsymbol{R}$, что если Y получается из X заменой вхождения компоненты U из X на V, то

$$(\pi) \qquad U\boldsymbol{R}V \rightarrow X\boldsymbol{R}Y$$

Для того чтобы $\boldsymbol{R}$ было монотонно, необходимо и достаточно, чтобы каждая исходная операция была прямо монотонна относительно каждого из своих аргументов (т. е. с фиксированными аргументами, за исключением одного рассматриваемого). Достаточность показана в ТЗ, а необходимость мы устанавливаем, полагая X равным φ (U), где φ — любая операция, в которой фиксированы все аргументы, кроме одного. Свойство монотонности мы будем обозначать через (π).

Монотонное квазиупорядочение — это монотонное отношение, которое также рефлексивно и транзитивно; *монотонная эквивалентность* — это монотонное квазиупорядочение, которое также симметрично. В прикладной системе характерными свойствами монотонной эквивалентности являются

$$(\rho) \qquad X\boldsymbol{R}X$$
$$(\sigma) \qquad X\boldsymbol{R}Y \rightarrow Y\boldsymbol{R}X$$
$$(\tau) \qquad X\boldsymbol{R}Y \,\&\, Y\boldsymbol{R}Z \rightarrow X\boldsymbol{R}Z$$
$$(\mu) \qquad X\boldsymbol{R}Y \rightarrow ZX\boldsymbol{R}ZY$$
$$(\nu) \qquad X\boldsymbol{R}Y \rightarrow XZ\boldsymbol{R}YZ$$

Здесь (π) разбивается на два свойства: (μ) и (ν).

4. Монотонное квазиупорядочение, порожденное данным отношением. Пусть дано отношение $\boldsymbol{R}_0$, тогда *монотонное квазиупорядочение, порожденное $\boldsymbol{R}_0$*, — это отношение $\boldsymbol{R}$, определенное постулатами (ρ), (τ), (π) и

$$(\varepsilon) \qquad X\boldsymbol{R}_0Y \rightarrow X\boldsymbol{R}Y$$

Монотонная эквивалентность, порожденная $\boldsymbol{R}_0$, — это отношение, определенное теми же постулатами и постулатом (σ). Здесь слово 'определенное' понимается в том смысле, что истинные утверждения вида

$$X\boldsymbol{R}Y \qquad (1)$$

образуют индуктивный класс, начальными элементами которого являются утверждения, получающиеся по (ρ) или (ε), а порождающими правилами являются (τ), (π) и — в случае эквивалентно-

сти — (σ); в силу теоремы 1 правило (π) можно заменить правилами, устанавливающими прямую монотонность каждой из операций, образованных из операций $\mathfrak{O}$ фиксацией всех аргументов, кроме одного — в случае прикладной системы это дает правила (μ) и (ν).

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{R}$ *— монотонное квазиупорядочение, порожденное* $\boldsymbol{R}_0$. *Тогда необходимое и достаточное условие того, что* (1) *верно, состоит в том, что существует последовательность* $X_0, X_1, \ldots, X_n$ $(n \geqslant 0)$, *такая, что* $X_0 \equiv X$, $X_n \equiv Y$, *и если* $n \geqslant 1$, *то для каждого* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ X_{k+1} *получается из* X_k *заменой вхождения компоненты* U_k *на об* V_k, *такой, что*

$$U_k \boldsymbol{R}_0 V_k \tag{2}$$

Доказательство достаточности. Если $n=0$, то (1) справедливо в силу (ρ). Если $n \neq 0$, то для всех k и n имеем

$U_k \boldsymbol{R} V_k$	по (2) и (ε)
$X_k \boldsymbol{R} X_{k+1}$	по ТЗ
$X \boldsymbol{R} Y$	по (τ)

Доказательство необходимости. Пусть $\boldsymbol{S}$ — отношение, описанное в теореме. Тогда мы должны показать, что

$$X \boldsymbol{R} Y \longrightarrow X \boldsymbol{S} Y \tag{3}$$

Чтобы сделать это, мы покажем, что $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет постулатам для $\boldsymbol{R}$; тогда (3) устанавливается дедуктивной индукцией по доказательству посылки.

Если в определении $\boldsymbol{S}$ $n = 0$, то Y совпадает с X и поэтому $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет условию (ρ). Если $X \boldsymbol{R}_0 Y$, то применим тот случай определения $\boldsymbol{S}$, когда $n = 1$, $U_1 \equiv X$, $V_1 \equiv Y$; поэтому $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет условию (ε). Далее, $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет условию (τ), так как ряд замен, переводящий X в Y, и следующий за ним ряд замен, переводящий Y в Z, дают ряд, переводящий X в Z. Наконец, $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет условию (π). Пусть $Z \boldsymbol{S} W$, где Z — компонента X, и замена вхождения Z на W переводит X в Y. Пусть $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ $(Z_0 \equiv Z, Z_n \equiv W)$ — последовательность, образованная заменой U_k на V_k, как указано в теореме. Пусть замена Z на Z_k преобразует X в X_k. Тогда U_k является компонентой X_k и замена подходящего вхождения U_k на V_k переведет X_k в X_{k+1}. Итак, $X \boldsymbol{S} Y$; это показывает, что $\boldsymbol{S}$ обладает свойством (π) и, следовательно, что $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет всем постулатам для $\boldsymbol{R}$.

Это завершает доказательство теоремы 2.

Примерами таких порожденных отношений являются: (*a*) если $\boldsymbol{R}_0$ — отношение родителя к ребенку, то $\boldsymbol{R}$ — отношение предка к потомку (по этой причине $\boldsymbol{R}$ часто называется отношением наследственности); (*b*) в системе натуральных чисел если $\boldsymbol{R}_0$ — пара (0, 1), то $\boldsymbol{R}$ — это отношение "меньше или равно", а если $\boldsymbol{R}_0$ — пара (1, 3), то $\boldsymbol{R}$ — то же отношение с дополнительным свойством иметь одинаковую четность. Вскоре мы приведем другие примеры. В частности, в разд. 3C3 $\equiv$ является монотонной эквивалентностью, порожденной $\boldsymbol{D}$, тогда как в разд. 3D4 отношение λ-конверсии является монотонной эквивалентностью, порожденной (α) и (β). Различные отношения сводимости являются примерами монотонных квазиупорядочений. Другие примеры см. в диаграммах разд. 4A2, п. 8°.

Упражнения

1. Среди натуральных чисел с отношением '$\leqslant$', понимаемым как 'меньше или равно', какой вид монотонности характеризует следующие операции: сложение, вычитание, умножение, деление, нахождение наибольшего общего делителя?

2. В системе натуральных чисел пусть $\boldsymbol{R}_0$ — две пары: (2,4) и (5, 8). Охарактеризуйте исчерпывающим образом те пары, для которых $\boldsymbol{R}$ справедливо, и те пары, для которых $\boldsymbol{R}$ несправедливо.

3. Показать, что если $\boldsymbol{R}_0$ симметрично, то монотонное квазиупорядочение, порожденное $\boldsymbol{R}_0$, является эквивалентностью ([CLg], следствие 2D1.1).

4. Показать, что монотонная эквивалентность, порожденная $\boldsymbol{R}_0$, совпадает с монотонным квазиупорядочением, порожденным $\boldsymbol{S}_0$, где

$$X \boldsymbol{S}_0 Y \rightleftarrows X \boldsymbol{R}_0 Y \text{ или } Y \boldsymbol{R}_0 X$$

([CLg], теорема 2D2.)

C. ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Одним из методов развития наших знаний о системе является введение новых терминов по определению. Мы рассмотрим здесь этот процесс с некоторыми подробностями и установим его отношение к алгорифмам разд. 2E. Здесь рассматриваются такие определения, которые часто называются номинальными определениями. Другие типы определений, например аналитические определения и реальные определения, здесь не рассматриваются.

1. Предварительные рассмотрения. Определение традиционно понимается как соглашение относительно использования языка. По такому соглашению мы вводим новый символ или комбинацию символов, называемую *определяемым*, разрешая подставлять ее вместо некоторой другой комбинации символов, называемой *определяющим*, значение которой уже известно на основе данных и предшествующих определений. Тогда считают, что последова-

тельной заменой определяемых соответствующими им определяющими мы можем свести любое правильно построенное выражение, содержащее исходные и определяемые символы, к выражению, которое понятно в терминах одних исходных символов; это последнее выражение, называемое здесь *окончательным определяющим*, предполагается всегда существующим и единственным. Поэтому определения по существу рассматриваются как лингвистические средства сокращения, которые теоретически можно исключить, но которые практически необходимы для того, чтобы сократить наши рассуждения до приемлемых размеров.

Но нам часто хочется применять термин 'определение' и к соглашениям более сложной природы. Мы определяем не только отдельные комбинации, но целые их схемы или семейства, и мы делаем это посредством условий, согласно которым новый символ может появляться в некоторых из определяющих. Например, если мы используем '$\boldsymbol{D}$' как инфикс, отделяющий определяемое от определяющего (мы можем читать '$\boldsymbol{D}$' как 'есть по определению'), то схемы утверждений

$$a + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}$$
$$Xb + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} + Yb$$

относительно системы самов (разд. 2C2, пример 2), где 'X' и 'Y'— переменные для произвольных самов,— обычно рассматриваются как устанавливающие определение сложения самов. То, что эти схемы действительно могут играть такую роль, видно из того, что '+' можно исключить путем последовательной замены определяемых определяющими. Например, начиная с $abb + ab$, мы имеем последовательно

$$ab + abb$$
$$a + abbb$$
$$abbb$$

Желательно расширить понятие определения так, чтобы оно включало и такие соглашения, связанные с рекурсией.

В случае когда определяемое является именем, обозначающим формальный объект, процесс определения сводится к расширению А-языка за счет включения некоторых новых имен. Эти новые имена являются другими именами для тех же обов, что и раньше. Но в силу произвола, связанного со словом 'об', очевидно, разрешается понимать процесс определения как процесс, образующий новые обы, представителями которых являются новые А-имена. Введение этих определяемых обов является поэтому некоторым расширением, которое мы будем называть дефинициональным. Сопоставление этих обов первоначальным базисным обам является тогда оценкой этого расширения в первоначальной системе.

Понятие дефиниционального расширения в последующем будет принято за основу.

2. Дефинициональные редукции. Опишем теперь понятие дефиниционального расширения более формально. Пусть первоначальной системой будет $\mathfrak{S}_0$; по отношению к $\mathfrak{S}_0$, ее обам, операциям, аксиомам и т. д. мы будем употреблять эпитет '*базисный*' (*основной*). Расширенную систему мы обозначим $\mathfrak{S}_1$ и используем эпитет '*новый*' для указания составных частей, которые появляются в ней, но не в $\mathfrak{S}_0$. Мы используем буквы 'A', 'B', 'C' с индексами или без них для обозначения базисных обов и буквы 'X', 'Y', 'Z' для обозначения произвольных обов $\mathfrak{S}_1$, базисных или новых. Тогда $\mathfrak{S}_1$ является *дефинициональным расширением* $\mathfrak{S}_0$, если выполнены следующие условия.

a. Обы $\mathfrak{S}_1$ образуются добавлением к $\mathfrak{S}_0$ некоторых новых операций и новых атомов. Будет удобно рассматривать новые атомы как операции нулевой степени, так что новые первичные конституэнты $\mathfrak{S}_1$ являются операциями в этом расширенном смысле.

b. Имеется новый двуместный предикат, обозначаемый через '$\boldsymbol{D}$', используемый как инфикс. Новые элементарные утверждения поэтому имеют вид

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y} \tag{1}$$

Мы называем X *определяемым*, а Y — *определяющим* в (1).

c. Множество аксиом $\mathfrak{S}_1$ состоит из всех утверждений

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} \tag{2}$$

и из множества $\mathfrak{E}$ *определяющих аксиом*, каждая из которых имеет вид

$$\varphi(A_1, \ldots, A_m)\,\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z} \tag{3}$$

где φ — новая операция степени m. Эту φ мы будем называть *главной операцией* в (3). Заметим, что аргументы главной операции должны быть базисными обами.

d. Имеется *правило дефинициональной редукции*, обозначаемое Rd, которое допускает выводы вида

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y} \rightarrow \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}'$$

где Y' получается из Y заменой вхождения определяемого в определяющей аксиоме на его определяющее. Применение этого правила будет называться *сокращением* заменяемой компоненты.

Назовем доказательство из новых аксиом посредством Rd *дефинициональной редукцией*. Дефинициональная редукция, оче-

видно, должна начинаться с утверждения вида (2) или с определяющей аксиомы [1]), причем замены производятся в определяющем. В итоге мы можем представить такую редукцию, просто приведя последовательность определяющих. И когда мы в конце концов достигнем определяющего, являющегося базисным, это определяющее будет называться *окончательным определяющим* X.

Так как аргументы главных операций определяющих аксиом являются базисными обами, то отсюда следует, что различные компоненты, которые могут быть заменены в данном Y, не перекрываются. Поэтому их можно сокращать в любом порядке, не меняя окончательного результата. Если мы фиксируем порядок, скажем, слева направо или в соответствии с фиксированным порядком главных операций, а затем для очередной операции слева направо, то редукцию, отвечающую этому порядку, мы назовем *стандартной редукцией*. Такая редукция является существенно однозначным процессом. В самом деле, единственная остающаяся свобода заключается в том, что если существуют две или более аксиомы с одним и тем же определяемым, то мы можем выбирать, какую из них применять. Далее, любую редукцию можно преобразовать в стандартную редукцию, не изменяя результата.

Назовем множество определяющих аксиом, а также основанное на нем дефинициональное расширение, *собственным*, если последняя возможность не возникает, т. е. когда для любого возможного определяемого имеется самое большее одна определяющая аксиома. В таком случае редукция будет проходить единственным образом. Она может заканчиваться окончательным определяющим или новым обом, содержащим, быть может, определяемое, для которого нет определяющей аксиомы (в этом случае мы говорим, что редукционный процесс *блокируется*), или же редукция может продолжаться бесконечно.

Даже в случае когда определяющие аксиомы образуют несобственное множество, мы можем избавиться от неоднозначности, расположив определяющие аксиомы в некотором порядке и затем устанавливая соглашение, что в сомнительном случае следует применять первую аксиому в этом упорядочении. Если даже число определяющих аксиом бесконечно, как это обычно бывает, их можно занумеровать, и это дает порядок, который можно использовать для упомянутой цели. Будем предполагать при определении стандартной редукции, что такой порядок фиксирован. Мы назовем дефинициональное расширение с таким определением стандартной редукции *стандартизованным дефинициональным расширением*.

[1]) Этот случай можно свести к случаю, когда мы начинаем с (2), ибо X можно взять в качестве определяемого в аксиоме.

Итак, стандартная редукция имеет много характерных черт процесса, задаваемого алгорифмом, в котором определяющие аксиомы (с заменой 'D' на '$\rightarrow$') — это команды. Эта редукция отличается от такого рода процесса главным образом тем, что число определяющих аксиом обычно бесконечно. Эта возможность бесконечного числа команд вносит неопределенность, которая заключается в том, что на вопрос о том, кончается ли процесс на данном этапе, может не быть определенного ответа. Если эту возможность заведомо исключить, то получается эффективный процесс. Однако вместо исследования этого вопроса мы используем другой подход, который применим ко всем практически интересным случаям.

Назовем дефинициональное расширение *схематическим*, если определяющие аксиомы заданы посредством конечного числа схем аксиом, содержащих U-переменные для произвольных базисных обов. Дефинициональные расширения, возникающие при формализации обычных определений, типа рассмотренных в разд. 1, являются схематическими. Схематическое расширение можно стандартизовать, задав порядок схем аксиом и требуя, чтобы они применялись в этом порядке. Как в разд. А3, мы можем рассматривать такую схему аксиом как аксиому в $\mathfrak{S}_1^*$ — атомическом расширении $\mathfrak{S}_1$, — в котором эти U-переменные понимаются как неопределенные, и потому как команды алгорифма, в которых U-переменные являются вспомогательными буквами. Теперь применение такой схемы аксиом состоит в том, чтобы найти первое вхождение ее главной операции, такое, что аргументы являются базисными и получаются подстановкой базисных обов вместо переменных в схему аксиом; установить подставляемые обы; поместить подходящее Z на место определяемого, образованного этим вхождением и его аргументами, и произвести подстановку. Все это можно сделать с помощью марковского алгорифма над $\mathfrak{S}_1^*$, образованного добавлением ряда команд в подходящем порядке к командам, полученным из схем аксиом [1]).

Целесообразно определить здесь ряд терминов для описания отдельных видов дефинициональных расширений. Дефинициональное расширение является *полным*, если для каждого нового оба X существует по меньшей мере одна дефинициональная редукция до окончательного определяющего. Дефинициональное расширение является *однозначным*, если имеется самое большее одно такое окончательное определяющее. Мы видели, что собственное дефинициональное расширение обязательно однозначно, но пример, приводимый позднее (в разд. 3), показывает, что обратное

[1]) См. упражнение 1 в конце этого раздела. Из эвристического принципа, установленного в разд. 2С, вместе с тем обстоятельством, что процесс эффективен, следует, что такой алгорифм существует.

неверно. Любое стандартизованное дефинициональное расширение также однозначно. *Частично рекурсивное* дефинициональное расширение — это однозначное схематическое дефинициональное расширение. *Рекурсивное* дефинициональное расширение — это частично рекурсивное дефинициональное расширение, которое является также полным. Эти термины согласуются с обычными терминами [1]) в случае, когда $\mathfrak{S}_0$ — система самов (т. е. чисел). Далее, *явное* определение операции φ в терминах $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — это определение, в котором φ встречается только как главная операция в ряде аксиом, причем остающиеся аксиомы образуют определение $\psi_1, \ldots, \psi_n$; если ψ_i не упоминаются, то имеется в виду, что φ является единственной новой операцией.

3. Дефинициональное тождество. Мы будем использовать инфикс '$\equiv$' для обозначения отношения, называемого дефинициональным тождеством (равенством по определению), которое является монотонной эквивалентностью, порожденной определяющими аксиомами. Следующий пример показывает, что это отношение может обладать некоторыми странными свойствами, если дефинициональное расширение несобственно.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{S}_0$ — система натуральных чисел (см. пример 2 разд. 2C). Пусть $\mathfrak{E}$ состоит из аксиомы и схемы аксиом:

$$\varphi(0) \boldsymbol{D} 0$$

$$\varphi(A) \boldsymbol{D} \varphi(A')$$

Они порождают частично рекурсивное дефинициональное расширение $\mathfrak{S}_0$; действительно, $\varphi(0)$ имеет окончательное определяющее 0, тогда как для любого другого A редукция $\varphi(A)$ продолжается бесконечно. Если мы стандартизуем расширение, взяв аксиому и схему аксиом в данном порядке, то у нас будет в точности эта ситуация; но если мы поменяем порядок, то $\varphi(A)$ не определено ни для какого A. Тем не менее мы имеем в любом случае

$$\varphi(A) \equiv 0$$

для каждого A.

В связи с этим примером необходимо различать отношения $\boldsymbol{D}$ и $\equiv$, и некоторые авторы, вводя определения, заботятся о том, чтобы использовать обозначения, предполагающие асимметрию $\boldsymbol{D}$ [2]). Однако в важном случае собственных определений нетрудно провести дедуктивную индукцию по доказательству

$$X \equiv Y$$

[1]) См. упражнение 2.

[2]) Особенно Чёрч [Dfn]. Однако не следует торопиться с выводом, что эти авторы руководствовались соображениями, подобными выдвинутым здесь.

что если либо X, либо Y имеет окончательное определяющее A, то они оба имеют его [1]).

Вследствие этого результата нет необходимости настаивать на различии между $\boldsymbol{D}$ и $\equiv$, если мы знаем, что наши дефинициональные расширения являются собственными. В соответствии с этим мы будем использовать символ '$\equiv$' в определениях на протяжении этой книги.

Эти определения не всегда постоянны. Даже когда мы делаем определения, которые должны быть справедливы лишь в ближайшем контексте, будет использоваться знак '$\equiv$' и при этом не подразумевается обязательно, что построенная таким образом определяющая аксиома должна быть справедлива несколькими строками ниже. Такие временные определения появляются, например, когда мы задаем временное значение для некоторой U-переменной.

4. Понятия, относящиеся к предложениям. До сих пор мы занимались только именами в A-языке. Когда нам будут встречаться определения предикатов или других понятий, относящихся к предложениям, мы в определениях будем использовать знак эквивалентности '$\rightleftarrows$'. Такие определения гораздо менее формальны — если бы мы пожелали сделать их формальными, мы должны были бы перевести их в об-структуру посредством сведéния к ассерторической форме, использованной в разд. 2D1; в связи с ними мы едва ли пошли бы дальше точки зрения разд. 1. С этой оговоркой все то, что мы сказали относительно определений обов, распространяется и на такие определения.

В случае дефиниционального расширения мы будем подразумевать, что аксиомы и правила $\mathfrak{S}_0$ сохраняются для новых обов в $\mathfrak{S}_1$ в точности так же, как они сохраняются, когда обы заменяются их окончательными определяющими.

Упражнения

1. Привести детально марковский алгорифм нахождения окончательного определяющего для схематического дефиниционального расширения, охарактеризованного в разд. 2. ([TEA].)

2. Показать, что для числовых функций (являющихся операциями в принятом нами смысле над системой примера 2 разд. 2C2) определения рекурсивной и частично рекурсивной функций, данные в разд. 2, совпадают с обычными (например, в книге Клини [IMM], стр. 266 [2]), 326[3]). Вывести из упражнения 1 ту часть теоремы Детловса (упражнение 2E12), которая гласит, что всякая частично рекурсивная числовая функция алгорифмична.

[1]) См. упражнение 3.

[2]) Стр. 237—238 русского издания.— *Прим. ред.*

[3]) Стр. 290—291 русского издания.— *Прим. ред.*

3. Предположим, что мы имеем собственное дефинициональное расширение и что $\equiv$ определено как в разд. 3. Пусть

$$X \equiv Y$$

Показать, что если либо X, либо Y имеет окончательное определяющее, то они оба имеют их и оба окончательных определяющих совпадают ([CLg], разд. 2E3; ср. там же, разд. 4B4).

4. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — дефинициональное расширение $\mathfrak{S}_0$, и пусть $\mathfrak{P}$ — множество новых операций $\mathfrak{S}_1$. Пусть $\mathfrak{E}_2'$ состоит из всех утверждений вида

$$\psi(C_1, C_2, \ldots, C_p) \boldsymbol{D} C_{p+1}$$

(где ψ — любая операция в $\mathfrak{P}$), которые доказуемы в $\mathfrak{S}_1$. Пусть $\mathfrak{E}_2''$ — множество определяющих аксиом, таких, что главные операции не принадлежат $\mathfrak{S}_1$, а все другие новые операции, которые принадлежат $\mathfrak{S}_1$, принадлежат также и $\mathfrak{P}$. Пусть $\mathfrak{S}_2$ — дефинициональное расширение, определяющие аксиомы которого состоят из $\mathfrak{E}_2'$ и $\mathfrak{E}_2''$, и пусть $\mathfrak{S}_3$ —дефинициональное расширение, образованное добавлением $\mathfrak{E}_2''$ к $\mathfrak{S}_1$. Показать, что (1) справедливо в $\mathfrak{S}_2$ тогда и только тогда, когда оно справедливо в $\mathfrak{S}_3$. ([CLg], разд. 2E4, следствие 3.1. Расширение $\mathfrak{S}_2$ определяет операции $\mathfrak{S}_2$ "относительно" $\mathfrak{P}$. Некоторые обобщения также рассмотрены в [CLg], разд. 2E4.)

5. Пусть $\mathfrak{S}_0$ имеет стандартное представление по Лукасевичу. Скажем, что множество схем определяющих аксиом (где 'x_1', 'x_2', ... в роли U-переменных для базисных обов) вида

$$\varphi(a_i) \boldsymbol{D} \psi(a_i), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$\varphi(\omega_n^k x_1 x_2 \ldots x_n) \boldsymbol{D} \chi[x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)]$$

образует примитивно рекурсивную схему для φ в терминах ψ и χ (последние не обязательно новые); подразумевается, что это соглашение остается в силе с очевидными видоизменениями в случае, когда φ зависит еще от дополнительных параметров. Пусть $\mathfrak{S}_1$ — дефинициональное расширение, новыми операциями которого в некотором фиксированном порядке являются φ_1, φ_2, ..., φ_m. Пусть определяющие аксиомы для $\mathfrak{S}_1$ таковы, что φ_k для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ либо (*a*) определено явно в терминах φ_1, φ_2, ..., φ_{k-1}, либо (*b*) определено примитивно рекурсивной схемой в терминах φ_i и φ_j, где $i < k$, $j < k$. Показать, что $\mathfrak{S}_1$ частично рекурсивно; далее, если явные определения в (*a*) полны, в частности если они имеют вид

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \boldsymbol{D} \mathfrak{X}$$

то $\mathfrak{S}_1$ рекурсивно. (Ср. [CLg], теорема 2E6.)

6. Сформулировать и доказать теорему, дающую достаточное условие того, чтобы операция φ, определенная примитивной рекурсией, была монотонной относительно отношения $\boldsymbol{R}$, которое в базисной теории является монотонным квазиупорядочением, порожденным $\boldsymbol{R}_0$. ([CLg], теорема 2E7.)

7*. Можно ли несобственное определение всегда конструктивно преобразовать в эквивалентное собственное определение, опуская аксиомы? (Ср. обсуждение в [CLg], разд. 2E2, сноска 52.)

8*. Сформулировать аналоги μ-оператора, теоремы о нормальной форме и т. д. для (частично) рекурсивных определений над произвольной $\mathfrak{S}_0$.

D. ПЕРЕМЕННЫЕ

Этот раздел посвящен различным вопросам, касающимся употребления слова 'переменная'. В разд. 1 два различных смысла этого слова противопоставляются друг другу. Изучаются различные вопросы, необходимые для уточнения понятий. Разд. D заканчивается кратким обзором комбинаторной логики, которая устраняет некоторые виды переменных.

1. Классификация переменных. Мы начнем с того, что отличим друг от друга два разных смысла употребления слова 'переменная'.

С одной стороны, этот термин применяется к определенным фразам U-языка, значение которых не фиксировано. Мы назовем эти фразы U-*переменными* в противоположность U-*постоянным*, значение которых фиксировано. Такими U-переменными являются буквы 'X', 'Y', 'Z' и т. д., которые систематически употреблялись раньше для обозначения произвольных обов, и нам эти символы нужны для того, чтобы установить правила, схемы аксиом и общие эпитеоремы. Очевидно, что U-переменные этого вида необходимы для формулировки любых общих утверждений; без них мы не смогли бы даже описывать наши системы.

С другой стороны, ряд систем содержит обы, которые называются "переменными" в том смысле, что вместо них можно производить определенные подстановки. Например, в разд. 2C3, пример 5, p_1, p_2, ... часто называются "пропозициональными переменными". Такие переменные мы назовем *формальными* переменными. Эти переменные, за исключением возможности автонимного представления, не являются U-выражениями; они могут, конечно, быть выражениями O-языка, но с точки зрения U-языка они являются объектами, а не символами.

Поскольку формальные переменные являются обами, они имеют имена в A-языке (например, 'p_1', 'p_2' и т. д. в разд. 2C3). Эти имена представляют собой собственные имена U-языка, а следовательно, U-постоянные. Поскольку нам редко случается употреблять эти собственные имена, удобно будет предположить — если

не оговорено противное, — что формальные переменные

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots$$

образуют последовательность e — множество всех формальных переменных. Это освобождает буквы 'x', 'y', 'z' и т. д. для употребления в качестве U-переменных, относящихся к произвольным членам e. Итак, e_1, x, y, z — формальные переменные, так как они являются членами e; 'e_1' — U-постоянная; 'x', 'y', 'z' — U-переменные, так как не указано, к каким членам e они относятся.

Существует три основных типа формальных переменных; они называются здесь (*a*) неопределенными, (*b*) подстановочными переменными и (*c*) связанными переменными. В противоположность связанным переменным неопределенные и подстановочные переменные вместе называются *свободными переменными*. Мы позднее рассмотрим эти типы подробнее, ограничившись пока краткими их определениями.

a. Неопределенная — это атом, относительно которого первоначальный остов системы не делает никаких утверждений, за исключением того, что он является обом; единственное ограничение состоит в том, что обы, содержащие неопределенную переменную, могут быть значениями только U-переменных для обов, фигурирующих в правилах и схемах аксиом. Поэтому неопределенные могут появляться в аксиомах, полученных посредством подстановки в схемы аксиом, но не иначе. Примерами служат атомы примера 5 разд. 2C3. Видоизменения этого определения будут рассмотрены в разд. 2.

b. Подстановочные переменные — это те обы, вместо которых допускаются подстановки по правилу подстановки, явно формулируемому как правило вывода — как в примере 7 разд. 2D3 — или же по некоторому правилу или аксиоме (схеме аксиом), в которых подстановка играет существенную роль [1]).

c. Связанные переменные появляются в системе с формальными переменными, в которой имеется по меньшей мере одна операция, один или более аргументов которой являются формальными переменными; при этом говорят, что эти переменные связаны данной операцией, так что подстановки, затрагивающие связанные таким путем переменные, ограничены. Связанные переменные встречаются в обычной математике. Так, мы скажем, что в утверждении

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9 \qquad (1)$$

[1]) Примером является схема аксиом (β) в теории λ-конверсий (см. разд. 4).

левая часть является операцией с четырьмя аргументами, именно x, x^2, 0 и 3; переменная x[1]) связана, и вместо нее нельзя производить подстановку, а можно только заменять ее другой переменной. Опять-таки в равенстве

$$\int_0^3 (xy)^2\,dx = 9y^2$$

мы ограничены в подстановках, которые мы можем производить вместо y; если мы подставим выражение, содержащее x, то получающееся равенство будет ложным. Связанные переменные, очевидно, играют основную роль в осложнениях в связи с подстановочными переменными, а также и в некоторых других случаях.

2. Неопределенные. Неопределенная была введена в разд. 1 как атом, на который первоначальный остов системы не накладывает никакого ограничения, за исключением того, чтобы он был обом. Такое понятие имеет смысл только тогда, когда существуют схемы аксиом с U-переменными для всех обов, так что обы, построенные с неопределенными компонентами, можно подставлять вместо этих U-переменных и таким образом эти обы входят в аксиомы [2]). В противном случае это понятие неопределенной было бы пустым, так как посылки правила никогда не выполнялись бы для оба с неопределенной компонентой. Но существуют системы (см., скажем, пример 6 разд. 2C3), в которых нет схем аксиом указанного вида. Желательно изменить понятие неопределенной так, чтобы его можно было приложить и к такого рода системам.

Один тип случаев, в которых возникает эта ситуация, — это тот, где свойство быть обом выражается базисным предикатом системы. Назовем такой предикат, если он существует, *универсальным предикатом* или, если это одноместный предикат, *универсальной категорией*. В этом случае мы скажем, что неопределенная есть об, относительно которого ничего не постулируется, за исключением того, что это об, для которого имеет место универсальный предикат. Например, в одном из видов комбинаторной логики существует такой об E, что

$$\vdash \mathsf{E}X \qquad (2)$$

[1]) Некоторые сказали бы, что 'x' связана. Но тогда следовало бы считать утверждение (1) выражением в некотором O-языке, а не так, как здесь, в U-языке. Может быть, стоит заметить, что утверждение (1), интерпретируемое так, как обычно, ничего не говорит ни о x, ни о 'x'.

[2]) Неопределенные могут быть введены в систему без схем аксиом посредством специального правила.

постулируется как аксиома во всех случаях, когда X — атом; далее, система является прикладной и имеется правило

$$\mathsf{E}X,\quad \mathsf{E}Y \vdash \mathsf{E}(XY) \tag{3}$$

По дедуктивной индукции тогда следует, что (2) имеет место всюду, где X — об. Система не содержит никаких неопределенных, но суть в том, что нельзя образовать атомическое расширение системы, не постулируя (2) для новых атомов. Если ничего больше не постулируется, то неопределенные существуют согласно видоизмененному определению.

Опять-таки может случиться, что, хотя нет базисного предиката, справедливого для всех обов, существует базисный предикат, справедливый для всех обов, которые мы считаем важными в том или другом смысле. В таких случаях все же уместно называть предикат универсальным, а обы, для которых он справедлив, — *собственными обами*. Так, в другом виде комбинаторной логики схема (2) не имеет места для всех обов, но справедлива для всех тех обов, которые входят в формальный вывод; следовательно, уместно называть любой атом, для которого постулируется (2) и ничего более, также неопределенной. Хотя конкатенативные системы обычной математической логики не являются об-системами, они таковы, что выражения, не являющиеся вефами, не играют никакой роли; поэтому было бы уместно называть неопределенной любой О-символ, для которого постулируется только то, что он является вефом.

Иная, но аналогичная ситуация возникает в случае систем типа примера 6 разд. 2С3, которые были получены из других систем с помощью описанного в разд. 2D2 процесса редукции числа атомов. В таком случае возьмем в качестве собственных те обы, которые представляют первоначальные обы, и назовем *квазиатомами* обы, представляющие первоначальные атомы. Если первоначальная система содержит неопределенные (или другие формальные переменные), то они в новой системе, вообще говоря, будут не атомами, а квазиатомами; наше предыдущее рассуждение все же применимо с соответствующими изменениями.

Во всех этих случаях понятие неопределенной включает в себя произвольные соглашения, которые в каждом случае должны делаться отдельно. Но в принципе неопределенная является атомом или квазиатомом, относительно которого не постулируется ничего, за исключением того, чтобы он был допустим в системе как (быть может, собственный) об.

Неопределенные появляются всегда, когда мы образуем атомическое расширение. Дополнительные атомы, присоединенные в таком расширении, являются неопределенными по определению. Но, очевидно, мы не можем вывести никаких теорем, содержащих

их, пока нет схем аксиом, в которые можно было бы подставить эти неопределенные. Следовательно, по отношению к атомическим расширениям у нас та же ситуация, которая была по отношению к неопределенным. Поэтому мы расширяем определение атомического расширения так, чтобы включать все об-расширения, в которых новые атомы являются неопределенными. Неопределенные, присоединенные таким путем, мы называем *присоединенными неопределенными*, чтобы отличить их от уже имеющихся неопределенных [1]).

3. Подстановочные переменные. Подстановочные переменные в разд. 1 были определены как те обы, вместо которых разрешены подстановки по правилу подстановки. Поэтому они составляют класс обов, явно включаемых в первоначальный остов системы [2]) (хотя они могут и не называться переменными). Например, в видоизменении алгебры высказываний, рассмотренном в примере 7 разд. 2D3, подстановочные переменные — это просто атомы.

Правило подстановки, на которое ссылаются в определении, было сформулировано в разд. 2D3 для специального случая. Вообще, если нет связанных переменных, ограничивающих подстановку, мы определим результат подстановки оба M вместо x символически

$$[M/x]\,X \tag{4}$$

как такой об X^*, конструкция которого получается из конструкции оба X заменой подконструкций, ведущих к x, конструкциями оба M. Это определение можно выразить так, чтобы оно имело смысл, даже если x не является атомом, но в этом мало пользы, поскольку в действительно интересных правилах подстановки подстановочные переменные являются атомами (или, во всяком случае, квазиатомами с собственным X). В этом случае, предполагая, что у нас есть стандартное представление, мы можем дать определение рекурсивно следующим образом:

$$\begin{aligned} x^* &\equiv M \\ y^* &\equiv y, \qquad \text{если } y \text{ — другой (квази)атом} \\ (\omega_n^k X_1 \ldots X_n)^* &\equiv \omega_n^k X_1^* \ldots X_n^* \end{aligned} \tag{5}$$

В разд. 2D3 мы заметили, что приведенный там пример 7 имел те же элементарные теоремы, что и пример 5 разд. 2С3. Это общее положение, при условии что правила вывода инвариантны относительно подстановки, т. е. что если мы сделаем соответствующие под-

[1]) Ср. разд. А3.

[2]) Этим они отличаются от неопределенных, которым в первоначальном остове может не быть приписано никакой особой роли.

становки в посылки и заключение применения правила, мы получим другой пример того же правила. Назовем это условие *условием инвариантности* [1]). Тогда мы получим следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{S}_1$ *— система со схемами аксиом и неопределенными. Пусть* $\mathfrak{S}_2$ *— система с той же морфологией, что и* $\mathfrak{S}_1$. *Пусть аксиомы* $\mathfrak{S}_2$ *получаются посредством того, что различные* U*-переменные схем аксиом* $\mathfrak{S}_1$ *заменяются различными неопределенными. Пусть правила* $\mathfrak{S}_2$ *состоят из правил* $\mathfrak{S}_1$ *с добавлением правила подстановки, в котором неопределенные из* $\mathfrak{S}_1$ *берутся в качестве подстановочных переменных. Пусть выполняется условие инвариантности. Тогда* $\mathfrak{S}_1$ *и* $\mathfrak{S}_2$ *имеют одни и те же элементарные теоремы.*

Доказательство. Каждая аксиома $\mathfrak{S}_1$ выведена путем подстановки из аксиом $\mathfrak{S}_2$ и, следовательно, верна в $\mathfrak{S}_2$. Так как правила $\mathfrak{S}_1$ верны в $\mathfrak{S}_2$, то по дедуктивной индукции следует, что каждая теорема $\mathfrak{S}_1$ верна в $\mathfrak{S}_2$.

Далее мы увидим, что если возьмем неопределенные из $\mathfrak{S}_1$ в качестве подстановочных переменных, то правило подстановки допустимо для $\mathfrak{S}_1$. Действительно, мы показываем по дедуктивной индукции, что каждый подстановковый частный случай (элементарной) теоремы $\mathfrak{S}_1$ снова является теоремой $\mathfrak{S}_1$. Базисный шаг этой индукции справедлив, так как каждый подстановковый частный случай аксиомы является аксиомой. (Заметим, что при этом существенно, что неопределенные не встречаются иначе как в качестве значения U-переменных.) Индуктивный шаг справедлив ввиду условия инвариантности.

Из этого по дедуктивной индукции следует, что каждая теорема $\mathfrak{S}_2$ является теоремой $\mathfrak{S}_1$. Действительно, каждая аксиома $\mathfrak{S}_2$ является аксиомой $\mathfrak{S}_1$; индуктивный шаг следует из предшествующего абзаца.

Другой путь доказательства второй половины этой теоремы состоит в том, чтобы показать, что в доказательстве в $\mathfrak{S}_2$ подстановки можно перенести в аксиомы [2]). Аксиомы тогда по существу становятся схемами аксиом. Этот метод некоторые немецкие авторы называют "*Rückverlegung der Einsetzungen*".

Условие инвариантности, очевидно, справедливо, если правила элементарны (разд. 2D3). Есть ли другие важные его случаи, неясно.

Согласно этой теореме, неопределенные и подстановочные переменные имеют между собой много общего. Для любой формальной переменной, не являющейся связанной, будет употребляться

[1]) Условие инвариантности является частью определения неопределенной.

[2]) Этот метод принадлежит Посту ([IGT], лемма 1, стр. 177 и след.).

термин '*свободная переменная*'; следовательно, он будет употребляться и для неопределенных и для подстановочных переменных.

Будет удобно распространить термин 'подстановочная переменная' на случаи, когда операция подстановки необходима при формулировке некоторого правила или схемы аксиом, но не обязательно правила подстановки в вышеприведенном смысле. Мы приведем примеры в связи со схемой аксиом (β) разд. 4.

4. Связанные переменные. Все примеры связанных переменных, которые были упомянуты в определении в разд. 1, служили для того, чтобы делать утверждения не о самих переменных, но о некоторых функциях. Так, утверждение (1) обычно понимается как утверждение не о четырех объектах (x, x^2, 0, 3), а о трех объектах (функция квадрат, 0, 3). Так как функция является законом соответствия, приписывающим "значение функции" каждому допустимому значению аргумента, то можно указать функцию только путем средства, дающего значение функции для произвольного значения аргумента; таким средством являются связанные переменные. Читатель быстро убедится, что это так во всех примерах связанных переменных, с которыми он знаком. Это действительно является основанием для того, чтобы поверить, что все примеры связанных переменных, возникающих согласно определению разд. 1, носят тот же характер. Однако не нужно этого доказывать; мы можем просто принять это за другое определение. Тогда можно заключить, что если у нас имеются средства представления функций, то все операции, включающие в себя связывание переменных, можно заменить обычными операциями.

Одним таким способом указания функций является способ, использованный Чёрчем в его исчислениях λ-конверсий. Пусть M — об, образованный из свободной переменной x и других атомов; тогда

$$\lambda x\,(M) \tag{6}$$

есть функция, значение которой для любого аргумента получается подстановкой этого аргумента вместо x в M. Операция образования (6) из x и M называется *λ-операцией*, или *функциональной абстракцией*. Здесь не требуется, чтобы M действительно содержала x [1]). Мы назовем об M *базой* (6), а x — *связанной переменной*. Точка перед именем базы устраняет необходимость заключать последнюю в скобки. Так, $\lambda x\,.\,x^2$, т. е. $\lambda x\,(x^2)$, есть функция квадрат; далее, если мы определим

$$\int_a^b M\,dx = J\,(\lambda x\,.\,M,\ a,\ b)$$

[1]) В этом отношении наша система обозначений отличается от принятой у Чёрча.

то (1) можно записать в виде

$$J(\lambda x \,.\, x^2, 0, 3) = 9$$

Естественным распространением (6) на функции нескольких переменных будет

$$\lambda^n x_1 \ldots x_n \,.\, M \tag{7}$$

Используя идею сведéния операций к операции приложения из разд. 2D2, можно определить (7) рекурсивно с помощью (6) так:

$$\lambda^1 x \,.\, M \equiv \lambda x \,.\, M$$
$$\lambda^{n+1} x y_1 \ldots y_n \,.\, M \equiv \lambda x \,.\, (\lambda^n y_1 \ldots y_n \,.\, M) \tag{8}$$

Различные операции, включающие в себя связанные переменные и находящие применение в современной логике, могут быть определены в терминах функциональной абстракции и обычных операций, например

$$\begin{aligned} &\forall x X \equiv \Pi(\lambda x \,.\, X) && X \text{ для всех } x \\ &\exists x X \equiv \Sigma(\lambda x \,.\, X) && X \text{ для некоторого } x \\ &X \supset_x Y \equiv \Xi(\lambda x \,.\, X,\ \lambda x \,.\, Y) && Y \text{ для всех } x, \text{ таких, что } X \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь интерпретации, кратко написанные справа, строго говоря, являются интерпретациями предложений, которые появляются при утверждении соответствующих обов. Здесь Π, Σ, Ξ суть обычные операции; в прикладной системе они могут быть взяты в качестве обов. В остальной части разд. 4 будет предполагаться, что все операции, включающие в себя связывание переменных, определены подобным же образом в терминах λ-операции и обычных операций. Тогда функциональная абстракция является единственной операцией, которая связывает переменные.

Формулировка подстановки в системе со связанными переменными влечет за собой значительные трудности. В разд. 1 мы видели, что если мы вместо свободной переменной подставляем об, в который входит связанная переменная, мы получаем нечто интуитивно абсурдное. Это явление известно как *коллизия связанных переменных*. Чтобы избежать ее, мы должны считать $[M/y]\ (\lambda x \,.\, X)$ неопределенным, когда x свободно в M. Но отношение между x и M, выраженное здесь словами 'x свободно в M', само должно быть определено рекурсивно, а именно: (*a*) x свободно в самом себе, но не в какой-либо другой формальной переменной; (*b*) x свободно в замыкании обычной операции тогда и только тогда, когда оно свободно в одном или более из ее аргументов; (*c*) x свободно в $\lambda z.N$ тогда и только тогда, когда оно отлично от z и свободно в N. При

таком понимании мы можем добавить к (5)

$$(\lambda x \,.\, X)^* \equiv \lambda x \,.\, X$$
$$(\lambda y \,.\, X)^* \equiv \lambda y \,.\, X^*, \text{ если } y \text{ не свободно в } M \text{ и отлично от } x$$

Это дает частично рекурсивное определение (4). Чтобы сделать это определение рекурсивным, нам нужно заменить y, скажем, на первое z из e, которое отлично от x и не свободно в M или X; тогда последняя схема перейдет в

$$(\lambda y \,.\, X)^* \equiv \lambda z\,([z/y]\, X^*)$$

Это определение сложно и с ним неудобно работать [1]).

Если единственными операциями в системе являются приложение и λ-операция, то последняя будет обладать следующими свойствами:

$$(\alpha) \qquad \lambda x \,.\, X = \lambda y \,.\, [y/x]\, X, \text{ если } y \text{ не свободно в } X$$
$$(\beta) \qquad (\lambda x \,.\, X)\, M = [M/x]\, X$$

при условии, что правые части имеют смысл. Здесь '$=$' понимается интуитивно как тождественность значений. Но (α) и (β) можно взять в качестве схем аксиом в системе, в которой '$=$' берется как обозначающее базисный предикат со свойствами равенства, т. е. как монотонная эквивалентность, порожденная (α) и (β). Это дает нам формализацию исчисления λ-конверсий.

5. Комбинаторная логика. Если в какой-нибудь системе имеются формальные переменные, получается, будто утверждения этой системы относятся к некоторым объектам, называемым переменными, и с формальной точки зрения так оно и есть. Но когда мы интерпретируем естественным образом такую систему, никаких содержательных объектов, соответствующих этим переменным, не обнаруживается. Другими словами, у таких систем нет естественной [2]) прямой интерпретации. Утверждения, включающие в себя формальные переменные, интерпретируются как утверждения о функциях, полученные из интерпретируемых утверждений с помощью некоторого содержательного аналога функциональной абстракции. Если бы мы могли найти способ определения функциональной абстракции лишь в терминах обычных операций, то при формулировке системы формальные переменные не понадобились бы. Они были бы полезны только для эпитеоретических целей.

---

[1]) См. [CLg], разд. 3E.

[2]) Хотя у нее, конечно, может найтись какая-нибудь искусственная интерпретация. Ср. разд. 2C5.

Такое определение было предложено в комбинаторной логике. Одной из ее форм является прикладная система, не содержащая связанных переменных, но такая, что в подходящем атомическом расширении может быть определена функциональная абстракция

$$[x]\,\mathfrak{X} \tag{10}$$

обладающая формальными свойствами λ-операции. Не входя в детали, мы сейчас увидим, как в принципе можно дать такое определение.

Итак, предположим, что мы имеем такую прикладную систему $\mathfrak{H}$ и что в $\mathfrak{H}$ имеется отношение равенства с обычными свойствами. Если $\mathfrak{X}$ — об в атомическом расширении $\mathfrak{H}$, в котором x — одна из присоединенных неопределенных, то (10) должно быть комбинацией (образованной путем приложения) тех атомов этого расширения, которые отличны от x. Предположим, что эти атомы принадлежат расширению $\mathfrak{H}'$ системы $\mathfrak{H}$, которое не включает x, и пусть $\mathfrak{H}'(x)$ — расширение, образованное добавлением x к $\mathfrak{H}'$; тогда префикс $[x]$ будет каждому обу $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{H}'(x)$ сопоставлять об X из $\mathfrak{H}'$, такой, что

$$Xx = \mathfrak{X} \tag{11}$$

(это частный случай (β), где $M \equiv x$). Будем обозначать готическими буквами обы из $\mathfrak{H}'(x)$ и латинскими буквами обы из $\mathfrak{H}'$. Тогда для того, чтобы определить (10) рекурсивно для каждого $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{H}'(x)$, достаточно определить его, (*a*) когда $\mathfrak{X} \equiv x$, (*b*) когда $\mathfrak{X} \equiv U$, где U — об из $\mathfrak{H}'$, и (*c*) когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, где известны Y и Z — функциональные абстракты $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ соответственно. Пусть I, K, S — три фиксированных оба из $\mathfrak{H}$; определим

$$\begin{aligned} [x].x &\equiv \mathsf{I} \\ [x].U &\equiv \mathsf{K}U \\ [x].\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} &\equiv \mathsf{S}YZ \end{aligned} \tag{12}$$

где $Y \equiv [x]\,\mathfrak{Y}, \quad Z \equiv [x]\,\mathfrak{Z}$

Тогда (11) будет справедливо при условии, что мы имеем[1])

$$\begin{aligned} \mathsf{I}x &= x \\ \mathsf{K}xy &= x \\ \mathsf{S}xyz &= xz(yz) \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь 'x', 'y', 'z' указывают, что эти равенства должны выполняться схематически (т. е. как формальные следствия предположения, что x, y, z — обы), а значит, и тогда, когда x, y, z — любые

[1]) Напомним, что так как $\mathfrak{H}$ — система с приложением, то мы используем принцип ассоциации налево (разд. 2D2).

присоединенные неопределенные, причем x не обязательно совпадает с переменной из (10).

Так определенный функциональный абстракт (10) будет комбинацией I, K, S и атомов в $\mathfrak{X}$, отличных от x. Можно показать, что он обладает свойствами, аналогичными (α) и (β) в разд. 4 [свойство (β) следует из (11) по эпитеореме, которая разрешает подстановку вместо неопределенной]. Комбинации будут получаться очень длинными и громоздкими.

Обы I, K, S, а также комбинации, образованные только из них, называются *комбинаторами*. Некоторые из этих комбинаторов, обозначаемые B, B′, C, I′, K′, $\mathsf{K}_{(1)}$, W, будут время от времени упоминаться в этой книге, так как они образуют простые комбинации. Они подчиняются следующим "редукционным правилам", аналогичным (13):

$$\begin{aligned} \mathsf{B}xyz &= x(yz) \\ \mathsf{B}'xyz &= y(xz) \\ \mathsf{C}xyz &= xzy \\ \mathsf{I}'xy &= yx \\ \mathsf{K}'xy &= y \\ \mathsf{K}_{(1)}xyz &= xy \\ \mathsf{W}xy &= xyy \end{aligned} \tag{14}$$

В терминах I, K, S их можно определить так:

$$\begin{aligned} \mathsf{B} &\equiv \mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{S})\mathsf{K} \\ \mathsf{B}' &\equiv \mathsf{C}\mathsf{B} \\ \mathsf{C} &\equiv \mathsf{S}(\mathsf{B}\mathsf{B}\mathsf{S})(\mathsf{K}\mathsf{K}) \\ \mathsf{I}' &\equiv \mathsf{C}\mathsf{I}\,(=\mathsf{B}(\mathsf{S}\mathsf{I})\mathsf{K}) \\ \mathsf{K}' &\equiv \mathsf{C}\mathsf{K} \text{ или } \mathsf{K}\mathsf{I} \\ \mathsf{K}_{(1)} &\equiv \mathsf{B}\mathsf{K} \\ \mathsf{W} &\equiv \mathsf{S}\mathsf{S}\mathsf{K}' \end{aligned}$$

Комбинаторная логика — это ветвь математической логики, изучающая комбинаторы и их свойства. Здесь был приведен краткий набросок одного из ее видов; существуют различные другие виды и видоизменения. Комбинаторы или аналогичные им операторы могут быть определены в терминах λ-конверсии, и потому различные исчисления λ-конверсий можно рассматривать как часть комбинаторной логики.

Обы X, которые удовлетворяют равенству (11) для данного $\mathfrak{X}$, не единственны. Действительно, существуют такие комбинато-

ры X и Y, что

$$Xx = Yx \tag{15}$$

но неверно, что

$$X = Y \tag{16}$$

Примерами являются SKS и KIK. Однако если к системе присоединить некоторые дополнительные аксиомы, например

$$\mathsf{SK} = \mathsf{KI}$$

то (16) будет справедливо всегда, когда справедливо (15). Эти новые аксиомы называют "комбинаторными аксиомами".

Описанный вид комбинаторной логики является системой исключительно фундаментального характера. Она является ассерторической, с операцией приложения, элементарной и полностью конечной по своей структуре, т. е. имеется относительно небольшое конечное число атомов, аксиом и элементарных правил. Система эта не содержит формальных переменных, и все же она годится для того, чтобы служить основой для всего, что может быть сделано с переменными в более обычных системах. Однако в этой системе элементарное доказательство даже сравнительно простой теоремы потребовало бы очень большого числа шагов; чтобы облегчить построение системы, необходим эпитеоретический метод.

В этой книге мы не будем далее заниматься комбинаторной логикой, а перейдем к разработке систем, похожих на те, которые обычно рассматриваются.

Упражнения

1. Показать, что префикс подстановки $[M/x]\,X$ обладает следующими свойствами:

(*a*) $[x/x]X \equiv X$

(*b*) Если x не входит в X, то $[M/x]\,X \equiv X$

(*c*) Если либо y не входит в M, либо x не входит в X, то

$$[M/x]\,[N/y]\,X \equiv [N^*/y]\,[M/x]\,X$$

где

$$N^* \equiv [M/x]\,N$$

([CLg], разд. 6D, 3E; [DSR].)

2. В качестве определения одновременной подстановки пусть задано, что

$$[M_1/x_1,\ M_2/x_2,\ \ldots,\ M_n/x_n]\,X$$

есть X^*, определенный рекурсивно так:

$$x_i^* \equiv M_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$y^* \equiv y,\ \text{если } y \text{ — любой другой (квази)атом,}$$

$$(\omega_k^m X_1 \ldots X_m)^* = \omega_k^m X_1^* \ldots X_m^*$$

Показать, что

$$[M_1/x_1,\ M_2/x_2,\ \ldots,\ M_n/x_n]\,X \equiv$$

$$\equiv [M_1/z_1]\,[M_2/z_2] \ldots [M_n/z_n]\,[z_1/x_1] \ldots [z_n/x_n]\,X$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — различные переменные, которые не входят в $M_1, \ldots, M_n$ или X. Каково различие между этой подстановкой и

$$[M_1/x_1]\,[M_2/x_2] \ldots [M_n/x_n]\,X$$

3. Записать посредством функциональной абстракции в комбинации с подходящими обычными операциями высказывания:

(*a*) Об X утверждается тогда и только тогда, когда некоторый (невыделенный) об подставляется вместо x в X.

(*b*) Производная x^2 равна $2x$.

(*c*) Об E, приложенный к X, являющемуся функцией x, дает функцию, получающуюся из X подстановкой $x + 1$ вместо x.

4. Если P — операция над функциями, то показать, что возможны две интерпретации для

$$Pf\,(x+1)$$

Отличить их друг от друга, используя λ-обозначения. Показать, что эти интерпретации различны, если $f\,(x) = x^2$ и

$$Pf\,(x) = \begin{cases} f'\,(0), & \text{если } x = 0 \\ \dfrac{f\,(x) - f\,(0)}{x}, & \text{если } x \neq 0 \end{cases}$$

([CLg], стр. 81.)

5. При каких обстоятельствах 'D' является подходящим обозначением для оператора дифференцирования в дифференциальном исчислении?

6. Посредством комбинаторов S, K, I построить комбинаторы S_2, Φ, Z_2, такие, что

$$\mathsf{S}_2 xyzu = xu\,(yu)\,(zu)$$

$$\Phi xyzu = x\,(yu)\,(zu)$$

$$\mathsf{Z}_2 xy = x\,(xy)$$

([CLg], разд. 6A3, 5E1, 5B1, 5E5; по поводу общей техники см. CLg], разд. 5B, 6A3.)

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Исторические и библиографические комментарии. Эта глава является пересмотренным изложением [CLg], гл. 2. Общие замечания, относящиеся к главе как к целому, можно найти там и в разд. 1S5. Как и в гл. 2, ссылки, данные здесь, дополняют общие.

Понятие эпитеории выросло из метаматематики Гильберта. Как отмечено в разд. 2S3, элементарные утверждения метаматематики являются лишь утверждениями о том, что некоторые конкретные вефы доказуемы; они не представляли бы интереса, если бы не показывали, что метаматематику можно развивать эпитеоретическими методами. Вся цель метаматематики состоит в том, чтобы дать базу, посредством которой доказательства определенных видов эпитеорем можно было бы сделать объективно понятными.

На этом основании было бы естественным использовать скорее термин 'метатеория', нежели 'эпитеория'. До [TFD], например в [APM], [OFP], я делал именно так. Новый термин был введен в [TFD] под влиянием некоторых соображений критического характера. В разд. 2 я вернусь к этому вопросу.

Дальнейшие примеры эпитеорем вместе с некоторыми философскими рассуждениями можно найти в [OFP], гл. 9.

Теорема Гёделя о неполноте впервые появилась в его статье [FUS]; несколько позднее в своей книге [UPF] он пересмотрел и обобщил ее. Важное обобщение этой теоремы содержится в статье Россера [ETG]. Литература специального и общего характера, выросшая из этой теоремы, огромна; я могу упомянуть лишь несколько работ, которые считаю особенно интересными. Исключительно популярное изложение теоремы Гёделя см. в книге Нагеля и Ньюмена [GPr], несколько больше техники содержится в книге Мостовского [SUF] (в ней содержится полное, но краткое изложение теоремы Гёделя с некоторыми новшествами). Другие трактовки этой теоремы, представляющие значительный интерес, см. в работах Шмульяна [TFS] (содержит очень современные и существенные упрощения), Френкеля и Бар-Хиллела [FST] (история и комментарий с многочисленными ссылками), Майхилла [PIM] (рассматриваются философские следствия), Финдлея [GSN] (эту книгу с одобрением цитирует Майхилл), Ладриера [LIF] (энциклопедическое рассмотрение ограничительных теорем — т. е. теорем о неполноте — и всего связанного с ними), Россера [IEP]. Другие теоремы о неразрешимости, которые, можно считать, были вдохновлены теоремой Гёделя о неполноте, содержатся в работах Чёрча [UPE] (неразрешимость λ-конверсии) и [NEP] (неразрешимость проблемы разрешения), Тарского, Мостовского и Робинсона [UTh] (три короткие статьи о неразрешимости систем, основанных на исчислении предикатов). См. также разд. 3.

По поводу теоремы Лёвенгейма — Сколема со ссылками на источники и другие изложения см. Френкель и Бар-Хиллел [FST], стр. 105 и далее [1]), Сколем [PTL], Чёрч [IML_2, §§ 45 и 49]. Философское обсуждение содержится в статье Берри и Майхилла [OSL]. Из более недавних работ см. Куайн [ISC] (ср. также его [CQT]; Бет [CTL], [TPT]; Расёва и Сикорский [PSL]; Boot [ALS]. См. также следующий абзац.

Теорема Гёделя о полноте содержится в его статье [VAL]. Существует много других доказательств, а также обобщение, сделанное Мальцевым. Ссылки на них содержатся в работах Френкеля и Бар-Хиллела ([FST], стр. 105 и 289[2]), Бета [FMt, разд. 186], Мостовского [PSI], Робинсона [OIM. II], Расёвой и Сикорского [GTh]. Доказательство, которое мы проведем в гл. 7, сходно с доказательством в последней упомянутой работе Расёвой и Сикорского. Теорема в том виде, как она сформулирована здесь, содержит теорему Лёвенгейма — Сколема.

По поводу более глубоких типов эпитеорем вообще см. разд. 3.

Изложение в разд. B представляет собой пересмотренное изложение разд. 2B и 2C моей книги [CLg]. Теорема о замене по существу в том виде, в каком она сформулирована здесь, появилась в работе Мак-Лейна [ABL]; такая же теорема, но при несколько более специальных предположениях, содержится в работе Эрбрана [RTD], стр. 21. Теорема о замене для отношения эквивалентности появилась уже у Поста в [IGT].

Настоящая трактовка определений является пересмотром подхода в [CLg], разд. 2E; другое измененное изложение появилось до этого в [DFS]. Настоящий подход основан не столько на предшествующих работах по философии определений, сколько на том наблюдении, что теория рекурсивных определений Клини в том виде, как она изложена в его книге [IMM] (и первоначально в его статье [GRF]), естественно подходит для распространения на определения над произвольным индуктивным классом. Следующие работы выбраны из обширной литературы по определениям вообще: Чёрч [Dfn], [IML_2]; Допп [VSD]; Дубислав [Dfn]; Айдукевич [TCD]; Саппс [ILg, гл. 8]. Определения не следует смешивать с теоремами об определимости; последние имеют смысл только в системах с формальным отношением равенства.

Рассмотрение переменных в разд. D основано на [CLg], разд. 2D. Условие инвариантности и проблемы, связанные с подстановкой, исследовались Постом [IGT]. Дополнительная информация

---

[1]) Стр. 134 и след. русского издания.— *Прим. ред.*

[2]) Стр. 134 и 346 русского издания.— *Прим. ред.*

о λ-конверсии взята из [CLg], разд. 3. Полное изложение λ-конверсии см. у Чёрча в [CLC]. Комбинаторная логика в разд. D5, конечно, является конспективным изложением [CLg], особенно гл. 5 и 6. Более краткую трактовку этого вопроса см. у Когана [FTS] [1]). Исключительно сжатое резюме дано также в [DTC], разд. 2. Существует независимый от данной книги анализ переменных, принадлежащий Менгеру. Его статьи до 1956 г. упоминаются в [CLg]; более поздние см. в библиографии к данной книге.

2. Терминологические замечания. В разд. 1 мы заметили, что предмет, рассматриваемый в данной главе, имело бы смысл называть метатеорией, и до 1947 г. я действительно употреблял это слово. Однако такое употребление вызвало ряд критических замечаний, например у Клини в [rev. C]. Сущность этой критики заключалась в том, что префикс 'мета' означает, что абстракция производится посредством метасемиозиса и использование этого префикса в контекстах, где нет явного указания на метасемиозис, привело бы к путанице. В связи с этим в [TFD] был введен новый термин 'эпитеория'. В данной книге префикс 'мета' сохранен для ситуаций, где явно постулируется некоторый вид метасемиозиса. Префикс 'эпи' достаточно эластичен: он не исключает метасемиотической точки зрения, но и не подразумевает ее. Можно смело утверждать, что именно это входило в намерения Гильберта в отношении 'мета'; мы видели (разд. 2S3), что метаматематика одинаково совместима как с формализацией путем абстракции, так и с метасемиозисом. Как бы то ни было, с того времени ряд пользующихся большим влиянием логиков — особенно Тарский и Карнап — придали этому термину явно семиотический оттенок. В знак почтения к этим логикам я и употребляю новый термин.

Поскольку мы вводим здесь новый термин, полезно будет сделать несколько замечаний по поводу других его аспектов.

Термин 'эпитеория' означает, что мы занимаемся исследованиями, выходящими за элементарные рамки. Мы видели, что в метаматематике имеются элементарные утверждения (хотя они вряд ли интересны), но термин 'элементарная теорема', по крайней мере в употребительном смысле слова 'элементарный', содержал бы в себе противоречие. Если мы хотим, чтобы один термин включал в себя элементарные теоремы и эпитеоремы, то мы можем просто говорить 'теорема'. Далее, префикс 'эпи' происходит от греческого предлога 'επί', означающего 'на' или 'наверху', тогда как 'мета' — от предлога 'μετά', означающего 'сзади' или 'за'. Поэтому метатеорема понимается как нечто лежащее за границей, а эпитеорема — как нечто основывающееся на чем-то другом

[1]) Титтгемейер [WCM] обнаружил ошибку в системе Когана.— *Прим. ред.*

как на фундаменте. Это различие в этимологии отчетливо проявляется, когда пользуются образной речью — образы, которые естественно приходят в голову в этих двух случаях, совершенно различны.

Наконец, использование термина 'метатеория' как нарицательного имени согласуется с употреблением этого слова в разд. 2S3 и 2S4; можно образовать метатеорию над языком *L*. Пока было мало поводов употреблять в аналогичном смысле термин 'эпитеория'. Для каждого термина есть опасность путаницы собственного и нарицательного употребления, но этого не произошло (ср. описанную в разд. 1A ситуацию, связанную со словом 'логика'). Если бы возникла необходимость, мы могли бы использовать термины 'метатеоретическое' и 'эпитеоретическое' как нарицательные.

3. Дальнейшие проблемы эпитеории. Наше обсуждение сейчас достигло той стадии, на которой следует завершить программу, намеченную в разд. 1S4. Как и было обещано, я приведу здесь краткий обзор эпитеоретических методов, выходящих за рамки этой книги. Эти методы могут быть (и часто являются) неконструктивными; но есть и конструктивные вопросы (например, теорема Гёделя), требующие рассмотрений, выходящих за пределы данной книги. Так как данный раздел является продолжением разд. 1S4, то сделанные там общие замечания сохраняют силу и здесь.

Можно сказать, что первым шагом в этом направлении является теория рекурсивных числовых функций. Согласно рассмотрениям в разд. 3C, ее можно считать эпитеорией системы натуральных чисел, а эта система в свою очередь может трактоваться как пример 2 разд. 2C3, понимаемый как аффиксативная система. Эта теория восходит к работе Дедекинда [WSW] и даже к еще более ранним работам; но в некотором смысле можно сказать, что теория эта ведет свое начало с работы Сколема [BEA] (см. разд. 1S4*d*). Большим стимулом для ее развития была деятельность Гильберта; ей посвящены несколько разделов книги Гильберта и Бернайса [GLM]. Гёдель в работе [FUS] существенно использует эту теорию. Пока что принималось во внимание лишь то, что позднее было названо 'примитивными рекурсиями'. В своей работе [UPF] Гёдель предложил определение, которое является основой современной теории общерекурсивных функций (основную идею этого определения он приписывает устному предложению Ж. Эрбрана). Теория общерекурсивных функций была в основном развита Клини, начиная с его работы [GRF]; его [IMM] является фундаментальным трудом в этой области. Эту область независимо от Клини исследовала в Будапеште Р. Петер; её книга [RFn] читается значительно легче, чем книга Клини, одна-

ко в ней затрагивается много довольно-таки специальных проблем. Петер принадлежат основные труды по рекурсиям, промежуточным между примитивной и общей рекурсией. Гудстейн в своей книге [RNT] изучал примитивную рекурсию с несколько иной точки зрения. Было показано, что понятие общерекурсивности в принципе эквивалентно некоторым другим понятиям эффективности, например вычислимости с помощью некоторой идеализированной машины (Тьюринг [CNA]), определимости в комбинаторной логике, алгорифмам Маркова (разд. 2E, особенно теоремы Детловса в упр. C2 и 2E12). Тезис о том, что общерекурсивность и эффективная вычислимость должны быть отождествлены, известен под названием тезиса Чёрча; см. Клини [IMM, § 62]. По теореме Детловса он эквивалентен тезису Маркова (см. разд. 2E1). Следствия этого тезиса весьма важны. Во-первых, приняв этот тезис, можно с помощью рекурсивной функции перечислить гёделевские номера утверждений в ассерторической формальной системе и, следовательно, формальную систему можно отождествить с "рекурсивно-перечислимым множеством". Во-вторых, можно ожидать близкой связи этих понятий с интуиционистской математикой, и такая связь была (и, я думаю, еще будет) обнаружена [1]). Они также тесно связаны с более практическими проблемами, например такими, как анализ и синтез цифровых автоматов. Эти исследования обычно делались вполне конструктивно. Но более глубокие разделы теории, ведущие к "рекурсивным иерархиям" различных видов, заметно отходят от конструктивной точки зрения. Вся эта совокупность вопросов стала большим самостоятельным разделом математики, в котором сейчас ведется очень активная работа. Из работ вводного характера, кроме уже приведенных выше, упомянем следующие: Пост [RES] (основополагающая работа по рекурсивно-перечислимым множествам); Дэвис [CUn]; Роджерс [TRF]; Майхилл и Деккер [RET] (типы рекурсивно-перечислимых множеств, инвариантные относительно рекурсивных преобразований).

Другое направление исследований возникло в связи с изучением символических структур. По поводу этого см. разд. 2S3. Развитие этого направления в основном обнаруживает влияние метаматематики Гильберта, но очевидно влияние и некоторых других источников (Фреге, Ч. С. Пирса, Э. Гуссерля и т. д.).

Теорему Гёделя [FUS] о неполноте можно рассматривать как комбинацию двух последних направлений. Гёдель показал, что формулы системы можно представлять в виде чисел (см. о "гёделевском представлении" в разд. 2C4) и что в терминах этого представления можно построить формулу, которая говорит о своей собственной недоказуемости. Поэтому в такой системе можно получить парадокс лжеца. На основе разумных предположений можно показать, что построенная таким образом формула не является ни доказуемой, ни опровержимой. Какой сильный эффект вызвал этот результат, мы уже обсуждали в разд. 1, а также в разд. 1C и 3A1.

[1]) См. Клини и Весли [FIM].— *Прим. ред.*

Теорема Гёделя о неполноте, как и многие другие такие теоремы, использует методы, являющиеся строго конструктивными. Но, как ранее указал Тарский, при использовании неконструктивных семантических методов также получаются очень важные результаты. Развивается метатеория определенного языка-объекта с использованием определенного метаязыка; затем на том же метаязыке можно рассуждать свободно, более или менее платонистски. Теорема Лёвенгейма — Сколема и теорема Гёделя о полноте (разд. 1 и 3A1) являются примерами теорем, которые можно так рассматривать. Тарский явился инициатором подобных исследований. В настоящее время это направление достигло исключительно высокой степени развития, и посвященная ему литература велика и быстро растет. Я могу привести лишь несколько интересных работ. Обзоры см. у Мостовского [PSI], Бета ([FMt], особенно части IV и VII). Основная из работ Тарского в этой области — [WBF]; эта работа и ряд его более ранних работ собраны вместе в книге [LSM]. Из последних работ Тарского общее направление указывают [NMB] и [GTP]. См. также Тарский, Мостовский и Робинсон [UTh]. Сюда близко примыкают алгебраические применения, которые развил Авраам Робинсон в своих работах [MMA], [CTh] [1]). В этой области в настоящее время много работают Тарский и его ученики в Калифорнии и ряд его польских коллег [2]).

Другое направление эпитеоретических исследований — поиск методов, которые могут быть названы конструктивными в некотором расширенном смысле, но не в том строгом смысле, в котором этот термин понимается здесь. Наиболее известным примером этого направления является генценовское доказательство непротиворечивости арифметики (Генцен [NFW], первоначально в его работе [WFR]; обсуждение, например, в работе Бернайса [QMA]) [3]), который допускает в качестве неконструктивного принципа то, что убывающая последовательность порядковых чисел, начинаю-

[1]) См. также его [TMA].— *Прим. ред.*

[2]) В СССР — школа А. И. Мальцева (см., например, [ЭлТ] Ершова и др.).— *Прим. ред.*

[3]) См. также Новиков [CLC], Шютте [BIZ], § 79 из [IMt] Клини и добавления VI и VII А. С. Есенина-Вольпина к русскому переводу последней книги.— *Прим. ред.*

щаяся с любого порядкового числа вплоть до ε_0 (первого канторовского ε-числа), может иметь только конечное число членов. По поводу других расширений понятия конструктивности см. Бернайс [BSB], Гёдель [BNB], Крайзель [INF].

Дальнейшие замечания по вопросу о значении конструктивных и неконструктивных методов можно найти в работах Гудстейна [NMS], Крайзеля [HPr], Лоренцена [LRF], Майхилла [PIM], Мостовского [OUM], Сколема [CRF], Шанина [ЛПА]. См. также книгу [CMt] под редакцией Гейтинга, содержащую ряд статей по различным аспектам конструктивности, представленных на конференции в Амстердаме в 1957 г.

Глава 4

РЕЛЯЦИОННАЯ ЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

В этой главе мы рассмотрим ряд систем алгебраического характера, имеющих существенное значение для современной математической логики. Алгебраический характер этих систем заключается в том, что они не содержат связанных переменных; далее, они являются реляционными системами (разд. 2D1), причем основное отношение является либо квазиупорядочением, либо равенством (разд. 3B), а операции в этих системах чем-то аналогичны операциям обычной алгебры. Эти системы рассматриваются здесь не потому, что надо начинать с них ввиду их существенной фундаментальности (в том смысле, что их нужно ввести, прежде чем переходить к выводу элементарных теорем некоторой системы), но потому, что это довольно простые системы, имеющие интерпретации в других системах, так что они важны при сравнительном эпитеоретическом изучении систем вообще. Мы ограничимся теми свойствами, вообще говоря, довольно простыми, которые представляют логический интерес.

Изложение начнется в разд. A с предварительных рассуждений о логических алгебрах вообще; здесь же будут введены соглашения по поводу обозначений, относящиеся ко всей главе в целом. Затем в разд. B мы перейдем к изучению структур, в которых имеется не более двух операций, называемых сложением и умножением, которые обладают свойствами, аналогичными свойствам одноименных алгебраических операций. Последние два раздела (разд. C и D) будут посвящены системам, в которых к структурным операциям добавлены операции вычитания и "пликации", в некотором отношении аналогичные обратным операциям обычной алгебры. Изложение закончится в конце разд. D рассмотрением булевых колец и двойственных им систем (дуалов).

Ряд вопросов, носящих алгебраический характер, не рассматривается в этой главе. Все вопросы, относящиеся к отрицанию, включая булевы алгебры, отложены до гл. 6. Хотя существуют важные алгебраические теории, относящиеся к кванторам, они выходят за рамки данной книги и о них лишь упоминается в гл. 7. Наконец, все касающееся модальных операций отложено до гл. 8.

A. ЛОГИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ВООБЩЕ

В разд. 1 будет дана общая характеристика логических алгебр как квазиупорядоченных или эквациональных алгебр, содержащих ряд идемпотентных операций, а также будут введены соглашения по поводу обозначений, относящиеся к главе в целом. Затем в разд. 2 будет описан ряд различных интерпретаций таких алгебр, на которые в последующем мы будем время от времени ссылаться.

1. Предварительные соглашения. Термин '*алгебра*' в этой книге используется как имя для системы со свободными переменными, но без связанных переменных. Поэтому система примера 5 (разд. 2C3) является алгеброй, и ее уместно называть алгеброй высказываний, или пропозициональной алгеброй. В противоположность этому термин '*исчисление*' будет использоваться для описания системы со связанными переменными, так что уместно говорить об исчислении λ-конверсий, об исчислении предикатов и т. д. Эти термины согласуются с их обычным употреблением в математике, где отличительной характерной чертой исчисления бесконечно малых в противоположность элементарной алгебре является наличие в нем связанных переменных [1]).

Алгебры, рассматриваемые в этой главе, являются реляционными системами (разд. 2D1). Имеется один базисный предикат — бинарное отношение, являющееся или квазиупорядочением, или равенством. Это отношение будет обозначаться инфиксом '$\leqslant$' в случае квазиупорядочения и инфиксом '$=$' в случае равенства. В случае квазиупорядочения также имеется отношение равенства, определяемое так:

$$x = y \rightleftarrows x \leqslant y \,\&\, y \leqslant x \tag{1}$$

где 'x' и 'y' — U-переменные для произвольных обов. Когда такая квазиупорядоченная система интерпретируется так, что в ней имеется и содержательное равенство, она называется *частично упорядоченной*, если при этой интерпретации отношение равенства, определенное посредством (1), совпадает с содержательным равенством. Но для неинтерпретированной системы различие между частичной упорядоченностью и квазиупорядочением не существенно. Однако будет выгодно описывать квазиупорядоченную систему как частично упорядоченную тогда, когда будут подразумеваться лишь частично упорядоченные интерпретации.

Главными операциями, рассматриваемыми в этой главе, — и единственными допустимыми операциями до разд. C — являются две бинарные операции, называемые *сложением* и *умножением* и обозначаемые соответственно через '$\vee$' и '$\wedge$'. Обы тогда — это конструкции из атомов, получаемые с помощью этих двух операций. Операции эти коммутативны и ассоциативны; при этом они могут обладать, а могут и не обладать определенными свойствами, аналогичными дистрибутивному закону обычной алгебры. Характерной чертой рассматриваемых в данной главе алгебр является то, что рассматриваемые операции идемпотентны, т. е.

$$a \wedge a = a \qquad a \vee a = a \tag{2}$$

для любого оба a. Эти законы справедливы для большинства алгебр, представляющих интерес для логики, и поэтому их можно считать характеристическими свойствами логических алгебр в смысле разд. 1A.

Как уже видно на примерах (1) и (2), нам будет удобно отказаться от системы обозначений, согласно которой заглавные курсивные буквы используются в качестве U-переменных, а строчные курсивные буквы оставлены для обозначения U-постоянных. Эта система обозначений использовалась в гл. 2 и 3. В этой главе мы используем '0' и '1' в качестве U-постоянных и в согласии с разд. D1 оставим для этой цели также буквы 'e_1', 'e_2' и т. д. (хотя они нам вряд ли понадобятся); все другие строчные курсивные буквы являются U-переменными для произвольных обов. Это употребление является обычным в алгебре, и ему уместно следовать. В гл. 5 мы вернемся к системе обозначений, сходной с ранее введенной.

В последующем будут определены различные виды логических алгебр. В этих определениях имеется в виду, что система, удовлетворяющая постулатам для некоторого вида, принадлежит этому виду безотносительно к тому, удовлетворяет она некоторым дополнительным постулатам или нет, т. е. принадлежит ли она также к более ограниченному виду. С другой стороны, когда мы говорим об *общей системе* такого-то и такого-то вида, то мы считаем, что не постулируется ничего иного, кроме постулатов, определяющих этот вид. Общая система некоторого вида является тогда конкретной формальной системой, элементарные теоремы которой — это те высказывания, которые выводимы из постулатов для рассматриваемого вида. Это очень похоже на то, что часто называется *свободной* системой с элементами из $\mathfrak{e}$ в качестве образующих.

Так как базисное отношение имеет вид, рассмотренный в разд. 3B, то мы можем использовать объясняемые там соглашения и установленные там результаты. Так, (ρ) и (τ), являющиеся соответственно рефлексивным и транзитивным свойствами базисного отношения, по определению, имеют место и для $\leqslant$,

[1]) Системы типа комбинаторной логики (разд. 3D5), вообще не содержащие переменных, не охватываются ни тем, ни другим термином.

и для $=$; а свойство симметрии (σ) имеет место для $=$. Свойство монотонности (π) будет установлено как эпитеорема для структур, и будет показано, что теорема о замене (ТЗ) справедлива для всех рассматриваемых здесь алгебр. В доказательствах запись типа

$$a \leqslant b \quad \text{по} \quad X$$
$$\leqslant c \quad \text{по} \quad Y$$

где 'X' и 'Y' — указания правил, следует понимать как сокращение для

$$a \leqslant b \quad \text{в силу} \quad X$$
$$b \leqslant c \quad \text{в силу} \quad Y$$
$$\text{Поэтому } a \leqslant c \text{ в силу } (\tau)$$

2. Интерпретации логических алгебр. Прежде чем приступить к формальным рассуждениям, рассмотрим несколько примеров интерпретаций этих систем [1]). (Дальнейшие примеры и обсуждение см. в разд. С5.)

1°. *Интерпретация посредством классов.* Это старейшая из интерпретаций. Согласно этой интерпретации (интерпретируемые) обы являются классами, а базисное отношение $\leqslant$ является включением. Произведение двух классов — это их обычное пересечение, т. е. класс, состоящий из элементов, принадлежащих обоим классам. Сумма двух классов — их объединение, т. е. класс элементов, входящих хотя бы в один из них.

2°. *Интерпретация через отношения.* Обы являются отношениями. Пусть R, S — такие отношения. Тогда мы интерпретируем $R \leqslant S$ как утверждение о том, что всегда, когда x находится в отношении R к y, x находится также в отношении S к y; $R \wedge S$ — это отношение, которое имеет место между x и y тогда и только тогда, когда между ними имеют место как отношение R, так и отношение S, а $R \vee S$ — это отношение, которое имеет место между x и y тогда и только тогда, когда между ними имеет место хотя бы одно из отношений R, S. Так как отношения можно представить в виде классов упорядоченных пар, то 2° является частным случаем 1°.

3°. *Интерпретация через высказывания (пропозициональная интерпретация).* Согласно этой интерпретации, обы являются высказываниями. Взгляды на природу высказываний различны,

[1]) Примеры 1° — 7° представляют описание способа оценки, который можно уточнить различными путями, вместе с интерпретантом для базисного отношения; тогда подразумевается, что интерпретант элементарного высказывания гласит, что указанное отношение имеет место для всех оценок, допускаемых данным способом.

и мы пока отложим обсуждение этого вопроса. Достаточно сказать, что высказывания — это объекты, которые мы хотим интерпретировать как утверждения; мы можем, например, считать их предложениями О-языка, которые мы упоминаем, но не употребляем в А-языке. Тогда $\leqslant$ есть отношение следования, которое имеет место между двумя высказываниями тогда и только тогда, когда результат применения условной связки (т. е. связки 'если $-_1$, то $-_2$', символически обозначаемой '$\rightarrow$' в разд. 3А2, но не обязательно понимаемой конструктивно) к соответствующим интерпретированным высказываниям истинен; $\wedge$ есть операция конъюнкции, которая из двух высказываний образует третье высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба исходные высказывания — члены конъюнкции, а $\vee$ подобным же образом относится к связке 'или' между высказываниями.

4°. *Интерпретация через порядок.* Обы являются элементами некоторого упорядоченного или частично упорядоченного множества, скажем действительными числами; $\leqslant$ представляет собой отношение предшествования по величине (которое мы интерпретируем как отношение меньшего к большему) или совпадения; $a \wedge b$ — точная нижняя грань, $a \vee b$ — точная верхняя грань a и b. Мы можем также использовать эту интерпретацию, когда обы являются функциями, определенными на некоторой области, со значениями из некоторого упорядоченного множества [1]). Поэтому если f и g — две действительные функции, определенные для действительных чисел x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $f \wedge g$ — функция, значение которой для любого x является наименьшим из значений $f(x)$ и $g(x)$; следовательно, если $f(x)$ есть x и $g(x)$ есть $1 - x$, то $f \wedge g$ есть функция

$$h(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

График $f(x)$ на рис. 1 — прямая OA, график $g(x)$ — прямая BC, график $h(x)$ — ломаная ODC.

5°. *Интерпретация через делимость.* Обы являются натуральными числами, $\leqslant$ есть отношение делимости; $a \wedge b$ — наибольший общий делитель a и b, $a \vee b$ — их наименьшее общее кратное. (Это специальный случай интерпретации 4°.)

6°. *Интерпретации через замыкание.* Пусть K — класс множеств и $\leqslant$ есть отношение включения между элементами K. Предположим, что имеется "операция замыкания", которая любому элементу x из K ставит в соответствие элемент x^*, называемый

[1]) Этот вид обобщения можно применить также к другим интерпретациям (ср. разд. С5).

его замыканием, такой, что для всех x из K

(c1) $$x \leqslant x^*$$

(c2) $$(x^*)^* \leqslant x^*$$

(c3) $$x \leqslant y \longrightarrow x^* \leqslant y^*$$

Мы называем элемент a *замкнутым*, если $a^* \leqslant a$. Тогда a^* — наименьшее замкнутое множество, содержащее a. Мы теперь можем образовать интерпретацию, в которой обы являются замкнутыми множествами из K, $\leqslant$, как и раньше, является отношением включения множеств, $\wedge$ — пересечением множеств, а $\vee$ — операцией, которая ставит в соответствие паре замкнутых множеств a, b наименьшее замкнутое множество, содержащее оба эти множества. Вот примеры таких интерпретаций (достаточно в каждом случае выделить замкнутые множества):

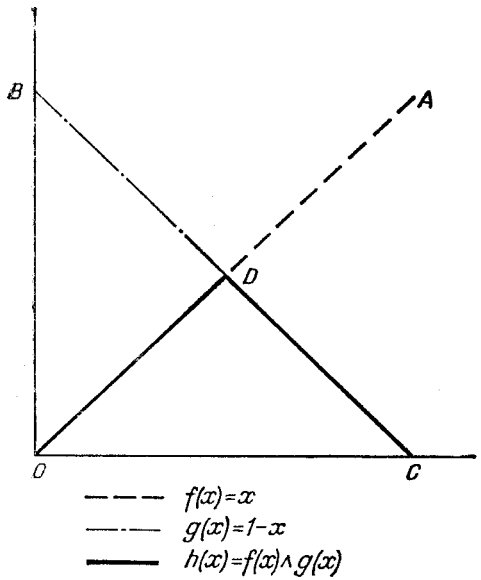

Рис. 1.

a. Замкнутые множества в смысле обычной топологии точечных множеств.

b. Линейные пространства (точки, линии, плоскости и т. д.) любого числа измерений. Такое линейное пространство можно охарактеризовать как пространство, которое вместе с любыми двумя точками содержит все точки прямой линии, проходящей через эти две точки. Этот пример ведет к проективной геометрии и некоторым ее обобщениям.

c. Выпуклые множества, т. е. множества, которые вместе с любыми двумя точками содержат отрезок линии, соединяющий эти точки.

d. Подгруппы математической группы или, более общо, подалгебры некоторой алгебры.

e. Дедуктивные теории (ср. разд. 2B3).

7°. *Интерпретации через открытые множества* получаются из интерпретаций, рассмотренных в 6°, посредством взаимной замены $\wedge$ и $\vee$, а также отношения $\leqslant$ и его обращения. Название объясняется тем, что замкнутые множества, соответствующие интерпретации 6°*a*, переходят здесь в открытые множества.

8°. *Искусственные интерпретации.* Сюда включаются интерпретации посредством таблиц, диаграмм и т. п. Их умышленно

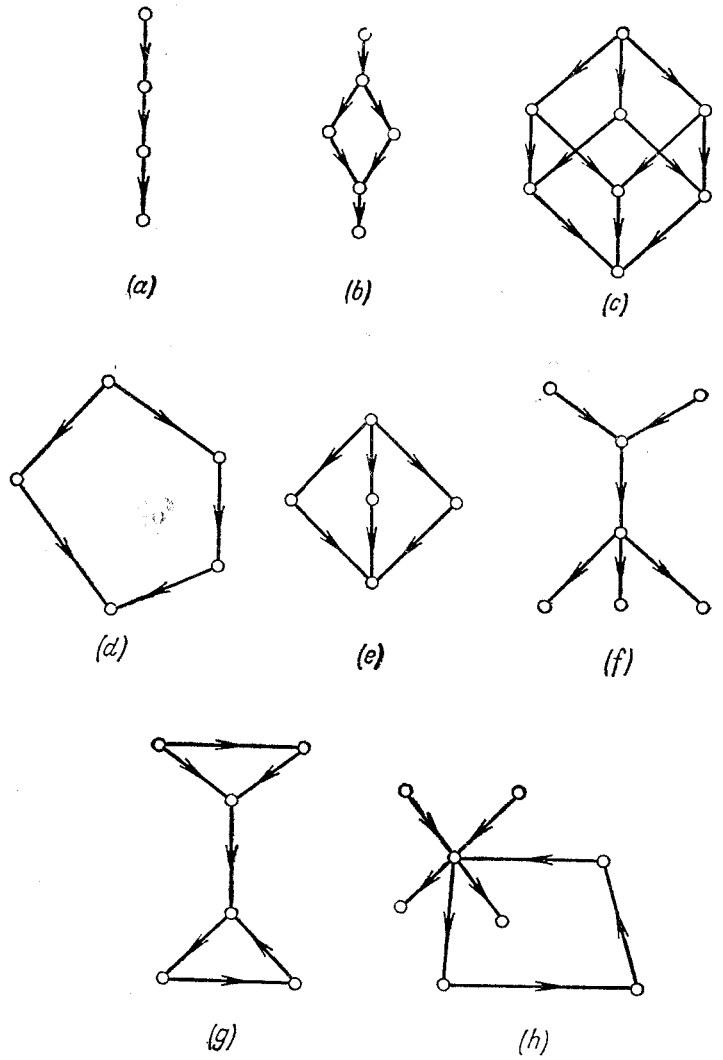

Рис. 2.

делают неверными для некоторой схемы аксиом, чем и доказывается, что эта схема аксиом не выводится из других.

Некоторые примеры таких интерпретирующих диаграмм приведены на рис. 2. Обы — это точки, отмеченные кружочками;

отрезок линии со стрелкой от первой точки ко второй указывает, что две точки в таком порядке находятся в отношении $\boldsymbol{R}_0$; $\leqslant$ есть квазиупорядочение, порожденное этим $\boldsymbol{R}_0$. На рис. 2, *g* и *h* отношение равенства, определенное посредством (1), имеет место между обами, которые не тождественны, так что здесь нет частичного упорядочения. Конечно, интерпретации $\wedge$ и $\vee$ требуют дополнительных соглашений.

Другой способ построения искусственной интерпретации — это табличный способ. Он наиболее естественен для ассерторических систем, но его можно использовать также для реляционных систем. Итак, можно задать определенное множество V значений и считать, что некоторая операция приписывает каждой паре значений из V для аргументов значение из V для результата, причем эти аргументы расположены в таблице так, как это показано на примере следующих двух таблиц; здесь V есть 0, 1, 2; левая таблица дает значения для $x \wedge y$, а правая — для $x \vee y$:

x \ y	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Можно связать такую таблицу с $\leqslant$ и договориться, что $x \leqslant y$ имеет место тогда и только тогда, когда значение, полученное из этой таблицы, принадлежит подклассу "отмеченных" значений V. Это можно обобщить, как для тавтологий, рассмотренных в разд. 2C5, на случай, когда такое отмеченное значение берется не для точно одного приписывания значений обам e_i, но для всех таких приписываний.

Эти искусственные интерпретации не всегда ведут к логическим алгебрам в том смысле, как это определено в разд. 1. Но когда они имеют некоторую аналогию с такими алгебрами, их можно рассматривать как логические алгебры в расширенном смысле (ср. разд. 1A).

B. СТРУКТУРЫ

В этом разделе мы рассмотрим логические алгебры, не содержащие иных операций, кроме сложения и умножения, описанных в разд. A. В разд. 2 будет определен и изучен один вид такой алгебры, называемый структурой и содержащий обе эти операции. Предварительно в разд. 1 мы изучим другой вид алгебры, называемый полуструктурой, в котором есть только одна операция. В разд. 3 вводится специальный вид структур путем добавления

постулата дистрибутивности. Дистрибутивные структуры являются наиболее важным для логики видом структур, и потому им стоит уделить особое внимание; в связи с ними мы отметим, но не будем подробно исследовать промежуточный вид структур — так называемые модулярные структуры, имеющие важные приложения в других областях математики. Наконец, в разд. 4 ради полноты будут приведены некоторые относительно тривиальные результаты, связанные с особыми элементами 0 и 1.

В соответствии с общим направлением этой главы здесь рассматриваются только очень простые и элементарные свойства структур. Если привлечь, например, теоретико-множественные методы, то теория структур становится очень обширным предметом. Эти расширения выходят за пределы данной книги.

1. Полуструктуры. Начнем с рассмотрения систем, в которых постулируется только одна операция. Пусть это будет операция $\wedge$. Важным видом таких систем является полуструктура. Она определяется в следующем абзаце; вслед за определением следует ряд теорем о полуструктурах.

Полуструктура — это частично упорядоченная алгебра с одной двуместной операцией, которую мы обозначаем '$\wedge$', используя этот знак как инфикс, и для которой имеют место следующие постулаты:

ΛK	$a \wedge b \leqslant a$
ΛK′	$a \wedge b \leqslant b$
ΛS	$c \leqslant a \,\&\, c \leqslant b \rightarrow c \leqslant a \wedge b$

Здесь a, b, c — произвольные обы. Выражения 'ΛK' и т. д., написанные слева, используются как имена соответствующих постулатов [1]). Заметим, что ΛK и ΛK′ — это схемы аксиом, тогда как ΛS — правило. Так как система квазиупорядочена, то постулируются также правило (τ) и схема аксиом (ρ). Эти постулаты можно кратко резюмировать, говоря, что $a \wedge b$ является точной нижней гранью a и b относительно $\leqslant$ как квазиупорядочения; $a \wedge b$ является нижней гранью в силу ΛK и ΛK′ и точной нижней гранью в силу ΛS.

Теорема 1. *В любой полуструктуре для произвольных обов* a, b *имеют место соотношения*:

ΛW	$a \leqslant a \wedge a$
ΛC	$a \wedge b \leqslant b \wedge a$
ΛB	$a \leqslant b \rightarrow c \wedge a \leqslant c \wedge b$
ΛB′	$a \leqslant b \rightarrow a \wedge c \leqslant b \wedge c$

[1]) Эти имена предлагаются по аналогии с комбинаторами, обозначаемыми соответствующими буквами в разд. 3D5. Однако эти аналогии здесь на самом деле не при чем. Имена можно взять по произволу; конечно, предложенные здесь имена не хуже любых других.

Обратно, если $\mathfrak{S}$ *— реляционная система с отношением* $\leqslant$ *и двуместной операцией* $\wedge$, *такими, что удовлетворяются* (τ), ΛK, ΛC, ΛW *и либо* ΛB, *либо* ΛB′, *то* $\mathfrak{S}$ *— полуструктура.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{S}$ — полуструктура с базисным отношением $\leqslant$ и операцией $\wedge$. Тогда в силу (ρ)

$$a \leqslant a$$

Следовательно, по ΛS, положив b и c равными a, получим

$$a \leqslant a \wedge a$$

т. е. ΛW. Далее мы имеем

$$\begin{aligned} a \wedge b &\leqslant b && \text{по ΛK′} \\ a \wedge b &\leqslant a && \text{по ΛK} \\ a \wedge b &\leqslant b \wedge a && \text{по ΛS} \end{aligned}$$

так что мы имеем ΛC. Чтобы доказать ΛB, предположим, что истинна посылка, т. е.

$$a \leqslant b$$

Требуемое заключение следует в силу ΛS из

$$c \wedge a \leqslant c \qquad c \wedge a \leqslant b$$

Первая из них получается из ΛK, а вторая — из

$$\begin{aligned} c \wedge a &\leqslant a && \text{по ΛK′} \\ &\leqslant b && \text{по предположению} \end{aligned}$$

Итак, имеет место ΛB. Точно так же доказывается ΛB′; мы можем также заметить, что при наличии (τ) и ΛC любое из условий ΛB, ΛB′ влечет другое.

Обратно, предположим, что для $\mathfrak{S}$ имеют место (τ), ΛK, ΛC, ΛW и либо ΛB, либо ΛB′. Тогда

$$\begin{aligned} a &\leqslant a \wedge a && \text{по ΛW} \\ &\leqslant a && \text{по ΛK} \end{aligned}$$

так что имеет место (ρ). Постулат ΛK имеет место по гипотезе. Далее получаем

$$\begin{aligned} a \wedge b &\leqslant b \wedge a && \text{по ΛC} \\ &\leqslant b && \text{по ΛK} \end{aligned}$$

так что справедливо ΛK′. Остается доказать ΛS. Чтобы сделать это, мы заметим сначала, что, согласно сделанному в предыдущем абзаце замечанию, мы имеем как ΛB, так и ΛB′. Тогда, предполагая истинными посылки ΛS, т. е.

$$c \leqslant a \qquad c \leqslant b$$

мы получим

$$\begin{aligned} c &\leqslant c \wedge c && \text{по ΛW} \\ &\leqslant a \wedge c && \text{по первой посылке и ΛB′} \\ &\leqslant a \wedge b && \text{по второй посылке и ΛB} \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство.

Заметим, что ΛB и ΛB′ вместе дают свойство (л) разд. 3B3. Поэтому мы вправе распространить на полуструктуры теорему о замене.

Теорема 2. *Для того чтобы*

$$a \leqslant b \tag{1}$$

имело место в общей полуструктуре, необходимо и достаточно, чтобы каждый атом, входящий в качестве компоненты в b, *входил также по крайней мере один раз в качестве компоненты в* a.

Доказательство. Необходимость условия доказывается дедуктивной индукцией. Действительно, каждая аксиома (т. е. каждый частный случай (ρ), ΛK или ΛK′) обладает указанным в теореме свойством и каждое из правил (τ) и ΛS ведет от посылок, обладающих этим свойством, к заключению, обладающему этим свойством.

Поэтому остается лишь доказать достаточность. Мы предположим, что условие выполнено, и покажем, что тогда имеет место (1).

Предположим сначала, что b — атом. Тогда он является компонентой a и, следовательно, имеется композиция (разд. 3B1) от b к a. Пусть шаги этой композиции будут $a_0, \ldots, a_n$, где $a_0 \equiv b$, $a_n \equiv a$. В силу (ρ) $a_0 \leqslant b$, и, если $a_k \leqslant b$, то $a_{k+1} \leqslant b$ по ΛK или ΛK′. Следовательно, в силу индукции по k это верно для всех k и, значит, для $k = n$.

Это рассуждение показывает, что

$$a \leqslant c$$

имеет место для каждого атома c, являющегося компонентой b. В силу структурной индукции и ΛS оно имеет место для любой компоненты и, следовательно, для самого b. Это завершает доказательство.

Следствие 2.1. *Операция полуструктуры ассоциативна, т. е.*

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

справедливо для всех обов a, b, c.

Иногда полуструктуру бывает удобно рассматривать как эквациональную систему. К этому случаю относится следующая теорема.

Теорема 3. *Если равенство определяется в полуструктуре посредством*

$$a = b \rightleftarrows a \leqslant b \,\&\, b \leqslant a \qquad (2)$$

то равенство — это такая монотонная эквивалентность, что для всех обов a, b, c

(i) $$a \wedge a = a$$

(ii) $$a \wedge b = b \wedge a$$

(iii) $$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

и

(iv) $$a \leqslant b \rightleftarrows a = a \wedge b$$

Обратно, если $\mathfrak{S}$ *— алгебра с операцией* $\wedge$ *и базисным отношением* $=$, *удовлетворяющими* (σ), (τ), (π) *и* (i), (ii), (iii), *то* $\mathfrak{S}$ *— полуструктура с отношением, определенным посредством* (iv), *в качестве базисного отношения; более того, справедливо* (2).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — полуструктура, и пусть $=$ определено посредством (2). Тогда (i), (ii), (iii) справедливы по теореме 2. Что касается (iv), то имеем

$$\begin{aligned} a \leqslant b &\rightarrow a \leqslant a \,\&\, a \leqslant b && \text{по } (\rho) \\ &\rightarrow a \leqslant a \wedge b && \text{по } \Lambda S \\ &\rightarrow a = a \wedge b && \text{по } \Lambda K \\ &\rightarrow a \leqslant a \wedge b && \text{по } (2) \\ &\rightarrow a \leqslant b && \text{по } \Lambda K' \end{aligned}$$

Монотонность $=$ следует из монотонности $\leqslant$. Поэтому $\mathfrak{S}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Обратно, пусть $\mathfrak{S}$ — эквациональная система, удовлетворяющая условию второй части теоремы. Тогда новое отношение, определенное посредством (iv), рефлексивно в силу (i); оно транзитивно, так как

$$a = a \wedge b \,\&\, b = b \wedge c \rightarrow a = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$$

Оно обладает свойствами ΛK, ΛK′, так как

$$a \wedge b = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge b) \wedge a$$
$$a \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = (a \wedge b) \wedge b$$

Оно удовлетворяет ΛS, так как

$$c = c \wedge a \,\&\, c = c \wedge b \rightarrow c = c \wedge b = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge (a \wedge b)$$

Наконец, мы имеем (2), так как

$$a = a \wedge b \,\&\, b = b \wedge a \rightarrow a = a \wedge b = b \wedge a = b$$

и

$$a = b \rightarrow a = a \wedge a = a \wedge b \,\&\, b = b \wedge b = b \wedge a$$

Это завершает доказательство.

2. Структуры вообще. *Структура* — это частично упорядоченная алгебра с двумя операциями $\wedge$ и $\vee$, такими, что справедливы ΛK, ΛK′ и ΛS, а также постулаты

VK $$a \leqslant a \vee b$$

VK′ $$b \leqslant a \vee b$$

VS $$a \leqslant c \,\&\, b \leqslant c \rightarrow a \vee b \leqslant c$$

Другими словами, структура — это алгебра, являющаяся полуструктурой как по отношению к $\leqslant$ и $\wedge$, так и по отношению к $\geqslant$ (обратному для $\leqslant$) и $\vee$. Поэтому для каждой пары a, b существует точная нижняя грань $a \wedge b$ и точная верхняя грань $a \vee b$.

Все примеры 1°—7° в разд. A2 являются структурами; примеры на рис. 2, a — f также являются структурами, но примеры на рис. 2, g и h не являются структурами, потому что здесь нет частичного упорядочения.

Следующая теорема, называемая *принципом двойственности* (или *дуальности*), получается дедуктивной индукцией и рассмотрением постулатов.

Теорема 4. *Из любой теоремы, относящейся к структуре, получается новая теорема, если поменять местами* $\leqslant$ *и* $\geqslant$, *а также* $\wedge$ *и* $\vee$.

Таким образом, для структур справедливы теоремы, двойственные теоремам разд. 1. Теоремы, двойственные ΛB, ΛB′, ΛC, ΛW, будут называться VB, VB′, VC, VW соответственно.

Особый интерес вызывает способ задания структуры посредством равенств. Постулаты-равенства, фигурирующие в следующей теореме, взяты у Биркгофа [LTh].

Теорема 5. *В структуре с равенством, определенным посредством* (2), *отношения*

L1 $$a \wedge a = a \qquad a \vee a = a$$

L2 $$a \wedge b = b \wedge a \qquad a \vee b = b \vee a$$

L3 $$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

L4 $$a \wedge (a \vee b) = a \qquad a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a = a \wedge b \quad \rightleftarrows \quad b = a \vee b \qquad (3)$$

справедливы для всех обов; *далее, любой член эквивалентности* (3) *эквивалентен* $a \leqslant b$. *Обратно, если в алгебре с операциями* $\wedge$, $\vee$ *и монотонным равенством справедливы* L2, L3 *и либо* L4, *либо* L1 *и* (3), *и если любая из частей* (3) *взята в качестве определения* $a \leqslant b$, *то эта алгебра является структурой относительно* $\leqslant$, $\wedge$ *и* $\vee$, *причем* (2) *имеет место как эквивалентность.*

Доказательство. L1 — L3 справедливы в структуре по теореме 3 и двойственной к ней, а по теореме 3 $a \leqslant b$ эквивалентно левой части (3). Следующее рассуждение показывает, что левая часть L4 также справедлива:

$$\begin{aligned} a \wedge (a \vee b) &\leqslant a && \text{по } \Lambda K && (4)\\ a &\leqslant a && \text{по } (\rho)\\ a &\leqslant a \vee b && \text{по } VK\\ a &\leqslant a \wedge (a \vee b) && \text{по } \Lambda S && (5) \end{aligned}$$

Из (4) и (5) по (2) мы получаем левую часть L4. Правая часть L4 и (3) получаются в силу двойственности.

Затем мы покажем, что в системе с операциями $\vee$, $\wedge$ и монотонным равенством L1 и (3) являются следствиями L2, L3 и L4. Ввиду двойственности (в сочетании с L2) достаточно доказать левую часть L1 и импликацию справа налево в (3). Это можно сделать так:

$$\begin{aligned} a \wedge a &= a \wedge (a \vee (a \wedge b)) && \text{по L4, ТЗ}\\ &= a && \text{по L4} \end{aligned}$$

что дает L1. Допуская $a \vee b = b$, имеем

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (a \vee b) && \text{по L4}\\ &= a \wedge b && \text{по предположению} \end{aligned}$$

что дает (3).

Наконец, мы покажем, что эквациональная система, удовлетворяющая L1—L3 и (3), является структурой, для которой (2) — верная эквивалентность. Действительно, по теореме 3, где $\leqslant$ определяется левой частью (3), мы имеем полуструктуру относительно $\leqslant$ и $\wedge$; точно так же если $\geqslant$ определено посредством

$$a \geqslant b \rightleftarrows a = a \vee b$$

то мы имеем полуструктуру относительно $\geqslant$ и $\vee$. Так как эти отношения $\leqslant$ и $\geqslant$ обратны друг другу ввиду (3), то мы имеем структуру. Это завершает доказательство.

Законы L1—L4 называются соответственно *законами идемпотентности*, *законами коммутативности*, *законами ассоциативности* и *законами поглощения.*

Следующая теорема касается отношений дистрибутивности, имеющих место в каждой структуре.

Теорема 6. *Для всех обов* a, b, c *в любой структуре*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c) \qquad (6)$$

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad (7)$$

Доказательство. Так как (6) и (7) двойственны друг другу, то достаточно доказать (6). Это делается так:

$$\begin{aligned} a \wedge b &\leqslant a \wedge (b \vee c) && \text{по VK, ТЗ}\\ a \wedge c &\leqslant a \wedge (b \vee c) && \text{по VK', ТЗ} \end{aligned}$$

Отсюда по VS следует (6). Это завершает доказательство.

3. Дистрибутивные структуры. Отношения (6) и (7) для общей структуры обратить нельзя. Например, в интерпретации 6° b разд. A2, если b и c — точки и a — точка на $b \vee c$ (т. е. на прямой bc), отличная от b и c, то $a \wedge (b \vee c)$ — это точка a, тогда как $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ пусто. Эти обращения неверны также в интерпретации 6° c разд. A2 и на рис. 2, d и e.

Определение. *Дистрибутивная структура* — это структура, в которой справедливы обращения (6) и (7) и, следовательно,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad (8)$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c) \qquad (9)$$

Теорема 7. *Для того чтобы структура* L *была дистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a \wedge (b \vee c) \leqslant (a \wedge b) \vee c \qquad (10)$$

выполнялось для всех обов a, b, c *из* L.

Доказательство. Предположим, что в структуре L выполняется (8). Тогда

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &\leqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && \text{по (8)}\\ &\leqslant (a \wedge b) \vee c && \text{по } \Lambda K', \text{ ТЗ} \end{aligned}$$

Обратно, если выполняется (10), то

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &\leqslant a && \text{по } \Lambda K\\ a \wedge (b \vee c) &\leqslant a \wedge ((a \wedge b) \vee c) && \text{по (10) и } \Lambda S\\ &\leqslant a \wedge (c \vee (a \wedge b)) && \text{по VC, ТЗ}\\ &\leqslant (a \wedge c) \vee (a \wedge b) && \text{по (10)}\\ &\leqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && \text{по VC} \end{aligned}$$

Итак, (8) и (10) выводимы друг из друга.

Далее заметим, что (8) и (9) двойственны друг другу. С другой стороны, двойственным для (10) будет

$$(a \vee b) \wedge c \leqslant a \vee (b \wedge c)$$

В силу АС, VC (и, конечно, ТЗ) это эквивалентно

$$c \wedge (b \vee a) \leqslant (c \wedge b) \vee a$$

Последнее получается из (10), если поменять ролями a и c. Так как 'a' и 'c' — U-переменные для произвольных обов, то это показывает, что (10) самодвойственно. Тогда рассуждение, двойственное рассуждению в предыдущем абзаце, показывает, что (10) эквивалентно (9).

Поэтому если выполняется (10), то выполняются (8) и (9), а если выполняется любое из (8) и (9) — и тем более если они выполняются оба, — то выполняется (10), что и требовалось доказать.

Следствие 7.1. *Любое из соотношений* (8) *и* (9) *влечет другое.*

В дистрибутивной структуре мы можем обращаться с операциями $\wedge$ и $\vee$ в точности так же, как со сложением и умножением в обычной алгебре; различия заключаются только в том, что a) мы можем в качестве сложения брать любую из операций, а другую — в качестве умножения и b) вследствие законов идемпотентности нам не требуются показатели степени или числовые коэффициенты. Следовательно, можно доказать, что каждый об равен обу, являющемуся произведением сумм атомов, а также обу, являющемуся суммой произведений атомов, и любая из этих "нормальных форм" по существу единственна.

Отсюда легко получить разрешающую процедуру для общей дистрибутивной структуры. Пусть

$$a \leqslant b \tag{11}$$

— данное элементарное утверждение. Пусть

$$a = a_1 \vee a_2 \ldots \vee a_m$$
$$b = b_1 \wedge b_2 \ldots \wedge b_n$$

где каждое a_i является произведением атомов, каждое b_j — суммой атомов, а a и b получаются посредством выполнения действий так, как указано в предыдущем абзаце. Тогда для выполнения (11) необходимо и достаточно, чтобы

$$a_i \leqslant b_j \tag{12}$$

выполнялось для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Теперь каждое из утверждений (12) имеет вид

$$u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge u_p \leqslant v_1 \vee v_2 \ldots \vee v_q \tag{13}$$

где $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ — атомы. Достаточным условием выполнения (13) является то, что некоторый атом входит в обе его части [1]). То, что это условие также необходимо, можно показать, рассматривая оценки над кольцом, состоящим из 0 и 1. Под этим мы понимаем в соответствии с разд. 2С5 оценки, образованные путем произвольного распределения значений 0 и 1 для формальных переменных (e_1, e_2, . . .) и интерпретации $\wedge$ как произведения и $\vee$ как максимума [2]). Тогда $\leqslant$ можно интерпретировать как такой предикат, что (11) истинно для данной оценки всегда, когда a есть 0 или b есть 1 (или и то и другое), и ложно, когда a есть 1 и b есть 0. Тогда с помощью дедуктивной индукции получается, что интерпретант каждого доказуемого утверждения (11) истинен для любой оценки, тогда как если нет такой переменной, которая входит в обе части (11), то (11) можно сделать ложным, если придать всем переменным в левой части значение 1, а всем переменным в правой части — значение 0. Этим рассуждением доказана следующая

Теорема 8. *Общая дистрибутивная структура разрешима.*

Хотя дистрибутивные структуры являются очень специальным видом структур и в современной алгебре (и в математике вообще) есть множество примеров структур, не являющихся дистрибутивными, большинство структур, встречающихся в логике, дистрибутивны (причины мы изложим позднее). Уместно поэтому рассмотреть еще несколько их свойств. Следующие теорема и следствие устанавливают одно из наиболее интересных простейших свойств.

Теорема 9. *Для того чтобы структура L была дистрибутивна, необходимо и достаточно, чтобы для всех обов a, b, c из L*

$$a \wedge b \leqslant c \,\&\, a \leqslant b \vee c \rightarrow a \leqslant c \tag{14}$$

Доказательство необходимости. Предположим, что (10) выполняется как схема и что для конкретных a, b, c имеют

---

[1]) Это можно показать в силу (ρ), АК, АК′, VK, VK′, (л).

[2]) Вот явно выписанные таблицы для $\wedge$, $\vee$ и $\leqslant$ соответственно:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\leqslant$	0	1
0	T	T
1	F	T

место посылки (14). Тогда

$$\begin{aligned} a &\leqslant a \wedge (b \vee c) && \text{по AW, Гп, ТЗ} \\ &\leqslant (a \wedge b) \vee c && \text{по (10)} \\ &\leqslant c && \text{по Гп, ТЗ, VW} \end{aligned}$$

Доказательство достаточности. Предположим, что (14) выполняется как схема. Пусть

$$p \equiv a \wedge (b \vee c) \qquad q \equiv (a \wedge b) \vee c$$

Тогда

$$p \wedge b = a \wedge (b \vee c) \wedge b = a \wedge b \leqslant q$$
$$b \vee q = b \vee (a \wedge b) \vee c = b \vee c \geqslant p$$

Итак,

$$p \wedge b \leqslant q \,\&\, p \leqslant b \vee q \tag{15}$$

Следовательно, в силу (14) мы имеем

$$p \leqslant q$$

Это совпадает с (10), что и требовалось доказать.

Следствие 9.1. *Для того чтобы L была дистрибутивна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a \wedge c \leqslant b \wedge c \,\&\, a \vee c \leqslant b \vee c \longrightarrow a \leqslant b \tag{16}$$

Доказательство. Из посылок (16) в силу ΛK, VK, VC следуют посылки (14) с переменой ролей b и c; обратное следует в силу (ρ), ΛS, VS.

Следствие 9.2. *В любой дистрибутивной структуре*

$$a \wedge c = b \wedge c \,\&\, a \vee c = b \vee c \longrightarrow a = b \tag{17}$$

Доказательство. Нужно только применить следствие 9.1 дважды: один раз с предикатом $\leqslant$, а другой — с $\geqslant$.

Некоторые другие свойства дистрибутивных структур содержатся в упражнениях.

В приложениях математики очень важен класс структур, в которых (10) выполняется в предположении $c \leqslant a$. Такие структуры называются *модулярными структурами*. Например, структура линейных пространств (интерпретация 6° разд. 2) модулярна, такова же структура нормальных подгрупп группы; в то же время, структура, изображенная на рис. 2, *d*, будет немодулярной. Примерно такого же рода структуры нередко встречаются в исследованиях по абстрактной линейной зависимости. Были сделаны различные предложения о использовании модулярных структур в математической логике, особенно в связи с квантовой механикой. Однако такие предложения еще не дали результатов. С точки зрения логики модулярные и другие недистрибутивные структуры еще не приобрели такого значения, которое они имеют для математики в целом.

4. Особые элементы. Займемся теперь обами 0 и 1, такими, что

$$0 \leqslant a \qquad a \leqslant 1 \tag{18}$$

выполняются соответственно для всех обов a. Об 0, соответствующий левой части (18), будем называть *нулевым элементом*; об 1, соответствующий правой части (18), — *единичным элементом*.

Из (18) следует, что понятия нулевого и единичного элементов двойственны друг другу. В следующей теореме утверждения, приведенные в отдельных столбцах, справедливы, если постулируется соответствующая половина (18).

Теорема 10. *Любые два нулевых элемента единичных элемента равны. Далее если* (18) *выполняется в полуструктуре, то*

$$a \wedge 0 = 0 \qquad a \wedge 1 = a \tag{19}$$

выполняется для всех обов a; если (18) *выполняется в структуре, то также*

$$a \vee 0 = a \qquad a \vee 1 = 1 \tag{20}$$

Доказательство. Доказательство единственности получается сразу из (18); доказательство (19) следует в силу (18) и части (iv) теоремы 3, а (20) следует из (19) в силу двойственности.

Упражнения

1. Дать полное формальное доказательство следующих элементарных теорем для полуструктур:

(*a*) $e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) \leqslant e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1)$

(*b*) $e_1 \wedge e_2 \leqslant (e_2 \wedge e_1) \wedge e_2$

(*c*) $e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) \leqslant e_2 \wedge e_1$

2. Показать, что схемы (ii) и (iii) теоремы 3 эквивалентны одной схеме

$$(a \wedge b) \wedge c = (b \wedge c) \wedge a$$

(Бирн [TBF]; Дилуорт [ARL].)

3. Частично упорядоченное множество называется цепью, если для любых a, b либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$. Показать, что цепь всегда является дистрибутивной структурой.

4. Показать, что алгебра из примера 6° *a* разд. A2 является дистрибутивной структурой (см. C5 ниже).

5. Показать, что алгебра из примера 6° *b* разд. A2 является модулярной структурой.

6. Показать, что алгебра из примера 6° *c* разд. A2 является немодулярной структурой.

7. Показать, что следующие формулы являются схемами элементарных теорем для общих структур:

(*a*) $$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leqslant (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

(*b*) $$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

8. Показать, что, для того чтобы структура была дистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \leqslant (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$$

9. Построить марковский алгорифм для сведе́ния любого оба общей дистрибутивной структуры к сумме произведений атомов.

10. Показать, что каждая немодулярная структура содержит пятиэлементную немодулярную подструктуру того же вида, как на рис. 2,*d*.

11. Построить структурную диаграмму для свободной модулярной структуры, порожденной e_1, e_2, e_3. Показать, что эта структура содержит 28 элементов и 5 из них образуют подструктуру вида рис. 2,*e*.

12. Доказать обращение следствия 9.2 (использовать упражнение **11**).

C. СКОЛЕМОВСКИЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим теперь структуры, в которых кроме операций $\wedge$ и $\vee$ имеется третья операция, обозначаемая инфиксом '$\supset$', которую мы будем называть *пликацией*[1]). Эта операция обладает такими свойствами, что в пропозициональной интерпретации, где a и b представляют собой высказывания — точнее, обы, которым некоторым образом сопоставлены определенные высказывания A и B, — $a \supset b$ является обом, которому в той же интерпретации сопоставлено высказывание, образованное из A и B посредством условной связки 'если $-_1$, то $-_2$'. Эта интерпретация обосновывает постулаты P_1 и P_2, выбранные в разд. 1. Начиная с этого места, мы будем изучать следствия этих постулатов и свойства структуры, называемой (*им*)*пликативной структурой*[1]), образованной путем их присоединения. Мы, в частности, обнаружим, что любая такая

[1]) См. примечание на стр. 244.— *Прим. ред.*

структура обязательно дистрибутивна; что, обратно, любая конечная дистрибутивная структура (и любая дистрибутивная полная структура) (им)пликативна; что импликативная структура имеет ряд топологических интерпретаций и что ряд свойств, обычно связываемых с классическим понятием следования (implication), не выполняется для таких структур.

Мы изучим также двойственную ситуацию. В этом случае структура будет названа субтрактивной структурой. Термин '*сколемовская структура*' представляется мне наиболее подходящим для обозначения структуры, являющейся либо импликативной, либо субтрактивной [1]). Сколемовские структуры, которые не удовлетворяют иным постулатам, кроме приведенных в данном разделе, называются *абсолютными* — в отличие от "классических" сколемовских структур, рассматриваемых в разд. D (мотивы выбора терминов станут ясными в гл. 5).

В разд. 1 мы займемся постулатами P_1 и P_2 и их обоснованием; в разд. 2 изучается их присоединение к полуструктуре; в разд. 3 — их присоединение к структуре, что дает импликативную структуру. В разд. 4 будет изучена двойственная ситуация. Наконец, вопросы, связанные с интерпретациями, будут рассмотрены одновременно для обоих видов сколемовских структур в разд. 5.

Начиная с данного места, будет удобно опускать инфикс '$\wedge$' и обозначать операцию умножения, просто приписывая сомножители друг к другу. В рассмотрениях, связанных с интерпретацией, мы будем предполагать, что $\wedge$ является конъюнкцией, а сумма $\vee$ — дизъюнкцией в смысле исчисления высказываний.

1. Постулаты для пликации. Если пликация должна быть формализацией в указанном смысле для условной связки, то мы должны для данной операции постулировать аналог характерного свойства этой связки, а именно, правило modus ponens. Такой аналог дается постулатом

P_1 $$a(a \supset b) \leqslant b$$

В соответствии с этим мы выберем P_1 в качестве одного из постулатов для импликативной структуры.

Теперь P_1 говорит, что $a \supset b$ является решением неравенства

$$ax \leqslant b \qquad (1)$$

относительно x. Может быть много решений (1); одним из них является само b; любое x, такое, что $x \leqslant b$, также является решением. Множество всех решений является концептуальным классом X, таким, что

$$y \text{ принадлежит } X \,\&\, x \leqslant y \longrightarrow x \text{ принадлежит } X \qquad (2)$$

[1]) О мотивировке выбора термина см. разд. S2.

Такой класс мы назовем *идеалом*[1]). Идеалы мы уже встречали раньше. Действительно, множество всех x, таких, что

$$x \leqslant a \,\&\, x \leqslant b$$

является идеалом, и постулаты ΛК, ΛК′ утверждают, что $a \wedge b$ является его членом. В этом случае мы дополнили наши постулаты новым постулатом ΛS, который по существу гласит, что $a \wedge b$ является максимальным элементом идеала. Мы пойдем по такому же пути. Мы выберем в качестве второго постулата для новой операции постулат, утверждающий, что $a \supset b$ должно быть максимальным среди всех решений (1); а именно

P_2 $$ac \leqslant b \rightarrow c \leqslant a \supset b$$

Это просто дает единственность $a \supset b$. Заметим, что P_1 и P_2 вместе дают

$$ac \leqslant b \rightleftarrows c \leqslant a \supset b \tag{3}$$

Пликация является, таким образом, разновидностью обратной операции для умножения. В таком случае она в чем-то подобна делению. Однако при логической интерпретации приходится поменять ролями аргументы по сравнению с обычной алгеброй; поэтому $a \supset b$ аналогично частному от деления b на a, а не a на b. При алгебраической трактовке обозначения более согласуются с обычной традицией. Так, Сколем [UAK] употреблял обозначение b/a, Дилуорт [ARL] писал $b : a$.

2. Импликативные полуструктуры. Постулаты P_1 и P_2 не требуют наличия операций, отличных от умножения. В соответствии с этим имеет смысл определить *импликативную полуструктуру* как систему, образованную присоединением операции пликации, удовлетворяющей P_1 и P_2, к полуструктуре с отношением $\leqslant$ и операцией $\wedge$. Выведем теперь свойства такой системы.

Теорема 1. *В импликативной полуструктуре операция* $\supset$ *антимонотонна относительно своего левого аргумента и монотонна относительно своего правого аргумента. Полуструктура имеет единицу* 1, *такую, что*

$$a \leqslant 1$$

Далее, следующие условия выполняются для всех обов a, b, c:

(i) $$b \leqslant a \supset b$$

(ii) $$a \supset (b \supset c) = ab \supset c = b \supset (a \supset c)$$

(iii) $$a \supset (b \supset c) \leqslant (a \supset b) \supset (a \supset c)$$

(iv) $$a \supset bc = (a \supset b)(a \supset c)$$

(v) $$a = 1 \supset a$$

(vi) $$a \leqslant b \rightleftarrows 1 \leqslant a \supset b$$

[1]) Это обычное определение идеала в частично упорядоченном множестве.

Доказательство левой монотонности. Пусть

$$a \leqslant b \tag{4}$$

Тогда

$$a(b \supset c) \leqslant b(b \supset c) \leqslant c \quad \text{по} \quad \text{ΛB′, } P_1$$

Следовательно,

$$b \supset c \leqslant a \supset c \quad \text{по} \quad P_2$$

что и требовалось доказать.

Доказательство правой монотонности. Снова предполагая (4), получим

$$c(c \supset a) \leqslant a \leqslant b \quad \text{по} \quad P_1$$

Тогда

$$c \supset a \leqslant c \supset b \quad \text{по} \quad P_2$$

что и требовалось доказать.

В силу этих двух свойств мы можем пользоваться ТЗ в применении к импликативным полуструктурам.

Доказательство свойства единицы. Определим

$$1 \equiv e_1 \supset e_1 \tag{5}$$

Тогда, поскольку

$$e_1 a \leqslant e_1 \quad \text{по} \quad \text{ΛK}$$

мы получим $a \leqslant 1$ по P_2, что и требовалось доказать.

Доказательство (i).

$$ab \leqslant b \quad \text{по} \quad \text{ΛK′}$$

Следовательно,

$$b \leqslant a \supset b \quad \text{по} \quad P_2$$

что и требовалось доказать.

Доказательство (ii).

$$a(a \supset (b \supset c)) \leqslant b \supset c \quad \text{по} \quad P_1$$

Следовательно,

$$ab(a \supset (b \supset c)) \leqslant b(b \supset c) \leqslant c \quad \text{по} \quad \text{ТЗ, } P_1$$

Тогда

$$a \supset (b \supset c) \leqslant ab \supset c \quad \text{по} \quad P_2$$

Это доказывает первую половину левого равенства. Обратно,

$$ab(ab \supset c) \leqslant c \quad \text{по} \quad P_1$$

$$a(ab \supset c) \leqslant b \supset c \quad \text{по} \quad P_2$$

$$ab \supset c \leqslant a \supset (b \supset c) \quad \text{по} \quad P_2$$

Это доказывает левое равенство. Правое равенство получится, если поменять ролями a и b и использовать ΛС и ТЗ.

Доказательство (iii). Имеем

$$\begin{aligned} a(a\supset b)(a\supset(b\supset c)) &\leqslant \\ &\leqslant a(a\supset b)\,a(a\supset(b\supset c)) && \text{по } \Lambda W,\ \Lambda C \\ &\leqslant b(b\supset c) && \text{по } P_1,\ ТЗ \\ &\leqslant c && \text{по } P_1 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (a\supset b)(a\supset(b\supset c)) &\leqslant a\supset c && \text{по } P_2 \\ a\supset(b\supset c) &\leqslant (a\supset b)\supset(a\supset c) && \text{по } P_2 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство (iv).

$$\begin{aligned} a\supset bc &\leqslant a\supset b && \text{по } \Lambda K,\ ТЗ \\ a\supset bc &\leqslant a\supset c && \text{по } \Lambda K',\ ТЗ \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a\supset bc\leqslant(a\supset b)(a\supset c) \quad \text{по } \Lambda S$$

Обратно,

$$a(a\supset b)(a\supset c)\leqslant bc \quad \text{по } P_1\,[1]$$

Следовательно,

$$(a\supset b)(a\supset c)\leqslant a\supset bc \quad \text{по } P_2$$

Доказательство (v).

$$a\leqslant 1\supset a \quad \text{по (i)}$$

Обратно,

$$\begin{aligned} 1\supset a = 1(1\supset a) && \text{по теореме B10} \\ \leqslant a && \text{по } P_1 \end{aligned}$$

Доказательство (vi). Пусть

$$a\leqslant b$$

Тогда

$$1a\leqslant b$$

Следовательно,

$$1\leqslant a\supset b \quad \text{по } P_2$$

Обратно, пусть

$$1\leqslant a\supset b$$

[1]) Вместе с ΛW, как в доказательстве (iii).

Тогда

$$1a\leqslant b \quad \text{по } P_1$$

Следовательно,

$$a\leqslant b \quad \text{по теореме B10}$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Следующая теорема показывает, что импликативную полуструктуру можно охарактеризовать схемами аксиом.

Теорема 2. *Пусть L — полуструктура с операцией $\wedge$, и пусть $\supset$ есть двуместная операция в L, монотонная относительно равенства. Тогда, для того чтобы L была импликативной полуструктурой с $\supset$ в качестве пликации, необходимо и достаточно, чтобы имели место* P_1 *и*

(i) $$b\leqslant a\supset ab.$$

(ii) $$a\supset bc\leqslant a\supset b$$

Доказательство необходимости

$$\begin{aligned} a(a\supset b) &\leqslant b && \text{по } P_1 \\ a(a\supset b) &\leqslant a && \text{по } \Lambda K \\ a(a\supset b) &\leqslant ab && \text{по } \Lambda S \\ a\supset b &\leqslant a\supset ab && \text{по } P_2 \\ b &\leqslant a\supset ab && \text{по (i) теоремы 1, } (\tau) \end{aligned}$$

Это доказывает (i). Что касается (ii), то оно немедленно следует из (iv) теоремы 1 и ΛК.

Доказательство достаточности. Достаточно вывести P_2 из (i) и (ii). Пусть

$$ac\leqslant b$$

Тогда по теореме B3

$$ac=acb=b(ac)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c &\leqslant a\supset ac && \text{по (i)} \\ &\leqslant a\supset b(ac) && \text{по ТЗ} \\ &\leqslant a\supset b && \text{по (ii)} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. Импликативные структуры. *Импликативная структура* — это структура с отношением $\leqslant$ и операциями $\wedge$, $\vee$, к которым добавлена операция $\supset$, удовлетворяющая постулатам P_1 и P_2.

Естественно, все свойства, выведенные в разд. 2, имеют место для импликативных структур; в дополнение к ним мы имеем следующее.

Теорема 3. *Импликативная структура дистрибутивна. Далее, для всех обов* a, b, c

$$(a \vee b) \supset c = (a \supset c)(b \supset c) \tag{6}$$

Доказательство дистрибутивного закона (Сколем). Имеем

$ab \leqslant ab \vee ac$	по VK
$b \leqslant a \supset (ab \vee ac)$	по P_2
$c \leqslant a \supset (ab \vee ac)$	аналогично, используя VK′
$b \vee c \leqslant a \supset (ab \vee ac)$	по VS
$a(b \vee c) \leqslant ab \vee ac$	по P_1

что и требовалось доказать.

Доказательство (6). По TS (теорема 1) и AS

$$(a \vee b) \supset c \leqslant (a \supset c)(b \supset c) \tag{7}$$

С другой стороны, используя дистрибутивный закон, получим

$$\begin{aligned}(a \vee b)(a \supset c)(b \supset c) &\leqslant \\ &\leqslant a(a \supset c)(b \supset c) \vee b(a \supset c)(b \supset c) \\ &\leqslant c(b \supset c) \vee c(a \supset c) && \text{по } P_1 \\ &\leqslant c && \text{по AK, VW}\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(a \supset c)(b \supset c) \leqslant (a \vee b) \supset c \qquad \text{по } P_2$$

Отсюда и из (7) получаем (6), что и требовалось доказать.

Поэтому всякая структура, в которой класс всех x, удовлетворяющих (1), имеет наибольший элемент, дистрибутивна. Огромная важность для логики дистрибутивных структур в отличие от других видов структур видна из того, что каждая разумным образом определенная операция, претендующая на формализацию свойств логического следования (в оригинале implication operation.— *Ред.*), должна, как выясняется, удовлетворять P_1 и P_2.

Обратно, если дана какая-то дистрибутивная структура L, то мы можем определить $a \supset b$ как точную верхнюю грань класса всех x, удовлетворяющих (1). Тогда P_2 эквивалентно существованию $a \supset b$. Если, кроме того,

$$a\mathfrak{U}_x\{x \mid B(x)\} \leqslant \mathfrak{U}_x\{ax \mid B(x)\} \tag{8}$$

где $\mathfrak{U}_x\{A(x) \mid B(x)\}$ для любой функции $A(x)$ [1]) и условия $B(x)$ представляет собой наименьшую верхнюю грань всех обов вида $A(x)$ для x, таких, что $B(x)$, то P_1 также будет выполняться. Действительно, если

$$c \equiv \mathfrak{U}_x\{x \mid ax \leqslant b\}$$

то

$$\begin{aligned}ac &\leqslant \mathfrak{U}_x\{ax \mid ax \leqslant b\} \quad \text{по (8)} \\ &\leqslant b\end{aligned}$$

Условие (8) представляет собой обобщенный дистрибутивный закон. Он сводится к обычному дистрибутивному закону в случае, если структура конечна. Следовательно, верна

Теорема 4. *Каждая конечная дистрибутивная структура импликативна, если* $a \supset b$ *определить как сумму всех* x, *удовлетворяющих* (1).

4. Субтрактивные структуры. Рассмотрим ситуацию, двойственную той, которую мы имели в разд. 1—3.

Операция, двойственная пликации, будет разновидностью вычитания. Для ее обозначения мы используем инфикс '—', но аргументы при этом пишутся в порядке, обычном для алгебры, так что $a - b$ двойственно $b \supset a$. Постулатами для этой операции будут

$(-)_1$	$a \leqslant b \vee (a - b)$
$(-)_2$	$a \leqslant b \vee c \rightarrow a - c \leqslant b$

Структура с такой операцией будет называться *субтрактивной*.

Теорема 5. *Субтрактивная структура дистрибутивна и имеет* $e_1 - e_1$ *в качестве нулевого элемента. Операция вычитания монотонна относительно своего левого аргумента и антимонотонна относительно своего правого аргумента. Далее, справедливо следующее*:

(i)	$a - b \leqslant a$
(ii)	$a - (b \vee c) = (a - b) - c = (a - c) - b$
(iii)	$(a - c) - (b - c) \leqslant (a - b) - c$
(iv)	$(a - c) \vee (b - c) = (a \vee b) - c$
(v)	$a = a - 0$
(vi)	$a \leqslant b \rightleftarrows a - b = 0$
(vii)	$a - bc = (a - b) \vee (a - c)$
(viii)	$a = ab \vee (a - b)$

[1]) $A(x)$ здесь является функцией, значения которой представляют собой обы.— *Прим. перев.*

Доказательство. За исключением (viii), все остальное следует в силу двойственности из теорем 1 и 3. Доказательство (viii) следующее:

$$\begin{aligned} a &\leqslant a(b \vee (a-b)) && \text{по } (\rho),\ (-)_1,\ \Lambda S \\ &\leqslant ab \vee (a-b) && \text{по (10) разд. B} \\ &\leqslant a && \text{по } \Lambda K,\ \text{(i)},\ VS \end{aligned}$$

Это завершает доказательство.

Замечание. Двойственное для (viii) теоремы 5 соотношение

$$(a \vee b)(a \supset b) = b \tag{9}$$

верно для импликативной структуры, но не представляет большого интереса, тогда как (viii) постоянно используется в разд. D.

5. Примеры. Рассмотрим некоторые из интерпретированных структур, приведенных в разд. A2, с точки зрения того, являются ли они импликативными, субтрактивными или же и теми и другими. Мы рассмотрим также другие аналогичные примеры.

Интерпретации 1°—3° являются иллюстрациями более сильных систем, которые будут рассматриваться позже. Однако интуитивно можно видеть (формальная проверка, если это понадобится, будет проведена позже), что если a' является дополнением или отрицанием a, то $a' \vee b$ имеет те же свойства, что и $a \supset b$, а ab' — те же свойства, что и $a - b$. Эти структуры являются и импликативными и субтрактивными.

Ссылаясь на интерпретацию 4°, мы можем заметить, что ее можно обобщить на функции, определенные на произвольном множестве или пространстве X со значениями из частично упорядоченного множества Y. Если для двух таких функций f, g мы определим

$$f \leqslant g$$

как сокращение для

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ для всех } x \text{ из } X$$

то получим частично упорядоченное множество, которое обычно обозначается через Y^X. Оно также будет структурой, если Y — структура. Предположим теперь, что Y — линейно упорядоченное множество [1]). Если Y имеет единицу 1, то для данных f и g

[1]) То есть такое, что для любых a и b выполняется по крайней мере одно из соотношений $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.

из Y^X функция h, такая, что

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) \leqslant g(x) \\ g(x) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

будет обладать всеми свойствами, которые требуются от $f \supset g$. С другой стороны, если Y имеет нуль 0, то

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

будет обладать всеми свойствами, которые требуются от $f - g$. Но если в Y нет единицы, то, вообще говоря, $f \supset g$ не будет существовать, ибо значение $h(x)$, такое, что

$$f \wedge h \leqslant g$$

не ограничено сверху, если $f(x) \leqslant g(x)$; точно так же, вообще говоря, не будет существовать $f - g$, если в Y нет нуля.

Этот пример в определенном смысле можно отнести к обобщениям интерпретации 1°. Ведь мы можем интерпретировать f как множество всех пар (x, y), в которых x входит в X, y входит в Y и $y \leqslant f(x)$. Это — обобщение интерпретации 1°, в котором обы являются не всевозможными подмножествами определенного универсального множества, но только особыми подмножествами, образующими "кольцо множеств". Согласно одной теореме Стоуна и Биркгофа, таким образом представима каждая дистрибутивная структура.

Интерпретацию 5° можно рассматривать как обобщение интерпретации 4°. Действительно, пусть

$$a = \Pi p_i^{m_i} \qquad b = \Pi p_i^{n_i}$$

— выражения a и b соответственно в виде произведений степеней простых чисел $p_1, p_2, \ldots$. Тогда a и b находятся в соответствии с определенными функциями Y^X, в которых X — положительные целые числа, а Y — натуральные числа (т. е. целые числа $\geqslant 0$), причем это соответствие взаимно-однозначно; далее, $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $m_i \leqslant n_i$ для всех i (первое '$\leqslant$' означает отношение делимости, а второе — естественное упорядочение натуральных чисел). Здесь, рассуждая, как в интерпретации 4°, мы получаем субтрактивную структуру, в то время как делители фиксированного целого числа образуют структуру, которая и субтрактивна и импликативна.

Пример 6° a приводит к субтрактивной структуре следующим путем. Определим топологическое пространство как систему множеств с операцией замыкания, удовлетворяющей схемам, приве-

денным в описании интерпретации 6° разд. А2, а также следующей схеме:

$$(a \vee b)^* \leqslant a^* \vee b^* \tag{10}$$

В такой системе операция структурного сложения для замкнутых множеств совпадает с их объединением. Если мы теперь определим $a - b$ как $(a \dot{-} b)^*$, где $a \dot{-} b$ — обычная теоретико-множественная разность (т. е. множество точек, содержащихся в a, но не содержащихся в b), то для всех множеств a, b, c, замкнутых или незамкнутых, мы имеем

$$a \leqslant b \vee (a \dot{-} b) \leqslant b \vee (a - b)$$
$$a \leqslant b \vee c \longrightarrow a \dot{-} b \leqslant (b \vee c) \dot{-} b \leqslant c$$
$$\longrightarrow a - b \leqslant c^*$$

Следовательно, если a, b, c — замкнутые множества, то мы имеем $(-)_1$ и $(-)_2$, так что структура замкнутых множеств топологического пространства является субтрактивной структурой.

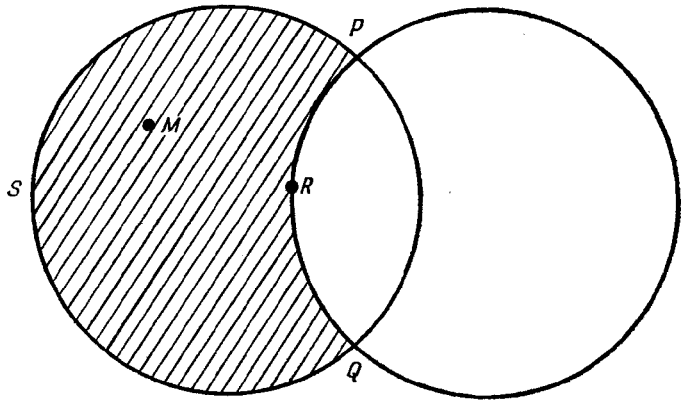

Рис. 3.

Это дает простой интуитивный пример субтрактивной структуры в терминах замкнутых точечных множеств обычной евклидовой плоскости. Например, если a и b — замыкания внутренностей двух пересекающихся кругов на плоскости, то $a - b$ является замыканием той части внутренности a, которая находится вне b (заштрихованная площадь на рис. 3).

В силу двойственности открытые множества в топологическом пространстве [1]) образуют импликативную структуру. Поэтому если a и b (рис. 3) — внутренности двух кругов, то $a \supset b$ является внутренностью открытого множества, образованного объединением b и внешней области круга a.

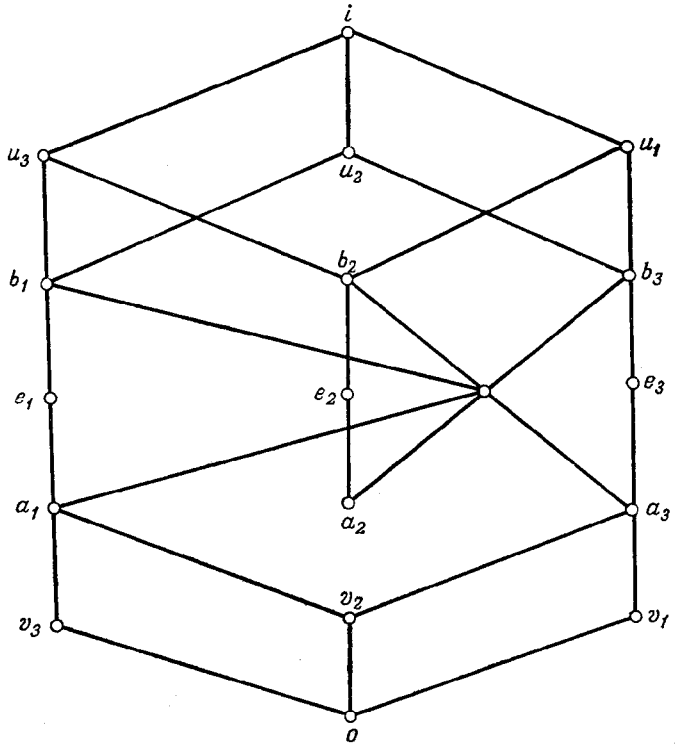

Рис. 4.

Наконец, по теореме 4 и двойственной к ней каждая конечная дистрибутивная структура является примером структуры, которая и субтрактивна и импликативна. Особенно интересна в этой связи "свободная" дистрибутивная структура, порожденная тремя неопределенными элементами (так называемыми *образующими*) e_1, e_2, e_3. Структурная диаграмма для этой структуры приведена на рис. 4.

[1]) В работах по топологии показано, что топологическое пространство является самодвойственным понятием; иными словами, если открытые множества определены подходящим образом, то свойства, двойственные свойствам замкнутых множеств, являются свойствами открытых множеств, и наоборот.

Эти примеры дают нам возможность показать, что некоторые схемы элементарных высказываний не всегда истинны. Рассмотрим, например, схемы

$$b(a-b)=0 \tag{11}$$

$$b\leqslant b-(a-b) \tag{12}$$

и двойственные им

$$a\vee(a\supset b)=1 \tag{13}$$

$$(a\supset b)\supset a\leqslant a \tag{14}$$

На рис. 3 $b(a-b)$ непусто, a состоит из дуги PRQ границы b; следовательно, (11) ложно в этой интерпретации. Опять-таки если бы точка M в a была изолированной точкой b, то она не была бы точкой из $b-(a-b)$, так что (12) также не выполняется. Поэтому (11) и (12) не являются схемами теорем абсолютной субтрактивной структуры, а в силу двойственности (13) и (14) не являются схемами теорем абсолютной импликативной структуры.

Упражнения

1. Показать, что в импликативной полуструктуре выполняются соотношения

(i) $a\leqslant b\longrightarrow c\leqslant a\supset b$

(ii) $a\leqslant a\supset b\rightleftarrows a\leqslant b$

(iii) $a(a\supset b)=ab$

(iv) $a\supset b\leqslant ac\supset bc$

(v) $(a\supset b)(b\supset c)\leqslant(a\supset c)$

(vi) $a\supset ab=a\supset b=a\supset(a\supset b)$

2. Показать, что в импликативной структуре выполняются соотношения

(i) $(a\supset b)\vee(a\supset c)\leqslant a\supset(b\vee c)$

(ii) $(a\supset c)\vee(b\supset c)\leqslant ab\supset c$

(iii) $c\vee(a\supset b)\leqslant(a\vee c)\supset(b\vee c)$

(iv) $(a\vee b)(a\supset b)=b$

(v) $a\vee b\leqslant(a\supset b)\supset b$

(vi) $(a\supset b)(b\supset a)=(a\vee b)\supset ab$

3. Сформулировать утверждения, двойственные утверждениям упражнений 1 и 2, чтобы получить соответствующие теоремы для субтрактивной полуструктуры и структуры.

4. Показать, что, для того чтобы полуструктура с единицей и дополнительной операцией $\supset$ была импликативной полуструктурой с $\supset$ в качестве пликации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два следующих условия:

$$a\leqslant b\rightleftarrows a\supset b=1$$

$$(a\wedge b)\supset c=a\supset(b\supset c)$$

для всех a, b, c. Какова двойственная ситуация для субтрактивной структуры? (Биркгоф [LTh$_1$], стр. 128.[1]))

5. Показать непосредственно, что в субтрактивной структуре постулат $(-)_2$ можно заменить (в предположении монотонности) двумя постулатами:

$$a\leqslant b\longrightarrow a-c\leqslant b-c$$

$$(a\vee b)-b\leqslant a$$

Рассмотреть их отношение к теореме 2.

6. Построить контрпримеры для (13) и (14) в структуре интерпретации 4° разд. A2. ([LLA], стр. 78.)

7. Показать, что следующие утверждения не являются всегда истинными в общей импликативной структуре:

$a\supset(b\vee c)\leqslant(a\supset b)\vee(a\supset c)$ [обращение (ii) упражнения 2]

$(a\vee c)\supset(b\vee c)\leqslant c\vee(a\supset b)$ [обращение (iii)]

Исследовать обращения других схем теорем, установленных в терминах $\leqslant$, а не $=$.

8. Показать, что алгебра с равенством и с монотонными операциями $\wedge$, $\vee$, $\supset$ является импликативной структурой тогда и только тогда, когда удовлетворяются следующие схемы аксиом:

A1 $a\supset a=b\supset b$

A2 $(a\supset b)\wedge b=b$

A3 $a\wedge(a\supset b)=a\wedge b$

A4 $a\supset(b\wedge c)=(a\supset b)\wedge(a\supset c)$

A5 $(a\vee b)\supset c=(a\supset c)\wedge(b\supset c)$

Показать далее, что эти схемы независимы и что A1 — A4 подобным же образом характеризуют импликативную полуструктуру. (Монтейро [AIA]. Усложнений, возникающих у него в связи с ассоциативным законом, можно избежать, используя теорему B2.)

[1]) Стр. 193 русского издания.— *Прим. ред.*

D. КЛАССИЧЕСКИЕ СКОЛЕМОВСКИЕ СТРУКТУРЫ

В предыдущем разделе мы видели, что схемы

$$a \vee (a \supset b) = 1 \tag{1}$$
$$(a \supset b) \supset a \leqslant a \tag{2}$$

не являются схемами элементарных теорем абсолютной импликативной структуры, а двойственные им схемы

$$b(a-b) = 0 \tag{3}$$
$$b \leqslant b-(a-b) \tag{4}$$

не являются схемами теорем абсолютной субтрактивной структуры. Структура, образованная усилением постулатов импликативной структуры так, чтобы выполнялись (1) и (2), будет называться *классической импликативной структурой*; двойственным образом *классическая субтрактивная структура* — это субтрактивная структура, такая, что выполняются (3) и (4).

В этом разделе мы изучим такие структуры. Здесь мы уделим особое внимание скорее субтрактивной, нежели импликативной форме, поскольку нам кажется, что в данный момент именно субтрактивная форма имеет особенно интересные приложения. В разд. 1 мы рассмотрим различные возможные системы постулатов. В разд. 2 будет показано, что классическая субтрактивная структура эквивалентна булеву кольцу, т. е. кольцу (в смысле современной алгебры), в котором умножение идемпотентно. Наконец, в разд. 3 приводится несколько замечаний о свойствах, двойственных приведенным свойствам.

1. Классические субтрактивные структуры. По определению классическая субтрактивная структура — это субтрактивная структура, в которой (3) и (4) являются элементарными теоремами. Эти свойства справедливы в интерпретации через множества (1° разд. A2), если $a - b$ определить как множество тех элементов, которые входят в a, но не входят в b. Мы назовем результат так интерпретированной операции *разностью множеств*. Система множеств, замкнутая относительно объединения, пересечения и разности, называется "полем множеств"; любое такое поле является правильной интерпретацией классической субтрактивной структуры.

Мы начнем с доказательства того, что схемы (3) и (4) эквивалентны друг другу и схеме

$$ab \leqslant a-(a-b) \tag{5}$$

Действительно, если выполняется (4), то

$$\begin{aligned} ab &\leqslant ab-(a-ab) && \text{по (4)} \\ &\leqslant a-(a-b) && \text{по ЛК, ЛК', ТЗ} \end{aligned}$$

где ТЗ справедлива в силу теоремы C5. Поэтому (5) является следствием (4). С другой стороны, если выполняется (5), то

$$\begin{aligned} b(a-b) &\leqslant (a-b)-((a-b)-b) && \text{по (5)} \\ &= (a-b)-(a-b) && \text{по (ii) теоремы C5, VW, ТЗ} \\ &= 0 && \text{по (vi) теоремы C5} \end{aligned}$$

так что (3) является следствием (5). Для того чтобы показать, что (4) является следствием (3), мы заметим, что из (viii) теоремы C5, взяв b в качестве a и $a - b$ в качестве b, мы получаем

$$\begin{aligned} b &\leqslant b(a-b) \vee (b-(a-b)) \\ &\leqslant 0 \vee b-(a-b) && \text{по (3)} \\ &\leqslant b-(a-b) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из наших рассуждений получается следующая

Теорема 1. *Для того чтобы субтрактивная структура была классической, необходимо и достаточно, чтобы любая из схем* (3)—(5) *была схемой теорем.*

Характеристика, которую дает теорема 1, неудобна тем, что она содержит довольно сложное правило $(-)_2$. Представляет интерес отыскать формулировку, основывающуюся только на схемах аксиом. Займемся такими поисками.

Прежде всего схема

$$a-b \leqslant a \tag{6}$$

верна в любой субтрактивной структуре в силу (i) теоремы C5. Далее, правило

$$a \leqslant b \,\&\, ac = 0 \rightarrow a \leqslant b-c \tag{7}$$

верно, если интерпретировать $a - b$ как разность множеств. Мы увидим, что $(-)_2$ выводимо из (3), (6), (7) и $(-)_1$. Действительно, допустим посылку правила $(-)_2$, т. е.

$$a \leqslant b \vee c$$

и положим

$$p \equiv (a-b)-c.$$

Тогда

$$\begin{aligned} pc &\leqslant 0 && \text{по (3)} \\ pb &\leqslant (a-b)\,b \leqslant 0 && \text{по (6), (3)} \end{aligned}$$

Из этого в силу (7) заключаем, что

$$b \leqslant (b \vee c) - p$$
$$c \leqslant (b \vee c) - p$$

Тогда

$$b \vee c \leqslant (b \vee c) - p \quad \text{по VS}$$

Следовательно,

$$p(b \vee c) \leqslant 0 \quad \text{по (3)}$$

С другой стороны, в силу (6) и посылки $(-)_2$

$$p \leqslant (a - b) \leqslant a \leqslant b \vee c$$

Следовательно,

$$p = p(b \vee c) = 0$$

Поэтому по $(-)_1$ имеем

$$a - b \leqslant c \vee p = c$$

т. е. заключение правила $(-)_2$, так что $(-)_2$ установлено.

Теперь заметим, что и (7) и $(-)_1$ являются следствиями равенства

$$ab = abc \vee a(b - c) \tag{8}$$

Действительно, положив в (8) $b \equiv a$, получим

$$a = ac \vee a(a - c)$$
$$\leqslant c \vee (a - c) \quad \text{по ЛК', ТЗ}$$

что дает нам $(-)_1$. Далее, допуская посылки (7), из (8) получаем

$$a = ab = a(b - c)$$

Следовательно,

$$a \leqslant b - c$$

так что выполняется (7).

С другой стороны, мы видим, что (8) верно в любой субтрактивной структуре;

$$ab = a(bc \vee (b - c)) \quad \text{по (viii) теоремы C5}$$
$$= abc \vee a(b - c) \quad \text{по дистрибутивному закону}$$

Суммируя сказанное, мы видим, что имеет место

Теорема 2. *Пусть L — структура с нулевым элементом и дополнительной операцией, обозначаемой инфиксом '—'. Тогда, для того чтобы L была классической субтрактивной структурой,*

необходимо и достаточно, чтобы (3), (6) *и* (8) *были схемами теорем; другим необходимым и достаточным условием является выполнение* $(-)_1$, (3), (6) *и* (7).

Покажем теперь, что следующие формулы являются схемами теорем классической субтрактивной структуры (они будут использованы в разд. 2 в качестве лемм):

$$a(b - c) = ab - ac \tag{9}$$
$$a - (b \vee c) = (a - b)(a - c) \tag{10}$$
$$a - (b - c) = ac \vee (a - b) \tag{11}$$

Доказательство (9). Справа налево рассуждаем так:

$$ab \leqslant a(c \vee (b - c)) \quad \text{по } (-)_1$$
$$\leqslant ac \vee a(b - c) \quad \text{по (8) разд. B}$$

Следовательно,

$$ab - ac \leqslant a(b - c) \quad \text{по } (-)_2$$

Чтобы доказать обратное, положим

$$p \equiv a(b - c)$$

Тогда

$$p \leqslant ab \quad \text{по (6), ТЗ}$$
$$acp \leqslant c(b - c) \quad \text{в силу разд. B}$$
$$\leqslant 0 \quad \text{по (3)}$$

Следовательно,

$$p \leqslant ab - ac \quad \text{по (7)}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство (10). Слева направо имеем

$$a - (b \vee c) \leqslant a - b \quad \text{по VK, ТЗ}$$
$$a - (b \vee c) \leqslant a - c \quad \text{по VK', ТЗ}$$
$$a - (b \vee c) \leqslant (a - b)(a - c) \quad \text{по AS}$$

Чтобы доказать (10) справа налево, положим

$$p \equiv (a - b)(a - c)$$

Тогда

$$p \leqslant a \quad \text{по (6)}$$
$$(b \vee c)p \leqslant bp \vee cp \quad \text{по (8) разд. B}$$
$$\leqslant b(a - b) \vee c(a - c)$$
$$\leqslant 0 \quad \text{по (3)}$$

Отсюда (10) следует в силу (7).

Доказательство (11). Слева направо имеем

$$\begin{aligned} a &\leqslant b \vee (a-b) && \text{по } (-)_1 \\ &\leqslant c \vee (b-c) \vee (a-b) && \text{по } (-)_1, \text{ ТЗ} \\ a-(b-c) &\leqslant c \vee (a-b) && \text{по } (-)_2 \\ a-(b-c) &\leqslant a(c \vee (a-b)) && \text{по (6), AS} \\ &\leqslant ac \vee (a-b) && \text{по (10) разд. B} \end{aligned}$$

Обратно, пусть

$$p \equiv ac \vee (a-b)$$

Тогда

$$\begin{aligned} p &\leqslant a && \text{по AK, (6), VS} \\ p(b-c) &\leqslant ac(b-c) \vee (a-b)(b-c) && \text{по (8) разд. B} \\ &\leqslant c(b-c) \vee (a-b)b && \text{по AK, AK', (6)} \\ &\leqslant 0 && \text{по (3)} \end{aligned}$$

Поэтому (11) следует в силу (7).

Все эти рассмотрения суммируются в следующей теореме.

Теорема 3. *В любой классической субтрактивной структуре схемы* (3)—(6) *и* (8)—(11) *являются схемами элементарных теорем и* (7) *выполняется для всех* a, b, c. *Обратно, всякая субтрактивная структура, в которой выполняется любая из схем* (3)—(5), *является классической субтрактивной структурой; таковой же является всякая дистрибутивная структура с операцией вычитания и нулевым элементом, удовлетворяющая* $(-)_1$ *и обоим условиям* (3) *и* (6) [1].

2. Булевы кольца. Изучим теперь связь между понятиями классической субтрактивной структуры и кольца в смысле современной алгебры.

Определение 1. Кольцо — это алгебра с равенством и с особым элементом 0, в которой имеются две бинарные операции, называемые сложением и умножением и обозначаемые соответственно инфиксом '+' и записью аргументов друг возле друга, и одна одноместная операция, обозначаемая суффиксом '*', причем все операции монотонны относительно равенства, так что

[1]) Условие дистрибутивности было случайно опущено в [LLA], стр. 90, определение 3. См. упражнение 3.

удовлетворяются следующие схемы аксиом:

R1 $a+(b+c)=(a+b)+c$

R2 $a+0=a$

R3 $a+a^*=0$

R4 $a+b=b+a$

R5 $a(bc)=(ab)c$

R6 $a(b+c)=ab+ac$

R7 $(a+b)c=ac+bc$

Определение 2. Булево кольцо — это кольцо, в котором умножение идемпотентно, т. е. для всех обов a

R8 $aa=a$

Мы покажем, что понятия булева кольца и классической субтрактивной структуры эквивалентны. При изложении мы возвратимся к обозначениям разд. B и в формулировке определений используем инфикс '$\wedge$' для обозначения умножения в структуре; но так как умножение в структуре и умножение в кольце совпадают, то нет необходимости проводить это различие повсюду.

Теорема 4. *Пусть* L *— классическая субтрактивная структура с отношением* $\leqslant$, *операцией умножения* $\wedge$, *операцией сложения* $\vee$ *и операций вычитания* $-$. *Пусть операции в кольце определены так:*

(i) $a+b \equiv (a-b) \vee (b-a)$

(ii) $ab \equiv a \wedge b$

(iii) $a^* \equiv a$

Пусть 0 *— нулевой элемент структуры. Тогда по отношению к* 0 *и этим операциям* L *является булевым кольцом.*

Доказательство. Из (ii) и теоремы B2 следует, что удовлетворяются R5 и R8. Далее, R4 [1]) получается в силу VC и (i); аналогично в силу AC и (ii) умножение коммутативно и, в частности, R7 является следствием R6. Монотонность операций в кольце следует из монотонности операций в структуре. Доказательства остальных свойств таковы:

Доказательство R1. В силу (i)

$$a+(b+c)=(a-(b+c)) \vee ((b+c)-a)$$

[1]) В теореме 5 будет доказано, что R4 (а также коммутативность умножения) излишне.

Теперь

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a((b-c) \vee (c-b)) && \text{по (i)} \\ &= (a-(b-c)) \wedge (a-(c-b)) && \text{по (10)} \\ &= (ac \vee (a-b)) \wedge (ab \vee (a-c)) && \text{по (11)} \end{aligned}$$

Перемножая по дистрибутивному закону и замечая, что в силу (3)

$$ab(a-b) = ac(a-c) = 0$$

мы имеем

$$a-(b+c) = abc \vee (a-b)(a-c) \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (b+c)-a &= ((b-c) \vee (c-b))-a && \text{по (i)} \\ &= ((b-c)-a) \vee ((c-b)-a) && \text{по (iv) теоремы C5} \\ &= (b-(a \vee c)) \vee (c-(a \vee b)) && \text{по (ii) теоремы C5} \\ &= (b-a)(b-c) \vee (c-a)(c-b) && \text{по (10)} \end{aligned}$$

Сопоставляя это с (12), имеем

$$a+(b+c) = abc \vee (a-b)(a-c) \vee (b-c)(b-a) \vee (c-a)(c-b) \tag{13}$$

Так как (13) симметрично относительно a, b, c и так как сложение коммутативно, то

$$a+(b+c) = c+(a+b) = (a+b)+c$$

что и требовалось доказать.

Доказательство R2.

$$a+0 = (a-0) \vee (0-a)$$

Теперь

$$a-0 = a \qquad \text{по (v) теоремы C5}$$

и

$$0-a = 0 \qquad \text{по (vi) теоремы C5}$$

Следовательно,

$$a+0 = a \vee 0 = a$$

что и требовалось доказать.

Доказательство R3. В силу (iii), (i), а также (vi) теоремы C5

$$\begin{aligned} a+a^* &= a+a = (a-a) \vee (a-a) \\ &= 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство R6.

$$\begin{aligned} a(b+c) &= a((b-c) \vee (c-b)) \\ &= a(b-c) \vee a(c-b) && \text{по (10) разд. B} \\ &= (ab-ac) \vee (ac-ab) && \text{по (9)} \\ &= ab+ac \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Это завершает доказательство теоремы 4.

Об $a+b$, определенный равенством (1), называют по-разному: *симметрическая разность*, *разделительная сумма*, *дизъюнктивная сумма* и др. В терминах теории множеств $a+b$ — это множество элементов, входящих либо в a, либо в b, но не в a и b вместе. В пропозициональной интерпретации оно представляет разделительное 'или'. Иногда именно $a+b$, а не $a \vee b$, называют *дизъюнкцией* a и b.

Прежде чем доказывать обращение теоремы 4, мы выведем некоторые свойства булева кольца. Первые два из этих свойств являются следствиями лишь R1 — R3 (которые представляют собой схемы аксиом для "группы"); третье следует лишь из R1 — R3 и R6.

Теорема 5. *Для булева кольца* R4 *излишне*; *далее*, *следующие формулы являются схемами элементарных теорем*:

(i) $0+a = a$

(ii) $a^*+a = 0$

(iii) $a0 = 0$

(iv) $ab = ba$

(v) $a^* = a$

(vi) $a+a = 0$

Доказательство. Мы докажем сначала (ii), а затем (i) и (iii), следующим образом:

$$\begin{aligned} a^*+a &= (a^*+a)+(a^*+a^{**}) && \text{по R2, R3} \\ &= a^*+(a+a^*)+a^{**} && \text{по R1} \\ &= a^*+a^{**} && \text{по R3, R2} \\ &= 0 && \text{по R3} \\ 0+a &= (a+a^*)+a && \text{по R3} \\ &= a+(a^*+a) && \text{по R1} \\ &= a && \text{по (ii), R2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a0 &= a0 + ab + (ab)^* && \text{по R2, R3, R1} \\ &= a(0+b) + (ab)^* && \text{по R6} \\ &= ab + (ab)^* && \text{по (i)} \\ &= 0 && \text{по R3} \end{aligned}$$

Далее мы распишем $(a+b)(c+d)$ двумя способами:

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d && \text{по R6} \\ &= ac + bc + ad + bd && \text{по R7} \\ (a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) && \text{по R7} \\ &= ac + ad + bc + bd && \text{по R6} \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения и добавляя $(ac)^*$ слева и $(bd)^*$ справа к обеим частям, получим

$$ad + bc = bc + ad \tag{14}$$

причем общее значение обеих частей будет

$$(ac)^* + (a+b)(c+d) + (bd)^* \tag{15}$$

Все это верно в произвольном кольце. В булевом кольце мы сразу получаем R4 из (14), взяв $c \equiv b$, $d \equiv a$. С другой стороны, если мы возьмем $c \equiv a$, $d \equiv b$, то (15) превращается в

$$a^* + a + b + b^*$$

что равно 0 в силу (ii) и R3, так что, поскольку это совпадает с любой из частей (14),

$$ab + ba = 0 \tag{16}$$

Если мы здесь положим $b \equiv a$, то в силу R7 получим (vi). Теперь, добавляя a^* к обеим частям, получим (v).

Наконец, из (16) получим

$$ab = ab + 0 = ab + ab + ba = 0 + ba = ba \quad \text{по (vi), (i)}$$

Это завершает доказательство теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть L — булево кольцо, в котором структурные операции определяются так:*

(i) $a \vee b = a + b + ab$

(ii) $a \wedge b = ab$

(iii) $a - b = a + ab$

Пусть далее 0 — нуль кольца. По отношению к 0 и так определенным операциям L является классической субтрактивной структурой.

Доказательство. В соответствии с теоремой B5 мы покажем, что выполняются свойства L2 — L4. Что касается левых половин этих постулатов, то L2 истинно в силу (iv) теоремы 5, L3 — в силу R5, а L4 получается так:

$$a \wedge (a \vee b) = a(a + b + ab) = aa + ab + ab = aa = a$$

Правую половину L2 получаем так:

$$\begin{aligned} a \vee b &= a + b + ab \\ &= b + a + ba \quad \text{по теореме 5} \\ &= b \vee a \end{aligned}$$

Что касается правой половины L3, то имеем

$$a \vee (b \vee c) = a \vee (b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$$

Так как полученное выражение симметрично и выполняется L2, то

$$a \vee (b \vee c) = c \vee (a \vee b) = (a \vee b) \vee c$$

Наконец, для правой половины L4 имеем

$$a \vee (a \wedge b) = a \vee ab = a + ab + ab = a$$

Поэтому L является структурой.

Изучим теперь свойства $a - b$. Поскольку

$$\begin{aligned} abc \vee a(b-c) &= abc \vee a(b + bc) && \text{по (iii)} \\ &= abc \vee (ab + abc) && \text{по R6, R5} \\ &= abc + ab + abc + abc + abc && \text{по (i), R6, теореме 5} \\ &= ab && \text{по (vi) теоремы 5} \end{aligned}$$

то имеем (8). Мы получаем также (6), ибо

$$(a-b)a = a(a-b) = a(a+ab) = a + ab = a - b$$

Наконец, мы получаем (3), поскольку

$$b(a-b) = b(a+ab) = ab + ab = 0$$

и 0 является нулем структуры в силу (iii) и (iv) теоремы 5. Вследствие теоремы 2 это завершает доказательство.

Мы показали, что при выполнении условий теорем 4 и 6 нуль структуры и нуль кольца совпадают.

Следующая теорема показывает, между прочим, что результаты преобразования теорем 4 и 6 обратны друг другу в том смысле, что если (i), (ii), (iii) какой-либо из этих теорем принять в качестве определений, то свойства (i), (ii), (iii) другой теоремы оказываются схемами теорем.

Теорема 7. *Пусть L — булево кольцо, являющееся также структурой с умножением кольца в качестве структурного умножения и с нулем кольца в качестве нуля структуры. Тогда L является классической субтрактивной структурой и*

(i) $$a \vee b = a + b + ab$$

(ii) $$a - b = a + ab$$

(iii) $$(a - b) \vee (b - a) = a + b$$

Доказательство (i). Пусть $c \equiv a + b + ab$. Тогда

$$ac = a + ab + ab = a$$

Следовательно, $a \leqslant c$ и точно так же $b \leqslant c$. Отсюда следует, что

$$a \vee b \leqslant c$$

Обратно,

$$\begin{aligned}(a \vee b)c &= (a \vee b)a + (a \vee b)b + (a \vee b)ab \\ &= a + b + ab = c\end{aligned}$$

Поэтому $c \leqslant a \vee b$ и, следовательно, выполняется (i).

Доказательство (ii). Пусть $c \equiv a + ab$. Тогда

$$abc = ab + ab = 0$$

$$ab \vee c = ab + c = a$$

Так как эти равенства также выполняются в силу (3) и (viii) теоремы C5 в случае, если $a - b$ взять в качестве c, то получаем (ii) в силу следствия B9.1.

Доказательство (iii). Используя (ii), имеем

$$\begin{aligned}(a - b) \vee (b - a) &= (a + ab) \vee (b + ab) \\ &= a + ab + b + ab + (a + ab)(b + ab) \\ &= a + b + ab + ab + ab + ab \\ &= a + b\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Это завершает доказательство теоремы 7.

В силу этих теорем классическая субтрактивная структура является булевым кольцом и обратно. В булевом кольце мы производим вычисления, как с обычными полиномами по модулю 2 с идемпотентным умножением.

3. Классические импликативные структуры. Сделаем несколько замечаний о теоремах, двойственных приведенным выше.

Двойственными для свойств (3)—(6) разд. 1 являются соответственно (1), (2),

$$(a \supset b) \supset b \leqslant a \vee b \tag{17}$$

и (i) теоремы C1. Теорема, двойственная теореме 1, очевидно, верна, но мы не будем ее выписывать. Свойство (2) является разновидностью "закона Пирса".

Представляет некоторый интерес построение, двойственное построению разд. 2 [1]). Если мы определим

$$a \backsim b \equiv (a \supset b) \wedge (b \supset a)$$

$$a \vee' b \equiv a \vee b$$

$$a^* \equiv a$$

то получим булево кольцо с $\backsim$ в роли сложения и $\vee'$ (или $\vee$) в роли умножения. В пропозициональной интерпретации $\backsim$ соответствует эквиваленции; в интерпретации через классы $a \backsim b$ состоит из элементов, которые либо содержатся в обоих классах a и b, либо не содержатся ни в одном из них.

Исчисление высказываний, основанное на $\backsim$ как на первоначальной операции, интересовало школу логиков, наиболее известным представителем которой был польский логик Лесьневский и к которой принадлежат также ряд румынских логиков (например, Михайлеску). Этот интерес вызван, вероятно, позицией Лесьневского в отношении определений. Из рассмотрения системы, двойственной булеву кольцу, видно, что для обов, построенных только посредством операции $\backsim$, выполняются следующие свойства:

1. В таком обе термы можно переставлять и сочетать произвольным образом.

2. Для того чтобы было верно $a = 1$, необходимо и достаточно, чтобы каждый атом входил в об четное число раз.

Упражнения

1. Показать, что в булевом кольце

$$(a \vee b) + ab = a + b$$

(Биркгоф [LTh$_2$], стр. 158 [2]), упражнение 3.)

2. Показать, что если в дистрибутивной структуре с 0 выполняется следующее свойство: для всех a и всех $b \leqslant a$ существует такое c, что $bc = 0$ и $b \vee c = a$, то структура является классической субтрактивной структурой (если подходящим образом определить $a - b$). (Биркгоф [LTh$_2$], стр. 155 [3]), упражнение 3.)

[1]) Эти замечания принадлежат Фейсу. (См. [LLA], стр. 95.)

[2]) Стр. 223 русского издания.— *Прим. ред.*

[3]) Стр. 219 русского издания.— *Прим. ред.*

3. Привести пример недистрибутивной структуры, в которой выполняются $(-)_1$, (3) и (6). (Такова конечная проективная геометрия плоскости с семью точками.)

4. В доказательстве теоремы 6 непосредственно показать, не привлекая теорему 2, что выполняются $(-)_1$ и $(-)_2$.

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Исторические и библиографические комментарии. Эта глава представляет собой пересмотренное изложение [LLA], гл. 3 и часть гл. 4.

Вопросы, изложенные в данной главе, подробно рассматриваются в книге Биркгофа [LTh_2]. Энциклопедический характер и сжатый стиль изложения этой книги делают ее неудобной для первоначального ознакомления с указанными вопросами, но в ней содержится обширная информация, в том числе многочисленные ссылки.

Алгебра логики, собственно говоря, началась с работ Буля в 1847 г., хотя ряд вопросов, относящихся к алгебре логики, изучался еще Лейбницем и даже в более ранних работах. Значительные усовершенствования были сделаны У. С. Джевонсом, Ч. С. Пирсом и Э. Шрёдером. Краткий обзор раннего этапа развития алгебры логики см. у Льюиса и Лэнгфорда [SLg], гл. 1, и Уайтхеда [UAl], стр. 115 и след.; более детальное изложение см. у Льюиса [SSL], гл. 1, и Йоргенсена [TFL], гл. 3. Эти работы, а также работы, указанные в разд. 1S3, содержат цитаты из более ранних работ.

Та форма алгебры логики, в которой она разрабатывалась в XIX в., получила свое завершение в работе Шрёдера [VAL]. В этой книге сначала были введены позитивные операции, так что практически весь разд. В настоящей главы содержится там (а фактически еще и в работе Пирса [ALg_1]). Книга Шрёдера [VAL], однако, крайне многословна. Работа Кутюра [ALg] отличается прекрасным сжатым изложением и, на мой взгляд, является лучшим источником информации об "алгебре Буля — Шрёдера". Она до сих пор является лучшей книгой для первоначального изучения вопросов, затрагиваемых в разд. В.

После Шрёдера алгебраический подход к логике отходит на задний план. Усовершенствования алгебры Буля — Шрёдера продолжаются, например у Уайтхеда [UAl] и Хантингтона [SIP]. Но эти усовершенствования в основном связаны с отрицанием и относятся, собственно говоря, к теме гл. 6. Поэтому мы пройдем пока мимо них и обратимся к структурам более общего характера.

Первые такие алгебры были открыты, кажется, самим Шрёдером. Вопрос о независимости дистрибутивного закона заинтересовал его, и в приложениях (*Anhänge*) 4 и 5 к своей книге [VAL] он привел, по-видимому, первые примеры недистрибутивных структур. Были найдены другие примеры структур в математике, в особенности Дедекиндом, Нётер, Сколемом, Фрицем Клейном, Беннетом, Менгером и Биркгофом (ссылки см. у Биркгофа [LTh], в начале гл. 2; здесь же следует упомянуть работу Сколема [VLt], которая дает изложение его статьи, опубликованной в 1913 г. на норвежском языке и цитированной Биркгофом). Отсюда развилось общее понятие структуры в том виде, как оно изложено в разд. А и В.

В качестве общих работ по вопросам, рассмотренным в разд. А и В, можно указать, кроме книги Биркгофа [LTh], также работы Гливенко [TGS], Дюбрей-Жакотена, Лезье и Круазо [LTT], Гермеса [EVT] и более старую энциклопедическую статью Гермеса и Кёте [TVr]. В них содержатся вопросы, далеко выходящие за рамки данной книги; самая короткая и простая из этих работ — книга Гливенко [TGS] — более чем достаточна для поставленных здесь целей. Более краткую и элементарную трактовку см., например, у Беннета [SSO].

Вот и все о разд. А и В вообще. Теперь приведем несколько комментариев, относящихся к специальным вопросам, рассматриваемым в этих двух разделах.

Примеры структур в дополнение к приведенным в разд. А2 содержатся у Биркгофа ([LTh], начало гл. 2), Беннета [SSO] и Гливенко ([TGS], гл. 3). Мысль о том, что стоит сформулировать и доказать теорему В1, возникла под влиянием следующего обстоятельства. В книге Уайтхеда и Рассела [PMt] теория вывода представлена в виде ассерторической системы с первоначальными операциями, обозначаемыми одноместным префиксом '$\neg$' (фактически они пользовались знаком '$\sim$') и двуместным инфиксом '$\vee$'; двуместный инфикс '$\supset$' определяется так:

$$p \supset q \equiv \neg p \vee q$$

В качестве схем аксиом (в действительности—аксиом с молчаливо предполагаемым правилом подстановки) авторы выбирают

Taut	$\vdash (p \vee p) \supset p$
Simp	$\vdash p \supset (p \vee q)$
Perm	$\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$
Assoc	$\vdash (p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$
Sum	$\vdash (q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$

Единственное правило—modus ponens:

$$p,\ p \supset q \vdash q$$

Теперь предположим, что мы ввели определяющие схемы:

$$p \leqslant q \longrightarrow \vdash q \supset p \qquad p \wedge q \equiv p \vee q$$

Тогда Taut, Simp, Perm являются соответственно AW, AK, AC, тогда как AB легко следует из Sum. Далее, из Sum, подставляя $\neg p$ вместо p, получаем (τ). Поэтому, если мы опустим Assoc, получим полуструктуру по теореме B1. По теореме B2 Assoc является излишней. Теперь в доказательстве теорем B1 и B2 нет ничего, что не содержалось бы неявно в работе Пирса [ALg_1]. Тем не менее Уайтхед и Рассел в [PMt], положив в основу своей системы, по-видимому, алгебру Буля — Шрёдера и логистический метод Фреге и Пеано, просмотрели это, и никто этого не заметил до работы Бернайса [AUA] (ср. [NAL]).

Постулаты L1—L4 в теореме B5 — это постулаты, выбранные Биркгофом [LTh].

Теорема B7 является частью пирсовского доказательства дистрибутивного закона в книге Хантингтона [SIP]. В действительности (10) разд. B там является леммой, а (8) разд. B выводится из нее по существу так же, как и здесь. С того времени эта теорема вновь устанавливалась рядом других логиков. Биркгоф ([LTh_1], стр. 74, сноска; ср. [LTh_2], стр. 134 [1]), упражнение 3) приписывает ее Дж. Боудену, установившему ее в своей неопубликованной работе 1936 г.; Дюбрей-Жакотен, Лезье и Круазо ([LTT], стр. 75) приписывают ее М. Молинаро.

В этом месте удобно вставить историческое примечание. В 1880 г. в книге [ALg_1], в которой рассматривается "силлогистическая логика", Пирс установил, что дистрибутивные законы можно было бы "легко доказать посредством (4) и (2), но доказательство слишком скучно для того, чтобы его приводить" (см. Пирс [CPC], разд. 3.200). Здесь (4) представляет собой AK, AK′, VK и VK′, а (2) — AS и VS. В связи с этим Биркгоф ([LTh_2], стр. 133, или [LTh_1], стр. 74 [2])) утверждает, что Пирс "думал, что любая структура дистрибутивна". Более подробное рассмотрение показывает, что "силлогистическая логика" Пирса содержала законы для отрицания, которые, по-видимому, предполагалось использовать вместе с (4) и (2). Когда оригинальное доказательство Пирса было наконец опубликовано у Хантингтона [SIP], оказалось, что оно зависит от постулатов 8 и 9 Хантингтона; это доказательство показывает на самом деле, что любая структура с 0 и 1

[1]) Стр. 193 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) Стр. 191 русского издания.— *Прим. ред.*

дистрибутивна, если существуют дополнения (см. Биркгоф [LTh_2]), такие, что если c — любое дополнение b, то

$$ab = 0 \longrightarrow a \leqslant c$$

Это совершенно верно (см. Биркгоф [LTh_2], стр. 171 [1]), упражнение 6). Кажется, Пирс ошибся в двух отношениях: во-первых, не заметив необходимости предположений, дополнительных к его "(4) и (2)", и, во-вторых, в том, что, когда он узнал о шрёдеровском доказательстве независимости, он поместил в своей книге [ALg_2] сноску (см. его [CPC], разд. 3.384), утверждавшую, что Шрёдер доказал, будто в силлогистической логике невозможно доказать дистрибутивный закон, тогда как Шрёдер ничего подобного не делал. Эти факты вряд ли подтверждают заключение о том, что Пирс думал, будто каждая структура дистрибутивна. На самом деле вероятнее всего, что он в отличие от Шрёдера вообще не формулировал понятия структуры.

Теорема B9 взята из статьи Лоренцена [ALU]. Дюбрей-Жакотен, Лезье и Круазо привели следствие 9.1 в качестве упражнения к гл. 6 их книги и приписали его (на стр. 75) М. Молинаро.

По поводу логики квантовой механики см. Биркгоф и фон Нейман [LQM]; более полного изложения пока не было. Другие ссылки по этому вопросу см. у Френкеля и Бар-Хиллела ([FST], стр. 230, примечание 3[2])) и в статьях Рубина, Иордана, Феврие и Детуша, опубликованных в сборнике [AMS] под редакцией Генкина, Саппса и Тарского.

Понятия импликативной и субтрактивной структуры явно сформулированы в работе Сколема [UAK]. Мне неизвестны более ранние формулировки. (Обратные операции вычитания и деления допускались Булем; Пирс и Шрёдер позднее отбросили их как излишние. Я не знаю, есть ли какая-либо связь между сколемовскими операциями и этими более ранними операциями.) Когда я писал книгу [LLA], послужившую основой для изложения в данной главе, в моем распоряжении не было работы Сколема, так что единственная часть изложенного в данной главе материала, взятая у Сколема, — это доказательство дистрибутивности в теореме C3. Как сказано в [LLA], стр. 96, большинство теорем разд. C было предложено Тарским [GZS]. Топологические приложения исследовались главным образом Тарским, Стоуном и их сотрудниками. Теорема C2, в частности, является двойственной одной теореме в книге Мак-Кинси и Тарского [CEC] (теорема 1.4). По поводу дальнейшей информации см. Биркгоф

[1]) Стр. 240 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) Примечание [4]) к стр. 276 русского издания.— *Прим. ред.*

[LTh$_2$], стр. 147 и след. [1]), 153 и след. [2]), 176 и след. [3]), 195 [4]), 204 [5]), Мак-Кинси и Тарский [CEC], [ATp], [TSC], Стоун [RBA] и работы, приведенные там. Такие структуры являются частными случаями "резидуальных структур", введенных Уордом и Дилуортом; ссылки см. у Биркгофа [LTh$_2$], стр. 201 и след. [6]). По поводу терминологии, связанной с этими структурами, и некоторых дальнейших деталей см. разд. 2.

Теория булевых колец принадлежит Стоуну. Начало статьи Стоуна [TRB], содержащей бо́льшую часть приведенных здесь теорем, вполне доступно для чтения; см. также Стоун [RBA]. Полный перечень этих теорем см. в книге Биркгофа [LTh$_2$], стр. 153 и след. [2]). Булевы алгебры, являющиеся булевыми кольцами с единицей, не будут интересовать нас до гл. 6. Заметим, что стоуновское $a + b$ встречается также у Буля, тогда как $a \vee b$ было введено позднее Джевонсом в 1864 г. и (по-видимому, независимо от него) Пирсом в 1867 г. Здесь есть, однако, одно важное отличие. У Буля $a + b$ не интерпретируется, если не имеет места $ab = 0$, тогда как у Стоуна $a + b$ всегда интерпретируется; у Буля $a + a$ не имеет смысла, тогда как у Стоуна $a + a = 0$. Идеи Стоуна предвосхищались главным образом в работе Жегалкина [АСЛ]; см. упоминания у Биркгофа [LTh$_2$], стр. 153 и след. [2]), и Стоуна [RBA]. См. также Эрбран [RTD], гл. 1, разд. 6.

Ссылки на работы, посвященные эквиваленции, см. у Чёрча [IMl$_2$], стр. 159 [7]). Двойственная форма булева кольца явно упоминается у Стоуна [NFL].

2. Замечания о терминологии. Термин 'структура' (lattice [8])) был введен в статье Биркгофа [CSA] и используется и сейчас, несмотря на то, что ранее он употреблялся в ином смысле (как мне кажется, Минковским). Термин '*Verband*', используемый Фр. Клейном и введенный, согласно Гермесу ([EVT], стр. 1), Дедекиндом, стал стандартным термином в Германии. Кажется, во Франции теперь принят термин '*treillis*'; когда писалась книга [LLA], этот термин еще не был введен.

Термин 'полуструктура' (semilattice) появился в книге Биркгофа [LTh$_2$], стр. 18, 25 [9]) по образцу '*Halbverband*' у Клейна; термин '*логическая группа*' (*groupe logique*), употреблявшийся в [LLA], взят из работы Моисила [RPI].

[1]) Стр. 215—216 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) Стр. 217 и след. русского издания.— *Прим. ред.*
[3]) Стр. 263 и след. русского издания.— *Прим. ред.*
[4]) Стр. 290 и след. русского издания.— *Прим. ред.*
[5]) Стр. 293 и след. русского издания.— *Прим. ред.*
[6]) Стр. 288 русского издания.— *Прим. ред.*
[7]) Стр. 137—138 и 400 русского издания (где эта операция называется эквивалентностью).—*Прим. ред.*
[8]) В настоящее время все чаще употребляют термин 'решетка'.— *Прим. ред.*
[9]) Стр. 39 русского издания.—*Прим. ред.*

В данной книге принадлежащие Биркгофу термины 'meet' и 'join' для обозначения структурных операций переведены словами 'умножение' и 'сложение', соответствующими английским терминам 'multiplication' и 'addition', а те же термины, употребляемые для обозначения результатов этих операций,— соответственно словами 'произведение' ('product') и 'сумма' ('sum'). Вместо 'произведение' часто употребляется термин 'пересечение' ('*Durchschnitt*'), а вместо 'сумма' — 'объединение' ('*Vereinigung*') [1]). В качестве знаков операций Биркгоф [LTh] употребляет инфиксы '$\cap$' и '$\cup$'. Дюбрей-Жакотен, Лезье и Круазо, а также Гермес следуют за ним; другие авторы (например, Гливенко, Шрёдер) предпочитают символику обычной алгебры, обозначая умножение инфиксом $\cdot$ или просто записывая аргументы друг рядом с другом, а сложение обозначая знаком '+', что, конечно, противоречит употреблению '+' для сложения в кольце, для которого иногда используется инфикс 'Δ' (симметрическая разность). Другие авторы (Уорд, Дилуорт, Оре, Менгер) предпочитают использовать круглые и квадратные скобки, например '(a, b)', '$[a, b]$', и в таких случаях вследствие двойственности часто неясно, какая операция имеется в виду. Вместо инфикса '$\leqslant$' некоторые авторы предпочитают '$\subset$', но все соглашаются с употреблением инфикса '='. Уитни (см. замечание у Биркгофа [LTh], начало гл. 2) предложил читать '$\cap$' и '$\cup$' как 'шапка' (cap) и 'чашка' (cup) соответственно; Дюбрей-Жакотен, Лезье и Круазо предлагают читать '$\wedge$' как 'между'.

Инфикс '$\supset$' первоначально был перевернутой буквой 'C'. Так он появился у Пеано [APN]. Жергон (см. цитату у Бохенского [FLg], разд. 40.12) ранее использовал его для обозначения отношения собственного включения классов. По поводу дальнейших исторических деталей см. Чёрч [BSL], предметный указатель, под рубрикой 'Знак $\supset$'.

Термин 'сколемовская структура' для обозначения импликативных и субтрактивных структур употребляется здесь впервые. Уместность этого термина с исторической точки зрения должна быть ясна из того, что сказано в разд. 1, но он имеет и другие преимущества. Я рассмотрю здесь его взаимоотношения с терминами 'брауэровская структура', 'гейтинговская структура', 'структура с относительными псевдодополнениями' и 'резидуальная структура', все они употребляются в подобной связи в других местах.

[1]) Последние две фразы по очевидным причинам переведены далеко не буквально, хотя и без потери информации. — *Прим. ред.*

Термин 'брауэровская алгебра' использовался у Мак-Кинси и Тарского [CEC] для обозначения того, что́ здесь названо абсолютной субтрактивной структурой. Причины, по которым имя Брауэра связывается с такими структурами, состоят, по-видимому, в следующем. В соответствии со своей интуиционистской философией математики Брауэр отрицал справедливость ряда логических принципов, например закона исключенного третьего. До 1930 г. появились лишь фрагментарные изложения логики, находившиеся, по общему мнению, в большем согласии с его интуиционистской философией (см., например, Брауэр [OLP], [IZM], 1925; Гливенко [LBr], [PLB]; возможно, Колмогоров [ПТN]; ср. Гейтинг [FMI]). В 1930 г. Гейтинг осуществил формализацию алгебры высказываний, а также исчисления предикатов для такой логики. Это была ассерторическая система того вида, который мы рассмотрим в гл. 5. Методами, которые мы изучим в этой главе, такую систему можно привести к виду структуры; это было сделано, например, в статье Огасавары [RIL]. Структуры, рассматриваемые в статье Тарского [GZS], в точности таковы же. Как мы видели в разд. C5, открытые множества в топологическом пространстве образуют такую структуру. Но для целей топологии естественнее иметь дело с замкнутыми множествами и замыканиями, чем с открытыми множествами и внутренностями. По этой причине структуры, полученные из системы Гейтинга, были заменены двойственными к ним. Так же употребляется термин 'брауэров(ск)а(я) логика' в книге Биркгофа [LTh], причем дуализация, по-видимому, мотивируется желанием, чтобы 0 обозначал истину. Если мы примем все написанное здесь как фиксацию значения термина 'брауэровская структура', то этот термин имеет две характерные особенности: (1) он происходит из интуиционистского источника, который определенно не является классическим, и (2) он обладает "несимметричностью", удобной в том случае, когда субтрактивная форма предпочитается импликативной.

Если термин 'брауэровская структура' следует употреблять в только что описанном смысле, то абсолютную импликативную структуру, получающуюся из системы Гейтинга без дуализации, было бы уместно называть гейтинговской структурой. Этот термин означал бы тогда, что структура является неклассической и импликативной. Монтейро [AIA] употребляет термин 'брауэровская алгебра', но позднее в совместной с Варшавским статье [AHM] он предпочитает термин 'гейтинговская алгебра'.

Когда в работе Сколема [UAK] вводились структуры, обратные операции вводились только на формальных основаниях без какого бы то ни было указания на интуиционистскую или родственную ей интерпретацию. Далее, оба вида структур вводились одновременно, в параллельных столбцах. По этой причине термин 'сколемовская структура' и представляется хорошо приспособленным в качестве термина для обозначения всех видов структур в разд. C и D. Возможна перекрестная классификация сколемовских структур двумя путями: с одной стороны, на импликативные и субтрактивные (или и те и другие); с другой — на абсолютные и классические (с возможными промежуточными видами). Но говорить о классических брауэровских структурах или даже о классических гейтинговских структурах представляется довольно странным.

Структуры с относительными псевдодополнениями по терминологии Биркгофа (см. его [LTh$_2$]) означают то же самое, что и абсолютные импликативные структуры. Этот термин мне кажется слишком уж громоздким. Далее он применяется только к этому особому виду структур.

Резидуальные структуры в смысле Уорда и Дилуорта (см. ссылки в разд. 1) получаются добавлением операций "деления с остатком" к "структурно упорядоченным полугруппам", т. е. структурам с третьей операцией "умножения", обладающей определенными свойствами. Сколемовские структуры получаются, когда третья операция отождествляется с той или иной структурной операцией. Так как сколемовские структуры всегда дистрибутивны, а резидуальные структуры как структуры даже не обязаны быть модулярными, то употребление термина 'резидуальная структура' вместо 'сколемовская структура' вызвало бы путаницу.

3. Дальнейшее развитие. Упоминание всех путей, по которым в современной математике можно обобщить, специализировать или как-либо иначе видоизменить теорию структур, завело бы нас слишком далеко. Степень влияния теории структур на другие области математики можно бегло представить себе, просмотрев уже приведенные ссылки. Здесь я упомяну лишь немногие из ветвей, представляющие интерес с точки зрения логики. Я сделаю несколько ссылок; там, где они даются, я укажу последнюю известную мне публикацию, а также литературу, которая мне кажется наиболее исчерпывающей.

Кроме частично упорядоченных множеств как таковых изучались также пространства замыканий (т. е. пространства с замыканием, удовлетворяющим свойствам, подобным I—III разд. 2B3), полугруппы и родственные алгебраические системы и т. д. Потребности квантовой механики (см. разд. 1) привели Иордана к изучению некоммутативных структур (см. его [TSV]). Чаудхури [BNr] изучал кольца, в которых ассоциативный закон может не выполняться. Алгебры, относящиеся к многозначным логикам во многом так же, как булева алгебра относится к двузначной логике, получили название алгебр Поста, или мулевых

алгебр; о них см., например, Розенблюм [PA1] (а также ссылки в его книге [EML]) и Чан [AAM]. Результатом обобщения в несколько ином (хотя и близком) направлении являются 'кольцевые логики' Р. Л. Фостера.

Имеются также алгебраические системы, получающиеся наложением на структуру некоторых дополнительных условий. К ним относятся структурно упорядоченные группы и полугруппы. Старейшей алгеброй этого рода является алгебра отношений. Она была развита в основном Пирсом (говорят, что идеи восходят к де Моргану); ей посвящен третий том работы Шрёдера [VAL]. Более исчерпывающее недавнее изложение см. у Чина и Тарского [DML]. Булевы алгебры с добавочными операциями рассматривались с общей точки зрения в работе Ионссона и Тарского [BAO]. Вероятностные соображения привели Коупленда к введению импликационных операций[1]) иного рода, нежели рассмотренные выше; см., например, его [IBA], [POP]. По поводу алгебр, включающих в себя модальные операции, см. гл. 8; по поводу алгебр, связанных с кванторами, см. гл. 7.

Наконец, отметим, что к интересным результатам приводит применение к алгебрам вида, рассмотренного в данной главе, более глубоких эпитеоретических методов. В частности, теорема Стоуна о представлении (Стоун [RBA]), гласящая, что любая булева алгебра может быть представлена как поле множеств, привела к многим подобного рода исследованиям для других типов алгебр. Но такие теоремы лежат за пределами данной книги.

[1]) Автор изобретает для основной] структурной операции $\supset$ термин 'ply operation' (от английского 'imply'), напоминающий (но не более того) всякого рода "импликации", в той или иной мере соответствующие интуитивным представлениям о логическом следовании. Введя в переводе "полуосмысленный" неологизм 'пликация' (с префиксом 'им' или без), мы пытались максимально следовать ходу мыслей автора.— *Прим. ред.*

Глава 5

ТЕОРИЯ ИМПЛИКАЦИИ

Перейдем теперь к ассерторическим системам. Особенно удобно иметь дело с такими системами, когда обы рассматриваются (точнее, интерпретируются) как высказывания. В этой главе мы займемся простейшими формами ассерторических алгебр, включающими только позитивные операции гл. 4. Главной операцией в этих системах является (им)пликация[1]) (другие операции, аналогичные сложению и умножению, также играют роль, но гораздо меньшую). По этой причине данная глава и называется "теория импликации"[1]). Теория импликативных структур, рассмотренная в разд. 4C и 4D3, также подходит по тематике к этой главе, однако нам удобнее будет начать новую главу с перехода к ассерторической форме.

Мы начнем в разд. A с рассмотрения ряда предварительных вопросов, а именно природы пропозициональной интерпретации и высказываний, а также связи между реляционными системами, базисный предикат которых представляет собой квазиупорядочение или равенство, интерпретируемые соответственно отношениями импликации[1]) или эквивалентности, с одной стороны, и соответствующими ассерторическими системами — с другой. Мы будем рассматривать возможность эпитеоретической интерпретации, при которой формализуемые нами высказывания можно интерпретировать как элементарные утверждения или же эпиутверждения простого вида, относящиеся к некоторой более фундаментальной формальной системе или теории, так что наши формальные системы формализовали бы часть эпитеории этой более фундаментальной системы. Интерпретация операций на этой основе приведет к формулировке некоторых правил вывода, называемых здесь T-правилами и аналогичных "натуральным" правилам, введенным Генценом и названным им "N-правилами".

В разд. B мы начнем формальное изучение простейших видов ассерторических систем. Такие системы будут иметь две формы: T-форму, которая непосредственно порождается T-правилами,

[1]) См. предыдущее примечание.—*Прим. ред.*

и собственно ассерторическую форму, или H-форму, в которой единственным правилом (modus ponens) является

$$A, A \supset B \vdash B$$

В противоположность им структурная форма гл. 4 будет называться E-формой. В каждой форме будет два вида, которые называются, как и в гл. 4, абсолютным и классическим. Абсолютная система T-формы, которую впредь мы будем называть TA-системой, — это система, порожденная только T-правилами разд. A3; она и соответствующая HA-система, как выяснится, эквивалентны абсолютной импликативной структуре, или EA-системе. Системы TC и HC, аналогичные классической импликативной структуре, или системе EC, потребуют некоторых дополнительных предположений (аналогично тому, как было в разд. 4D).

В дальнейших разделах этой главы мы будем иметь дело с четвертой формой, или L-формой, соответствующей L-системам Генцена. Они включают в себя переход к более высокой ступени формализации. Элементарные утверждения L-систем получатся путем процесса абстрагирования из определенных эпиутверждений о доказуемости посредством деревьев доказательства в T-системе. Эти L-системы дают более глубокий анализ импликации. Основная теорема ("*Hauptsatz*" Генцена), относящаяся к этим системам и называемая нами "элиминационной теоремой" [1]), является одной из центральных теорем современной математической логики.

На протяжении большей части главы мы будем иметь дело с процессами, которые в дальнейшем понадобятся не только в описываемой в ней ситуации, когда у нас имеются только конечные позитивные операции, но — с небольшими видоизменениями — и в последующих главах. Поэтому мы попытаемся описать эти процессы (особенно в последних разделах главы) таким образом, чтобы они были применимы и при более общих обстоятельствах, нежели те, что рассматриваются здесь.

В этой главе для обозначения обов будут употребляться заглавные курсивные латинские буквы. Это противоречит соглашениям гл. 4, где для этой цели использовались строчные курсивные латинские буквы, что соответствует обычной алгебраической практике. Но в гл. 7 заглавные буквы будет удобно использовать для обозначения высказываний, а строчные буквы — для обозначения индивидов, так что необходимые изменения выгоднее сделать уже сейчас.

[1]) Или "теоремой об устранимости сечений" (см. ниже, разд. C1 и далее). — *Прим. ред.*

A. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АССЕРТОРИЧЕСКОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

В этом разделе мы изучим принципы, относящиеся к ассерторическим логическим алгебрам вообще. Мы начнем с более формальных соображений — таких, как связь между реляционными и ассерторическими системами, затем затронем вопросы интерпретации — такие, как природа высказываний и связывающие их операции.

1. Реляционные алгебры и ассерторические логические алгебры. В разд. 2D1 мы видели, что любую формальную систему можно свести к ассерторической. Мы теперь изучим подробнее эту ситуацию для случая, когда первоначальная система является реляционной алгеброй, имеющей вид, рассмотренный в гл. 4.

Предположим, что мы имеем квазиупорядоченную систему $\mathfrak{R}$ с базисным отношением $\leqslant$. Все элементарные утверждения $\mathfrak{R}$ имеют тогда вид

$$A \leqslant B \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{S}$ — ассерторическая система, образованная как в разд. 2D1, предикат которой обозначается приписыванием '$\vdash$' спереди. Пусть инфикс '$\supset$' обозначает операцию, заменяющую предикат $\leqslant$. Если $\mathfrak{S}$ образована таким образом, то все ее элементарные утверждения будут иметь вид

$$\vdash A \supset B \tag{2}$$

а эквивалентность

$$A \leqslant B \rightleftarrows \vdash A \supset B \tag{3}$$

выражает тот факт, что (2) справедливо в $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда (1) справедливо в $\mathfrak{R}$. Далее, (ρ) и (τ) в $\mathfrak{R}$ переводятся в $\mathfrak{S}$ так:

$$\vdash A \supset A \tag{4}$$

$$A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C \tag{5}$$

Выше мы предполагали, что $\mathfrak{R}$ дана, а $\mathfrak{S}$ строится из нее. Но очевидно, что если нам дана такая ассерторическая система $\mathfrak{S}$ с пликацией, что все элементарные утверждения $\mathfrak{S}$ имеют вид (2), то мы можем принять (3) за определение отношения $\leqslant$, и это отношение действительно будет квазиупорядочением, если выполняются (4) и (5). Поэтому $\mathfrak{S}$ можно преобразовать в реляционную систему $\mathfrak{R}$. Далее, два преобразования — от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{S}$ и от $\mathfrak{S}$ к $\mathfrak{R}$ — являются взаимно обратными друг другу (в том смысле, что последовательное их применение приводит к исходной системе).

Ни одно из этих преобразований никоим образом не нарушается, если операция $\supset$ уже встречается в $\mathfrak{R}$ или, другими словами, если такая операция уже входит в конструкцию A и B из (1) и (2).

Ведь вхождение '$\supset$' внутрь (2) является главным вхождением — в том смысле, что оно указывает операцию, образующую нижний узел в конструкции $A \supset B$. Преобразования в предыдущем рассуждении по-прежнему определены однозначно.

Иная ситуация возникает, однако, если мы отправляемся от ассерторической системы $\mathfrak{S}$, в которой не все элементарные утверждения имеют форму (2). В этом случае мы действуем следующим образом. Предположим, что имеется такой об 1 из $\mathfrak{S}$, что

$$A \vdash 1 \supset A \,\&\, 1 \supset A \vdash A \tag{6}$$

Пусть $\mathfrak{S}_1$ — совокупность элементарных теорем $\mathfrak{S}$, имеющих вид (2). Тогда $\mathfrak{S}_1$ и реляционная система $\mathfrak{R}$ будут находиться между собой в некотором отношении, определяемом посредством (3), и каждая элементарная теорема $\mathfrak{S}$ будет выводима одновременно с некоторой элементарной теоремой $\mathfrak{S}_1$. Далее, если для $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}_1$ выполняется условие (3), то мы будем иметь

$$\vdash A \rightleftarrows 1 \leqslant A \tag{7}$$

т. е. левая часть является элементарной теоремой $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда правая часть является элементарной теоремой $\mathfrak{R}$. Это устанавливает соответствие между $\mathfrak{S}$ и той частью $\mathfrak{R}$ — обозначим ее $\mathfrak{R}_1$, — которая состоит из утверждений вида (1) при $A \equiv 1$.

Для существования такой 1 достаточно, чтобы

$$A \vdash B \supset A \tag{8}$$

$$A,\ A \supset B \vdash B \tag{9}$$

были верными правилами $\mathfrak{S}$ и чтобы 1 был обом (например, если выполняется (4), то обом $E_1 \supset E_1$), таким, что

$$\vdash 1 \tag{10}$$

Действительно, левая половина (6) следует из (8), а правая половина — из (9) и (10). Тогда в системе $\mathfrak{R}$ мы имеем

$$B \leqslant 1 \qquad \text{из (10), (8)} \tag{11}$$

$$A \leqslant B \rightleftarrows 1 \leqslant A \supset B \qquad \text{по (6), (3)} \tag{12}$$

Предположим теперь, что $\mathfrak{R}$ — квазиупорядоченная система с обом 1 и операцией $\supset$, такими, что выполняются (11) и (12). Примем (7) как определение $\vdash$. Тогда (10) немедленно следует в силу (ρ). Точно так же мы имеем (3) в силу (12) и (7). Из (3)

имеем (4) и (5), как и раньше. Мы можем вывести (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vdash A &\to 1 \leqslant A && \text{по (7)} \\ &\to B \leqslant 1 \,\&\, 1 \leqslant A && \text{по (11)} \\ &\to B \leqslant A && \text{по (τ)} \\ &\to \vdash B \supset A && \text{по (3)} \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \vdash A \,\&\, \vdash A \supset B &\to 1 \leqslant A \,\&\, A \leqslant B && \text{по (7), (3)} \\ &\to 1 \leqslant B && \text{по (τ)} \\ &\to \vdash B && \text{по (7)} \end{aligned}$$

так что (9) выполняется. Отсюда, как и раньше, получаем (6).

Проведенное здесь рассуждение устанавливает, что понятия квазиупорядоченной системы (с 1 и $\supset$), удовлетворяющей (11) и (12), и ассерторической системы (также с 1 и $\supset$), удовлетворяющей (4), (5), (8), (9), (10), эквивалентны в том смысле, что если дана система какого-либо из двух типов, то имеется соответствующая система другого типа, такая, что любая из этих двух систем имеет правильную интерпретацию в другой системе. Нет оснований считать какой-либо из этих двух типов систем более важным по сравнению с другим.

Отсюда следует, что отдавать какое-либо предпочтение одному типу систем перед другим нужно на основе таких свойств, как польза, естественность, убедительность, или подобных им. Но с таких точек зрения оба вида систем имеют свои преимущества. Без сомнения, понятие одноместного предиката проще, чем двуместного, и по этой причине ассерторический тип проще в самой своей основе. Он также более естествен с точки зрения пропозициональной интерпретации, которая будет изложена вскоре более подробно. С другой стороны, подход через понятие отношения ближе к подходу обычной математики. Наиболее полного развития нашей науки, вероятно, можно достичь, используя обе точки зрения. Далее, интерпретация реляционной системы в ассерторической системе кажется более естественной, нежели интерпретация ассерторической системы в реляционной системе. Другими словами, легче применять теоремы реляционной системы при разработке ассерторической системы, нежели наоборот. По этой причине подход через понятие отношения был принят раньше, в гл. 4, а ассерторический подход отложен до настоящей главы.

2. Пропозициональная интерпретация. Отныне и впредь до дальнейшего уведомления обы различных изучаемых систем будут называться *высказываниями*. Это согласуется с традицией, согласно которой мы используем термины, подсказывающие их назначение и применение — хотя бы для того чтобы наши формальные рассуждения не были непонятной тарабарщиной. Но термины не надо связывать слишком тесно с такими применениями, чтобы не искажать формальные рассуждения содержательными соображениями, затемняющими их структуру. Чтобы видеть, как эта терминология служит данной цели, будет необходимо небольшое предварительное обсуждение.

Термин 'высказывание' [1]) вызывает большие споры в современной математической логике. Некоторые логики избегают его, как отравы; они настаивают на замене этого термина во всех контекстах, где он употребляется как нечто само собою разумеющееся, словом 'предложение'; другие же настаивают на его употреблении, по-видимому, на том основании, что нам нужно постулировать объекты, для обозначения которых предназначен термин. Принятое нами употребление не имеет отношения к этой метафизической полемике. Высказывание — это просто об; как подсказывает этот термин, для него предназначается некая интерпретация, но нам нет никакого дела до метафизической природы этой интерпретации.

Те, кто возражает против термина 'высказывание' [1]), делают это в основном по двум причинам. С одной стороны, этот термин имеет метафизический оттенок, которого они желают избежать, с другой — это туманный термин, тогда как термин 'предложение' относительно точен. Эти возражения следует обсудить по отдельности.

Первое возражение, очевидно, связано с философскими взглядами того или иного лица. Философы употребляют этот термин довольно таинственным образом. Я допускаю, что я не понимаю, о чем они рассуждают. Но ясно, что эти рассуждения ничего общего с формальной структурой не имеют. Поэтому по отношению к этой структуре термин 'высказывание' в том виде, как он употребляется здесь, совершенно бессодержателен, и мы вольны использовать его так, как нам нравится. Математики могут использовать и используют в качестве специальных терминов слова, которые употребляются в нематематических контекстах с другой целью. Использование термина 'высказывание' в математическом контексте не обязывает, если нет желания, постулировать мистические сущности таинственного рода.

[1]) В оригинале 'proposition', что может быть переведено также как 'суждение'; см. примечание к стр. 145.— *Прим. ред.*

Что касается туманности, то уместно заметить, что термин 'предложение' также туманен. Посмотрите, например, на следующие девять строк (исключая числа, написанные справа в скобках):

$$2+3=5 \tag{13}$$

Сумма 2 и 3 равна 5. (14)

Сумма 2 и 3 равна 5. (15)

Сумма 2 и 3 равна 5. (16)

Сумма 2 и 3 равна 5. (17)

Die Summe von 2 und 3 ist 5. (18)

Die Summe von 2 und 3 ist 5. (19)

$$3+2=5 \tag{20}$$

$$3+3=6 \tag{21}$$

Сколько здесь предложений? Некоторые логики (классики.— *Ред.*) сказали бы, что $9n$, где n — тираж этой книги; полиграфист сказал бы, что восемь, отождествляя (14) и (15); лингвист, вероятно, пошел бы дальше и отождествил (14), (15), (16), (17), а также (18) и (19), тогда как немецкий логик, понимая 'предложение' как перевод '*Satz*', мог бы отождествить все первые семь предложений. До того как его стали употреблять в логике, термин 'предложение' имел главным образом грамматическое значение, но логическое употребление повлияло на изменение смысла этого термина.

Ввиду того что в обиходной речи термин 'предложение' употребляется неоднозначно, кажется уместным ввести пять близких по значению терминов: 'инскрипция', 'предложение', 'утверждение', 'высказывание' и 'клауза'. У нас не будет возможности, по крайней мере здесь, сделать различие между этими терминами точным, но приблизительно объяснить можно так.

Термин '*инскрипция*' был введен в разд. 2А2 для обозначения одного конкретного примера лингвистического выражения [1]). Поэтому в приведенной выше таблице имеется девять инскрипций в отдельном экземпляре этой книги; если имеется в наличии n экземпляров книги, то в соответствующих местах всех наличных экземпляров имеется всего $9n$ инскрипций. (Этот термин все еще немного неточен, потому что часть инскрипции опять является инскрипцией; возможно, мы могли бы говорить о сентенциальной инскрипции как об инскрипции, являющейся примером какого-

[1]) Термин 'выражение' ('expression') используется в настоящем контексте в довольно неточном смысле. Было бы правильнее, согласно разд. 2А3, использовать термин 'фраза'.

либо предложения, или же об инскрипции, выделенной знаками препинания, и т. п.; лингвисты в таких случаях говорят 'uttirance'.)

Термин '*предложение*' употребляется в грамматическом смысле. Предложение — это выражение (или другая единица) некоторого коммуникативного языка, которое выполняет определенную коммуникативную функцию. Предложение является классом инскрипций, которые можно считать его "экземплярами"; различные экземпляры одного и того же предложения эквиморфны. Я не могу в точности сказать, что такое эта коммуникативная функция, и у меня нет ни одного действительно удовлетворительного определения; даже если дан коммуникативный язык, то среди лиц, пользующихся этим языком, кажется, существуют небольшие разногласия по поводу того, какие из его выражений являются предложениями [1]). Скажем, все выражения (13)—(17), а также (20) и (21) являются предложениями математического русского языка; выражения (13) и (18)—(21) являются предложениями математического немецкого языка. Точно так же существует некоторая неясность относительно понятия эквиморфности. Безусловно, (14) и (15) эквиморфны, и, вероятно, следует считать их эквиморфными (16), но эквиморфны ли они (18) и эквиморфны ли (18) и (19) — это вопрос соглашения.

Смысл термина '*утверждение*' можно неточно охарактеризовать как значение предложения. С этой характеристикой можно связывать любое метафизическое понятие, какое только можно пожелать, но если хочется быть объективным, то можно сказать, что утверждение — это предложение, рассматриваемое безотносительно к некоторым языковым чертам, не влияющим на значение. Поэтому утверждение — это класс предложений, являющихся *равнозначными*. Понятие равнозначности несколько смутно — даже в большей степени, чем эквиморфность, — но эта смутность не должна нас беспокоить, так как в логике нам незачем вести счет предложениям, не говоря уже об утверждениях. Термин 'утверждение', таким образом, просто грубо указывает уровень абстракции. Поэтому, когда мы говорим об "утверждении (15)", мы имеем в виду, что то, что́ мы должны сказать, в равной степени применимо и к любому из (13)—(19), а возможно, и к (20); но когда мы говорим "предложение (15)", мы имеем в виду, что мы включаем сюда (14) и (16) и, возможно, (17). Такие же различия мы делаем в обыденной жизни, когда мы говорим об одном и том же объекте как о плоде, яблоке или антоновке. По общему признанию, есть

[1]) Например, согласно Хомскому, 'искренность восхищается Джоном' не является с точки зрения грамматики предложением, тогда как я склоняюсь к тому, что это грамматически правильное предложение, хотя и бессмысленное.

случаи, когда неясно, какой из двух терминов больше подходит, и можно при желании отождествить 'утверждение' и 'предложение'.

Клауза — это языковое выражение, которое называет утверждение или предложение в зависимости от обстоятельств. Все естественные языки — по крайней мере более развитые — имеют средства для этого. Ни одно из выражений (13)—(21) не является клаузой, но вот примеры клауз в нашем U-языке:

'Сумма 2 и 3 равна 5' (22)

Что сумма 2 и 3 равна 5 (23)

Равенство $2+3$ и 5 (24)

$2+3 \square 5$ (25)

Здесь кавычки являются существенной частью (22), а инфикс '$\square$' — это оператор, заменяющий равенство. Все выражения (22)—(25) являются клаузами; естественно полагать, что (22) называет предложение (15), а (23)—(25) называют одно и то же утверждение [1]).

Высказывание — это значение клаузы в том же смысле, в каком утверждение является значением предложения, т. е. это класс равнозначных клауз. Можно материализовать это понятие разными путями. Можно на самом деле предположить, что высказывание является платонистской абстракцией, но это необязательно. Можно также сказать, что высказывание — это предложение языка-объекта, о котором говорят, но которое не употребляется, — но и это необязательно. Есть поэтому определенная свобода в том, что считать высказыванием. Важно, что высказывание — это объект (или фикция), о котором говорят, и что оно некоторым образом относится к одному определенному утверждению.

Как уже было сказано, обы систем, которые мы собираемся исследовать, будут называться высказываниями. Это значит, что мы будем подразумевать их интерпретацию в качестве высказываний в только что объясненном смысле. Использование этого термина для интерпретации не приносит вреда и имеет преимущество, упомянутое в начале данного раздела. В отношении высказываний есть некоторая свобода, и эту свободу можно расширить, допустив возможность других видов интерпретаций, где обы представляют собой классы, числа, замкнутые множества и т. д., как в разд. 4А. С другой стороны, если для обов употребляется термин 'предложение', то необходимы определенные предосторожности. Ибо если формальные переменные теории интерпретируют-

[1]) Сведе́ние к ассерторической системе — это по существу систематическое преобразование некоторых А-предложений в клаузы.

ся как интуитивные переменные, то существуют переменные, вместо которых можно подставлять существительные, а не предложения. Следовательно, если в качестве обов берутся предложения, то они должны быть предложениями, которые называются, а не утверждаются, т. е. они должны быть предложениями О-языка. Вместо А-имен нужно тогда подставлять имена этих предложений в U-языке, а не сами предложения. В настоящем изложении термин 'предложение' в принципе ограничен выражениями языка, действительно используемыми в коммуникативных целях, и для формальной теории безразлично, являются ли высказывания О-предложениями в этом смысле или нет.

Использование термина 'высказывание' имеет и другое преимущество, которое мы увидим позднее. В разд. С мы формализуем определенные типы эпиутверждений, относящихся к формальной системе $\mathfrak{S}$ и называемых *составными утверждениями*. Мы делаем это, строя формальную систему $\mathfrak{T}$, обы которой интерпретируются как составные утверждения $\mathfrak{S}$. В таком случае для этих обов из $\mathfrak{T}$ термин 'высказывание' является особенно подходящим.

Высказывания поэтому отличаются от утверждений тем, что о них говорят как о обах. Теперь иногда нам нужно говорить о утверждениях: сказать, что они истинны, что они доказуемы, выводимы, сложны и т. п. Это допускают нормы русского языка; на это уже ссылались в разд. 2А3. Мы будем придерживаться этого употребления в неформальном изложении, оставляя термин 'высказывание' для случаев, где изложение до некоторой степени формализовано. Действительно, нет смысла делать различие между высказыванием и утверждением, за исключением случаев, когда ссылаются на какую-то формализацию. При изложении интерпретаций, где встречаются оба термина, мы будем говорить о истинности либо высказываний, либо утверждений, причем высказывание истинно в точности тогда, когда связанное с ним утверждение также истинно. Действительно, мы можем в таком контексте отождествить высказывания с утверждениями, являющимися их интерпретантами.

3. Интерпретация операций. В разд. 2 мы говорили о природе пропозициональной интерпретации. Обратимся теперь к интерпретации операций, обозначенных инфиксами '$\supset$', '$\wedge$', '$\vee$' соответственно. Мы попытаемся найти принципы, которыми мы будем руководствоваться в дальнейшем при выборе постулатов.

С этой целью уместно определить особый вид интерпретации, называемый *нормальной интерпретацией*. Мы видели, что высказывание — это объект, о котором говорят и который, однако, определенным образом связывается с содержательным утверждением. Мы скажем, что интерпретация системы $\mathfrak{S}$ является *нормальной интерпретацией*, если высказывание A истинно тогда и только тогда, когда $\vdash A$. Так как последнее утверждение истинно тогда и только тогда, когда оно доказуемо, то это очень ограниченный вид интерпретации.

Операция $\wedge$ должна быть пропозициональным аналогом связки "и", согласно которой $A \wedge B$ истинно в точности тогда, когда и A и B истинны. Тогда в нормальной интерпретации это должно означать

$$\vdash A \wedge B \rightleftarrows \vdash A \,\&\, \vdash B \tag{26}$$

и этого можно было бы достичь, если бы у нас были правила

$$\vdash A \wedge B \longrightarrow \vdash A$$
$$\vdash A \wedge B \longrightarrow \vdash B \tag{27}$$

$$\vdash A \,\&\, \vdash B \longrightarrow \vdash A \wedge B \tag{28}$$

Заметим, что правило (28) устанавливает обстоятельства, при которых можно вывести утверждение $\vdash A \wedge B$, тогда как (27) устанавливают следствия, которые можно вывести из этого утверждения. Мы можем назвать (28) правилом для введения $\wedge$, тогда как (27) можно назвать правилами для удаления $\wedge$. Мы назовем правила (27) и (28) Ле и Li соответственно.

Операция $\vee$ должна быть пропозициональным аналогом связки "или". Эта связка для нас гораздо менее ясна, чем предыдущая. Однако легко видеть, какие правила для введения и удаления $\vee$ подходят нам. Для введения имеем правила

$$\vdash A \longrightarrow \vdash A \vee B$$
$$\vdash B \longrightarrow \vdash A \vee B \tag{29}$$

Что касается удаления, то заметим, что для того, чтобы вывести $\vdash C$ из $\vdash A \vee B$, мы должны показать, что мы можем вывести $\vdash C$ из $\vdash A$ и $\vdash B$; это дает правило

$$A \vdash C \,\&\, B \vdash C \,\&\, \vdash A \vee B \longrightarrow \vdash C \tag{30}$$

Правила (29) и (30) мы называем Vi и Ve соответственно.

Операция $\supset$ должна быть пропозициональным аналогом условной связки. Правило ее введения должно состоять в том, что мы утверждаем $\vdash A \supset B$, когда мы можем вывести $\vdash B$ из $\vdash A$. Если этот вывод должен быть формальным доказательством в какой-то формализуемой нами системе, то это дает правило введения

$$A \vdash B \longrightarrow \vdash A \supset B \tag{31}$$

В качестве правила удаления мы берем обращение (31):

$$\vdash A \supset B \rightarrow A \vdash B \qquad (32)$$

Это разновидность правила modus ponens, которое принимается в качестве исходного правила в большинстве систем алгебры высказываний [1]). Оно может быть названо Pe, тогда как (31) будет названо Pi. Заметим, что в этих правилах условная связка представляется выводимостью внутри системы. По этой причине теорию, в которой $\supset$ играет главную роль, уместно называть *теорией формальной выводимости.*

Лоренцен показал, что правила удаления являются следствиями правил введения в соответствии с его "инверсионным принципом". Идея его доказательства следующая. Предположим, что операции $\supset$, $\wedge$, $\vee$ не входят в аксиомы системы $\mathfrak{S}$ и правила вывода таковы, что никакое из них, отличное от (28), (29) и (31), не имеет заключения вида $\vdash A \wedge B$, $\vdash A \vee B$ или $\vdash A \supset B$. Тогда мы можем вывести (27), (30) и (32) так: предположим, что мы имеем доказательство $\vdash A \wedge B$, и пусть это доказательство представлено в виде дерева; тогда нижний узел этого дерева должен быть образован применением (28). Ветви, ведущие к двум узлам, образующим посылки, дадут требуемые доказательства того, что $\vdash A$ и $\vdash B$; тем самым устанавливается (27). Далее предположим, что мы имеем доказательства $\vdash A \supset B$ и $\vdash A$. Тогда, поскольку последний шаг в первом доказательстве должен заключаться в применении (31), у нас должно быть доказательство того, что $A \vdash B$. Отсюда мы получаем доказательство $\vdash B$, помещая всюду доказательство $\vdash A$, где $\vdash A$ входит в качестве верхнего узла в дерево доказательства. Наконец, предположим, что у нас имеются доказательства посылок (30). Последний шаг в третьем доказательстве должен состоять в применении (29). Посылкой должно быть либо $\vdash A$, либо $\vdash B$. Предположим первое. Пусть доказательство $A \vdash C$ представлено в виде дерева, и пусть доказательство $\vdash A$, имеющее вид дерева, помещено над каждым вхождением $\vdash A$ в качестве посылки первого доказательства. Результат будет требуемым доказательством $\vdash C$. Если данное доказательство является доказательством $\vdash B$, то мы поступаем точно так же со второй посылкой (30).

Рассуждение, которое мы только что провели, неявно зависит от нормальности интерпретации. Чтобы увидеть это, рассмотрим элементарное утверждение

$$\vdash A \supset (B \supset A) \qquad (33)$$

[1]) Заметим, что если это — исходное правило, то его можно выразить в виде A, $A \supset B \vdash B$.

Мы увидим, что оно справедливо в любой нормальной интерпретации. Из предыдущего следует, что (33) эквивалентно $A \vdash B \supset \supset A$, а это в свою очередь эквивалентно A, $B \vdash A$; так как A — аксиоматическое высказывание указанного расширения, то это, очевидно, истинно. Предположим, однако, что интерпретант $\vdash A$ является утверждением о том, что A истинно, тогда как само утверждение $\vdash A$ истинно только тогда, когда оно выводимо в довольно бедной системе. В таком случае (33) может не быть справедливым. Например, пусть $A \supset B$ — высказывание о том, что $A \vdash B$ [1]), где A — высказывание о том, что Нью-Йорк расположен в Северной Америке, B — высказывание о том, что Калькутта расположена в Африке, а $\vdash$ относится к некоторой системе логики в обычном смысле; тогда $\vdash A$ верно в интерпретации, $\vdash B \supset A$ неверно и, следовательно, (33) не справедливо. Эта несправедливость вытекает из того факта, что никакая разумная система логики не позволяет нам вывести $\vdash A$ из $\vdash B$.

4. Вспомогательные интерпретации. В разд. 2C5 прямая интерпретация была определена как интерпретация, получающаяся из оценки таким образом, что каждому формальному предикату ставится в соответствие содержательный предикат, определенный на множестве значений. Интерпретации, определенные таким путем [2]) более или менее искусственно, часто являются важным орудием в эпитеоретическом изучении алгебр высказываний. Мы назовем эти интерпретации *вспомогательными интерпретациями.*

Интересен частный случай, когда интерпретация такова, что равные (в смысле разд. 1A) обы имеют одно и то же значение. Такая интерпретация будет называться *регулярной интерпретацией.* Значения в регулярной интерпретации будут называться *элементами.* Система с регулярной интерпретацией является "алгеброй" в смысле обычной математики. Использование элементов согласуется с обычной математической практикой. В случае, когда элементы являются множествами, может произойти некоторая путаница, так как может казаться более естественным называть элементами члены этих множеств, а не сами множества; когда такая путаница кажется опасной, можно избежать ее, называя члены элементов "членами", или "индивидами", или же делая некоторые особые соглашения. К системам с регулярной интерпретацией, очевидно, можно применять методы современной алгебры.

[1]) В нормальной интерпретации этого объяснения делать не нужно.

[2]) Сюда мы намереваемся включить не только прямые интерпретации в узком смысле, как в разд. 2C5, но также и такие прямые интерпретации, в которых базисный предикат мыслится как выполнение определенного условия для всех допустимых оценок. Это явно предполагается ниже в матричных интерпретациях.

В связи с регулярной интерпретацией разрешается использовать один и тот же символ как для оба, так и для элемента. Поэтому мы можем говорить про "об A" и про "элемент A", понимая под последним элемент, связанный с первым.

Особым случаем регулярной интерпретации является тот, где элемент, связанный с обом A, представляет собой множество всех обов B, таких, что $A = B$.

Алгебра, получаемая таким путем, известна, особенно в случае, когда первоначальная система является ассерторической, как *алгебра Линденбаума* [1]), связанная с этой системой; с точки зрения, которой мы здесь придерживаемся, уместно называть ее *интерпретацией Линденбаума*.

В терминах регулярных интерпретаций можно определить также понятие гомоморфизма и родственные ему понятия. Пусть S_1 и S_2 — две данные системы. Тогда *гомоморфизм* S_1 в S_2 — это отображение, ставящее в соответствие каждому элементу (или обу) A из S_1 элемент A^* из S_2 и каждой операции ω или предикату φ из S_1 — операцию ω^* или предикат φ^* из S_2 с тем же числом мест, так что для любых обов $A_1, \ldots, A_n$ из S_1

$$\omega(A_1, \ldots, A_n)^* = \omega^*(A_1^*, \ldots, A_n^*)$$
$$\varphi(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow \varphi^*(A_1^*, \ldots, A_n^*)$$

Изоморфизм — это гомоморфизм, являющийся взаимно-однозначным соответствием между элементами и работающий, так сказать, в обе стороны; *эндоморфизм* — это гомоморфизм системы в себя, а *автоморфизм* — это эндоморфизм, являющийся также изоморфизмом. Эти понятия можно, по крайней мере частично, определить для отображений системы в систему [2]), но представляется более полезным определять их для отображений системы в регулярную интерпретацию.

Другой особый вид интерпретации — так называемая *матричная интерпретация* — определяется так [3]). Пусть дано множество значений α и подмножество β *выделенных значений*. Операциям ассерторической системы S ставятся в соответствие функции с тем же числом мест, определенные для аргументов из α со значениями в α. Пусть $f(-_1, -_2)$ — функция, поставленная в соответствие импликации. Упорядоченная последовательность, состоящая из α, β, f и других функций, поставленных в соответствие операциям, образует *матрицу* для S. В матрице приписывание значений каждому атомарному обу однозначно определяет значения всех обов. Об A является тавтологичным для матрицы M тогда и только тогда, когда он принимает выделенные значения, как бы мы ни приписывали значения всем атомам. Поэтому $\vdash A$ интерпретируется как утверждение о том, что A тавтологично. (В частном случае мы получаем выполнимость в двузначных таблицах.)

Матрица называется *нормальной*, если y принадлежит β, коль скоро x и $f(x, y)$ принадлежат β. При этом, если обам $A_1, \ldots, A_m$ соответствуют значения из β, единственным правилом вывода является (9) и

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

то значение, соответствующее B, должно принадлежать β. Нормальные матрицы, в особенности конечные, часто являются важным орудием при исследовании вопросов непротиворечивости и независимости.

Матричная интерпретация, даже нормальная, не обязательно регулярна. Для того чтобы нормальная матрица давала регулярную интерпретацию, достаточно, чтобы как $f(x, y)$, так и $f(y, x)$ принимали выделенные значения тогда и только тогда, когда x и y принимают одно и то же значение.

В. АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В этом разделе мы изучим ряд алгебр высказываний, которые выражают интерпретации, описанные в разд. А3. Мы рассмотрим три формы таких алгебр и их взаимоотношение. Одна из них, называемая Т-формой, будет основана непосредственно на правилах, рассмотренных в разд. А3; эта идея принадлежит Генцену [1]), предложившему так называемые "N-правила" (т. е. "натуральные правила") этого вида. Вторая форма, называемая Н-формой, имеет modus ponens (т. е. Ре разд. А3) в качестве единственного правила и схемы аксиом традиционного вида. Импликативные структуры, рассмотренные в разд. 4С и 4D, образуют третью форму, которую мы здесь будем называть Е-формой. Мы будем

[1]) По имени Адольфа Линденбаума — польского логика, погибшего во время второй мировой войны.

[2]) Это представляется более естественным и плодотворным; см. мою статью «Изоморфизм» в Философской энциклопедии, т. 3 (М., 1964).— *Прим. ред.*

[3]) См. разд. 4А2, пункт 8°, а также Лукасевич и Тарский [UAK], определения 3 и 4.

[1]) Герхард Генцен (1909—1945), немецкий математик и логик. Получил докторскую степень в 1933 г. в Гёттингене под руководством Германа Вейля. Его методы вывода изложены в его работе [ULS]. Позднее (в [WFR], [NFW]) он применил их в сочетании с трансфинитной индукцией до первого ε-числа для доказательства непротиворечивости формализованной арифметики. Эти методы приобрели широкую известность, в то время как сама диссертация Генцена стала доступной лишь в последние годы.

рассматривать два вида алгебр. Алгебру, в которой утверждаются высказывания, выводимые по правилам разд. А3, и только они, мы будем называть *абсолютной алгеброй высказываний*; ее три формы будут обозначаться ТА, НА и ЕА соответственно (в дальнейшем выяснится, что ЕА — это не что иное, как абсолютная импликативная структура разд. 4А3). Алгебру, образованную расширением абсолютной алгебры так, что ее Е-форма будет классической импликативной структурой, мы будем называть *классической позитивной алгеброй высказываний*, а ее три формы — ТС, НС и ЕС соответственно. Позднее мы увидим, что высказывания, утверждаемые в этой алгебре, совпадают с тавтологиями в смысле обычных двузначных таблиц истинности.

1. Система ТА. Как только что было сказано, система ТА — это система, основанная на правилах разд. А3. Так как эти правила являются теперь исходными, то их можно записать так[1]):

$$\text{Ле}\ \begin{cases} A \wedge B \vdash A \\ A \wedge B \vdash B \end{cases} \qquad \text{Ли}\ \ A, B \vdash A \wedge B$$

$$\text{Ve}\ \ A \vdash C \,\&\, B \vdash C \rightarrow A \vee B \vdash C \qquad \text{Vi}\ \begin{cases} A \vdash A \vee B \\ B \vdash A \vee B \end{cases}$$

$$\text{Pe}\ \ A,\ A \supset B \vdash B \qquad \text{Pi}\ \ A \vdash B \rightarrow \vdash A \supset B$$

Генцен предложил следующую технику для написания этих правил и для явного проведения доказательств, основанных на них. Отметим, что два из этих правил, а именно Pi и Ve, неэлементарны. Предположим, что мы записываем элементарные правила, помещая посылки над горизонтальной линией, а заключение под ней, так что правила для Λ принимают вид

$$\text{Ле}\ \ \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \qquad \text{Ли}\ \ \frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

Префикс '$\vdash$' здесь излишен; правила можно рассматривать как отношения между обами. Доказательства, проводимые только с помощью этих правил, можно тогда представить в виде дерева, как это указано в разд. 2А6; при этом сокращения 'Ле', 'Ли' и т. д. пишутся справа от горизонтальных линий, чтобы указать применяемое правило. Так построенное дерево указывает вывод заключения (т. е. нижнего узла) из посылок (т. е. верхних узлов); если $A_1, \ldots, A_m$ — верхние узлы, а B — нижний узел, то дерево

[1]) Напомним, что $A \vdash B$ — это тот специальный случай $\vdash A \rightarrow \vdash B$, когда вывод осуществляется применением правил. Этот частный случай имеет место тогда, когда вывод представляет собой применение исходного правила.

описывает вывод утверждения

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B \tag{1}$$

Например, вывод утверждения

$$A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$$

являющегося разновидностью ассоциативного закона, дается деревом

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A}\,\text{Ле} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,\text{Ле}}{B}\,\text{Ле}}{A \wedge B}\,\text{Ли} \qquad \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,\text{Ле}}{C}\,\text{Ле}}{(A \wedge B) \wedge C}\,\text{Ли}$$

Чтобы распространить эту технику на правила с неэлементарными посылками (т. е. Pi и Ve), Генцен указывает посылку вида $A \vdash B$, записывая вспомогательную посылку, обозначенную здесь 'A', в квадратных скобках над вспомогательным заключением, обозначенным здесь 'B'. Тогда остальные правила в обозначениях Генцена будут записаны так:

$$\text{Ve}\ \ \frac{\overset{[A]}{C} \quad \overset{[B]}{C} \quad A \vee B}{C} \qquad \text{Vi}\ \ \frac{A}{A \vee B}\ \frac{B}{A \vee B}$$

$$\text{Pe}\ \ \frac{A, \quad A \supset B}{B} \qquad \text{Pi}\ \ \frac{\overset{[A]}{B}}{A \supset B}$$

Чтобы образовать конструкции, в которых используются такие правила, нам нужен некоторый способ указания того, что заключение, полученное по Ve или Pi, не зависит от посылки, заключенной в квадратные скобки. Мы можем проще всего это сделать, нумеруя различные посылки и затем отмечая рядом с 'Ve' и 'Pi' номера посылок, подлежащих исключению. Одновременно номер соответствующей посылки можно исключить во всех еще не исключенных вхождениях над рассматриваемым выводом[1]). Например, доказательство (33) разд. А можно записать так:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\overline{1}}{A} \quad \overset{\overline{2}}{B}}{B \supset A}\,\text{Pi}-2}{A \supset (B \supset A)}\,\text{Pi}-1 \tag{2}$$

[1]) Ниже исключение посылки везде обозначается чертой над ее номером (в оригинале эти номера перечеркнуты). — *Прим. ред.*

Здесь обе отмеченные посылки исключены; следовательно, заключение есть утверждение абсолютной пропозициональной алгебры.

Примерами этой техники, дающими соответственно доказательства утверждений

$$\vdash A \supset . B \supset C : \supset : A \supset B . \supset . A \supset C \tag{3}$$

$$A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C \tag{4}$$

$$A \wedge B . \supset C \vdash A \supset . B \supset C \tag{5}$$

$$A \supset B,\ A \supset C \vdash A \supset B \wedge C \tag{6}$$

$$A \supset C,\ B \supset C \vdash A \vee B \supset C \tag{7}$$

являются следующие выводы:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{3}\quad \overline{1}}{A \quad A \supset (B \supset C)}\,\mathrm{Pe} \qquad \dfrac{\overline{3}\quad \overline{2}}{A \quad A \supset B}\,\mathrm{Pe}}{B \supset C}\,\mathrm{Pe}}{C}\,\mathrm{Pe}}{A \supset C}\,\mathrm{Pi}-3}{A \supset B . \supset . A \supset C}\,\mathrm{Pi}-2}{A \supset . B \supset C : \supset : A \supset B . \supset . A \supset C}\,\mathrm{Pi}-1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{3}\quad 1}{A \quad A \supset B}\,\mathrm{Pe} \qquad 2}{B \qquad B \supset C}\,\mathrm{Pe}}{C}\,\mathrm{Pe}}{A \supset C}\,\mathrm{Pi}-3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{2}\quad \overline{3}}{A \quad B}\,\wedge\mathrm{i} \qquad 1}{A \wedge B \qquad A \wedge B . \supset C}\,\mathrm{Pe}}{C}\,\mathrm{Pe}}{B \supset C}\,\mathrm{Pi}-3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{3}\quad 1}{A \quad A \supset B}\,\mathrm{Pe} \qquad \dfrac{\overline{3}\quad 1}{A \quad A \supset C}\,\mathrm{Pe}}{B \qquad\qquad C}\,\wedge\mathrm{i}}{B \wedge C}\,\mathrm{Pi}-3}{A \supset B \wedge C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{3}\quad 1}{A \quad A \supset C}\,\mathrm{Pe} \qquad \dfrac{\overline{4}\quad 2}{B \quad B \supset C}\,\mathrm{Pe} \qquad \overline{5}}{C \qquad\qquad C \qquad\qquad A \vee B}\,\mathrm{Ve}-3,4}{C}\,\mathrm{Pi}-5}{A \vee B \supset C}$$

Читателю следует заметить, что эти доказательства можно очень естественно построить снизу вверх.

Установим теперь связь между системой TA и системой EA.

Теорема 1. *Если отношение* $\leqslant$ *определено посредством*

$$A \leqslant B \rightleftarrows \vdash A \supset B \tag{8}$$

то система TA *является импликативной структурой* [1]).

Доказательство. Мы заметим сначала, что ввиду Pe и Pi

$$A \leqslant B \rightleftarrows A \vdash B$$

Тогда (ρ) очевидно; ΛK, ΛK′ получаются посредством Λe, а VK, VK′ — посредством Vi; (τ) получается посредством (4), ΛS — посредством (6), VS — посредством (7), P_2 — посредством (5), а P_1 — посредством Λe и Pe:

$$\dfrac{\dfrac{1}{A \wedge (A \supset B)}\,\wedge\mathrm{e} \qquad \dfrac{1}{A \wedge (A \supset B)}\,\wedge\mathrm{e}}{A \qquad\qquad A \supset B}\,\mathrm{Pe}}{B}$$

Таким образом, все постулаты EA справедливы, когда они интерпретируются в TA посредством (8). Это завершает доказательство.

Обращение теоремы 1 будет установлено в разд. 3.

2. Система HA. Перед тем как перейти к обращению теоремы 1, мы попытаемся найти представление абсолютной алгебры высказываний в виде HA-системы, единственным правилом вывода которой является Pe (т. е. modus ponens).

Ясно, что при наличии Pi любая посылка вида $A \vdash B$ в неэлементарном правиле может быть заменена на $\vdash A \supset B$; далее, при наличии Pe любое элементарное правило вида

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

можно заменить схемой утверждений

$$\vdash A_1 \supset . A_2 \supset . \ldots . \supset . A_m \supset B$$

По первому из этих принципов Ve можно заменить элементарным правилом

$$A \supset C, \quad B \supset C, \quad A \vee B \vdash C$$

---

[1]) Согласно разд. 4A1 (пятый абзац), это означает, что каждая элементарная теорема абсолютной импликативной структуры справедлива, когда она интерпретируется в TA посредством (8). Мы докажем это методом дедуктивной индукции.

В силу второго принципа правило Ai будет следовать из схемы

$$\vdash A \supset . B \supset . A \wedge B \qquad (9)$$

в то время как Ae, Vi и Ve будут при тех же предположениях следовать из схем

ΛK $\quad \vdash A \wedge B . \supset . A$

ΛK′ $\quad \vdash A \wedge B . \supset . B$

VK $\quad \vdash A . \supset . A \vee B$

VK′ $\quad \vdash B . \supset . A \vee B$

VS $\quad \vdash A \supset C . \supset : B \supset C . \supset : A \vee B . \supset . C$

Хотя для этих постулатов и соответствующих постулатов EA употребляются одни и те же сокращения, не происходит никакой путаницы, так как постулаты EA являются просто переводами указанных постулатов согласно принципам данного раздела и разд. 1 (ср. разд. 3).

Это приводит нас к Pi. Мы ищем схемы аксиом, из которых Pi будет следовать как эпитеорема при наличии Pe как единственного правила. Чтобы сделать это, мы просматриваем шаги доказательства Pi методом дедуктивной индукции — точнее, доказательства того, что любой об C, такой, что $A \vdash C$, обладает тем свойством, что $\vdash A \supset C$. Базис индукции включает два случая: когда C совпадает с A и когда C — некоторая другая аксиома; шаг индукции охватывает случай, когда C получается из $\vdash B$ и $\vdash B \supset C$ по Pe. Это дает три случая:

Случай 1. C есть A. Искомое заключение немедленно следует из схемы

PI $\quad \vdash A \supset A$

Случай 2. C — аксиома, так что верно

$$\vdash C$$

Тогда в силу Pe мы получим искомый результат из схемы

$$\vdash C \supset . A \supset C$$

т. е. из

PK $\quad \vdash A \supset . B \supset A$

Случай 3. C получается по Pe из $B \supset C$ и B. По индуктивному предположению,

$$\vdash A \supset . B \supset C$$
$$\vdash A \supset B$$

Следовательно, искомое заключение будет следовать из схемы

PS $\quad \vdash A \supset . B \supset C : \supset : A \supset B . \supset . A \supset C$

Мы видим, что независимо от того, какие могут быть дополнительные аксиомы или схемы аксиом, Pi будет эпитеоремой всегда, когда в качестве схем аксиом или теорем у нас будут PI, PK и PS. Перед тем как формально установить это заключение, будет уместно сделать два замечания.

Первое из них состоит в том, что схема PI является следствием PK и PS. Это было показано в разд. 3A3.

Второе замечание состоит в том, что (9) можно заменить более слабым принципом

ΛS $\quad \vdash A \supset B . \supset : A \supset C . \supset : A \supset . B \wedge C$

аналогичным VS. Пожалуй, легче всего показать это непосредственно. Пусть $\vdash 1$, и пусть '$\rightarrow$' обозначает формальную выводимость. Тогда мы выводим (9) из ΛS так [1]). Поскольку в силу PK

$$A \vdash 1 \supset A \,\&\, B \vdash 1 \supset B$$

то мы имеем

$$\vdash A \,\&\vdash B \rightarrow \vdash 1 \supset A \,\&\vdash 1 \supset B$$
$$\rightarrow \vdash 1 \supset A \wedge B \qquad \text{по ΛS}$$
$$\rightarrow \vdash A \wedge B, \qquad \text{так как } \vdash 1$$

Следовательно, $\vdash A \rightarrow \vdash B \supset . A \wedge B$ по Pi

$\vdash A \supset . B \supset . A \wedge B$ по Pi

Обратно, предположим, что выполняется (9). Тогда

$\vdash A \supset B \,\&\vdash A \supset C \,\&\vdash A \rightarrow \vdash B \,\&\vdash C \rightarrow \vdash B \wedge C$ по (9)

$\vdash A \supset B \,\&\vdash A \supset C \rightarrow \vdash A \supset . B \wedge C$ по Pi

откуда мы выводим ΛS двумя применениями Pi, как и раньше.

Теперь это рассуждение можно формализовать в следующих определении и теоремах. Удобно сформулировать две различные теоремы ввиду интереса, который представляют их результаты.

Теорема 2 (теорема о дедукции, или дедукционная теорема). *Пусть* $\mathfrak{S}$ *— система алгебры высказываний с (им)пликацией* $\supset$. *Пусть* Pe *— единственное правило* $\mathfrak{S}$, *и пусть все частные случаи схем* PK *и* PS *являются элементарными теоремами* $\mathfrak{S}$. *Тогда* Pi *является эпитеоремой* $\mathfrak{S}$ *любого из ее аксиоматических расширений.*

[1]) В каждой строке, за исключением тех, в которых записано Pi, есть одно или более применений Pe; эти применения Pe явно не упоминаются.

Определение. *Система* HA — это система алгебры высказываний с операциями $\supset$, $\wedge$, $\vee$, порожденная схемами аксиом PK, PS, ΛK, ΛK′, ΛS, VK, VK′, VS с Pe как единственным правилом вывода [1]).

Теорема 3. *Каждое утверждение* TA *является утверждением* HA; *кроме того, правила* TA *справедливы как эпитеоремы* HA.

Доказательство. Приведенное выше рассуждение показывает справедливость правил TA в HA; следовательно, каждое утверждение TA является также утверждением HA.

Обращение теоремы 2 будет установлено в разд. 3 (теорема 5).

3. Абсолютная алгебра высказываний. Закончим теперь начатое в разд. 1 и 2 изучение абсолютной алгебры высказываний. Первая теорема будет касаться отношений между системами HA и EA; затем результаты разд. 1—3 суммируются, в заключительном утверждении о эквивалентности трех типов систем.

Теорема 4. *Если* $\vdash A$ *в* HA, *то* $1 \leqslant A$ *в* EA.

Доказательство. Заметим сначала, что в силу (vi) теоремы 4C1

$$1 \leqslant B \supset C \rightleftarrows B \leqslant C \tag{10}$$

[так что EA удовлетворяет условию (12) разд. A1]; далее в силу (ii) теоремы 4C1

$$B_1 \leqslant (B_2 \supset C) \rightleftarrows B_1 \wedge B_2 \leqslant C \tag{11}$$

Теперь если A — об вида $B_1 \supset . B_2 \supset . \ldots . \supset . B_m \supset . C$, то мы скажем, что элементарная теорема EA является E-образом A, если либо

$$1 \leqslant A$$

либо для некоторого $k \leqslant m$ она имеет вид [2])

$$B_1 \wedge \ldots \wedge B_k \leqslant B_{k+1} \wedge \ldots \wedge B_m \supset C$$

Тогда ввиду (10) и (11) все эти E-образы эквивалентны в EA и любой из них истинен тогда и только тогда, когда истинны все остальные.

[1]) Конечно, в этом определении существенно то, что система является ассерторической, что Pe — ее единственное правило и что все ее утверждения порождаются из только что описанных схем аксиом. Другое множество схем аксиом, порождающее то же множество утверждений с помощью того же правила Pe, рассматривается как другая формулировка HA, а не как особая система. Но для справедливости некоторых утверждений о HA (например, в разд. E2 ниже) существенно, чтобы система формулировалась именно так, как здесь. Когда это будет ясно из контекста, мы не будем беспокоиться об этом различии. Но когда желательна бо́льшая точность, приведенная здесь формулировка будет называться '*стандартной формулировкой* HA'.

[2]) Для $k = m$ правая часть неравенства интерпретируется как C.

Скажем, что об из HA EA-верен, если он имеет E-образ, истинный в EA; это — все равно, что сказать, что все его E-образы истинны в EA. Мы должны показать дедуктивной индукцией, что каждое утверждение HA EA-верно.

Индукционный шаг уже описан в разд. A1 (доказательство (9)). Чтобы закончить доказательство, необходимо только показать, что каждое из аксиоматических высказываний HA EA-верно. Это и показано в следующей таблице, в первом столбце которой перечислены номера схем аксиом, во втором — соответствующий E-образ для произвольного частного случая этой схемы и в третьем — ссылка на доказательство EA-верности.

PK	$A \leqslant B \supset A$	(i) теоремы 4C1
PS	$A \supset (B \supset C) \leqslant (A \supset B) \supset (A \supset C)$	(iii) теоремы 4C1
ΛK	$A \wedge B \leqslant A$	ΛK
ΛK′	$A \wedge B \leqslant B$	ΛK′
ΛS	$(A \supset B) \wedge (A \supset C) \leqslant A \supset (B \wedge C)$	(iv) теоремы 4C1
VK	$A \leqslant A \vee B$	VK
VK′	$B \leqslant A \vee B$	VK′
VS	$(A \supset C) \wedge (B \supset C) \leqslant (A \vee B) \supset C$	теорема 4C3

Это завершает доказательство теоремы 4.

Соединяя теоремы 1, 3, 4 в одно утверждение, имеем следующую теорему:

Теорема 5. *Системы* TA, HA *и* EA *эквивалентны*; *точнее если дан об* A, *то три утверждения*

$$\vdash A \text{ в TA} \tag{12}$$

$$\vdash A \text{ в HA} \tag{13}$$

$$A \quad \text{EA-верно} \tag{14}$$

попарно эквивалентны.

Доказательство. Ввиду того что Pe и $\vdash 1$ [1]) верны в HA, мы получаем (12) из (14) по теореме 1; (13) следует из (12) по теореме 3, а (14) — из (13) по теореме 4.

4. Классическая позитивная алгебра высказываний. В разд. 4C5 мы видели, что схема

$$(A \supset B) \supset A \leqslant A \tag{15}$$

не является схемой элементарных теорем абсолютной импликативной структуры, а в разд. 4D1 классическая импликативная структура была определена как импликативная структура, для

[1]) Это необходимо для рассмотрения случая, когда единственным E-образом A является $1 \leqslant A$.

которой выполняется (15). Эту классическую импликативную структуру мы будем называть *системой* EC.

Действуя по аналогии с абсолютной системой, мы можем определить классические позитивные системы высказываний HC и TC, добавляя к HA и TA постулаты, соответствующие (15). Постулатом для HC является схема

Pc $\qquad \vdash A \supset B . \supset A : \supset A$ [1])

называемая обычно "законом Пирса"; постулатом для TC является правило

Pk $\qquad \dfrac{[A \supset B]}{\dfrac{A}{A}}$

Другая форма правила Pk:

$$\frac{\dfrac{[A \supset B]}{C} \qquad \dfrac{[A]}{C}}{C}$$

Эта классическая система интересна тем, что все утверждения HC — это обы, образованные с помощью $\supset$, $\wedge$, $\vee$, дающие тавтологии при оценке посредством обычных двузначных таблиц истинности. Это легко показать дедуктивной индукцией. То, что, обратно, каждая такая тавтология является утверждением HC — результат, который называют теоремой полноты для HC,— неудобно доказывать с помощью имеющегося у нас пока аппарата; но в дальнейшем мы получим этот результат.

Между тем мы заметим просто, что системы TC, HC, EC эквивалентны в том же смысле, что и TA, HA, EA; иными словами, имеет место следующая

Теорема 6. *Если* A *— об, то три утверждения*

$\vdash A$ *в* TC
$\vdash A$ *в* HC
$1 \leqslant A$ *в* EC

попарно эквивалентны.

Доказательство. Доказательство того, что (15) правильно интерпретируется в TC, дается следующей диаграммой:

$$\frac{\dfrac{1}{A \supset B . \supset A} \qquad \dfrac{\overline{2}}{A \supset B}\,\mathrm{Pe}}{\dfrac{A}{A}\,\mathrm{Pk}-2}$$

Остальные утверждения доказываются так же, как в теоремах 2—5.

[1]) Точки излишни, если мы используем правило ассоциации налево.

Упражнения

Следующие сокращения всюду используются как имена для соответствующих схем утверждений:

PB $\qquad \vdash B \supset C . \supset : A \supset B . \supset . A \supset C$
PB′ $\qquad \vdash A \supset B . \supset : B \supset C . \supset . A \supset C$
PC $\qquad \vdash A \supset . B \supset C : \supset : B \supset . A \supset C$
PI $\qquad \vdash A \supset A$
PK $\qquad \vdash A \supset . B \supset A$
PS $\qquad \vdash A \supset . B \supset C : \supset : A \supset B . \supset . A \supset C$
PW $\qquad \vdash A \supset . A \supset B : \supset . A \supset B$

1. Показать непосредственно, что PB, PC, PW истинны в HA.

2. Показать, что если PK, PS заменяются любым из следующих множеств:

PB, PC, PK, PW
PB′, PK, PW

то мы получаем достаточное множество схем аксиом для HA. (Первое множество было использовано в книге Гильберта [GLM]; второе — в книге Гильберта и Бернайса [GLM.I]. В последней книге на стр. 70 и след. рассматриваются другие аксиомы.)

3. Показать непосредственно, что TЗ справедлива в HA. (Использовать PB, PB′.)

4. Исследовать независимость каждого из множеств схем аксиом для HA. (Гильберт и Бернайс [GLM. I], стр. 72—82.)

5. Провести во всех деталях доказательство (9) так, чтобы получить доказательство в формализме HA без использования Pi.

6. Показать, что если принять (9) как схему аксиом, то PK становится излишним, если постулируются PB′ (или PB, PC) и PW, но остается независимым, если постулируется только PS. (Чёрч [IML$_2$], упражнение 26.8.)

7. Рассмотреть следующее множество схем аксиом для HA (принадлежащее Гейтингу [FRI]):

$\vdash A \supset . A \wedge A$
$\vdash A \wedge B . \supset . B \wedge A$
$\vdash A \wedge B . \supset . A \wedge C \supset B \wedge C$
$\vdash A \supset B . \wedge . B \supset C . \supset . A \supset C$
$\vdash B \supset . A \supset B$
$\vdash A \wedge . A \supset B . \supset . B$
$\vdash A \supset . A \vee B$
$\vdash A \vee B . \supset . B \vee A$
$\vdash A \supset C . \wedge . B \supset C . \supset . A \vee B \supset C$

Показать, что это множество эквивалентно множеству аксиом, приведенному в разд. B. (Шрётер [UHA]. Показать достаточность этих аксиом сведéнием к EA, а их справедливость — с помощью TA.)

8. Как формулируется теорема о дедукции, если в дополнение к Pe допускается правило подстановки?

9. Сформулировать систему, в которой допустимо правило Pe, а правило Pi заменяется правилом, согласно которому если $A \vdash B$, то либо $\vdash B$, либо $\vdash A \supset B$, но в которой неверно PK.

10. Как формулируется дедукционная теорема в системе, схемами аксиом которой являются только PB и PI, PB, PC и PI, PB, PC, PW и PI? ([GDT].)

11. Показать, что для доказуемости $A \vdash B$ в TA, из которой опущены правила для P, необходимо и достаточно, чтобы $A \leqslant B$ было верно в общей дистрибутивной структуре.

12. Показать, что мы получаем систему HC, если добавим к HA любую из схем

$$\vdash A \vee . A \supset B$$
$$\vdash A \supset . B \vee C . \supset : A \supset B . \vee C$$

13. Показать, что PK, PB′ и PC образуют достаточное множество схем аксиом для чисто импликативного фрагмента HC. (Шмидт [VAL], теорема 56. Формулировка принадлежит Тарскому и Бернайсу и появилась в книге Лукасевича и Тарского [UAK], теорема 29.)

14. Показать, что утверждения, выводимые с помощью Pe из единственной схемы аксиом

$$\vdash A \supset B . \supset C : \supset : E \supset : B \supset . C \supset D . \supset . B \supset D$$

— это элементарные импликативные теоремы HA и только они (здесь 'E' — U-переменная). (Мередит [SAP].)

***15.** Можно ли получить элементарные теоремы структуры — и если да, то для какого вида структуры — из схем аксиом для HA, отличных от схем аксиом для P, определив надлежащим образом $A \leqslant B$? Если нельзя, то какое добавление следует сделать? [Если мы используем определение (8), то возникают затруднения с (ρ) и (τ); если же использовать определение упражнения **11** — то с AS и VS.]

16. Показать, что HA имеет следующую нормальную матричную интерпретацию (разд. A4):

$$\alpha \equiv \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \beta \equiv \{1\}$$
$$A \vee B = \min(A, B)$$
$$A \wedge B = \max(A, B)$$
$$A \supset B = \begin{cases} 1, & \text{если } A \geqslant B \\ B, & \text{если } A \leqslant B \end{cases}$$

Вывести отсюда, что Pc недоказуемо в HA. С другой стороны, если $A_1, \ldots, A_m$ — различные атомы и

$$B_{ij} \equiv A_i \supset A_j . \wedge . A_j \supset A_i$$
$$C_k \equiv B_{1k} \vee B_{2k} \vee \ldots \vee B_{k-1,\,k}$$
$$D_m \equiv C_2 \vee C_3 \vee \ldots \vee C_m$$

то D_m недоказуемо, хотя оно всегда имеет выделенное значение в приведенной выше матрице при $n < m$. (Гёдель [IAK].)

C. СИСТЕМЫ LA и LC

В этом разделе мы начнем изучение ряда систем, которые были введены Генценом и названы им L-системами. Они отличаются от систем, рассмотренных до сих пор, принципиально в следующем. Элементарные утверждения — это утверждения о выводимости; в каждом таком утверждении есть определенное заключение и множество посылок (быть может, пустое), причем такое утверждение интерпретируется как устанавливающее существование T-доказательства, ведущего к заданному заключению и не зависящего явно ни от каких посылок, кроме заданных. Но в то время как такие теоремы для T-системы не образуют дедуктивной теории, по крайней мере с элементарными правилами, они образуют такую теорию в L-системе. Далее, правила таковы, что новые комбинации можно вводить, а не исключать, и это дает систему квазиконструктивного характера, имеющую важные применения.

Одновременно с L-системами будет сделано другое нововведение. Предполагается, что интерпретантами высказываний служат формальные утверждения, принадлежащие некоторой базисной формальной системе $\mathfrak{S}$. На эту систему $\mathfrak{S}$ наложены лишь очень слабые ограничения; как особый случай допускается, чтобы $\mathfrak{S}$ была пустой. Этот особый случай приводит к теории Генцена — и алгебре высказываний в том виде, как ее обычно понимают. Поэтому здесь мы имеем некоторое обобщение; в результате его логика высказываний становится скорее частью методологии формальных систем вообще, нежели теорией конкретной формальной системы, изучаемой ради нее самой. Это нововведение не зависит от изложенного в предыдущем абзаце; его можно было бы сделать в разд. B или даже в разд. 4C. Мы говорим о нем здесь, так как оно тесно связано с семантическими рассмотрениями разд. 1.

Так как теория L-систем довольно обширна, уместно изложить ее в трех разделах. В настоящий раздел входят формулировка системы, технические методы и основные теоремы, связанные с ней. Взаимоотношение между различными видами L-систем и другими типами систем будет рассмотрено в разд. D, а дальней-

шая разработка системы проводится в разд. E. Упражнения ко всем трем разделам находятся в конце разд. E.

Содержание этого раздела будет служить базой не только для систем LA и LC, которым в основном посвящена эта глава, но и для аналогичных L-систем, рассматриваемых в последующих главах.

1. Предварительное изучение абсолютной системы. Рассмотрим сначала на предварительном и частично интуитивном уровне образование системы LA($\mathfrak{S}$), основанной на данной формальной системе $\mathfrak{S}$. В этом рассмотрении мы начнем с определенной интерпретации системы и с вопроса об истинности постулатов относительно этой интерпретации, чтобы образовать базис для формализации, которая будет введена позднее.

Интерпретантами высказываний из LA($\mathfrak{S}$) будут определенные утверждения из $\mathfrak{S}$. Мы назовем эти утверждения *составными утверждениями* $\mathfrak{S}$. Они образуют индуктивный класс, порожденный из элементарных утверждений $\mathfrak{S}$ с помощью позитивных пропозициональных связок. Соответственно мы говорим, что элементарные утверждения $\mathfrak{S}$ образуют класс $\mathfrak{C}$ *элементарных высказываний*; (составные) высказывания образуют класс $\mathfrak{P}$, порожденный из элементарных высказываний с помощью операций. В настоящей главе этими операциями являются $\supset$, $\wedge$ и $\vee$. Оба класса $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{P}$ зависят от $\mathfrak{S}$; когда мы желаем явно указать эту зависимость, мы называем их $\mathfrak{C}(\mathfrak{S})$ и $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ соответственно.

Мы постулируем два вида отношений выводимости между высказываниями, обозначаемые соответственно

$$A_1, \ldots, A_m \vdash_0 B \qquad (1)$$

$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B \qquad (2)$$

Эти записи допускаются для любого значения $m \geqslant 0$; для случая $m = 0$ они пишутся в виде $\vdash_0 B$ и $\vdash B$ соответственно. Из них (1) будет иметь место только тогда, когда $A_1, \ldots, A_m$ и B элементарны, а если это условие выполнено, то при $m > 0$ в точности в том случае, когда B [1]) является следствием $A_1, \ldots, A_m$, согласно некоторому правилу вывода из $\mathfrak{S}$, а при $m = 0$ в точности в том случае, когда B является аксиомой $\mathfrak{S}$ [2]). Утверждения (1) выделяются, таким образом, конечным списком схем, и роль их в теории чисто вспомогательная. Что же касается утверждений (2), то они-то и будут собственно элементарными утверждениями

[1]) При рассмотрении интерпретаций разрешается отождествлять высказывания с представляемыми ими утверждениями.

[2]) Форма (1) может представлять только элементарное правило (разд. 3D3). Поэтому наши рассмотрения ограничены системами $\mathfrak{S}$, имеющими только такие правила. (Это довольно существенно.)

системы LA ($\mathfrak{S}$); они представляют собой дедуктивный класс, обычным путем выделяемый с помощью аксиом и правил [1]).

Таким образом, это изучение относится в основном к элементарным утверждениям вида (2). Для обозначения последовательностей высказываний удобно будет использовать заглавные готические буквы из конца алфавита; так что типичной формой записи утверждения (2) будет

$$\mathfrak{X} \Vdash B \qquad (3)$$

где $\mathfrak{X}$ — конечная последовательность высказываний, быть может пустая.

Интерпретация, которую мы теперь связываем с (3), состоит в том, что B является следствием $\mathfrak{X}$. Мы можем определить это точнее, сказав, что B является заключением T-доказательства, существенными посылками которого могут быть только некоторые члены $\mathfrak{X}$. Мы можем иначе рассматривать (3) как утверждение о том, что $\Vdash B$ доказуемо в системе L ($\mathfrak{S}$; $\mathfrak{X}$), образованной присоединением $\mathfrak{X}$ к L ($\mathfrak{S}$).

Для этой интерпретации (3) будет справедливо в следующих случаях:

($a1$) когда B содержится в $\mathfrak{X}$;

($a2$) когда B является аксиомой $\mathfrak{S}$;

($a3$) когда B — элементарное высказывание и $\mathfrak{X}$ содержит элементарные высказывания $A_1, \ldots, A_m$, такие, что имеет место (1).

При этой же интерпретации справедливость (3) зависит только от класса высказываний в $\mathfrak{X}$, а совсем не от их порядка или наличия повторений; далее, можно добавить к $\mathfrak{X}$ произвольные высказывания, не нарушая справедливости (3). Это можно выразить тремя правилами вывода, называемыми *структурными правилами*. Первое из них, называемое *правилом перестановки*, говорит, что (3) выводимо из

$$\mathfrak{X}' \Vdash B$$

где $\mathfrak{X}'$ — любая перестановка $\mathfrak{X}$; второе, называемое *правилом сокращения*, говорит, что (3) выводимо из

$$\mathfrak{X}, A \Vdash B \qquad (4)$$

при условии, что A содержится в $\mathfrak{X}$; а последнее, называемое *правилом ослабления*, говорит, что (4) является следствием (3) для

[1]) Отношения $\vdash_0$ и $\Vdash$ являются, таким образом, предикатами, число мест которых не фиксировано. Эта возможность не рассматривалась явно в разд. 2C. Чтобы подвести эти отношения под рассмотренную в разд. 2C теорию, необходимо представить их в виде совокупности предикатов, каждый из которых имеет фиксированное число мест. При такой точке зрения правила, которые будут приняты ниже, были бы чрезвычайно сложными.

любого A. Будет удобно называть эти три правила C, W и K по аналогии с комбинаторами **C**, **W** и **K** соответственно.

Теперь мы рассмотрим правила, относящиеся к операциям. Мы принимаем принцип, уже предложенный в разд. A3, согласно которому смысл понятия определяется обстоятельствами, при которых это понятие вводится в рассуждения. Для утверждений вида (3) введение можно осуществить либо налево, либо направо. Поэтому мы предлагаем следующие обозначения. Пусть 'P', 'Λ', 'V' употребляются, как и ранее, для обозначения операций $\supset$, $\wedge$, $\vee$ соответственно, и пусть 'O' обозначает любую из них или является именем какой-либо новой операции, которая, возможно, будет введена позднее. Тогда мы обозначаем правило введения направо, записывая соответствующий символ со знаком '*' справа; подобным же образом мы обозначаем правило введения налево, записывая этот символ с '*' слева [1]).

Для правил введения направо положение по существу такое же, как в разд. A3. Действительно, правила P*, Λ*, V* аналогичны правилам Pi, Λi, Vi:

P* $\quad \mathfrak{X},\ A \Vdash B \to \mathfrak{X} \Vdash A \supset B$

Λ* $\quad \mathfrak{X} \Vdash A \,\&\, \mathfrak{X} \Vdash B \to \mathfrak{X} \Vdash A \wedge B$

V* $\quad \mathfrak{X} \Vdash A \to \mathfrak{X} \Vdash A \vee B$

$\mathfrak{X} \Vdash B \to \mathfrak{X} \Vdash A \vee B$

Для правил введения налево мы должны задать вопросы, аналогичные тем, которые мы задавали для правил Oe в разд. A3. Чтобы оправдать введение $A \circ B$, в результате чего образуется

$$\mathfrak{X},\ A \circ B \Vdash C$$

мы должны спросить: когда C при наличии $\mathfrak{X}$ является следствием $A \circ B$? Если мы исследуем мотивировку правил Oe, то придем к следующему заключению. Мы можем вывести C из $A \wedge B$ тогда, когда можем вывести его из A или из B; отсюда получаем правила

*Λ $\quad \mathfrak{X},\ A \Vdash C \to \mathfrak{X},\ A \wedge B \Vdash C$

$\mathfrak{X},\ B \Vdash C \to \mathfrak{X},\ A \wedge B \Vdash C$

[1]) Эта система обозначений является модификацией системы обозначений, введенной Клини в [IMM]. Он употребляет '→' вместо '⊩' и инфиксы '⊃', '∧', '∨' вместо 'P', 'Λ', 'V'. Он обозначает правила, записывая '→' так, что скорее знак операции, нежели '→', указывает сторону, на которую производится введение. Я приспосабливаю эту систему обозначений к соглашениям, принятым здесь и в комбинаторной логике. В комбинаторной логике 'P', 'Λ', 'V' — префиксы для обозначения операций, и существенно иметь префиксы, отличные от инфиксов. Другие префиксы — соответственно 'C', 'K', 'A' — используются польскими логиками, но они не согласуются с обозначениями комбинаторной логики.

Мы выводим C из $A \vee B$ тогда и только тогда, когда можем вывести его как из A, так и из B; отсюда получаем правило [см. (30) разд. A]

*V $\quad \mathfrak{X},\ A \Vdash C \,\&\, \mathfrak{X},\ B \Vdash C \to \mathfrak{X},\ A \vee B \Vdash C$

Наконец, если в нашем распоряжении нет A, то мы не можем вывести из $A \supset B$ ничего, чего не могли бы вывести из этого высказывания как целого, но если у нас есть A, то мы можем вывести из $A \supset B$ любое высказывание C, которое можем вывести только из B; отсюда получаем правило

*P $\quad \mathfrak{X} \Vdash A \,\&\, \mathfrak{X},\ B \Vdash C \to \mathfrak{X},\ A \supset B \Vdash C$

Мы увидим, что правила *O выражают по существу то же, что и правила Oe, только здесь ничто не удаляется.

Чтобы выразить то, что множество высказываний A, таких, что имеет место $\mathfrak{X} \Vdash A$, замкнуто относительно правил системы $\mathfrak{S}$, нам нужно специальное правило

$\vdash *$ Если имеет место (1) и

$$\mathfrak{X} \Vdash A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

то

$$\mathfrak{X} \Vdash B$$

Обратным ему в определенном смысле является правило

$*\vdash$ если имеет место (1) и

$$\mathfrak{X},\ B \Vdash C$$

то

$$\mathfrak{X},\ A_1, \ldots, A_m \Vdash C$$

Наконец, правило

$$\mathfrak{X} \Vdash A \,\&\, \mathfrak{X},\ A \Vdash B \to \mathfrak{X} \Vdash B \tag{5}$$

оказывается справедливым на основе выбранной интерпретации. Это правило Генцен назвал "сечением" (*Schnitt*).

Среди приведенных здесь правил есть лишние. Так, (*a*3) интуитивно выражает то же, что и $\vdash *$, и легко выводится из него и (*a*1) (см. теорему 5 в разд. 8). Имея (*a*3) и $\vdash *$, мы можем тогда вывести $* \vdash$ в силу (5). Поэтому мы опустим правила (*a*3) и $* \vdash$. Но особенно поразительно то, что лишним оказывается (5). В этом и состоит основная теорема (*Hauptsatz*) диссертации Генцена. Здесь мы не будем включать (5) в число исходных правил, но докажем эпитеорему, называемую *элиминационной теоремой* (или *теоремой об устранимости сечений*), согласно которой (5)

является допустимым правилом при наличии других правил [1]). Эта глубокая теорема имеет важные следствия; некоторые из них упомянуты во введении к данной главе. Другие излишества выявятся по мере нашего продвижения вперед.

Постулаты ($a1$), ($a2$), C, W, K, O*, *O (где O — это P, Λ или V) и $\vdash *$ образуют базис, который мы выбираем для LA ($\mathfrak{S}$); ее мы будем называть просто LA, когда не нужно будет явно напоминать о $\mathfrak{S}$. Правила O*, *O мы будем называть *операциональными правилами*. Система $\mathfrak{S}$ произвольна — если не считать того, что ее правила должны иметь вид (1), так что она элементарна в смысле разд. 2D3. Допускается возможность, что $\mathfrak{S}$ вообще не содержит никаких аксиом и правил, так что ($a2$) и (1) пусты; в этом случае $\mathfrak{S}$ будет обозначаться $\mathfrak{O}$. Тогда $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{O}$) будет состоять из некоторых (неопределенных) E_1, E_2, . . ., и LA ($\mathfrak{O}$) будет разновидностью алгебры высказываний.

Система LA определяет класс высказываний A, таких, что

$$\Vdash A \tag{6}$$

Эти высказывания мы будем называть утверждаемыми высказываниями, или просто *утверждениями* LA. Мы увидим в должное время, что утверждения LA ($\mathfrak{O}$) в точности те же, что и у HA.

Перед тем как перейти к строгой формализации этих понятий, мы остановимся, чтобы рассмотреть другую интерпретацию более классической природы.

2. Классическая система LC. В системе LA сразу бросается в глаза несимметричность выражений, стоящих слева и справа от знака $\Vdash$. Попробуем теперь, руководствуясь вначале чисто формальной аналогией, установить более широкую систему, в которой эта несимметричность была бы устранена. В этой новой системе элементарные утверждения, заменяющие (2), будут иметь вид

$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B_1, \ldots, B_n \tag{7}$$

т. е. вид

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y} \tag{8}$$

где $\mathfrak{Y}$, как и $\mathfrak{X}$, может быть последовательностью высказываний, имеющей произвольную длину. Мы принимаем такое утверждение в качестве аксиоматического, если:

[1]) Внимательный анализ принципов, согласно которым устанавливались правила, показывает, что ненужность правила (5) можно было ожидать a priori. Ведь структурные правила просто объясняют, что $\mathfrak{X}$ в (3) следует рассматривать как класс, тогда как правила O* и *O объясняют сложное понятие через что-то более простое. Правила ($a2$), $\vdash *$ показывают, что выводимость в $\mathfrak{S}$ переносится в LA ($\mathfrak{S}$). Интуитивно чувствуется, что этих правил достаточно для того, чтобы установить значение каждого из утверждений (3). Тогда (5) должно быть эпитеоремой — и действительно является таковой.

($a1$) некоторое B_j совпадает с некоторым A_i;

($a2$) некоторое B_j — аксиома $\mathfrak{S}$.

Далее мы примем структурные правила, действующие на $\mathfrak{Y}$, которые, так сказать, двойственны правилам, действующим на $\mathfrak{X}$, и по аналогии с операциональными правилами обозначим первые через C*, K*, W* соответственно, тогда как последние (т. е. действующие на $\mathfrak{X}$) обозначим *C, *W и *K соответственно. Что касается операциональных правил, то мы примем прежние правила с добавлением произвольной последовательности высказываний $\mathfrak{Z}$ справа ко всем посылкам и заключению; таким образом, правилами для P будут

$$*\mathrm{P} \qquad \mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z} \;\&\; \mathfrak{X}, B \Vdash C, \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, A \supset B \Vdash C, \mathfrak{Z}$$

$$\mathrm{P}* \qquad \mathfrak{X}, A \Vdash B, \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X} \Vdash A \supset B, \mathfrak{Z}$$

Таким путем мы образуем систему, которую назовем LC (точнее, LC ($\mathfrak{S}$)). Правила этой системы будут полностью выписаны в разд. 4.

Система LC была сформулирована посредством аналогии. У нее, однако, имеется правильная интерпретация в терминах оценок по таблицам истинности. Назовем оценкой произвольное приписывание значений 0 и 1 элементарным высказываниям. Мы назовем такую оценку *допустимой*, если все аксиомы принимают значение 1 и в любом примере (1), где посылки A_1, . . ., A_m имеют значение 1, заключение B также принимает значение 1. Тогда при любой допустимой оценке каждое утверждаемое высказывание принимает значение 1, тогда как неутверждаемое высказывание может принимать любое из значений — 0 или 1 [1]). Пусть значения, придаваемые составным высказываниям, получаются с помощью обычных двузначных таблиц истинности, где 1 интерпретируется как истина. Тогда интерпретант (7) истинен в 0—1-таблицах тогда и только тогда, когда для каждой допустимой оценки либо некоторое A_i принимает значение 0, либо некоторое B_j принимает значение 1. Тогда дедуктивной индукцией легко показать, что интерпретант (7) истинен всегда, когда (7) выводимо в LC.

С другой стороны, имеются утверждения (3), верные в интерпретации, рассмотренной здесь, но не в интерпретации разд. 1. Например, утверждение $\Vdash A \vee (A \supset B)$ истинно для интерпретации посредством 0—1-таблиц независимо от того, каковы система $\mathfrak{S}$ и высказывания A, B. С другой стороны, в системе $\mathfrak{S}$, для которой $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{S}$) состоит из E_1, E_2 и E_3, где E_3 является единственной аксиомой, а единственным правилом вывода является $E_1 \vdash E_2$, рассмотрим высказывание $E_2 \vee (E_2 \supset E_1)$. Здесь E_2 не утверждается, так как единственным утверждаемым элементарным высказы-

[1]) Заметим, что последнее утверждение неконструктивно.

ванием $\mathfrak{S}$ является E_3, а $E_2 \supset E_1$ не утверждается, так как после присоединения E_2 к $\mathfrak{S}$ единственными элементарными теоремами являются только E_2 и E_3; следовательно, $\Vdash E_2 \vee (E_2 \supset E_1)$ не утверждается в LA ($\mathfrak{S}$) для этой $\mathfrak{S}$ [1]).

Поэтому правила для LA (в том виде, как они приведены в разд. 1) — те же, что и правила для LC (в том виде, как они даны здесь), с дополнительным требованием, чтобы $\mathfrak{Y}$ каждого утверждения (8) состояла из одного высказывания. Мы можем выразить это, говоря, что система LA сингулярна, тогда как LC мультиплярна [2]). Однако это не значит, что LC нельзя интерпретировать в терминах понятий разд. 1. Действительно, предположим, что мы интерпретируем (7) в LA как утверждение о том, что

$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B_1 \vee \ldots \vee B_n$$

При этой интерпретации, как мы увидим позднее, справедливы все правила LC, за исключением P*. Поэтому имеется мультиплярная формулировка LA; она отличается от мультиплярной формулировки LC тем, что в P* последовательность $\mathfrak{Z}$ должна быть пустой.

Опять-таки мы можем иметь сингулярную формулировку LC. Мы увидим позднее, что утверждения системы LC ($\mathfrak{D}$) (т. е. высказывания, для которых выполняется (6)), являются утверждениями классической позитивной алгебры высказываний и обратно. Сравнение с разд. B4 подсказывает, что мы можем получить сингулярную формулировку LC, добавив к LA правило

Px $$\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash A \rightarrow \mathfrak{X} \Vdash A$$

Мы используем индексы '1' и 'm' для того, чтобы различать сингулярную и мультиплярную формы. Тогда сингулярной формой LA, описанной в разд. 1, является LA_1, ее мультиплярной формой — LA_m; сингулярной и мультиплярной формами LC являются соответственно LC_1 и LC_m. Эти индексы будут отсутствовать в том случае, когда по контексту безразлично, какая из этих форм имеется в виду.

Далее мы займемся отношениями между различными формулировками сингулярной и мультиплярной систем LA и LC. Мы обнаружим, что различные отношения, установленные здесь нефор-мально, можно вывести строгими рассуждениями.

3. Формулировка морфологии. Мы обратимся теперь к строгой формализации систем LA и LC и некоторых родственных систем. Мы начнем здесь с формулировки морфологии, оставив собственно теорию до разд. 4.

[1]) Этот пример взят из [TFD], стр. 28 и след. Можно строго показать, что $\Vdash E_2 \vee (E_2 \supset E_1)$ нельзя получить по нашим правилам. Это особый случай общей процедуры в разд. 5 и E7.

[2]) Эти термины предложены С. А. Яновской; чаще говорят 'односукцедентная' и 'многосукцедентная'.— *Прим. ред.*

a. Элементарные высказывания. Мы отправляемся от класса $\mathfrak{C}$, элементы которого называем элементарными высказываниями. Относительно $\mathfrak{C}$ ничего не постулируется, кроме того, что это определенный класс формальных объектов. В интерпретации разд. 1 и 2 он соответствует элементарным утверждениям рассматриваемой системы $\mathfrak{S}$. Мы оставляем букву 'E', быть может с индексами, для обозначения элементарных высказываний [1]).

b. Высказывания. Класс $\mathfrak{P}$ высказываний — это монотектонический индуктивный класс, порожденный из элементарных высказываний операциями $\supset$, $\wedge$, $\vee$. Таким образом,

($b1$) $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}$

($b2$) Если A и B принадлежат $\mathfrak{P}$, то $A \supset B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ принадлежат $\mathfrak{P}$, но не $\mathfrak{C}$.

Высказывания являются обами нашей системы, в то время как элементарные высказывания являются атомами. Для обозначения высказываний мы используем буквы 'A', 'B', 'C', 'D' и, если необходимо, другие заглавные курсивные латинские буквы.

c. Просеквенции. Конечная последовательность высказываний будет называться *просеквенцией* [2]). Для обозначения просеквенций употребляются заглавные готические буквы, обычно из конца алфавита. Высказывания, принадлежащие просеквенции, будут называться ее *конституэнтами*; это следует понимать в том смысле, что если одно и то же высказывание в просеквенции повторяется несколько раз, то каждое его индивидуальное вхождение образует отдельный конституэнт. Просеквенция может быть пустой или же содержать любое конечное число конституэнтов. Просеквенция, состоящая не более чем из одного конституэнта, будет называться *сингулярной*, а состоящая из двух или более конституэнтов — *мультиплярной*. Пустая просеквенция будет обозначаться либо '0', либо просто пробелом. Просеквенция с одним конституэнтом по своему обозначению не будет отличаться от этого конституэнта. Когда символы для двух или более просеквенций пишутся друг за другом и отделяются друг от друга запятыми, то это сложное выражение обозначает просеквенцию, образованную сочленением указанных просеквенций; например,

$$\mathfrak{X}, A_1, \ldots, A_m, \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}$$

— просеквенция, состоящая из конституэнтов $\mathfrak{X}$ по порядку, затем из $A_1, \ldots, A_m$, затем из конституэнтов $\mathfrak{Y}$, затем из кон-

[1]) Являются ли эти символы U-постоянными или U-переменными — это определяется из контекста.

[2]) Prosequence — сокращение от 'propositional sequence' (последовательность высказываний); заметим, что 'секвенции' Генцена Карри называет элементарными утверждениями.— *Прим. ред.*

ституэнтов $\mathfrak{X}$ (повторно). Конституэнты, являющиеся вхождениями одного и того же высказывания, называются *подобными*.

d. Вспомогательные утверждения. Для элементарных высказываний мы постулируем отношение $\vdash_0$ с нефиксированным числом мест, порождающее элементарные утверждения вида (1). Эти утверждения мы называем *вспомогательными утверждениями*. Истинные вспомогательные утверждения являются результатами последовательного применения конечного числа схем вида (1); эти схемы называются *вспомогательными постулатами*. Эти вспомогательные постулаты образуют базисную систему $\mathfrak{S}$, коль скоро речь идет о нашей формальной теории. Если множество вспомогательных постулатов пусто, так что нет вспомогательных теорем, то система $\mathfrak{S}$ обозначается через $\mathfrak{Q}$ [1]). Элементарное высказывание B, такое, что (1) имеет место при $m = 0$, будет называться *аксиомой*.

e. Элементарные утверждения. Элементарные утверждения имеют вид (8), где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — просеквенции. Мы называем $\mathfrak{X}$ *левой просеквенцией*, или *антецедентом* (8), $\mathfrak{Y}$ — *правой просеквенцией*, или *консеквентом*. Конституэнты (8) — это в точности конституэнты $\mathfrak{X}$ вместе с конституэнтами $\mathfrak{Y}$; конституэнты $\mathfrak{X}$ будут называться *левыми*, или *антецедентными*, *конституэнтами*; конституэнты $\mathfrak{Y}$ — *правыми*, или *консеквентными*, *конституэнтами*.

Элементарное утверждение будет называться *сингулярным* или *мультиплярным* в зависимости от того, является ли его консеквент сингулярным или мультиплярным. Для LA и LC это означает, что (8) сингулярно в точности тогда, когда $\mathfrak{Y}$ состоит из одного конституэнта, но в гл. 6 будут допускаться элементарные утверждения с пустым консеквентом.

Формулировка (или система) называется *сингулярной*, когда требуется, чтобы все ее элементарные утверждения были сингулярными; *мультиплярной*, когда в правилах нет ограничений, требующих сингулярности элементарных утверждений; *смешанной*, когда нет таких ограничений для формулировки в целом, но есть такие ограничения на применимость отдельных правил. С этого момента буквы '$\mathfrak{X}$', '$\mathfrak{Y}$', '$\mathfrak{Z}$', с индексами или без них, будут систематически использоваться следующим образом: '$\mathfrak{X}$' всегда будет обозначать произвольную, возможно пустую, просеквенцию; в сингулярной формулировке '$\mathfrak{Y}$' будет обозначать сингулярную просеквенцию, а '$\mathfrak{Z}$' — пустую; в мультиплярной формулировке с другой стороны, '$\mathfrak{Y}$' и '$\mathfrak{Z}$' также обозначают произвольные просеквенции; в смешанной формулировке '$\mathfrak{Y}$' будет обозначать сингулярную или произвольную просеквенцию, а '$\mathfrak{Z}$' — пустую или произвольную просеквенцию в зависимости от контекста. Из систем, которые будут определены позднее, LA_1 и LC_1 будут сингулярными, LC_m — мультиплярной, LA_m — смешанной.

[1]) Случай системы $\mathfrak{S}$ общего вида будет сведен к $\mathfrak{Q}$ в теореме E4.

4. Теоретическая формулировка; формулировка I. Когда мы, наконец, приступаем к формулировке теории, оказывается, что существует несколько различных формулировок, каждая из которых имеет свои преимущества, и потому необходимо рассматривать более или менее наравне ряд различных формулировок. Здесь будет представлена некоторая основная формулировка, называемая формулировкой I; другие формулировки будут введены позднее как ее модификации. Эта формулировка непосредственно отражает интуитивные рассмотрения разд. 1 и 2. Правила выписаны в таблице, следующей за предварительными рассуждениями.

Элементарные утверждения, играющие роль аксиом теории, будут называться *исходными утверждениями*. Термин 'аксиома' будет применяться в смысле разд. 3*d*. Схемы исходных утверждений перечислены в таблице правил под буквой '*p*'.

Правила формулируются одновременно для различных систем; при этом имеется в виду, что LA_1 и LC_1 — сингулярные системы; LC_m — мультиплярная система; LA_m — смешанная система, сингулярная относительно P* (на другие правила не наложено ограничений). Правило Px постулируется (в сингулярной форме) только для LC_1; позднее будет показано, что общая его форма для LC_m является излишней.

Правила расположены в параллельных столбцах. Правила для введения в антецедент находятся слева, правила для введения в консеквент — справа. Как и в разд. B, употребляется понятная почти без объяснений техника гильбертовской школы, согласно которой посылки пишутся над чертой, а заключения — под ней. Вспомогательные гипотезы пишутся в строке, начинающейся словом 'если'.

Правила введения налево и направо различаются тем, что звездочка пишется с той стороны, на которую действует правило. Так, P* — правило для введения импликации направо. Когда желают говорить и о левом и о правом правилах, звездочки ставятся с обеих сторон.

Правила *C*, *W*, *K* называются *структурными правилами*; правила *O*, где 'O' обозначает 'P', 'Λ', 'V' (а позднее и имена для других операций), будут называться *операциональными правилами*, а $\vdash$ * — *правилом* $\mathfrak{S}$*-вывода*. Структурные правила справа в сингулярной системе никогда не применимы, даже с пустой $\mathfrak{Z}$.

В следующей таблице буквы '*A*', '*B*' и т. д. — U-переменные для произвольных высказываний; 'E_1', 'E_2' и т. д. — для элементарных высказываний, '$\mathfrak{X}$', '$\mathfrak{Y}$', '$\mathfrak{Z}$' — для просеквенций в соответствии с соглашениями разд. 3*e*.

p. Исходные утверждения

(*p*1) $A \Vdash A$

(*p*2) $\Vdash E$, где E — аксиома

C *Правила перестановки*

Если $\mathfrak{X}'$ — перестановка $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{Y}'$ — перестановка $\mathfrak{Y}$, то

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}' \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}'}$$

W *Правила сокращения*

$$\frac{\mathfrak{X}, A, A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash B, B, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash B, \mathfrak{Z}}$$

K *Правила ослабления*

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash B, \mathfrak{Z}}$$

P *Правила импликации*

Если $\mathfrak{Y}$ сингулярна [1]), то

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z};\ \mathfrak{X}, B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}} \qquad \frac{\mathfrak{X}, A \Vdash B, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A \supset B, \mathfrak{Z}}$$

Λ *Правила конъюнкции*

$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, A \wedge B \Vdash \mathfrak{Y}};\ \frac{\mathfrak{X}, B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, A \wedge B \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z};\ \mathfrak{X} \Vdash B, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A \wedge B, \mathfrak{Z}}$$

V *Правила дизъюнкции*

$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y};\ \mathfrak{X}, B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, A \vee B \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A \vee B, \mathfrak{Z}};\ \frac{\mathfrak{X} \Vdash B, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A \vee B, \mathfrak{Z}}$$

$\vdash$* *Правило* $\mathfrak{S}$*-вывода*

Если $E_1, E_2, \ldots, E_m \vdash_0 E$, то

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash E_1, \mathfrak{Z};\ \ldots;\ \mathfrak{X} \Vdash E_m, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash E_0, \mathfrak{Z}}$$

Px *Правило Пирса*

$$\frac{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash A, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}}$$

[1]) В правиле *P, если его формулировать строго в соответствии с разд. 2, должно было бы быть C вместо $\mathfrak{Y}$. В гл. 6 нам будет нужен случай, когда $\mathfrak{Y}$ пусто.

Существует другая форма правила Px:

$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, A \supset B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}$$

Это соответствует второй форме правила Pk на стр. 268. Многие из последующих доказательств можно провести с этой формой правила Px, если сделать некоторые видоизменения; новые пересмотренные доказательства зачастую оказываются проще. (Ср. упражн. 6B3.)

5. Примеры техники доказательства. Прежде чем продолжать более детальную формулировку, будет полезно рассмотреть ряд примеров поиска доказательств в системе. Эти примеры проиллюстрируют важное свойство подобных систем: если дано элементарное утверждение Г, содержащее конституэнт M, то имеется лишь конечное число возможностей [1]) получить Г как заключение какого-либо правила R. В принципе возможно поэтому строить доказательство, начиная с заключения. В свое время мы увидим, что эта ситуация на самом деле разрешима, т. е. можно установить алгорифм, который либо строит доказательство, либо показывает, что такового не существует. Но для примеров, которые вскоре будут приведены с целью иллюстрации, будет просто показано, что доказательство может или не может быть найдено, на основе ряда разумных предположений; если доказательство найдено, то это, конечно, решает вопрос, но отрицательный ответ зависит от последующего подтверждения этих предположений.

В этих примерах мы рассмотрим только системы LA_1 и LC_m; мы будем называть их просто LA и LC соответственно. Предположения заключаются в том, что мы можем опустить правило *K*, если в качестве первичных утверждений принять утверждения вида (*a*1) и (*a*2) в разд. 1 и 2, и что правило *W* можно опустить, если видоизменить операциональные правила так, чтобы в их посылках допускался конституэнт, подобный тому, который вводится. В последнем случае видоизмененное правило эквивалентно первоначальному правилу, за которым немедленно следует применение *W*. Так, для *P видоизмененным правилом будет

$$\frac{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash A, \mathfrak{Z} \quad \mathfrak{X}, A \supset B, B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}} \qquad (9)$$

Оно может быть получено из обычного правила *P так:

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash A, \mathfrak{Z} \quad \mathfrak{X}, A \supset B, B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, A \supset B, A \supset B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}\ *\mathrm{P}}{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}\ *\mathrm{W}$$

[1]) Исключение составляет правило Px.—*Прим. ред.*

Обратно, обычное правило *P можно получить из видоизмененного, используя *K* для введения дополнительного конституэнта $A \supset B$. В этих примерах *P будет предполагаться в виде (9).

Пример 1. Ищем в LA (𝔇) вывод утверждения

Γ_1 $\qquad \Vdash\!\!- A \supset . A \supset B : \supset . A \supset B$

где A и B элементарны. Единственным правилом, заключением которого может быть Γ_1 (имеется в виду, конечно, применение правила), является P*; посылка в этом случае была бы

Γ_2 $\qquad A \supset . A \supset B \Vdash\!\!- A \supset B$

Посылка Γ_2 могла получиться по одному из правил: *P или P*. Если бы мы должны были использовать первое из них в виде (9), то в качестве посылки нам потребовалось бы

Γ_3 $\qquad A \supset . A \supset B \Vdash\!\!- A$

ложное в двузначной таблице, а потому невыводимое в LC, а тем более в LA. Поэтому мы должны принять вторую альтернативу — P*. В этом случае посылка была бы

Γ_4 $\qquad A \supset . A \supset B, \quad A \Vdash\!\!- B$

Теперь у нас нет иной возможности, кроме как использовать *P, посылками которого являются

Γ_5 $\qquad A \supset . A \supset B, \quad A \Vdash\!\!- A$

Γ_6 $\qquad A \supset . A \supset B, \ A, \quad A \supset B \Vdash\!\!- B$

Здесь Γ_5 типа ($a1$). Что касается Γ_6, то используем *P с $A \supset B$ в качестве главного конституэнта [1]); посылки тогда будут

Γ_7 $\qquad A \supset . A \supset B, \ A \supset B, \ A \Vdash\!\!- A$

Γ_8 $\qquad A \supset . A \supset B, \ A \supset B, \ A, \ B \Vdash\!\!- B$

Так как обе они типа ($a1$), то мы получили вывод Γ_1. Вывод в древовидной форме будет выглядеть так:

$$\cfrac{\Gamma_5 \quad \cfrac{\Gamma_7 \ \ \Gamma_8}{\Gamma_6}\,{*}P}{\cfrac{\cfrac{\Gamma_4}{\Gamma_2}\,P{*}}{\Gamma_1}\,P{*}}\,{*}P$$

[1]) Если бы мы использовали $A \supset . A \supset B$ снова в качестве главного конституэнта, то правая посылка совпала бы с Γ_6.

Пример 2. Исследуем вопрос о выводимости в LA (𝔇) и в LC (𝔇) утверждения

Γ_1 $\qquad \Vdash\!\!- A \supset B . \supset A : \supset A$

где A и B элементарны. Предположим теперь, что мы находимся в LA. Очевидно, Γ_1 может получиться только по P* с посылкой

Γ_2 $\qquad A \supset B . \supset A \Vdash\!\!- A$

Тогда Γ_2 должна получаться по *P с посылками

Γ_3 $\qquad A \supset B . \supset A \Vdash\!\!- A \supset B$

Γ_4 $\qquad A \supset B . \supset A, \ A \Vdash\!\!- A$

Здесь Γ_4 типа ($a1$). Исследуем поэтому Γ_3. Единственно возможными правилами являются *P и P*. Если бы мы использовали первое, то левая его посылка должна была бы совпасть с Γ_3. Для второго посылкой будет

Γ_5 $\qquad A \supset B . \supset A, \ A \Vdash\!\!- B$

Здесь единственной возможностью является *P. Но в этом случае правая посылка совпала бы с Γ_5. Поэтому множество утверждений $\Gamma_1 - \Gamma_5$ не содержит исходных утверждений и таково, что никакой его член не может быть заключением применения правила, посылками которого не являются члены данного множества. Отсюда следует, что доказательство Γ_1 в LA (𝔇) невозможно.

Легко, однако, вывести Γ_1 в LC (𝔇). Действительно, в LC мы могли бы заменить Γ_3 на

Γ_3' $\qquad A \supset B . \supset A \Vdash\!\!- A \supset B, \ A$

а это следует по P* из исходного утверждения

$$A \supset B . \supset A, \ A \Vdash\!\!- B, \ A$$

Итак, Γ_1 выводима в LC (𝔇), но не в LA (𝔇).

В примере 1 мы исключили ряд возможностей (например, Γ_2), сославшись на двузначную интерпретацию разд. 2. Не было необходимости делать это; мы могли бы перебрать все возможные альтернативы методом разд. 2, пока не дошли бы до доказательства. С другой стороны, если бы мы сделали такую же ссылку в примере 2, то могли бы заметить, что Γ_3 неверна в этой интерпретации (именно, когда A, B принимают значения 1 и 0 соответственно), и закончили бы рассуждение для LA на этом месте. Этот пример показывает, как использование стандартных приемов может сократить поиск решения. Теоремы и технические приемы, которые будут указаны позднее, еще более сократят его.

Рассуждения в примере 1 показывают, что его Γ_1 можно было бы вывести, используя *P в первоначальной форме — иными словами, результат выводим в формулировке I без *W. Будет поучительно рассмотреть пример, для которого это неверно.

Пример 3. Исследуем доказуемость в LA ($\mathfrak{D}$) дистрибутивного закона

$$\Vdash A \wedge (B \vee C) . \supset . (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Здесь мы примем сокращения

$$D_1 \equiv A \wedge (B \vee C) \qquad D_2 \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

так что наша теорема имеет вид

Γ_1 $\qquad \Vdash D_1 \supset D_2$

Она может получиться только по P* из

Γ_2 $\qquad D_1 \Vdash D_2$

Предположим теперь, что мы имеем формулировку I без *W*. Тогда есть две возможности: *Λ и V*. Но для *Λ посылкой должно быть одно из утверждений

Γ_3 $\qquad A \Vdash D_2$

Γ_4 $\qquad B \vee C \Vdash D_2$

тогда как для V* подобным же образом посылка должна иметь один из следующих видов:

Γ_5 $\qquad D_1 \Vdash A \wedge B$

Γ_6 $\qquad D_1 \Vdash A \wedge C$

Все четыре возможные посылки неверны в двузначной оценке. Невозможно поэтому вывести Γ_1 в формулировке I без *W. С *W мы можем продолжать так: Γ_2 может получиться по *W из

Γ_7 $\qquad D_1,\ D_1 \Vdash D_2$

а это в свою очередь — двумя применениями *Λ последовательно из

Γ_8 $\qquad A,\ D_1 \Vdash D_2$

Γ_9 $\qquad A,\ B \vee C \Vdash D_2$

Здесь Γ_9 может получиться по *V из Γ_{10} и Γ_{11}:

Γ_{10} $\qquad A,\ B \Vdash D_2$

Γ_{11} $\qquad A,\ C \Vdash D_2$

Для Γ_{10} мы можем использовать V* и посылку

Γ_{12} $\qquad A,\ B \Vdash A \wedge B$

которая получается по Λ* из двух исходных посылок:

$$A,\ B \Vdash A \qquad A,\ B \Vdash B$$

Мы можем доказать Γ_{11} подобным же образом. Поэтому Γ_1 доказуема с *W, но не без него.

Этих примеров пока достаточно для иллюстрации техники. Вернемся к общим рассмотрениям.

6. Общие свойства правил; конституэнты. Прежде чем перейти к изложению видоизменений, сформулируем некоторые условия, относящиеся к правилам; эти условия окажутся важными при доказательстве теорем. Позднее, когда мы встретим другие системы подобного строения, но пополненные новыми операциями (и, быть может, чем-нибудь еще), теоремы легко будет обобщить, если новые системы будут удовлетворять тем же самым условиям.

Конституэнты применения правила определяются как конституэнты посылок вместе с конституэнтами заключения. Эти конституэнты делятся на главный, подчиненные и параметрические конституэнты. *Главный конституэнт* — это новый конституэнт, введенный в заключение. *Подчиненные конституэнты* (или просто подчиненные) — это конституэнты в посылках, которые объединяются [1]) некоторой операцией для образования главного конституэнта. *Параметрические конституэнты* — это такие, как конституэнты различных $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$, которые входят в посылки и остаются, так сказать, неизменными в заключениях. Аналогично мы можем определить такие конституэнты во всех других правилах, кроме *C*. Так, в *W* есть два подобных конституэнта в посылках, заменяющихся подобным им конституэнтом в заключении; последний является главным конституэнтом, а два первых — подчиненными. В *K* новый конституэнт, который вводится в заключение, является главным конституэнтом, подчиненных здесь нет. В $\vdash$ * конституэнт E_0 в заключении является главным; конституэнты E_i в посылках — подчиненными. В Px единственный конституэнт в консеквенте заключения является главным; в посылке $A \supset B$ в антецеденте и A в консеквенте будут подчиненными. Параметрическими во всех этих случаях будут конституэнты, входящие в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ или $\mathfrak{Z}$.

В последующем кое-где будут сделаны видоизменения, благодаря которым появятся случаи, не рассматривавшиеся ранее. Например, правило (9) является видоизменением *P, где в каждой посылке есть копия главного конституэнта. Такие копии главного

[1]) Например, в левой половине V* в формулировке I подчиненным конституэнтом является A, а главный конституэнт есть $A \vee B$, который на первый взгляд содержит постороннее B. Но $A \vee B$ можно представить как результат операции $-\vee B$, произведенной над A.

конституэнта, появляющиеся в одной или более чем в одной посылке (в (9) такая копия в правой посылке излишня), будут называться *квазиглавными конституэнтами* и рассматриваться как особые случаи подчиненных.

Чтобы позаботиться о таких возможностях, сформулируем следующие условия для правил:

($r1$) Каждый конституэнт в посылках и в заключении является либо главным, либо подчиненным, либо параметрическим конституэнтом.

($r2$) Главный конституэнт, если он есть, единственен и встречается только в заключении.

($r3$) Подчиненные конституэнты, если они имеются, входят только в посылки.

($r4$) Существует отношение эквивалентности между параметрическими конституэнтами, которое мы называем *конгруэнтностью*, такое, что: (a) конгруэнтные параметрические конституэнты подобны и встречаются на одной и той же стороне; (b) каждый параметрический конституэнт конгруэнтен в точности одному параметрическому конституэнту в заключении и (c) каждый параметрический конституэнт конгруэнтен по крайней мере одному параметрическому конституэнту в посылках и самое большее одному в любой из посылок. Множество взаимно конгруэнтных параметрических конституэнтов будет называться *параметром*.

($r5$) Верный вывод по любому правилу остается верным, если параметр удаляется.

($r6$) Верный вывод по любому правилу остается верным, если изменяется параметр или вводится новый параметр при условии, что удовлетворяются общие ограничения для рассматриваемой системы [1]) и для ($r4$).

($r7$) Главный конституэнт является сложным и образуется из копий подчиненных конституэнтов с помощью операций.

Что касается ($r4$), различные формулировки удовлетворяют более специальным требованиям. В формулировке I все правила, кроме *P, удовлетворяют более строгой форме ($r4$), которая будет называться ($r4$)′:

($r4$)′ Отношение конгруэнтности удовлетворяет условиям (a), (b) из ($r4$) и условию (c'): каждый параметрический конституэнт конгруэнтен в точности одному параметрическому конституэнту в каждой посылке.

Мы назовем правило, удовлетворяющее условиям ($r1$)—($r7$), *регулярным правилом*; правило, удовлетворяющее условиям ($r1$) — ($r5$) и ($r7$),— *полурегулярным правилом*; правило, не удовлетворяющее условию ($r7$),— *иррегулярным правилом*. Так, операциональные правила LA_1, LC_1, LC_m регулярны; структурные правила, $\vdash$ * и (в LC_1) Px иррегулярны. Если не считать правил *C*, то все правила LA_1, LC_1, LC_m удовлетворяют условиям ($r1$) — ($r6$), но в LA_m правило P* не удовлетворяет ($r6$)[1]).

Термин 'L-*система*' будет применяться к любой системе, образованной из LA или LC присоединением дополнительных правил и, возможно, наложением дополнительных условий и такой, что удовлетворяются условия ($r1$) — ($r5$) [2]). Так, LC_1 и LA_m являются L-системами. К такой системе можно применять термины 'сингулярная', 'мультиплярная' и 'смешанная', введенные в разд. 3*e*.

7. Соглашения, относящиеся к теоремам и доказательствам. Правила *C* в последующем будут молчаливо подразумеваться. Если явно не утверждается противоположное, эти правила предполагаются всюду; перегруппировка внутри просеквенций будет проводиться без явного обоснования, и при подсчете шагов (в некоторых случаях индукции) такие перегруппировки не будут считаться особыми шагами. Короче, просеквенции, получающиеся перегруппировкой друг из друга, будут рассматриваться как одинаковые.

Заглавные греческие буквы 'Γ', 'Δ', 'Θ' будут использоваться для обозначения утверждений или множеств утверждений.

Если Θ — множество элементарных утверждений, то *вывод из* Θ — это конструкция (разд. 2A6), в основе которой лежат исходные утверждения из Θ и которая использует правила разд. 4. В соответствии с разд. 2A6 такой вывод может быть представлен как последовательность Δ элементарных утверждений $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, такая, что каждое Γ_k (1) либо входит в Θ, (2) либо является исходным утверждением, (3) либо выводится из одного или более предыдущих членов последовательности по какому-либо из правил системы. Мы можем без потери общности предположить, что каждое Γ_k, за исключением последнего, используется один и только один раз в качестве посылки для вывода некоторого Γ_m ($m > k$) по правилу R_m. В таком случае Δ будет называться *регулярным выводом*. Доказательство — это вывод с пустым Θ.

[1]) Под "общими ограничениями" я понимаю ограничения, относящиеся ко всей системе или формулировке как к целому, в противоположность ограничениям, относящимся к отдельным правилам. Так, в сингулярной системе справа не может быть добавлен никакой параметр (поскольку до сих пор у нас консеквент был непуст), тогда как в мультиплярной системе нет такого ограничения. В смешанной системе нет общего ограничения, запрещающего добавление параметра справа, но для отдельных правил оно может быть; в такой системе условие ($r6$) не удовлетворяется для правых частей этих правил.

[1]) См. предыдущую сноску.

[2]) Представляют определенный интерес системы, в которых некоторые из этих условий видоизменены. Мы назовем их видоизмененными L-системами. Многое из того, что говорится о L-системах, применимо с некоторыми оговорками и к таким системам.

$\mathfrak{S}$-вывод — это такой вывод, что все его утверждения (включая базисные) имеют вид (6), где A элементарно, и единственным используемым правилом является $\vdash *$. Согласно интерпретации разд. 1, такой вывод можно интерпретировать как вывод в соответствующей системе $\mathfrak{S}$, определенной постулатами (1).

Рассмотрим теперь ряд соглашений, предложенных Клини [PIG].

Конституэнт в заключении правила будет называться *непосредственным потомком* конституэнта в посылках правила, если оба они являются конгруэнтными параметрическими конституэнтами, либо первый из них является главным конституэнтом, а второй — подчиненным. Отношение 'быть *потомком*' определяется как квазиупорядочение, порожденное непосредственным потомством. Один конституэнт называется предком второго, если второй является потомком первого. Заметим, что оба отношения — быть потомком и быть предком — рефлексивны [1]). В обоих случаях эпитет 'параметрический' будет означать, что употребляются только параметрические конституэнты, так что *параметрический предок* или *потомок* — это такой предок или потомок, который все еще оставался бы предком или потомком, если бы случай главного конституэнта и подчиненного был опущен из определения непосредственного потомства.

Следующая теорема, принадлежащая Клини, справедлива в любой L-системе.

Теорема 1. *Если конституэнт в заключении вывода не имеет предка, являющегося конституэнтом исходного утверждения, то вывод остается верным, если вычеркнуть этот конституэнт со всеми его предками.*

Доказательство. Никакое исходное утверждение после такого вычеркивания не теряет своей верности. Точно так же применения правил останутся справедливыми, хотя некоторые применения правил могут стать такими, что их посылки и заключения совпадут. В этом случае можно вычеркнуть заключение и, если имеется более чем одна посылка, весь вывод лишних посылок, что и требовалось доказать.

Мы можем говорить о *окончательном предке* (*окончательном потомке*) как о конституэнте, не имеющем более предков (потомков). Поэтому окончательные предки конституэнта, не являющиеся конституэнтами исходного утверждения, являются главными конституэнтами некоторого применения *K*. Теорема применима тогда, когда все окончательные предки — этого последнего вида. В частности, теорема применима, если нет параметрического

[1]) По определению 'квазиупорядочения'.

предка, являющегося конституэнтом исходного утверждения или главным конституэнтом правила, отличного от *K*.

8. Видоизмененные формулировки II, IK, IIK. Как уже говорилось, существует ряд видоизменений формулировок разд. 4. Здесь мы рассмотрим видоизменение, называемое формулировкой II, а также ряд видоизменений, принадлежащих Кетонену [UPK].

Формулировка II отличается от формулировки I тем, что в правилах с более чем одной посылкой параметрические конституэнты в различных посылках не отождествляются. Формулировка удовлетворяет следующему специальному виду условия ($r4$):

($r4$)″ Отношение конгруэнтности удовлетворяет условиям (a), (b) из ($r4$), а также условию (c''): каждый параметрический конституэнт в заключении конгруэнтен в точности одному параметрическому конституэнту из совокупности посылок.

В сингулярных системах *V не удовлетворяет ($r4$)″, так как $\mathfrak{Y}$ справа входит в обе посылки. Для того чтобы учесть это, необходимы некоторые видоизменения. Видоизменения касаются правил *P, Λ*, *V и $\vdash *$. Для первого, второго и четвертого из них видоизмененными правилами будут

$$*\mathrm{P}\qquad \frac{\mathfrak{X}_1 \Vdash A,\ \mathfrak{Z}\quad \mathfrak{X}_2,\ B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ A \supset B \Vdash \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}}$$

$$\Lambda *\qquad \frac{\mathfrak{X}_1 \Vdash A,\ \mathfrak{Z}_1\quad \mathfrak{X}_2 \Vdash B,\ \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash A \wedge B,\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2}$$

$\vdash *$ Если $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m \vdash_0 E_0$, то

$$\frac{\mathfrak{X}_i \Vdash E_i,\ \mathfrak{Z}_i,\qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{X}_m \Vdash E_0,\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{Z}_m}$$

Для *V правила для сингулярного и мультиплярного случаев должны быть сформулированы отдельно:

$$*\mathrm{V}\ \text{(сингулярное)}\qquad \frac{\mathfrak{X}_1,\ A \Vdash \mathfrak{Y}\qquad \mathfrak{X}_2,\ B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ A \vee B \Vdash \mathfrak{Y}}$$

$$*\mathrm{V}\ \text{(мультиплярное)}\qquad \frac{\mathfrak{X}_1,\ A \Vdash \mathfrak{Y}_1\qquad \mathfrak{X}_2,\ B \Vdash \mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ A \vee B \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{Y}_2}$$

Эквивалентность формулировок I и II показывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Правила формулировки* II *могут быть выведены из правил формулировки* I *с помощью* *K* (*и* *C*); *обратный вывод можно осуществить с помощью* *W* (*и* *C*).

Доказательство. Предположим, что мы имеем вывод в формулировке II; тогда можно получить одни и те же параметры

в посылках и в заключении, используя *K* для введения недостающих конституэнтов; заключение может тогда быть выведено в формулировке I. Если мы имеем вывод в формулировке I, то в формулировке II мы можем вывести то же заключение, если не считать того, что может оказаться несколько копий одного и того же параметра, соответствующих различным посылкам; эти копии тогда можно удалить по *W*.

Например, в случае *P для мультиплярной системы преобразование I—II можно сделать так (здесь $\mathfrak{Y}$ сингулярна):

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X}_1 \| - A,\ \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2 \| - A,\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2}\,{}^*\mathrm{K}^* \qquad \dfrac{\mathfrak{X}_2,\ B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2}\,{}^*\mathrm{K}^*}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ A \supset B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2}\,{}^*\mathrm{P_I}$$

В противоположном направлении преобразование проводится так:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X} \| - A,\ \mathfrak{Z} \qquad \mathfrak{X},\ B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X},\ \mathfrak{X},\ A \supset B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}}\,{}^*\mathrm{P_{II}}}{\mathfrak{X},\ A \supset B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}}\,{}^*\mathrm{W}^*$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

Видоизменения Кетонена касаются правил *P, *Λ, V* в мультиплярных системах. В случае *P видоизменением будет

$$^*\mathrm{P} \qquad \dfrac{\mathfrak{X} \| - A,\ \mathfrak{Y} \qquad \mathfrak{X},\ B \| - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A \supset B \| - \mathfrak{Y}}$$

В случаях *Λ и V* правилами Кетонена будут

$$^*\Lambda \qquad \dfrac{\mathfrak{X},\ A,\ B \| - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A \wedge B \| - \mathfrak{Y}} \qquad\qquad \mathrm{V}^* \qquad \dfrac{\mathfrak{X} \| - A,\ B,\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \| - A \vee B,\ \mathfrak{Z}}$$

Из этих преобразований изменение в *Λ может быть сделано даже в сингулярной системе. Мы поэтому определим *формулировку* IK как полученную проведением видоизменений Кетонена настолько, насколько это возможно; в сингулярной системе *P и V* остаются неизменными. Подобным же образом мы можем определить *формулировку* IIK как полученную из формулировки II изменением *Λ и, насколько возможно, V*; при этом P* остается неизменным.

Заметим, что в примере 3 разд. 5 переход от Γ_2 к Γ_9 можно сделать непосредственно по кетоненовской форме *Λ. Позднее мы увидим, что эффект правил Кетонена вообще (с важным исключением) состоит в том, что без правил *W* можно обойтись.

Теорема 3. *Вывод по любому из правил* *Λ *или* V* *в формулировке* I *можно получить применением соответствующего правила*

Кетонена, которому предшествует одно применение *K* *с той же стороны; обратно, вывод по правилу Кетонена может быть получен двумя применениями правила формулировки* I, *за которыми следует применение* *W* *с той же стороны. В случае* *P *применение* K* *к левой посылке с последующим применением правила Кетонена даст любой вывод по* *P *в формулировке* I; *обратное требует самое большее одного предшествующего применения* K* *и последующего применения* W*.

Доказательство. Для случая *Λ указанные два доказательства таковы:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X},\ A \| - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A,\ B \| - \mathfrak{Y}}\,{}^*\mathrm{K}}{\mathfrak{X},\ A \wedge B \| - \mathfrak{Y}}\,{}^*\Lambda \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{X},\ A,\ B \| - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A \wedge B,\ B \| - \mathfrak{Y}}\,{}^*\Lambda}{\mathfrak{X},\ A \wedge B,\ A \wedge B \| - \mathfrak{Y}}\,{}^*\mathrm{W}}{\mathfrak{X},\ A \wedge B \| - \mathfrak{Y}}$$

(Другой случай доказательства слева аналогичен.)

В случае V* ситуация двойственна ситуации для *Λ.

В случае *P вывод правила формулировки I из правила Кетонена [1]) таков:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X} \| - A,\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \| - A,\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}}\,\mathrm{K}^* \qquad \mathfrak{X},\ B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X},\ A \supset B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}}\,{}^*\mathrm{P}$$

Обратно, кетоненовская форма *P совпадает с тем случаем *P в формулировке I, в котором $\mathfrak{Y}$ пуста. Если пустые последовательности справа не допускаются, то примем C, $\mathfrak{Z}$ за $\mathfrak{Y}$ в кетоненовском *P; тогда правило может быть выведено в формулировке I так:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X} \| - A,\ C,\ \mathfrak{Z} \qquad \dfrac{\mathfrak{X},\ B \| - C,\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X},\ B \| - C,\ C,\ \mathfrak{Z}}\,\mathrm{K}^*}{\mathfrak{X},\ A \supset B \| - C,\ C,\ \mathfrak{Z}}\,{}^*\mathrm{P}}{\mathfrak{X},\ A \supset B \| - C,\ \mathfrak{Z}}\,\mathrm{W}^*$$

Это завершает доказательство.

Кетоненовское видоизменение *P имеет эффект, в чем-то противоположный эффекту формулировки II, так как оно делает параметрические конституэнты постоянными во всех посылках, так что $(r4)'$ верно без всякого исключения. Конечно, это видоизменение применимо только в случае мультиплярного *P; в сингулярных

[1]) Доказательство дается только для мультиплярного случая. В сингулярном случае обе формулировки *P совпадают.

случаях мы должны оставить *P таким, как в формулировке I, и исключение для $(r4)'$ должно оставаться в силе.

Теоремы 2 и 3 используют структурные правила *K* и *W* для установления эквивалентности формулировок I и II, с одной стороны, правил Кетонена и правил формулировки I — с другой. В более общих ситуациях, где *K* и *W* не выполняются, эти эквивалентности могут не проходить. В таком случае одна из этих формулировок может иметь определенные преимущества.

9. Некоторые простые свойства. Мы установим здесь два довольно простых свойства, не связанных друг с другом.

Теорема 4. *Пусть схема исходных утверждений* $(p1)$ *заменена схемой*

$$(p1)' \qquad E \Vdash E,$$

где E *элементарно. Тогда общая схема* $(p1)$ *является схемой элементарных теорем* LA_1.

Доказательство. Проведем структурную индукцию. Базисный шаг, где A элементарно, есть в точности $(p1)'$; индуктивный шаг устанавливаем, используя правила формулировки II и кетоненовскую форму *Λ, следующим образом:

$$\frac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A,\ A \supset B \Vdash B}\ {*\mathrm{P}}$$

$$\frac{A,\ A \supset B \Vdash B}{A \supset B \Vdash A \supset B}\ \mathrm{P}*$$

$$\frac{\dfrac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A,\ B \Vdash A \wedge B}\,\Lambda*}{A \wedge B \Vdash A \wedge B}\ {*\Lambda}$$

(кетоненовская форма)

$$\frac{\dfrac{A \Vdash A}{A \Vdash A \vee B}\,\mathrm{V}* \qquad \dfrac{B \Vdash B}{B \Vdash A \vee B}\,\mathrm{V}*}{A \vee B \Vdash A \vee B}\ {*\mathrm{V}}$$

Это завершает доказательство.

Замечание. Второй из приведенных выше выводов можно заменить двойственным третьему, а третий, если допускаются мультиплярные элементарные утверждения,— двойственным второму. Заметим, что доказательство не требует иных правил, кроме указанных явно.

Утверждения видов $(a1)$ и $(a2)$ из разд. C2 получаются из $(p1)$ и $(p2)$ посредством одних только *K*. Такие утверждения будут называться *квазиисходными утверждениями*. В таких случаях конституэнты, введенные первоначальным исходным утверждением, будут называться главными конституэнтами. Исходное (квазиисходное) утверждение будет называться *элементарным* в точности тогда, когда это (соответствующее) исходное утверждение имеет тип $(p1)'$ или $(p2)$. Пока принимаются *K*, доказательство, начинающееся с квазиисходных утверждений, можно тривиально превратить в доказательство, начинающееся с исходных утверждений.

Теорема 5. *Пусть* $A_1, \ldots, A_m$, B *элементарны, и пусть* B $\mathfrak{S}$*-выводимо из* $A_1, \ldots, A_m$. *Тогда* (2) *выполняется в* LA_1.

Доказательство. Если B — одно из A_i, то (2) выполняется ввиду $(p1)'$ и *K. Если B — аксиома, то (2) выполняется ввиду $(p2)$ и *K. Предположим теперь, что $B \equiv B_0$ и

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \Vdash_0 B_0$$

Предположим, что для всех B_j

$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B_j$$

Тогда (2) следует ввиду $\vdash$ *. Таким образом, теорема доказана дедуктивной индукцией по данному $\mathfrak{S}$-выводу.

D. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ

Темой данного раздела является доказательство эквивалентности различных формулировок L-систем, приведенных в разд. C, между собой и с другими типами систем, сформулированными в разд. B. Ключевой теоремой для достижения данной цели является упомянутая в (5) разд. C элиминационная теорема. Эта теорема будет доказана в разд. 2 при условиях, которые обобщены так, чтобы эту теорему можно было применять в дальнейшем. После разд. 2 термином 'L-система' будет обозначаться система, содержащая элиминационную теорему. Инверсионная теорема в разд. 1, хотя и не является строго необходимой для элиминационной теоремы, имеет ту же природу и позволяет сократить доказательство теоремы 2 в ряде особых случаев и иногда усилить его; так как инверсионная теорема необходима в разд. E, то она доказывается в начале данного раздела. В дальнейших частях этого раздела элиминационная теорема используется для доказательства упомянутых эквивалентностей вместе с другими результатами, которые получаются более или менее непосредственно. В их числе (в разд. 6) — полнота LC.

1. Непосредственное обращение выводов. Когда у нас есть доказательство, заключительное утверждение которого содержит составной конституэнт, являющийся параметрическим, желательно знать, можно ли это доказательство переделать так, чтобы оно кончалось введением этого конституэнта. Это сводится к тому, чтобы показать, что рассматриваемое правило может быть обра-

щено. Мы изучим метод проведения этого обращения при определенных условиях.

Пусть Γ — элементарное утверждение, содержащее составной конституэнт M. Пусть $\mathfrak{X}$ — другие конституэнты Γ. Пусть Γ записано без указания сторон, в которые входят конституэнты, так:

$$\mathfrak{X},\ M \tag{1}$$

Пусть для данного M имеется единственное операциональное правило R, главным конституэнтом которого может быть M. Пусть R имеет p посылок, и пусть подчиненными — по предположению однозначно определяемыми M — в i-й посылке будут $\mathfrak{U}_i$. (Параметры, конечно, могут быть различными в различных применениях R.) Пусть $\mathfrak{X}$ таково, что Γ может быть выведено посредством R из посылок

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{U}_i \tag{2}$$

Мы ищем условия, при которых можно вывести (2) и отсюда получить (1) посредством R.

Сначала рассмотрим случай, когда нет никаких правил, вводящих M, кроме R и *K*. Это означает, в частности, что M не должно вводиться посредством *W*.

Пусть Δ — доказательство Γ в виде дерева. Пусть Δ_1 — поддерево Δ, образованное теми узлами, которые содержат какой-нибудь параметрический предок M. Предположим, что в каждом узле Δ_1 мы вычеркиваем M и вставляем $\mathfrak{U}_i$. Если все правила, используемые в этом поддереве, таковы, что ($r5$), ($r6$) имеют место, то все выводы, в которых M было параметрическим, останутся справедливыми. Мы должны рассмотреть верхние узлы поддерева. Мы можем исключить случай, когда такой верхний узел является исходным утверждением с M в качестве главного конституэнта, требуя, чтобы все такие главные конституэнты были элементарными (теорема C4). Другие возможности состоят только в том, что M вводится посредством *K* или что M вводится посредством применения R. Поэтому при сделанных предположениях изменения превратят данное доказательство (1) в доказательство i-го утверждения (2). Если мы сделаем это для всех $i = 1, 2, \ldots, p$, то мы имеем (2) и можем применить R, чтобы заключить (1).

Для случая, когда встречается *W*, мы изменим определение *квазипараметрического предка* из разд. C7, допуская, чтобы главный конституэнт *W* был непосредственным потомком любого из подчиненных. Тогда квазипараметрический предок M будет подобен M (разд. C3c). Теперь произведем замену M на $\mathfrak{U}_i$ в поддереве Δ_1, состоящем из всех узлов Δ, содержащих квазипараметрический предок M. Тогда вывод в Δ_1, в котором M является главным конституэнтом *W*, имел бы вид

$$\frac{\mathfrak{Y},\ M,\ M}{\mathfrak{Y},\ M}$$

Он заменился бы на

$$\frac{\mathfrak{Y},\ \mathfrak{U}_i,\ \mathfrak{U}_i}{\mathfrak{Y},\ \mathfrak{U}_i}$$

и его можно осуществить применениями *W* (быть может, с противоположной стороны). Остальная часть рассуждения проходит, в основном как и раньше (некоторые дополнительные детали потребуются в тех случаях, когда два или более вхождений M вводятся в различных местах).

Это рассуждение устанавливает следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Пусть исходные утверждения типа* ($p1$) *таковы, что главный конституэнт элементарен. Пусть* Γ *— элементарное утверждение, содержащее составной конституэнт* M. *Пусть* Δ *— вывод в виде дерева, оканчивающийся* Γ, *и пусть* Δ_1 *— поддерево, образованное всеми утверждениями из* Δ, *содержащими квазипараметрический предок* M. *Тогда для существования вывода* Δ′ *утверждения* Γ, *в котором* M *вводится в конце посредством единственного применения* R, *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

(a) *Конституэнт* M *в* Γ *расположен так, что* Γ *может быть заключением* R *с* M *в качестве главного конституэнта.*

(b) *Все окончательные квазипараметрические предки* M, *кроме тех, которые вводятся посредством* *K*, *вводятся посредством* R *с теми же подчиненными* $\mathfrak{U}_i$ *в* i*-й посылке.*

(c) *Все правила, используемые в* Δ_1, *удовлетворяют* ($r5$) *и* ($r6$) *в той мере, в какой это касается удаления* M *и введения* $\mathfrak{U}_i$[1]).

(d) *Если* M *можно добавить по* *K*, *то это же верно для любого* $\mathfrak{U}_i$.

(e) *Если* M *можно сократить по* *W*, *то это же верно для всех* $\mathfrak{U}_i$.

Рассмотрим значение условий теоремы для мультиплярных систем LA_m и LC_m.

Условие (a) накладывает ограничение только в случае P* для LA_m. В этом случае, если M есть, скажем, $A \supset B$, оно должно быть единственным конституэнтом в правой части (1).

Условие (b) требует, чтобы подчиненные конституэнты однозначно определялись (что касается их вида и стороны, в которую они

[1]) То есть всегда, когда M может входить как параметр, M может быть удалено, $\mathfrak{U}_i$ добавлены.

входят) M. Это условие не удовлетворяется в случае *Λ и V* в первоначальной формулировке I, потому что существует два различных правила с одним и тем же главным конституэнтом. В формулировке IK, однако, условие (b) не накладывает ограничения на сами операциональные правила, но оно может помешать применению теоремы, если имеются специальные правила. Однако с правилом $\vdash *$ не может быть конфликта, так как главный конституэнт $\vdash *$ элементарен.

Условие (c) не накладывает ограничений в LC_m. В LA_m, однако, имеется ограничение, состоящее в том, что правило P* не удовлетворяет ($r6$). Если имеется применение правила P* в Δ_1, то M должно быть слева (поскольку оно параметрическое); в этом случае нет затруднений, если один из подчиненных не находится справа. Эта исключительная ситуация возникает только тогда, когда R есть *P.

Условия (d) и (e) не накладывают ограничений, коль скоро на правила *K* и *W*, если они вообще имеются, не накладывается специальных ограничений.

Когда указанное в теореме преобразование может быть проведено, мы говорим, что *может быть выполнено непосредственное обращение* R. Доказательство, полученное для i-й посылки (2), будет называться *непосредственным обращением* R *относительно этой посылки*. Такое относительное непосредственное обращение может быть проведено всегда, когда условия (b) — (e) удовлетворяются (относительно этой посылки); в таком случае мы скажем, что R *непосредственно обратимо* (относительно этой посылки). Таким образом, правило может быть непосредственно обратимо относительно всех своих посылок, даже если непосредственное обращение не может быть выполнено (из-за того, что не выполняется условие (a)).

Следствие 1.1. *В формулировке* IK *системы* LC_m *все операциональные правила непосредственно обратимы и непосредственное обращение всегда может быть выполнено.*

Следствие 1.2. *В формулировке* IK *системы* LA_m *все операциональные правила, за исключением* *P, *непосредственно обратимы. Непосредственное обращение всегда может быть выполнено со следующими исключениями:*

Если R *есть* P*, *то* M *должно быть единственным конституэнтом справа, чтобы* (1) *получалось из* (2) *по* R, *и* *P *может оказаться необратимым, если имеется применение* P* *в* Δ_1.

Следствие 1.3. *Если* R *непосредственно обратимо относительно одной из своих посылок, то конструкция теоремы ведет*

от (1) *к доказательству соответствующего утверждения* (2) *безотносительно к* (a).

Ниже приводятся частные случаи этого следствия.

Следствие 1.4. *В формулировке* IK *системы* LA_m *если*

$$\mathfrak{X} \Vdash A \supset B, \mathfrak{Z}$$

то

$$\mathfrak{X}, A \Vdash B, \mathfrak{Z}$$

Следствие 1.5. *В формулировке* IK *системы* LA_m *если*

$$\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash \mathfrak{Y}$$

то

$$\mathfrak{X}, B \Vdash \mathfrak{Y}$$

Определим *степень* дерева доказательства как общее число его неструктурных выводов и *ранг* — как наибольшее число таких выводов в какой-либо из ветвей. Тогда мы имеем следующее

Следствие 1.6. *Когда обращение возможно, доказательство каждого утверждения* (2) *имеет степень и ранг, не превышающие степени и ранга* (1), *и степень действительно меньше, если* M *не может быть вообще вычеркнуто из* (1). *Далее, новое доказательство не содержит никакого вывода по неструктурным правилам, которые не использовались в доказательстве* (1); *то же самое относится к структурным правилам, за исключением того, что правило, употребляемое в* (1) *с одной стороны, может потребоваться в* (2) *с другой.*

Доказательство получается непосредственно из анализа метода рассматриваемого доказательства. Сделанные видоизменения заключались в том, что изменялись параметры, опускались применения R и вводились именно такие новые структурные правила, как сказано в следствии. Если R не вычеркивалось, то M можно вычеркнуть из (1) по теореме C1.

Ситуация в сингулярных системах, которая, очевидно, более сложна, здесь не будет рассматриваться [1]).

Проблема обращения родственна проблеме перестановочности выводов. Предположим, что последний вывод в Δ происходит по правилу R′ с M в качестве параметра. Тогда после обращения выше различных применений, подобных R′, не будет применений R, вводящих квазипараметрический предок M. Это один из смыслов, в которых мы можем сказать, что R и R′ были переставлены. (О других возможных смыслах см. Клини [PIG].)

В следующих примерах основную роль играет идея перестановки. Читателю предоставляется посмотреть, как из рас-

[1]) См., однако, упражнение 13 в конце разд. E.

суждений теоремы 1 получить перестановку. (В доказательствах, сопровождающих эти примеры, верхние узлы являются квазиисходными.)

Пример 1. $A \supset . A \supset B \Vdash A \supset B$. (Ср. пример 1 в разд. С5.) Если последний шаг в доказательстве происходит по правилу P*, то остальная часть доказательства однозначно определяется в LA_m, за исключением возможного квазиглавного конституэнта в *P:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \qquad A, B \Vdash B}{A, A \supset B \Vdash B} *\mathrm{P}}{A \Vdash A} *\mathrm{P}}{\dfrac{A \supset . A \supset B, A \Vdash B}{A \supset . A \supset B \Vdash A \supset B} \mathrm{P}*}$$

С другой стороны, если последний шаг в выводе происходит по *P без квазиглавного конституэнта, то посылка слева в LA_m должна была бы быть

$$\Vdash A, A \supset B \tag{3}$$

Так как единственным правилом, заключение которого может дать (3), является K* [1]) и обе возможные посылки неверны в двузначных таблицах, то (3) нельзя вывести в LA_m. Если мы используем форму с квазиглавными конституэнтами, то посылка будет

$$A \supset . A \supset B \Vdash A, A \supset B$$

в LA_m. Это сложнее, чем первоначальное утверждение. Конечно, оно выводимо, и можно считать, что перестановочность удовлетворяется в тривиальном смысле, но все же никакой перестановки по существу не производилось, и можно показать, что невозможно никакое доказательство, в котором применению P* не предшествует применение *P [2]). В LC_m, однако, перестановка возможна в нетривиальном смысле, ибо (3) можно немедленно вывести по P* из исходного утверждения $A \Vdash A, B$ и правая посылка для заключительного *P является исходной.

Пример 2. $A \vee B, A \supset B \Vdash B$. Если последним применяемым правилом является *V, то доказательство таково:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A, B \quad A, B \Vdash B}{A, A \supset B \Vdash B} *\mathrm{P} \qquad B, A \supset B \Vdash B}{A \vee B, A \supset B \Vdash B} *\mathrm{V}$$

[1]) Случай W* можно исключить по теореме, которая будет доказана позднее (см. следствие E7.1).

[2]) См. упражнение 15.

В обратном порядке выводом в LA_m будет

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A, B \quad B \Vdash A, B}{A \vee B \Vdash A, B} *\mathrm{V} \qquad A \vee B, B \Vdash B}{A \vee B, A \supset B \Vdash B} *\mathrm{P}$$

Перестановка в LA_1 невозможна.

Пример 3. Следующее доказательство справедливо в LA_1:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A \Vdash B \vee A} \mathrm{V}* \qquad \dfrac{B \Vdash B}{B \Vdash B \vee A} \mathrm{V}*}{A \vee B \Vdash B \vee A} *\mathrm{V}$$

Это доказательство использует первоначальную форму V*, которая не удовлетворяет условию (*b*) (что правило однозначно определяется главным конституэнтом). Два применения V* фактически являются различными правилами. Если мы используем кетоноевскую форму этого правила, удовлетворяющую условию (*a*), то доказательство принимает следующую форму в LA_m:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash B, A}{A \Vdash B \vee A} \mathrm{V}* \qquad \dfrac{B \Vdash B, A}{B \Vdash B \vee A} \mathrm{V}*}{A \vee B \Vdash B \vee A} *\mathrm{V}$$

В этой форме правила могут быть переставлены так:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash B, A \quad B \Vdash B, A}{A \vee B \Vdash B, A} *\mathrm{V}}{A \vee B \Vdash B \vee A} \mathrm{V}*$$

Пример 4. Рассмотрим следующий вывод в LA_1:

$$\dfrac{\dfrac{B \Vdash B}{A \wedge B \Vdash B} *\wedge \qquad \dfrac{A \Vdash A}{A \wedge B \Vdash A} *\wedge}{A \wedge B \Vdash B \wedge A} \wedge*$$

Теорема не применима к нему по той же причине, что и в примере 3. Однако в этом случае порядок правил можно изменить, используя те же правила:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Vdash B}{A, B \Vdash B} *\mathrm{K} \qquad \dfrac{A \Vdash A}{A, B \Vdash A} *\mathrm{K}}{A, B \Vdash B \wedge A} \wedge*}{A \wedge B, B \Vdash B \wedge A} *\wedge}{A \wedge B, A \wedge B \Vdash B \wedge A} *\wedge}{A \wedge B \Vdash B \wedge A} *\mathrm{W}$$

В этом случае применение *W необходимо в конце. Конечно, комбинация двух правил *Λ и этого правила *W — это то же самое, что одно применение кетононовской формы *Λ.

2. Элиминационная теорема. Мы обратимся теперь к формулировке и доказательству теоремы, сингулярная форма которой (5) была приведена в разд. C. С теми же соглашениями относительно '$\mathfrak{X}$', '$\mathfrak{Y}$', '$\mathfrak{Z}$', как и в разд. C3*e*, она звучит так:

Элиминационная теорема. *Если*

$$\mathfrak{X},\ A \Vdash \mathfrak{Y} \tag{4}$$

и

$$\mathfrak{X}' \Vdash A,\ \mathfrak{Z} \tag{5}$$

то

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}' \Vdash \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z} \tag{6}$$

Утверждение теоремы не выделяет тип L-системы, к которой она относится. Это, следовательно, не теорема в строгом смысле, а скорее схема теорем. Справедливость теоремы для конкретных L-систем и типов систем будет установлена в теоремах, снабженных обычной нумерацией. Вместо 'элиминационная теорема' мы будем сокращенно писать 'ЭТ'.

Первое доказательство будет проведено для систем LA_1, LC_1 и LC_m (с некоторым усложнением для LC_1). Доказательство дается таким образом, чтобы в самом доказательстве как можно меньше использовались специальные и структурные правила, так что доказательство может применяться к дальнейшим обобщениям.

Будем говорить, что (6) получается из (4) и (5) удалением (или устранением) A и что A — *удаляемое высказывание* в конкретном примере рассматриваемой теоремы. Отмеченные вхождения A в (4) и (5) будут называться *удаляемыми конституэнтами*. Посылки (4) и (5) будут иногда называться соответственно первой и второй посылками.

Доказательство будет состоять из трех этапов. На этапе 1 мы рассмотрим доказательство (4). Мы примем в качестве *гипотезы этапа*, что теорема верна для того же A и той же второй посылки всегда, когда доказательство первой посылки [соответствующей (4)] кончается введением удаляемого конституэнта посредством регулярного операционального правила, и покажем, что для этого A и для этой второй посылки теорема тогда справедлива вообще. Так как гипотеза этапа тривиально выполняется, когда A элементарно, то теорема полностью доказывается на этапе 1, когда A не составное. Поэтому повсюду в остальной части доказательства мы будем предполагать, что A составное. На этапе 2 мы производим редукцию, аналогичную

редукции этапа 1, но уже относительно доказательства (5), а не доказательства (4), с дополнительным ограничением, что A составное. Наконец, на этапе 3 в предположении, что исключение возможно для любой собственной компоненты высказывания A, мы показываем, что для данного составного A имеют место гипотезы первых двух этапов.

Все рассуждение, таким образом, является сложной двойной индукцией. Главной индукцией является индукция по построению исключаемого высказывания. Базисным шагом этой главной индукции занимаются в данном случае на этапе 1. Остальную часть рассуждения можно рассматривать как индуктивный шаг главной индукции, но индуктивное предположение не играет никакой роли до тех пор, пока мы не перейдем к этапу 3. Если дано фиксированное составное A и дана правая посылка, то этап 1 сводит шаг главной индукции к частному случаю, когда доказательство первой посылки имеет некоторый специальный вид. Этап 2 делает то же для второй посылки. Так как ни один из этих этапов не накладывает ограничений на не рассматриваемую в нем посылку и не меняет ее, то оба этапа вместе сводят шаг главной индукции (для данного фиксированного A) к случаю, когда доказательства обеих посылок имеют специальный вид. Затем следует этап 3, являющийся самым изящным местом доказательства. Доказательство на этапах 1 и 2 является вспомогательной индукцией по доказательствам (4) и (5). Эти два этапа практически не зависят друг от друга; если не считать того, что мы должны заботиться о базисном шаге главной индукции на этапе 1 и не позволять A быть элементарным на этапе 2, оба этапа можно производить в любом порядке.

Доказательство для этапов 1 и 2 будет применяться не только к системам LA_1, LC_1 и LC_m, но и к L-системам более общего характера. Добавление регулярных правил к этим системам вряд ли влияет на доказательство, но когда добавляются дополнительные иррегулярные правила, может оказаться, что необходимо сделать видоизменения. Так, рассуждения этапа 2 значительно усложняются при наличии Px; читатель, не интересующийся LC_1, может не принимать во внимание эти осложнения.

В случае когда правило для введения удаляемого конституэнта слева непосредственно обратимо, мы можем заменить этап 1 рассуждением разд. 1; точно так же если правило для введения его справа непосредственно обратимо, то мы можем обойтись без этапа 2. Но исключения в разд. 1 потребуют применения настоящего метода, почти без затруднений распространяемого и на общий случай. Поэтому настоящее доказательство, коль скоро оно проводится, не зависит от разд. 1. Однако метод разд. 1 позволяет осуществить некоторые обобщения.

В силу теоремы C2 мы можем предположить, что имеем дело с формулировкой II, для которой условие $(r4)''$ выполнено. Точно так же в силу теоремы C4 мы можем предположить, что исходные утверждения имеют только элементарные конституэнты.

Доказательство этапа 1. Пусть Δ — регулярный вывод $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ формулы (4). Тогда по определению регулярного вывода каждая Γ_k для $k < n$ применяется в Δ один и только один раз как посылка для вывода Γ_m $(m > k)$ по правилу R_m. Пусть Γ_k есть

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{U}_k \Vdash \mathfrak{Y}_k$$

где $\mathfrak{U}_k$ (и, следовательно, $\mathfrak{X}_k$ и $\mathfrak{Y}_k$) определяются возвратной индукцией, начиная с Γ_n, следующим образом:

(*a*) $\mathfrak{U}_n$ является отмеченным вхождением A в (4), $\mathfrak{X}_n$ есть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}_n$ есть $\mathfrak{Y}$.

(*b*) Если Γ_k используется как посылка для вывода Γ_m по R_m, то

(*b*1) все параметрические конституэнты $\mathfrak{U}_m$, которые содержатся в Γ_k, содержатся в $\mathfrak{U}_k$;

(*b*2) если главный конституэнт иррегулярного правила находится в $\mathfrak{U}_m$, то каждый из подчиненных конституэнтов содержится в той из $\mathfrak{U}_k$, которая находится на соответствующей стороне.

По главному общему принципу дедуктивной индукции ($\mathfrak{U}_n$ содержат только те конституэнты, которые принадлежат им согласно установленным правилам) $\mathfrak{U}_k$ определены для всех $k \leqslant n$. Так как единственными иррегулярными правилами, допускавшимися до сих пор, являются *K*, *W*, $\vdash$*, Px [1]), то отсюда следует, что все конституэнты $\mathfrak{U}_k$ подобны A. Это, в действительности, все квазипараметрические предки (разд. 1) конституэнта A.

Пусть Δ_1 — часть Δ, в которой $\mathfrak{U}_k$ пусто, и пусть Δ_2 — остальная часть Δ. Тогда поскольку $\mathfrak{U}_k$ пусто (случай (*b*)) всегда, когда $\mathfrak{U}_m$ пусто, то все посылки, используемые для вывода членов Δ_1, также содержатся в Δ_1.

С каждым Γ_k мы теперь связываем утверждение Γ'_k следующим образом:

$$\mathfrak{X}_k,\ (\mathfrak{X}') \Vdash \mathfrak{Y}_k,\ (\mathfrak{Z}) \tag{3}$$

Здесь '$(\mathfrak{X}')$' обозначает множество (возможно, пустое) экземпляров $\mathfrak{X}'$, причем имеется в точности один экземпляр для каждого вхождения A в $\mathfrak{U}_k$; точно так же '$(\mathfrak{Z})$' обозначает множество экземпляров $\mathfrak{Z}$ по одному для каждого вхождения A в $\mathfrak{U}_k$. Заметим, что если Γ_k содержится в Δ_1, то Γ'_k совпадает с Γ_k и Γ'_n — это в точности утверждение (6).

Мы показываем индукцией по k, которая является дедуктивной индукцией относительно фиксированного вывода Δ, что если

[1]) Доказательство этапа 1 применимо к LC_1 без изменения.

гипотеза рассматриваемого этапа выполняется, то каждое Γ'_k выводимо. Рассматриваются следующие пять случаев, обозначаемых греческими буквами от 'α' до 'ε':

(α) Γ_k содержится в Δ_1. Тогда Γ'_k совпадает с Γ_k.

(β) Γ_k исходно и содержится в Δ_2. Так как $\mathfrak{U}_k$ тогда непусто, то Γ_k не может быть типа ($p2$); следовательно, Γ_k должно имеет вид

$$A \Vdash A$$

где A слева является единственным конституэнтом $\mathfrak{U}_k$. Тогда Γ'_k — это в точности утверждение (5) и, следовательно, доказуемо. (Тогда в силу ограничения на исходные утверждения A элементарно.)

(γ) Γ_k содержится в Δ_2 и выводится по правилу R_k, для которого все конституэнты $\mathfrak{U}_k$ параметрические. Пусть посылками будут $\Gamma_i, \Gamma_j, \ldots$. По предположению дедуктивной индукции $\Gamma'_i, \Gamma'_j, \ldots$ доказуемы. По ($r5$), ($r6$) Γ'_k выводимо из $\Gamma'_i, \Gamma'_j, \ldots$; более того, ($r6$) применяется справа, только если $\mathfrak{Z}$ непусто. Это показывает, что Γ'_k доказуемо в соответствующей системе.

(δ) Γ_k получается по иррегулярному правилу, главный конституэнт которого содержится в $\mathfrak{U}_k$. Единственными возможными иррегулярными правилами являются *K и *W. Пусть посылкой будет Γ_i, где Γ'_i выводимо по предположению дедуктивной индукции. Если этим правилом является *W, то Γ_k отличается от Γ_i только тем, что в ее $\mathfrak{U}_k$ содержится одним экземпляром A меньше, а Γ'_k отличается от Γ'_i только тем, что она содержит слева на один экземпляр $\mathfrak{X}'$ меньше и, если $\mathfrak{Z}$ непусто, то справа на один экземпляр $\mathfrak{Z}$ меньше, поэтому Γ'_i можно преобразовать в Γ'_k последовательностью применений *W и W*, причем последнее используется только если $\mathfrak{Z}$ непусто. Если же речь идет о правиле *K, то в $\mathfrak{U}_k$ имеется дополнительный экземпляр A и Γ'_k может быть получено из Γ'_i, если использовать последовательность применений *K для введения дополнительного экземпляра $\mathfrak{X}'$ слева и последовательность применений K* для введения дополнительного экземпляра $\mathfrak{Z}$ справа, причем последнее необходимо только если $\mathfrak{Z}$ непусто. Поэтому Γ'_k выводимо из Γ'_i [1]).

(ε) Γ_k получается по регулярному операциональному правилу, главный конституэнт которого содержится в $\mathfrak{U}_k$. Пусть Γ''_k получается из Γ_k заменой всех параметрических конституэнтов $\mathfrak{U}_k$ экземплярами $\mathfrak{X}'$ и добавлением экземпляров $\mathfrak{Z}$ справа. Тогда мы можем вывести Γ''_k посредством того же рассуждения, что

[1]) Если мы должны были бы довольствоваться системами, в которых одно из правил *W или *K не допускается, то тот или иной из подклассов не мог бы встретиться. Но если мы принимаем любое из этих правил и допускаем также непустое $\mathfrak{Z}$, то мы должны также принять соответствующее правое правило.

и в (γ). Мы выводим Γ'_k из Γ''_k по гипотезе рассматриваемого этапа.

Так как случай (ε) не может возникнуть, когда A элементарно, то для этого случая доказательство теоремы закончено. Если A составное, то теорема сводится к доказательству гипотезы этапа 1 для конкретных A и правой посылки.

Доказательство этапа 2 [1]). Этап 2 доказательства настолько похож на этап 1, что мы позволим себе быть более краткими и сосредоточить внимание в основном на их различиях. Эти различия возникают из-за ограничений, связанных с сингулярностью, и из-за существования иррегулярных правил с главным конституэнтом справа. Среди этих последних правила $\vdash *$ и Px не имеют аналогов на этапе 1. Осложнений, связанных с $\vdash *$, можно избежать, исключая элементарный удаляемый конституэнт, но осложнения для Px должны быть приняты во внимание, если уж вообще мы хотим рассматривать систему LC_1.

Пусть Δ — вывод $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ формулы (5), где Γ_k имеет вид

$$\mathfrak{X}'_k \mathfrak{U}_k \Vdash \mathfrak{V}_k \mathfrak{W}_k$$

Для определения $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{V}_k$ мы имеем следующие правила:

(a) $\mathfrak{U}_n$ пусто, $\mathfrak{V}_n$ — отмеченный удаляемый конституэнт в (5), $\mathfrak{X}'_n$ есть $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{W}_n$ есть $\mathfrak{Z}$.

(b) Если Γ_k используется как посылка для вывода Γ_m, то

($b1$) Параметрические конституэнты $\mathfrak{V}_m$ ($\mathfrak{U}_m$), которые содержатся в Γ_k, содержатся в $\mathfrak{V}_k$ ($\mathfrak{U}_k$).

($b2$) Если R_m — иррегулярное правило, главный конституэнт которого содержится в $\mathfrak{U}_m$ или $\mathfrak{V}_m$, то подчиненные конституэнты содержатся в том из $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{V}_k$, который находится на соответствующей стороне.

($b3$) Если R_m — правило *P, главный конституэнт которого содержится в $\mathfrak{U}_m$, то пусть левая посылка будет Γ_k, а правая посылка Γ_i; тогда подчиненный конституэнт Γ_k находится в $\mathfrak{V}_k$, но не делается никакого указания относительно подчиненного конституэнта в Γ_i.

Сказанное является индуктивным определением $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{V}_k$ и, следовательно, $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{W}_k$. По возвратной индукции, начиная с Γ_n, мы получим, что все конституэнты $\mathfrak{V}_k$ подобны A и все конституэнты $\mathfrak{U}_k$ имеют вид $A \supset C$ (высказывания C не обязательно одни и те же). Это, очевидно, верно для Γ_n. Предположим, что это верно для Γ_m. Тогда это безусловно верно для параметрических конституэнтов, содержащихся в Γ_k, в силу ($b1$). Из иррегулярных правил, появляющихся по ($b2$), возможны *K, *W из левых и K*, W*, $\vdash *$ и Px из правых; из них $\vdash *$ исключается требованием, чтобы удаляемый конституэнт был составным; во всех других случаях конституэнты, вводимые в Γ_k, таковы, как установлено здесь. Наконец, конституэнт, вводимый в $\mathfrak{V}_k$ посредством ($b3$), подобен A, что заканчивает индукцию. Заметим, что $\mathfrak{U}_k$ пусто, за исключением случая системы LC_1, которая является сингулярной.

[1]) Доказательство этапа 2 можно было бы значительно упростить, если бы правило Px было взято в его второй форме (см. стр. 283). Тогда можно было бы опустить $\mathfrak{U}_k$. Однако при этом в разд. E пришлось бы сделать некоторые видоизменения.

Для случая, когда Px не принимается, Γ'_k будет утверждением

$$\mathfrak{X}'_k, \ (\mathfrak{X}) \Vdash (\mathfrak{Y}), \ \mathfrak{W}_k$$

где $(\mathfrak{X})$ — некоторое множество экземпляров $\mathfrak{X}$, а $(\mathfrak{Y})$ — некоторое множество экземпляров $\mathfrak{Y}$, причем для каждого вхождения A в $\mathfrak{V}_k$ имеется в точности один экземпляр. Если Px допускается, то мы необходимо имеем сингулярный случай [1]), в котором $\mathfrak{Y}$ имеет единственный конституэнт B; тогда Γ'_k получается из Γ_k заменой конституэнта $A \supset C$ из $\mathfrak{U}_k$ на $B \supset C$ и конституэнта A из $\mathfrak{V}_k$ на B и добавлением слева экземпляра $\mathfrak{X}$ для каждого конституэнта $\mathfrak{U}_k$ или $\mathfrak{V}_k$. Тогда Γ'_k совпадает с Γ_k для Γ_k в Δ_1 (т. е. когда $\mathfrak{U}_k$ и $\mathfrak{V}_k$ пусты); поэтому Γ'_n есть в точности (6).

Доказательство того, что каждое Γ'_k доказуемо, происходит, как на этапе 1. Добавочные параметрические конституэнты справа обязаны своим появлением экземплярам $\mathfrak{Y}$, а не экземплярам $\mathfrak{Z}$, а параметрические конституэнты слева — экземплярам $\mathfrak{X}$, а не экземплярам $\mathfrak{X}'$.

В сингулярных случаях $\mathfrak{Y}$ сингулярна и либо $\mathfrak{V}_k$ сингулярна, а $\mathfrak{W}_k$ пуста, либо наоборот. Если Px принимается, то появляется дополнительный случай, обозначаемый здесь через (ζ). Детали таковы:

(α) Γ_k содержится в Δ_1. Тогда Γ'_k совпадает с Γ_k.

(β) Γ_k содержится в Δ_2 и является исходным. Этот случай невозможен в силу ограничений на исходные утверждения, поскольку A составное.

(γ) Γ_k содержится в Δ_2 и выводится по правилу R_k, для которого все конституэнты в $\mathfrak{U}_k$ и $\mathfrak{V}_k$ являются параметрическими. Тогда Γ'_k выводимо тем же рассуждением, как и на этапе 1.

(δ) Γ_k получается по правилу R_k, удовлетворяющему условиям ($b2$). Если R_k — одно из правил *K* или *W*, то ситуация опять аналогична ситуации этапа 1. Если правилом является Px, ведущее от Γ_i к Γ_k выкидыванием конституэнта $A \supset C$ из $\mathfrak{U}_i$,

[1]) Если понадобилось бы, мы без труда рассмотрели бы и мультиплярный случай, заменив $A \supset C$ на $\mathfrak{Y} \supset C$, где $\mathfrak{Y} \supset C$ — просеквенция, конституэнтами которой являются $B \supset C$, где B — элемент $\mathfrak{Y}$. Такой случай встречается в гл. 6, но лишь в связи с системой, не представляющей особого интереса.

то вывод от Γ_i' к Γ_k' можно сделать, выкидывая экземпляр $B \supset C$ по тому же правилу Px и выкидывая лишний экземпляр $\mathfrak{X}$ последовательными применениями *W. В этом случае необходимо постулировать *W.

(ε) Γ_k получается по правилу R_k, для которого главный конституэнт содержится в $\mathfrak{B}_k$. Эта ситуация аналогична ситуации этапа 1 с применением гипотезы этапа. Заметим, что параметрические конституэнты в $\mathfrak{B}_k$ могут быть только в мультиплярном случае. В сингулярном случае мы сразу применяем гипотезу этапа.

(ζ) Γ_k получается по правилу R_k, удовлетворяющему условиям ($b3$). Пусть посылками будут Γ_i, Γ_j, где Γ_i' и Γ_j' выводимы. Тогда мы выводим Γ_k' из Γ_i' по тому же правилу.

Доказательство этапа 3. Предположим теперь, что выводы (4) и (5) заканчиваются введением удаляемого конституэнта A слева и справа соответственно посредством подходящих операциональных правил и что удаление было обосновано для случая, когда удаляемое высказывание является собственной компонентой A. Может представиться три случая, соответствующих введенным до сих пор операциям.

В этих случаях удобно будет вместо '$\mathfrak{X}$', '$\mathfrak{X}'$' употреблять '$\mathfrak{X}_1$', '$\mathfrak{X}_2$' и, когда они подразделяются, иметь в виду, что $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{12}$ составляют $\mathfrak{X}_1$ и т. д.

Случай 1. $A \equiv B \supset C$. Тогда (4) получается из посылок

$$\mathfrak{X}_{11} \| - B,\ \mathfrak{Z}_1 \tag{7}$$

$$\mathfrak{X}_{12},\ C \| - \mathfrak{Y}_1 \tag{8}$$

где $\mathfrak{Y}$ есть $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$. Посылкой для (5) является

$$\mathfrak{X}_2 B \| - C,\ \mathfrak{Z}_2 \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9), исключая C, имеем

$$\mathfrak{X}_{12},\ \mathfrak{X}_2,\ B \| - \mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{Z}_2$$

а отсюда и из (7), исключая B, имеем

$$\mathfrak{X}_{11},\ \mathfrak{X}_{12},\ \mathfrak{X}_2 \| - \mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2$$

т. е. (6).

Случай 2. $A \equiv B \wedge C$. Если мы используем кетоненовскую форму $*\Lambda$, то посылкой для (4) будет

$$\mathfrak{X}_1,\ B,\ C \| - \mathfrak{Y} \tag{10}$$

Посылками для (5) должны быть

$$\mathfrak{X}_{21} \| - B,\ \mathfrak{Z}_1 \tag{11}$$

$$\mathfrak{X}_{22} \| - C,\ \mathfrak{Z}_2 \tag{12}$$

Из (10) и (12), исключая C, имеем

$$\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_{22},\ B \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}_2$$

Отсюда и из (11), исключая B, имеем

$$\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_{21},\ \mathfrak{X}_{22} \| - \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2$$

т. е. (6).

Без использования правила Кетонена ситуация была бы двойственна ситуации, рассматриваемой в следующем случае.

Случай 3. $A \equiv B \vee C$. В мультиплярном случае с использованием кетоненовской формы для V* ситуация двойственна ситуации случая 2. В сингулярном случае мы можем рассуждать следующим образом. Посылками для (4) должны быть

$$\mathfrak{X}_{11},\ B \| - \mathfrak{Y} \tag{13}$$

$$\mathfrak{X}_{12},\ C \| - \mathfrak{Y} \tag{14}$$

Посылкой для (5) должна быть одна из

$$\mathfrak{X}_2 \| - B \qquad \mathfrak{X}_2 \| - C \tag{15}$$

Предположим, что это первая из (15); тогда, удаляя B из (13), мы имели бы

$$\mathfrak{X}_{11},\ \mathfrak{X}_2 \| - \mathfrak{Y}$$

Это не совпадает с (6); чтобы получить (6), нам нужно постулировать *K, что позволит добавить $\mathfrak{X}_{12}$ слева.

Этим и завершается доказательство элиминационной теоремы для систем LA, LC, LC_1. Итак, имеет место следующая

Теорема 2. *Элиминационная теорема справедлива для* LA_1, LC_1, LC_m. *Она, далее, справедлива для любой* L*-системы, образованной добавлением новых операциональных правил к одной из указанных систем, при условии, что рассуждения этапа* 3 *проходят для новых операций.*

Доказательство для LA_m [1]. Доказательство не проходит для LA_m, потому что P* не удовлетворяет ($r6$). Однако теорему можно доказать для LA_m, видоизменяя рассуждение. Решающим является то, что, когда $\mathfrak{Z}$ пуста, этап 1 требует ($r6$) только слева и поэтому проходит для LA_m при пустой $\mathfrak{Z}$. В частности, ЭТ истинна для элементарного A и пустой $\mathfrak{Z}$.

Если A составное и не имеет вида $B \supset C$, то мы можем исключить этапы 1 и 2 по теореме 1. Следовательно, мы должны рассмотреть только случаи, когда A элементарно или имеет вид $B \supset C$. В этих случаях мы начинаем с видоизменения этапа 2. Так как $\mathfrak{B}_k$ теперь состоит из квазипараметрических предков исключаемого конституэнта и так как таковые имеются во всех [2]) утверждениях Δ_2, то не может быть применений P* внутри Δ_2.

[1]) Другой метод распространения доказательства на LA_m предложен в разд. 5 (см. упражнение 16 в конце разд. E).

[2]) Кроме последнего. В этом контексте предполагается, что $k < n$.

Поэтому часть доказательства этапа 2 в случаях (α), (γ) и (δ) остается без изменений, а случай (ζ) отпадает. Необходимо только рассмотреть случай (ε), когда A есть $B \supset C$; если A элементарно, то приходится не только пересмотреть (β) — возможно также появление $\vdash *$.

Если A есть $B \supset C$, то случай (ε) может возникнуть только если правая часть сингулярна. Индукция этапа 2 завершается непосредственным применением гипотезы этапа. Остается только проверить эту гипотезу. Но приняв ее, получим пустую $\mathfrak{Z}$, и поэтому этапы 1 и 3 пройдут без труда. ЭТ поэтому доказана при условии, что она справедлива, когда A элементарно.

Если A элементарно и возникает случай (β), то опять получим пустую $\mathfrak{Z}$, а этот случай уже был рассмотрен. Таким образом, ЭТ доказана полностью для любого элементарного A, такого, что никакое применение правила $\vdash *$ не вводит A в Δ_2.

Если некоторый параметрический предок удаляемого конституэнта вводится в Δ_2 по $\vdash *$, то мы используем тройную индукцию [1]) по числу таких применений $\vdash *$. Предшествующее рассуждение обеспечивает базис индукции. Предположим затем, что Γ_k есть

$$\mathfrak{X}_k \Vdash A,\ \mathfrak{Z}_k$$

(где $\mathfrak{Z}_k$ содержит $\mathfrak{W}_k$ и параметрические экземпляры $\mathfrak{V}_k$) и что Γ_k получается по $\vdash *$ из

$$\mathfrak{X}_{ki} \Vdash B_i,\ \mathfrak{Z}_{ki}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{16}$$

где

$$\mathfrak{X}_k \equiv \mathfrak{X}_{k1}, \ldots, \mathfrak{X}_{km}, \quad \mathfrak{Z}_k \equiv \mathfrak{Z}_{k1}, \ldots, \mathfrak{Z}_{km}$$

и

$$B_1, \ldots, B_m \vdash_0 A$$

Тогда по теореме C5

$$B_1, \ldots, B_m \Vdash A$$

Отсюда и из (4) в силу уже доказанных случаев мы имеем

$$\mathfrak{X}, B_1, \ldots, B_m \Vdash \mathfrak{Y} \tag{17}$$

Пусть после преобразований, описанных на этапе 2, (16) принимает вид

$$\mathfrak{X}'_{ki} \Vdash B_i,\ \mathfrak{Z}'_{ki}$$

Отсюда и из (17), удаляя B_i в силу гипотезы тройной индукции, получаем Γ'_k. Таким образом, доказательство ЭТ для этого A и (5), а поэтому и для LA_m вообще, завершено.

Этим установлена следующая

[1]) Другой путь состоит в том, чтобы удалить $\vdash *$, доказав теорему E4 (см. ниже, стр. 328) непосредственной индукцией, не использующей ЭТ. Это единственное место, где наличие $\vdash *$ вызывает некоторые затруднения.

Т е о р е м а 3. *Элиминационная теорема справе*
LA_m.

Безусловно интересна ЭТ для видоизмененных
с ослабленными структурными правилами. Эти структу
вила входили в предыдущие доказательства следующи
1) в случае (δ) этапа 1 (а также двойственно для этапа 2) тр
что если *W* или *K* допускается с одной стороны, то
но допускаться и с другой; 2) в случае (δ) этапа 2 нам
чтобы рассмотреть Px; 3) в случае 3 этапа 3 нам нужно
гулярных системах [1]). Поэтому доказательство теорем
для тех обобщений, из которых исключены некоторы
структурных правил. Однако в мультиплярных систем
лами Кетонена ЭТ, как установлено здесь, не требуе
постулировалось какое-либо из правил *K*, *W* [2]).

В случае когда эти принципы постулируются, и
следующая

Т е о р е м а 4. *Если оба правила* *W* *выполняют*
влечет

ЭТ′. *Если*

$$\mathfrak{X},\ A \Vdash \mathfrak{Y}$$

и для некоторой $\mathfrak{Z}$, *которая является частью* (*или вс*

$$\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Z}$$

то $\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$.

Далее, если оба правила *K* *допускаются, то* ЭТ′ *
Поэтому для* L*-систем* ЭТ *и* ЭТ′ *эквивалентны.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы

С этого момента в определении 'L-системы' (разд.
подразумеваться справедливость ЭТ.

3. Теорема о замене. Для дальнейшего нам понадоб
ма, которая относится к теории L-систем во многом т
теорема о замене в разд. 3B относилась к алгебраически
гл. 4. При переходе к более высокой ступени эпитеори
будет рассматривать как видоизменение упомянуто
мы также будем называть ее теоремой о замене и обо
если будем уверены в невозможности недоразумений.

Пусть B — высказывание, содержащее высказыва
компоненту. Тогда B строится из A рядом применений о

[1]) Это не удивительно, если мы заметим, что правила V* (
воначальная форма *A) содержат принципы приблизительно с т
тивным значением, что и K* (*K).

[2]) Это не проверялось для случая, когда имеются выводы

операций типов

$$C \supset -,\ -\wedge C,\ C \wedge -,\ -\vee C,\ C \vee -,\ -\supset C$$

Здесь черта указывает аргументное место, а 'C' — параметр, который может быть различным на различных шагах построения, но не зависит от аргумента. Теперь в предположении, что

$$A \Vdash A' \tag{18}$$

можно легко установить, что

$$C \supset A \Vdash C \supset A'$$
$$A \wedge C \Vdash A' \wedge C$$
$$C \wedge A \Vdash C \wedge A'$$
$$A \vee C \Vdash A' \vee C$$
$$C \vee A \Vdash C \vee A'$$
$$A' \supset C \Vdash A \supset C$$

Эти формулы показывают, что если мы интерпретируем отношение $\leqslant$ разд. 3B как $\Vdash$, то первые пять операций в приведенном выше списке прямо монотонны, в то время как шестая обратно монотонна. Мы скажем, что A *положительно* или *отрицательно* в B в зависимости от того, является ли число непрямо монотонных операций в процессе построения B из A четным или нечетным. Заметим, что отношение $\Vdash$ является квазиупорядочением в силу элиминационной теоремы. Следовательно, по теореме 3B1 если B' — результат замены A на A' в данном конкретном вхождении, то левое из двух утверждений

$$B \Vdash B' \qquad B' \Vdash B \tag{19}$$

будет справедливо, если A положительно в B, в то время как правое будет справедливо, если A отрицательно в B.

Пусть теперь Γ — элементарное утверждение, в котором имеется конституэнт B, содержащий вхождение A. Скажем, что A положительно в Γ, если B находится в консеквенте Γ и A положительно в B или если B находится в антецеденте Γ и A отрицательно в B, и что A отрицательно в Γ, если B находится в консеквенте Γ и A отрицательно в B или если B находится в антецеденте Γ и A положительно в B. Пусть Γ′ получено из Γ подстановкой A' на место этого вхождения A. Тогда получается следующая

Теорема 5. *В любой* L*-системе с монотонными операциями мы можем вывести из* (18), *что*

$$\Gamma \to \Gamma' \quad \textit{или} \quad \Gamma' \to \Gamma \tag{20}$$

соответственно в зависимости от того, является A *положительным или отрицательным в* Γ.

Доказательство. Пусть B находится справа в Γ, так что Γ есть

$$\mathfrak{X} \Vdash B,\ \mathfrak{Y}$$

Тогда Γ′ есть

$$\mathfrak{X} \Vdash B',\ \mathfrak{Y}$$

По элиминационной теореме мы имеем то из отношений (20), которое находится с той же стороны, что и истинное утверждение в (19). Эта сторона будет левой, если A положительно в Γ, и правой, если A отрицательно в Γ. Это завершает доказательство для указанного случая.

Пусть B находится слева в Γ, так что Γ, Γ′ соответственно имеют вид

$$\mathfrak{X},\ B \Vdash \mathfrak{Y} \qquad \mathfrak{X},\ B' \Vdash \mathfrak{Y}$$

Тогда элиминационная теорема позволяет нам вывести то из отношений (20), которое находится с противоположной стороны по сравнению с истинным утверждением в (19). Это будет левая сторона, если A положительно в Γ (следовательно, отрицательно в B), и правая сторона, если A отрицательно в Γ. Доказательство завершено.

4. Эквивалентность T и сингулярной L. Из предварительных рассмотрений в разд. C1 и C2 можно было бы ожидать, что системы LA и LC эквивалентны соответствующим T-системам. Теперь нужно показать, что это действительно так и в каком именно смысле.

Мы сначала расширим T-системы так, чтобы включить правило, аналогичное $\vdash *$. Это правило будет названо $\vdash$i; его формулировка такова:

$\vdash$ i Если $E_1, \ldots, E_m \vdash_0 E_0$ (в смысле разд. C3*d*), то

$$\frac{E_1, \ldots, E_m}{E_0}$$

Определение. Утверждение

$$\mathfrak{X} \Vdash^{\mathrm{T}} B \tag{21}$$

относительно одной из систем TA или TC будет означать, что в рассматриваемой T-системе имеется вывод B, такой, что все неисключенные посылки являются высказываниями в $\mathfrak{X}$.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы показать, что (21) относительно TA (TC) эквивалентно

$$\mathfrak{X} \Vdash B$$

относительно LA_1 (LC_1). Ради точности последнее из этих отношений будет записано в виде

$$\mathfrak{X} \Vdash^{L} B \qquad (22)$$

Наше исследование с самого начала наталкивается на одну трудность, состоящую в том, что отношение (21) формализовано менее строго, чем (22). Утверждение (21) следует проверять рассмотрением древовидной диаграммы; мы должны видеть, что все неисключенные посылки доказательства содержатся в $\mathfrak{X}$. Мы должны принять как интуитивно очевидное то, что любой истинный частный случай (21) может быть выведен из исходных утверждений

($p1$) $\quad A \Vdash^{T} A$

($p2$) $\quad \Vdash^{T} E$ (если E — аксиома ⓒ)

посредством правил, аналогичных *C, *W и *K, и правил

$$\text{Pe}\ \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \quad \mathfrak{X} \Vdash^{T} A \supset B}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} B} \qquad \text{Pi}\ \frac{\mathfrak{X}, A \Vdash^{T} B}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \supset B}$$

$$\text{Ле}\ \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \wedge B}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A} \quad \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \wedge B}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} B} \qquad \text{Ли}\ \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \quad \mathfrak{X} \Vdash^{T} B}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \wedge B}$$

$$\text{Ve}\ \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \vee B \quad \mathfrak{X}, A \Vdash^{T} C \quad \mathfrak{X}, B \Vdash^{T} C}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} C} \qquad \text{Vi}\ \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \vee B} \quad \frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} B}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A \vee B}$$

$\vdash$ i Если $E_1, \ldots, E_m \vdash_0 E_0$, то

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash^{T} E_i,\ i = 1, 2, \ldots, m}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} E_0}$$

$$\text{Pk}\ \frac{\mathfrak{X}, A \supset C \Vdash^{T} A}{\mathfrak{X} \Vdash^{T} A}$$

Уточнив смысл отношения (21), получаем следующую теорему:

Теорема 6. *Для того чтобы выполнялось* (22), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (21).

Доказательство необходимости. (Доказательство не требует ЭТ.) Результат следует в силу дедуктивной индукции по доказательству (22), как только мы покажем, что исходные утверждения и правила L-системы сохраняются, когда $\Vdash^{L}$ интерпретируется как $\Vdash^{T}$.

Для исходных утверждений это ясно. Это ясно также для структурных правил. Для других правил доказательство происходит следующим образом.

P*. По предположению существует вывод B, неисключенные посылки которого содержатся в просеквенции $\mathfrak{X}$, A. В силу Pi существует вывод $A \supset B$, неисключенные посылки которого содержатся в $\mathfrak{X}$.

Λ*. По предположению существует вывод из $\mathfrak{X}$ утверждения A, а также вывод утверждения B. В силу Λi имеется вывод $A \wedge B$ из тех же посылок.

V*, $\vdash$*. Аналогично, используя Vi, $\vdash$i.

*P. По первому предположению имеется вывод A из неисключенных посылок в $\mathfrak{X}$. В силу Pe существует поэтому вывод B из $\mathfrak{X}$ и $A \supset B$. По второму предположению имеется вывод C из $\mathfrak{X}$ и B. Над каждым вхождением B как посылки для этого вывода помещаем полученный вывод B из $\mathfrak{X}$ и $A \supset B$. Результат является выводом C из $\mathfrak{X}$ и $A \supset B$.

*Λ. По предположению имеется вывод C из $\mathfrak{X}$ и либо из A, либо из B, либо из обоих (для кетоноевской формы). Над каждым вхождением одной из этих посылок помещаем вывод этой посылки из $A \wedge B$ посредством одного применения Ле. В результате имеем вывод C из $\mathfrak{X}$ и $A \wedge B$.

*V. По предположению имеется вывод Δ_1 высказывания C из $\mathfrak{X}$ и A и вывод Δ_2 высказывания C из $\mathfrak{X}$ и B. Если мы добавим посылку $A \vee B$, то мы можем получить C по Ve и вычеркнуть посылку A над Δ_1 и посылку B над Δ_2. В результате получаем вывод C, неисключенные посылки которого либо совпадают с $A \vee B$, либо содержатся в $\mathfrak{X}$.

Px. По предположению имеется вывод A из $\mathfrak{X}$ и $A \supset B$. В силу Pk мы можем исключить посылку $A \supset B$. В результате имеем вывод A из $\mathfrak{X}$, что и требовалось доказать.

Доказательство достаточности. (Используется ЭТ.) Достаточно показать, что правила T-системы сохраняются, когда $\Vdash^{T}$ интерпретируется как $\Vdash^{L}$. Это ясно для ($p1$), ($p2$) и для правил, аналогичных *C, *W и *K. Точно так же это верно для правил Pi, Λi, Vi, $\vdash$i и Pk, так как интерпретация непосредственно переводит их в P*, Λ*, V*, $\vdash$* и Px соответственно. Для остальных правил справедливость показывается следующими схемами, в которых '(Гп1)', '(Гп2)' и т. д. обозначают гипотезы рассматриваемого правила, а ЭТ обозначает применение элиминационной теоремы, быть может вместе со структурными правилами

$$\text{Pe}\quad \dfrac{\dfrac{(\text{Гп1}) \quad \mathfrak{X} \Vdash A \quad (p1)\ \mathfrak{X}, B \Vdash B}{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash B}\ {}^{*}\text{P} \quad (\text{Гп2})\ \mathfrak{X} \Vdash A \supset B}{\mathfrak{X} \Vdash B}\ \text{ЭТ}$$

$$\text{Ле}_1\quad \dfrac{(\text{Гп1})\ \mathfrak{X} \Vdash A \wedge B \quad \dfrac{(p1)\ A, B \Vdash A}{A \wedge B \Vdash A}\ {}^{*}\Lambda}{\mathfrak{X} \Vdash A}\ \text{ЭТ}$$

$$\text{Ле}_2 \quad \dfrac{\dfrac{(\text{Гп1}) \quad \mathfrak{X} \Vdash A \wedge B}{\mathfrak{X} \Vdash A} \quad \dfrac{(p1) \quad \dfrac{A, B \Vdash B}{A \wedge B \Vdash B} *\Lambda}{\mathfrak{X} \Vdash B}\ \text{ЭТ}$$

$$\text{Ve} \quad \dfrac{\dfrac{(\text{Гп1}) \quad \mathfrak{X} \Vdash A \vee B \quad \dfrac{(\text{Гп2}) \quad \mathfrak{X}, A \Vdash C \quad (\text{Гп3}) \quad \mathfrak{X}, B \Vdash C}{\mathfrak{X}, A \vee B \Vdash C} *\text{V}}{\mathfrak{X} \Vdash C}\ \text{ЭТ}$$

Это завершает доказательство теоремы 6.

Сопоставляя этот результат с теоремами разд. B, получаем:

Следствие 6.1. *Следующие утверждения попарно эквивалентны*:

$$\Vdash A \quad в\ \text{LA}(\mathfrak{D})$$
$$\Vdash A \quad в\ \text{TA}(\mathfrak{D})$$
$$\vdash A \quad в\ \text{HA}$$
$$1 \leqslant A \quad в\ \text{EA}$$

То же справедливо относительно утверждений, полученных подстановкой LC_1, TC, HC *и* EC *соответственно вместо* LA, TA, HA *и* EA.

Следствие 6.2. *Следующие утверждения также эквивалентны*:

$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B \quad в\ \text{LA}(\mathfrak{D})$$
$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B \quad в\ \text{TA}(\mathfrak{D})$$
$$\vdash A_1 \supset . A_2 \supset . \ldots . \supset . A_m \supset B \quad в\ \text{HA (}\textit{или}\ \text{TA)}$$
$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \leqslant B \quad в\ \text{EA}$$

Это же справедливо относительно утверждений, получающихся теми же подстановками, что и в следствии 6.1.

5. Эквивалентность сингулярной и мультиплярной систем. Теперь мы хотим показать, что сингулярные системы LA_1 и LC_1 эквивалентны соответственно мультиплярным системам LA_m и LC_m. Мы сделаем это сначала для абсолютных систем LA_1 и LA_m; затем рассуждение будет распространено на классические системы LC_1 и LC_m.

Будут подразумеваться следующие соглашения. Все системы даются в формулировке IK, т. е. с кетоненовскими формами *P и *Λ. Когда понадобится бóльшая точность, вместо '$\Vdash$' мы будем писать '$\Vdash_1$' для сингулярной системы и '$\Vdash_m$' для мультиплярной системы. Далее будет предполагаться, что $\mathfrak{Y}$ есть $C_1, \ldots, C_p$ и что

$$C \equiv C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_p \tag{23}$$

где ассоциация производится направо; точно так же что $\mathfrak{Y}'$ есть $C_1', \ldots, C_q'$ и $\mathfrak{Z}$ есть $D_1, \ldots, D_r$; при этом C' и D определены аналогично C. Если дано утверждение

$$\mathfrak{X} \Vdash_m \mathfrak{Y} \tag{24}$$

то утверждение

$$\mathfrak{X} \Vdash_1 C \tag{25}$$

будет называться его *сингулярным образом*; точно так же мы скажем, что (24) является *мультиплярным образом* (25). Сингулярный образ единственен, но так как может быть несколько разложений (23), то мультиплярный образ не обязательно единственен; однако если C не является дизъюнкцией (т. е. если $\vee$ не является его внешней операцией), то $\mathfrak{Y}$ сингулярна и (24) и (25) совпадают. Вывод

$$\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash A}{\mathfrak{X} \Vdash B}$$

всегда можно произвести в силу ТЗ и следствия 6.2 в случае, если

$$A \leqslant B$$

истинно в EA; в таком случае мы будем говорить, что вывод делается в EA. Поскольку различные виды ассоциации в (23) эквивалентны в EA, то соглашение относительно ассоциации было чисто техническим. Далее в доказательствах, представленных в виде древовидных диаграмм, я буду писать 'ЭТ' для обозначения того, что применяется элиминационная теорема, и 'EA' для обозначения вывода в EA. Диаграммы поэтому являются не доказательствами, а указаниями на то, как такие доказательства могут быть построены; читателю рекомендуется читать эти диаграммы снизу вверх и строить те их части, которые являются доказательствами, с помощью технических средств разд. C5.

Теорема 7. *Для того чтобы утверждение вида* (24) *было справедливо в* LA_m, *необходимо и достаточно, чтобы его сингулярный образ* (25) *был справедлив в* LA_1.

Доказательство необходимости. Мы используем дедуктивную индукцию по доказательству утверждения (24).

Если (24) выведено по любому из правил *C, *K, *W, *Λ, *V, которые оставляют правую часть совершенно неизменной,

то то же самое правило позволяет нам вывести (25) из сингулярных образов посылок [1]).

Предположим, что (24) выведено посредством *P. Тогда $\mathfrak{X}$ есть $\mathfrak{X}'$, $A \supset B$ и посылки будут

$$\mathfrak{X}' \Vdash_m A, \mathfrak{Y} \qquad \mathfrak{X}', B \Vdash_m \mathfrak{Y}$$

Сингулярный образ можно записать в силу EA как

$$\mathfrak{X}' \Vdash A \vee C \qquad \mathfrak{X}', B \Vdash C \tag{26}$$

При этих посылках мы рассуждаем следующим образом. Строим сначала доказательство $A \supset B,\ A \vee C \Vdash B \vee C$ так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A \qquad B \Vdash B}{A \supset B,\ A \Vdash B}\,{*}\mathrm{P}}{A \supset B,\ A \Vdash B \vee C}\,\mathrm{V}{*} \qquad \dfrac{(p1)}{\dfrac{A \supset B,\ C \Vdash C}{A \supset B,\ C \Vdash B \vee C}\,\mathrm{V}{*}}}{A \supset B,\ A \vee C \Vdash B \vee C}\,{*}\mathrm{V}$$

Из этого заключения и левой посылки (26) мы получаем в силу ЭТ

$$\mathfrak{X}', A \supset B \Vdash B \vee C \tag{27}$$

С другой стороны, используя правую посылку (26), получаем

$$\dfrac{\mathfrak{X}', B \Vdash C \qquad \mathfrak{X}', C \Vdash C}{\mathfrak{X}', B \vee C \Vdash C}\,{*}\mathrm{V}\ (p1)$$

Следовательно, исключая $B \vee C$ с помощью (27), имеем

$$\mathfrak{X}', A \supset B \Vdash C$$

т. е. (25).

Затем предположим, что (24) выведено из

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}' \tag{28}$$

по одному из правил C*, K*, W*. Тогда мы выведем (25) из сингулярного образа (28) с помощью EA.

Если (24) выведено с помощью P*, то $\mathfrak{Y}$ сингулярна и таковой же является посылка, из которой выведено (24). По индуктивному предположению, поскольку $p = 1$, эта посылка также выводима в LA_1; следовательно, выводима и (24). В таком случае (24) и (25) совпадают.

Если (24) получается по Λ*, то $\mathfrak{Y}$ есть $A \wedge B$, $\mathfrak{Z}$ и посылки будут иметь вид

$$\mathfrak{X}' \Vdash A, \mathfrak{Z} \qquad \mathfrak{X}' \Vdash B, \mathfrak{Z}$$

[1]) Мультиплярные посылки встречаются только в *V. В этом случае важно, что мы пользуемся формулировкой I, так что правые части в обеих посылках одни и те же.

Сингулярные образы можно записать ввиду ассоциации направо для $\vee$ в виде

$$\mathfrak{X} \Vdash A \vee D \qquad \mathfrak{X} \Vdash B \vee D$$

Отсюда по Λ* мы имеем в LA_1

$$\mathfrak{X} \Vdash (A \vee D) \wedge (B \vee D)$$

С другой стороны, поскольку

$$(A \vee D) \wedge (B \vee D) \leqslant (A \wedge B) \vee D$$

справедливо в EA, мы имеем с помощью EA

$$\mathfrak{X} \Vdash (A \wedge B) \vee D$$

т. е. (25) для этого случая.

Наконец, предположим, что (24) получается по V*. Тогда $\mathfrak{Y}$ есть $A \vee B$, $\mathfrak{Z}$. Пусть сингулярным образом посылки будет

$$\mathfrak{X} \Vdash C'$$

Тогда, поскольку

$$C' \leqslant C$$

выполняется в структуре, мы имеем (25) с помощью EA.

Если (24) получено по $\vdash$ *, то вывод будет

$$\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash_m E_i, \mathfrak{Z}, \quad i = 1, 2, \ldots, m}{\mathfrak{X} \Vdash_m E_0, \mathfrak{Z}}$$

По индуктивному предположению

$$\mathfrak{X} \Vdash_1 E_i \vee D, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{29}$$

По теореме C5

$$E_1, E_2, \ldots, E_m \Vdash_2 E_0$$

и, следовательно, по V*

$$E_1, E_2, \ldots, E_m \Vdash E_0 \vee D$$

Это случай $k = 0$ для

$$E_1 \vee D, \ldots, E_k \vee D, E_{k+1}, \ldots, E_m \Vdash E_0 \vee D \tag{30}$$

Чтобы показать, что это выполняется для всех $k \leqslant m$, достаточно привести индукционный шаг для индукции по k. Он получается из (30) и из заключения фигуры

$$\dfrac{D \Vdash_1 D}{D \Vdash_1 E_0 \vee D}\,\mathrm{V}{*}$$

по *V в формулировке II (которая в свою очередь следует из формулировки I по теореме C2). Поэтому (30) выполняется для

$k = m$. Отсюда и из (29) последовательными применениями ЭТ получаем (25).

Этим доказательство необходимости завершено.

Доказательство достаточности. Так как правила LA_1 справедливы в LA_m[1]), то (25) справедливо в LA_m. Отсюда получаем (24) по теореме 1, производя обращение по отношению к дизъюнкциям справа.

Этим заканчивается доказательство теоремы 7.

Следствие 7.1. *Утверждения вида*

$$\mathfrak{X} \Vdash B$$

справедливые в LA_m, *в точности совпадают с утверждениями, справедливыми в* LA.

Доказательство. Это случай, когда $p = 1$.

Так как ЭТ для LA_m не использовалась в доказательстве теоремы 7, то теоремой 7 можно воспользоваться для того, чтобы дать другое доказательство ЭТ для LA_m, а именно, выводя ее из ЭТ для LA_1 [2]).

Следствие 6.2 допускает обобщение:

Следствие 7.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

$A_1, \ldots, A_m \Vdash B_1, \ldots, B_n$	в LA_m
$A_1, \ldots, A_m \Vdash B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$	в TA
$\vdash A_1 \supset . A_2 \supset . \ldots \supset . A_m \supset . B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$	в HA
$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \leqslant B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$	в EA

Вот и все о абсолютных системах. Обратимся теперь к классическим системам.

Теорема 8. *Для того чтобы* (24) *выполнялось в* LC_m, *необходимо и достаточно, чтобы* (25) *выполнялось в* LC_1.

Доказательство необходимости. Необходимо к случаям, рассмотренным в теореме 7, добавить случай единственного вывода, возможного в LC_m, но не в LA_m, а именно, вывода по неограниченному правилу P*. Если (24) получено так, то $\mathfrak{Y}$ есть $A \supset B$, $\mathfrak{Z}$; посылкой будет

$$\mathfrak{X}, A \Vdash B, \mathfrak{Z}$$

Сингулярный образ, который справедлив в LC_1, по индукционному предположению есть

$$\mathfrak{X}, A \Vdash B \vee D$$

[1]) Можно было бы думать, что *P является исключением, но LA_1-форма *P справедлива в LA_m.

[2]) См. упражнение 16. Вместо того чтобы в доказательстве достаточности пользоваться теоремой 1, мы могли бы прямо воспользоваться дедуктивной индукцией.

Отсюда следующим образом выведем (25):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \Vdash B}{B \Vdash A \supset B}\,\mathrm{V}* \qquad \dfrac{D \Vdash D}{D \Vdash A \supset B . \vee D}\,\mathrm{V}*}{B \Vdash A \supset B . \vee D}\,{}^{*}\mathrm{V} \qquad (\Gamma\text{п})}{B \vee D \Vdash A \supset B . \vee D} \qquad \mathfrak{X}, A \Vdash B \vee D}\,\text{ЭТ}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X}, A \Vdash A \supset B . \vee D \qquad B \Vdash B}{\mathfrak{X}, A, A \supset B . \vee D . \supset B \Vdash B}\,\mathrm{P}* }{\mathfrak{X}, A \supset B . \vee D . \supset B \Vdash A \supset B}\,\mathrm{V}*}{\mathfrak{X}, A \supset B . \vee D . \supset B \Vdash A \supset B . \vee D}\,\mathrm{Px}$$

$$\mathfrak{X} \Vdash A \supset B . \vee D$$

Доказательство достаточности. Здесь опять единственным случаем, который нужно рассмотреть, будет тот, когда вывод производится по Px. Вывод в LC_1 тогда будет иметь вид

$$\dfrac{\mathfrak{X}, C \supset B \Vdash C}{\mathfrak{X} \Vdash C}$$

Соответствующий вывод в LC_m можно обосновать так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p1)}{C_i \Vdash B, \mathfrak{Y}, \quad i = 1, 2, \ldots, p}\,{}^{*}\mathrm{V}}{C \Vdash B, \mathfrak{Y}}\,\mathrm{P}* \qquad \dfrac{\mathfrak{X}, C \supset B \Vdash \mathfrak{Y} \quad \Vdash C \supset B, \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}\,\text{ЭТ}$$

Это завершает доказательство теоремы 8.

Следствие 8.1. *Утверждения вида*

$$\mathfrak{X} \Vdash B$$

справедливые в LC_m, *в точности совпадают с утверждениями, справедливыми в* LC_1.

Доказательство вытекает из теоремы 8 при $p = 1$. Следующее следствие связывает теорему 8 со следствием 6.2.

Следствие 8.2. *Утверждения следствия* 7.3 *полностью остаются в силе, если в его формулировке системы* LA_m, TA, HA *и* EA *заменяются соответственно на* LC_m, TC, HC *и* EC.

Следствие 8.3. *Правило, аналогичное* Px, *а именно*

$$\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash A, \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}$$

излишне в LC_m.

Доказательство. Доказательство достаточности теоремы справедливо всегда, когда C содержится в $\mathfrak{Y}$.

Следствие 8.4. *Пусть* LC_1' *отличается от* LC_1 *лишь тем, что на* Px *накладывается дополнительное ограничение, состоящее в том, чтобы* B *было компонентой* A. *Тогда любая элементарная теорема* LC_1 *доказуема в* LC_1' *и обратно.*

Доказательство. Доказательство необходимости для теоремы 8 использовало только такие применения Px, которые удовлетворяют дополнительному ограничению. (Правило Px использовалось только для оправдания выводов по P*.) Следовательно, если Γ доказуемо в LC_1, то оно выводимо в LC_m по следствию 8.3 и, следовательно,— в силу доказательства необходимости теоремы 8 — в LC_1'. Обратное ясно, так как любое доказательство в LC_1' и подавно является доказательством в LC_1.

6. Полнота LC. Мы видели в разд. C2, что любое элементарное утверждение LC верно при интерпретации посредством двузначных таблиц. Теорема полноты для LC является обратным утверждением для случая, где $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{D}$. Поскольку верность относительно двузначных таблиц можно принять за пятый вид формулировки, параллельный L-, T-, H- и E-формулировкам, уместно доказать эту теорему в настоящем разделе. Приводимое доказательство по существу принадлежит Кетонену [UPK].

Теорема 9. *Для того чтобы*

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y} \tag{31}$$

выполнялось в LC ($\mathfrak{D}$), *необходимо и достаточно, чтобы оно было верно для всякой оценки посредством двузначных таблиц в смысле разд.* C2.

Доказательство. Необходимость этого условия (даже для LC ($\mathfrak{S}$)) показывается дедуктивной индукцией. Вряд ли необходимо явно приводить детали. Достаточно установить следующие факты. Исходное утверждение типа ($p1$) имеет общий конституэнт в обеих частях и верно для любого из двух возможных значений этого общего конституэнта. В индукционном шаге достаточно рассмотреть случай, когда все параметрические конституэнты слева имеют значение 1, а все параметрические конституэнты справа — значение 0, так как иначе заключение верно; в рассматриваемом же случае верность посылок ограничивает выбор значений для подчиненных, для которых обычные таблицы истинности дают такое значение для главного конституэнта, что заключение оказывается верным.

Остается доказать достаточность. Предположим тогда, что (31) верно в указанном в теореме смысле. Строим дерево снизу вверх, применяя операциональные правила LC_m (в формулировке IK)

в обратном направлении. Так как каждая посылка такого операционального правила содержит меньше операций, чем заключение, то процесс в конце концов должен привести к построению дерева $\mathfrak{D}$, в котором верхние узлы содержат только элементарные конституэнты. Если утверждения в этих верхних узлах доказуемы, то из $\mathfrak{D}$ мы можем построить дерево доказательства для (31).

Но обращенные правила LC_m сохраняют свойство быть верными относительно таблиц истинности; это показывают, проводя индукционный шаг доказательства необходимости в противоположном направлении. Следовательно, все узлы $\mathfrak{D}$, а потому и верхние узлы,— тавтологии относительно таблиц истинности. Но если (31) является тавтологией и содержит лишь элементарные конституэнты, то в $\mathfrak{X}$ и в $\mathfrak{Y}$ должен быть общий конституэнт; иначе существовала бы оценка, при которой все конституэнты $\mathfrak{X}$ принимали бы значение 1, а все конституэнты $\mathfrak{Y}$ — значение 0. Поэтому все верхние узлы $\mathfrak{D}$ квазиисходны (разд. C9), и $\mathfrak{D}$ можно тривиально превратить в доказательство (31), что и требовалось доказать.

Так как доказательство, полученное таким путем из $\mathfrak{D}$, не содержит применения *W*, то наше рассуждение показывает, что правила сокращения излишни. Применения *K* также можно исключить. Обобщением этих результатов мы займемся в разд. E.

Замечание. Рассуждение, доказывающее достаточность, проходит в любом случае, когда операциональные правила непосредственно обратимы и при обращении сохраняют верность относительно таблиц истинности.

E. L-ВЫВОДИМОСТЬ

Этот раздел посвящен теоремам и техническим средствам, касающимся того, что́ может, а что́ не может быть сделано при оперировании с L-системами. Эти системы имеют две характерные черты: первая состоит в том, что выводы по правилам обычно увеличивают сложность, так что доказательство является "процессом синтеза"; вторая состоит в том, что можно (с некоторыми исключениями) путем рассмотрения сказать, может ли элементарное утверждение быть заключением данного правила, так что существует возможность соответствующего анализа.

Раздел начинается с изучения "свойства композиции", которое, собственно, выражает первую упомянутую особенность L-систем — их синтетический характер. Затем в разд. 2—4 мы переходим к изучению свойств, являющихся более или менее непосредственными следствиями свойства композиции, и к выражению широких необходимых условий для выводимости. Сюда относятся свойство отделения, согласно которому правила для операции уместно

применять только тогда, когда эта операция на самом деле встречается; свойство сохранения, касающееся отношений к основной системе $\mathfrak{S}$, и свойство дизъюнкции, согласно которому в простейшем случае $A \vee B$ верно в абсолютной алгебре высказываний только тогда, когда верно по крайней мере одно из A, B. В разд. 5—6 изучаются структурные правила с целью ограничить или удалить их и тем самым уменьшить число возможностей в аналитическом процессе; в частности, в разд. 6 показано, что в слегка видоизмененных формулировках, называемых формулировками III и IV, правила *W* излишни. Это прокладывает путь для теоремы о разрешимости в разд. 7. Наконец, разд. 8 посвящен "табличному" методу, по существу принадлежащему Бету; этот метод упрощает и в известной степени механизирует разрешающий метод.

1. Свойство композиции. Наиболее ярким свойством операциональных правил для L-систем является то, что они образуют новые комбинации, но не позволяют выбрасывать комбинации, кроме тех, которые являются повторениями уже имеющихся. Мы перейдем к точной формулировке этого свойства. Мы будем употреблять термин 'компонента' в смысле разд. 3В1. Это определение устанавливает, когда высказывание A является компонентой другого высказывания B. Возможность того, что A совпадает с B, сюда включается. Итак, мы скажем, что высказывание A является *компонентой элементарного утверждения* Г, если A является компонентой некоторого высказывания, входящего в Г в качестве конституэнта.

Мы скажем, что правило R обладает *'свойством композиции'* [1]), если каждый подчиненный конституэнт подобен некоторой компоненте главного конституэнта. Мы скажем, что система обладает свойством композиции, если каждое из ее правил обладает этим свойством. Мы скажем, что правило или система обладают *свойством композиции для составных конституэнтов*, если условия приведенного выше определения удовлетворяются для всех подчиненных составных конституэнтов, но не обязательно для элементарных.

Например, все правила, регулярные или иррегулярные, систем $\mathrm{LA}_1(\mathfrak{D})$, $\mathrm{LA}_m(\mathfrak{D})$ и $\mathrm{LC}_m(\mathfrak{D})$ удовлетворяют свойству композиции, так что и сами системы удовлетворяют этому свойству. Если $\mathfrak{S}$ такова, что все вспомогательные утверждения (разд. С3) непусты, то правило $\vdash *$ не удовлетворяет свойству композиции, но так как все подчиненные конституэнты правила $\vdash *$ обязательно элементарны, то оно удовлетворяет свойству композиции для составных конституэнтов; поэтому и все системы $\mathrm{LA}_1(\mathfrak{S})$, $\mathrm{LA}_m(\mathfrak{S})$, $\mathrm{LC}_m(\mathfrak{S})$ также удовлетворяют последнему свойству. Наконец, правило Рх не удовлетворяет свойству композиции даже для составных конституэнтов и то же, следовательно, можно сказать о всех системах LC_1.

[1]) Это свойство чаще называют 'свойством подформульности', но употребляемый нами термин лучше согласуется с терминологией книги в целом. [Так переводится английское 'subformula property'; в русском переводе [IMM] Клини принят термин 'свойство подформулы'.— *Ред.*]

Поскольку все конституэнты в посылках правила являются либо подчиненными, либо параметрическими и поскольку последние подобны некоторым конституэнтам в заключении, то всякий конституэнт в посылках правила, удовлетворяющего свойству композиции, подобен некоторой компоненте конституэнта в заключении этого правила. То же будет верно, если ограничиться составными конституэнтами, в случае, когда правило удовлетворяет свойству композиции для составных конституэнтов. Итак, мы имеем (либо опуская все слова в скобках, либо включая их все) следующую теорему:

Теорема 1. *Если* L-*система удовлетворяет свойству композиции (для составных конституэнтов), то каждый (составной) конституэнт элементарного утверждения в регулярном доказательстве подобен некоторой компоненте в окончательном результате.*

Доказательство. Каждый потомок искомого конституэнта содержит его в качестве своей компоненты. Таким образом, такой потомок будет входить и в конечный результат, что и требовалось доказать.

2. Свойство отделения. Мы скажем, что система обладает *свойством отделения* (относительно множества операций Ω), если для каждой операции ω (из Ω) каждая элементарная теорема Г, в которой ω не встречается, доказуема без использования постулатов, относящихся к ω. Для L-систем постулаты, относящиеся к ω (если нет некоторого вспомогательного пояснения [1])), состоят из тех правил, в которых ω является главной операцией в главном конституэнте. В других случаях понятие постулата, относящегося к ω, остается несколько неясным, но подразумевается, что оно делается явным при формулировке системы.

Теорема 2. *Если* L-*система обладает свойством композиции для составных конституэнтов, то она обладает свойством отделения относительно всех операций.*

Доказательство. Если Г — элементарная теорема, то у нее есть доказательство, следовательно, у нее есть регулярное доказательство. По теореме 1 никакое из исключенных правил не употребляется в регулярном доказательстве, что и требовалось доказать.

[1]) Как в следствии 2.3.

Так как правила LA_1, LA_m, LC_m обладают свойством композиции для составных конституэнтов, то мы сразу получаем

Следствие 2.1. *Системы* LA_1, LA_m *и* LC_m *обладают свойством отделения для всех операций.*

Для вывода свойства отделения для LC_1 потребуется дополнительное рассуждение. Мы отметим сначала

Следствие 2.2. *Элементарные теоремы* LC_1 (LC_m), *не содержащие импликации, совпадают с элементарными теоремами* LA_1 (LA_m).

Доказательство. Если Г — элементарная теорема LC_1, то по теореме D8 она доказуема в LC_m. Если Г не содержит импликации, то у нее есть доказательство в LC_m, не использующее P-правил (по следствию 2.1). Так как операциональные правила LC_m, отличные от P-правил, такие же, как в LA_m, то Г доказуема в LA_m. Если она сингулярна, то она доказуема в LA_1 по теореме D7. Обратно, любая элементарная теорема LA_1 (LA_m) доказуема, очевидно, и в LC. Теорема доказана.

Теперь предположим, что Г является элементарной теоремой LC_1, включающей в себя импликацию. По теореме D8 и следствию 2.1 Г имеет доказательство в LC_m, использующее только правила для операций, действительно входящих в Г. Его можно преобразовать в доказательство в LC_1' по теореме D8 и следствию D8.4. Все правила LC_1', кроме Px, обладают свойством композиции, и Px может выбросить только конституэнт $A \supset B$, который, поскольку B является компонентой A, не содержит иных операций, кроме импликаций и операций из A. Поэтому каждый узел доказательства не содержит операций, за исключением, быть может, импликаций, которых нет в узле, расположенном непосредственно под ним. Так как импликация входит в Г, то никакой узел не содержит операций, отсутствующих в Г, и, следовательно, не могут встречаться никакие правила, соответствующие операциям, отсутствующим в Г.

Так как это верно и в том случае, когда Г не содержит импликаций, то в силу следствий 2.1 и 2.2 мы получаем

Следствие 2.3. *Система* LC_1 *также обладает свойством отделения для всех операций, даже если* Px *добавлено к списку правил, относящихся к импликации.*

Теорема об эквивалентности из разд. D позволяет распространить свойство отделения на другие типы формулировок. Это требует детального рассмотрения доказательств эквивалентности. В доказательстве эквивалентности между T-системой и сингулярной L-системой в теореме D6 обоснование каждого правила любой из

систем требует только использования соответствующего правила для той же операции в другой системе; следовательно, аналог теоремы 2 выполняется без каких-либо видоизменений в системах TA и TC. Но доказательство эквивалентности между E-, H- и T-системами в разд. B не разделяет операции таким путем. Поэтому сведéние TA к HA в теореме B3 требовало свойства импликации для всех T-правил, а сведéние EA к IIA в теореме B4 требовало также свойства конъюнкции. Следовательно, из теоремы 2 мы получаем [1]):

Следствие 2.4. *Системы* TA *и* TC *обладают свойством отделения для всех операций; системы* HA *и* HC *в стандартной формулировке — для всех, за исключением импликации. Далее, любая элементарная теорема* EA, *не содержащая операции* $\vee$, *является теоремой импликативной полуструктуры.*

3. Свойство сохранения. Будем говорить, что L-система над $\mathfrak{S}$ обладает *свойством сохранения* относительно $\mathfrak{S}$, если в консеквенте каждой элементарной теоремы, имеющей только элементарные конституэнты, есть некоторое высказывание, $\mathfrak{S}$-выводимое (разд. C7) из высказываний, входящих в антецедент.

Теорема 3. *Если* L-*система над* $\mathfrak{S}$ *такова, что все правила, отличные от* $\vdash *$ *и структурных правил, относятся к некоторой операции и для всех операций выполняется свойство отделения, то* L-*система обладает свойством сохранения относительно* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть Г — элементарное утверждение, все конституэнты которого элементарны. Пусть Δ — регулярное доказательство Г. По свойству отделения в Δ не использовались никакие операциональные правила и, следовательно, все конституэнты в Δ элементарны. Мы используем дедуктивную индукцию относительно Δ. Если Г исходно, то либо каждое высказывание в консеквенте Г совпадает с высказыванием в антецеденте Г, либо некоторое высказывание в консеквенте является аксиомой; в любом из случаев утверждение теоремы оказывается верным. Если Г выводится по правилу, отличному от $\vdash *$, то имеется одна посылка, и высказывания, входящие в одну из частей посылки, входят в ту же часть заключения; так как по индуктивному предположению утверждение теоремы выполняется для посылки, то оно выполняется и для заключения. Наконец, предположим, что Г получается по правилу $\vdash *$. Пусть вывод будет

$$\frac{\mathfrak{X}_i \Vdash E_i, \mathfrak{Z}_i \quad i = 1, 2, \ldots, m}{\mathfrak{X} \Vdash E_0, \mathfrak{Z}} \qquad \begin{matrix} \Gamma_i \\ \Gamma \end{matrix}$$

[1]) Ср. упражнения 11 и 15 разд. B.

где все высказывания из любой $\mathfrak{X}_i$ содержатся в $\mathfrak{X}$ и все высказывания из любой $\mathfrak{Z}_i$ содержатся в $\mathfrak{Z}$ [1]). Если какое-либо высказывание из $\mathfrak{Z}_i$ $\mathfrak{S}$-выводимо из высказываний, входящих в $\mathfrak{X}_i$, то некоторое высказывание из $\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{S}$-выводимо из высказываний, входящих в $\mathfrak{X}$. По индуктивному предположению остается единственная возможность: E_i для каждого i выводимо из высказываний, входящих в $\mathfrak{X}_i$; тогда E_0 $\mathfrak{S}$-выводимо из $E_1, \ldots, E_m$ и, следовательно, в свою очередь из высказываний, входящих в $\mathfrak{X}$, что и требовалось доказать.

Следующая теорема, которая сводит LA ($\mathfrak{S}$) и LC ($\mathfrak{S}$) к LA ($\mathfrak{D}$) и LC ($\mathfrak{D}$), может также быть отнесена к теоремам сохранения.

Теорема 4. *Пусть* Δ *— доказательство в* LA ($\mathfrak{S}$) *или* LC ($\mathfrak{S}$) *утверждения*

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y} \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ *— (конечное) множество высказываний* M*, фигурирующих в качестве аксиом* [*т. е. множество конституэнтов первичных утверждений типа* ($p2$)] *в* Δ*, и пусть* $\mathfrak{N}$ *— множество всех высказываний* N *вида*

$$N_1 \supset . N_2 \supset . \ldots . \supset . N_n \supset N_0 \tag{2}$$

где вспомогательное утверждение

$$N_1, \ldots, N_n \vdash_0 N_0 \tag{3}$$

используется как обоснование для вывода по $\vdash *$ *в* Δ*. Тогда*

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y} \tag{4}$$

доказуемо в соответствующей L*-системе над* $\mathfrak{D}$.

Доказательство. В силу теорем D7 и D8 в соответствующей сингулярной системе имеется дерево доказательства для утверждения

$$\mathfrak{X} \Vdash C$$

где C таково, как в разд. D5. По теореме D6 существует T-доказательство, заканчивающееся C, все неисключенные посылки которого содержатся в $\mathfrak{X}$. В этом T-доказательстве каждое M в $\mathfrak{M}$ будет появляться в качестве верхнего узла и выводы по $\vdash *$ станут выводами по $\vdash$i. Пусть теперь члены $\mathfrak{M}$ в верхних узлах берутся в качестве дополнительных посылок, и там, где есть выводы по $\vdash$i, обоснованные посредством (3), пусть вывод делается последовательными применениями Ре с (2) в качестве дополнительной посылки. Значит, у нас будет T-доказательство утверждения

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{X} \Vdash C$$

[1]) Это относится как к формулировке I, так и к формулировке II.

относительно $\mathfrak{D}$. Его можно превратить (по теоремам D6 — D8) в доказательство (4), что и требовалось доказать.

4. Свойство дизъюнкции. Это — свойство абсолютной алгебры высказываний, которым не обладает классическая алгебра высказываний; оно состоит в том, что $A \vee B$ можно утверждать только тогда, когда утверждается либо A, либо B.

Чтобы сформулировать это свойство точно, допустим, что мы имеем дело с системой LA_1. Мы скажем, что операция является *недилеммматической*, если правило для введения ее налево удовлетворяет условию ($r6$) справа и либо имеет одну посылку, либо, если оно имеет более одной посылки, правый конституэнт заключения конгруэнтен правому конституэнту в точности одной из посылок. Например, $\wedge$ является недилеммматической, так как $*\Lambda$ имеет только одну посылку; $\supset$ является недилеммматической в LA_1, потому что правый конституэнт заключения $*P$ конгруэнтен правому конституэнту только правой посылки; но $\vee$ является дилеммматической, ибо правый конституэнт $*V$ является параметрическим в обеих посылках. В гл. 7 мы встретим случай, когда операция является дилеммматической из-за того, что она не удовлетворяет ($r6$).

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{L}$ *— сингулярная* L*-система, образованная добавлением к* LA_1 *разве лишь полурегулярных правил для дополнительных операций. Пусть* $\mathfrak{X}$ *построена из элементарных высказываний с помощью разве лишь недилеммматических операций. Пусть* A *и* B *— высказывания, не обязательно элементарные. Пусть*

$$\mathfrak{X} \Vdash A \vee B \tag{5}$$

доказуемо в $\mathfrak{L}$*. Тогда одно из утверждений*

$$\mathfrak{X} \Vdash A \qquad \mathfrak{X} \Vdash B \tag{6}$$

доказуемо в $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Пусть Δ — регулярный вывод (5) и пусть он представлен в виде дерева. Так как операция $\vee$ не встречается слева в Γ и правая часть не элементарна, то Γ не квазиисходно. Тогда нижний узел Δ должен быть получен в результате вывода. Этот вывод не может идти по правилу $\vdash *$, так как правая часть не является элементарной; не может он происходить и по правому операциональному правилу, отличному от $V*$. Если этот нижний вывод получен не по правилу $V*$, то он должен получаться по структурному правилу или по левому операциональному правилу. В любом случае в силу ограничений теоремы найдется единственная посылка, консеквент которой конгруэнтен консеквенту (5). Мы переходим к дереву, ведущему к этой

посылке. Таким путем мы продолжаем продвигаться по дереву, до тех пор пока не достигнем узла Γ', который был введен посредством V*. Тогда Γ' должно иметь вид

$$\mathfrak{X}' \Vdash A \vee B$$

и посылка непосредственно над ним должна быть одной из двух:

$$\mathfrak{X}' \Vdash A \qquad \mathfrak{X}' \Vdash B \tag{7}$$

Теперь правила вдоль ветви от Γ' к Γ все удовлетворяют условию ($r6$) справа; следовательно, мы можем заменить $A \vee B$ тем из высказываний A или B, которое входит в консеквент посылки для Γ'. Это превратит Δ в доказательство одного из утверждений (6), что и требовалось доказать.

Следствие 5.1. *Правило* *P *в формулировке* IK *системы* LA_m *не может быть обращено относительно своей посылки.*

Доказательство. (Ср. разд. D1, пример 1.) В LA имеем

$$A \supset B \Vdash A \supset B$$

Если бы *P можно было обратить, то левая посылка была бы

$$\Vdash A,\ A \supset B$$

и из нее мы получили бы с помощью V*

$$\Vdash A \vee .\, A \supset B$$

По теореме D7 это утверждение можно было бы вывести в LA_1. Но это противоречит теореме 5, так как обе возможности (6) неверны при оценке по таблицам истинности.

5. Ограничение *K*. Исследуем теперь, до какой степени можно ограничить правила, чтобы они не потеряли своей дедуктивной силы.

Пусть у нас есть некоторое регулярное (разд. C5) правило R. Если вслед за этим правилом применяется *K*, то ввиду ($r6$) вывод все еще останется справедливым, если новый конституэнт вводится как дополнительный параметр перед применением правила R. Поэтому если все правила удовлетворяют условиям ($r1$) — ($r6$),— как в случаях LA_1, LC_1, LC_m,— то применения *K* можно перенести вверх (по дереву доказательства), до тех пор пока они не будут непосредственно следовать за введением исходных утверждений. В таком случае скажем, что *K* применяется только *начально*. Если бы нужно было разрешить начинать с квазиисходных утверждений (разд. C9), то не нужно было бы пользоваться правилом *K* вообще. Но в случаях, когда имеются некоторые правила, вроде P* в LA_m, которые не удовлетворяют ($r6$), невозможно продвинуть применение *K* с соответствующей стороны вверх по дереву за это правило; поэтому мы должны допустить возможность применения K* или *K непосредственно вслед за этим правилом.

Рассмотрим теперь природу главного конституэнта, вводимого посредством *K*. Если все правила регулярны, то мы можем пользоваться рассуждением, подобным доказательству теоремы C4 [1]), для того чтобы показать, что мы можем ограничить *K* случаем элементарного главного конституэнта. Но в общем случае будут определенные исключения. В формулировках, рассматриваемых в разд. 6, в которых требуется, чтобы ряд правил имел квазиглавный конституэнт, может быть, нужно этот конституэнт впервые ввести по *K*. В той же LA_m, например, дополнительный конституэнт вида $A \supset B$ не может быть введен справа посредством P*.

Назовем операциональное правило *неограниченным*, если оно регулярно и если всегда, когда конституэнт вида главного конституэнта может быть введен посредством *K*, этот конституэнт можно ввести также, применяя сначала *K* для введения подчиненных, а затем применяя операциональное правило. Тогда нам не нужно постулировать *K* для главных конституэнтов, для которых имеется неограниченное операциональное правило.

Результатом всего сказанного выше является

Теорема 6. *Правила* *K* *можно ограничить без потери общности так, чтобы они применялись начально или непосредственно* [2]) *после правила, которое не удовлетворяет условию* ($r6$) *с той же стороны, и чтобы они имели главный конституэнт, который является элементарным или для введения которого не имеется неограниченного операционального правила.*

Следствие 6.1. *В формулировке* I *систем* LA_1, LC_1, LC_m *правила* *K* *можно ограничить так, чтобы они применялись начально с элементарными главными конституэнтами* [3]).

Следствие 6.2. *В формулировке* I *системы* LA_m *можно ограничить* *K *так, чтобы оно применялось начально с элементарными главными конституэнтами*; K* *можно ограничить так, чтобы оно применялось начально или после правила* P* *с главными конституэнтами, которые либо элементарны, либо имеют вид* $A \supset B$.

Дальнейшие исключения должны быть сделаны в случае, когда требуются квазиглавные конституэнты (см. следствие 7.3).

[1]) То есть мы сначала можем вводить подчиненные, а затем пользоваться рассматриваемым операциональным правилом.

[2]) Конечно, может быть несколько последовательных применений *K* в таких положениях.

[3]) Для сингулярных систем мы должны допустить возможность конституэнтов вида $A \supset B$.

Можно было бы задать вопрос, при каких обстоятельствах применение *K* сдвигается вниз по дереву, а не вверх. Мы не будем входить в обсуждение этого вопроса.

6. Ослабление *W*. Формулировка III. Следующей проблемой является ослабление или удаление правил сокращения. Это особенно важно в случае разрешающей процедуры, так как эти правила увеличивают число альтернатив, которые нужно рассматривать.

В разд. D6 мы заметили, что в LC_m, где все операциональные правила непосредственно обратимы, правила *W* не нужны. Это наводит на мысль, что обратимость правил является существенным фактором. Мы можем проверить это для такого правила, как *P, которое не обратимо в LA_m относительно своей левой посылки, потребовав, чтобы в левой посылке был квазиглавный конституэнт, так что правило приняло бы вид

$$\frac{\mathfrak{X},\ A \supset B \parallel\!- A,\ \mathfrak{Y} \qquad \mathfrak{X},\ B \parallel\!- \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A \supset B \parallel\!- \mathfrak{Y}} \tag{8}$$

Здесь левая посылка может быть выведена из заключения по K*. Так как квазиглавный конституэнт можно ввести в посылку по *K, то это правило не слабее, чем *P, и *P можно вывести из него посредством *W (ср. разд. C8).

Эти два вида обращения имеют важную общую черту: доказательства посылок по существу не сложнее, чем первоначальное доказательство заключения. Однако между этими видами есть различия, так что, кажется, лучше не подводить их под одно объединенное понятие обратимости.

В доказательстве следующей теоремы понятие *степени* доказательства следует понимать в том смысле, в каком оно употреблялось в замечании, предшествующем следствию D1.6. Далее, применение любого из правил *W* будет называться *сокращением*, а подчиненные этого правила — *сокращаемыми конституэнтами*.

Т е о р е м а 7. *Пусть* L-*система удовлетворяет следующим условиям*: (*a*) *все правила удовлетворяют условию* $(r4)'$ *за тем исключением, что правила, которые сингулярны справа, не обязаны удовлетворять ему с этой стороны*; (*b*) *для каждого неструктурного правила и каждой посылки либо эта посылка содержит квазиглавный конституэнт, либо правило непосредственно обратимо по отношению к посылке. Тогда правила* *W* *излишни.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что имеется сокращение, ведущее от Γ к Γ'. Предположим далее, что имеется доказательство Δ степени n, ведущее к Γ и не содержащее сокращений. Мы увидим, что тогда существует доказательство Δ' также

степени $\leqslant n$, ведущее к Γ' и не содержащее сокращений. Это будет доказано в качестве леммы индукцией по n.

Пусть Δ представлено в виде дерева. Так как все исходные утверждения сингулярны с обеих сторон, то Γ не является верхним узлом Δ. Следовательно, существует правило R, такое, что Γ есть заключение применения R_1 правила R в Δ. Если R сингулярно справа, то сокращаемые конституэнты не могут быть справа. Следовательно, те из этих конституэнтов, которые являются параметрическими, появляются во всех посылках R_1 в силу $(r4)'$.

Если оба сокращаемых конституэнта являются параметрическими, то они оба появляются во всех посылках. Если посылки можно сократить, то по $(r5)$ правило R будет вести от сокращаемых посылок к Γ'. Если R — неструктурное правило, то по индуктивному предположению сокращение всегда можно осуществить, не используя *W*, и мы имеем искомое Δ'. Иначе мы просто вырежем заключительное *K* из Δ и установим существование Δ' для укороченного таким образом Δ.

Это сводит нашу лемму к случаю, когда один из сокращаемых конституэнтов является главным конституэнтом R_1. Если R — структурное правило, то оно есть одно из *K*. В этом случае посылка Γ_1 правила R_1 совпадает с Γ' и часть Δ, ведущая к Γ_1, есть искомое Δ'. Поскольку это исчерпывает возможности в случае $n = 0$, то базис нашей индукции закончен.

Предположим теперь, что R — неструктурное правило и что сокращаемыми конституэнтами является главный конституэнт M_1 правила R_1 и подобный ему параметрический конституэнт M_2. Пусть посылками R_1 будут $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$. Пусть $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_p'$ получаются выбрасыванием (конституэнта, конгруэнтного) M_2 из Γ_i. Вывод из $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_p'$ к Γ' является в силу $(r5)$ применением R. Следовательно, если мы покажем, что существуют доказательства $\Delta_1', \ldots, \Delta_p'$ без сокращения, каждое из которых имеет степень $n-1$, для $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_p'$ соответственно, то мы найдем искомое Δ'.

Пусть Γ_i имеет квазиглавный конституэнт. Тогда этот конституэнт и M_2 можно сократить, чтобы получить Γ_i'. Так как Γ_i имеет доказательство в Δ, которое не содержит сокращений и имеет степень $\leqslant n-1$, то существование Δ_i' следует отсюда по индуктивному предположению.

Пусть R непосредственно обратимо относительно своей j-й посылки. В обозначениях, подобных обозначениям разд. 1, пусть Γ_j будет

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{U}_j,\ M_2 \tag{9}$$

Это может быть заключением применения R_2 правила R с M_2 в качестве главного конституэнта. В силу следствия D1.3 можно обра-

тить его относительно j-й посылки R, получая

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{U}_j,\ \mathfrak{U}_j \qquad (10)$$

откуда Γ'_j следует с помощью ряда сокращений. Теперь (9) имеет доказательство в Δ степени $\leqslant n-1$, не содержащее каких-либо сокращений; отсюда по следствию D1.6 (10) имеет такое доказательство, какое требуется индуктивным предположением. Последовательными применениями этого предположения мы получим требуемое Δ'_j.

Это завершает доказательство леммы. Но лемма показывает как раз то, что правила *W* удаляемы — можно удалить их, начиная сверху и идя вниз, что и требовалось доказать.

Это подсказывает новую формулировку для LA_m и LC_m, которая будет названа *формулировкой* III. Она отличается от формулировки IK только следующим: (*a*) правила *W* опускаются; (*b*) в LA_m *P берется как (8), а в LC_m — как в формулировке IK; (*c*) $\vdash$*, если оно допускается, имеет квазиглавный конституэнт в каждой посылке.

Следствие 7.1. *В формулировке* III *систем* LA_m *и* LC_m *правила* *W* *являются эпитеоремами. Для этих систем формулировка* III *эквивалентна формулировке* I.

Доказательство. Правила формулировки I являются эпитеоремами формулировки III. Это было показано для *W* в теореме; для других правил это следует посредством рассуждения, подобного рассуждению разд. C8 [по поводу *P см. текст после (8) настоящего раздела]. Обратное рассуждение во всех отношениях следует разделу C8.

Следствие 7.2. *Закон Пирса*

$$A \supset B . \supset A . \supset A$$

недоказуем в LA.

Доказательство. Рассуждение примера 2 разд. C5 является совершенно строгим в формулировке III.

Следствие 7.3. *В тех случаях формулировки* III, *в которых имеются правила с квазиглавным конституэнтом слева, мы должны допустить применения* *K, *в которых главный конституэнт имеет вид этого квазиглавного конституэнта; нам нужны подобные же случаи справа, если мы добавим правила с квазиглавным конституэнтом с этой стороны.*

Предыдущая теорема указывает обстоятельства, при которых правила *W* являются излишними. Это поможет нам в разд. 7 найти разрешающую процедуру. Но возможность повторяющихся

конституэнтов не исключается. Следующий пример, использующий кетоненовскую форму *Λ, показывает это:

$$\dfrac{\dfrac{A,\ A \Vdash A}{A \wedge A \Vdash A}\,{}^*\Lambda}{\vdash A \wedge A . \supset . A}\,\mathrm{P}^*$$

Мы будем теперь искать формулировку, не требующую наличия повторяющихся вхождений одного и того же конституэнта. Это — довольно специальный вопрос.

Новая формулировка будет называться формулировкой IV. Она будет состоять из формулировки III плюс некоторые дополнительные правила. Доказательства в ней будут называться IV-*доказательствами*, тогда как доказательства в формулировке III будут называться III-*доказательствами*. Наше утверждение состоит в следующем. Пусть Γ' получается из Γ сокращением до тех пор, пока больше не останется повторений. Пусть существует III-доказательство Γ степени n. Мы хотим найти IV-доказательство Γ' степени $\leqslant n$. Возможность его будет доказана индукцией по n.

Процесс исключения сокращений, употребляемый в доказательстве теоремы 7, не увеличивает степени. Этот процесс приведет нас к III-доказательству Γ'; назовем его Δ. Мы можем поэтому предположить, что Γ' совпадает с Γ.

Если в конце Δ имеются структурные правила, то пусть Γ_1 будет таким, что Γ получается в Δ из Γ_1 посредством применений *K*, тогда как Γ_1 не получается в Δ с помощью структурных правил (единственными структурными правилами являются *K*). Тогда Γ_1 не содержит повторений и имеет III-доказательство степени n. Далее, если мы имеем IV-доказательство Γ_1, то те же применения *K* дадут IV-доказательство Γ. Мы можем поэтому предположить, что Γ совпадает с Γ_1, т. е. что оно не кончается применением структурных правил.

Если $n = 0$, то Γ в таком случае должно быть исходным. Наше утверждение тривиально выполняется, и базис индукции закончен.

Предположим теперь, что Δ кончается неструктурным правилом R, посылками которого являются, скажем, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$. Они имеют III-доказательства ранга $\leqslant n-1$. По индуктивному предположению существуют IV-доказательства $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_p$. Нам нужны правила для того, чтобы оправдать переход от $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_p$ к Γ. Чтобы получить их, мы просмотрим сокращения, которые могут иметь место в $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$. Имеется три допустимых вида этих сокращений: (*a*) между двумя параметрами, (*b*) между двумя подчиненными и (*c*) между параметром и подчиненным.

Сокращения между двумя параметрами невозможны, так как это были бы повторения в Г.

Сокращения между двумя подчиненными действительно могут быть, как показывает вышеприведенный пример. Для того чтобы исследовать эту возможность, нам нужны дополнительные правила. Она может возникнуть только тогда, когда имеются два подчиненных с одной стороны в одной и той же посылке, а именно в *Λ и V*.

Сокращения между подчиненным и параметром также возможны. Нам поэтому нужны правила, которые позволят одному и тому же конституэнту выступать и в роли параметра, и в роли подчиненного. Однако эти правила тривиальны. Если правило имеет квазиглавный конституэнт, то может случиться, что одна из посылок совпадает с заключением. Во всех других случаях если мы имеем неограниченное *К*, то мы можем выбросить параметр и восстановить его после вывода с помощью *К* [1]). Поэтому правила этого вида нужны только тогда, когда *К* ограничены.

Резюмируя сказанное, мы дадим определение формулировки IV. В ней допускаются только такие элементарные утверждения, ни в какой просеквенции которых нет повторяющихся конституэнтов (так что просеквенция — это просто класс высказываний). В качестве дополнительных правил возьмем

$$\frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A \wedge A \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A \vee A,\ \mathfrak{Z}}$$

Теорема 8. *Пусть* Г — *элементарное утверждение формулировки* III, *и пусть* Г′ *получается сокращением его до тех пор, пока не останется повторений. Тогда для того, чтобы* Г *была теоремой формулировки* III, *необходимо и достаточно, чтобы* Г′ *была теоремой формулировки* IV.

---

[1]) Пример:

$$\frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash B}{\mathfrak{X},\ A \Vdash A \supset B}$$

Здесь можно применить обычное Р*, за которым следует *К.

Утверждение в тексте верно, однако, лишь в тех случаях, когда имеется только одна посылка. Если имеется более одной посылки, но каждая посылка содержит один и только один подчиненный, то рассматриваемые правила опять-таки тривиальны, но по иной причине. В самом деле, если мы опустим этот подчиненный в посылке, в которую он входит также как параметр, то мы получим элементарные утверждения, из которых заключение следует непосредственно в силу *К*. Эти случаи в совокупности покрываются правилами систем LA_m и LC_m.

Доказательство. Предварительные рассуждения показывают необходимость. Достаточность следует из того, что недостающие конституэнты можно восстановить с помощью *К*.

7. Разрешимость. Свойство композиции в сочетании с тем фактом, что операциональные правила (в ряде формулировок) таковы, что правило и посылки однозначно определены, как только даны заключение и главный конституэнт, наводит на мысль, что после проверки конечного числа альтернатив у нас должна быть возможность убедиться, доказуемо ли испытуемое элементарное утверждение такой формулировки или нет. Поскольку главный конституэнт можно выбрать лишь конечным числом способов, то должна быть возможность либо найти вывод данного элементарного утверждения, либо доказать несуществование вывода, отправляясь от желаемого заключения, применяя правила в обратном направлении и принимая во внимание все возможные альтернативы. Примеры разд. С5 иллюстрируют решения вопроса о доказуемости, которые достигаются в точности таким процессом. Результаты разд. 5 и 6 значительно уменьшают число альтернатив.

То, что такой процесс должен в конце концов привести к решению, можно видеть так. Пусть Г — проверяемое элементарное утверждение, и пусть n — число различных компонент в Г. Предположим, что мы пользуемся формулировкой IV, где просеквенции состоят из конституэнтов, никакие два из которых не подобны друг другу. Тогда число всех возможных просеквенций равно 2^n, а число различных элементарных утверждений, удовлетворяющих условию теоремы 8, равно 2^{2^n} в мультиплярных случаях и $n \cdot 2^n$ в сингулярных случаях. Пусть это число равно m. Если Г доказуемо, то доказательство можно представить в виде конечной последовательности таких утверждений и, следовательно, в виде начального отрезка одной из $m!$ их перестановок. Если дана такая перестановка, то вопрос о том, образует ли ее начальный отрезок доказательство Г, является определенным.

Это рассуждение применяется, когда система обладает свойством композиции в его полном объеме, а правила *W* излишни. В этом случае имеет место

Теорема 9. *Если* L-*система обладает свойством композиции и удовлетворяет условиям* (*a*) *и* (*b*) *теоремы* 7, *то она разрешима.*

Так как условия теоремы выполнены для LA_m (𝔇) и LC_m (𝔇), то мы имеем

Следствие 9.1. *Системы* LA_m (𝔇) *и* LC_m (𝔇) *разрешимы.*

Метод, применявшийся в доказательстве теоремы 9, не дает самой разрешающей процедуры. Так, для примера 1 разд. С5

($n = 5$) надо испытать 160 различных случаев. Но этот метод показывает, что решение в принципе возможно, и любой систематический поиск в конце концов приведет к нему.

8. Таблицы доказательств. Хотя теоретическое решение проблемы разрешения было дано в разд. 7, однако процедуры для проведения этого решения зачастую утомительны. Это происходит по двум основным причинам: с одной стороны, имеется большое число альтернатив, которые надлежит исследовать, а с другой — поскольку изменения при переходе от одного шага к другому захватывают лишь небольшое число конституэнтов (подчиненные и главный конституэнты), одни и те же выражения приходится писать неоднократно. Поэтому нужен метод для нахождения такого решения, который сократит добавочный труд. Мы изучим здесь такой метод, являющийся видоизменением метода, принадлежащего Э. В. Бету.

Имеются два аспекта этой проблемы в том виде, как она высказана, именно описание процедуры и выбор обозначений для ее выполнения. Рассмотрим их по отдельности.

Сначала будет удобно описать обозначения. Основная идея такова. Каждый шаг в доказательстве исключает определенные конституэнты (подчиненные) и вводит главный конституэнт. Если правила обращаются,— что является естественным, когда мы ищем доказательство данного утверждения,— главный конституэнт опускается и добавляются подчиненные; там, где есть квазиглавный конституэнт, изменения заключаются только в добавлениях. В соответствии с этим мы располагаем анализ в виде таблицы, состоящей из двух столбцов, в которой мы делаем записи следующим образом. Мы записываем антецедент проверяемого утверждения в первой строке левого столбца, а его консеквент — в первой строке правого столбца. Ограничиваясь пока случаями, где имеется только одна посылка и эта посылка однозначно определена, мы записываем подчиненный (подчиненные) в соответствующем столбце (соответствующих столбцах) на новой строке; мы можем исключать или не исключать главный конституэнт в зависимости от того, с какой формулировкой мы работаем. Подразумевается, что неисключенные конституэнты, расположенные строкой выше, включаются в число конституэнтов утверждения, записанного на данной строке. Процесс продолжается до тех пор, пока мы не дойдем до строки с общим конституэнтом в обоих столбцах или же таблица достигнет такого места, где нельзя добавить никаких новых конституэнтов. В первом случае мы говорим, что таблица *замыкается*, во втором — что она *не замыкается*. Если таблица замыкается, то утверждение, до которого мы дошли, является квазиисходным (разд. С9) и таблица при чтении в обратном направлении дает сокращенное доказательство своей первой строки; если никакой из путей развертывания таблицы не ведет к замкнутой таблице, то (в предположении обратимости правил) такое доказательство невозможно. Например, доказательство утверждения

$$\vdash A \supset . B \supset . C \vee A$$

дается таблицей [1])

	$A \supset . B \supset . C \vee A$
A	$B \supset . C \vee A$
B	$C \vee A$
	$C,\ A$

Здесь четвертая строка представляет собой исходное утверждение, и таблица замыкается.

Основной принцип должен быть видоизменен, когда мы принимаем во внимание правила с несколькими посылками или при выборе правил с одним и тем же главным конституэнтом. В таком случае таблица разобьется на две или более подтаблицы. Разбиение может быть конъюнктивным — в том смысле, что замыкание всей таблицы равносильно замыканию всех подтаблиц,— или дизъюнктивным — в том смысле, что замыкание всей таблицы равносильно замыканию по крайней мере одной подтаблицы. Конъюнктивный случай появляется, когда имеется одно правило с несколькими посылками, а дизъюнктивный — когда применены два или более таких правила. Разбиение таблицы будет указываться так: одна из подтаблиц — обычно это подтаблица, соответствующая левой посылке,— выбирается и записывается как продолжение главной таблицы, тогда как другие подтаблицы выносятся как самостоятельные рабочие таблицы. Наличие такой побочной таблицы указывается тем, что в конце соответствующей строки главной таблицы пишется соответствующий знак '&' или 'или', за которым следует первая строка побочной таблицы. В случае неразрешимой системы (мы столкнемся с ним позднее) мы должны работать со всеми подтаблицами одновременно, чтобы по возможности быстрее найти доказательство или опровержение; но в случае, когда ситуация разрешима,— что́ имеет место здесь, как мы видели из разд. 7,— мы можем сначала сделать всю работу с главной подтаблицей, а уже затем перейти к побочным. Это позволяет нам записывать всю таблицу в виде одной пары столбцов (делая, в случае надобности, особые пометки). Повторение конституэнтов наверху в побочной таблице (быть может, в сокращенном виде) делается

[1]) В каждой строке консеквент предыдущей строки исключается. Технические средства для указания этого будут вскоре введены.

во избежание затруднения, возникающего, когда допускаются удаления; ведь когда конституэнт в главной таблице, находящийся над разбиением, удаляется в одной из подтаблиц, он может в то же время не удаляться в других подтаблицах.

Для системы LC таблица — это своего рода попытка построить контрпример для утверждения в первой строке. Если утверждение ложно (относительно двузначных таблиц), то все высказывания в правом столбце должны принимать значение 0, а все высказывания в левом столбце — значение 1. Правила таковы, что это справедливо на протяжении всей таблицы. Если таблица замыкается, то один и тот же конституэнт должен принимать оба значения; так как это невозможно, то утверждение в первой строке должно быть истинным относительно двузначных таблиц [1]). В силу этой интерпретации Бет говорит о 'семантических таблицах'. Для абсолютной системы Бет нашел интерпретацию посредством древовидных моделей. Но хотя эта интерпретация остроумна и интересна, она кажется искусственной с семантической точки зрения, представленной в разд. A3 и C1. По этой причине мы и называем здесь эти таблицы просто 'таблицами доказательств'.

Прежде чем приводить примеры таблиц, необходимо будет объяснить относящиеся к ним соглашения. В соответствии с теоремой 8 мы избегаем повторяющихся вхождений одного и того же высказывания в одну и ту же просеквенцию. Точно так же, когда правило преобразует верхнюю строку в совпадающую с ней нижнюю, правило считается неприменимым. Горизонтальная линия, проведенная через подтаблицу, указывает, что мы покончим с этой подтаблицей и ничто, расположенное над этой линией, не рассматривается как часть следующей за ней таблицы. Такая горизонтальная черта помечена знаками 'T', 'F', '$\sim$' или 'Δ' для указания того, как мы распорядились с находящейся над ней подтаблицей. Буква 'T' указывает замыкание подтаблицы; 'F' или '$\sim$' указывает отсутствие замыкания; 'Δ' указывает, что подтаблица интереса не представляет, так как вопрос о выводимости уже решен. Буква 'F' указывает отсутствие замыкания в силу того, что либо к окончательному утверждению нельзя более применить никаких правил, либо оно ложно относительно двузначных таблиц или вследствие ранее установленных результатов и т. п. Знак '$\sim$' употребляется, когда утверждение уже встречалось где-то выше; такое повторное вхождение не обязательно означает, что замыкание отсутствует, ибо алгорифм может быть таков, что в этом месте применяется новое правило, и анализ в этом случае продолжается далее; но когда имеется повторное

[1]) Ср. теорему D9. Описанный метод действительно является эффективным методом проведения проверки по таблицам истинности.

вхождение утверждения и не применимо никакое правило, не применявшееся ранее к этому утверждению, дальнейшее продолжение процесса не приведет к новым утверждениям и потому подтаблица не замыкается; именно эта ситуация и обозначается посредством '$\sim$'. Горизонтальная пунктирная линия, проведенная через одну сторону таблицы, указывает, что всё, находящееся в этой стороне над ней, удаляется.

Чтобы записать всю информацию в удобном виде, полезно воспользоваться размещением в шести столбцах. Шаги нумеруются в первом столбце. Второй столбец дает обоснование для шага. Третий и четвертый столбцы — это два столбца главной таблицы, как описано выше. Пятый столбец указывает начало побочной таблицы. Шестой столбец указывает расположение побочной таблицы; обычно это просто строка главной таблицы, к которой подсоединяется эта побочная таблица.

Во втором столбце используются следующие сокращения. Обозначение типа 'L6.1' говорит, что главный конституэнт является первым конституэнтом в левой стороне строки 6; точно так же 'R2' означает, что это конституэнт с правой стороны строки 2, и т. д.; в случаях, подобных этим, главный конституэнт определяет правило. Знак '&' или 'или', за которым следует число, указывает на начало подтаблицы, о существовании которой сигнализировал этот же знак в указанной строке. Обозначение '(PK)*' будет объяснено в следующем абзаце. В некоторых сложных случаях (которые здесь не иллюстрируются) я счел уместным писать во втором столбце указание, используя '$=$' и номер строки, о том, что рассматриваемое утверждение уже встречалось.

В силу теоремы 6 нам нужно рассматривать только применения *K, которые делаются вначале, и применения K*, которые делаются вначале или после применения P*. Начальные применения *K* можно удалить, если мы разрешим начинать с квазиисходных утверждений. Применений этих правил после P* можно избежать, если мы заменим P* сложным правилом

$$(\mathrm{PK})^* \qquad \frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash B}{\mathfrak{X} \Vdash A \supset B,\ \mathfrak{Z}}$$

в котором $A \supset B$ будет называться главным конституэнтом. Теперь если в таблице мы натолкнемся на утверждение, которое может быть заключением (PK)*, то мы не можем сказать, что оно получено посредством (PK)* из указанной конкретной посылки. В этом случае необходимо разбить таблицу так:

$$\mathfrak{X},\ A \Vdash B \quad \text{или} \quad \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Z},\ A \supset B$$

где правая альтернатива нужна, чтобы сделать правило обратимым (в побочной таблице мы можем исследовать любые другие возможности). Сдвиг '$A \supset B$' напомнит нам, что эта конкретная возможность рассматривалась. Этот возможный случай мы указываем, записывая '(PK) *' во втором столбце.

Мы перейдем теперь к двум примерам. Пример 1, который замыкается, показывает, что PS доказуемо в LA. Пример 2, который не замыкается, показывает, что закон Пирса не доказуем в LA [1]).

Пример 1.

1		$A\supset .B\supset C : \supset : A\supset B .\supset . A\supset C$			
2 R1	$A\supset .B\supset C$	$A\supset B .\supset . A\supset C$			
3 R2	$A\supset B$	$A\supset C$			
4 R3	A	C			
5 L2		A	& T	L3, $A, B\supset C \Vdash C$	6
6 &5	$A\supset B, A, B\supset C$	C			
7 L6.1		A	& T	$A, B\supset C, B \Vdash C$	8
8 &7	$B\supset C, B, A$	C			
		B	& T	$B, A, C \Vdash C$ T	

Пример 2.

1	$A\supset B .\supset A$	A			
2 L1		$A\supset B$	&	$A \Vdash A$ T	
3 (PK) *		$A\supset B$	или	L1 $\Vdash A, A\supset B$ ~	
4 R3	A	B			
5 L1		$A\supset B$	& Δ	$A \Vdash B$ F	

Вот и все о самих таблицах. Мы обратимся теперь к вопросу о построении систематической процедуры или алгорифма — в общем смысле эффективного процесса, а не обязательно в специфическом смысле разд. 2E — для применения этих правил на практике. За исключением ряда деталей, такой алгорифм для классической системы дается в доказательстве теоремы D6; настоящее изложение поэтому будет относиться главным образом к абсолютной системе.

Приведем сначала некоторые общие принципы. Нам выгодно пользоваться обратимыми правилами, так как мы знаем, что нам не нужно будет тогда возвращаться к началу, и если таблица замыкается, то налицо доказательство. Далее, мы советуем начинать с правил, не требующих разбиения, так как благодаря

[1]) Ср. пример 2 разд. C5 и следствие 7.2.

этому мы избегаем некоторого количества повторений. Другой принцип заключается в том, что мы должны сначала применять правила, которые, как можно ожидать, уменьшат общее число различных компонент, и отложить до дальнейшего те правила, которые оставляют это число неизменным. Есть что-то эмпирически очевидное в том, что в целом лучше сначала применять правила справа. Данный здесь алгорифм построен согласно этим принципам, перечисленным здесь в порядке их "старшинства" (если в какой-либо ситуации они приводят к различным рекомендациям, то мы следуем более "старшему").

Далее, необходимо как-то указать, каким из нескольких возможных кандидатов является главный конституэнт. Бет делает это посредством циклических перестановок, охарактеризованных выше при описании (PK)*. В его алгорифме главный конституэнт всегда является ведущим (т. е. самым левым) конституэнтом просеквенции; после применения правила подчиненные помещаются последними (т. е. крайними справа). Хотя это позволяет проследить, какой конституэнт является главным, на практике я обнаружил неудобство этого приема; он требует дополнительного рассмотрения ряда случаев, когда ведущий конституэнт является элементарным или должен быть опущен. Он используется здесь только в случаях (как приведенное выше (PK) *), когда главный конституэнт не исчезает. В других случаях используется следующий прием. Буквы '$\mathfrak{X}$', '$\mathfrak{Y}$' будут обозначать произвольные просеквенции, '$\mathfrak{Z}$' — просеквенции, пустые в LA и произвольные в LC. Одна из этих букв с индексом 1 будет указывать просеквенцию, не содержащую конституэнта того же типа, что и главный конституэнт (который непосредственно следует за ней); буква с индексом 2 или без индекса будет употребляться без таких ограничений. Тогда главный конституэнт — это просто первый (самый левый) из подходящих конституэнтов.

В соответствии с этими принципами ниже будет предложен алгорифм. При его описании мы будем подразумевать следующие соглашения. Правила формулируются как правила для членов таблицы и являются поэтому обратными для правил, предназначенных для построения доказательств. По этой причине термины 'посылка' и 'заключение' могут ввести в заблуждение; поэтому верхняя строка правила будет называться его *данным*, а нижняя строка — *результатом* [1]). Термины 'подчиненный' и 'главный конституэнт' будут тогда пониматься в том же смысле, что и раньше, как если бы правило употреблялось в порядке вывода, т. е. от результата

[1]) Когда результат в этом смысле является составным, мы иногда будем употреблять слово 'результат' для обозначения элементарных утверждений, из которых он составлен. В таком случае будет более одного результата.

к данному. Правило применимо в точности тогда, когда (1) данное имеет вид, указанный в правиле, и (2) то же правило не применялось ранее к тому же данному [1]). Правила даны по порядку; как обычно в случае алгорифма, правило, которое нужно применить,— это первое по порядку из применимых правил.

Если принять во внимание эти соглашения, то правила для LA_m таковы [2]):

I $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Z}_1,\ A \supset B,\ \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{X},\ A \Vdash \mathfrak{Z}_1,\ B,\ \mathfrak{Z}_2}$$

II $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A \vee B,\ \mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A,\ B,\ \mathfrak{Y}_2}$$

III $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ A \wedge B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ A,\ B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}$$

IV $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A \wedge B,\ \mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A,\ \mathfrak{Y}_2 \,\&\, \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ B,\ \mathfrak{Y}_2}$$

V $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ A \vee B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ A,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y} \,\&\, \mathfrak{X}_1,\ B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}$$

VI $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash A \text{ или } \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y},\ A}$$

VII $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ A \supset B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ A \supset B \Vdash \mathfrak{Y},\ A \,\&\, \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ B \Vdash \mathfrak{Y}}$$

В алгорифме для LC_m правило VI опускается и из VII устраняются квазиглавные конституэнты.

Теорема 10. *Для того чтобы*

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y} \tag{11}$$

было выводимо в LA_m ($\mathfrak{D}$) *или* LC_m ($\mathfrak{D}$), *необходимо и достаточно, чтобы соответствующий алгорифм приводил к замкнутой таблице.*

Доказательство достаточности. Нам нужно показать только, что обращения алгорифмических правил, т. е. выводы от результата к данному, справедливы как выводы в соответствующей L-системе. Обращения правил I, II, III, IV, V и VII являются правилами LA_m; таковыми же будут обращения правил I—VII в LC_m. Остается только рассмотреть правило VI в LA_m.

[1]) Нам, может быть, следовало добавить здесь "с тем же главным конституэнтом". Однако формулировка в тексте такова, что данное и правило вместе однозначно определяют главный конституэнт.

[2]) Из переписки с С. Крипке летом 1958 г. я понял, что он независимо нашел похожий, но, по-видимому, не совсем тот же алгорифм.

Вывод от левого результата к данному можно сделать посредством К*, тогда как вывод от правого результата является частным видом С*.

Доказательство необходимости. Для LC_m это следует по теореме D9. Поэтому мы ограничимся LA_m. Предположим, что мы имеем формулировку типа IV с элементарными исходными утверждениями и *К* применяются только вначале или как часть (РК)*. (По поводу некоторых деталей см. теорему 7В11.)

По предположению имеется доказательство Δ утверждения (11). Пусть n — число его операциональных шагов. Если $n = 0$, то (11) квазиисходно и таблица замыкается с самого начала. Поэтому достаточно доказать необходимость для данного значения n в предположении, что она справедлива для любого меньшего значения n.

Предположим, что (11) содержит конституэнт одного из первых пяти типов. По следствию D1.6 (приспособленному к формулировкам III и IV) существуют доказательства результатов [1]) первого шага в таблице и эти доказательства имеют менее n операциональных шагов [2]). По индуктивному предположению их подтаблицы все замкнуты. Следовательно, таблица для (11) в этом случае замыкается.

В любом другом случае единственными правилами, которые могут завершить Δ, являются К* и *Р, и алгорифм проходит вплоть до VI. Пусть $\mathfrak{Y}$ будет $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_m$. Тогда VI эквивалентно правилу, дающему в результате альтернативу:

$$\mathfrak{X} \Vdash C_1 \text{ или } \mathfrak{X} \Vdash C_2 \text{ или } \ldots \text{ или } \mathfrak{X} \Vdash C_m \text{ или } \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y} \tag{12}$$

Таблица замкнется, если таблица для

$$\mathfrak{X} \Vdash C_k \tag{13}$$

замкнется для некоторого значения k; иначе мы пройдем полный цикл и перейдем к VII.

Предположим, что последний шаг в Δ происходит посредством К*. Это не может быть начальное К*, поскольку $n > 0$; оно поэтому должно быть частью вывода посредством (РК)*. Пусть $C_k \equiv A \supset B$ — главный конституэнт этого (РК)*. Тогда применение

[1]) Может быть, конечно, лишь один результат.

[2]) В той части следствия D1.6, где M выбрасывается, так как оно вводилось только посредством *К*, мы используем вспомогательную индукцию. Пусть M будет порядка $m \geqslant 0$, если оно образовано m применениями $\wedge$, $\vee$ из обов, которые элементарны или имеют вид $A \supset B$. Случай порядка 0 не может встретиться здесь, ибо в результате выбрасывания M у теоремы оказался бы пустой консеквент. Поэтому результаты первого шага алгорифма будут иметь то же значение n, но общий порядок всех конституэнтов, введенных посредством *К*, будет меньше.

I к (13) дает посылку этого (РК) *. Часть Δ над этой посылкой будет иметь $n-1$ операциональных шагов. Следовательно, подтаблица для этой посылки замыкается по нашему индуктивному предположению. Поэтому таблица для (11) замыкается в указанном случае.

Если последний шаг в Δ происходит по *Р, то мы выбираем альтернативу в VI, которая приводит нас к VII, и изучаем ее подтаблицы. (Мы могли бы, конечно, замкнуть таблицу в VI, но это не важно.) Пусть

$$A_1 \supset B_1, \ \ldots, \ A_m \supset B_m \tag{14}$$

— все конституэнты типа главного конституэнта в VII в том порядке, в котором они входят в $\mathfrak{X}$. Предположим, что посылки последнего вывода в Δ суть

$$\mathfrak{X}', \ A_k \supset B_k \parallel\!\!- \mathfrak{Y}, A_k \qquad \mathfrak{X}', B_k \parallel\!\!- \mathfrak{Y} \tag{15}$$

где $\mathfrak{X}'$, $A_k \supset B_k$ — перестановка $\mathfrak{X}$. Они имеют доказательства (в некотором вспомогательном Δ) меньше чем с n операциональными шагами в обоих вместе. Мы покажем индукцией по k, что таблица замкнется. Действительно, если $k = 1$, то посылки (15) в точности являются результатом следующего шага; следовательно, таблица замыкается. Для $k > 1$ предположим, что $\mathfrak{X}$ есть $\mathfrak{X}_1, A_1 \supset B_1, \mathfrak{U}, A_k \supset B_k, \mathfrak{X}_2$. Тогда результат следующего шага алгорифма представляет собой конъюнкцию двух утверждений:

$$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{U}, \ A_k \supset B_k, \ \mathfrak{X}_2, \ A_1 \supset B_1 \parallel\!\!- \mathfrak{Y}, \ A_1 \tag{16}$$

$$\mathfrak{X}_1, \ \mathfrak{U}, \ A_k \supset B_k, \ \mathfrak{X}_2, \ B_1 \parallel\!\!- \mathfrak{Y} \tag{17}$$

Теперь (16) можно вывести по *Р из конъюнкции двух утверждений

$$\mathfrak{X}_1, \ \mathfrak{U}, \ A_k \supset B_k, \ \mathfrak{X}_2, \ A_1 \supset B_1 \parallel\!\!- \mathfrak{Y}, \ A_1, \ A_k \tag{18}$$

$$\mathfrak{X}_1, \ \mathfrak{U}, \ B_k, \ \mathfrak{X}_2, \ A_1 \supset B_1 \parallel\!\!- \mathfrak{Y}, \ A_1 \tag{19}$$

и точно так же (17) можно вывести из

$$\mathfrak{X}_1, \ \mathfrak{U}, \ A_k \supset B_k, \ \mathfrak{X}_2, \ B_1 \parallel\!\!- \mathfrak{Y}, \ A_k \tag{20}$$

$$\mathfrak{X}_1, \ \mathfrak{U}, \ B_k, \ \mathfrak{X}_2, \ B_1 \parallel\!\!- \mathfrak{Y} \tag{21}$$

Теперь (18) можно вывести из левой посылки (15), а (19) — из правой посылки (15) посредством неограниченного К*; следовательно, они имеют доказательство с тем же числом операциональных шагов, что и в доказательстве этой посылки. Точно так же (20) и (21) можно вывести из посылок (15) по неограниченному К* и следствию D1.5, и число операциональных шагов будет не больше в силу следствия D1.6. Поэтому (16) и (17) будут иметь

доказательство не более чем с n операциональными шагами; они имеют также меньшее значение k. В силу предположения индукции по k их подтаблицы замыкаются, и, следовательно, замкнутся подтаблицы для (11) [1]).

Это завершает доказательство теоремы 10.

Следствие 10.1. *В* LA_m *и* LC_m *применения* *С* *можно ограничить циклическими перестановками.*

Доказательство. Как уже упоминалось во вступительных рассуждениях, правилам II—V можно придать иной вид, используя циклическое правило вида

$$\frac{\mathfrak{X} \parallel\!\!- A, \ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \parallel\!\!- \mathfrak{Z}, A}$$

которое следует использовать, если A не имеет подходящей формы. Можно тогда потребовать, чтобы главный конституэнт мог всегда быть первым конституэнтом в просеквенциях.

Замечание. Не требуется, чтобы алгорифм давал кратчайшие возможные выводы. У меня нет причин, за исключением чисто эвристических, предпочитать его любому из различных мыслимых видоизменений. Этот алгорифм имеет ту выгоду, что аналогичные друг другу шаги его можно объединять. Например, комбинируя несколько применений правила I, мы можем делать выводы вида

$$\frac{\mathfrak{X} \parallel\!\!- A_1 \supset . A_2 \supset . \ldots . \supset . A_m \supset B}{\mathfrak{X}, \ A_1, \ \ldots, \ A_m \parallel\!\!- B}$$

Точно так же можно скомбинировать несколько шагов правила II, для того чтобы очистить правую просеквенцию от всех конституэнтов вида $A \vee B$, и т. д. В правиле VI можно теоретически ограничиться случаем "A имеет вид $B \supset C$", но это, кажется, усложнит дело. Когда мы доходим до правила VII, механическое применение алгорифма может оказаться очень утомительным. Возможно, читатель заметил, что процесс можно значительно укоротить, расположив конституэнты (14) в подходящем порядке; если мы имеем слева наряду с (14) вхождения A_k, то выгодно начать с $A_k \supset B_k$, ибо тогда левый результат является квазиисходным, а правый результат проще. Но если вы желаете иметь чисто алгорифмическую процедуру, например если вы желаете эту работу поручить машине, то, насколько я знаю, этот алгорифм столь же эффективен, сколь и любой другой.

---

[1]) Из доказательства теоремы 7B11 извлекается другой вариант этой фазы алгорифма.

Упражнения

1. Показать непосредственно, что аксиоматические высказывания HA являются теоремами LA.

2. Показать, что следующие высказывания являются теоремами LA:

$$A \supset B . \supset . A \supset C : \supset : A \supset . B \supset C$$
$$A \supset B . \supset A : \supset : A \supset B . \supset B$$
$$A \supset B . \wedge . C \supset D : \supset : A \wedge C . \supset . B \wedge D$$

Что можно сказать о обратных высказываниях (т. е. высказываниях, получаемых, если поменять местами обе части главной импликации)?

3. Показать, что следующие высказывания являются теоремами LC ($\mathfrak{D}$), но не LA ($\mathfrak{D}$):

$$A \supset B . \supset B : \supset : B \supset A . \supset A$$
$$A \supset B . \supset : A \supset C . \supset B . \supset B$$

4. Показать, что

$$A,\ A \supset B \Vdash B$$
$$A \wedge B . \supset C \Vdash A \supset . B \supset C$$
$$A \supset . B \supset C \Vdash A \wedge B . \supset C$$

доказуемы в LA ($\mathfrak{D}$) с использованием формулировки I без *W, а

$$A \wedge . A \supset B \Vdash B$$
$$A \supset B . \wedge . B \supset C \Vdash A \supset C$$
$$A \vee . A \supset B : \supset B \Vdash B \quad \text{(Крипке)}$$
$$\Vdash P \supset B . \supset B \quad \text{(Вайсберг)}$$

где

$$P \equiv A \supset B . \supset A . \supset A$$

доказуемы в LA ($\mathfrak{D}$), но уже обязательно с использованием *W.

5. Показать, что, не изменяя элементарных теорем L-системы, правило *P можно было бы сформулировать в следующем виде: если $\mathfrak{Z}$ — часть $\mathfrak{Y}$, то

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Z}\quad \mathfrak{X}, B \Vdash \mathfrak{Y}}{A \supset B, \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}$$

6. Сформулировать системы, двойственные L-системам, т. е. системы, в которых импликация заменяется вычитанием, и исследовать какие-нибудь их свойства. (Фейс [SLP].)

7. Показать, что если на просеквенции наложить ограничение, чтобы они были сингулярными и непустыми с обеих сторон, то мы получим формулировку структуры. (Лоренцен [ALU].)

*8. Систему какого вида получили бы мы из формулировки I системы LA (лучше взять LA_m), если бы отказались от *W или если бы выбросили квазиглавные конституэнты правила *P в формулировках III и IV? Какими были бы соответствующие H- и E-формы? (Ср. упражнения 3, 4 и 7.)

*9. Систему какого вида получили бы мы при ограничении, что правила сингулярны слева, а не справа?

10. Мультиплярную систему какого вида получили бы мы, заменив P правилом

$$\frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n}{\mathfrak{X} \Vdash A \supset B_1,\ A \supset B_2,\ \ldots,\ A \supset B_n}$$

Как относилась бы эта система к LA и LC?

*11. L-система какого вида получится, если интерпретировать $\mathfrak{X} \Vdash B$ как утверждение о существовании доказательства B, в качестве неисключенных и неудаляемых посылок которого фигурируют (*a*) в точности те высказывания, которые встречаются в $\mathfrak{X}$; (*b*) некоторые из высказываний в $\mathfrak{X}$, кратность которых не больше, чем там; (*c*) если выполняются оба эти ограничения?

12. Показать, что, для того чтобы

$$\mathfrak{X},\ A_1 \supset B_1,\ A_2 \supset B_2,\ \ldots,\ A_n \supset B_n \Vdash \mathfrak{Y}$$

было истинно в HA, необходимо и достаточно, чтобы были истинны все 2^n утверждений, образованных из

$$\mathfrak{X},\ A_1 \supset B_1,\ \ldots,\ A_n \supset B_n \Vdash \mathfrak{Y},\ A_1,\ \ldots,\ A_n$$

выбрасыванием любого подмножества (включая сюда пустое множество) A_i справа и изменением соответствующих $A_i \supset B_i$ на B_i слева.

13. При каких условиях выводы непосредственно обратимы в LA_1? (Ср. Клини [PIG].)

14. Показать, что обратимость (но не непосредственная обратимость) всех операциональных правил в LC_m и в формулировке III (разд. E6) системы LA_m может быть выведена из элиминационной теоремы.

15. Доказать подробно, что PW нельзя вывести в LA, не имея применения правила *P над применением правила P*.

16. Построить в HC доказательства утверждений о том, что высказывания упражнения 2 являются теоремами.

17. Вывести элиминационную теорему для LA_m, используя рассуждения разд. D5, из элиминационной теоремы для LA_1. Какова ситуация в отношении LC_1 и LC_m?

18. Пусть $\mathfrak{Z}$ есть $D_1, D_2, \ldots, D_n$, как в разд. D5; показать, что в LC

$$\mathfrak{X} \Vdash_m A,\ \mathfrak{Z} \rightleftarrows \mathfrak{X},\ D_1 \supset A,\ D_2 \supset A,\ \ldots,\ D_n \supset A \Vdash A$$

(Ср. [TFD, теоремы II 16 и II 17].)

19. Показать, что в LA ($\mathfrak{O}$) и в LC ($\mathfrak{O}$) если компонента имеет положительное или отрицательное вхождение (разд. D3) в любое элементарное утверждение доказательства, то она имеет вхождение того же знака в заключение.

20. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ элементарны и никакое из них не входит в качестве компоненты ни в $\mathfrak{X}$, ни в $\mathfrak{Y}$. В LA ($\mathfrak{O}$) или LC ($\mathfrak{O}$) показать, что если

$$\mathfrak{X},\ C_1,\ \ldots,\ C_m \Vdash \mathfrak{Y}$$

где

$$E_1,\ \ldots,\ E_n \Vdash C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$$

то

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

(Воспользоваться упражнением **19**. Эта теорема обобщает [SLD], теорема 1.)

***21.** Верно ли, что в LC_1 все применения Px можно сделать последними? В частности, если Q доказуемо в LC_1, то имеется такое C, что в LA

$$Q \supset C \Vdash Q$$

22. Закончить доказательство теоремы E6, добавив детали сведéния к специальным формам главных конституэнтов.

23. Алгорифм Бета [SCI] обладает следующими свойствами: (*a*) квазиглавный конституэнт удаляется из *P; (*b*) правила II—V и VII формулируются с главным конституэнтом, являющимся самым левым в данных, и подчиненными, являющимися самыми правыми в результатах; (*c*) нужно начинать с VI и применять правило слева, затем VI и правило справа, после чего опять VI и т. д. в циклическом порядке. Показать, что этот алгорифм не замыкается в следующих случаях:

$$A,\ A \supset B \Vdash B$$

$$B \supset C,\ A \supset B \Vdash A \supset C$$

хотя они доказуемы в LA.

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Исторические комментарии. Читатель, знакомый с современной литературой по логике, сразу обнаружит две особенности нашего изложения. Первая из них состоит в том, что конечные позитивные операции, рассматриваемые в данной главе, совершенно отделяются от отрицания и кванторов, рассматриваемых в гл. 6 и 7. Вторая особенность состоит в том, что ударение делается на абсолютную систему, которая здесь играет ведущую роль, а классическая система рассматривается только по аналогии. Эти особенности проистекают из той интерпретации, с которой мы начали. Эта интерпретация была описана в разд. A (особенно разд. A2 и A3), который в свою очередь основан на разд. 3A2 и расширен в разд. C1.

Приведем сейчас существенные моменты из истории настоящей трактовки. При изучении комбинаторной логики (см. разд. 3D5) необходимо было пользоваться довольно сложными энитеоретическими методами и в то же время строго придерживаться конструктивной точки зрения. В соответствии с этим естественно возник вопрос о том, как определить логические связки и сформулировать логику высказываний, чтобы ее можно было применять к утверждениям, порожденным индуктивными определениями. В диссертации Генцена [ULS] был предложен метод для решения данной проблемы. Отсюда развилась семантическая точка зрения разд. A3 и C1. Первоначальный вариант изложения (никогда не публиковавшийся) был написан в 1937 г. (краткое резюме см. в [PFD]); рукопись [TFD] была написана в 1948 г. после большого перерыва. Второе издание [TFD] содержит предисловие, написанное в сентябре 1955 г. и излагающее историю вопроса вплоть до того времени. Обсуждение принципов интерпретации, написанное главным образом для философов, появилось в [IF1]. Изложение в разд. A2, A3 и C1 является улучшением [IF1].

Абсолютная алгебра высказываний, появившаяся только что описанным путем, в точности совпадает с алгеброй высказываний, разработанной независимо другими авторами, исходившими из похожих, но все же заметно отличных интерпретаций. Двумя особенно интересными системами такого рода являются гейтинговская формулировка интуиционистской алгебры высказываний (см. разд. 4S2 о брауэровских алгебрах и упражнение B7, а также ниже изложение H-систем) и "логика следствий" (*Konsequenzlogik*) Лоренцена (см. ниже). В обеих системах делается ударение на конструктивную точку зрения, и обе они отправляются от интерпретации (что ясно видно у Лоренцена и весьма вероятно относительно Гейтинга), подобной той, с которой мы начинали здесь. Но как бы сильно они, быть может, ни отличались друг от друга и от настоящей трактовки в деталях интерпретаций, обе они

согласуются в том, что приводят к одному и тому же виду логической алгебры, и в том, что отрицание отделяется. Все три трактовки дают поэтому примеры подхода к логическому исчислению, характеризующемуся интерпретациями, обладающими этими двумя чертами; уместно называть этот подход *конструктивным подходом*.

В противоположность конструктивному подходу более обычная процедура, которую я назову *традиционным подходом*, характеризуется следующими чертами. Главная интерпретация состоит в тавтологической истинности при оценке относительно двузначных таблиц истинности. Это ведет к тому, что основное ударение делается на классические системы; если неклассические системы вообще упоминаются, то лишь как искусственные построения с более или менее таинственной интерпретацией. Далее, нет семантических причин для того, чтобы откладывать рассмотрение понятия отрицания, и так как оно, будучи одноместной операцией, считается более простым, чем двуместные операции, то его часто используют для исключения некоторых двуместных операций из числа исходных (см. гл. 6).

Теперь существует тенденция — даже для теорий, мотивируемых традиционным подходом,— развиваться в направлении сближения с конструктивным подходом. В частности, отделение операций можно мотивировать, как это обычно делается в математике, соображениями формального характера. Так операции были разделены в гл. 4. Это разделение восходит в принципе к Шрёдеру, который сначала разработал свойства структуры, а затем наложил на них свойства отрицания. Это разделение не встречалось у Буля и было очень несовершенным у Пирса (см. замечание в разд. 4S1). Кажется вероятным, что Шрёдер вначале не имел в виду неклассическую интерпретацию (классической была интерпретация в в пункте 1° разд. 4A2); напротив, он искал и нашел такую интерпретацию позднее. Многие другие такие интерпретации были найдены позднее; например, Дедекинд нашел интерпретацию 5° разд.4A2 и довольно подробно изложил ее в своей работе [ZZG]. Отделение позитивных операций от отрицания общепринято в современной теории структур. В ассерторической алгебре высказываний положение сложнее. В системе Фреге отделение было частичным; теперь известно, что схем Фреге для чистой импликации достаточно для абсолютных свойств импликации, но не для классических неабсолютных свойств. Формулировка Уайтхеда и Рассела [PMt] полностью игнорировала это отделение. Выделение классических свойств различных операций является существенным мотивом в различных польских исследованиях, о которых сообщается в статье Лукасевича и Тарского [UAK] (они большей частью принадлежат Тарскому), в статье Вайсберга [MLB] и т. д., но эти авторы не обращали внимания на выделение абсолютных свойств (хотя Вайсберг и делал это в более поздних работах).

В трактовке Гильберта и Бернайса [GLM], образующей основу для более поздних трактовок, явно отделены абсолютные свойства, но лишь походя упоминается об отделении классических свойств. Эту трактовку следует считать традиционной, так как интерпретация абсолютной системы, которую Гильберт и Бернайс называют "позитивной логикой" (см. [GLM. II], дополнение III), кажется довольно искусственной и диктуемой главным образом поисками интерпретации, которая удовлетворяла бы формальной структуре. То, что между интерпретацией этого дополнения III и нашей интерпретацией есть несомненное сходство, представляет большой интерес, показывая, что два разных подхода приводят к одинаковым результатам. Поэтому система Гильберта и Бернайса по своему характеру является промежуточной между классическим и конструктивным подходами. Я не знаю, в какой степени на нее оказала влияние существовавшая до нее система Гейтинга.

В работе Генцена традиционный и конструктивный подходы рассматриваются строго параллельно. Данная здесь трактовка основана на трактовке Генцена. Действительно, системы TA, LA_1 и LC_m этой главы получены из генценовских систем NJ, LJ и LK отбрасыванием всего связанного с отрицанием; другие инференциальные системы TC, LA_m, LC_1 представляют собой последующие видоизменения.

Из предыдущего должно быть ясно, что настоящая трактовка в сильной степени обязана работе Генцена [ULS]. По поводу ссылок на генценовскую технику вообще см. разд. 1S5 и [IAL]. Для настоящего контекста стоит отметить, что на Генцена, вероятно, оказал влияние Герц (см. его работу [ASB] и другие статьи, приводимые у Чёрча в [BSL]) и что в своей самой первой статье [EUA] Генцен показал, что сложное правило (называемое '*Syll*') Герца можно было бы заменить "*сечением*" ("*Schnitt*"). Это проливает некоторый свет на роль "сечения" в системе Генцена. В работе Генцена [ULS] не прослеживается идея о том, что высказывания представляют утверждения, относящиеся к основной системе $\mathfrak{S}$, но эта идея родственна работе Герца. Поэтому эта идея не совсем чужда Генцену, но он, быть может, не считал ее важной, так как предвидел каким-то образом результат теоремы E4.

Настоящая трактовка кое-чем обязана также Лоренцену, по крайней мере параллельным и независимым развитием родственных понятий. Он исходит из понятия "исчисления", которое по существу является синтаксической системой с элементарными правилами. (Об отношении между этими двумя понятиями см. [CFS].) Он определяет импликацию, символически обозначаемую через '$\rightarrow$', понимаемую подобно настоящему '$\|-$' как функтор с любым числом аргументов слева и одним аргументом справа; высказывания, образованные с помощью этой функции, следует интер-

претировать как правила, относящиеся к исчислению, которые справедливы в точности тогда, когда они допустимы (см. разд. 3А2). Он предлагает ряд "принципов", которые по существу являются эпитеоремами, дающими методы установления такой допустимости; один из них, "инверсионный принцип" (Inversionsprinzip), был упомянут в разд. А3. Его "логика следствий" (Konsequenzlogik), появившаяся в его статье [KBM] и включенная в его книгу [EOL] разд. 6 и 7, ставит своей целью включить в число доказуемых утверждений в точности те высказывания, которые допустимы для любого исчисления. Можно показать, что при подходящем переводе теоремы Konsequenzlogik совпадают с теоремами LA. Это, по-видимому, означает (полной ясности тут нет), что безразлично, берется ли импликация в смысле выводимости или в смысле допустимости, коль скоро основное исчисление совершенно ничем не выделяется. Все это развитие решительно никак не зависит от [TFD] и наоборот. Любопытно, что Лоренцен разделяет общую немецкую тенденцию сторониться Генцена; работа последнего [ULS] не приведена в библиографии и на нее нет ссылки в указателе; правила Konsequenzlogik сильно напоминают сами правила Герца, которые Генцен упростил в своей работе [EUA], и доказательство одной теоремы о разрешимости, которое немедленно следовало бы из результатов Генцена, выводится вместо этого из статьи Вайсберга [UAK]. Кроме того, трактовка Лоренцена не свободна от ошибок (см., например, [EOL], начало стр. 56). Гермес [IPO] показывает, что лоренценовская формулировка инверсионного принципа требует исправления. Естественно, построение математики, которому посвящена бо́льшая часть книги Лоренцена [EOL], выходит за пределы нашей книги.

Этим исчерпываются общие замечания на тему данной главы и по поводу семантических рассуждений в разд. А. Следующие замечания относятся к вопросам, обсужденным в отдельных разделах, начиная с разд. В.

Из систем, рассмотренных в разд. В, раньше других появились H-системы. Они соответствуют LH-системам, которые Генцен в своей работе [ULS] называет "*исчислениями, которые можно отождествить с гильбертовскими формализмами*" [1]). В названиях этих и подобных систем мы специально подчеркиваем 'L'; термин же 'H-система' понимается расширительным образом, включая не только конкретные системы, рассмотренные Генценом, но и любые ассерторические системы, основанные на схемах аксиом и правиле modus ponens. 'H' — первая буква фамилии Гильберта (Hilbert). Это обозначение оправдано тем, что Гильберт ([NBM], [GLM]) рассматривал формулировки, похожие на генценовские.

[1]) Стр. 11 русского издания (цитата не буквальная).— *Прим. ред.*

Об истории этих H-систем см. Чёрч [IML_2], § 29. К этому я добавлю лишь следующие замечания, касающиеся деталей. Самой ранней такой системой является система Фреге (P_F у Чёрча). По поводу информации об этой системе см. также Гермес и Шольц [NVB]. Отсюда мы узнаем, что исходными операциями были импликация и отрицание; схемами аксиом (если говорить об этой системе, как если бы это была современная система, — на самом деле понятие схемы аксиом тогда не формулировалось) были PK, PS и PC, из которых PC была лишней, как впервые показал Лукасевич. Итак, PK и PS, которые образуют подходящую пару схем аксиом для абсолютной импликации, появились уже в этой самой первой системе. В системе, разработанной Гильбертом ([NBM], [GLM]), использовались PB, PC, PK и PW в качестве (схем) аксиом для импликации, тогда как Гильберт и Бернайс [GLM] заменили PB в PC на PB'; для других позитивных операций в обеих этих системах использовались те же аксиомы, что и в нашей формулировке HA, за исключением того, что Гильберт [GLM] использовал (9) разд. В вместо ΛS (ср. Чёрч [IML_2], стр. 406 русск. изд.). Генценовская система LHJ на самом деле была взята не непосредственно у Гильберта (коль скоро речь идет о HA), а из работы Гливенко [PLB] (которую и упоминает Генцен); в ней постулируются PI, PB', PC, ΛS, но не PB или (9) разд. В. Эта система образована из системы Гливенко [LBr] (содержащей "*известные принципы логики*", каждый из которых, за исключением закона исключенного третьего, интуиционистски приемлем) добавлением некоторых новых аксиом (обоснование интуиционистской приемлемости некоторых из них приписывается Гейтингу). Позитивная часть формулировки Гейтинга [FRI_1] также совпадает с HA (см. упражнение B7); по поводу детального доказательства ее эквивалентности формулировке Гильберта и Бернайса [GLM] и некоторых комментариев о ее истории и значении см. Шрётер [UHA] (эта работа представляет собой исследование, сделанное в 1937 г. по предложению Шольца; любопытно в свете существования статей Гливенко, что оно не проделано раньше). Наша формулировка HA совпадает с формулировкой Вайсберга [UAK], которую он приписывает мюнстерской школе.

По поводу детального изучения системы HA см. Гильберт и Бернайс [GLM.II], дополнение III, и Вайсберг [UAK]. Многие свойства, полученные здесь с помощью генценовских формулировок, там получены непосредственным рассмотрением H-формулировки.

Все упомянутые выше системы относятся только к HA; они были получены выбрасыванием отрицания (и в некоторых случаях кванторов) из систем, в которых все позитивные постулаты — абсо-

лютные. Коль скоро речь идет о HC, то первые исследования относились к системе с импликацией в качестве единственной операции. Они принадлежат Тарскому, но, кажется, Бернайс впервые осознал то, что, присоединив Pc к HA только с импликацией, мы получим соответствующую часть HC (см. Лукасевич и Тарский [UAK], разд. 4, особенно теорема 29). Теорема, гласящая, что PK, PB′ и Pc образуют достаточное множество схем аксиом для HC, известна как "теорема Тарского—Бернайса". По поводу дальнейшей информации о HC см. Чёрч [IML$_2$] (§ 26), Вайсберг [MLB], Шрётер [VIE]. С исторической точки зрения не лишена интереса книга Пирса [ALg$_2$]; здесь впервые сформулирован закон Пирса; он обсуждается в статье Прайора [PAP].

T-системы этой книги соответствуют "N-системам" (т. е. "натуральным системам") Генцена. Изменение 'N' на 'T' было сделано в [TFD], чтобы предотвратить путаницу с 'N', обозначающим отрицание. Система TA является позитивной частью генценовского NJ; система TC была предложена в [TFD] по тем же соображениям, что и приведенные здесь. Правила, аналогичные T-правилам Генцена, появились в статье Яськовского [RSF]. Есть также некоторое сходство с работой Тарского [FBM], где постулировались Pe и Pi; легко показать, что постулаты Тарского удовлетворяются, если Fl (X) (в английском переводе Cn (X)) есть множество всех B, таких, что $X \| - {}^{T}B$.

Нил [PLg] дает мультиплярную форму TC, которая относится к LC$_m$ во многом так же, как приведенная в данной книге форма TC к LC$_1$.

Эквивалентность H- и T-систем, установленная в разд. B, а также L- и T-систем (разд. D4) была доказана в работе Генцена [ULS], разд. V. Он непосредственно показал, что постулаты его H-системы можно доказать в T-системе, постулаты T-системы — в L-системе и, наконец, постулаты L-системы — в H-системе. Последняя редукция, в частности, является довольно запутанной. Некоторые незначительные улучшения в этом доказательстве эквивалентности были предложены в [NRG], откуда через [TFD] и развилась настоящая трактовка.

Любопытна история дедукционной теоремы разд. B2. По-видимому, она появилась независимо у различных авторов. Она включена, например, в [PEI] (теорема 13). Она, конечно, содержится неявно также в доказательстве эквивалентности, о котором шла речь в предыдущем абзаце. Название 'дедукционная теорема', кажется, принадлежит Гильберту и Бернайсу ([GLM.I], где теорема была установлена и доказана на стр. 155 и след.); по-моему, это доказательство также было независимым открытием. По всей вероятности, именно эта публикация сделала теорему широко известной. Теорема появилась, однако, раньше у Эрбрана ([RTD], стр. 61); по

поводу даже еще более ранней ее публикации Эрбраном см. Чёрч ([IML$_2$], стр. 164[1])). Эрбран был, по-видимому, первым, кто опубликовал доказательство теоремы. Как было уже упомянуто, Тарский установил Pi как постулат в своей работе [FBM$_1$]. По поводу его претензии на приоритет в открытии теоремы см. ссылку на только что цитированную статью у Тарского [LSM] (стр. 32).

Формулировка I систем LA$_1$ и LC$_m$, как уже говорилось, заимствована непосредственно у Генцена [ULS]; система LA$_m$ относится к системе LJ′ Маэхары [DIL] (см. ниже) во многом так же, как LA$_1$ — к генценовской системе LJ; однако в представленном здесь виде она является развитием одной идеи из работы [NRG], разд. 6.

Видоизменения Кетонена взяты из его работы [UPK].

Инверсионная теорема разд. D1 в принципе принадлежит Шютте [SWK]. Во всяком случае, в этой статье есть фундаментальное предложение о том, что обращение можно было бы установить таким путем; детали гораздо легче разработать непосредственно, нежели перевести с его точки зрения на нашу. Шмидт [VAL] широко пользовался этой идеей. Кетонен [UPK] доказал обратимость своих классических пропозициональных правил, образующих позитивную часть формулировки IK системы LC$_m$, используя элиминационную теорему, но метод Шютте дает бóльшую информацию. Я пользовался также статьей Клини [PIG]. Понятия предка и потомка (разд. C7) принадлежат Клини, но та же идея встречается у Шютте (а также у Шмидта), где она приписывается Генцену [NFW]. Примеры в конце разд. D1 взяты из контрпримеров, приведенных Клини в качестве иллюстраций случаев, когда перестановка в LA$_1$ невозможна.

Элиминационная теорема — это основная теорема ('Hauptsatz') работы Генцена [ULS]. Он формулировал свои системы сначала с правилом сечения в качестве исходного правила, что представляется совершенно естественным в силу причин, разъясненных в [EUA] (см. выше); затем он показал, что применения этого правила можно исключить из доказательства. Эту теорему поэтому часто называют "теоремой об устранимости сечений"; но с нашей точки зрения здесь устраняется (удаляется) конституэнт A, а не сечение. Оригинальное доказательство Генцена заключало в себе двойную индукцию. Главная индукция была, как и здесь, по числу операций в A, а вспомогательная индукция — по числу шагов в доказательстве посылок. Там было большое число частных случаев, которые рассматривались отдельно. Настоящее доказательство было разработано для [TFD], пересмотрено в [ETM], приспособлено для другой цели в [CLg], разд. 9F4, и, наконец, пересмотрено для этой книги. Любой, кто сравнит приведенное здесь

[1]) Стр. 408 русского издания (примечание 290).— *Прим. ред.*

доказательство с генценовским, вероятно, обнаружит, что это лишь различные варианты одного и того же. Распространение на LA_m является здесь новым. Оно не было готово, когда писалась [IAL], и сначала теорема была доказана в связи с теоремой разд. D5. В статье Умедзавы [IPL] (стр. 22, сноска 3) указано, что Они доказал ЭТ для системы LJ′ Маэхары, включающей в себя LA_m.

Доказательство эквивалентности сингулярной и мультиплярной систем следует сравнить с доказательством Маэхары [DIL]. (Умедзава [IPL], стр. 22, сноска 3, говорит о независимом открытии.) Для LC эквивалентность в принципе уже показана в [TFD].

Различные теоремы разд. E доказаны здесь путями, заключающими в себе некоторое обобщение по сравнению с [TFD]. Свойство композиции, конечно, является главной и самой очевидной характеристикой генценовских L-правил. Генцен использовал это свойство для доказательства разрешимости; это свойство здесь несколько проще из-за ограничений на структурные правила из разд. E5 и E6.

Представляет некоторый интерес распространить свойство отделения на H-системы. Эта теорема также, по крайней мере в принципе, содержится в генценовском доказательстве эквивалентности систем, но он не интересовался этим вопросом и не доказал теорему явно. По-видимому, первые явные формулировка и доказательство содержались в [NRG]. Вайсберг в [UAK], которая появилась, когда [NRG] была еще в печати, установил теорему и предложил доказательство; я никогда не изучал этого доказательства, но, судя по Бернайсу и по списку исправлений (получен в январе 1937 г.) к книге Чёрча [IML_2] (стр. 399 русск. изд., примечание 211), в доказательстве имеется ошибка.

Свойство дизъюнкции для H-системы установлено Гёделем [IAK].

По поводу ссылок на таблицы доказательств см. разд. 1.5. Это было темой переписки с Крипке, который нашел ошибки в статье Бета [SCI]. Дайсон и Крайзель [ABS] предложили исправление, но оно касается главным образом вопросов полноты для интуиционистского исчисления предикатов, которые выходят за рамки не только этой главы, но и всей книги.

2. Ослабленные импликации. Абсолютная импликация в предшествующей теории родственна формальной выводимости тем, что

$$\vdash A \supset B \tag{1}$$

выражает по существу, что B доказуемо в любом расширении базисной системы $\mathfrak{S}$, в котором доказуемо A. Эта импликация характеризуется дедукционной теоремой и правилом modus ponens и является минимальной импликацией, обладающей этими двумя

свойствами. Понятие абсолютной импликации является объективным и важно для формальной выводимости безотносительно к какой-либо философии. Но оно не удовлетворяет — и никогда не ставило перед собой цель удовлетворять — требованиям тех, кто желает формализовать импликацию[1]) того типа, что выражается условным предложением в обычной речи. Мы коротко рассмотрим здесь некоторые формализованные импликации, которые лучше в этом отношении. Для такого рода отношений, выраженных в разговорном языке, будет удобно употреблять термин *'следование'* (*entailment*) и называть импликации, формализующие эти отношения, *импликациями следования* [2]). Эти импликации следования являются *слабыми импликациями* в том смысле, что они слабее абсолютных.

Если (1) выражает следование, то большинство согласно с тем, что оно верно только тогда, когда есть некоторый вид логической связи [3]) между A и B. С этой точки зрения утверждение

$$\vdash A \supset . B \supset B \tag{2}$$

выводимое в HA для произвольных A и B, неприемлемо, потому что между A и $B \supset B$ не обязана существовать какая-либо связь— логическая или же иная. Конечно, понятие логической связи пока довольно-таки туманное, а его разъяснение — по причинам, обсужденным в гл. 1, — по-видимому, потребовало бы некоторой предварительной формализации. Все же, если оставить это в стороне, имеет смысл искать формализованную импликацию, которая по тем или иным основаниям разумна с точки зрения этого требования логической связи. В настоящее время в связи с усилением интереса к контрфактическим условным предложениям, диспозициональным высказываниям и т. п., такая формализованная импликация следования может оказаться полезной.

Проблема формулировки импликации следования интересовала философов еще в античные времена [4]). Любопытно, что большинство этих попыток делалось с помощью модальной логики, т. е. логики, содержащей понятия необходимости, возможности или родственные им. Рассмотрение их отложено до гл. 8. Однако в последние годы был предпринят ряд попыток сформулировать системы импликации следования непосредственно. К такого рода попыткам относятся работы Чёрча [WTI], Аккермана [BSI],

---

[1]) 'Imply', в частности, означает 'влечет'. — *Прим. ред.*

[2]) Иногда в литературе такие импликации называются *строгими импликациями.— Прим. перев.*

[3]) По Аккерману — "logischer Zusammenhang".

[4]) Так, уже у Аристотеля была модальная логика; различные виды импликации, кажется, были сформулированы стоиками. См. Бохенский [AFL] и [FLg].

Шмидта [VAL] и ряд статей Андерсона, Белнапа, Уоллеса и их коллег по Йельскому университету [1]). Статья Андерсона и Белнапа [PCE] дает мотивировку этих статей и обсуждает также работы Аккермана и Чёрча. Библиография в статье Андерсона и Белнапа [PCE] содержит большинство предшествующих работ в этой области, в тексте статьи рассматриваются наиболее важные вопросы [2]). За подробностями мы отсылаем читателя к этим статьям, но здесь уместно будет добавить несколько общих замечаний.

Основным яблоком раздора является схема РК. Иногда говорят, что эта схема выражает принцип, согласно которому если B истинно, то любое A имплицирует его. Это не совсем верно. Ибо для того, чтобы вывести (1) из РК по Ре, нужно иметь сначала

$$\vdash B \tag{3}$$

а это верно не тогда, когда верен интерпретант B, а тогда, когда (3) доказуемо в системе. Поэтому если интерпретация такова, что (3) справедливо только тогда, когда B логически истинно (в некотором смысле), то (1) справедливо только для такого B. Примером служит утверждение (2). Эта точка зрения проводится в [IFI].

Отсюда следует, что абсолютная импликация не является несовместимой с интерпретацией (1), утверждающей, что B является логическим следствием A — по крайней мере в том смысле, в котором обычно употребляются эти слова. Ибо в соответствии с этим смыслом B является следствием ряда посылок всегда, когда B является следствием некоторого подмножества этих посылок. Любой математик включил бы пустое множество в число возможных подмножеств посылок. Но в предположении, что $\mathfrak{S}$ — подходящая логическая система, (3) справедливо тогда и только тогда, когда B является логическим следствием пустого множества посылок; тогда если A является конъюнкцией всех посылок, то B представляет собой логическое следствие A, так что (1) справедливо.

Сторонники введения специальных импликаций следования утверждают, что такие слова, как 'следствие', 'выводимость' и 'импликация', строго говоря, неприменимы к случаю пустого множества посылок. Все же они принимают такие принципы, как ΛК, ΛК′, ассоциативность $\bigwedge$, транзитивность 'влечет' и т. д., и отсюда следует, что для всех непустых множеств они принимают свойство логического следствия, упомянутое в предыдущем абзаце. Они утверждают, таким образом, что в обычной речи делается особое исключение для пустого множества. Пожалуй! В течение тысячелетий человечество обходилось без обозначения для нуля. Аристотелевская логика не знала пустого класса. Тот факт, что эти нововведения были сделаны на такой поздней стадии, с очевидностью свидетельствует о том, что в них на самом деле есть что-то искусственное. В математике снова и снова случается так, что мы считаем удобным распространить на случай нуля ситуацию, с наивной точки зрения актуальную лишь для ненулевых значений некоторого параметра (мы столкнемся с этим в гл. 7, говоря о "пустых кванторах"); но тривиальный "нулевой" случай представляется часто неестественным, и трудно иногда бывает дать наиболее разумную экстраполяцию на этот случай. Поэтому следует ожидать, что в обычной речи — по крайней мере для неформальных целей — подразумевается, что речь идет о ненулевой ситуации.

[1]) До некоторой степени основанные на работе Фитча [SLg].

[2]) См. также статью Донченко В. В., Некоторые результаты, относящиеся к проблеме разрешения для исчисления строгой импликации Аккермана, сб. "Проблемы логики", изд-во АН СССР, 1963. — *Прим. перев.*

Утверждения "нулевого характера" неестественны в обычной речи по причине своей тривиальности. Разговорный язык используется для целей общения между людьми; обычно не пытаются сообщать другим тривиальные сведения, и если кто-то делает это без особого на то указания, то его, вероятно, поймут неправильно [1]). Тем не менее упомянутая в предыдущем абзаце экстраполяция на случай нуля часто дает большие преимущества. Изобретение нуля обычно считается одним из важнейших шагов в прогрессе человечества. Часто оказывается, скажем, что мы получаем более приемлемую теорию, когда включаем тривиальные особые случаи, нежели тогда, когда мы исключаем тривиальные случаи, которые предоставляется тогда рассматривать с позиции здравого смысла. Однако это не обязательно так. Известны теории, из которых ряд нулевых случаев исключен. Примерами служат формулировка аристотелевской логики у Лукасевича [ASS] и онтология Лесьневского (см. разд. 1S4). Говорят, что такими теориями интересуются философы-номиналисты.

Казалось бы, наиболее естественный путь получения импликации следования состоит в том, чтобы видоизменить систему ТА, ограничивая Pi случаями, когда исключенная посылка действительно необходима для вывода заключения. Соответствующее видоизменение LA состояло бы в том, чтобы отмечать звездочками конституэнты, все предки которых вводятся по правилу * К *, и ограничить Р* неотмеченными подчиненными. Но для системы, полученной таким наивным путем, ЭТ не была бы верна, ибо

$$\Vdash A \bigwedge B . \supset B$$

$$A \bigwedge B . \supset B \Vdash . A \supset . B \supset B$$

[1]) Забавные примеры этого приведены в статье Андерсона и Белнапа [PCE].

оба справедливы, но несправедливо

$$\Vdash A \supset . B \supset B$$

Кажется вероятным, что необходимо как-то видоизменить *P.

Другая возможность состоит в отказе от *K*. Если правила *Λ и V* берутся в первоначальном виде формулировки II, то мы имеем систему, подобную предшествующей; взаимоотношения между этими двумя системами неизвестны. Доказательство элиминационной теоремы, данное выше, для этой системы не проходит. Если используются кетоненовские правила для *Λ и V*, то мы имеем систему гораздо более ограничительного характера, в которой даже ΛK не было бы выводимым. В этом случае (им)пликация имела бы природу скорее эквивалентности, нежели следования.

Проблема импликации следования все еще активно исследуется. Различные предложенные решения не совсем согласуются друг с другом. По поводу некоторых последних идей см. Кripke [PEn].

Кроме уже упомянутых систем, мыслимы и другие виды ослабленных систем. Представляет некоторый интерес знать, что случилось бы, если бы из *P в формулировке IV были исключены квазиглавные конституэнты. Эта возможность не исследовалась. Чёрч в своей заметке [MiL] обращает внимание на ослабленные системы и отваживается высказать утверждение о том, что среди этих систем будет минимальная. В каждой из этих систем справедлива ослабленная форма дедукционной теоремы; для систем, содержащих лишь импликацию, это установлено в [GDT]. Приведенные там рассмотрения вызывают сомнение в справедливости идеи минимальной системы в смысле Чёрча. Формулировки без дистрибутивного закона рассмотрены у Лоренцена [ALU] и Моисила [LPs].

3. Обобщение свойства дизъюнкции. Уже после того, как был написан основной текст, я обнаружил, что Харроп и Т. Робинсон по существу распространили теорему E5 на ряд случаев, когда $\mathfrak{X}$ содержит дилеммatические операции, а именно на случаи, где каждая такая операция является внутренней по отношению к компоненте C, находящейся в $\mathfrak{X}$ в отрицательном положении (следовательно, положительной в Γ), и все операции, аргументы которых содержат C, регулярны. Доказательство теоремы E5 легко распространить на этот случай, ибо такое C может стать главным конституэнтом только тогда, когда оно содержится справа (ср. упражнение E19), а это может случиться только в одной из тех ветвей, которые обходят в процессе продвижения вверх по дереву.

Глава 6

ОТРИЦАНИЕ

В математической логике отрицание обычно вводят одновременно с операциями, рассмотренными в предыдущей главе. С семантической точки зрения разд. 5A3 отрицание, однако, является операцией совершенно иного характера и его можно определить конструктивно только в том случае, когда основная формальная система является довольно специальной. По этой причине изучение отрицания в гл. 5 было отложено. Но теперь наступила пора взяться за отрицание, и настоящая глава посвящена ему.

Глава начинается с изложения в разд. A семантики для отрицания в том же смысле, в каком в разд. 5A3 излагалась семантика для структурных операций пликации, сложения и умножения. Затем мы перейдем к разработке различных формальных систем для отрицания. При этом нам будет удобно отойти от порядка, в котором проходило изучение позитивных операций. Тогда мы начинали с реляционных систем в гл. 4, затем рассматривали системы T и H в разд. 5B и, наконец, доходили до L-систем (разд. 5C — 5E). Такой порядок имеет то преимущество, что изучение начиналось с систем, которые, с одной стороны, просты и естественны с точки зрения обычной математики, а с другой — имеют многочисленные приложения в других областях, и кончалось системами, довольно трудными с этой точки зрения, но очень естественными с семантической точки зрения разд. 5A3 и 5C1. Но поскольку теперь эта семантическая точка зрения уже знакома читателю, будет уместно в соответствии с характером данной книги принять ее за основу. В связи с этим разд. B будет посвящен L-системам для отрицания. T-, H- и E- (т. е. структурной) системами для неклассического отрицания вместе с аналогичными свойствами классического отрицания мы займемся в разд. C. Специальные свойства классического отрицания будут рассмотрены в разд. D; в этом же разделе будет рассмотрена и техника булевой алгебры.

A. ПРИРОДА ОТРИЦАНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим смысл отрицания более или менее интуитивно, с тем, чтобы мотивировать последующие формальные рассмотрения. Мы начнем в разд. 1 с объяснения разных

видов отрицания в применении к элементарным высказываниям. Оно иллюстрируется примерами, рассматриваемыми в разд. 2. В разд. 3 мы переходим к формализации в терминах сингулярных L-систем. В конце мы приведем пять видов формального отрицания, из которых основную роль играет тот, который мы назовем простой опровержимостью.

1. Предварительный анализ. Наш первый шаг будет заключаться в том, чтобы выяснить, что́ будет подразумеваться под отрицанием некоторого утверждения формальной теории (или системы) $\mathfrak{S}$. Это сводится к вопросу о том, при каких обстоятельствах мы говорим, что такое утверждение ложно, ибо отрицание утверждения представляет собой уже второе утверждение, гласящее, что первое утверждение ложно.

Поскольку элементарное утверждение дедуктивной теории $\mathfrak{S}$ истинно только тогда, когда существует его доказательство в соответствии с дедуктивными постулатами $\mathfrak{S}$, было бы наиболее естественным сказать, что такое утверждение ложно в точности тогда, когда не существует никакого доказательства подобного рода. Отрицание, определенное таким путем, мы назовем *недоказуемостью* [1]). С точки зрения платонистов это определение отвечает на все вопросы. Но в разд. 3А2 мы видели, что с конструктивной точки зрения ничего подобного сказать нельзя. Далее, определенное таким образом отрицание резко отличается от позитивных операций в своем поведении при расширении основной системы. Действительно, пусть $\mathfrak{S}'$ — расширение $\mathfrak{S}$. Тогда если позитивное составное утверждение истинно для $\mathfrak{S}$, то оно остается истинным для $\mathfrak{S}'$, но поскольку утверждение, недоказуемое для $\mathfrak{S}$, может стать доказуемым для $\mathfrak{S}'$, эта инвариантность не будет справедливой для отрицания в смысле недоказуемости.

Существуют, однако, понятия, частично соответствующие нашему интуитивному пониманию отрицания, которые тем не менее можно трактовать методами, аналогичными методам гл. 5. Мы рассмотрим здесь два вида таких понятий, которые будем называть соответственно абсурдностью и опровержимостью.

Для первого понятия будем, по определению, считать, что элементарное утверждение *абсурдно*, если система $\mathfrak{S}'$, образованная присоединением этого утверждения к $\mathfrak{S}$, противоречива — другими словами, если любое элементарное утверждение $\mathfrak{S}$-выводимо из него. Тогда мы можем определить отрицание, понимая ложность в смысле абсурдности. Это отрицание, очевидно, обладает теми же свойствами инвариантности относительно расширения (при условии, что расширение не меняет элементарных утверждений), что и позитивные связки.

[1]) В [TFD] принят термин "неистинность" (invalidity).

Второе понятие — понятие *опровержимости* — можно определить так. Предположим, что мы имеем новый вид теории, в котором кроме соглашений, определяющих подкласс $\mathfrak{T}$ элементарных теорем (т. е. истинных элементарных утверждений), имеются соглашения, определяющие другой подкласс $\mathfrak{F}$ (а именно, подкласс опровержимых элементарных утверждений). Определение $\mathfrak{F}$ также индуктивно. Базисом является некоторый класс элементарных утверждений, называемых *контраксиомами*. Порождающие правила устанавливают, что если A и B — элементарные утверждения, такие, что B опровержимо и в то же время выводимо из A по правилам вывода для $\mathfrak{S}$, то A опровержимо. Если мы определим ложность как опровержимость, то мы опять получим отрицание, инвариантное относительно расширения, как и позитивные связки.

Эти два вида отрицания являются внутренними по отношению к системе. Другие виды можно определить со ссылкой на интерпретацию.

С каждым из этих видов отрицания связывается свой вид непротиворечивости и полноты. Мы будем говорить, что теория *непротиворечива* относительно определенного вида отрицания, если никакое элементарное утверждение не является одновременно истинным и ложным; мы будем говорить, что теория *полна* относительно этого вида отрицания, если любое недоказуемое элементарное утверждение ложно. Тогда непротиворечивость в смысле Поста, определенная в разд. 2В1, совпадает с непротиворечивостью в смысле абсурдности; то же справедливо для полноты в смысле Поста, определенной в разд. 2В3.

2. Примеры из теории чисел. Для того чтобы привести примеры, мы построим одну рудиментарную систему теории чисел; эта система является видоизменением системы самов из разд. 2С2 (пример 2). Первоначальная структура этой системы такова (единственное правило этой системы названо здесь 'правилом 1', потому что позднее будут введены другие правила).

О б ы образуются из единственного атома 0 посредством одной одноместной операции, обозначаемой штрихом. Таким образом, обы образуют последовательность

$$0,\ 0',\ 0'',\ \ldots$$

Мы будем истолковывать их как натуральные числа 0, 1, 2, . . .; для них будут употребляться обычные цифры и арифметические обозначения, включая знак сложения. В качестве U-переменных для обов используются буквы 'a', 'b', 'c'.

Э л е м е н т а р н ы е у т в е р ж д е н и я имеют вид

$$a = b$$

где a и b — обы.

Аксиома. $0 = 0$.

Правило 1. Если $a = b$, то $a' = b'$.

В этой системе элементарные теоремы — это в точности элементарные утверждения вида

$$a = a$$

т. е. элементарные утверждения вида $a = b$, где a и b — один и тот же об. Следующие правила допустимы в том смысле (разъясненном в разд. 3А2), что добавление любого из них или всех их к системе не увеличивает числа элементарных теорем.

Правило 2. Если $a = b$, то $b = a$.

Правило 3. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Правило 4. Если $a' = b'$, то $a = b$.

Правило 5. Если $0 = a'$, то $0 = a$.

Эти правила, однако, оказывают решающее влияние на свойства отрицания. Рассмотрим, какое влияние оказывает их последовательное добавление в предположении, что $1 = 7$ и $4 = 6$ являются контраксиомами. Тогда после присоединения каждого правила опровержимыми или абсурдными делаются следующие утверждения:

После присоединения правила 1 становятся опровержимыми $0 = 2$, $1 = 3$, $2 = 4$, $3 = 5$, $0 = 6$.

После присоединения правила 2 становятся опровержимыми $2 = 0$, $3 = 1$, $4 = 2$, $5 = 3$, $6 = 4$, $7 = 1$.

После присоединения правила 3 становятся абсурдными (и, следовательно, опровержимыми) $0 = 1$ и $1 = 0$; кроме того, становятся опровержимыми $1 = 2$, $2 = 3$, $3 = 4$, $4 = 5$, $0 = 3$, $1 = 4$ и их обращения.

После присоединения правила 4 $a = a'$ и $a' = a$ становятся абсурдными для всех a; $a = a''$, $a = a + 3$, $a = a + 6$ и их обращения становятся опровержимыми для всех a.

После присоединения правила 5 все невыводимые элементарные утверждения становятся абсурдными. Система оказывается полной в смысле Поста.

Этот пример можно видоизменить, чтобы получить пример системы, которая полна относительно опровержимости, но не относительно абсурдности, взяв в качестве контраксиом все утверждения вида $a = a + a$, где $a \neq 0$, и используя правила 1—4 [1]).

Только что приведенный пример показывает, что порождающий принцип для опровержимости, являющийся правилом с соотношением о выводимости в качестве посылки, нельзя заменить более элементарными правилами, получаемыми из данных правил для

[1]) Для этой системы не нужно правило 3. Если его опустить, то ни одно элементарное утверждение не будет абсурдным.

$\mathfrak{S}$ процессом простой контрапозиции. Под этим процессом понимается замена каждого правила вывода множеством правил, гласящих, что если все посылки, за исключением одной, истинны, а заключение опровержимо, то остающаяся посылка также опровержима. Так, если мы будем использовать инфикс '$\neq$' для обозначения опровержимости соответствующего утверждения с '$=$' вместо '$\neq$', то следующие правила получаются простой контрапозицией из правил 1—3:

$$a' \neq b' \rightarrow a \neq b$$

$$a \neq b \rightarrow b \neq a$$

$$a \neq c \,\&\, a = b \rightarrow b \neq c$$

$$a \neq c \,\&\, b = c \rightarrow a \neq b$$

Этих правил недостаточно, чтобы вывести $4 \neq 5$ из $4 \neq 6$, хотя такое заключение легко получается следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{4 = 5}\,1 \qquad \dfrac{}{5 = 6}\,1}{4 = 6}\,3 \qquad \dfrac{}{4 \neq 6}\,1}{4 \neq 5}$$

3. Формализация отрицания. До настоящего момента мы действовали неформально и более или менее интуитивно. Теперь мы переходим к формализации отрицания. Удобно будет сделать это в несколько шагов.

На первом шаге мы сводим теорию $\mathfrak{S}$ к системе с двумя одноместными предикатами. Для этой цели мы берем элементарные утверждения $\mathfrak{S}$ в качестве высказываний, т. е. в качестве обов, а интерпретантами этих двух одноместных предикатов будут классы $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{F}$. Для обозначения этих предикатов будут использоваться префиксы '$\vdash$' и '$\dashv$' соответственно. Элементарные утверждения новой системы поэтому будут иметь один из видов

$$\vdash A \qquad \dashv A \tag{1}$$

Левое из этих выражений будет означать, что утверждение, которое связывается с A, принадлежит $\mathfrak{T}$, тогда как правое будет означать, что это утверждение принадлежит $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{S}$ уже является системой, то нужно проделать преобразование, аналогичное преобразованию из разд. 2D1. Так, если $\mathfrak{S}$ — система из разд. 2, то мы заменяем элементарное утверждение $a = b$ (как в разд. 2D1) высказыванием $a \,\square\, b$; тогда утверждения

$$\vdash a \,\square\, b \qquad \dashv a \,\square\, b$$

будут соответственно представлять $a = b$ и $a \neq b$ разд. 2.

Вторым шагом будет применение редукции разд. 2D1 для сведéния системы к ассерторической. Это значит, что мы вводим новую операцию, обозначаемую префиксом '$\neg$', для замены предикатного префикса '$\dashv$', и тогда второе из утверждений (1) примет вид

$$\vdash \neg A \tag{2}$$

Здесь мы остановимся, чтобы сделать два замечания. Первое состоит в том, что новый тип теории, упомянутый в разд. 1, в котором имеются контраксиомы и понятие опровержимости, не является радикальным нововведением, противопоставляемым тому типу теории, который описан в гл. 2, а является скорее частным случаем того же типа. Второе состоит в том, что все действия на этих двух шагах, как будто бы приспособленные к понятию опровержимости, также хорошо проходят и с понятием абсурдности. На самом деле они проходят в любой ситуации, где мы имеем дело с теорией, в которой рассматривается более одного подкласса класса элементарных утверждений. Это будет верно и для абсурдности, если мы просто примем за $\mathfrak{F}$ класс абсурдных утверждений.

После первых двух шагов отрицание стало операцией того же сорта, что и операции гл. 5. Третий шаг состоит в том, чтобы установить постулаты, которые выражают свойства, характеризующие различные виды отрицания. Объяснения будут производиться в терминах сингулярной L-формулировки, так как эта формулировка наиболее явно выражает отношения выводимости. Поскольку одновременно могут вводиться и другие пропозициональные операции, эти объяснения будут включать в себя отрицания составных высказываний. Утверждения

$$\mathfrak{X} \Vdash A$$

будут пока пониматься содержательно, т. е. как указания, что A выводимо из $\mathfrak{X}$ в некотором смысле, пока полностью не охарактеризованном, для которого справедлива элиминационная теорема (ЭТ).

Рассмотрим сначала опровержимость. Пусть контраксиомы будут F_1, F_2, . . ., и пусть 'F_i' есть какая-то произвольная из них. Тогда базисом определения опровержимости является утверждение

$$\Vdash \neg F_i \tag{3}$$

Порождающим является правило, которое можно выразить так:

$$\frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash B \qquad \mathfrak{X},\ A \Vdash \neg B}{\mathfrak{X} \Vdash \neg A} \tag{4}$$

где антецеденты $\mathfrak{X}$, A введены в правую посылку по принципу ослабления для сохранения симметрии. Если B представляет собой некоторую F_i, то правая посылка (4) выводится по принципу ослабления из (3), так что (4) принимает вид

$$\frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash F_i}{\mathfrak{X} \Vdash \neg A} \tag{5}$$

Этот принцип включает в себя (3) (для пустой $\mathfrak{X}$ и $A \equiv F_i$). С другой стороны, если считать, что отрицание введено только посредством (3), (4), то индукция по числу применений (4) показывает, что (5) достаточно вместо (4) в том смысле, что всегда, когда справедливо заключение (5), посылка будет выполняться для некоторой F_i; действительно, по индуктивному предположению правую посылку (4) можно заменить на $\mathfrak{X}$, A, $B \Vdash F_i$; тогда по ЭТ можно получить посылку (5). Поэтому (5) достаточно для введения отрицания справа.

С формальной точки зрения правило (5) можно расщепить на два правила F* и N* следующим образом:

$$\text{F*}\qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash F_i}{\mathfrak{X} \Vdash F}$$

$$\text{N*}\qquad \frac{\mathfrak{X},\ A \Vdash F}{\mathfrak{X} \Vdash \neg A}$$

Высказывание F, введенное таким путем, можно интерпретировать как утверждение о том, что некоторая контраксиома доказуема и тем самым система противоречива. Если имеется лишь конечное число контраксиом, то такое F можно определить в терминах дизъюнкции. В противном случае мы берем F в качестве нового исходного символа. Мы можем сделать это даже для пустой системы $\mathfrak{O}$. Поэтому N* является, так сказать, универсальным правилом, справедливым для любой системы; с другой стороны, F*, подобно $\vdash *$, выражает особые соглашения по отношению к основной теории $\mathfrak{S}$.

Рассуждения, проведенные в предпоследнем абзаце, подсказывают, что правило N* должно быть обратимо. Это обстоятельство подсказывает далее, что отрицание следует определить так:

$$\neg A \equiv A \supset F \tag{6}$$

При таком определении N* становится частным случаем P*. Следующее правило

$$*\text{N}\qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash A}{\mathfrak{X},\ \neg A \Vdash F}$$

является тогда частным случаем *P. Мы примем его как правило для введения отрицания слева.

Последние три абзаца можно резюмировать так. Опровержимость можно охарактеризовать правилом F* и определением (6) или же правилами F*, N* и *N. Так определенное отрицание известно как *минимальное отрицание*; его можно назвать также *простой опровержимостью*. Оно изучалось Иоганссоном [1]). Его L-формулировка будет называться, согласно Иоганссону, LM.

Обратимся теперь к абсурдности. Если мы введем здесь высказывание F, интерпретацией которого является утверждение о том, что система противоречива в смысле Поста, то (6) будет определять абсурдность. В силу определения F оказывается справедливым правило [2])

$$\text{Fj}\qquad \frac{\mathfrak{X} \Vdash F}{\mathfrak{X} \Vdash A}\,.$$

Правила N* и *N будут допустимыми, поскольку они следуют из (6). Правило F* может быть пустым, т. е. F может быть единственным элементом $\mathfrak{F}$, но могут встретиться случаи, как в разд. 2, где абсурдность ряда утверждений (например, $0 = 1$ после присоединения правила 3) устанавливается эпитеоретическим рассуждением, не формализуемым в L-системе, и в таком случае эти утверждения можно взять в качестве контраксиом. Мы имеем, таким образом, систему, образованную присоединением Fj к LM. Эта система принята интуиционистами, и потому ее уместно называть системой *интуиционистского отрицания* (другое название — *простая абсурдность*). Ее L-формулировку мы назовем, согласно Генцену, LJ.

Кроме только что рассмотренных типов отрицания, некоторый интерес представляют типы, которые применимы, когда основная система является полной. В разд. 1 полная система была определена как система, в которой каждое элементарное утверждение либо истинно, либо ложно; мы будем пользоваться более сильной формой полноты, в которой это верно для любого составного высказывания. Итак, мы занимаемся системами с законом исключенного третьего. Этот принцип можно выразить, говоря, что любой антецедент вида $A \vee \neg A$ может быть опущен; в силу ЭТ и правила *V это можно в свою очередь выразить правилом

$$\text{Nx}\qquad \frac{\mathfrak{X}, A \Vdash B \quad \mathfrak{X}, \neg A \Vdash B}{\mathfrak{X} \Vdash B}$$

[1]) Норвежский математик, профессор университета в Осло. Минимальной алгебре посвящена его статья [MKR]. Ср. Колмогоров [ПТN]. См. также разд. S1.

[2]) Это правило слегка выходит за рамки предварительного изложения (разд. 1) тем, что A не обязательно представляет собой элементарное высказывание. Возможности в отношении ограничения A в Fj остаются открытыми; они, очевидно, аналогичны таким же возможностям для правила K*.

в каком-то смысле аналогичным (4). Если B есть A, левая посылка является исходным утверждением; следовательно, в этом случае мы имеем

$$\frac{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash A}{\mathfrak{X} \Vdash A} \tag{7}$$

Правило (7) является частным случаем Px, если принято (6) [1]). Но мы возьмем Nx в приведенной выше более общей форме. Чтобы получить его из (7), требуется ЭТ, в то время как обратное рассуждение проходит сразу.

Если мы присоединим Nx к LM, то полученная в результате система будет называться теорией *полной опровержимости*, или *строгого отрицания* [2]). Ее L-формулировка называется LD.

Если мы добавим Nx к LJ, то получим систему LK, которая будет называться теорией *классического отрицания*, или *полной абсурдности*.

До настоящего момента ничего не говорилось о выводимости, обозначаемой посредством '$\Vdash$'. Установим теперь, что для всех систем LM, LJ, LD, LK к LA должны присоединяться правила для F и N. Теперь естественно спросить, каков был бы результат присоединения этих же правил к LC. Поскольку мы предполагаем, что (6) выполняется в интерпретации, а потому Nx по существу является частным случаем Px, так образованная система обязательно будет полной. Далее, можно показать, что LK включает в себя LC:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A, \neg A \Vdash F}\,*\text{N}}{A, \neg A \Vdash B}\,\text{Fj}}{\neg A \Vdash A \supset B}\,\text{P}* \qquad \mathfrak{X}, A \supset B \Vdash A}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash A}\,\text{ЭТ}}{\mathfrak{X} \Vdash A}\ (7)$$

Таким образом, единственная новая система — это система, образованная из LC так же, как LM из LA. Крипке [SLE] [3]) изучил эту

[1]) В действительности сначала было предложено Nx (в [TFD]) в форме (7); 'x' было выбрано для напоминания об 'excluded middle' (исключенном третьем); позднее Px было названо по аналогии с Nx.

[2]) Этот термин был предложен в [TFD] в связи с замечанием Иоганссона [MKR] о том, что система могла бы пригодиться как теория строгой импликации. Этот термин вряд ли подходит, но никакого лучшего короткого названия предложено не было.

[3]) По поводу дальнейших исследований см. разд. S1.

систему и назвал ее LE. С точки зрения, которой мы здесь придерживаемся, эту систему уместно называть предложенным им термином: система *классической опровержимости*.

Итак, мы имеем пять систем конструктивного отрицания:

LM Минимальное отрицание, или простая опровержимость; образуется добавлением к LA правила F* и либо определения (6), либо правил *N*.

LJ Интуиционистское отрицание, или простая абсурдность; образуется добавлением Fj к LM.

LD Строгое отрицание, или полная опровержимость; образуется добавлением Nx к LM.

LE Классическая опровержимость; образуется добавлением Px к LM; включает в себя LD.

LK Классическое отрицание, или полная абсурдность; образуется из LJ добавлением Nx и из LD или LE добавлением Fj.

Для всех этих систем мы различаем F-*формулировку*, в которой принимаются только F-правила и (6) [Nx формулируется в терминах (6)], N-*формулировку*, в которой отказываются от (6) в пользу *N*, и FN-*формулировку*, в которой и F и $\neg$ берутся в качестве исходных, а (6) становится теоремой. Эти формулировки для LM будут называться LMF, LMN и LM (FN) соответственно; аналогичные соглашения принимаются для других систем. Эти соглашения будут использоваться только тогда, когда нужно будет различать эти формулировки.

Что касается правила *N, то предложенное выше правило имеет ту техническую невыгоду, что оно не удовлетворяет условию ($r2$) разд. 5C6. Это происходит из-за конституэнта F в заключении, который следовало бы рассматривать как второй главный конституэнт. Но если мы возьмем F в качестве B в *P, то правило, к которому мы приходим, будет иметь вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \quad \mathfrak{X}, F \Vdash C}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash C}$$

Это правило регулярно. Из него мы получаем вышеприведенное *N, подставив F вместо C (правая посылка будет тогда квазиисходной). Это объясняет формулировку в следующем разделе.

Следовало бы заметить, что опровержимость является фундаментальным видом отрицания, а другие определяются посредством добавлений к нему. Это верно для недоказуемости по отношению к фиксированной системе; тогда можно взять недоказуемые элементарные утверждения в качестве контраксиом.

B. L-СИСТЕМЫ ДЛЯ ОТРИЦАНИЯ

В предыдущем разделе мы занимались мотивировкой и обоснованием L-правил. В данном разделе будут сформулированы эти правила и из них будут выведены различные следствия. Целью будет распространение теорем разд. 5C—5E на системы с отрицанием и вывод аналогичных теорем о взаимоотношении между различными типами L-формулировок. Рассуждение ведется абстрактно и формально; ссылки на разд. A делаются только для мотивировки.

1. Формулировка L-систем для отрицания. Соглашения для положительных L-систем, описанных в разд. 5C3, должны применяться и к L-системам для отрицания, за исключением некоторых изменений, которые вскоре будут указаны. В частности, соглашения относительно просеквенций, вспомогательных утверждений и исходных утверждений следует принимать без изменений. Изменения в других соглашениях будут различными для разных формулировок. Однако эти изменения будут указываться систематически с указанием в соответствующем месте того типа систем, к которому они относятся.

Высказывания. В определении $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{P}$ будут сделаны следующие изменения:

1. В $\mathfrak{P}$ определен подкласс $\mathfrak{F}$, называемый классом *контраксиом*. Для обозначения контраксиом будут применяться буквы 'F_1', 'F_2', 'F_i', 'F_j' и т. д. Класс $\mathfrak{F}$ может быть пустым (и всегда будет пустым, когда $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{D}$).

2. В некоторых формулировках к операциям, употребляемым при порождении $\mathfrak{P}$, будет добавлена одноместная операция отрицания, обозначаемая префиксом '$\neg$'. Тогда если A принадлежит $\mathfrak{P}$, то $\neg A$ будет принадлежать $\mathfrak{P}$, но не $\mathfrak{E}$. Для обозначения этого отрицания будет иногда использоваться буква 'N' — наряду с 'P', 'Λ', 'V' для введенных ранее операций.

3. В некоторых формулировках к $\mathfrak{E}$ будет добавляться фиксированное высказывание F. Это F является неопределенным, коль скоро дело касается $\mathfrak{S}$. В терминах F операцию отрицания можно определить так:

$$\neg A \equiv A \supset F \tag{1}$$

И в этом случае, для любого A из $\mathfrak{P}$, $\neg A$ будет принадлежать $\mathfrak{P}$, но не $\mathfrak{E}$.

Элементарные утверждения. Единственное отличие от разд. 5C3*e* состоит в том, что в N-формулировке допускается пустая просеквенция справа.

Правила. К правилам из разд. 5C4 будут добавлены следующие новые правила; эти правила будут удовлетворять

описываемым ниже особым ограничениям в различных системах и типах формулировок.

F *Правила непосредственной опровержимости*

F* Если F_i — контраксиома, то

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash F_i, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash F, \mathfrak{Z}}$$

Fj
$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash F, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}}$$

N *Правила для отрицания*

*N (мультиплярное)
$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, F \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}$$

N* (все формулировки)
$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash F, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash \neg A, \mathfrak{Z}}$$

*N (сингулярное)
$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \quad \mathfrak{X}, F \Vdash B}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash B}$$

Nx
$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}$$ (только для LD)

Типы формулировок. Как уже упоминалось в разд. A3, мы рассмотрим три типа формулировок: F-формулировка, в которой отрицание определено в терминах F посредством (1), N-формулировка, в которой $\neg$ берется как исходное и не постулируется, и FN-формулировка, в которой постулируются и F, и $\neg$ [и (1) оказывается справедливым в смысле доказуемой эквивалентности].

Только что сформулированные правила являются правилами для FN-формулировки. В F-формулировке правила *N* не вводятся как исходные правила, но они справедливы как частные случаи *P* соответственно. В N-формулировке F просто опускается везде, где оно входит в приведенные выше правила, за исключением *N; последнее принимает вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Z}} \tag{2}$$

Сингулярная и мультиплярная системы должны удовлетворять тем же условиям, что и в разд. 5C. Имеется в виду, что в мультиплярных формулировках ряда систем на отдельные правила могут накладываться ограничения, чтобы они были сингулярными, т. е. системы могут оказаться смешанными в смысле разд. 5C3*e*. Далее,

следует иметь в виду, что структурные правила справа, в частности K*, неприменимы в сингулярных системах даже там, где допускается пустой консеквент.

F- и N-формулировки будут различаться, когда это целесообразно, тем, что после сокращенного названия системы будут писаться буквы 'F' и 'N' соответственно, а для FN-формулировки мы будем после названия системы приписывать '(FN)'; например, LMF, LMN, LM(FN). Сингулярная и мультиплярная формулировки будут различаться с помощью индексов, как в случае LA в разд. 5C.

Определения систем. Сингулярные формулировки получаются присоединением правил к LA или LC, согласно следующей таблице:

$$\begin{aligned} \mathrm{LM} &= \mathrm{LA} + \mathrm{F}* + *\mathrm{N}* \\ \mathrm{LJ} &= \mathrm{LA} + \mathrm{F}* + \mathrm{Fj} + *\mathrm{N}* = \mathrm{LM} + \mathrm{Fj} \\ \mathrm{LD} &= \mathrm{LA} + \mathrm{F}* + \mathrm{Nx} + *\mathrm{N}* = \mathrm{LM} + \mathrm{Nx} \\ \mathrm{LE} &= \mathrm{LC} + \mathrm{F}* + *\mathrm{N}* \\ \mathrm{LK} &= \mathrm{LC} + \mathrm{F}* + \mathrm{Fj} + *\mathrm{N}* = \mathrm{LE} + \mathrm{Fj} \end{aligned} \tag{3}$$

В мультиплярных формулировках Px не постулируется, но в тех случаях, когда Px не имеет места в сингулярных системах, правила N* и P* должны быть сингулярными. Поэтому оба правила N* и P* должны быть сингулярными в LM_m, LJ_m и LD_m, а для LE_m и LK_m нет ограничений типа сингулярности.

В системе LD_m аналогия подсказывает нам, что мы должны просто опустить Nx и допустить, чтобы N* было мультиплярным. Однако в так образованной системе

$$\Vdash A, \ A \supset \neg A$$

не было бы доказуемо, тогда как его сингулярный образ

$$\Vdash A \vee . A \supset \neg A$$

доказуем в LD_1 с использованием слабой формы [(7)' разд. A] правила Nx:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A \Vdash A \vee . A \supset \neg A}\,\mathrm{V}* \qquad F \Vdash F}{A, \neg (A \vee . A \supset \neg A) \Vdash F}\,*\mathrm{N}}{A, \neg (A \vee . A \supset \neg A) \Vdash \neg A}\,\mathrm{N}*}{\neg (A \vee . A \supset \neg A) \Vdash A \supset \neg A}\,\mathrm{P}*}{\neg (A \vee . A \supset \neg A) \Vdash A \vee . A \supset \neg A}\,\mathrm{V}*}{\Vdash A \vee . A \supset \neg A}\,\mathrm{Nx}$$

Необходимо поэтому постулировать мультиплярную форму Nx. Мы обнаружим, что с формой, принятой здесь для Nx, работать легче, чем с формой (7) разд. A. Мы можем тогда наложить ограничение, чтобы N* было сингулярным, как это было бы, если бы это правило было частным случаем P*.

F- и N-формулировки получаются из FN-формулировки так, как описано выше, но нужно отметить следующие особенности их мультиплярных форм. Так как N* является частным случаем P*, где B (в формулировке правила в разд. 3C4) есть F, то LD_m не требует, чтобы P* было сингулярным в этом частном случае [1]). Опять-таки пустой консеквент, допускаемый в N-системе, приносит вместе с собой автоматически правило "*ex falso quodlibet*" [2]), далее обозначаемое через 'efq':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A \Vdash A,\ B}\ \text{K*}}{A,\ \neg A \Vdash B}\ \text{*N}}{\neg A \Vdash A \supset B}\ \text{P*}$$

Поэтому мы в принципе не можем иметь мультиплярные N-формулировки без Fj, а N-формы систем LM_m, LD_m и LE_m не определены.

Видоизмененные формулировки. Можно указать и иные формулировки, аналогичные приведенным в разд. 5C8, но они далее рассматриваться не будут. Только что сформулированные правила годятся для добавления к формулировке IK. С этого момента правила *K* и *W* будут предполагаться справедливыми (не обязательно как исходные правила) без ограничения, и мы поэтому вольны переходить от одних модификаций наших систем к другим.

2. Инверсионная теорема. Доказательство инверсионной теоремы в разд. 5D1 включало в себя два основных шага. Первый шаг состоял в том, что мы осматривали верхние узлы Δ_1, а второй — в обосновании выводов в Δ_1. Для первого шага нужно было предположение (*b*) о том, что единственные правила, которые могли бы иметь M в качестве главного конституэнта,— это R (причем $\mathfrak{U}_i$ тогда определяются однозначно), а также структурные правила *K* и *W*; предположения (*d*) и (*e*) обеспечивали рассмотрение структурных правил. Второй шаг требовал предположения (*c*).

В настоящей ситуации вхождение M может быть также введено посредством Fj. В N-формулировке Fj — это по существу частный случай K*, и не будет каких-либо трудностей, коль скоро *K* справедливо без ограничений. В других формулировках вхождение M, введенное посредством Fj, будет справа; если в i-й посылке R одно из $\mathfrak{U}_i$ находится справа [1]), то этот подчиненный конституэнт может быть введен посредством Fj, а остальные — посредством *K*. Это обеспечивает первый основной шаг. На втором основном шаге у нас может быть та же трудность, что и раньше, в отношении предположения (*c*) в случае, когда R имеет главный конституэнт слева, одна или более из его посылок имеют подчиненные справа и в Δ_i имеются правила, сингулярные справа. В противном случае доказательство разд. D1 проходит. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. *Инверсионная теорема* (*теорема* 5D1) *остается верной, если условие* (*b*) *заменяется условием* (*b′*) *и накладывается новое условие* (*f*):

(*b′*). *Единственные правила, которые могут иметь M в качестве главного конституэнта,— это* R (*тогда* $\mathfrak{U}_h$ *определены однозначно*), *а также* *K*, *W*, Fj.

(*f*). *Если M вводится в* Δ_1 *посредством* Fj, *то* $\mathfrak{U}_i$ *могут быть введены на этом месте посредством* Fj *и* *K*.

Поскольку эти условия выполнены в интересующих нас здесь случаях, мы получаем следующие следствия:

Следствие 1.1. *В системах* LE_m *и* LK_m *все правила непосредственно обратимы относительно всех своих посылок. Более того, всегда может быть выполнено непосредственное обращение.*

В системе LD_m появляется осложнение в связи с правилом Nx. Это правило не имеет главного конституэнта и, следовательно, не может ввести вхождение M как таковое. Поэтому указанное правило не составляет исключения в отношении условия (*b′*). Исключительными случаями в отношении условия (*c*) являются *P и *N слева. Однако *N можно обратить слева (но не непосредственно):

$$\dfrac{\dfrac{(p1)}{\mathfrak{X},\ A \Vdash A,\ \mathfrak{Y}} \qquad \dfrac{\mathfrak{X},\ \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ \neg A \Vdash A,\ \mathfrak{Y}}\ \text{K*}}{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Y}}\ \text{Nx}$$

Мы получаем, таким образом, следующее

Следствие 1.2. *В системе* LD_m *все правила непосредственно обратимы, за исключением того, что* *N *и* *P *не обратимы непосредственно относительно своих левых посылок* (*или единственной посылки в* N-*формулировке* *N). *Обращение* *N *относи-*

[1]) Мультиплярная форма N* выводима в LD_m независимо от того, постулируется она или нет.

[2]) Из лжи следует все, что угодно.— *Прим. перев.*

[1]) Это условие выполнено для всех правил, встречавшихся до сих пор. Действительно, во всех случаях, когда R имеет главный конституэнт справа, каждая посылка имеет по меньшей мере один подчиненный справа.

тельно его левой посылки можно осуществить, но не непосредственно.

Следствие 1.3. *В системах* LM_m *и* LJ_m *все правила непосредственно обратимы, за исключением того, что ни* *P, *ни* *N *нельзя обратить относительно левой посылки (или единственной посылки в некоторых видах* *N).

Следствие 1.4. *Заключения следствия* 5D1.6 *выполняются также, если правила* Fj *или (в* LD_m) Nx *считаются структурными правилами* [1]).

3. Элиминационная теорема. Используя метод, подобный методу разд. 2, исследуем доказательство элиминационной теоремы, чтобы понять, какие видоизменения нужны для того, чтобы приспособить это доказательство к наличию отрицания. В силу замечания о видоизмененных формулировках в конце разд. 1 больше не нужно обращать внимание на типы формулировок гл. 5 и на использование структурных правил.

На этапе 1 единственными новыми возможностями являются случаи, относящиеся к (γ), в которых R_k — одно из правил *N*, Nx, Px, F*, Fj, и случай, относящийся к (ε), где R_k есть *N. Заметим, что правило Nx не вызывает трудностей, поскольку все конституэнты в заключении являются параметрическими, и это же верно для F* и Fj слева. Изменения, которые делаются при переходе от Γ_k к Γ'_k,— это выбрасывание параметрических конституэнтов A слева и добавление вхождений $\mathfrak{X}'$ слева и $\mathfrak{Z}$ справа. Эти изменения не влияют на справедливость рассуждения в (γ) для любого из правил в приведенном выше списке, а также на справедливость рассуждения в новом случае, относящемся к (ε). Следовательно, этап 1 проходит для всех случаев несмешанных систем, а также для случаев смешанных систем с пустой $\mathfrak{Z}$.

На этапе 2 мы имеем те же самые новые возможности в случае (γ), а также F*, Fj, Nx в случае (δ) и Nx в случае (ζ). Изменения, которые делаются при переходе от Γ_k к Γ'_k, состоят в выбрасывании параметрических вхождений A справа и в добавлении конституэнтов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ слева и справа соответственно; если имеется Px, то добавляются конституэнты $\mathfrak{Y}$ слева. В несмешанных системах, где A — составное, никакое из этих изменений не нарушает справедливости вывода по любому из новых правил. Далее, случай F*, относящийся к (δ), невозможен, так как A не может быть F. Случай Fj, относящийся к (δ), подобен случаю K*. Пусть применение рассматриваемого Fj ведет от Γ'_i к Γ'_k. Тогда, если $\mathfrak{Y}$ пусто, то мы, очевидно, имеем N-формулировку, и переход от Γ'_i к Γ'_k может быть полностью сделан посредством *K; в противном случае его

[1]) При определении ранга Fj можно понимать и как операциональное, и как структурное правило. Следствие справедливо в любом случае.

можно совершить посредством Fj и *K*. Случай Nx, относящийся к (δ) и (ζ), опять-таки не вызывает затруднений, поскольку здесь нет главного конституэнта [1]). Поэтому доказательство этапа 2 также проходит для несмешанных систем.

Обратимся теперь к этапу 3. В F-формулировке доказывать нечего. В других формулировках пусть A есть $\neg B$ и предположим, что ЭТ справедлива для B. Посылками рассматриваемого случая ЭТ являются

$$\mathfrak{X},\ \neg B \Vdash \mathfrak{Y} \tag{4}$$

$$\mathfrak{X} \Vdash \neg B,\ \mathfrak{Z} \tag{5}$$

Предположим, что (4) была получена посредством *N из посылок [в N-формулировке без F в (7)]

$$\mathfrak{X} \Vdash B,\ (\mathfrak{Y}) \tag{6}$$

$$\mathfrak{X},\ F \Vdash \mathfrak{Y} \tag{7}$$

тогда как (5) получается посредством N* из [без (F) в N-формулировке]

$$\mathfrak{X},\ B \Vdash (F),\ \mathfrak{Z} \tag{8}$$

Из (6) и (8), исключая B, имеем

$$\mathfrak{X} \Vdash (F),\ (\mathfrak{Y}),\ \mathfrak{Z}$$

Это — искомое заключение в N-формулировке. В FN-формулировке мы исключаем F с помощью (7).

Это завершает доказательство ЭТ для всех несмешанных систем, так что мы получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Элиминационная теорема справедлива без оговорок для всех формулировок систем* LM_1, LJ_1, LD_1, LE_1, LK_1, LE_m, LK_m.

Рассмотрим теперь распространение ЭТ на смешанные системы, используя метод разд. 5D2. Как и там, мы должны только рассмотреть случаи, когда A есть $B \supset C$, $\neg B$ (в LM_m или LJ_m [2])) или элементарно. Случай, когда A есть $B \supset C$, рассматривается, как в разд. 5D2, а случай $\neg B$ рассматривается аналогично, так что наше рассмотрение сводится к случаю, где A элементарно. В N-формулировке LJ_m остальную часть рассуждения можно

[1]) Если все квазипараметрические предки M вводятся по правилам K* или Fj, то в этом частном случае Fj можно трактовать как R и, следовательно, как неструктурное правило.

[2]) В LD_m, поскольку *N и N* могут быть обращены, мы можем использовать это обращение для того, чтобы провести удаление, и нет большой разницы, сингулярно N* или нет. Мультиплярная форма N* выводима в LD_m независимо от того, постулируется она или нет.

провести, как в разд. 5D2. Но в F- и FN-формулировках мы должны рассмотреть случай, когда A есть F.

Если A есть F, то может оказаться, что такое F вводится посредством F*. В этом случае, по-видимому, необходимо наложить дальнейшие ограничения.

Эта трудность не возникает, если класс контраксиом пуст. При этом, не умаляя общности, мы можем считать первоначальные контраксиомы элементарными. Ибо тогда мы могли бы взять F в качестве единственной контраксиомы и добавить к вспомогательным утверждениям утверждения вида

$$F_i \vdash_0 F \tag{9}$$

Тогда правило F* становится излишним, так как единственный вывод, возможный по этому правилу, имеет тождественные посылку и заключение.

В оставшихся случаях рассуждение можно провести, как в разд. 5D2. Итак, мы получили следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Элиминационная теорема имеет место без ограничения в* N-*формулировке* LJ_m. *Для других формулировок* LJ_m *и формулировок* LM_m *и* LD_m *она справедлива, если контраксиомы элементарны.*

З а м е ч а н и е 1. Вместо правила F* можно было бы ввести третий тип исходных утверждений, получаемых из

$$F_i \Vdash F \tag{10}$$

с помощью ослаблений. Это вызвало бы затруднения в связи с элиминационной теоремой.

Утверждения вида (10) можно ввести посредством F* так:

$$\frac{F_i \Vdash F_i}{F_i \Vdash F}\ \mathrm{F}*$$

Это F* можно далее ослабить, как объяснялось в доказательстве, если F_i элементарны.

4. Эквивалентность типов формулировки. Прежде чем пойти дальше, важно заметить, что три типа формулировки — F-, N- и FN-формулировки — взаимно эквивалентны, коль скоро они все определены. Мы покажем это в предположении, что элиминационная теорема справедлива для всех рассматриваемых формулировок.

Определим G-*преобразование* от утверждений N-формулировки к утверждениям FN-формулировки:

$$(\mathfrak{X} \Vdash -)^{\mathrm{G}} \rightleftarrows \mathfrak{X} \Vdash F$$

$$(\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y})^{\mathrm{G}} \rightleftarrows \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

Далее, если R — правило N-формулировки, то R^{G} обозначает то же правило соответствующей FN-формулировки, которое получается из R заменой всех посылок и заключений на их G-образы.

Л е м м а 1. *Если* Γ *доказуема в* N-*формулировке, то* Γ^{G} *доказуема в соответствующей* FN-*формулировке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — доказательство $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ утверждения Γ в N-формулировке. Мы покажем, что Γ_k^{G} доказуемо в соответствующей FN-формулировке при условии, что каждое Γ_i^{G} для $i \leqslant k$ доказуемо в этой формулировке. Достаточно рассмотреть следующие шесть случаев.

С л у ч а й 1. Γ_k исходно. Тогда консеквент не пуст. Следовательно, Γ_k' совпадает с Γ_k и является исходным.

С л у ч а й 2. Γ_k выводится из Γ_i, Γ_j, ... по правилу R, не относящемуся ни к F, ни к отрицанию, и консеквент Γ_k не пуст [1]). Тогда ни у одной из посылок консеквент не пуст; Γ_i^{G}, Γ_j^{G}, ..., Γ_k^{G} совпадают соответственно с Γ_i, Γ_j, ..., Γ_k и R^{G} совпадает с R. Следовательно, Γ_k^{G} можно получить в FN-формулировке из тех же посылок по тому же правилу.

С л у ч а й 3. Γ_k получается из Γ_i, Γ_j, ... по такому же правилу, как в случае 2, но консеквент Γ_k пуст. Тогда у этого правила не может быть главного конституэнта справа. Если правило есть *C, *W, *K, *Λ, *V или Nx, то правая часть будет параметрической, и вывод остается справедливым, если пустой конституэнт заменить на F, что дает Γ_k^{G} как следствие Γ_i^{G}, Γ_j^{G}, ... по правилу R^{G}. Если этим правилом является *P, то пусть первоначальный вывод будет

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \quad \mathfrak{X}, B \Vdash}{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash}$$

Преобразованный вывод представляет собой

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \qquad \mathfrak{X}, B \Vdash F}{\mathfrak{X}, A \supset B \Vdash F}$$

Он корректен в силу *P.

С л у ч а й 4. Γ_k получается по правилу R,— а именно, Fj или N*,—которое требует в FN-формулировке наличия конституэнта F справа в некоторой посылке. Все такие правила имеют одну посылку, которую мы назовем Γ_i, и заключение с непустым конституэнтом. Тогда Γ_k^{G} представляет собой Γ_k. Пусть Γ_i есть

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

[1]) Это же рассуждение применяется к Nx, которое может встретиться только в LD_1.

и пусть Γ_i' есть

$$\mathfrak{X} \Vdash F, \mathfrak{Y}$$

Тогда Γ_k следует из Γ_i' в FN-формулировке по тому же правилу. Если $\mathfrak{Y}$ пуста, то Γ_i' есть Γ_i^G, а если не пуста, то Γ_i' получается из Γ_i^G по K*. Итак, в любом случае Γ_k^G выводимо из Γ_i^G в FN-формулировке.

Случай 5. Γ_k получается по правилу R,— а именно F*,— которое вводит F в заключение. В этом случае конституэнт посылки Γ_i обязательно не пуст; следовательно, Γ_i^G совпадает с Γ_i. Пусть Γ_k есть

$$\Gamma_k \qquad \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

В результате применения того же правила к Γ_i^G в FN-формулировке получим Γ_k':

$$\Gamma_k' \qquad \mathfrak{X} \Vdash F, \mathfrak{Y}$$

Если $\mathfrak{Y}$ пуста, то это будет как раз Γ_k^G. В противном случае пусть B встречается в $\mathfrak{Y}$ в качестве конституэнта. Так как мы работаем с мультиплярной N-формулировкой, то будет постулироваться Fj. Тогда мы можем, отправляясь от Γ_k', строить вывод следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash F, \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash B, \mathfrak{Y}}\,\mathrm{Fj}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}\,\mathrm{W*}$$

Заключением будет Γ_k, которое совпадает с Γ_k^G. Поэтому Γ_k^G выводимо в соответствующей FN-формулировке.

Случай 6. Γ_k получается по *N. Тогда выводом будет

$$\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Z}}$$

В случае пустой $\mathfrak{Z}$ преобразованный вывод можно получить так:

$$\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash A \quad \mathfrak{X}, F \Vdash F}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash F}\,{*\mathrm{N}}$$

Если же $\mathfrak{Z}$ не пуста, то вывод можно получить так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A, F, \mathfrak{Z}}\,\mathrm{K*} \qquad \mathfrak{X}, F \Vdash F, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash F}\,{*\mathrm{N}}$$

Начиная с этого места, мы можем рассуждать как в случае 5. Правая посылка в любом случае квазиисходна.

Этим завершается доказательство леммы 1.

Определим теперь F-*преобразование*, которое каждому высказыванию A из FN-формулировки сопоставляет то высказывание A^F из соответствующей F-формулировки, которое получается заменой в A каждой компоненты вида $\neg B$ на $B \supset F$. Это частный случай дефинициональной редукции из разд. 3C1; пользуясь структурной индукцией, его можно выразить в виде определения следующим образом:

a. Если A элементарно, то A^F есть A.

b. Преобразование является гомоморфизмом по отношению к операциям, отличным от отрицания.

c. Если A есть $\neg B$, то A^F есть $B^F \supset F$. Это преобразование можно распространить на просеквенции, элементарные утверждения и правила, если потребовать, чтобы оно было гомоморфизмом, т. е. чтобы все конституэнты заменялись их F-образами.

Лемма 2. *Если* Γ *— элементарное утверждение* F-*формулировки, то* Γ *доказуемо в этой формулировке тогда и только тогда, когда оно доказуемо в соответствующей* FN-*формулировке.*

Доказательство. Если Γ доказуемо в F-формулировке, то оно тем более доказуемо в соответствующей FN-формулировке. Обратное очевидно, если формулировка обладает тем свойством, что для составных конституэнтов выполняется свойство композиции. Но даже без этого свойства мы можем прийти к обратному утверждению, пользуясь дедуктивной индукцией. Действительно, пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — вывод Δ утверждения Γ. Если Γ_k — исходное утверждение, то Γ_k^F также будет исходным утверждением. Далее, если R — правило FN-формулировки, то R^F будет верным выводом в соответствующей F-формулировке. Отсюда следует, что Γ_k^F, а потому и Γ^F, выводимо в F-формулировке. Поскольку Γ^F совпадает с Γ, это завершает доказательство.

Лемма 3. *В* FN-*формулировке, для которой справедлива элиминационная теорема, элементарное утверждение* Γ *доказуемо тогда и только тогда, когда доказуемо* Γ^F.

Доказательство. Схемы доказательств

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A, \neg A \Vdash F}\,{*\mathrm{N}}}{\neg A \Vdash A \supset F}\,\mathrm{P*} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Vdash A \quad F \Vdash F}{A, A \supset F \Vdash F}\,{*\mathrm{P}}}{A \supset F \Vdash \neg A}\,\mathrm{N*}$$

показывают, что $\neg A$ и $A \supset F$ взаимозаменяемы. Отсюда в силу ТЗ следует утверждение леммы.

Теперь мы определим S-*преобразование* от FN-формулировки к N-формулировке. Оно состоит в исключении F с помощью определения

$$F \equiv \neg T$$

где T — некоторое доказуемое высказывание, скажем $E_1 \supset E_1$. Определение дается по структурной индукции:

a. Если A элементарно и отлично от F, то A^S есть A; F^S есть $\neg T$.

b. По отношению ко всем операциям преобразование является гомоморфизмом.

Это преобразование также можно распространить на просеквенции и элементарные теоремы, если потребовать, чтобы оно было гомоморфизмом.

Лемма 4. *Пусть элиминационная теорема справедлива для некоторой* FN-*формулировки, а также для соответствующей* N-*формулировки. Тогда, для того чтобы* Γ *было доказуемо в* FN-*формулировке, необходимо и достаточно, чтобы* Γ^S *было доказуемо в* N-*формулировке.*

Доказательство необходимости. Для каждого правила R в FN-формулировке пусть R^N — соответствующее правило в N-формулировке, а R^S — S-образ R. Мы покажем, что R^S является верным выводом в N-формулировке. Это ясно, если R не постулирует вхождения F ни в посылку, ни в заключение. Если оно постулирует F справа в посылке, то, так как в LMN мы имеем

$$\frac{\Vdash T}{\neg T \Vdash} *\mathrm{N} \qquad (11)$$

то мы можем вывести посылку R^N из посылки R^S по элиминационной теореме и затем вывести желательное заключение по R^N. Если R постулирует F справа в заключении, то посылка — та же самая, что и в N-формулировке, и мы можем ввести требуемое $\neg T$ в заключение так:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}, T \Vdash \mathfrak{Z}} *\mathrm{K}}{\mathfrak{X} \Vdash \neg T, \mathfrak{Z}} \mathrm{N}*$$

Если R есть $*$N в сингулярном случае, то пусть вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \quad \mathfrak{X}, F \Vdash B}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash B} *\mathrm{N}$$

Преобразованный вывод можно получить так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X}^S \Vdash A^S}{\mathfrak{X}^S, \neg A^S \Vdash} *\mathrm{N}}{\mathfrak{X}^S, T, \neg A^S \Vdash} *\mathrm{K}}{\mathfrak{X}^S, \neg A^S \Vdash \neg T} \mathrm{N}* \qquad \mathfrak{X}^S, \neg T \Vdash B^S}{\mathfrak{X}^S, \neg A^S \Vdash B^S} \text{ЭТ}$$

В мультиплярном случае первоначальный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Y} \qquad \mathfrak{X}, F \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y}} *\mathrm{N}$$

Преобразованный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X}^S \Vdash A^S, \mathfrak{Y}^S}{\mathfrak{X}^S, \neg A^S \Vdash \mathfrak{Y}^S} *\mathrm{N}$$

Результат преобразования правой посылки роли не играет. Поэтому во всех случаях R^S дает верный вывод в N-формулировке.

Предположим, что мы имеем вывод Δ утверждения Γ в FN-формулировке. Поскольку S-преобразование переводит исходное утверждение в исходное утверждение и, как мы только что показали, вывод по правилу R — в верный N-вывод, мы видим, что применение S-преобразования ко всем утверждениям даст вывод Γ^S. Этим доказана необходимость.

Доказательство достаточности. Если Γ^S выводимо в N-формулировке, то Γ^{SG} выводимо в FN-формулировке по теореме 1. Поскольку консеквент Γ^S не пуст, то Γ^{SG} совпадает с Γ^S. Поэтому Γ^S выводимо в FN-формулировке. Остальное следует в силу ТЗ, поскольку мы имеем

$$\frac{\Vdash T}{\neg T \Vdash F} *\mathrm{N} \qquad \frac{F, T \Vdash F}{F \Vdash \neg T} \mathrm{N}* \qquad (12)$$

Этим доказательство завершено.

Все вышеизложенное мы можем подытожить следующим образом:

Теорема 4. *Если определены соответствующие формулировки и для них справедлива элиминационная теорема, то верно следующее*:

(i) *Если* Γ *— элементарное утверждение* N-*формулировки, то* Γ *является теоремой этой формулировки тогда и только тогда, когда* Γ^G *является теоремой для соответствующей* FN-*формулировки.*

(ii) *Если* Γ — *элементарное утверждение* F-*формулировки, то* Γ *является теоремой для этой формулировки тогда и только тогда, когда оно является теоремой для соответствующей* FN-*формулировки.*

(iii) *Если* Γ — *элементарное утверждение* FN-*формулировки, то* Γ *эквивалентно в этой формулировке каждому из* Γ^S *и* Γ^F; *кроме того, его истинность в* FN-*формулировке эквивалентна истинности* Γ^F *в соответствующей* F-*формулировке, а также истинности* Γ^S *в соответствующей* N-*формулировке.*

Доказательство. Необходимость в (i) следует по лемме 1, а достаточность — по лемме 4, так как Γ^{GS} отличается от Γ лишь тем, что справа возможно наличие добавочного конституэнта $\neg T$ и его можно вычеркнуть в силу (11) и элиминационной теоремы.

Утверждение (ii) совпадает с леммой 2.

Часть (iii), относящаяся к Γ^F, следует из лемм 3 и 2. По лемме 4 Γ справедливо в FN-формулировке тогда и только тогда, когда Γ^S справедливо в N-формулировке; поскольку Γ^{SG} совпадает с Γ^S, мы заключаем в силу (i), что Γ^S справедливо в N-формулировке тогда и только тогда, когда оно справедливо в FN-формулировке.

Теорема доказана.

5. Сингулярные и мультиплярные формулировки. Займемся теперь вопросом о эквивалентности сингулярной и мультиплярной систем. Для положительных систем этот вопрос был решен в разд. 5D5. Здесь будет показано, что эта эквивалентность имеет место — коль скоро мультиплярные формулировки определены как в разд. 1 и справедлива ЭТ — для всех формулировок отрицания. Пользуясь результатами разд. 4, число рассматриваемых типов можно было бы уменьшить; но хотелось бы сделать этот раздел независимым от результатов разд. 4.

Доказательство в разд. 5D5 использует установленный в разд. 5D4 факт, что утверждение $A \leqslant B$ в EA эквивалентно $A \Vdash B$ в LA. Поскольку LA включена во все системы, мы можем здесь пользоваться выводами по EA точно так же, как мы делали это в разд. 5D5.

Мы примем здесь те же соглашения относительно '$\mathfrak{Y}$', '$\mathfrak{Y}'$', '$\mathfrak{Z}$', 'C', 'C'', 'D', '$\Vdash_m$', '$\mid=_1$', что и в разд. 5D5.

Теорема 5. *В любой формулировке систем* LM, LJ, LD, LE *или* LK, *в которой определены сингулярная и мультиплярная формы и справедлива* ЭТ, *для того чтобы*

$$\mathfrak{X} \Vdash_m \mathfrak{Y} \tag{13}$$

было справедливо в мультиплярной формулировке, необходимо и достаточно, чтобы[1])

$$\mathfrak{X} \Vdash_1 C \tag{14}$$

было справедливо в соответствующей сингулярной формулировке.

Доказательство необходимости. К случаям, появляющимся при доказательстве теорем 5D7 и 5D8, мы должны лишь добавить случаи, в которых вывод, ведущий к (13), происходит по одному из правил F*, Fj, *N, N*. Доказательства для этих случаев, которые будут вскоре приведены, опираются на следующие факты. Во-первых, вывод

$$\frac{A,\ B \Vdash C}{A,\ B \vee D \Vdash C \vee D} \tag{15}$$

в любой из систем можно обосновать так:

$$\frac{\dfrac{A,\ B \Vdash C}{A,\ B \Vdash C \vee D}\ \mathrm{V}^* \qquad \dfrac{A,\ D \Vdash D}{A,\ D \Vdash C \vee D}\ \mathrm{V}^*}{A,\ B \vee D \Vdash C \vee D}\ {}^*\mathrm{V}$$

Во-вторых, там, где C есть F, аналогичный вывод в N-формулировке, а именно

$$\frac{A,\ B \Vdash}{A,\ B \vee D \Vdash D} \tag{16}$$

может быть построен следующим образом, поскольку Fj справедливо в любой мультиплярной N-формулировке:

$$\frac{\dfrac{A,\ B \Vdash}{A,\ B \Vdash D}\ \mathrm{Fj} \qquad A,\ D \Vdash D}{A,\ B \vee D \Vdash D}\ {}^*\mathrm{V}$$

В-третьих, мы можем предположить, что $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, входящие в нижеследующие доказательства, не пусты, ибо в противном случае ситуация тривиальна.

После этих замечаний мы перейдем к разбору новых случаев. При рассмотрении N-формулировок выражения в скобках следует опустить.

Предположим сначала, что (13) получается с помощью F*. Тогда $\mathfrak{Y}$ есть F, $\mathfrak{Z}$ и посылка будет иметь вид

$$\mathfrak{X} \Vdash_m F_i,\ \mathfrak{Z}$$

По индуктивному предположению

$$\mathfrak{X} \Vdash_1 F_i \vee D$$

[1]) В случае когда консеквент (13) пуст, консеквент (14) также должен быть пустым.

Теперь $F_i \Vdash (F)$ следует по F* из исходного утверждения $F_i \Vdash F_i$; следовательно, в силу (15) или (16) получим

$$F_i \vee D \Vdash (F \vee) D$$

Поэтому из преобразованной посылки по элиминационной теореме мы можем вывести заключение

$$\mathfrak{X} \Vdash (F \vee) D$$

т. е. (14).

Предположим теперь, что (13) получается по Fj. Тогда первоначальный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash (F),\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Z}}$$

Если имеется F, то преобразованный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash F \vee D}{\mathfrak{X} \Vdash A \vee D}$$

Теперь утверждение $F \Vdash A$ следует из исходного утверждения $F \Vdash F$ по Fj. Следовательно, в силу (15) имеем

$$F \vee D \Vdash A \vee D$$

и потому преобразованный вывод можно получить по элиминационной теореме. Если F нет, то преобразованный вывод будет частным случаем V*.

Если (13) получается по *N, то первоначальный вывод в FN-формулировке имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, F \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}$$

Преобразованный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \vee C \quad \mathfrak{X}, F \Vdash C}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash C}$$

Это можно получить так:

$$\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash A \vee C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A, \neg A \Vdash F}\,{}^*\mathrm{N} \quad \mathfrak{X}, F \Vdash C}{\mathfrak{X}, A, \neg A \Vdash C}\,\text{ЭТ} \quad \mathfrak{X}, C, \neg A \Vdash C}{\mathfrak{X}, A \vee C, \neg A \Vdash C}\,{}^*\mathrm{V}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash C}\,\text{ЭТ}$$

Исходный вывод в N-формулировке:

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}$$

преобразованный вывод:

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \vee C}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash C}$$

Поскольку Fj имеет место во всякой мультиплярной N-системе, то доказательство таково:

$$\dfrac{\dfrac{A \Vdash A}{A, \neg A \Vdash}\,{}^*\mathrm{N}}{\mathfrak{X}, A, \neg A \Vdash C}\,\mathrm{Fj},\ {}^*\mathrm{K}$$

С этого места рассуждение ведется так же, как и раньше.

Если (13) получается по N*, то первоначальным выводом будет

$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash (F),\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash \neg A,\ \mathfrak{Z}}$$

Если имеется F, то преобразованный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash F \vee D}{\mathfrak{X} \Vdash \neg A \vee D}$$

Теперь $F \Vdash \neg A$ можно получить по N* из квазиисходного утверждения A, $F \Vdash F$; следовательно, в силу (15)

$$F \vee D \Vdash \neg A \vee D$$

Отсюда и из преобразованной посылки в силу элиминационной теоремы получаем

$$\mathfrak{X}, A \Vdash \neg A \vee D \tag{17}$$

Если F отсутствует, то мы получаем (17) из преобразованной посылки по V*. Далее, из первичного утверждения и V* имеем

$$\mathfrak{X}, \neg A \Vdash \neg A \vee D \tag{18}$$

В силу ограничений на N* $\mathfrak{Z}$ не пуста только в системах, в которых имеется Nx [1]). Поэтому из (17) и (18) получаем

$$\mathfrak{X} \Vdash \neg A \vee D$$

что для этого случая совпадает с (14).

Если (13) получается посредством Nx, то первоначальным выводом будет

$$\frac{\mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}$$

[1]) Предоставляем читателю в качестве упражнения показать, что Nx если и не постулируется, то является производным правилом в LE (см. упражнение 4).

Преобразованный вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X}, A \| - C \quad \mathfrak{X}, \neg A \| - C}{\mathfrak{X} \| - C}$$

что опять справедливо ввиду Nx.

Этим завершается доказательство необходимости.

Доказательство достаточности. Как и в разд. 5D5, достаточно показать, что если (14) имеет место в сингулярной системе, то оно имеет место в мультиплярной системе, так как остальное будет следовать по инверсионной теореме. В случае LM, LJ и LD, где нет правил, характерных для сингулярных систем, рассуждение на этом заканчивается. В случае, когда постулируется правило Px, можно сделать соответствующий мультиплярный вывод в LC_m, а потому (см. доказательство теоремы 5D8[1])) — в LE_m и в LK_m.

Этим завершается доказательство теоремы. Заметим, что доказательство необходимости требует ЭТ для сингулярной системы, доказательство достаточности требует инверсионной теоремы и — в случае, когда имеется Px,— также ЭТ для мультиплярной системы.

6. Вопросы выводимости. Теперь мы рассмотрим вопрос о том, в какой степени теоремы о выводимости из разд. 5E, а также те теоремы из разд. 5C и 5D, с которыми мы еще не имели дела в этой главе, распространяются на системы с отрицанием. Многие из этих теорем были установлены как общие теоремы, применимые к L-системам, удовлетворяющим широким общим условиям. Эти теоремы сразу распространяются на системы с отрицанием. Другие распространяются с небольшими изменениями.

В последующем изложении системе LD не уделяется большого внимания. Детали, касающиеся LD, большей частью вынесены в упражнения.

Из теорем разд. 5C теоремы 5C1, 5C2, 5C3, 5C5 распространяются без особых изменений. Теорема 5C4 требует только рассмотрения дополнительного случая:

$$\frac{\dfrac{A \| - A}{A, \neg A \| - F}\ {*N}}{\neg A \| - \neg A}\ N*$$

Поэтому теоремы разд. 5C тривиальным образом справедливы для всех формулировок [2]).

Метод доказательства теоремы о полноте из разд. 5D6 можно применить к любой из систем $LE_m(\mathfrak{O})$ или $LK_m(\mathfrak{O})$, откуда

[1]) См. определения систем на стр. 375.— *Прим. ред.*

[2]) В соответствии с различными формами *P существуют, конечно, варианты *N. Мы не будем их исследовать особо.

получается следующая

Теорема 6. *Для того чтобы*

$$\mathfrak{X} \| - \mathfrak{Y} \tag{19}$$

было элементарной теоремой LK_m, *необходимо и достаточно, чтобы оно было тавтологией относительно всех двузначных табличных оценок, при которых F приписывается фиксированное значение* 0 *и, следовательно,* $\neg A$ *имеет значение, противоположное значению A; для того чтобы* (19) *было элементарной теоремой* LE_m, *необходимо и достаточно, чтобы оно было тавтологией относительно всех двузначных табличных оценок, при которых F приписывается любое из значений* 0 *или* 1 *и, следовательно,* $\neg A$ *имеет значение, либо равное* 1, *либо противоположное значению A.*

Теоремы относительно ограничения *K* и удаления *W* были сформулированы в общих терминах в гл. 5 (теоремы 5E6—5E8). Здесь о них больше говорить нечего [1]). Для формулировки III нам нужен квазиглавный конституэнт для *P и *N в LM_m, LJ_m, для *P, но не для *N в LD_m, и он не нужен ни для одного из правил в LE_m или LK_m. Правило Fj может быть сделано обратимым, если оно имеет квазиглавный конституэнт. Правило F* не беспокоит нас, когда $\mathfrak{S}$ пуста.

Более интересен вопрос, касающийся свойства композиции и связанных с ним свойств. Возможности относительно выбрасывания компонент таковы. Элементарные конституэнты можно выбросить в силу $\vdash *$, контраксиомы — в силу F*, вхождения F — в силу Fj, а составные конституэнты — в силу Px, Nx. Таким образом, мы приходим к следующей теореме и ее следствиям.

Теорема 7. *Пусть контраксиомы элементарны. Тогда все* L-*формулировки разд.* 1, *не постулирующие ни* Nx, *ни* Px, *обладают свойством композиции по отношению к составным конституэнтам.*

Доказательство. Единственными конституэнтами, которые можно выбросить по какому-либо правилу, являются F, подчиненные для некоторого применения правила $\vdash *$, и контраксиомы. Поскольку все они элементарны, теорема очевидна.

Следствие 7.1. *Если все контраксиомы элементарны, то все* L-*системы разд.* 1, *не постулирующие ни* Px, *ни* Nx, *обладают свойством отделения. Если контраксиом нет, то эти системы также обладают свойством сохранения.*

[1]) Для LD в доказательстве теоремы 5E7 потребуются небольшие изменения. С Nx надо обращаться как со структурным правилом.

Доказательство следует из теоремы 7 и теорем 5E2 и 5E3 [1]).

Следствие 7.2. *N-формулировки систем* LM_1 ($\mathfrak{D}$), LJ_1 ($\mathfrak{D}$) *и все мультиплярные системы над* $\mathfrak{D}$ *обладают свойством композиции без ограничения.*

Доказательство. Исключительные конституэнты, которые могут быть выброшены — они перечислены в доказательстве теоремы 7,— в этих формулировках не фигурируют.

Следствие 7.3. *N-формулировки систем* LM_1 ($\mathfrak{D}$), LJ_1 ($\mathfrak{D}$), LJ_m ($\mathfrak{D}$) *и* LK_m ($\mathfrak{D}$) *разрешимы.*

Доказательство получается из следствия 7.2 и теоремы 5E9.

Для формулировок, содержащих F, мы можем пойти несколько дальше, как показывает следующая теорема:

Теорема 8. *Пусть некоторая формулировка содержит* F *и в ней не постулируются ни* Px, *ни* Nx, *и пусть контраксиомы элементарны. Если постулируется* Fj, *то пусть существует эффективный процесс, сопоставляющий каждому положительному высказыванию* A *и каждой контраксиоме* F_i *вывод, обосновывающий правило*

$$\frac{\mathfrak{x} \Vdash F_i, \mathfrak{Z}}{\mathfrak{x} \Vdash A, \mathfrak{Z}} \tag{20}$$

для произвольных параметрических $\mathfrak{x}$ *и* $\mathfrak{Z}$; *далее, пусть никакое истинное вспомогательное утверждение не содержит* F *в качестве конституэнта. Пусть* Δ *— регулярное доказательство* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, *такое, что ни* F, *ни его отрицание не входят ни в одну из компонент* Γ_n. *Тогда существует доказательство* Δ', *оканчивающееся* Γ_n *и такое, что ни* F, *ни отрицание не входят ни в одно из утверждений* Δ'.

Доказательство. Если бы отрицание входило в какое-то утверждение из Δ, то оно входило бы в Γ_n в силу следствия 7.1. Следовательно, никакое отрицание не входит в Δ, и мы должны рассмотреть лишь случай, когда в Δ имеется вхождение F.

Если бы имелось вхождение F слева в некоторое Γ_k, то оно затем не могло бы быть выброшено и потому осталось бы в Γ_n. Следовательно, любое такое вхождение F должно находиться справа. В этом случае указанное вхождение могло бы быть затем

[1]) Если F* заменяется на (9), то ограничение в отношении контраксиом для свойства сохранения можно опустить. Поэтому приведенное рассуждение в принципе применимо и к случаям, когда контраксиомы элементарны. В противном случае

$$F_i \Vdash F$$

является контрпримером для свойства сохранения.

устранено лишь по одному из правил N* или Fj. Но это не может быть и N*, так как оно ввело бы отрицание. Мы можем поэтому предположить, что Γ_k непосредственно предшествует применению Fj.

Рассмотрим первое такое Γ_k. Пусть вывод от Γ_k к Γ_{k+1} имеет вид

$$\frac{\mathfrak{x}_k \Vdash F, \mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{x}_k \Vdash A, \mathfrak{Z}_k}$$

Это A обязательно позитивно — если бы в него входило отрицание или собственная компонента F, та же компонента входила бы и в Γ_n. Возьмем самые верхние параметрические предки этого F. Такой предок, очевидно, мог бы быть введен как главный конституэнт некоторого исходного утверждения, а также по правилам $\vdash$*, K* или F*. Исходное утверждение типа ($p1$) невозможно, так как оно имело бы вхождение F слева. Исходное утверждение типа ($p2$) или введение посредством $\vdash$* невозможны, поскольку F не может быть консеквентом вспомогательного утверждения. Все предки указанного F должны вводиться по K* или F*. В первом случае F можно заменить на A; это верно также и в последнем случае, поскольку правило (20) можно эффективно обосновать. Итак, все предки указанного F могут быть заменены на A.

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока мы не придем к Δ', не содержащему никаких вхождений F, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Предположения, сделанные здесь относительно контраксиом, согласуются с интерпретацией, которая обсуждалась в разд. A3. Действительно, если постулируется Fj, то мы должны иметь дело с абсурдностью. Обычно в таком случае предполагается наличие контраксиом; но если они имеются, то лишь потому, что у нас есть некоторый способ распознать их абсурдность,— быть может, посредством некоторого эпитеоретического рассуждения, не формализуемого в самой системе (ср. примеры в разд. A2). Поэтому (20) является способом выражения требования о том, чтобы контраксиомы сами были абсурдными. Далее, требование о том, чтобы никакое истинное вспомогательное утверждение не содержало F, по существу является требованием о том, чтобы F было неопределенной, что и предполагалось в разд. 1.

Замечание 2. Может показаться, что требование относительно F противоречит сделанному в доказательстве ЭТ (разд. 2) предположению о том, чтобы правило F* можно было заменить вспомогательным утверждением вида

$$F_i \vdash_0 F \tag{21}$$

В действительности эти две ситуации не противоречат друг другу, ибо в первом случае мы говорим о LD_m, во втором — о ситуации, в которой имеет место Fj. Однако настоящая теорема была бы справедлива при замене F* на (21) при условии, что (21) являются единственными вспомогательными утверждениями, в которых F будет заключением, и что (20) справедливо для всех F_i.

Следствие 8.1. *Пусть контраксиомы удовлетворяют условиям теоремы* 8, *и пусть* Γ — *элементарное утверждение, не содержащее ни отрицания, ни* F. *Тогда если* Γ *доказуемо в любой формулировке систем* LM, LJ *или* LD, *содержащей* F, *то оно доказуемо в* LA; *если оно доказуемо в подобного типа формулировке систем* LE *или* LK, *то оно доказуемо в* LC.

Доказательство[1]). Если Γ доказуемо в какой-нибудь формулировке, то оно, по теореме 5, доказуемо и в мультиплярной формулировке. В этой формулировке по теореме 8 существует доказательство, в которое не входят ни F, ни отрицание. Следовательно, доказательство справедливо в LA_m или в LC_m (в зависимости от рассматриваемого случая), что и требовалось доказать.

Следствие 8.2. *Пусть контраксиомы удовлетворяют условиям теоремы* 8, *и пусть* Γ — *элементарное утверждение, все конституэнты которого элементарны и никакое из них не является* F. *Тогда* Γ *доказуемо в одной из систем разд.* 1, *содержащей* F, *тогда и только тогда, когда некоторый конституэнт в консеквенте* Γ *будет* $\mathfrak{S}$*-выводим из некоторых конституэнтов его антецедента.*

Доказательство вытекает из сопоставления следствия 8.1 и теоремы 5E4.

Замечание 3. Для N-формулировок заключения этих следствий не имеют места. Действительно,

$$F_i \Vdash$$

будет простым контрпримером. Но эти заключения имеют место, в частности, если $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{D}$.

Эти теоремы распространяют свойства отделения и сохранения на системы с отрицанием. Следующая теорема является аналогом 5E5.

Теорема 9. *Пусть контраксиомы элементарны, и пусть формулировка содержит* F. *Пусть* Γ — *элементарная теорема вида* (19) *для некоторой формулировки разд.* 1. *Пусть* Δ — *доказательство* Γ. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *множество, состоящее из всех конституэнтов, упоминаемых в теореме* 5E5, *а также из всех высказываний* $\neg F_i$, *где* F_i — *контраксиома, используемая при применении правила*

[1]) Доказательство не относится к LD, но следствие верно для этого случая. См. [SLD] и упражнение 7 в конце разд. B.

F* *в* Δ. *Пусть* $\mathfrak{N}$ *определяется так же, как в теореме* 5E5. *Тогда*

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N} \Vdash \mathfrak{Y}$$

— *элементарная теорема соответствующей формулировки над* $\mathfrak{D}$.

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. (Для этого будет удобно воспользоваться техническими методами разд. C.)

Что касается таблиц доказательств, то здесь, по-видимому, стоит исходить из мультиплярных формулировок [1]).

Поскольку мы рассматриваем системы над $\mathfrak{D}$, то единственным новым правилом будет теперь Fj; при этом различия между системами имеют большей частью вид сингулярных ограничений на P* и его специальные формы. О них можно позаботиться, видоизменив правило 1, как в разд. 5E8. Если имеется Fj, то нам в дополнение нужно лишь правило для введения F в правую часть данного. (По поводу ряда деталей см. разд. 7B6.)

Упражнения

1. Для каких систем с отрицанием доказуемо каждое из следующих высказываний:

(*a*) $A \supset . \neg\neg A$

(*b*) $\neg A \supset A . \supset . \neg\neg A$

(*c*) $\neg A \supset A . \supset A$

(*d*) $\neg\neg A \supset . A$

(*e*) $\neg\neg A \supset . \neg A \supset A$

(*f*) $A \supset . \neg A \supset A$

(*g*) $\neg\neg\neg A \supset \neg A$

(*h*) $\neg\neg A \supset : \neg A \supset A . \supset A$

(*i*) $\neg\neg(\neg\neg A \supset A)$

2. Ответить на тот же вопрос для следующих высказываний:

(*a*) $\neg A \wedge \neg B . \supset . \neg(A \vee B)$

(*b*) $\neg(A \wedge B) . \supset . \neg A \vee \neg B$

(*c*) $\neg(\neg A \wedge \neg B) . \supset . A \vee B$

(*d*) $\neg(A \vee B) . \supset . \neg A \wedge \neg B$

(*e*) $\neg\neg(A \supset B) . \supset : \neg\neg A . \supset \neg\neg B$

(*f*) $\neg\neg A \supset \neg\neg B . \supset : \neg\neg(A \supset B)$

(*g*) $A \supset \neg A . \supset B . \supset : A \supset B . \supset B$

[1]) Рассуждения разд. 5E8 в одном месте зависели от того, что консеквент не может быть пустым. Этого, вероятно, можно было бы избежать, несколько усложнив индукцию, но для F-формулировки это не нужно.

3. Рассмотреть следующие утверждения в LD_m:

$$(a) \qquad \mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y} \,\&\, \mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y} \;\longrightarrow\; \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

$$(b) \qquad \mathfrak{X}, \neg A \Vdash \mathfrak{Y} \;\longrightarrow\; \mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Y}$$

$$(c) \qquad \mathfrak{X}, \neg A \Vdash A, \mathfrak{Z} \;\longrightarrow\; \mathfrak{X} \Vdash A, \mathfrak{Z}$$

$$(d) \qquad \mathfrak{X}, A \Vdash \neg B, \mathfrak{Z} \;\longrightarrow\; \mathfrak{X} \Vdash A \supset \neg B, \mathfrak{Z}$$

(Здесь (a) есть Nx.) На основе LM показать, что все эти утверждения следуют из (a), что (b) и (c) эквивалентны и что (d) следует из (b), без использования ЭТ; далее, что (a) следует из (b) или (c) по ЭТ. Какова была бы ситуация в отношении ЭТ для LD, если бы Nx постулировалось в виде (b), (c) или (d) вместо (a)? (Ср. сноски в разд. 3, а также Крипке [DCn].)

4. Показать, что Nx является производным правилом в LE_1.

5. Детально рассмотреть аналоги теоремы 8 и ее следствия для N-формулировки.

6. Завершить доказательство теоремы 9.

7. (Обобщенная теорема Гливенко.) Если

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

справедливо в LD (LK), то[1])

$$\mathfrak{X}, \neg\mathfrak{Y} \Vdash \mathfrak{Y}$$

справедливо в LM (LJ). Что вы можете сказать о

$$\mathfrak{X} \Vdash \neg\neg\mathfrak{Y}$$

([SLD] дает доказательство в сингулярном случае. По поводу самой теоремы Гливенко см. его работу [PLB]. См. также Крипке [DCn].)

8. Показать, что если $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ не содержат импликации и

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

справедливо в LE, то оно справедливо в LD.

9. Пусть A — высказывание, образованное из элементарных высказываний посредством лишь $\wedge$ и $\neg$. Показать, что A доказуемо в LK ($\mathfrak{D}$), только если оно доказуемо в LM ($\mathfrak{D}$). Показать, следовательно, что если A — любое высказывание из LK ($\mathfrak{D}$) и A^* — высказывание, полученное из A заменой (изнутри кнаружи, как при дефинициональной редукции) компонент вида $B \supset C$, $B \vee C$ соответственно на $\neg(B \wedge \neg C)$, $\neg(\neg B \wedge \neg C)$, то

$$\Vdash A \supset A^* \quad \text{и} \quad \Vdash A^* \supset A \qquad \text{в LK}(\mathfrak{D})$$

$$\Vdash A \text{ в LK}(\mathfrak{D}) \quad \rightleftarrows \quad \Vdash A^* \text{ в LM}(\mathfrak{D})$$

[1]) Здесь $\neg\mathfrak{Y}$ — просеквенция, образованная из $\mathfrak{Y}$ отрицанием всех ее конституэнтов.

(Гёдель [IAZ], ср. Шмидт ([VAL], п. 131]), который ссылается на Колмогорова [ПТN].)

10. (Обобщенная теорема Гёделя—Гливенко.) Если $\mathfrak{X}$ образовано лишь с помощью $\neg$ и $\wedge$ и $\mathfrak{X} \Vdash F$ справедливо в LK, то оно справедливо в LM.

*11. Какое свойство, аналогичное теореме Гливенко, выполняется для системы LE? (Ср. упражнения 5E21 и 7B8.)

*12. Обобщается ли ситуация, описанная в упражнении 10, на случай утверждений

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

13. Допустим, что в LE_m формулы B в мультиплярных случаях P имеют лишь вид $\neg A$. Каким было бы отношение этой системы к LD? Была ли бы для нее справедлива ЭТ?

*14. Допустим, что элементарное утверждение Г справедливо как в LD (или, возможно, LE), так и в LJ. Обязательно ли оно тогда справедливо в LM?

15. Показать, что в LJ нет "квазиопределений" (ср. разд. 6D) вида

$$A \circ B \Vdash C \,\&\, C \Vdash A \circ B$$

где A и B элементарны, $\circ$ есть одна из операций $\supset$, $\wedge$ и $\vee$, а C — высказывание, образованное из оставшихся операций; далее если C не содержит отрицания, то нет элементарного утверждения вида

$$C \Vdash \neg A$$

(Вайсберг [UAK], разд. 10, Мак-Кинси [PIP].)

C. ДРУГИЕ ФОРМУЛИРОВКИ ОТРИЦАНИЯ

Этот раздел будет посвящен изучению T- и H-систем для отрицания и алгебраическим свойствам неклассического отрицания. Рассмотрение свойств классических систем откладывается до разд. D. Поскольку предшествующие формулировки решили проблему нахождения доказательств, особое внимание мы уделим аксиоматизации.

1. T-формулировки отрицания. T-формулировки различных систем для отрицания определены как системы, образованные добавлением к TA или TC подходящих правил из числа следующих:

$$\text{Ne} \quad \frac{A \;\; \neg A}{F} \qquad \text{Ni} \quad \frac{[A]}{\dfrac{F}{\neg A}}$$

$$\text{Fi} \quad \frac{F_i}{F}$$

$$\text{Nj}\quad \frac{F}{A}$$

$$\text{Nd}\quad \frac{[\neg A]}{\dfrac{A}{A}}$$

$$\text{Nk}\quad \frac{\neg\neg A}{A}$$

Различные системы определяются в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{aligned} \text{TM} &= \text{TA} + \text{Ne} + \text{Ni} \\ \text{TJ} &= \text{TM} + \text{Nj} \\ \text{TD} &= \text{TM} + \text{Nd} \\ \text{TE} &= \text{TC} + \text{Ne} + \text{Ni} \\ \text{TK} &= \text{TM} + \text{Nj} + \text{Nd} = \text{TM} + \text{Nk} = \text{TE} + \text{Nj} \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь в качестве определения взята первая формулировка TK; будет показано, что другие формулировки эквивалентны ей.

Теперь мы покажем, что эти T-системы эквивалентны соответствующим L-системам сингулярных FN-формулировок. При этом мы используем те же самые средства для перевода L-систем в соответствующие T-системы и наоборот, что и в разд. 5D4. Утверждение

$$\mathfrak{X} \Vdash {}^{\mathrm{T}}B \tag{2}$$

будет означать, что существует T-доказательство формулы B, все неисключенные посылки которого содержатся в $\mathfrak{X}$ в качестве конституэнтов. T-правила можно тогда интерпретировать как разрешение производить выводы из утверждений вида (2) в предположении, что неисключенные посылки над выводом состоят из высказываний, входящих в $\mathfrak{X}$, плюс указанные явно; поэтому любая посылка A представляет $\mathfrak{X} \Vdash {}^{\mathrm{T}}A$, а посылка

$$\frac{[A]}{B}$$

представляет $\mathfrak{X}, A \Vdash B$. Чтобы отличить от (2) элементарные утверждения L-системы, последние, когда такое различие необходимо, пишутся в виде

$$\mathfrak{X} \Vdash {}^{\mathrm{L}}B \tag{3}$$

Мы считаем (3) L-образом (2), а (2) — T-образом (3). Точно так же L-образ T-правила представляет собой правило, полученное

заменой всех его утверждений (посылок и заключения) их L-образами; T-образ L-правила определяется аналогично.

Т е о р е м а 1. *Если* (3) *справедливо в* L-*системе, то* (2) *справедливо в соответствующей* T-*системе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. К доказательству из разд. 5D4 необходимо лишь добавить доказательство того, что T-образы L-правил F*, Fj, *N* и Nx являются верными выводами в T-системе. T-образы правил F*, Fj, N* и Nx [1]) — это соответственно T-правила Fi, Nj, Ni и Nd и, следовательно, они справедливы в соответствующей T-системе. То же самое показывается для *N:

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{X}}{A}\,\Gamma\text{п} \qquad \neg A}{F}\,\text{Ne}$$

Это завершает доказательство.

Т е о р е м а 2. *Если* (2) *справедливо в* T-*системе, то* (3) *справедливо в соответствующей* L-*системе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в теореме 1, здесь необходимо лишь добавить к доказательству теоремы 5D6 индукционный шаг для L-образов Fi, Nj, Ni, Ne и Nd. Но L-образами Fi, Nj, Ni и Nd являются в точности правила F*, Fj, N* и Nx соответственно. L-образ правила Ne обосновывается так:

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash A}{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash F}\,{*}\,\text{N} \qquad \mathfrak{X} \Vdash \neg A}{\mathfrak{X} \Vdash F}\,\text{ЭТ}$$

Этим доказательство завершено.

2. Другие формулировки. Кроме стандартных T-формулировок, приведенных в разд. 1, существует ряд вариантов этих формулировок, в связи с которыми возникают интересные вопросы. Некоторые из этих вопросов мы сейчас рассмотрим, другие — оставим до упражнений.

Первый такой вопрос, уже упомянутый в разд. 1, относится к возможности различных форм TK.

---

[1]) Правило Nx, о котором говорится в доказательстве этой теоремы и следующей за ней теоремы 2, берется в форме

$$\frac{\mathfrak{X}, \neg A \Vdash A,\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Z}}$$

Пусть Nd′ — T-образ правила Nx в его обычной форме. Тогда легко показать, что Nd и Nd′ эквивалентны. (Ср. упражнение 6B3.)

Теорема 3. *Будучи добавленным к* TM, *правило* Nk *эквивалентно конъюнкции* Nj *и* Nd *и влечет* Pk.

Доказательство. Вывод Nk:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 \qquad \overline{2}}{\neg\neg A \quad \neg A}\,\mathrm{Ne}}{F}\,\mathrm{Nj}}{A}\,\mathrm{Nd}{-}2}{A}$$

Вывод Nj:

$$\dfrac{\dfrac{F}{\neg\neg A}\,\mathrm{Ni}\,^{1})}{A}\,\mathrm{Nk}$$

Вывод Nd:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]}{A}}{\neg A \supset A}\,\mathrm{Pi} \qquad \overline{1}}{A}\,\mathrm{Pe} \qquad \overline{1}}{\neg A}\,\mathrm{Ne}}{\dfrac{\dfrac{F}{\neg\neg A}\,\mathrm{Ni}-1}{A}\,\mathrm{Nk}}$$

Вывод Pk:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{1} \qquad \overline{2}}{\neg A \quad A}\,\mathrm{Ne}}{B}\,\mathrm{Nj}}{A \supset B}\,\mathrm{Pi}-2}{A}\,\text{гипотеза Pk}}{A}\,\mathrm{Nd}-1$$

Результат, относящийся к Pk, следует также из того, что Pk представляет собой T-образ правила Px, а Px справедливо в LC, а следовательно, и в LK по теореме 5D8.

Другой результат этого рода касается формулировки отрицания без F. Основная трудность состоит здесь в том, что L-утверждение с пустым консеквентом не имеет T-образа. Но мы видели в разд. B3, что утверждения

$$\mathfrak{X} \Vdash - \qquad\qquad \mathfrak{X} \Vdash \neg T$$

[1]) Мы пользуемся здесь ослабленной формой Ni, в которой исключаемая посылка $[\neg A]$ в действительности не использовалась в доказательстве.

где T — некоторое доказуемое высказывание, эквивалентны. Поэтому мы можем заменить F в качестве консеквента на $\neg T$, а F в качестве посылки на T, $\neg T$. В результате получается

Теорема 4. *Правила* Ne *и* Ni *вместе эквивалентны одному правилу*

Nm

$$\dfrac{\dfrac{B \quad \neg B}{\neg A}\,\mathrm{Nm}}{[A]}$$

Доказательство. Вывод Nm:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \quad \neg B}{F}\,\mathrm{Ne}}{\neg A}\,\mathrm{Ni}-1}{\dfrac{\overline{1}}{A}\,\mathrm{Гп}}$$

Вывод Ne:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2 \qquad \overline{3}}{\neg B \quad T}}{B \quad \neg B}\,\mathrm{Nm}-3}{\neg T}}{1}$$

Вывод Ni:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2}{A}}{T \quad \neg T}\,\mathrm{Nm}}{\neg A}}{1}$$

Здесь доказательство формулы T может быть поставлено над T; в результате получаем $\neg A$ как следствие $A \Vdash_{\mathrm{T}} \neg T$.

3. H-системы. Следуя образцу разд. 5B, определим H-систему как ассерторическую систему, допускающую высказывания из $\mathfrak{P}$ (разд. 5C3*b*) в качестве обов и имеющую Pe (т. е. modus ponens) в качестве единственного правила вывода. Для предиката доказуемости (обозначенного в разд. 2D1 через '$\vdash$') в H-системе мы можем использовать, когда требуется бóльшая ясность, префикс '$\vdash_{\mathrm{H}}$'; мы можем также распространить на этот префикс вспомогательное употребление '$\vdash$' для указания выводимости, как в разд. 5A1. С каждой такой H-системой связывается соответствующая структура, или E-система; эта связь определена в разд. 5A1. H-систему, теоремы которой совпадают с теоремами из LM, назовем системой HM; соответствующей ей структурой будет EM. Аналогично, H- и E-системы, связанные с LJ,— это HJ и EJ и т. п.

Множество исходных утверждений для H-системы есть множество таких утверждений этой системы, что каждое из них может быть получено из утверждений, входящих в это множество, посредством вывода с использованием Pe. Исходные утверждения H-системы соответствуют аксиоматическим высказываниям H-системы в смысле разд. 2D1, но новый термин употребляется для того, чтобы избежать путаницы с аксиомами разд. 5C3*d*. Будем называть множество исходных утверждений *отделенным*, если каждое утверждение B этой системы может быть получено посредством Pe из исходных утверждений, которые содержат, не считая импликации, только операции, действительно имеющиеся в B.

Если мы имеем систему с отрицанием, то отделенное множество исходных утверждений будет состоять из отделенного множества для положительной части, HA или HC, а также из схем, содержащих только импликацию и отрицание (F относится к отрицанию). Обратно, любое множество высказываний этого вида, будучи добавленным к отделенному множеству для положительной системы, образует отделенное множество для рассматриваемой системы при том лишь условии, что добавочные высказывания являются утверждениями последней системы, и достаточно эти высказывания добавить к положительной системе, чтобы обосновать T-правила разд. 2 и 3. Действительно, в силу теорем B7 и B8 любое утверждение может быть установлено в соответствующих L-системах с использованием только тех правил, которые относятся к действительно встречающимся операциям. Теоремы о эквивалентности показывают, что перевод этого L-доказательства в H-доказательство можно сделать, используя исходные утверждения, удовлетворяющие условиям отделенности.

При рассмотрении H-систем в принципе будет достаточно рассмотреть лишь случай, когда основная система $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{D}$. Этот случай представляет особый интерес; кроме того, общий случай может быть сведен к нему по теореме B9.

4. Система HM. Если мы рассмотрим F-формулировку системы LM, то ясно, что ее правила, поскольку F* теперь вырождено, являются в точности правилами LA. Отрицание определено формулой (1) разд. B, так что HM будет теперь просто дефинициональным расширением HA. Так как в LA мы имеем T3, то это дефинициональное расширение будет совпадать с тем, которое мы получим, добавляя к HA в качестве схем исходных утверждений утверждения

$$\vdash \neg A . \supset . A \supset F \qquad (4)$$

$$\vdash A \supset F . \supset . \neg A$$

Поэтому мы получим отделенное множество исходных утверждений, добавив (4) к отделенному множеству для HA.

Мы видели, что для N-формулировки особый интерес представляют высказывания, содержащие только импликацию и отрицание. Каждое такое утверждение получается из чисто импликативного утверждения HA, если один из его атомов фиксировать как F и применить (4). Для обозначения высказываний, образованных таким путем из 'PB', 'PC' и т. п., удобно употреблять 'NB', 'NC' и т. п. Вот некоторые примеры (используем определение $\leqslant$ из разд. 5A1) [1]):

NB $\quad \neg B \leqslant A \supset B . \supset . \neg A$

NB′ $\quad A \supset B \leqslant \neg B \supset \neg A$

NC $\quad A \supset \neg B \leqslant B \supset \neg A$

NS $\quad A \supset \neg B \leqslant A \supset B . \supset \neg A$

NW $\quad A \supset \neg A \leqslant \neg A$

NI′ $\quad A \leqslant \neg\neg A$

$\mathrm{NK}_{(1)}$ $\quad \neg A \leqslant A \supset \neg B$

Все они являются истинными утверждениями относительно LM.

Ясно, что NC в сочетании с Pe достаточно для обоснования правила Nm. Далее, поскольку в силу PK

$$B \leqslant A \supset B$$

то NC можно вывести из NS посредством T3; следовательно, то же самое верно для NS.

В результате доказана следующая

Теорема 5. *Отделенное множество исходных утверждений для* HM *может быть образовано добавлением к отделенному множеству исходных утверждений для* HA *либо схем* (4), *либо* NC, *либо* NS.

Формулировку, полученную добавлением NC к стандартной формулировке HA, мы будем считать *стандартной формулировкой* HM.

Другие возможные наборы исходных высказываний для HM указаны в упражнениях. Заметим, что, поскольку HM является подсистемой HE (см. разд. 6), необходимое условие доказуемости в HE [2]) применимо и к HM.

[1]) Все они, кроме последних двух, содержатся в списке, предшествующем упражнениям разд. 5B. Последние два относятся к комбинаторам $\mathsf{I}' = \mathsf{CI}$, $\mathsf{K}_{(1)} = \mathsf{BK}$; соответствующие P-высказывания имеют вид

PI′ $\quad A \supset : A \supset B . \supset B$

$\mathrm{PK}_{(1)}$ $\quad A \supset C . \supset . A \supset . B \supset C$

[2]) То есть теорема B6.— *Прим. ред.*

Одной схемы NB′ недостаточно для порождения HM [1]). Следовательно, алгебра, образованная добавлением этой схемы к HA, представляла бы некоторый интерес. Эта схема выражает тот факт, что отрицание является дуальным эндоморфизмом [2]) относительно включения. У этой более слабой алгебры должны быть интересные приложения. Но мы не приходим к ней с помощью семантических рассмотрений разд. A3.

5. Интуиционистская алгебра высказываний HJ. Система LM становится интуиционистской системой LJ, если мы добавим Fj. Это в свою очередь эквивалентно T-правилу Nj, которое может быть обосновано посредством

$$F \leqslant A \tag{5}$$

Это в свою очередь эквивалентно efq ("ex falso quodlibet")

$$\neg A \leqslant A \supset B \tag{6}$$

Т е о р е м а 6. *Отделенное множество исходных утверждений для* HJ *может быть получено присоединением к отделенному множеству исходных утверждений для* HM *любой из схем* (5), (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 5.

Множество, образованное добавлением (6) к стандартной формулировке HM, мы будем называть *стандартной формулировкой* HJ.

Свойство (5) показывает, что F является нулевым элементом в структуре EJ. Поэтому уместно употреблять для 'F' обозначение '0'. Тогда (6) дает в силу P_1

$$A \wedge \neg A \leqslant 0 \tag{7}$$

Поэтому $\neg A$ иногда называют "псевдодополнением" A, а EJ — "структурой с псевдодополнениями". Псевдодополнение не является настоящим дополнением, так как не выполняется закон

$$B \leqslant A \vee \neg A$$

представляющий собой разновидность закона исключенного третьего. Структура EJ имеет приложения в топологии: высказывания понимаются как открытые множества, а псевдодополнение — как внутренность дополнения. Двойственной структурой является структура замкнутых подмножеств некоторого фиксированного "универсума".

---

[1]) См. упражнение 4.

[2]) Определение см. ниже, стр. 414—415.— *Прим. ред.*

В EJ справедлива следующая половина "определения" материальной импликации из "Principia Mathematica"

$$\neg A \vee B \leqslant A \supset B \tag{8}$$

Обратное неверно.

6. Системы HD и HE. Строгая система HD образована добавлением к HM закона исключенного третьего. Его, конечно, можно сформулировать как

$$\vdash A \vee \neg A \tag{9}$$

Поскольку $A \vee \neg A$ содержит дизъюнкцию, нельзя выполнить требование отделенности. Однако схема

$$\neg A \supset A \leqslant A \tag{10}$$

оправдывает правило Nd и потому в сочетании с HM достаточна для того, чтобы дать все утверждения HD. Если эта схема добавляется к стандартной формулировке HM, то полученная формулировка будет называться *стандартной формулировкой* HD.

Т е о р е м а 7. *Отделенное множество исходных утверждений для системы* HD *получается присоединением* (10) *к отделенному множеству исходных утверждений для* HM.

В системе HD справедливо обращение (8):

$$A \supset B \leqslant \neg A \vee B \tag{11}$$

Для HD не известны никакие применения, и эта система изучалась мало. Иоганссон — первый, кто ее рассматривал, — предполагал, что она образует естественную систему строгой импликации, но эта идея не получила дальнейшего развития.

Система HE относится к HC так же, как HM к HA. Следовательно, если мы присоединим Pc к отделенному множеству для HM, мы получим множество, которое все еще будет отделенным, ибо Pc не содержит иных операций, кроме импликации, и это множество будет достаточным для HC. Такое множество можно образовать также, присоединив к HC любой набор схем из упоминаемых в теореме 5. *Стандартной формулировкой* HE мы будем считать формулировку, получающуюся присоединением Pc к стандартной формулировке HM или NC к стандартной формулировке HC.

Заметим, что HM и HD обе являются подсистемами HE. Критерий теоремы B6, который может иногда выявлять недоказуемость в HE очень быстро, может, значит, выявлять недоказуемость и в этих других системах.

7. Система HK. Из теоремы 3 следует, что в системе HK объединены черты обеих систем HJ и HD. Мы можем поэтому образовать отделенное множество исходных утверждений для HK,

добавляя (6) и (10) к аналогичному множеству для HM. Такая формулировка будет обладать тем свойством, что если мы опустим (6), то получим HD, а если опустим (10), то получим HJ; если же мы опустим и то и другое, то получим HM. Формулировка, полученная таким путем из стандартной формулировки HM, будет называться *стандартной формулировкой* HK.

Существует, однако, много других способов формулировки HK. Оставив до разд. D изучение алгебраической природы HK, мы отметим здесь некоторые из наиболее простых ее свойств (аналогичные рассмотрения проводятся в других частях этого раздела).

В системе HK мы имеем как (8), так и (11), и, следовательно, используя '=', как в разд. 5A1, имеем

$$A \supset B = \neg A \vee B \tag{12}$$

Далее, поскольку Nk выводимо в TK, утверждение

$$\neg\neg A \leqslant A \tag{13}$$

является теоремой HK; поскольку обратное верно даже в HM (в силу NI′), то

$$\neg\neg A = A \tag{14}$$

Теперь рассмотрим четыре принципа контрапозиции

$$A \supset B \leqslant \neg B \supset \neg A \tag{15}$$

$$A \supset \neg B \leqslant B \supset \neg A \tag{16}$$

$$\neg A \supset B \leqslant \neg B \supset A \tag{17}$$

$$\neg A \supset \neg B \leqslant B \supset A \tag{18}$$

Все они эквивалентны в HK ввиду (14). Но в то время как (15) есть NB′, а (16) есть NC, так что оба справедливы в HM, (17) и (18) не имеют места в HE.

Утверждение (13) обосновывает правило Nk разд. 1 и, следовательно, по теореме 3 достаточно добавить его к HM, чтобы породить HK. Если добавить утверждение (18) к HA, то этого достаточно, чтобы породить всю HK. Это можно показать следующим образом:

$$\begin{aligned} \neg A &\leqslant \neg B \supset \neg A && \text{в силу PK} \\ &\leqslant A \supset B && \text{в силу (18)} \end{aligned}$$

Отсюда получаем (6). Следовательно, беря $\neg A$ в качестве A и $\neg B$ в качестве B, имеем

$$\begin{aligned} \neg\neg A &\leqslant \neg A \supset \neg B \\ &\leqslant B \supset A && \text{в силу (18)} \end{aligned}$$

Если мы здесь возьмем $\neg\neg A$ в качестве B, то в силу PW получим (13). Применяя PB′ к (13), получим

$$\begin{aligned} A \supset \neg B . &\leqslant . \neg\neg A \supset \neg B \\ &\leqslant B \supset \neg A && \text{в силу (18)} \end{aligned}$$

т. е. NC. Итак, мы получили NC и (13), а потому и всю HK.

Подводя итог, мы получаем следующую теорему:

Т е о р е м а 8. *Система* HK *содержит все утверждения* (12)—(18) *и включает в себя* HC. *Множество исходных утверждений для* HK *можно получить, присоединяя* (6) *и* (10) *к* HM, (13) *к* HM *или* (18) *к* HA. *Отделенное множество для* HK *можно получить, добавив* (6) *к отделенному множеству для* HE.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждений теоремы не доказано пока лишь то, что HK включает HC. Это следует из теоремы 3, но прямое доказательство того, что справедливо Pc, легко проводится так:

$$\begin{aligned} A \supset B . \supset A &\leqslant \neg A \supset A && \text{в силу (6), T3} \\ &\leqslant A && \text{в силу (10)} \end{aligned}$$

Упражнения

1. На основе HA показать, что любые из следующих наборов схем эквивалентны NC и потому достаточны для того, чтобы породить HM из HA:

(*a*) NB′, NW

(*b*) NB′, NI′

(*c*) NW, $NK_{(1)}$

([LLA], теорема IV, 1.)

2. Показать, что NW и efq [то есть (6)] достаточны для того, чтобы породить HJ из HA. ([LLA], теорема IV, 2.)

3. Показать, что

$$\vdash \neg\neg A \supset . \neg A \supset A$$

эквивалентно efq при наличии HM. Следовательно, присоединение указанного утверждения к HM достаточно для того, чтобы получить HJ. (Шмидт [VAL], стр. 345. По поводу истории см. Гермес и Шольц [MLg], стр. 37; результат приписывается Бернайсу.)

4. Найти независимостные примеры, показывающие, что ни NB′, ни NW в отдельности недостаточно для того, чтобы породить HM. То же верно для $NK_{(1)}$, поскольку оно является следствием NB′. ([TFD], теорема 9 для NW; по поводу NB′ см. Гильберт и Бернайс [GLM.I], стр. 76.)

5. Проверить утверждения в тексте, касающиеся (8) и (11).

6. Обобщенная теорема Гливенко (упражнение B5) может быть установлена в терминах H-систем так: A является утверждением HD (или HK) лишь в том случае, если $\neg A \supset A$ является утверждением HM (или HJ). Доказать это дедуктивной индукцией в H-системах. ([LLA], разд. IV, 5.)

7. Обсудить результаты упражнений B7—B9 в применении к H-системам.

8. Показать, что PB′ (стр. 269), (10) и

$$\vdash A \supset . \neg A \supset B$$

образуют достаточное множество схем аксиом для той части HK, которая содержит только импликацию и отрицание. (Чёрч [IML_2], упражнение 29.2; первоначальное доказательство принадлежит Лукасевичу. Я не знаю, что получится, если новую схему аксиом заменить на (6).)

9. Показать, что схема NC в стандартной формулировке HK является излишней, но если (10) заменяется любой из схем

$$(a) \qquad \vdash A \supset \neg A . \supset A . \supset A$$

$$(b) \qquad \vdash A \supset \neg A . \supset B . \supset . A \supset B . \supset B$$

то остающееся множество схем образует независимое (но не отделенное) множество исходных утверждений для HK. Показать далее, что (a) эквивалентно (10) относительно HM, но (b) не эквивалентно (10). (По поводу истории этих схем см. Гермес и Шольц [MLg], сноска 53. По поводу независимости ср. упражнение **11**.)

10. Показать, что стандартная формулировка HE такова, что после присоединения efq мы получаем независимое отделенное множество для HK. (Кангер [NPP].)

***11.** Какого вида получилась бы система, если допустить возможность того, чтобы $\neg A$ было всегда ложным, в том самом смысле, в каком LM, LD, LE допускают возможность (см. теорему B6) того, чтобы $\neg A$ было всегда истинным? В этом случае NB′ и (17) были бы справедливы, но (16) или (18) — нет. Что получилось бы, если бы допускались обе возможности? Совпадала ли бы тогда система с системой, образованной присоединением одного лишь NB′ к некоторой позитивной системе? Как формулировалась бы такая система в различных формулировках? Что бы вы сказали, если бы $\neg A$ всегда имела то же значение, что и A?

12. Допустим, что у нас есть H-система — назовем ее HS, — которая является аксиоматическим расширением HM, таким, что для любого A, являющегося утверждением HK, $\neg A \supset A$ является утверждением HS. Показать, что HS является расширением HJ. (Порт [PCP]; но его доказательство ошибочно — см. реферат в *Journal of Symbolic Logic*. Теорема в той форме, как она сформулирована здесь, конструктивна.)

13. Показать непосредственно, что

$$A_1, \ldots, A_m \Vdash B_1, \ldots, B_n \quad \text{в LK}$$

эквивалентно

$$\vdash \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n \quad \text{в HK}$$

D. ТЕХНИКА КЛАССИЧЕСКОГО ОТРИЦАНИЯ

Система классического отрицания (HK) развита гораздо больше, нежели другие системы. Некоторые черты этого развития мы и рассмотрим в настоящем разделе. В основу изложения будет положено понятие булевой алгебры, которую мы определим как дистрибутивную структуру с дополнениями. Мы введем это понятие в разд. 1 и покажем, что оно эквивалентно родственным понятиям, рассмотренным ранее: понятиям классической субтрактивной и импликативной структур, булевого кольца, системы EK и тавтологических интерпретаций. В разд. 2, озаглавленном "Квазиопределения", мы рассмотрим элементарные теоремы, дающие возможность уменьшить число первоначальных операций, а также формулировки, основанные на сокращенных множествах таких операций. В остальных подразделах разд. D будет развита стандартная техника булевой алгебры, включающая в себя представления, нормальные формы, исключение, решение уравнений и т. д. Однако в соответствии с целями данной книги будут рассматриваться только финитные свойства; довольно обширная нефинитная теория булевых алгебр, включая общий случай "теоремы о представлении", остается за рамками данной книги.

Обозначения этого раздела будут изменены, чтобы они соответствовали стандартному употреблению. Поэтому отрицание, вообще говоря, будет обозначаться штрихом, а операция умножения — просто записью ее аргументов рядом друг с другом; иногда для обозначения обов будут употребляться строчные буквы.

1. Булевы алгебры. Если дана структура L с нулевым элементом 0 и единичным элементом 1, то мы скажем, что об A' является *дополнением* оба A, если имеет место как

$$A \wedge A' = 0 \tag{1}$$

так и

$$A \vee A' = 1 \tag{2}$$

Структура, в которой каждый об имеет по меньшей мере одно дополнение, будет называться *структурой с дополнениями*.

Дистрибутивная структура с дополнениями будет называться *булевой алгеброй.*

Теорема 1. *Классическая субтрактивная структура, в которой отрицание определено так, что*

$$A' = 1 - A \tag{3}$$

является булевой алгеброй. Булевой алгеброй является также классическая импликативная структура с нулем и отрицанием, в которой

$$A' = A \supset 0 \tag{4}$$

Доказательство. Пусть L — классическая субтрактивная структура с единицей. Тогда L дистрибутивна по теореме 4C5. Из (3) получаем (1) и (2):

$AA' = A(1-A) = 0$ в силу (3) разд. 4D

$1 \leqslant A \vee (1-A) \leqslant A \vee A'$ в силу $(-)_1$

Этим доказана первая часть теоремы. Вторая часть следует из нее в силу двойственности.

Следствие 1.1. *Алгебра* EK *является булевой алгеброй.*

Доказательство. В F-формулировке системы LK отрицание определено так:

$$\neg A \equiv A \supset F$$

Поскольку F в силу Fj является нулем системы, то это совпадает с (4). Итак, EK может быть порождена добавлением 0 и (4) к EC, которая представляет собой классическую импликативную структуру. Поэтому здесь применима теорема 1, и следствие доказано.

Теорема 2. *В любой булевой алгебре дополнение единственно. Далее, для всех обов A, B справедливо следующее:*

$$A'' = A \tag{5}$$

$$A = AB \vee AB' \tag{6}$$

$$A \leqslant B \rightleftarrows AB' = 0 \tag{7}$$

$$A \leqslant B \rightleftarrows B' \leqslant A' \tag{8}$$

Доказательство. В дистрибутивной структуре дополнения единственны ввиду следствия 4B9.1. Для (1) и (2) в силу ΛC и VC заключаем, что A является дополнением для A'. Поскольку A'' также является дополнением для A', то имеем (5). Далее, в силу (2) и дистрибутивного закона

$$A = A(B \vee B') = AB \vee AB'$$

что доказывает (6). Чтобы доказать (7), заметим сначала, что ввиду T3 и (1)

$$A \leqslant B \longrightarrow AB' \leqslant BB' \leqslant 0$$

Обратно, вследствие (6)

$$AB' \leqslant 0 \longrightarrow A = AB$$
$$\longrightarrow A \leqslant B \quad \text{(в силу ΛK′)}$$

Отсюда выводим (8):

$$A \leqslant B \longrightarrow AB' = 0 \quad \text{в силу (7)}$$
$$\longrightarrow A''B' = 0 \quad \text{в силу (5)}$$
$$\longrightarrow B' \leqslant A' \quad \text{в силу (7)}$$

Теорема 3. *Пусть* L *— структура с* 0 *и* 1, *обладающая операцией отрицания, такой, что удовлетворяются* (1) *и*

$$A = AB \vee AB' \tag{9}$$

Пусть вычитание определяется в L *так, что*

$$A - B = AB' \tag{10}$$

Тогда L *одновременно является булевой алгеброй и классической субтрактивной структурой. Кроме того, в* L *справедливо* (3).

Доказательство. Свойство $(-)_1$ сразу следует из (9). Имеем также

$A - B \leqslant A$ в силу ΛK

$B(A-B) = 0$ в силу (1)

Ввиду (9) имеем 4D (7), а следовательно, $(-)_2$, как в доказательстве теоремы 4D2. Тогда (3) справедливо, так как это частный случай (1). Остальное следует из теоремы 1.

Следствие 3.1. *Булева алгебра с вычитанием, удовлетворяющим* (10), *является классической субтрактивной структурой с единицей, в которой имеет место* (3).

Доказательство. Условие (9) следует из (6) в силу ΛK′ и T3.

Следствия 3.2. *Булева алгебра с импликацией, удовлетворяющей*

$$A \supset B = A' \vee B \tag{11}$$

представляет собой классическую импликативную структуру, в которой верно (4).

Доказательство. Это следствие двойственно следствию 3.1.

Теорема 4. *Если булева алгебра является также субтрактивной структурой, то она является классической субтрактивной структурой, в которой верны* (3) *и* (10). *Точно так же если булева алгебра является импликативной структурой, то она является классической импликативной структурой, в которой верны* (4) *и* (11).

Доказательство. Так как обе половины теоремы двойственны друг другу, то достаточно будет доказать первую половину.

Предположим, что L — булева алгебра, являющаяся также субтрактивной структурой. Пусть $C = AB'$. Тогда

$$BC = 0 \qquad \text{ввиду (1)}$$

$$A = AB \vee C \leqslant B \vee C \qquad \text{ввиду (6), ЛК′, ТЗ}$$

$$A - B \leqslant C \qquad \text{ввиду } (-)_2$$

Обратно, поскольку $C \leqslant A$, верно $(-)_1$, структура дистрибутивна и $BC = 0$, имеем

$$C = CA \leqslant C(B \vee (A - B)) = C(A - B) \leqslant A - B$$

Поэтому верно (10). Остальное вытекает из следствия 3.1.

Теорема 5. *Булева алгебра становится булевым кольцом с единицей, если сложение в кольце определяется путем*

$$A + B = AB' \vee A'B \tag{12}$$

а кольцевая операция умножения и 0 *и* 1 *кольца отождествляются соответственно со структурной операцией умножения и* 0 *и* 1 *структуры. Обратно, булево кольцо с единицей становится булевой алгеброй, если*

$$A \vee B = A + B + AB \tag{13}$$

$$A' = 1 + A \tag{14}$$

Доказательство. Теорема вытекает из сопоставления теоремы 1, следствия 3.1 и теоремы 4D4. Если мы присоединим (10), то в силу следствия мы получим классическую субтрактивную структуру и (12) становится условием (i) теоремы 4D4 [1]). Обратно, если мы имеем (13) и подходящее определение $A - B$, то мы получим классическую субтрактивную структуру, в которой (3) совпадает с (14); тогда по теореме 1 мы имеем булеву алгебру, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Для того чтобы*

$$A = B \tag{15}$$

выполнялось в общей булевой алгебре, необходимо и достаточно, чтобы A и B имели одно и то же значение при любой оценке относительно двузначных таблиц; для того чтобы

$$A \leqslant B \tag{16}$$

выполнялось в общей булевой алгебре, необходимо и достаточно, чтобы B имело значение 1 *при любой оценке, в которой A имеет значение* 1.

[1]) Условие (iii) теоремы 4D4 здесь можно игнорировать. Оно было введено в разд. 4D2 только для того, чтобы подвести понятие булева кольца под общее понятие кольца.

Доказательство. Если (15) и (16) выполняются в общей булевой алгебре, то они выполняются в EK(𝔇) ввиду следствия 1.1; обратное ясно, поскольку о EK(𝔇) не делается никаких особых предположений. Поэтому теорема является следствием теоремы B6 и эквивалентности между LA и EA (разд. C, 5D4, 5B5).

Хотя эта теорема дает теоретическое решение проблемы разрешения для общей булевой алгебры, указанный метод не всегда будет самым быстрым. Если число неопределенных равно n, то необходимо рассмотреть 2^n возможностей. Более быстрым будет метод сведения, состоящий в переводе в булево кольцо с единицей, умножением и сложением по модулю 2; то же верно и для метода таблиц доказательств, принадлежащего Бету.

Двузначные таблицы для рассмотренных здесь булевых операций приведены в табл. 1.

Таблица 1

Таблицы истинности для различных функций

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A - B$	$A \supset B$	$A + B$	$A \circ\!\!-\!\!\circ B$	$A \mid B$	A'
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1

2. Квазиопределения. В (10), (11), (12) и (13) разд. 1 мы имеем примеры равенств следующего типа:

$$A \circ B = f(A, B) \tag{17}$$

в которых инфикс '$\circ$' означает какую-нибудь бинарную операцию, а '$f(-_1, -_2)$' — конструкцию, независимую от этой операции. (3), (4) и (14) — равенства подобного же рода, за тем лишь исключением, что заменяемая операция — унарная. Такие равенства мы будем называть *квазиопределениями*; мы скажем, что конкретное квазиопределение является квазиопределением главной операции слева и что операция квазиопределяется этим равенством. В частично упорядоченных представлениях *квазиопределение* представляет собой, конечно, конъюнкцию элементарных

утверждений; например, для (17) это было бы

$$A \circ B \leqslant f(A, B)$$
$$f(A, B) \leqslant A \circ B$$

Когда никакая из операций некоторого множества операций не является квазиопределимой в терминах других операций, то мы скажем, что операции *независимы*.

Если операция квазиопределима, то естественно ожидать, что ее можно исключить в том смысле, что каждой элементарной теореме, содержащей эту операцию, соответствует эквивалентная элементарная теорема, не содержащая ее. Однако, для того чтобы вывести это заключение из наличия квазиопределения, нужна ТЗ. В случае определения (в этом случае обычно употребляется инфикс '$\equiv$') ТЗ удовлетворяется автоматически, но в других случаях ее нужно установить. В случаях, рассмотренных до сих пор, и в большинстве случаев, которые будут рассмотрены позднее, ТЗ справедлива и, следовательно, можно пренебречь различием между определением и квазиопределением, но существуют исключительные случаи, в которых вывод ТЗ представляет собой существенную трудность.

По крайней мере в некоторых из предыдущих систем операции были независимыми [1]). Но это не так в случае НК или даже в НС. Оставшаяся часть этого подраздела посвящена в основном таким квазиопределениям операций булевой алгебры друг через друга и через другие операции. Мы приведем краткий обзор способов, которыми можно сформулировать булеву алгебру в терминах ограниченного списка исходных операций.

Мы начнем с краткого резюме [2]) результатов разд. 1 с принятой здесь точки зрения.

Теорема 7. *По отношению к квазиопределениям табл. 2 эквивалентны следующие системы: булева алгебра, классическая субтрактивная структура с единицей, классическая импликативная структура с нулем, булево кольцо с единицей и система, образованная добавлением нуля к дуалу булева кольца.*

Обратимся теперь к основному содержанию этого подраздела.

Свойство (8) в сочетании с (5) выражает тот факт, что отрицание является взаимно-однозначным отображением булевой алгебры на ее дуал. Такое соответствие называется *дуальным автоморфизмом*. Равенства следующей теоремы известны под именем *формул де Моргана* [1]).

[1]) См. упражнение B14.

[2]) В этом резюме опущены некоторые детали, которые появлялись в разд. 1, и добавлены некоторые квазиопределения, не рассмотренные там. Например, теорема 7 — это не то же самое, что конъюнкция теорем 1—5.

Таблица 2

Квазиопределения [1])

Операция	Булева алгебра	Субтрактивная структура	Импликативная структура	Булево кольцо	Дуал булева кольца
$A \wedge B$					$A \backsim B \backsim (A \vee B)$
$A \vee B$				$A+B+AB$	
$A-B$	AB'	$[(A-B)']$	$[(A \supset B)']$	$A+AB$	$A \vee B \backsim B \backsim 0$
$A \supset B$	$A' \vee B$			$1+A+AB$	$A \vee B \backsim B$
$A+B$	$AB' \vee A'B$	$(A-B) \vee (B-A)$	$[(A \backsim B)']$		$A \backsim B \backsim 0$
$A \backsim B$	$(A \vee B')(A' \vee B)$	$[(A+B)']$	$(A \supset B)(B \supset A)$	$1+A+B$	
A'		$1-A$	$A \supset 0$	$1+A$	$A \backsim 0$

[1]) Квазиопределения в квадратных скобках не приводятся полностью, а требуют ссылки на другие строки в том же столбце.

Теорема 8. *В булевой алгебре отрицание является дуальным автоморфизмом. Следующие формулы являются схемами теорем*:

$$(A \wedge B)' = A' \vee B' \tag{18}$$
$$(A \vee B)' = A' \wedge B' \tag{19}$$

справедливы также квазиопределения

$$A \wedge B = (A' \vee B')' \tag{20}$$
$$A \vee B = (A' \wedge B')' \tag{21}$$

Доказательство. Формулы (18)—(21) немедленно получаются методами современной алгебры из свойств автоморфизма. Их можно также проверить по теореме 6. Пожалуй, еще быстрее получить их с помощью перехода к булеву кольцу:

$$A' \vee B' = (1+A)+(1+B)+(1+A)(1+B) =$$
$$= A+B+1+A+B+AB = 1+AB = (AB)'$$
$$A' \wedge B' = (1+A)(1+B) = 1+A+B+AB = (A \vee B)'$$

Конечно, (20) и (21) следуют из (18) и (19), если взять отрицания обеих частей и использовать (5).

[1]) Этот термин общепринят, несмотря на его историческую неточность. Согласно Бохенскому [FLg], эти формулы были известны в средние века.

Следствие 8.1. *В булевой алгебре из любого оба A можно образовать об, равный A', образуя вначале об A^D, соответствующий A в силу двойственности (т. е. меняя местами $\wedge$ и $\vee$, 0 и 1), а затем заменяя в A^D каждый атом E (отличный от 0 и 1) на E'.*

Это устанавливается структурной индукцией, если продвигать отрицание внутрь посредством (18) и (19).

Приведенные выше теорема и следствие показывают, что принцип двойственности выполняется для булевой алгебры в более сильном смысле, чем для произвольной структуры. В последнем случае если Γ — элементарная теорема и Γ^D — теорема, двойственная по отношению к Γ, то $\Gamma \to \Gamma^D$ является допустимым правилом; в булевой же алгебре можно перейти от Γ к Γ^D, если разрешить подстановку вместо неопределенных. Действительно, пусть Γ имеет вид

$$A \leqslant B$$

Тогда вследствие (8) имеем

$$B' \leqslant A'$$

В силу следствия 8.1 можно превратить A', B' соответственно в A^D, B^D подстановками неопределенных и, возможно, применениями (5).

Следующая теорема показывает, что все операции мсжно определить через $\supset$ и отрицание.

Теорема 9 [1]). *Квазиопределения*

$$A \wedge B = (A \supset B')' \tag{22}$$

$$A \vee B = A \supset B. \supset B \tag{23}$$

справедливы в EK, *а второе — даже в* EC.

Доказательство получаем из следующих теорем:

$$A \wedge B \Vdash \neg (A \supset \neg B)$$

$$\neg (A \supset \neg B) \Vdash A \wedge B$$

$$A \vee B \Vdash A \supset B. \supset B$$

$$A \supset B. \supset B \Vdash A \vee B$$

справедливых в LM, LK, LA и LC соответственно.

Эти теоремы показывают, что в HK все операции квазиопределимы через отрицание и любую из трех бинарных операций $\wedge$, $\vee$, $\supset$. Можно определить все эти операции через одну бинарную операцию. Это показывает следующая

[1]) [LLA], теорема IV.10.

Теорема 10. *Если*

$$A \mid B \equiv (A \wedge B)' \tag{24}$$

то справедливы следующие квазиопределения в терминах этой операции как единственной исходной операции:

$$\begin{aligned} A' &= A \mid A \\ A \wedge B &= (A \mid B)' \\ A \vee B &= A' \mid B' \\ A \supset B &= A \mid B' \end{aligned} \tag{25}$$

Доказательство. См. теорему 6.

Теорема 10 приписывается Шефферу [SFI], и новая операция называется "*штрихом Шеффера*". Недавно обнаружили, что эта идея встречается в работе Пирса, но это, вероятно, не было известно, когда появилась работа Шеффера (см. Чёрч [IML_2], примечание 207). Некоторые логики считают эту идею большим открытием (см., например, введение к книге Уайтхеда и Рассела [$PMt.I_2$]), а другие — просто любопытным фактом (например, Гильберт и Аккерман [GZT], § 2).

Существование квазиопределений указывает на возможность формулировать алгебру через меньшее число первоначальных операций, а остальные операции вводить квазиопределениями. Существует очень много таких формулировок, и здесь невозможно рассмотреть их все.

То, что возможна такая формулировка в терминах лишь P и N, можно видеть так. Схемы аксиом для Λ и V в HK остаются тавтологичными, когда операции заменяются их квазиопределяющими по (22) и (23). В силу теоремы о свойстве отделения получающиеся схемы выводимы в той части HC, которая содержит только импликацию. Следовательно, нужно присоединить к HC схемы аксиом типа, рассмотренного в разд. C7. Как показано там, можно делать такие добавления к абсолютной импликации. Самая первая ассерторическая формулировка — формулировка Фреге — носила именно такой характер. У него было шесть схем аксиом: три из них — из которых одна была лишней — относились к абсолютной импликации, и к этим трем аксиомам были добавлены NB′, NI′ и (13) разд. C. Позднее число этих схем аксиом было уменьшено. Система из трех схем аксиом образуется присоединением к PK, PS схемы

$$\vdash \neg A \supset \neg B. \supset .B \supset A$$

Другой подобной системой является система Лукасевича, состоящая из PB′ и

$$\vdash \neg A \supset A . \supset A$$
$$\vdash A \supset . \neg A \supset B$$

Известны системы с одной схемой аксиом.

Формулировка Уайтхеда и Рассела [PMt] была построена в терминах V и N. После устранения излишних схем аксиом (ср. замечание в разд. 4S1) мы получаем следующие схемы аксиом (см. также разд. 4S1):

Taut $\quad \vdash A \supset . A \vee A$

Perm $\quad \vdash A \vee B . \supset . B \vee A$

Simp $\quad \vdash A \supset . A \vee B$

Sum $\quad \vdash A \supset B . \supset : C \vee A . \supset . C \vee B$

Вместе с квазиопределениями (11) и (20) этих схем достаточно для всего НК. Заметим, что это дает восемь схем аксиом; кроме того, необходимо установить ТЗ. Структурная формулировка в терминах V и N дана у Хантингтона [SIP], [NSP]; здесь равенство и ТЗ считаются данными.

Схемы [1])

$$\begin{aligned} &\vdash A \supset AA \\ &\vdash AB \supset A \\ &\vdash (AB)' \supset (BA)' \\ &\vdash A \supset B . \supset : (CB)' \supset (CA)' \end{aligned} \tag{26}$$

с квазиопределением (21) и

$$A \supset B = (AB')' \tag{27}$$

образуют множество аксиом в терминах Λ и N. Первая формулировка этого вида дана Собоциньским. Россер ([LMt], гл. 4) вносит в четвертую аксиому некоторое видоизменение, с помощью которого он избавляется от третьей. О других формулировках этого вида см. Порт [SCP].

3. Конечные интерпретации. В предыдущем разд. 2 мы занимались формулировками булевой алгебры вообще. Теперь мы займемся регулярными интерпретациями (разд. 5A4) булевых алгебр; это вызовет у нас интерес к булевым алгебрам более специальной природы.

[1]) [LLA], стр. 114.

Здесь возникает некоторый конфликт между терминологией, которой мы пользовались до сих пор, и обычной терминологией для булевой алгебры. Нам придется поэтому немного остановиться на разъяснении терминологических вопросов.

В разд. 5A4 было введено понятие "регулярной интерпретации", а в связи с ним — понятие "элемента". Важно не смешивать это понятие элемента с понятием оба. Так, если E_1 и E_2 — первоначальные обы, то обы $E_1 \supset E_2$, $E_1' \vee E_2$, $E_2 \vee E_1'$, $E_2' \supset \supset E_1'$, $(E_1 E_2')'$ составляют пять различных обов, но все они соответствуют одному и тому же элементу. Тем не менее допустимо (ср. разд. 5A4) использовать один и тот же символ для элемента и для оба, с ним связанного, и говорить, что вышеприведенные пять обов представляют собой один и тот же элемент; когда мы делаем это и говорим, например, "элемент $E_1 \supset E_2$", тогда то, что́ мы должны сказать, в равной степени применимо и к $E_1' \vee E_2$, но когда мы говорим "об $E_1 \supset E_2$", это будет не так.

В разд. 2C3 для первоначального оба об-системы употреблялся термин "атом". Этот термин был уместным, потому что там обы предшествовали друг другу в порядке построения. Это употребление, однако, не согласуется с обычным словоупотреблением для булевых алгебр. В булевой алгебре атом — это ненулевой элемент, которому не предшествует (в смысле упорядочения $\leqslant$ этой алгебры) никакой элемент, отличный от 0 и его самого. Для того чтобы избежать употребления термина "атом" в двух смыслах, я буду, следуя Биркгофу [LTh], в смысле 'элемента-атома' использовать слово 'точка'. Поэтому если инфикс '$\neq$' означает, что связанные им элементы (содержательно) различны, то *точка* — это такой элемент U, что

$$U \neq 0 \tag{28a}$$

и для всех A

$$A \neq 0 \,\&\, A \leqslant U \rightarrow A = U \tag{28b}$$

Контрточка булевой алгебры определяется теперь как элемент, двойственный точке, т. е. это такой элемент U, что

$$U \neq 1 \tag{29}$$

и для всех A

$$U \leqslant A \,\&\, A \neq U \rightarrow A = 1 \tag{30}$$

Конечная булева алгебра — это булева алгебра с конечным числом элементов.

В конечной булевой алгебре каждый ненулевой элемент содержит по крайней мере одну точку и является суммой всех точек, которые он содержит. В самом деле, пусть A — элемент

Если среди конечного числа элементов, отличных от A и 0, нет элементов $\leqslant A$, то A — точка. В противном случае пусть $A_1 \leqslant A$, $A_1 \neq A$, $A_1 \neq 0$. Тогда начнем снова с A_1 в роли A и т. д. В конце концов мы должны прийти к точке. Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — все точки U_i, такие, что $U_i \leqslant A$. Пусть

$$B \equiv U_1 \vee U_2 \vee \ldots \vee U_n$$

Тогда

$$B \leqslant A$$

Следовательно,

$$AB = B$$

Если $A - B \neq 0$, то $A - B$ и, следовательно, A будут содержать точку, отличную от $U_1, \ldots, U_n$, что невозможно. Следовательно,

$$A - B = 0$$

т. е.

$$A = B$$

Поэтому элемент может быть отождествлен с множеством точек, которые он содержит. Этим доказана следующая

Т е о р е м а 11. *В конечной булевой алгебре каждый ненулевой элемент содержит по меньшей мере одну точку и каждый элемент является суммой всех точек, включенных* [1]) *в него. Такая алгебра изоморфна системе, элементы которой представляют собой всевозможные множества ее точек; если число точек равно* m, *то число элементов будет* 2^m.

Частным случаем такой конечной булевой алгебры является случай $m = 1$. В этом случае единица сама является точкой и алгебра состоит из двух элементов: 0 и 1. Истинность в такой интерпретации соответствует истинности относительно двузначных таблиц.

Теорема 11 является частным случаем "теоремы Стоуна о представлении", говорящей, что каждая булева алгебра изоморфна некоторому полю множеств. В принятой здесь терминологии это означает, что у каждой булевой алгебры есть интерпретация, элементы которой представляют собой подмножества некоторого фиксированного множества, произведение и сумма являются соответственно пересечением и объединением множеств, а отрицание — это дополнение по отношению к этому фиксированному множеству. Теорема 11 — это тот частный случай, когда фиксированное множество конечно. Доказательство общей теоремы требует трансфинитных методов и выходит поэтому за рамки этой книги. Конечно, термин 'представление' имеет здесь совсем другое значение, нежели в разд. 2С.

[1]) Здесь отношение $\leqslant$ понимается как включение, так что, например, '$A \leqslant B$' следует читать "A включено в B".

4. Разложения и базисы. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — все точки булевой алгебры L, то по теореме 11 для каждого элемента A существуют такие $a_1, \ldots, a_n$, где a_i есть 1, если $U_i \leqslant A$, и a_i есть 0 в противном случае, что

$$A = a_1 U_1 \vee \ldots \vee a_n U_n \tag{31}$$

(31) удобно записывать в виде

$$a = \bigvee_{i=1}^{n} a_i U_i$$

Это частный случай следующей ситуации. Пусть L — булева алгебра и K — подалгебра L, т. е. элементы из K являются некоторым подмножеством элементов из L и комбинируются с помощью операций таким же образом. Мы будем употреблять строчные буквы для обов и элементов из K. Тогда множество L-элементов $U_1, \ldots, U_n$ будет называться *базисом* L относительно K, если выполнены следующие условия:

a. Для каждого A из L существуют $a_1, \ldots, a_n$ из K, такие, что выполняется (31).

b. Для $i \neq j$ $\quad U_i U_j = 0$.

c. Если a содержится в K и $aU_i = 0$, то $a = 0$.

Эти условия удовлетворяются, если $U_1, \ldots, U_n$ — точки и $a_1, \ldots, a_n$ равны либо 0, либо 1.

Другая возможность, которая будет рассмотрена позднее, состоит в том, что L является расширением K, полученным в результате присоединения некоторых неопределенных, а U_i — некоторые комбинации этих неопределенных.

Ситуация, двойственная этой, иногда представляет некоторый интерес. В этом случае множества $U_1, \ldots, U_n$ будут называться *контрбазисом* L относительно K; условиями, аналогичными *a* — *c*, будут:

a'. Для каждого A из L существуют $a_1, \ldots, a_n$ из K, такие, что

$$A = (a_1 \vee U_1)(a_2 \vee U_2)\ldots(a_n \vee U_n)\left(\equiv \bigwedge_{i=1}^{n} (a_i \vee U_i)\right) \tag{32}$$

b'. Для $i \neq j$ $\quad U_i \vee U_j = 1$.

c'. Если a содержится в K и $a \vee U_i = 1$, то $a = 1$.

Правая часть (31) будет называться *дизъюнктивным разложением* A относительно базиса $U_1, \ldots, U_n$. Отдельные $a_i U_i$ будут называться *членами* разложения, а a_i — коэффициентами. Двойственное разложение (32) будет называться *конъюнктивным разложением* A относительно $U_1, \ldots, U_n$, при этом "члены" и "коэффициенты" определяются аналогично.

Теорема 12. *Пусть* L — *булева алгебра*, K — *подалгебра* L *и* $U_1, \ldots, U_n$ — *базис* L *относительно* K. *Тогда коэффициенты, удовлетворяющие* (31), *определяются однозначно для любого данного* A, *и для каждого* i *соответствие*

$$A \sim a_i \tag{33}$$

является гомоморфизмом.

Доказательство. Пусть выполняется (31), и пусть

$$B = \bigvee_{i=1}^{n} b_i U_i \qquad C = \bigvee_{i=1}^{n} c_i U_i$$

Предположим теперь, что $A = B$; тогда

$$A + B = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i + b_i) U_i = 0$$

Следовательно,

$$(a_i + b_i) U_i \leqslant A + B = 0$$

Поэтому ввиду условия c

$$a_i + b_i = 0$$
$$a_i = b_i$$

Это показывает, что a_i (как элементы) единственны.

Теперь допустим, что

$$C = A \vee B$$

Тогда ввиду дистрибутивного закона и только что установленной единственности

$$c_i = a_i \vee b_i$$

Следовательно, в сопоставлении с (33)

$$A \vee B \sim a_i \vee b_i \tag{34}$$

Теперь пусть

$$C = AB$$

Тогда

$$C = \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i U_i\right)\left(\bigvee_{j=1}^{n} b_j U_j\right)$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n} a_i b_i U_i$$

ввиду дистрибутивного закона и условия b. Следовательно, в силу единственности

$$c_i = a_i b_i$$

и поэтому в соответствии (33)

$$AB \sim a_i b_i \tag{35}$$

Теперь очевидно, что в соответствии (33)

$$0 \sim 0 \qquad 1 \sim 1$$

поскольку для каждого A имеем

$$0U_1 \vee \ldots \vee 0U_n \leqslant A \leqslant U_1 \vee \ldots \vee U_n$$

Следовательно, если

$$B = A'$$

то

$$AB = 0 \qquad A \vee B = 1$$

Из того, что мы уже получили, следует, что

$$a_i b_i = 0 \qquad a_i \vee b_i = 1$$

Поэтому

$$b_i = a_i'$$

а потому — в (33)—

$$A' \sim a_i' \tag{36}$$

Из (34), (35), (36) и единственности следует, что соответствие (33) является гомоморфизмом, что и требовалось доказать.

Следствие 12.1. *Если* K — *конечная булева алгебра с* k *элементами, то* L — *конечная булева алгебра с* k^n *элементами.*

Частным случаем понятий базиса и контрбазиса является случай, когда L образуется присоединением к K некоторых неопределенных $E_1, \ldots, E_m$. Рассмотрим 2^m элементов

$$E_1^{e_1} E_2^{e_2} \ldots E_m^{em} \tag{37}$$

где каждое e_k равно 0 или 1, и временно примем соглашение о том, что для любого A

$$A^0 \equiv A' \qquad A^1 \equiv A \tag{37a}$$

Мы увидим, что эти 2^m элементов образуют базис. Действительно, условия b и c, очевидно, удовлетворяются. Если задано любое A из L, то мы можем привести его к виду, указанному в правой части (31), следующим процессом:

1. С помощью квазиопределений устранить все операции, отличные от умножения, сложения и отрицания.

2. С помощью (18) и (19) переносить отрицания внутрь до тех пор, пока отрицаемые компоненты не будут элементами из K или же не будут содержать операций сложения и умножения.

3. Устранить кратные отрицания с помощью утверждения (5).

4. Применять дистрибутивный закон до тех пор, пока мы не получим сумму членов, каждый из которых представляет собой произведение элементов, либо принадлежащих K, либо являющихся некоторым E_k или же E_k'.

5. Вычеркнуть члены, которые для некоторого k содержат как E_k, так и E_k'. [Они равны 0 ввиду (1).]

6. Если член не содержит ни E_i, ни E_i', то умножить его на $E_i \vee E_i'$ [что равно 1 ввиду (2)] и продолжать, как раньше.

В конце шага 6 каждый член будет представлять собой произведение элементов, каждый из которых является либо обом из K, либо некоторым E_k, либо некоторым E_k' и таков, что для каждого k имеется одно и только одно из E_k, E_k'. Тогда нужно лишь, пользуясь дистрибутивным законом, собрать вместе все члены с одними и теми же сомножителями из числа E, для того чтобы получить об вида, фигурирующего в правой части (31). (Если какие-то члены отсутствуют, то соответствующее a_i есть 0.)

Получающееся разложение называют *дизъюнктивной нормальной формой* A относительно $E_1, \ldots, E_m$. Двойственное ему разложение называется *конъюнктивной нормальной формой*.

Алгебра L, образованная описанным выше способом, называется *свободным (булевым) расширением* K *с* m *порождающими элементами* $E_1, \ldots, E_m$; если K состоит только из 0 и 1, то L является *свободной булевой алгеброй с* m *порождающими элементами*. Элементы из L можно мыслить как функции от "переменных" $E_1, \ldots, E_m$ со значениями из множества 0, 1. Если $f(E_1, \ldots, E_m)$ — такая функция, то коэффициент при (37) в разложении (31), где $A \equiv f(E_1, \ldots, E_m)$, равен $f(e_1, \ldots, e_m)$, ибо для всех k подстановка e_k вместо E_k обращает (37) в 1, а все другие члены разложения (31) — в 0. Этим доказана следующая

Теорема 13. *Пусть* L *— свободное расширение булевой алгебры* K *относительно неопределенных* $E_1, \ldots, E_m$. *Тогда* 2^m *обов* (37) *образуют базис для* L *относительно* K *и коэффициент при обе* (37) *в разложении* (31) *является результатом подстановки* e_k *вместо* E_k *в* A *для всех* $k = 1, 2, \ldots, m$. *Если* K *— конечная булева алгебра с* k *элементами, то* L *— конечная булева алгебра с* k^{2^m} *элементами.*

Следствие 13.1. *Число элементов в свободной булевой алгебре с* m *порождающими элементами равно* 2^{2^m}.

Поскольку $f(e_1, \ldots, e_m)$ в точности представляют собой значения при двузначной оценке A, согласно которой каждому E_k приписывается значение e_k, то теорема о полноте — теорема 6 — может быть получена как следствие теоремы 13. Более сильным видом теоремы о полноте является следующая

Теорема 14. *Пусть* $A = f(E_1, \ldots, E_m)$ *таково, что* A *не является тавтологией относительно двузначных таблиц. Тогда если присоединить*

$$\vdash f(x_1, \ldots, x_m) \tag{38}$$

к НК *в качестве новой схемы аксиом, причем* 'x_1', ..., 'x_m' *представляют собой* U*-переменные для произвольных обов, то каждый об* B *будет выводим в полученной системе.*

Доказательство. Пусть (32) — конъюнктивная нормальная форма для A, где для каждого i существуют $e_1, \ldots, e_m$, такие, что

$$U_i = E_1^{e_1} \vee E_2^{e_2} \vee \ldots \vee E_m^{e_m} \tag{39}$$

и по теореме, двойственной [1]) теореме 13,

$$a_i = f(e_1, \ldots, e_m) \tag{40}$$

Тогда имеем для каждого $i = 1, 2, \ldots, n = 2^m$,

$$A \leqslant a_i \vee U_i \tag{41}$$

Поскольку A не является тавтологией, мы можем выбрать i так, что

$$a_i = 0$$

Тогда (41) в силу (39) и (40) превращается в

$$A \leqslant E_1^{e_1} \vee E_2^{e_2} \vee \ldots \vee E_m^{e_m}$$

Поскольку $E_1, \ldots, E_m$ являются неопределенными, мы имеем в качестве схемы теорем в НК

$$\vdash f(x_1, \ldots, x_m) \supset x_1^{e_1} \vee x_2^{e_2} \vee \ldots \vee x_m^{e_m} \tag{42}$$

Следовательно, ввиду (38) и modus ponens мы имеем в расширении

$$\vdash x_1^{e_1} \vee x_2^{e_2} \vee \ldots \vee x_m^{e_m}$$

[1]) При переходе к двойственной теореме в (37а) необходимо поменять местами показатели 0 и 1.

Здесь положим $x_k \equiv B^{e_k}$; тогда с помощью повторных применений VW и (5) получим $\vdash B$, что и требовалось доказать.

Итак, если НК формулируется с правилом подстановки, то каждое недоказуемое элементарное утверждение абсурдно. Правило подстановки здесь, однако, существенно.

5. Булевы уравнения. Для математиков XIX в., занимавшихся алгеброй логики, наиболее важной проблемой было развитие технических приемов оперирования с элементарными утверждениями булевой алгебры, подобных тем, которые имеются в элементарной алгебре. Здесь будет дан краткий набросок этих технических приемов.

Начнем с того, что любое элементарное утверждение булевой алгебры можно выразить в любом из следующих видов:

$$A=0,\ A=1,\ A=B,\ A\leqslant B,\ A=M$$

где M — фиксированный об, заданный заранее, а A, B — произвольные обы. В действительности первый, второй и пятый из этих видов являются частными случаями третьего; третий и четвертый виды можно выразить в любом из первых четырех видов с помощью эквивалентностей

$$A=B \rightleftarrows A+B=0 \rightleftarrows A\sim B=1 \rightleftarrows A\vee B\leqslant AB \tag{43}$$

$$A\leqslant B \rightleftarrows AB'=0 \rightleftarrows A'\vee B=1 \rightleftarrows A=AB \rightleftarrows B=A\vee B \tag{44}$$

тогда как для первого и второго видов справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} &A=0 \rightleftarrows A'=1 \rightleftarrows A\leqslant 0 \rightleftarrows A+M=M \text{ [1]}\\ &A=1 \rightleftarrows A'=0 \rightleftarrows 1\leqslant A \end{aligned} \tag{45}$$

Любой из этих пяти видов можно взять в качестве основного; аналогия с обычной алгеброй побуждает математиков, как правило, отдавать предпочтение первому.

Далее, любая система уравнений равносильна одному уравнению в силу эквивалентностей

$$A_1=0\,\&\,A_2=0\,\&\,\ldots\,\&\,A_n=0 \rightleftarrows A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n=0 \tag{46}$$

Предположим теперь, что у нас есть уравнение вида

$$A\equiv f(x)=0 \tag{47}$$

[1]) Эти соотношения известны под именем 'закона форм'.

где $f(x)$ — об, построенный из x и некоторых постоянных. Пусть эти постоянные представляют собой обы в булевой алгебре K. Тогда A является обом в свободном расширении L алгебры K с единственным порождающим элементом x. Если мы представим A в нормальной форме, то (47) превращается в

$$ax\vee bx'=0 \tag{48}$$

В силу (46) и (44) равенство (48) эквивалентно двойному неравенству

$$b\leqslant x\leqslant a' \tag{49}$$

Следовательно, (47) будет иметь решение в точности тогда, когда

$$ab=0$$

причем тогда его решением будет любое x, удовлетворяющее (49). Решение можно выразить в виде

$$x=b\vee ta'=b+ta'b' \tag{50}$$

где t — произвольный элемент из K.

Другой метод решения булевых уравнений исходит из равенств

$$ax\vee bx'=ax+b(1+x)=(a+b)x+b$$

Таким образом, уравнение (48) принимает вид

$$cx+b=0$$

или

$$cx=b \tag{51}$$

Следовательно, в силу ΛK′, P_1

$$b\leqslant x\leqslant c\supset b=b\vee c'=b\vee a'b' \tag{52}$$

где последний шаг мы производим, беря $c=a+b=ab'\vee a'b$, $c'=ab\vee a'b'$ и превращая ab в b путем поглощения. Наиболее общий вид x, удовлетворяющего (52), дается формулой (50); оно удовлетворяет (51) и, следовательно, (48).

Предположим теперь, что мы имеем уравнение

$$A\equiv f(x_1,\ \ldots,\ x_m)=0 \tag{53}$$

где $f(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ — конструкция из обов, принадлежащих K, и неопределенных $x_1,\ \ldots,\ x_m$. Мы можем предположить, что A находится в нормальной форме в свободном расширении K относительно $x_1,\ \ldots,\ x_m$ как порождающих элементов. Рассмотрим теперь два следующих вопроса:

1. (Проблема исключения.) Какие условия, наложенные на коэффициенты, необходимы и достаточны для того, чтобы решение

существовало, т. е. для того, чтобы имелись элементы из K, которые, будучи подставленными вместо $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяют (53)?

2. (Проблема явного представления решений.) Предположим, что выполняются условия для исключения. Как можно тогда представить решения в виде явной формулы, зависящей от некоторых параметров?

Решение обеих этих проблем для $m = 1$ только что было дано. Для $m > 1$ можно, конечно, решить их постепенно, для одной переменной на каждом шаге. Это утомительный процесс, по крайней мере что касается задачи 2, в чем можно удостовериться, подробно проводя рассуждения в случае $m = 2$; более того, результаты совершенно различны по внешнему виду в зависимости от порядка, в котором производится разрешение для переменных. Мы не будем здесь заниматься далее проблемой 2.

Однако можно легко показать индукцией по m, что общим решением проблемы 1 будет

$$\alpha = 0 \tag{54}$$

где α — произведение всех коэффициентов в дизъюнктивной нормальной форме для A. Действительно, это было показано для $m = 1$. Допустим, что у нас имеются $m + 1$ неизвестных $x_1, \ldots, x_m, y$ и что для $n = 2^m$ (где точки U_i являются базисом (37) с $E_k \equiv x_k$)

$$A = \bigvee_{i=1}^{n} a_i U_i \qquad B = \bigvee_{i=1}^{n} b_i U_i$$

Тогда любое уравнение (53) для $m+1$ будет иметь вид

$$Ay + By' = 0 \tag{55}$$

Оно будет иметь решение для y в терминах $x_1, \ldots, x_m$ тогда и только тогда, когда

$$AB = 0$$

По теореме 12 это эквивалентно

$$\bigvee_{i=1}^{m} a_i b_i U_i = 0$$

По индуктивному предположению это возможно тогда и только тогда, когда

$$a_1 a_2 \ldots a_m b_1 b_2 \ldots b_m = 0$$

Это является критерием (54) для уравнения (55).

Некоторым обобщением этого результата является следующая

Теорема 15. *Пусть*

$$A \equiv f(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i U_i$$

где $n = 2^m$, представляет собой об в нормальной форме, принадлежащий свободному расширению K *с m порождающими элементами $x_1, \ldots, x_m$. Пусть α — произведение и β — сумма всех коэффициентов из A. Тогда, для того чтобы уравнение*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = t \tag{56}$$

имело решения в K, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{57}$$

Доказательство. Уравнение (56) в силу (45) эквивалентно

$$A + t = 0 \tag{58}$$

Пусть

$$A + t = \bigvee_{i=1}^{n} c_i U_i$$

где правая часть является дизъюнктивной нормальной формой для $A + t$. Пусть $\gamma \equiv c_1 c_2 \ldots c_n$. Тогда ввиду свойства ($a$) для (58) необходимым и достаточным условием разрешимости (58) является

$$\gamma = 0 \tag{59}$$

Но в силу дистрибутивного закона и теоремы 12

$$c_i = a_i + t = a_i' t \vee a_i t'$$

Пусть y — дополнительная неопределенная, и пусть L_y — свободное расширение K, образованное присоединением y к K. Пусть

$$C_i = a_i' y + a_i y'$$

Тогда ввиду теорем 12 (относительно L_y) и 8

$$C_1 C_2 \ldots C_n = \beta' y + \alpha y'$$

и, следовательно, подставляя t вместо y, имеем

$$\gamma = \beta' t + \alpha t'$$

Поэтому условие (59) превращается в

$$\beta' t + \alpha t' = 0$$

Для этого в силу рассуждений, относящихся к (48), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (57), что и требовалось доказать.

В этом разделе изложена та часть булевой техники, которая представляет общелогический интерес. Рассмотрение специальных вопросов следует искать в другом месте.

Упражнения

См. также Биркгоф [LTh$_2$], гл. 10.

1. Пусть L — структура с дополнениями, такая, что если C — любое дополнение B, то

$$AB = 0 \longrightarrow A \leqslant C$$

Показать, что L является булевой алгеброй. (Эта формулировка совпадает по существу со второй из аксиоматик Хантингтона [SIP]; ср. рассмотрение в разд. 4S1.)

2. Показать, что схемы аксиом из книги Уайтхеда и Рассела [PMt], приведенные в конце разд. 2, в комбинации с обеими частями ($\leqslant$ и $\geqslant$) квазиопределений (11) и (20) достаточны для НК, но если опустить любую половину (11), то нельзя будет вывести никакой элементарной теоремы, в которой импликация является единственной операцией. (Предложено моим коллегой У. Говардом.)

3. Показать, что схемы в книге Уайтхеда и Рассела (см. упражнение 2) допускают матричную интерпретацию

$\vee$	0	1	2	$(\neg)$
0	0	1	2	1
1	1	1	1	0
2	2	1	2	1

в которой 1 является единственным выделенным значением. Как согласовать это с теоремами разд. 1 и 2 и разд. 5A1? (Хантингтон [NSI], стр. 297.)

4. Четвертая система постулатов Хантингтона для булевой алгебры содержит схемы аксиом

$$A \vee B = B \vee A$$
$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$
$$(A' \vee B')' \vee (A' \vee B)' = A$$

Показать, что с подходящими добавлениями (так, чтобы получить свойства равенства, включая ТЗ и квазиопределения) эти схемы характеризуют булеву алгебру. (Хантингтон [NSI]. По поводу избыточности его постулата 4.5 см. его работу [BAC].)

5. Показать, что схемы аксиом (26) и квазиопределения (21) и (27) действительно достаточны для НК. (Ср. Россер [LMt], гл. 4.)

6. Показать, что схемы

$$A = AB \rightleftarrows AB' = CC'$$
$$(AB)\,C = (BC)\,A$$

вместе со свойствами равенства и подходящими квазиопределениями порождают булеву алгебру. (Бирн [TBF].)

7. Показать, что система, образованная присоединением к НА квазиопределений (22) и (23) и схем

$$\vdash \neg A \supset . A \supset B$$
$$\vdash \neg A \supset B . \supset . A \supset B . \supset B$$

достаточна для НК. (Порт [DSS]; система взята из работы Тарского [FBM$_1$].)

8. Предполагая, что $b \leqslant a$, показать, что двойное неравенство

$$b \leqslant x \leqslant a$$

эквивалентно каждому из следующих равенств:

$$a'x \vee bx' = 0$$
$$a'x + bx' = 0$$
$$x = ax + bx'$$
$$(a' + b)\,x + b = 0$$
$$x = b \vee ta \quad \text{для некоторого } t$$
$$x = at + bt' \quad \text{для некоторого } t$$

([LLA].)

9. Показать, что в каждом множестве схем аксиом для НК имеются по меньшей мере три различные U-переменные для высказываний. (В работе Лукасевича и Тарского ([UAK], теорема 15) эту теорему связывают с именем Вайсберга; см. Тарский ([LSM], стр. 47]), где даны ссылки на доказательства. Наиболее доступное доказательство есть у Дайамонда и Мак-Кинси [ASA].)

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Исторические и библиографические комментарии. Настоящая глава представляет собой распространение общей программы, начатой в гл. 5, на отрицание. По поводу комментариев и ссылок, относящихся к программе как целому, см. разд. 5S1 и 1S5. При-

чины, по которым отрицание так решительно отделено от позитивных операций, приведены там и в разд. A1 настоящей главы. Эта глава основана на [TFD], гл. 4, и [LLA], гл. 5.

Возможность определения двух различных видов отрицания, соответствующих абсурдности и опровержимости, непосредственно следует из семантического подхода. Это различие уже имелось в [PFD]. Термин 'абсурдность' был взят у интуиционистов, поскольку его формальные свойства совпадают со свойствами, постулированными для интуиционистского отрицания, например у Гейтинга [FRI]. Термин 'опровержимость' взят у Карнапа [ISm], определявшего этот термин способом, очень похожим на приведенный здесь (в своей работе [LSL] Карнап использует этот термин в ином смысле); то, что здесь названо "контраксиомами", в работе [ISm] называлось "непосредственно опровержимыми предложениями". Сходное понятие, называемое "отвержением", появляется в работе Лукасевича [ASS]; ранее оно появилось в его работе [SAr]. Можно почти наверняка сказать, что не существовало никакой связи между любым из этих подходов и подходом работы [PFD]. Есть ли какая-нибудь связь между подходами Карнапа и Лукасевича, я не знаю. Понятие абсурдности встречается в статье Поста [IGT].

Из пяти типов формализованного отрицания, рассмотренных здесь, J- и K-типы появились в статье Генцена [ULS]; все остальные, включая позитивные A- и C-типы гл. 5, были введены позднее как видоизменения. K-тип развился из работ логиков, использовавших традиционный подход (разд. 5S1). J-тип представлял интуиционистскую логику, изложение которой в работах Гейтинга [FRI] и Гливенко [PLB] появилось лишь недавно. Возможно, тот факт, что диссертация Генцена [ULS] написана под руководством Вейля, оказал некоторое влияние на то, что Генцен обратил свое внимание на интуиционистскую систему. M-тип был темой работы Иоганссона [MKR]; частично его работу предвосхитил Колмогоров [ПТN], но я знаю работу Колмогорова только из замечаний о ней в работах Чёрча [IML$_2$] и Фейса [MRD]. Возможно, мотивировкой минимальной логики было чувство неудовлетворенности в отношении efq [=(6) разд. C], но Иоганссон явно упоминает то, что минимальное отрицание может быть определено как свойство влечь фиксированное, но совершенно произвольное (т. е. неопределенное) высказывание F. (Несколько подобных замечаний высказано в работе Моисила [RAL].) Иоганссон упоминал также систему D (не называя ее так) и сделал предположение о том, что эта система образует систему "строгой импликации", но указанная система подробно не изучалась вплоть до появления книги [TFD], где семантический подход помог выяснить, что система D могла бы быть подходящей при обстоятельствах, при которых

мы желаем иметь импликацию, представляющую выводимость в том же смысле, что и в LA, и все же являющуюся платонистской вплоть до допущения закона исключенного третьего. E-тип был предложен Бернайсом в реферате на мои работы [SLD] и [DNF], а некоторые свойства этого типа изучались с точки зрения его H-формулировки в статье Кангера [NPP]; обстоятельное его изучение с позиций L-формулировки было предпринято Крипке [SLE]. В своих письмах Крипке упоминает ряд других систем промежуточного характера; они остаются на будущее (см. его резюме [DCn], появившееся в период работы над этой книгой).

В отношении сингулярной и мультиплярной формулировок ситуация для LJ уже рассматривалась в разд. 5S1. Для других систем вопрос в течение некоторого времени находился под сомнением, и мы шли по ложному пути (например, в [SLD], разд. 3). Теперь кажется ясным, что сингулярные системы более естественны с точки зрения семантики; мультиплярные системы, более естественные с точки зрения удобства применения, должны обосновываться путем перевода в сингулярные системы или же с помощью вспомогательной интерпретации. Результаты, полученные в этой книге относительно мультиплярных систем, отличных от LK, по большей части новы, но их предвосхитила японская работа о системе LJ$_m$, указанная в разд. 5S1, и работа Крипке [DCn].

Идея определения отрицания через импликацию и F уходит далеко в историю нашего предмета. Я не знаю ее происхождения. Она использовалась в статье Рассела 1906 г. (упоминаемой Чёрчем [IML$_2$], стр. 401 русского изд.) и неявно участвовала в генценовской формулировке его натуральных правил (здесь T-правила; см. разд. C1), но Генцен не пользовался ею в своей L-формулировке. Вайсберг в работах [MLB] и [UAK] изучал H-системы, основанные на импликации и F (он обозначал его через 'O'). Идея определить отрицание таким путем использовалась в [PFD], но не использовалась для L-правил в [TFD] из-за ряда технических трудностей. Эквивалентность F- и N-формулировок для L-формулировок была впервые показана в [DNF]. Настоящая трактовка содержит ряд улучшений по сравнению с [DNF]; они были разработаны весной 1960 г.

Результаты относительно T- и H-систем в разд. C взяты из [TFD] и [LLA]. H-формулировки происходят по преимуществу из последней работы. Ссылки на источники даны в обеих публикациях. Замечания, приведенные здесь, дополняют эти ссылки.

Интуиционистская система HJ была сформулирована в работе Гейтинга [FRI]; формулировки, предшествующие ей,—у Гливенко [PLB], Колмогорова [ПТN] и т. д. (см. разд. 4S2) — были несколько фрагментарными. (Ссылки на позитивную часть формулировки

Гейтинга в разд. 5S1 дают также некоторую информацию про отрицание.) В формулировке Гейтинга схемы для отрицания были отделенными. Там были две такие схемы — NS и efq. Иоганссон просто выбросил efq в своей формулировке НМ. Формулировка НК в книге Гильберта и Бернайса [GLM] имела три исходные схемы аксиом для отрицания: NB′, NI′ и $\neg\neg A \supset A$; оказалось, что выбрасывание последней схемы из этого списка дает формулировку НМ. В 1938 г. Шольц выдвинул проблему — сформулировать НК так, чтобы: (1) имелись ровно три исходные схемы для отрицания, такие, что в сочетании с НА первая из них давала в точности НМ, а первые две — в точности НЈ, и (2) получающееся множество исходных утверждений было независимым. Лукасевич [LGL] первым опубликовал решение этой проблемы: тремя исходными схемами будут соответственно NC, efq и схема (*b*) упражнения С9. Бернайс в переписке (см. Гермес и Шольц [NVB]) предложил в качестве исходных другие схемы — именно схемы, описанные в упражнениях С3 и С9*a*. Вайсберг [UAK] использовал NW и efq (см. упражнение С2) для НЈ. И Лукасевич, и Вайсберг упоминали, что их "стимулировали" Шольц и его сотрудники; следует указать также исторические замечания в статье Шрётера [UHA], которая представляет собой запоздалую публикацию известных результатов. Вайсберг [UAK], по-видимому, неправильно поняв письмо от Шольца, утверждал, что NW достаточно для НМ; он исправил эту ошибку, заменив NW на NC в своей работе [MLB.II], стр. 139. То, что здесь взято как стандартная формулировка (а также формулировка из [TFD]), является решением проблемы Шольца, за исключением схемы *b* упражнения С9. Гермес и Шольц отрицают возможность независимого и отделенного множества исходных схем аксиом для НК; Кангер [NPP] показал противное (упражнение С10).

Вопросы, излагаемые в разд. D, гораздо старше, чем вопросы, изложенные в разд. A — C, и литература по ним гораздо более обширна. Материал разд. D был известен в основном до 1930 г.; он здесь взят с небольшими изменениями из [LLA], гл. 5, разд. 7—11. Цель изложения разд. D состоит в том, чтобы выявить сущность рассмотренного там подхода и взаимоотношение этого подхода с другими. Для того чтобы проследить историю этого подхода, необходимо небольшое отступление.

В развитии логики приблизительно до 1930 г. господствовал традиционный подход. В этом развитии можно различить три главных направления. Первое из них — это подход посредством реляционной алгебры, идущий (в принципе) от Буля и образующий основу современной теории структур. Второе направление ведет к ассерторическим дедуктивным системам (Н-системам); оно началось с Фреге и было продолжено Расселом

в его книге [PMt]. Третье направление — это матричные интерпретации (разд. 5A4). Эти направления, хотя и различны исторически, не являются несовместимыми друг с другом. С настоящей точки зрения они эквивалентны; но эта эквивалентность и ее причины не были осознаны с самого начала. Направление, которое кладет в основу понятие вывода и которым по преимуществу занимается эта книга, можно считать четвертым направлением, являющимся ответвлением второго.

Первое направление приводит к булевым алгебрам и булевым кольцам. История этого направления была кратко изложена в разд. 4S1. Так как на той стадии было невозможно полностью отделить отрицание, то многое из того, что относится к настоящей главе, обсуждалось уже там. В частности, для ознакомления с исследованиями по булевой алгебре, выходящими за пределы данной книги (в особенности это относится к нелогическим приложениям), следует обратиться к общим работам по теории структур, указанным в разд. 4S1 и 4S3. Что касается элементарного введения в булеву алгебру, то мы все еще рекомендуем книгу Кутюра [ALg], которая вдохновлялась более старыми работами, приведенными в разд. 4S1, но теперь эти работы представляют в основном исторический интерес. Другое отличное введение имеется в книге Розенблюма [EML], гл. 1, 2. В ней приводится изложение доказательства теоремы Стоуна о представлении, принадлежащего Фринку. В указанной книге содержатся интересные замечания о переходе к ассерторической системе и о соотношении между двумя типами систем. Исторические замечания, содержащиеся в этой книге на стр. 194 и след., дают информацию подобного типа, которую трудно найти где-либо в другом месте. Булева алгебра в наши дни получила применение в вопросах синтеза электрических контактных схем, что вызвало появление целого ряда практических учебников, но у меня нет подробной информации о них.

Второе направление породило большое количество разнообразных формулировок НК. Так как это направление было господствующим в логике, то большинство общих ссылок в разд. 1S, особенно в разд. 1S5, относится именно к нему. По поводу элементарных подходов см. разд. 1S1*c*. В книге Чёрча [IML$_2$] содержится много исторических комментариев, в особенности относительно исходных схем для НК.

По поводу третьего направления см. Чёрч [IML$_2$], стр. 148 рус. изд., где изложены ранние этапы истории. Некоторые современные авторы, например Куайн, предпочитают трактовать алгебру высказываний исключительно с точки зрения двузначных тавтологий и не проявляют интереса к дедуктивным трактовкам. По поводу развития технических приемов такого рода

см. Куайн [MeL], [MLg]. Матричная точка зрения привела к некоторым обобщениям; по поводу их см. ниже разд. 2.

Существует большое число способов, которыми можно формулировать булеву алгебру и HK. Обзор формулировок с точки зрения H-систем см. у Чёрча [IML_2], § 23—29; по поводу формулировок с точки зрения E-систем см. Биркгоф [LTh_2], гл. 10, § 3, 4; Розенблюм [EML], стр. 194. На формулировки Уайтхеда [UAl], Хантингтона [SIP], [NSI] (приводится библиография до 1933 г.), Бирна [TBF] в литературе ссылались довольно часто. Порт [DSS] приводит обзор систем, основанных на P и N; в его работе [SCP] то же делается для систем, основанных на Λ и N. Последний тип систем представляет интерес в связи с теоремой, сформулированной в разд. B9; по поводу этого см. также Лукасевич [ITD], где говорится о судьбе системы Собоциньского.

Согласно Хантингтону [NSI], сноска на стр. 278, термин 'булева алгебра' принадлежит Шефферу [SFI].

По поводу свойств конечных булевых алгебр см. также Берстейн [FBA].

Теоремы о нормальной форме в разд. D4 являются более или менее стандартными теоремами, восходящими по меньшей мере к Шрёдеру [VAL]. Теорема D14 принадлежит Посту [IGT].

Теоремы о булевых уравнениях в разд. D5 все содержатся в книге Кутюра [ALg] (хотя они восходят по меньшей мере к Шрёдеру [VAL]), за исключением теорем, связанных со сложением в кольце; по этому поводу см. Биркгоф [LTh_2], § X9. Книга Кутюра [ALg] содержит также краткое изложение технических приемов, принадлежащих Порецкому; эти приемы, которые, как говорят, полезны для некоторых целей, развивались дальше в работе Блейка [CEB]. Ледли в работах [CMS], [DCM], [DSF], [MFC] предложил ряд улучшений технических приемов с уклоном в сторону приложений к машинной математике.

2. Дальнейшее развитие. Здесь будут упомянуты некоторые вопросы, которые мы не смогли включить в данную главу.

Много внимания уделялось взаимоотношениям между HJ и HK, в частности преобразованиям, которые отображают теоремы HK в теоремы HJ. Теорема Гливенко (упражнение B7) служит примером такого преобразования; тот же характер носит теорема Гёделя — Колмогорова (упражнение B9). Последняя обладает еще тем свойством, что ее можно распространить на некоторые виды арифметики. По поводу других теорем этой природы см. Клини [IMM], § 81; Шанин [ЛПА]; Лукасевич [ITD].

Согласно теореме 5E5, система HJ обладает свойством дизъюнкции. До некоторой степени это свойство обобщается; см., например, Харроп [DES]. Лукасевич [ITD] высказал предположение, что это свойство является характеристическим для HJ. Крайзель и Патнэм [UBM] опровергли это предположение, доказав, что в результате добавления к HJ схемы

$$\vdash \neg A \supset B \vee C . \supset . \neg A \supset B . \vee . \neg A \supset C$$

получается система более широкая, чем HJ, но все еще обладающая свойством дизъюнкции.

Это вызывает вопрос о логиках, промежуточных между HJ и HK. Гёдель [IAK], используя матричный метод, показал, что существует бесконечно много таких промежуточных логик. Умедзава изучал их систематически (см. его [IPL] и статьи, указанные там).

Матричный метод исследования позволяет получить различные обобщения, идущие в различных направлениях от тех путей, которым следуют здесь. Пост в [TVI] тщательно изучал двузначные матрицы. Однако наиболее поразительные обобщения относятся к матрицам с более чем двумя элементами. Систематической работой в этой области является книга Россера и Тюркетта [MVL]; доступными первыми работами в этом направлении являются работы Поста [IGT] и Лукасевича и Тарского [UAK]; по поводу истории см. Чёрч [IML_2], стр. 154 рус. изд.; обзоры см., например, у Лукасевича [LGL], Фринка [NAL]. Изучались также реляционные системы ("алгебры Поста", "мулевы алгебры"); см., например, Розенблюм [PAl], Чан [AAM] и литературу, приведенную там.

В статье Гёделя [IAK], уже цитированной ранее, показано, что HJ не совпадает ни с какой логикой, порожденной матрицей с конечным числом значений. Доказательство подробно изложено в книге Шмидта [VAL], разд. 141. Однако представление посредством бесконечных матриц дано в статье Яськовского [RSL].

В этой книге делалось ударение на эквивалентности E- и H-формулировок. Розенблюм [EML] также отмечает это обстоятельство. Однако в этой эквивалентности есть немало любопытного. Когда нарушаются условия разд. 4A1, могут произойти странные вещи. Так, Хиж [ESC] приводит ассерторическую систему, каждое высказывание которой является утверждением HK, и все же эта система не полна по Посту. Эта система вообще не будет H-системой. Этот пример проливает свет на значение условий теоремы D14.

Рассмотрение технических средств булевой алгебры в разд. D было очень кратким. Более старые работы, уже приводившиеся ранее, развивали много других вопросов. Одним из них была теория неравенств, зависящая от введения дополнительного предиката различия двух элементов или отличия от нуля. Она представля-

ет некоторый интерес, так как в ней можно дать трактовку традиционной логики (силлогизмов и т. д.). Очень коротко об этом см. в [LLA], гл. 6.

Эти пути направления исследований обнаруживают родство с подходами, упомянутыми в разд. 4S. Существует много других путей. Те из них, которые включают неконструктивные семантические соображения, выходят за рамки нашей книги.

В заключение отметим монографию Сикорского [BAI], посвященную булевым алгебрам.

Глава 7

КВАНТОРЫ

В предыдущих двух главах мы занимались пропозициональными связками, т. е. операциями, которые, будучи примененными к высказываниям, образуют новые высказывания. В этих операциях высказывания фигурируют как некие нерасчленяемые сущности. Когда теория интерпретируется [1]) в эпитеории основного формализма $\mathfrak{S}$, эти высказывания образуются из элементарных утверждений $\mathfrak{S}$ безотносительно к тому, как сами эти элементарные утверждения образуются из формальных объектов. Другими словами, $\mathfrak{S}$ может быть произвольной дедуктивной теорией при условии, что ее правила элементарны в том смысле (разд. 2D3), что их можно сформулировать в виде (1) разд. 5C.

В этой главе мы изучим методы выражения общности суждений и связанных с ней понятий. Это требует операций несколько иного характера, нежели операции, рассмотренные в предыдущих главах. Такие операции по традиции называются *кванторами* [2]). Для их введения требуется, чтобы основная теория $\mathfrak{S}$ действительно была системой и притом включающей два типа обов, называемых *высказываниями* и *термами*. При интерпретации в эпитеории основной системы $\mathfrak{S}$ термы соответствуют обам из $\mathfrak{S}$. Тогда высказывания с кванторами

$$\forall x A \qquad \exists x A$$

интерпретируются как эпиутверждения из $\mathfrak{S}$, говорящие соответственно, что A верно для всех термов x и что A верно для некоторых термов x.

Схема изложения в этой главе во многом аналогична подходу гл. 6. В разд. A мы глубже исследуем значение и природу кванторов с целью прийти к формулировке L-систем различных видов, содержащих эти операции. Так как семантических трудностей, относящихся к кванторам, гораздо меньше, чем для отрицания, а формальных трудностей гораздо больше, то бóльшая часть места будет уделена формальным вопросам, и мы закончим этот раздел

[1]) Точнее — оценивается.

[2]) Термин принадлежит Пирсу, а идея — Фреге. По поводу деталей, относящихся к истории, см. Чёрч [IML$_2$], § 49.

рассмотрением фактической формализации. В разд. B будут выведены эпитеоремы, относящиеся к L-системам. В разд. C мы изучим отношения между L-системами и более обычными системами исчисления предикатов: T- и H-формулировками. Последний раздел — разд. D — будет посвящен теоремам, верным для классических систем.

Индекс '*' с этого момента будет употребляться для обозначения систем с кванторами. Так, LA*, LC*, LK*, HK* — это системы, образованные добавлением соответствующих постулатов для кванторов (которые будут описаны позже) к LA, LC, LK, HK соответственно. L-системы этой главы мы будем называть L*-системами. Произвольная из этих L*-систем будет обозначаться через LX*; под X можно подразумевать любую из букв 'A', 'C', 'D', 'E', 'J', 'K', 'M'.

A. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ

Мы начнем в разд. 1 с семантических рассмотрений; наша цель определить как можно более точно значения высказываний с кванторами

$$\forall x A \qquad \exists x A \tag{1}$$

когда они интерпретируются как эпиутверждения, касающиеся основного формализма $\mathfrak{S}$. Следующей нашей заботой будут формальные трудности, возникающие из-за введенных таким образом "связанных переменных". Эти трудности требуют тщательной формулировки ряда деталей, касающихся вхождения переменных, подстановки и т. д.; эти детали скучны, но неизбежны, если мы хотим быть точными. Точная формулировка различных L*-систем будет дана в разд. 5.

1. Семантические рассмотрения. Природа обобщения в связи с с эпитеорией системы $\mathfrak{S}$ уже обсуждалась в разд. 3A3. Мы здесь занимаемся тем типом обобщения, который там был назван схематическим. Так, при интерпретации первое утверждение (1) истинно тогда и только тогда, когда A представляет собой схему утверждений, зависящих от параметрического терма x, которая становится истинным утверждением, если вместо x подставляется произвольный терм, т. е. A является теоремой расширения $\mathfrak{S}(x)$, образованного добавлением x к $\mathfrak{S}$ в качестве дополнительной неопределенной.

Второе из высказываний (1), интерпретируемое как эпиутверждение, должно означать, что A истинно для некоторого терма t. Эта интерпретация означает, что A представляет собой утверждение расширения $\mathfrak{S}(x)$, для которого существует такой терм t из $\mathfrak{S}$, что A становится истинным утверждением A' из $\mathfrak{S}$, когда t подставляется вместо x.

Ряд технических деталей, относящихся к связанным переменным, мы отложим до дальнейшего. Оставляя в стороне эти технические детали, мы в принципе имеем интерпретацию для высказываний (1), рассматриваемых как эпиутверждения относительно $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим теперь семантику высказываний (1), когда они фигурируют в качестве конституэнтов в эпиутверждении о выводимости вида

$$\mathfrak{X} \Vdash B \tag{2}$$

Как и в разд. 5C1, это сводится к вопросу о том, при каких обстоятельствах конституэнт вида (1) может быть введен в (2); другими словами, когда утверждение (2), содержащее конституэнт (1), можно ввести в рассуждение. Требуется рассмотреть два случая: когда новый конституэнт расположен справа и когда он расположен слева. В обоих этих случаях мы предположим, что A' является результатом подстановки t вместо x в A.

Рассмотрим сначала введение справа. Как и в разд. 5C1, мы интерпретируем (2) как истинность B в системе $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$, образованной добавлением $\mathfrak{X}$ к $\mathfrak{S}$. Если B есть $\forall x A$, то это будет верно тогда и только тогда, когда x является неопределенной для $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$, так что x не входит в $\mathfrak{X}$, и A истинно в системе $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, x)$, образованной присоединением x к $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. Если B есть $\exists x A$, то эпиутверждение (2) будет истинным тогда и только тогда, когда существует такой терм t, что A' истинно в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. Формальные правила для введения справа

$$\mathfrak{X} \Vdash A \longrightarrow \mathfrak{X} \Vdash \forall x A \tag{3}$$

$$\mathfrak{X} \Vdash A' \longrightarrow \mathfrak{X} \Vdash \exists x A \tag{4}$$

удовлетворяющие указанным выше ограничениям, выражают как раз эти принципы.

Для рассмотрения введения слева мы должны рассмотреть интерпретацию утверждения

$$\mathfrak{X}, C \Vdash B$$

где C — одно из высказываний вида (1). Это сводится к вопросу о том, при каких обстоятельствах мы заключаем при наличии $\mathfrak{X}$, что B является следствием из C. Мы можем, конечно, сделать это заключение, если B совпадает с C или таково, что вывод может быть сделан безотносительно к природе C (т. е. схематически, с C в качестве параметра). В нетривиальных случаях мы используем метод разд. 5A3 и 5C1. Общий принцип этого

метода состоит в том, что правило для введения операции справа определяет значение этой операции в следующем смысле: если C вводится справа по правилу R, то следствия C везде, где это C встречается, те же, что и тогда, когда C вводилось впервые, и должны определяться рассмотрением возможных посылок для R [1]). Поэтому если C есть $\forall x A$, то C можно ввести в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ только тогда, когда A истинно в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, x)$, и в этом случае существует доказательство $\mathfrak{D}_1$ (некоторого вида) [2]), оканчивающееся A; если теперь B находится в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, A')$, то мы имеем дерево доказательства $\mathfrak{D}_2$, оканчивающееся B и имеющее A' в качестве посылки, так что, помещая над каждым вхождением A' его доказательство, полученное из $\mathfrak{D}_1$ подстановкой t вместо каждого вхождения x в $\mathfrak{D}_1$, мы получим доказательство того, что B находится в $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. Тогда правило

$$\mathfrak{X},\ A' \Vdash B \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{X},\ \forall x A \Vdash B \tag{5}$$

семантически приемлемо. С другой стороны, если $C \equiv \exists x A$, то C истинно для $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ только тогда, когда существует дерево $\mathfrak{D}_1$, оканчивающееся некоторой A'; если теперь имеется доказательство $\mathfrak{D}_2$, оканчивающееся B и имеющее посылку A, и ни B, ни любая другая посылка не содержат x, то, подставляя t вместо каждого вхождения x в $\mathfrak{D}_2$, мы получим доказательство B из A'. Поэтому правило

$$\mathfrak{X},\ A \Vdash B \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{X},\ \exists x A \Vdash B \tag{6}$$

семантически приемлемо, если выполнены указанные ограничения на x.

Правила видов (5) и (6) лежат в основе правил, которые формально приводятся в разд. 5.

2. Формальные трудности. Хотя интерпретации, указанные в разд. 1, довольно просты, они сопряжены с рядом сложностей; дело в том, что для кванторов нужны связанные переменные. Некоторые из этих сложностей рассматривались в разд. 3D4. Напомним о них применительно к настоящему контексту.

Для того чтобы итерировать правила разд. 1 относительно введения кванторов, необходимо рассмотреть случаи, когда $\mathfrak{X}$ и B в (2) содержат другие дополнительные неопределенные, кроме x.

[1]) Поэтому если R — однопосылочное правило, то оно семантически обратимо. Это не имеет ничего общего с формальной обратимостью, о которой говорится в теореме 5D1, свидетельствующей о согласии формальной теории с подразумеваемой интерпретацией.

[2]) На данной стадии и уровне изложения точная форма такого доказательства нас не интересует. Можно допустить, что оно подобно Т-доказательствам разд. 5A3.

Другими словами, мы должны рассмотреть зависимость (2) от термового расширения $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — некоторое множество неопределенных; мы можем выразить эту зависимость, записывая (2) в виде

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash B$$

Термы t, которые могут подставляться вместо x, могут, таким образом, содержать дополнительные неопределенные, и, следовательно, мы можем очутиться в ситуации (которую мы уже комментировали в разд. 3D4), известной как коллизия связанных переменных. Так, если $\mathfrak{S}$ — подходящая формулировка элементарной теории чисел, то

$$\exists y\,(x < y)$$

является схемой теорем, в которой x — неопределенная; но если бы мы наивно подставили y вместо x, то имели бы

$$\exists y\,(y < y)$$

что ложно.

Явление коллизии связанных переменных показывает, что условия подстановки нужно формулировать с некоторой осторожностью. Существуют различные способы сделать это. Одним очень сильнодействующим методом является метод комбинаторной логики (разд. 3D5); он совсем исключает связанные переменные и показывает, как выражения, включающие в себя связанные переменные, могут быть определены в терминах комбинаторов таким образом, чтобы правила обращения со связанными переменными можно было вывести из определений [1]). Коль скоро этот метод в принципе отвечает на все вопросы, то мы можем воспользоваться методом, выгодным с точки зрения практических удобств. Метод, применяемый ниже, — это по существу тот, что используется в книге Гильберта и Бернайса [GLM], т. 1. Формальные переменные, используемые для обозначения термов, — мы называем их *термовыми переменными* — делятся на два класса; в формальных рассмотрениях формальные переменные из первого класса используются для обозначения свободных переменных, а формальные переменные из второго класса — для обозначения связанных переменных. Эти классы мы назовем *реальными* и *кажущимися переменными* соответственно, а слова 'свободный' и 'связанный' резервируем для описания вхождений переменных; при изложении правил иногда необходимо, чтобы кажущиеся переменные входили свободно [2]). Буквы 'a', 'b', 'c', . . .

[1]) См., например, [CLg], разд. 6D.

[2]) Термины 'реальная переменная' и 'кажущаяся переменная' использовались в "Principia mathematica", но, кажется, вышли из употребления. Поэтому мы воспользуемся ими как специальными терминами.

будут использоваться для обозначения реальных переменных, а 'x', 'y', 'z' — для обозначения кажущихся переменных; буквы 'u', 'v', 'w' будут использоваться для обозначения переменных, которые могут быть либо реальными, либо кажущимися.

Это соглашение оказывается удобным. Все же формулировать понятия подстановки, свободного и связанного вхождения и т. д. придется с большой осторожностью. После некоторого отступления мы вернемся к этой формулировке в разд. 4.

3. B-язык. Ввиду сложности анализа переменных необходимо ввести в U-язык обширную техническую терминологию. Она будет объясняться по мере введения, но если мы исследуем сначала эту терминологию как целое, то это поможет прояснить дело.

Ситуация, в которой мы находимся, требует некоторого расширения фундаментальных грамматических понятий разд. 2A3 и 2A4. В то время как в гл. 5 и 6 мы говорили — выразим это на содержательном уровне — о двух существенно различных видах предметов, а именно о высказываниях (т. е. обах) и утверждениях, которые делаются о этих высказываниях, здесь мы должны говорить — в том же содержательном смысле — о трех различных видах, а именно о термах, высказываниях и утверждениях. В нашем A-языке будет три основные грамматические категории: термовые имена, пропозициональные имена и предложения; на время обозначим их τ, π, σ соответственно. τ состоит из *исходных постоянных*, т. е. из имен выделенных атомов $\mathfrak{S}$, и *термовых переменных*, которые являются именами неопределенных, присоединяемых к $\mathfrak{S}$ для образования *термовых расширений*, а также более сложных фраз, обозначающих некоторые специально выделенные термы. Категория π будет содержать имена отдельных высказываний, каким бы путем они ни образовывались; когда наши системы интерпретируются вышеуказанным способом, эти высказывания становятся утверждениями о $\mathfrak{S}$, но это не существенно для чисто формальных рассмотрений. Категория σ будет содержать предложения, выражающие утверждения, которые мы высказываем, отрицаем или рассматриваем как-либо иначе.

Кроме того, нам нужны функторы различных видов. Функторы, которые при заданной интерпретации становятся операторами $\mathfrak{S}$, будут принадлежать категориям $\mathsf{F}_1\tau\tau$, $\mathsf{F}_2\tau\tau\tau$ и т. д. (в зависимости от их степени); назовем их *термовыми операторами*, или *термовыми функторами* [1]). Функторы, которые при интерпретации становятся предикаторами $\mathfrak{S}$, принадлежат к таким категориям, как $\mathsf{F}_1\tau\pi$, $\mathsf{F}_2\tau\tau\pi$ и т. д.; имя '*предикатор*' с данного момента будет закреплено за функторами этого типа,

[1]) Другим названием, также употребительным в литературе, является 'дескриптивный функтор'.

а имя '*предикат*' — за их десигнатами [1]). Функторы типа, который мы рассматривали до сих пор,—скажем, инфиксы $\supset$, $\wedge$, $\vee$ — принадлежат категории $\mathsf{F}_2\pi\pi\pi$ (а отрицание — категории $\mathsf{F}_1\pi\pi$); они будут называться *пропозициональными операторами*, причем слово 'пропозициональный' обычно опускается. Это имя будет также применяться к кванторам, хотя квантор, строго говоря, принадлежит категории $\mathsf{F}_2\tau\pi\pi$, точнее (ср. разд. 3D4) — категории F_1 ($\mathsf{F}_1\tau\pi$) π. Наконец, функторы, образующие предложения, будут с этого момента называться *глаголами*, или *функторами предложений* (или *утверждений*), а их десигнаты — *глагольными функциями*, свойствами, отношениями и т. д. (или соответственно *функциями*, свойствами, отношениями и т. д. *утверждений*).

Все сказанное относится к A-языку. Для эпитеоретических целей нам в U-языке нужны U-переменные, пробегающие различные категории, имена для категорий и подкатегорий и U-переменные для них, глаголы для выражения эпитеоретических взаимоотношений и т. д. Совокупность всей этой технической терминологии, которая необходима для выражения не только элементарных утверждений, но и правил, морфологии и ряда эпитеоретических свойств, образует язык, который мы назовем B-*языком*.

Основные символы B-языка представлены в таблице 3. Здесь в столбце 1 приведены имена различных категорий, на которые классифицируются эти символы. В столбце 2 дается список постоянных, классифицируемых в соответствии с категорией, которые составляют A-язык системы $\mathfrak{S}^*$, образованной добавлением бесконечного множества термовых переменных к $\mathfrak{S}$. В столбце 3 приводится список символов, используемых как собственные имена категорий из столбца 1. В столбце 5 приведен список U-переменных для произвольных членов этих категорий, а в столбце 6 — список переменных для произвольных подклассов этих категорий. В столбце 4 приводятся способы указания специфических подклассов, зависящих от параметров, взятых из столбца 6. Все символы могут употребляться как имена, но некоторые из них в сочетании со скобками и запятыми можно использовать как функторы согласно обычной математической традиции (ср. разд. 2A4). Терминология выбрана так, чтобы она по возможности согласовалась с условием, по которому готические буквы обозначают классы или последовательности, члены которых обозначены курсивными латинскими буквами.

[1]) Не все авторы отождествляют 'предикат' с 'пропозициональной функцией'. Например, Чёрч ([IML$_2$], примечание 458), следуя Карнапу, но в отличие от Гильберта и Бернайса, называет 'предикатами' функторы (которые мы здесь называем предикаторами, операторами и глаголами), но не их десигнаты.

Таблица 3

Название категории (1)	U-постоянные			U-переменные	
	Элементы (2)	Классы (3)	Подклассы (4)	Элементы (5)	Подклассы или последовательности (6)
Исходные постоянные	$e_1, e_2, \ldots$	$\mathfrak{e}$			
Термовые переменные	$q_1, q_2, \ldots$	$\mathfrak{q}$		$u, v, w, \ldots$	$\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$
Исходные термовые операторы	$\omega_1, \omega_2, \ldots$	Ω			
Исходные предикаторы	$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$	Φ			
Реальные переменные		$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{h}$	a, b, c, f, g, h	$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{g}$
Кажущиеся переменные		$\mathfrak{s}$		x, y, z	$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$
Термы (обы $\mathfrak{S}$*)		$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$	s, t	
Нулевой класс $\mathfrak{q}$		$\mathfrak{o}$			
Элементарные высказывания	$E_1, E_2, \ldots, F$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}(\mathfrak{u})$		
Высказывания		$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}(\mathfrak{u}), \mathfrak{F}$	A, B, C, D	$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$
Аксиомы		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}(\mathfrak{u})$		
Элементарные теоремы		$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}(\mathfrak{u})$		
Теоремы		$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, \mathfrak{u})$, $\mathfrak{T}(\mathfrak{u})$		
Нулевой класс или просеквенция		0			
Нулевая система		$\mathfrak{O}$			

Глаголы B-языка включают в себя глаголы, необходимые для формулирования элементарных и вспомогательных утверждений различных систем, морфологических утверждений вида

u входит в t

u входит в A свободно

u входит в A связанно

а также отношений между классами. Нам встретятся также трехместные операции, замыкания которых

$$[s/u]\,t \qquad [s/u]\,A$$

обозначают результат подстановки s вместо u в t или A соответственно. Различные связки из разд. 2A4 и дополнительные фразы,

необходимые для формулирования правил в разд. 5, также будут рассматриваться как принадлежащие B-языку, но вряд ли стоит их явно перечислять.

В связи с классами отметим следующие особые соглашения. Инфиксы '$\in$', '$\subset$', '$=$' будут использоваться в своем обычном смысле (ср. разд. 2A4) принадлежности, включения и равенства классов соответственно; инфикс '$\equiv$' используется, как и до сих пор, для тождества по определению. Имя для просеквенции, выполняющее функцию имени класса, будет пониматься как обозначение класса высказываний, имеющих одно или более вхождений в данную просеквенцию в качестве конституэнта, и аналогично для других имен структур. Объединение двух или более классов будет указываться (если во избежание путаницы не понадобятся более явные обозначения) тем, что их имена будут писаться друг за другом и разделяться запятыми; точно так же классы, содержащие только один элемент, не будут различаться от самих этих элементов. Например, '$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, c$' будет обозначать класс, элементами которого являются c, а также элементы классов $\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$ или их обоих.

Для обозначения натуральных чисел будут употребляться буквы 'i', 'j', 'k', 'l', 'm', 'n', а иногда (когда контекст не допускает путаницы) буквы 'p', 'q', 'r', 's'. Символы арифметических операций и отношений будут использоваться в своем обычном смысле.

B-язык — это не то же самое, что A-язык любой из систем LA, LJ, TA и т. д. Последний получается добавлением к столбцу 2 фраз, достаточных для того, чтобы делать конкретные элементарные утверждения. Хотя мы пытаемся быть точными в том, что касается употребления B-языка, мы все же не делаем попыток ни формализовать его, ни исчерпать возможности U-языка в нем.

4. Правила для термов и высказываний. Эти правила относятся к формулировке системы $\mathfrak{S}$ и ее различных термовых расширений, к структуре класса $\mathfrak{P}$ высказываний относительно этих термовых расширений и к правилам для подстановки и для вхождений переменных.

Исходные понятия $\mathfrak{S}$*. Система $\mathfrak{S}$* — это система, образованная добавлением к $\mathfrak{S}$ бесконечного класса $\mathfrak{q}$ термовых переменных. Ее исходные понятия тогда таковы:

Атомы $\mathfrak{S}$, ($\mathfrak{e}$): $e_1, e_2, \ldots$
Термовые переменные ($\mathfrak{q}$): $q_1, q_2, \ldots$ } Атомы $\mathfrak{S}$*

Исходные операции $\omega_1, \omega_2, \ldots$ степеней $m_1, m_2, \ldots$ соответственно

Исходные предикаты $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ степеней $n_1, n_2, \ldots$ соответственно

Все они, кроме термовых переменных, являются исходными понятиями $\mathfrak{S}$.

Формулировка $\mathfrak{S}(\mathfrak{u})$. Если $\mathfrak{u}$ — подкласс $\mathfrak{q}$, то $\mathfrak{S}(\mathfrak{u})$ — это система, полученная добавлением к $\mathfrak{S}$ в точности членов $\mathfrak{u}$. Тогда $\mathfrak{S}(\mathfrak{q})$ — это $\mathfrak{S}^*$ и $\mathfrak{S}(\mathfrak{o})$ — это $\mathfrak{S}$. Формулировка будет следующей:

I. *Термы*

(*a*) Каждый элемент из $\mathfrak{e}$ содержится в $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$.

(*b*) Каждый элемент из $\mathfrak{u}$ содержится в $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$.

(*c*) Если $t_1, t_2, \ldots, t_{m_k}$ содержатся в $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$, то $\omega_k(t_1, t_2, \ldots, t_{m_k})$ содержится в $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$.

II. *Элементарные высказывания* ($\mathfrak{E}(\mathfrak{u})$). [В интерпретации они представляют собой элементарные утверждения $\mathfrak{S}(\mathfrak{u})$.]

1. Высказывания $E_1, E_2, \ldots, F$ содержатся в $\mathfrak{E}(\mathfrak{u})$. (Это условие подобно условию в гл. 4 и 5, но здесь мы настаиваем на том, чтобы эти высказывания были постоянными.) Высказывания $E_1, E_2, \ldots, F$ ничем иным не выделяются, они играют роль пропозициональных переменных в $\mathfrak{D}$.

2. Если $t_1, t_2, \ldots, t_{n_k}$ содержатся в $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$, то

$$\varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n_k})$$

содержится в $\mathfrak{G}(\mathfrak{u})$ [1]).

III. *Вспомогательные утверждения.* Правила и аксиомы $\mathfrak{S}$ задаются схемами утверждений вида

$$A_1, \ldots, A_m \mid \mathfrak{a} \vdash_0 B \tag{7}$$

где $\mathfrak{a}$ — класс реальных переменных и все $A_1, \ldots, A_m, B$ содержатся в $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$. Эти утверждения называются вспомогательными, потому что они аналогичны утверждениям, названным так в разд. 5С3. Если $m = 0$, то B будет называться *аксиомой*.

В определение системы $\mathfrak{S}$ может также входить задание класса контраксиом $\mathfrak{F}$. Они также могут зависеть от класса $\mathfrak{a}$ реальных переменных.

В пустой системе $\mathfrak{D}$ нет утверждений вида (7) и контраксиом.

Следующие пять определений формально определяют понятие высказывания, а также понятия, относящиеся к вхождению переменных и к подстановкам вместо них. Это довольно-таки технические вопросы. Некоторые читатели, без сомнения, предпочтут принять их и основанные на них теоремы как интуитивно ясные и понятные из обозначений.

Определение 1. (Вхождение атома в терм.) Если u — термовая переменная (или, более общо, любой атом) и t содержится в $\mathfrak{t}(\mathfrak{q})$, то

u входит в t

[1]) E_i можно рассматривать как частный случай, когда $n_k = 0$.

определяется индукцией по строению t следующим образом:

(i) Если $t \equiv u$, то u входит в t.

(ii) Если t — атом, отличный от u, то u не входит в t.

(iii) Если $t \equiv \omega_k(t_1, \ldots, t_{m_k})$, то u входит в t тогда и только тогда, когда она входит хотя бы в один из t_i.

Определение 2. (Подстановка в терм.) Если s и t — термы, а u — термовая переменная или, более общо, атом, то

$$[s/u]\,t$$

определяется индукцией по строению t следующим образом:

(i) Если $t \equiv u$, то $[s/u]\ t \equiv s$.

(ii) Если t — атом, отличный от u, то $[s/u]t \equiv t$.

(iii) Если $t \equiv \omega_k(t_1, \ldots, t_{m_k})$, то

$$[s/u]\,t \equiv \omega_k(t'_1, \ldots, t'_{m_k})$$

где $t'_i = [s/u]\ t_i$, $i = 1, 2, \ldots, m_k$.

Определение 3. (Высказывания и вхождения переменных в них.) Если u — термовая переменная и $\mathfrak{u}$ — класс таких переменных, то утверждения

A содержится в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$

u входит свободно в A

u входит связанно в A

определяются одновременно индукцией по строению A следующим образом:

(i) Если A содержится в $\mathfrak{E}(\mathfrak{u})$, то A содержится в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$. Если A есть некоторое E_i или F, то никакая переменная не входит в A ни свободно, ни связанно. Если

$$A \equiv \varphi_k(t_1, \ldots, t_{n_k})$$

то u входит свободно в A тогда и только тогда, когда u входит хотя бы в один из t_i; никакая переменная не входит связанно в A.

(ii) Если A есть $B \supset C$, $B \wedge C$ или $B \vee C$, то A содержится в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$ тогда и только тогда, когда B и C содержатся в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$. Переменные, входящие свободно в A, — это в точности те переменные, которые входят свободно хотя бы в одно из высказываний B или C.

(iii) Если A есть $\neg B$, то A содержится в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$ тогда и только тогда, когда там содержится B и свободные (связанные) переменные в A совпадают с таковыми же в B.

(iv) Если A есть $\forall xB$ или $\exists xB$, то A содержится в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$ тогда и только тогда, когда B содержится в $\mathfrak{P}(\mathfrak{u}, x)$ и x не входит связанно в B [1]); мы можем добавить (или не добавлять) даль-

[1]) Это ограничение не обязательно; мы принимаем его ради удобства.

нейшее ограничение, состоящее в том, что x входит свободно в B (без этого ограничения говорят, что мы допускаем *пустые кванторы*, в противном же случае — нет). Переменные, входящие свободно в A, — это переменные, отличные от x и входящие свободно в B; переменные, входящие связанно в A, — это переменные, входящие связанно в B, а также x.

Определение 4. *Реальный терм* — это терм, принадлежащий $\mathfrak{t}(\mathfrak{r})$; *реальное высказывание* — это высказывание, принадлежащее $\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$. Точно так же *постоянный терм* — это терм, принадлежащий $\mathfrak{t}(\mathfrak{o})$, а *постоянное высказывание* — это высказывание, принадлежащее $\mathfrak{P}(\mathfrak{o})$.

Определение 5. Для каждого A из $\mathfrak{P}(\mathfrak{q})$, s из $\mathfrak{t}(\mathfrak{q})$ и u из $\mathfrak{q}$ мы определим

$$[s/u]\,A$$

индукцией по строению A следующим образом:

(i) Если A есть E_i или F, то $[s/u]\,A \equiv A$.

(ii) Если

$$A \equiv \varphi_k(t_1, \ldots, t_{n_k})$$

то

$$[s/u]\,A \equiv \varphi_k(t'_1, \ldots, t'_{n_k})$$

где

$$t'_i \equiv [s/u]\,t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n_k$$

(iii) Если A есть $B \circ C$, где '$\circ$' обозначает один из инфиксов '$\supset$', '$\wedge$', '$\vee$', то

$$A' \equiv B' \circ C'$$

где

$$B' \equiv [s/u]\,B,\ C' \equiv [s/u]\,C$$

(iv) Если A есть $\neg B$, а B' определяется так же, как в (iii), то

$$[s/u]\,A \equiv \neg B'$$

(v) Если A есть $\forall xB$ или $\exists xB$, то

$$[s/x]\,A \equiv A$$

Если $u \not\equiv x$ и s — реальный терм[1]) или s — кажущаяся переменная, отличная от x, то

$$[s/u]\,\forall xB \equiv \forall xB'$$
$$[s/u]\,\exists xB \equiv \exists xB'$$

где B' таково, как в (iii).

Замечание 1. Заметим, что эти соглашения могут не определять $[s/u]\,A$, если A содержит связанные переменные и s — сложный терм, содержащий кажущиеся переменные, или если s — переменная, связанная в A.

Следующие теоремы можно доказать структурной индукцией по A. Доказательства опущены; они довольно скучны, но вполне элементарны[1]).

Теорема 1. *Класс* $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$ *обладает следующими свойствами:*

(i) *Вопрос об истинности любого утверждения видов, введенных в определениях* 1 *и* 3, *является определенным вопросом.*

(ii) *Класс* $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$ *монотонно возрастает вместе с* $\mathfrak{u}$, *т. е.*

$$\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{b})$$

(iii) *Если* A *содержится в* $\mathfrak{P}(\mathfrak{q})$ *и* $\mathfrak{u}$ — *класс всех переменных, входящих свободно в* A, *то* A *содержится в* $\mathfrak{P}(\mathfrak{u})$.

Теорема 2. *Операция подстановки обладает следующими свойствами:*

(i) $[u/u]\,A \equiv A$

(ii) *Если* u *не входит свободно в* A, то

$$[s/u]\,A \equiv A$$

(iii) *Если* A *содержится в* $\mathfrak{P}(\mathfrak{u}, w)$, s *содержится в* $\mathfrak{t}(\mathfrak{b})$, то $[s/w]\,A$, *если оно определено, содержится в* $\mathfrak{P}(\mathfrak{u}, \mathfrak{b})$.

(iv) *Если* s *содержится в* $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$, t *содержится в* $\mathfrak{t}(\mathfrak{b})$, $u \not\equiv v$, *и не содержится в* $\mathfrak{b}$, v *не содержится в* $\mathfrak{u}$, *то*

$$[s/u]\,[t/v]\,A \equiv [t/v]\,[s/u]\,A$$

(v) *Если* s *содержится в* $\mathfrak{t}(\mathfrak{a})$, t *содержится в* $\mathfrak{t}(\mathfrak{b})$ *и* b *не содержится в* $\mathfrak{a}$, *то*

$$[s/a]\,[t/b]\,A \equiv [t'/b]\,[s/a]\,A$$

где

$$t' \equiv [s/a]\,t$$

Эти теоремы останутся верными, если мы подставим t вместо A и $\mathfrak{t}$ вместо $\mathfrak{P}$. Так измененные теоремы будут называться теоремами 1′ и 2′ соответственно.

[1]) Это пока единственное место, где различие между реальными и кажущимися переменными является существенным. Если бы мы не желали делать этого различия, мы могли бы в этом месте ввести ограничение, состоящее в том, что x не должно быть свободным в s; его можно было бы дополнить условием об автоматическом изменении связанных переменных (ср. [CLg], разд. 3E), если бы мы хотели, чтобы подстановка была всюду определена. Сделанное здесь ограничение допускает ряд упрощений, которые будут произведены позднее.

[1]) Доказательство части (iv) теоремы 2 подробно приведено в [TFD], стр. 72, сноска 8.

Предположения относительно $\mathfrak{S}$. Кроме предположений, содержащихся в приведенных выше формулировках, будут сделаны следующие предположения:

A1. *Класс* $\mathfrak{e}$ *не пуст.*

A2. *Вспомогательные утверждения и контраксиомы инвариантны относительно подстановки*, т. е. когда такое утверждение содержит термовые переменные, тогда утверждение, образованное подстановкой реальных термов вместо этих переменных, также является вспомогательным утверждением или контраксиомой.

Первое из этих предположений соответствует предположению о том, что область «предметов» не пуста, которое, как правило, делается при обычной трактовке исчисления предикатов. Проявлялся интерес к возможности избавиться от этого ограничения. По-видимому, некоторые из результатов, полученных изучавшими этот вопрос, можно применить к построению теории без предположения A1, но этот вопрос здесь не исследуется.

Замечание 2. Представление подстановки часто можно сократить следующим образом: пусть $A \equiv A\,(u)$, тогда

$$A\,(s) \equiv [s/u]\,A\,(u)$$

Замечание 3. Формулировка оставляет открытым ряд возможностей в отношении $\mathfrak{S}$, в частности в отношении Ф. Конечно, если бы Ф было пустым, то никакая переменная не входила бы свободно ни в какое высказывание и ситуация была бы тривиальной. Поэтому Ф должно быть непустым. Но и это ограничение оставляет некоторую свободу. В ряде систем некоторые φ_i являются неопределенными в том смысле, что первоначальный остов ничего не говорит о них явно, так что они входят в формулировку аксиомы или правила лишь как значения некоторой U-переменной. Такое φ_i называется *предикатной переменной*; φ_i, упоминаемая в определенном значении, называется *предикатной постоянной*. Если $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{D}$, то нет, конечно, предикатных постоянных в этом смысле. Если $\mathfrak{S}$ такова, что в ней имеется неограниченное число предикатных переменных с любым числом мест, то мы будем говорить, что она имеет *неограниченные предикатные переменные*. Там, где существуют предикатные переменные, будет производное правило подстановки по отношению к этим переменным (см. упражнение 4 в конце этого раздела [1]).

[1]) Были предложены системы исчисления предикатов, в которых правило подстановки принимается в качестве исходного правила. Такие системы не рассматриваются здесь, и есть существенные основания избегать их (см. Генкин [BRS]). Если бы их нужно было допустить, то лучше было бы заменить наш термин 'предикатная переменная' на 'предикатную неопределенную'; 'предикатная переменная' и 'предикатная постоянная' тогда имели бы другие значения.

Замечание 4. Замечания, подобные замечанию 3, можно сделать в отношении других составляющих первоначального остова $\mathfrak{S}$. В частности, если члены $\mathfrak{e}$ являются неопределенными, то они по существу не отличаются от тех термовых переменных, которые не являются характеристическими переменными [1]), и безразлично, причислены ли эти члены к таким термовым переменным и включены в область или же причислены к $\mathfrak{u}$. Назовем их $\mathfrak{u}$-*переменными*. Точно так же E_i, не являющаяся неопределенной, может быть названа *исходной пропозициональной постоянной*.

Замечание 5. *Прикладным исчислением предикатов* обычно называют исчисление предикатов, в котором имеются исходные термовые постоянные, исходные пропозициональные постоянные либо предикатные постоянные или термовые операции; *чистое исчисление предикатов* не обладает этими чертами. Если мы понимаем постоянные в смысле замечаний 3 и 4, то чистое исчисление предикатов — это такое, в котором $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{O}$ и Ω пусто. Однако эти выражения иногда понимаются и в другом смысле [2]).

5. L*-системы. Рассмотрим теперь формулировку систем, называемых L*-системами, которые аналогичны L-системам двух предыдущих глав, но видоизменены так, чтобы допустить кванторы и термовые расширения. Эти системы будут обозначаться добавлением верхнего индекса '*' к имени соответствующей системы из гл. 5 и 6; мы имеем, таким образом, системы LA*, LC*, LM*, LJ*, LD*, LE*, LK* и их различные формулировки. В рассуждениях, относящихся к таким системам вообще, мы будем понимать букву 'X' как заменяющую одну из букв 'A', 'C', 'D', 'E', 'J', 'K', 'M'; таким образом, системы этой главы будут обозначаться через LX*, их T-формы — через TX* и т. д.

Просеквенции. Определения разд. 5C3*c* проходят лишь с очевидными видоизменениями. Мы говорим, что u входит свободно в $\mathfrak{X}$, если u входит свободно хотя бы в один из конституэнтов $\mathfrak{X}$, и что u входит связанно в $\mathfrak{X}$, если u входит связанно хотя бы в один из конституэнтов $\mathfrak{X}$. Аналогично $[s/u]\,\mathfrak{X}$ — это просеквенция, образованная из $\mathfrak{X}$ заменой каждого конституэнта A из $\mathfrak{X}$ на $[s/u]\,A$.

Вспомогательные утверждения определены в формулировке $\mathfrak{S}\,(\mathfrak{u})$ в разд. 1. Они удовлетворяют ограничению A2.

Элементарные утверждения теперь имеют вид

$$\mathfrak{X} \mid \alpha \vdash \mathfrak{Y} \qquad (8)$$

[1]) По поводу терминов 'характеристическая переменная' и 'область' см. разд. 5.

[2]) См. предыдущую сноску.

где $\mathfrak{a}$ — класс реальных переменных и

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \qquad \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \tag{9}$$

В более явной форме если $\mathfrak{X}$ есть $A_1, \ldots, A_m$, $\mathfrak{Y}$ есть $B_1, \ldots, B_n$ и $\mathfrak{a}$ есть $a_1, \ldots, a_p$, то (8) есть

$$A_1, \ldots, A_m \mid a_1, \ldots, a_p \vdash B_1, \ldots, B_n \tag{10}$$

Класс $\mathfrak{a}$ мы назовем *областью* (8). Если не требуют соображения ясности, то указание на область обычно будет опускаться.

Мы распространим определения вхождения и подстановки на элементарные утверждения следующим образом. Мы говорим, что u входит свободно в (8), если u входит свободно хотя бы в одно из $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{Y}$; точно так же u входит связанно в (8), если u входит связанно хотя бы в одно из $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{Y}$. Если Γ есть утверждение (8) и $s \in \mathfrak{t}(\mathfrak{b})$, то $[s/a]\,\Gamma$ представляет собой утверждение

$$\mathfrak{X}' \mid \mathfrak{a}',\ \mathfrak{b} \vdash \mathfrak{Y}' \tag{11}$$

где $\mathfrak{a}'$ — это класс, образованный из $\mathfrak{a}$ удалением a и

$$\mathfrak{X}' \equiv [s/a]\,\mathfrak{X} \qquad \mathfrak{Y}' \equiv [s/a]\,\mathfrak{Y} \tag{12}$$

Заметим, что если выполняется (9), то аналогичное условие для (11) выполняется автоматически по теореме 2.

Исходные утверждения. Они таковы же, как и ранее, с дополнительным условием, что область $\mathfrak{a}$ — это любая область, удовлетворяющая (9).

Правила вывода. Правила для конечных операций, приведенные в разд. 5С и 6В, были установлены в предположениях, что все высказывания, вспомогательные утверждения и т. д. относятся к фиксированной системе $\mathfrak{S}$. Понимая, что (8) следует интерпретировать как утверждение

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

относительно $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$, мы постулируем теперь эти правила для любого $\mathfrak{a}$. Это значит, что область одинакова во всех посылках и в заключении, что вспомогательные утверждения, контраксиомы и т. д. относятся к $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$ и что новые высказывания — такие, как те, что вводятся посредством *К* и некетононовских форм *Λ и V*, — являются высказываниями из $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$ (т. е. находятся в $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$). Эти правила мы впредь будем называть *алгебраическими правилами* (чтобы отличить их от новых правил, которые будут вскоре введены).

В дополнение к этим правилам, в предположении, что

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{a})$$
$$t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})$$
$$A(c) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{a}, c) \qquad B(c) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{a}, c)$$
c не входит в $\mathfrak{a}$
x не связана в $A(c)$ или $B(c)$

мы имеем следующие *кванторные правила*:

П. *Правила для кванторов общности*

$$*\Pi\ \frac{\mathfrak{X},\ A(t) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ \forall x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}} \qquad \Pi*\ \frac{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a},\ c \vdash B(c),\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x B(x),\ \mathfrak{Z}}$$

Σ. *Правила для кванторов существования*

$$*\Sigma\ \frac{\mathfrak{X},\ A(c) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ \exists x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}} \qquad \Sigma*\ \frac{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash B(t),\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x B(x),\ \mathfrak{Z}}$$

Ограничения на сингулярность. В мультиплярных формах LA*, LM*, LJ*, LD* правило П* должно быть сингулярным; в остальном ограничений нет.

Замечание 1. Правила *П и Σ* можно было бы формулировать без использования переменной c. В правилах П* и *Σ, однако, переменная c играет существенную роль; она будет называться *характеристической переменной* соответствующего правила.

Замечание 2. Эти правила удовлетворяют соглашениям разд. 5С6 и, очевидно, обладают свойствами ($r1$)—($r5$). Однако правила П* и *Σ не обладают свойством ($r6$), поскольку новый параметрический конституэнт может содержать характеристическую переменную. Далее, кванторные правила не обладают свойством композиции, так что следствия, выведенные из этого свойства для системы LX, не обязательно имеют место для системы LX*; действительно, известно, что аналог следствия 5Е9.1 ложен. Мы увидим, что эти правила обладают свойством композиции в обобщенной форме и что из этого следуют некоторые другие результаты разд. 5Е.

Замечание 3. В утверждении (8) просеквенции $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ имеют лишь конечное число конституэнтов и область $\mathfrak{a}$ также конечна. Возможно было бы допустить бесконечные просеквенции и области при условии, что выполнен ряд ограничений, но мы здесь не будем делать этого [1]). Предполагается, конечно, что $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ все бесконечны.

[1]) В [TFD] такие возможности допускались, но вряд ли использовались. "Ограничение конечности", установленное там на стр. 74, было необходимо для теории кванторов.

Замечание 4. Наши соглашения таковы, что всегда, когда можно вывести утверждение вида (8), имеет место (9). Для этого необходимо только постулировать (9) для исходных утверждений. Так как правила сохраняют это свойство, то все доказуемые утверждения являются элементарными утверждениями в упомянутом выше смысле.

Замечание 5. Имеется очевидная двойственность между правилами Π^* и $^*\Sigma$, с одной стороны, и $^*\Pi$ и Σ^* — с другой. Эта двойственность нарушается в ряде отношений, в основном в том, что Π^* может быть сингулярным справа, но $^*\Sigma$ никогда не бывает сингулярным слева. Тем не менее возможно сокращать доказательства, говоря, что доказательство для одного члена этих двойственных пар получается из доказательства для другого члена по двойственности.

Упражнения

1. Показать, что

$$\forall x \forall y A \Vdash \forall y \forall x A$$
$$\exists x \forall y A \Vdash \forall y \exists x A$$
$$\exists x \exists y A \Vdash \exists y \exists x A$$
$$\forall x \forall y A\,(x, y) \Vdash \forall x A\,(x, x)$$
$$\exists x A\,(x, x) \Vdash \exists x \exists y A\,(x, y)$$

2. Показать, что связанные переменные можно произвольно изменять, если не нарушаются правила, определяющие принадлежность $\mathfrak{P}$.

3. Показать, что в Ф достаточно иметь лишь одно- и двуместные предикаты. (Это одна из теорем Лёвенгейма [MRK]. Сейчас известны гораздо более сильные результаты такого рода.)

4. Сформулировать и доказать теорему о подстановке пропозициональной функции с некоторым числом мест вместо предикатной переменной с тем же числом мест таким образом, чтобы избежать коллизии связанных переменных. (По поводу истории вопроса см. Чёрч [rev. HA]. По поводу решения и дальнейшего обсуждения см. Гильберт и Бернайс [GLM. I], Чёрч [IML_2][1]), Зубиета [SVF], Генкин [BRS].)

B. ТЕОРИЯ L*-СИСТЕМ

L*-системы были определены в разд. A5. В этом разделе будут доказаны теоремы, аналогичные теоремам разд. 5C —5E и 6B. Мы начнем (разд. 1) с теорем, относящихся к расширениям и другим формам принципов ослабления. Затем в разд. 2 мы перейдем к инверсионной теореме. Элиминационная теорема и другие теоремы разд. 5D, в формулировках которых будет сравнительно мало изменений (хотя в доказательствах таких изменений может быть и больше), будут рассматриваться вместе в разд. 3. Теоремы о выводимости разд. 5E1—5E4 будут рассматриваться в разд. 4. В разд. 5 будут изложены классические оценки, которые затем будут использованы для получения конструктивных доказательств недоказуемости. В конце разд. 6 будут описаны таблицы доказательств.

[1]) § 35.— *Прим. ред.*

1. Теоремы о расширениях и подстановке. Первая трудность, которую нужно преодолеть, состоит в том, что Π^* и $^*\Sigma$ не обладают свойством ($r6$). Это происходит потому, что новый параметр мог бы содержать характеристическую переменную, что нарушило бы справедливость вывода. Необходимо поэтому установить ряд результатов, которые показывают, что это свойство можно восстановить по крайней мере в принципе. Эти теоремы покажут также, что можно производить подстановку вместо свободных переменных.

Начнем с двух теорем предварительного характера. Первую из них мы будем считать леммой, так как она перекроется теоремой 3.

Лемма 1. *Пусть* Δ *— регулярное доказательство* (разд. 5C7), *заканчивающееся формулой*

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y} \tag{1}$$

и пусть $a \in \mathfrak{a}$. *Пусть* $s \in \mathfrak{t}(\mathfrak{b})$, *где* $\mathfrak{b}$ *— класс реальных переменных, не содержащий никакой характеристической переменной из* Δ. *Пусть* Δ' *— последовательность утверждений, полученных из утверждений* Δ *повсеместной подстановкой* s *вместо* a. *Тогда* Δ' *— регулярное доказательство.*

Доказательство. Пусть утверждениями Δ являются $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, где Γ_n есть (1). Так как область заключения правила никогда не бывает шире области любой из посылок, то отсюда следует, что a должно входить в область каждого Γ_k; кроме того, поскольку характеристические переменные выбрасываются, a не является характеристической переменной в Δ. Отсюда следует, что Γ_k имеет вид

$$\mathfrak{X}_k \mid \mathfrak{a}_k,\ a \vdash \mathfrak{Y}_k$$

где a не входит в $\mathfrak{a}_k$. Пусть соответствующим утверждением в Δ' будет Γ'_k; тогда Γ'_k есть

$$\mathfrak{X}'_k \mid \mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{b} \vdash \mathfrak{Y}'_k$$

где $\mathfrak{X}'_k \equiv [s/a]\,\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{Y}'_k \equiv [s/a]\,\mathfrak{Y}_k$.

Чтобы доказать лемму, мы должны показать лишь, что (*a*) если Γ_k исходно, то исходно и Γ'_k; (*b*) если Γ_k следует из Γ_i, Γ_j, ... по правилу R, то Γ'_k следует из Γ'_i, Γ'_j, ... по тому же правилу R. В любом случае мы можем игнорировать условие (9) разд. A ввиду замечания 4 разд. A5.

Доказательство утверждения (*a*) очевидно, если Γ_k имеет тип (*p*1). Если Γ_k типа (*p*2), то утверждение (*a*) следует по предположению A2. Поэтому достаточно доказать утверждение (*b*).

Доказательство утверждения (*b*) очевидно, если R — одно из правил гл. 5 и 6, не содержащих каких-либо вспомогательных посылок, ибо преобразование от Δ к Δ' является гомоморфизмом по отношению к этим правилам. Для правил с вспомогательной посылкой, именно $\vdash *$ и F*, это так же верно по предположению A2.

Если R есть П*, то вывод должен быть таким:

$$\frac{\mathfrak{X}_i \mid \mathfrak{a}_i,\ a,\ c \vdash B(c),\ \mathfrak{Z}_i}{\mathfrak{X}_i \mid \mathfrak{a}_i,\ a \vdash \forall x B(x),\ \mathfrak{Z}_i}$$

Преобразованный вывод:

$$\frac{\mathfrak{X}'_i \mid \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b},\ c \vdash B'(c),\ \mathfrak{Z}'_i}{\mathfrak{X}'_i \mid \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b} \vdash [s/a]\,\forall x B(x),\ \mathfrak{Z}'_i}$$

где

$$B'(c) \equiv [s/a]\,B(c)$$
$$\mathfrak{Z}'_i \equiv [s/a]\,\mathfrak{Z}_i$$

Поскольку в силу соглашений разд. A4 (часть (v) определения 5 и замечание 2) и теоремы A2 (часть (v))

$$\begin{aligned}[s/a]\,\forall x B(x) &\equiv [s/a]\,\forall x\,[x/c]\,B(c)\\ &\equiv \forall x\,[s/a]\,[x/c]\,B(c)\\ &\equiv \forall x\,[x/c]\,[s/a]\,B(c)\\ &\equiv \forall x B'(x)\end{aligned}$$

то данный вывод получается применением правила R.

Доказательство утверждения (*b*) для того случая, когда R есть $*\Sigma$, двойственно данному.

Если R есть $\Sigma*$, то вывод должен быть таким:

$$\frac{\mathfrak{X}_i \mid \mathfrak{a}_i,\ a \vdash B(t),\ \mathfrak{Z}_i}{\mathfrak{X}_i \mid \mathfrak{a}_i,\ a \vdash \exists x B(x),\ \mathfrak{Z}_i}$$

Преобразованный вывод:

$$\frac{\mathfrak{X}'_i \mid \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b} \vdash [s/a]\,B(t),\ \mathfrak{Z}'_i}{\mathfrak{X}'_i \mid \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b} \vdash [s/a]\,\exists x B(x),\ \mathfrak{Z}'_i}$$

Пусть теперь b — реальная переменная, не входящая в $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ [1]) и не входящая в Δ как характеристическая переменная. Пусть

$$B'(b) \equiv [s/a]\,B(b)$$
$$t' \equiv [s/a]\,t$$

Тогда в силу разд. A4 (замечание 2, часть (v) теоремы A2, часть (v) определения 5)

$$[s/a]\,B(t) \equiv [s/a]\,[t/b]\,B(b) \equiv [t'/b]\,B'(b) \equiv B'(t')$$
$$[s/a]\,\exists x B(x) \equiv [s/a]\,\exists x\,[x/b]\,B(b) \equiv \exists x B'(x)$$

Следовательно, вывод снова получается применением R. Для случая, когда R есть $*\Pi$, мы рассуждаем двойственным образом.

Этим заканчивается доказательство леммы 1.

Т е о р е м а 1. *Пусть* Γ — *элементарная теорема* LX* *и* $\mathfrak{g}$ — *бесконечный подкласс* $\mathfrak{x}$. *Тогда существует вывод* Δ *теоремы* Γ, *такой, что характеристические переменные* Δ *отличны друг от друга и принадлежат* $\mathfrak{g}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению существует некоторый вывод Δ' теоремы Γ. Теорема будет доказываться индукцией по длине Δ'.

Если эта длина равна 1, то Γ исходна. Поскольку нет характеристических переменных, Δ' сам является требуемым Δ. Этим мы установили базис индукции. Достаточно поэтому доказать теорему, когда Γ получается по правилу R из посылок $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, для которых теорема уже доказана.

Если R — правило, не содержащее никакой характеристической переменной, то пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_p$ — попарно непересекающиеся подмножества $\mathfrak{g}$. По индуктивному предположению существуют выводы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ посылок $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ соответственно, такие, что характеристические переменные каждого Δ_i содержатся в соответствующем $\mathfrak{g}_i$. Тогда $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, за которыми следует R для вывода Γ из $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, дадут искомый вывод Δ. Этим исчерпываются все случаи, за исключением случая, когда R есть П* или $*\Sigma$.

Наконец, пусть R есть П* или $*\Sigma$. Пусть Γ_1 — посылка, а c — характеристическая переменная. Пусть $g \in \mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{g}'$ — бесконечный подкласс $\mathfrak{g}$, не содержащий ни c, ни g. По индуктивному предположению существует вывод Δ', заканчивающийся Γ_1, характеристические переменные которого содержатся в $\mathfrak{g}'$. Пусть Δ_1 получается из Δ'_1 как в формулировке леммы 1 с g вместо s (причем g — единственный член $\mathfrak{b}$) и c вместо a. Тогда Δ_1 за-

[1]) Ср. разд. A5, замечание 3.

канчивается Γ_1', откуда можно получить Γ с помощью того же правила R, за исключением того, что g занимает место c. Такой вывод и будет искомым Δ. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Если имеет место* (1) *и* $\mathfrak{b}$ — *любой бесконечный подкласс* $\mathfrak{r}$, *такой, что*

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{b}) \qquad \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{b}) \tag{2}$$

то

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{b} \vdash \mathfrak{Y} \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ — утверждение (1) и Δ — его вывод. Теорема будет доказана индукцией по длине Δ.

Если Γ исходно и верно (2), то (3) также исходно. Этим установлен базис индукции. Достаточно поэтому предположить, что Γ получается по правилу R из посылок $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, для которых теорема уже доказана.

Предположим, что R таково, что переменные, входящие свободно в любую из посылок, входят в заключение. Сюда включаются правила *C*, *K*, *W*, *P*, *Λ*, *V*, *N*, Fj. В таком случае если (2) выполняется для заключения, то аналогичное включение выполняется для всех посылок. По индуктивному предположению посылки все справедливы, если область заменяется на $\mathfrak{b}$. Тогда (3) получается по правилу R.

Если R — одно из правил Π* или *Σ, то все переменные, входящие свободно в посылки, за исключением лишь характеристической переменной, входят свободно в заключение. Пусть c — эта характеристическая переменная. Тогда если выполняется (2) для заключения, то аналог (2) будет выполняться для посылки, если в качестве области мы возьмем $\mathfrak{b}$, c. По индуктивному предположению посылка справедлива, если область заменяется на $\mathfrak{b}$, c. Из видоизмененной посылки мы снова получаем (3) по правилу R.

Остающиеся возможности — это $\vdash$*, Px, Nx, F*, *Π и Σ*. Во всех случаях в посылку (посылки) могут свободно входить переменные, не входящие свободно в заключение. По предположению A1 существует элемент e_1 из $\mathfrak{e}$. Пусть a — переменная, входящая свободно в некоторую посылку, но не в заключение. По лемме 1 мы можем вывести эту посылку, в которую e_1 подставлено вместо a и a выброшена из области. Мы можем продолжать так и далее до тех пор, пока все переменные, входящие свободно в какую-либо посылку, не будут входить свободно и в заключение. Поскольку заключение все еще можно выводить по тому же правилу R, теорема сводится к случаю, рассмотренному двумя абзацами выше.

З а м е ч а н и е 1. Теорема в том виде, как она здесь сформулирована, не верна без предположения A1. Ибо если $A(a)$ —

высказывание, в которое явно входит только a и никакие другие переменные, то мы можем легко вывести

$$\forall x A(x) \mid a \vdash \exists x A(x) \tag{4}$$

С другой стороны, если $\mathfrak{t}(\mathfrak{o})$ пусто, то мы не можем вывести

$$\forall x A(x) \mid \mathfrak{o} \vdash \exists x A(x) \tag{5}$$

Если $\mathfrak{b}$ не пусто, то можно использовать некоторую переменную b из $\mathfrak{b}$ вместо e_1, но в этом случае могла бы возникнуть необходимость использовать теорему 1, чтобы удовлетворить условиям леммы 1.

З а м е ч а н и е 2. Теорема позволяет нам обобщить правила, которые, подобно *K* и первоначальным формам *Λ и V*, вводят новую компоненту B в заключение, на случаи, где B содержит переменные не из области $\mathfrak{a}$ посылок. Ибо если $B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{b})$, то мы используем теорему для того, чтобы заменить область посылок на $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и применить первоначальные правила для вывода заключения с областью, замененной на $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. То же относится к случаю, когда B — дополнительный параметр, присоединенный к правилам, удовлетворяющим условию ($r6$).

Т е о р е м а 3. *Если* Γ — *истинное утверждение* (1) *и* $s \in \mathfrak{t}(\mathfrak{b})$, *то* $[s/a]\,\Gamma$ *также истинно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ' есть $[s/a]\,\Gamma$ (по поводу его определения см. описание элементарных утверждений в разд. A5). Если a не содержится в $\mathfrak{a}$, то Γ' есть

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \vdash \mathfrak{Y}$$

и это следует из Γ по теореме 2. Предположим теперь, что $a \in \mathfrak{a}$. По теореме 1 существует вывод Δ утверждения Γ, такой, что никакая из характеристических переменных Δ не содержится в $\mathfrak{b}$. Утверждение теоремы теперь следует из леммы 1.

Эти теоремы показывают, как мы можем восстановить свойство ($r6$). Это свойство, очевидно, выполняется для правил *Π и Σ*, и оно выполняется для Π* и *Σ при условии, что характеристическая переменная не входит свободно в новый параметр. Если это условие не выполняется, то теорема 3 показывает, что мы можем заменить характеристическую переменную такой, которая удовлетворяет условию. Отсюда мы получаем

С л е д с т в и е 3.1. *Правила* *Π* *и* *Σ* *обладают свойством* ($r6$) *и, следовательно, регулярны при условии, что характеристическая переменная, если таковая имеется, заменяется так, чтобы она не входила свободно в новый параметр.*

Кванторные правила также не удовлетворяют ($r7$) в строгом смысле. Но они удовлетворяют ($r7$) в видоизмененном смысле,

ибо $A(x)$ в заключении отличается от $A(c)$ или $A(t)$ в посылке только заменой термов.

2. Инверсионная теорема. Рассмотрим теперь, как влияет введение кванторов на инверсионную теорему. Если не считать очевидных видоизменений применительно к новой ситуации, то мы используем те же соглашения, что и в разд. 5D1 и 6B2.

Сама инверсионная теорема — теорема 5D1 и ее модификация, теорема 6B1,— была сформулирована и доказана для общей L-системы и, следовательно, в силу результатов разд. 1 она справедлива также для L*-системы. Далее, поскольку никакой подчиненный в алгебраическом операциональном правиле не может содержать переменной, которой нет в главном конституэнте, то не может возникнуть коллизии с характеристической переменной кванторного правила по условию (*c*). Следовательно, воздействие условий (*a*) —(*f*) этих теорем на алгебраические операциональные правила не меняется от наличия кванторных правил. Мы должны только посмотреть, что́ позволяют сказать нам эти условия о самих кванторных правилах.

Прежде чем рассмотреть эти осложнения, займемся двумя предварительными вопросами. Во-первых, мы можем предположить в силу теоремы 1, что характеристические переменные из Δ отличны друг от друга и от переменных области Γ. Во-вторых, заметим, что у M может быть несколько параметрических предков только тогда, когда у нас есть ветвление Δ_1 или применение *W*.

Теперь предположим, что R есть П* и M есть $\forall x A(x)$. Тогда первоначальные предки M, введенные правилом R, заменяются на $A(c_1), A(c_2), \ldots, A(c_r)$, где $c_1, \ldots, c_r$ — различные характеристические переменные; мы можем предположить, что первоначальные предки M, введенные правилом K*, заменены таким же путем, и при этом переменные подобраны подходящим образом. Очевидно, что условие (*b*) теоремы 5D1 не удовлетворяется ввиду возможной неоднозначности характеристических переменных. Предположим, однако, что мы идем вниз по Δ_1, как в разд. 5D1. Когда соединяются две или более ветви или когда к двум вхождениям M применяется *W*, мы можем воспользоваться теоремой 3 для отождествления различных c_i в ветвях, подставляя одну из них вместо каждой из других в соответствующих ветвях. Если мы проведем этот процесс до самого низа дерева Δ_1, то мы заменим все $c_1, \ldots, c_r$ одним и тем же c. Условие (*b*) тогда в принципе будет выполнено. Так как все переменные, отличные от c, были в первоначальном Δ_1 и так как c_i отличны от других характеристических переменных, то условие (*c*) также выполняется. Поэтому П* будет непосредственно обратимо. Может случиться, что теперь условие (*a*) в системах, в которых требуется, чтобы П* было сингулярным, не выполняется; но иначе не было бы различия между абсолютными и классическими системами.

Все, что было сказано о П*, за исключением замечания о возможном невыполнении условия (*a*), относится в силу двойственности и к *Σ.

Предположим теперь, что R есть Σ* и что M есть $\exists x A(x)$. Тогда подчиненные, которые заменяют непосредственных квазипараметрических предков M, введенных правилом R, будут $A(t_1), A(t_2), \ldots, A(t_r)$. Условие (*b*) может не выполняться. Мы можем восстановить условие (*b*), употребляя все множество $A(t_1), A(t_2), \ldots, A(t_r)$ вместо каждого $A(t_i)$, и мы можем использовать это же множество и там, где M вводится правилом K* (включая и Fj, рассматриваемое как частный случай K*). Но может случиться, что некоторое t_i содержит характеристическую переменную из Δ_1. В таком случае условие (*c*) может не выполняться. Пример этого будет приведен позднее (пример 1). Если условие (*c*) выполняется, то в конце нам нужен вывод вида

$$\Sigma'^* \qquad \frac{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash A(t_1), A(t_2), \ldots, A(t_r), \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x), \mathfrak{Z}}$$

Он может быть получен r применениями Σ* вместе с применениями W*; это будет одно правило, если мы заменим Σ* на Σ'*, которое можно рассматривать как аналогичное кетоneновской форме V*.

Случай, когда R есть *П, трактуется двойственно. Правилом, аналогичным Σ'*, является *П':

$$*\Pi' \qquad \frac{\mathfrak{X}, A(t_1), \ldots, A(t_r) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \forall x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}}$$

Эти рассмотрения доказывают следующую теорему:

Т е о р е м а 4. *Правила* П* *и* *Σ *непосредственно обратимы во всех системах. Если* *П *и* Σ* *заменяются на* *П' *и* Σ'*, *то непосредственное обращение может быть выполнено, если нет коллизии с характеристической переменной некоторого применения* П* *или* *Σ *в* Δ_1. *Все результаты об обращении алгебраических правил остаются в силе.*

П р и м е р 1. $\forall x A(x) \,\|\!-\, \forall x . A(x) \vee B$. Это можно установить в LA^*_m так:

$$\dfrac{\dfrac{A(c) \mid c \vdash A(c) \vee B}{\forall x A(x) \mid c \vdash A(c) \vee B} *\Pi}{\forall x A(x) \,\|\!-\, \forall x . A(x) \vee B} \Pi *$$

Если R есть *П, то условие (c) не выполняется, так как $A(c)$ содержит характеристическую переменную следующего применения П*. Клини [PIG] (стр. 25) показывает, что вывод, заканчивающийся применением *П, невозможен (даже в LK*).

Пример 2. $A(a) \vee A(b) \mid a,\ b \vdash \exists x A(x)$. Это можно вывести в LA так:

$$\dfrac{\dfrac{A(a) \mid a,\ b \vdash A(a)}{A(a) \mid a,\ b \vdash \exists x A(x)}\,\Sigma^* \qquad \dfrac{A(b) \mid a,\ b \vdash A(b)}{A(b) \mid a,\ b \vdash \exists x A(x)}\,\Sigma^*}{A(a) \vee A(b) \mid a,\ b \vdash \exists x A(x)}\,{}^*\mathrm{V}$$

Клини приводит это как пример неперестановочности в LA_1. Перестановку, однако, можно осуществить в LA_m:

$$\dfrac{\dfrac{A(a) \mid a,\ b \vdash A(a),\ A(b) \qquad A(b) \mid a,\ b \vdash A(a),\ A(b)}{A(a) \vee A(b) \mid a,\ b \vdash A(a),\ A(b)}\,{}^*\mathrm{V}}{A(a) \vee A(b) \mid a,\ b \vdash \exists x A(x)}\,\Sigma'^*$$

3. Другие основные теоремы. Рассмотрим теперь аналоги теорем разд. 5C—5E, в которых делаются лишь небольшие изменения для того, чтобы приспособить эти теоремы к наличию кванторов. Итогом является

Теорема 5. *Теорема разд.* 5C, *элиминационная теорема, эквивалентность сингулярных и мультиплярных формулировок (теоремы* 5D7, 5D8 *и* 6B5) *и эквивалентность различных формулировок отрицания (теорема* 6B4) *все верны для системы* LX*.

Доказательство. Теоремы 5C1—5C3 сохраняются без изменения, и, как в разд. 6B1, мы больше не обращаем внимания на различие между формулировками I и II. В теореме 5C4 нам придется рассмотреть дополнительные случаи

$$\dfrac{\dfrac{A(b) \mid \mathfrak{a},\ b \vdash A(b)}{\forall x A(x) \mid \mathfrak{a},\ b \vdash A(b)}\,{}^*\Pi}{\forall x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x)}\,\Pi^*$$

и двойственное этому рассуждению для $\exists x A(x)$.

В доказательстве этапов 1 и 2 элиминационной теоремы мы можем по теореме 2 избежать коллизии, причиной которой может послужить неидентичность областей. Коллизии, связанной с характеристическими переменными, можно избежать в силу теоремы 1. В самом деле, мы можем прежде всего предположить, что характеристические переменные в любой посылке ЭТ отличны друг от друга и от всех переменных, появляющихся в заключении. Поэтому правила регулярны [в видоизмененном смысле (r7)]. Что касается этапа 3, то здесь надо рассмотреть два следующих дополнительных случая:

Случай П. A есть $\forall x B(x)$. Посылки:

$$\mathfrak{X}_1,\ \forall x B(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y} \tag{6}$$

$$\mathfrak{X}_2 \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x B(x),\ \mathfrak{Z} \tag{7}$$

а заключение

$$\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2 \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z} \tag{8}$$

Согласно гипотезе этапа, (6) и (7) получаются посредством *П и П* соответственно из

$$\mathfrak{X}_1,\ B(t) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y} \tag{9}$$

$$\mathfrak{X}_2 \mid \mathfrak{a},\ c \vdash B(c),\ \mathfrak{Z} \tag{10}$$

где характеристическую переменную c можно выбрать так, чтобы она не встречалась в (9). Из (10) и теоремы 3

$$\mathfrak{X}_2 \mid \mathfrak{a} \vdash B(t),\ \mathfrak{Z}$$

Исключая отсюда и из (9) $B(t)$, мы получаем (6).

Случай Σ. A есть $\exists x A(x)$. Этот случай можно рассматривать двойственным образом.

В принципе не требуется никакого изменения при распространении ЭТ на смешанные системы. Мы рассматриваем все случаи, где A имеет вид главного конституэнта правила R, сингулярного справа, точно так же, как мы рассматривали случай, где A было $B \supset C$, разд. 5D2. К тому же такое правило R играет роль, подобную роли P* в остальной части рассуждения в разд. 5D2.

В отношении эквивалентности между сингулярной и мультиплярной системами (теоремы 5D7, 5D8, 6B5) теорема принимает следующий вид: для того чтобы

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash {}_m\mathfrak{Y} \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash {}_1C \tag{12}$$

(обозначения здесь те же, что в разд. 5D). В силу результатов разд. 2 на доказательство достаточности совсем не влияет наличие кванторов. Для доказательства необходимости мы должны рассмотреть четыре новых случая, а именно *П* и *Σ*. Из них левые правила не вызывают трудностей, так как их правые части — параметрические. Правило П* сингулярно в LA*, LM*, LJ* и LD*; следовательно, его нужно рассматривать только для LE* и LK*.

Рассмотрим сначала случай Σ*. Здесь $\mathfrak{Y}$ есть $\exists x A(x)$, $\mathfrak{Z}$ и C есть $\exists x A(x) \vee D$. По индуктивному предположению,

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash {}_1A(t) \vee D$$

Отсюда по ЭТ мы получаем желательное заключение при условии, что мы установили

$$A(t) \vee D \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x) . \vee D$$

Это можно показать следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(t) \mid \mathfrak{a} \vdash A(t)}{A(t) \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x)}\,\Sigma_* \quad \dfrac{D \mid \mathfrak{a} \vdash D}{D \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x) . \vee D}\,\vee_*}{A(t) \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x) . \vee D}\,\vee_* \qquad D \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x) . \vee D}{A(t) \vee D \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x) . \vee D}\,{}^*\vee$$

В случае П* мы замечаем, что мы имеем в своем распоряжении весь аппарат LC_1. В LA_1^* верно

$$A \supset . \forall x B(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x . A \supset B(x) \tag{13}$$

$$\mathfrak{X} \Vdash A \vee B \to \mathfrak{X},\ A \supset B \Vdash B \tag{14}$$

тогда как в LC_1 верно

$$\mathfrak{X},\ A \supset B \Vdash B \to \mathfrak{X} \Vdash A \vee B \tag{15}$$

Используя это, мы можем закончить доказательство необходимости для П* следующим образом. Рассматриваемый вывод представляет собой

$$\dfrac{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A(c),\ \Im}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x),\ \Im}$$

Из посылки по индуктивному предположению имеем

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A(c) \vee D$$

Отсюда мы последовательно получаем:

$\mathfrak{X},\ D \supset A(c) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A(c)$	по (14)
$\mathfrak{X},\ \forall x . D \supset A(x) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A(c)$	по *П
$\mathfrak{X},\ D \supset . \forall x A(x) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A(c)$	по (13), ЭТ
$\mathfrak{X},\ D \supset . \forall x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x)$	по П*
$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x) . \vee D$	по (15)

Это завершает доказательство необходимости, а тем самым и рассматриваемой теоремы.

Затем мы рассмотрим теорему 6B4, рассматривающую различные формулировки для отрицания. Исследование этого доказательства показывает, что на него совсем не влияет наличие кванторных правил.

Это завершает доказательство теоремы 5.

4. L*-выводимость. Мы уже заметили (разд. A5, замечание 2), что кванторные правила не обладают свойством композиции даже по отношению к составным конституэнтам. Но они удовлетворяют этому свойству в видоизмененной форме, а именно, если интерпретировать слово "подобен" как означающее, что компоненты отличаются друг от друга только термами. Это все еще оставляет бесконечным число возможностей, так что доказательство теоремы о разрешимости не проходит [1]). Все же видоизмененное свойство композиции позволяет нам установить многие другие теоремы разд. 5E.

Назовем эту форму свойства композиции *видоизмененным свойством композиции*. Имеет место следующая

Теорема 6. *Если система* LX *обладает свойством композиции, то* LX* *обладает видоизмененным свойством композиции. Коль скоро* LX *обладает свойством отделения, сохранения и — в сингулярном случае — свойством дизъюнкции, то* LX* *также обладает этими свойствами.*

Здесь не предполагается, что вторая часть теоремы применима к системе LX, не обладающей свойством композиции. В частности, не утверждается справедливость аналога следствия 5E2.3 для случая, когда имеются кванторы.

В случае свойства дизъюнкции мы должны принять во внимание то, что *Σ является дилеммати́ческим в соответствии с определением разд. 5E4, так как оно не удовлетворяет (r6). Но единственной причиной этого является то, что новый параметр может содержать характеристическую переменную. Однако если, взбираясь вверх по дереву, мы натолкнемся на случай применения *Σ, то характеристическая переменная не может входить в $A \vee B$ и, следовательно, когда последняя формула заменяется — в зависимости от случая — на A или B, вывод все же будет правильным.

Следствие 6.1. *Если* Γ *— элементарная теорема* LX*, *не содержащая кванторов, то* Γ *доказуема в соответствующей* L*-системе.*

Доказательство. Для всех систем, за исключением LD*, это следует из свойства отделения. Если Γ верна в LD*, то Γ верна в LD_1^*. Но LD_1^* можно сформулировать, взяв Nx в виде

$$\mathfrak{X}, \neg A \Vdash A \to \mathfrak{X} \Vdash A$$

[1]) Неразрешимость LK* была установлена в статье Чёрча [NEP]; см. также его поправку [CNE]. В принципе это доказательство распространяется на другие L*-системы, но мы не будем вдаваться в вопрос о том, как именно это делается.

и это не позволяет исключить квантор. Следовательно, если бы использовалось кванторное правило, то квантор появился бы в Γ, что и требовалось доказать.

Для свойства дизъюнкции мы имеем следующее обобщение:

Теорема 7. *Пусть операции* V *и* Σ *рассматриваются как дилеммматические, а остальные — как недилеммматические. Пусть все операции в* $\mathfrak{X}$ *— недилеммматические, и пусть*

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x) \tag{16}$$

выполняется в LA_1^*, LM_1^* *или* LJ_1^*. *Тогда для некоторого* t *[получаемого конструктивно из доказательства утверждения* (16)*]*

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash A(t)$$

выполняется в той же системе.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5Е5. Продвигаясь вверх по дереву, мы никогда не сможем достигнуть квазиисходного утверждения.

Следующая теорема является в известном смысле обобщением теоремы 5Е4.

Теорема 8. *Пусть* Δ *— доказательство* (1) *в системе* $\mathrm{LX}^*(\mathfrak{S})$. *Пусть вспомогательные утверждения и контраксиомы, используемые в* Δ, *получены из схем вспомогательных утверждений и схем контраксиом, в которых свободными* U*-переменными для термов являются* $\mathfrak{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. *Пусть каждой схеме элементарных утверждений*

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \mid \mathfrak{b} \vdash_0 B$$

сопоставляется высказывание $G(b_1, \ldots, b_n)$, *где*

$$G \equiv A_1 \supset . A_2 \supset . \ldots . \supset . A_m \supset B$$

и пусть каждой схеме контраксиом

$$F_i(b_1, \ldots, b_n)$$

сопоставляется

$$G(b_1, \ldots, b_n)$$

имеющее вид

$$G \equiv \neg F_i$$

Пусть $\mathfrak{M}$ *состоит из всех высказываний вида*

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(где кванторы по переменным, фактически не входящим в G, *могут быть опущены). Тогда*

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{M} \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}$$

доказуемо в $\mathrm{LX}^*(\mathfrak{D})$.

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения (см. ниже, упражнение 9). Оно может быть получено либо по аналогии с доказательством теоремы 5Е4, либо непосредственно дедуктивной индукцией.

Теоремы о упрощении структурных правил едва ли нуждаются в особом рассмотрении. В формулировке III нам нужен квазиглавный конституэнт в Σ* и *Π.

5. Невыводимость; классическая оценка. Хотя L*-системы в принципе неразрешимы, все же часто оказывается, что применение методов, подобных методам разд. 5С5, ведет в особых случаях к разрешению. Этому часто может способствовать использование других методов, из которых важнейшим является метод опровержения посредством классической оценки. Мы рассмотрим здесь этот метод и затем применим его к доказательству недоказуемости в LA*.

Мы начнем с того, что установим некоторые определения, связанные с понятием *классической оценки*.

Определение 1. Для $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ *классической оценкой над областью* $\mathfrak{a}$ называется отображение f, которое каждому высказыванию A из расширения $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$ (т. е. каждому элементу из $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$) ставит в соответствие значение $f(A)$, которое является либо 0, либо 1. Это сопоставление значений произвольно для элементарных высказываний (т. е. членов $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ [1]), и каждое такое сопоставление определяет отдельную оценку. Для составных высказываний $f(A)$ рекурсивно определяется так [2]):

$$f(A \supset B) = 1 - f(A) + f(A) f(B)$$
$$f(A \wedge B) = f(A) f(B)$$
$$f(A \vee B) = f(A) + f(B) - f(A) f(B)$$
$$f(\neg A) = 1 - f(A)$$

---

[1]) Заметим, что элементарное высказывание вида

$$\varphi_k(t_1, \ldots, t_{n_k})$$

отлично от всех E_i и от любого высказывания того же вида с другой φ_k или с той же φ_k, но другими $t_1, \ldots, t_{n_k}$. Если в $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ бесконечно много различных членов, то оценки образуют несчетное множество.

[2]) Правые части следует интерпретировать как арифметические выражения. Заметим, что первые четыре случая дают обычные двузначные таблицы истинности.

$$f(\forall x A(x)) = \min_t \{f(A(t))/t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})\}\ ^{1})$$
$$f(\exists x A(x)) = \max_t \{f(A(t))/t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})\}$$

Говорят, что такая оценка *конструктивна*, если значения можно определить посредством эффективного процесса; это значит в случае $f(\forall x A(x))$, что мы либо можем эффективно определить, что $f(A(t)) = 1$ для всех t, либо эффективно указать такое s, что $f(A(s)) = 0$.

Определение 2. Оценка называется *допустимой*, если $f(B) = 1$ для всех элементарных утверждений B, таких, что

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash_0 B$$

где $f(A_1) = f(A_2) = \cdots = f(A_m) = 1$, и $f(B) = 0$ для контраксиомы или $B \equiv F$. (В $\mathfrak{L}$ каждая оценка допустима, если $f(F) = 0$.)

Определение 3. Если f — классическая оценка, а $\mathfrak{X}$ — просеквенция, то, по определению,

$$f(\mathfrak{X}) = 1 \qquad f(\mathfrak{X}) = 0$$

означает, что каждый конституэнт $\mathfrak{X}$ имеет значение 1 или 0 соответственно.

Определение 4. Если f — допустимая оценка, область которой включает в себя $\mathfrak{a}$, то говорят, что f является *контроценкой* для элементарного утверждения (1) в точности тогда, когда

$$f(\mathfrak{X}) = 1 \quad \text{и} \quad f(\mathfrak{Y}) = 0 \tag{17}$$

Утверждение (1) истинно согласно классической оценке, если для него не существует контроценки.

Понятие истинности, очевидно, является неопределенным. Однако неверность утверждения мы иногда можем установить конструктивно, с помощью конструктивной контроценки. В таком случае следующая теорема показывает, что недоказуемость также может быть установлена конструктивно.

Теорема 9. *Если контроценка для* (1) *определена конструктивно, то* (1) *не доказуемо ни в каком* LX*.

Доказательство. Мы покажем дедуктивной индукцией, что если (1) доказуемо, то предположение о существовании конструктивной контроценки f приводит к противоречию [2]). Это

[1]) Это означает минимум класса значений в фигурных скобках для всех t. Поэтому минимум равен 1 тогда и только тогда, когда все значения в фигурных скобках равны 1. Точно так же 'max' означает максимум значений в следующих фигурных скобках.

[2]) Это противоречие будет состоять в том, что некоторому высказыванию будет приписано два значения.

ясно, если (1) исходно. Индукционный шаг получится, когда мы покажем, что если (1) получено по правилу R и если конструктивно задана оценка f, удовлетворяющая (17) для заключения, то будет существовать оценка, удовлетворяющая (17) по крайней мере для одной из посылок.

Для алгебраических правил этот индукционный шаг ясен. (Он уже использовался в доказательстве теорем 5D6 и 6B9.)

Индукционный шаг для случая, где R есть П*, таков. Пусть вывод имеет вид

$$\frac{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A(c),\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x),\ \mathfrak{Z}}$$

Если f удовлетворяет условию (17) для заключения, то

$$f(\mathfrak{X}) = 1,\ f(\forall x A(x)) = 0,\ f(\mathfrak{Z}) = 0 \tag{18}$$

Для второго из этих равенств, поскольку f задана конструктивно, существует $s \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})$, такое, что

$$f(A(s)) = 0$$

Пусть теперь g — оценка над областью $\mathfrak{a}$, c, такая, что для каждого элементарного B

$$g(B) = f([s/c]B) \tag{19}$$

Тогда мы покажем индукцией по строению B, что (19) справедливо для всех $B \in \mathfrak{P}(\mathfrak{a})$. Например, если $B \equiv \forall y C(y)$ и $C' \equiv [s/c]C$, то

$$g(B) = \min_t \{g(C(t))/t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a}, c)\} = \min_t \{f(C'(t'))\}$$

где $t' \equiv [s/c]t$. Поскольку $t' \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})$ и любое $t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})$ является таким t', то

$$g(B) = \min_t \{f(C'(t))/t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})\} = f(\forall y C'(y)) = f([x/c]B)$$

Продолжая аналогично в других случаях, мы получим, что (19) имеет место для всех B. Отсюда мы имеем

$$g(\mathfrak{X}) = f(\mathfrak{X}) = 1$$
$$g(\mathfrak{Z}) = f(\mathfrak{Z}) = 0$$
$$g(A(c)) = f(A(s)) = 0$$

так что посылка R конструктивно неверна, что приводит к противоречию.

Индукционный шаг для случая, где R есть $*\Sigma$, двойствен приведенному. Другие случаи не вызывают затруднений. Этим завершается доказательство.

В качестве следствия из этой теоремы получается

Теорема 10. *Если* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{X}$ *и* A *и* B *элементарны, то утверждение*

$$\forall x \,.\, A \vee B(x) \mid \mathfrak{a} \vdash A \vee . \forall x B(x) \tag{20}$$

недоказуемо в LA* ($\mathfrak{D}$).

Доказательство. Если (20) доказуемо, то по теореме 2 доказуемо и утверждение, полученное посредством расширения области произвольным способом.

Утверждение (20) является частным случаем ($m = 0$, $n = 0$) утверждения

$$\forall x \,.\, A \vee B(x),\ \mathfrak{U}_m,\ \mathfrak{B}_n \mid \mathfrak{a} \vdash A \vee . \forall x B(x) \tag{21}$$

где

$$\mathfrak{U}_m \equiv B(t_1),\ \ldots,\ B(t_m)$$
$$\mathfrak{B}_n \equiv A \vee B(s_1),\ \ldots,\ A \vee B(s_n)$$

Мы увидим, используя правила формулировки IV, что никакое утверждение вида (21) не доказуемо.

Прежде всего, если бы (21) было получено применением V*, то посылка была бы одной из двух:

$$\forall x \,.\, A \vee B(x),\ \mathfrak{U}_m,\ \mathfrak{B}_n \mid \mathfrak{a} \vdash A$$
$$\forall x \,.\, A \vee B(x),\ \mathfrak{U}_m,\ \mathfrak{B}_n \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x B(x)$$

Обе они неверны в силу классической оценки над $\mathfrak{D}$: первая — если положить $f(A) = 0$, $f(B(t)) = 1$ для всех t; вторая — если положить $f(A) = 1$, $f(B(t_k)) = 1$ для всех k, $f(B(t)) = 0$ для некоторого t, отличного от $t_1, \ldots, t_m$ (это возможно в подходящем расширении $\mathfrak{a}$). По теореме 9 никакая из этих посылок не может быть выводимой в LA*. Следовательно, (21) не может быть получено по правилу V*.

Другими правилами формулировки IV, которые могут привести к (21), являются только *П с главным конституэнтом $\forall x.A \vee B(x)$ и *V, главным конституэнтом которого будет некоторое $A \vee B(t_k)$. В первом случае посылка опять имеет вид (21); в последнем случае существуют две посылки, из которых одна опять-таки вида (21). Поэтому поиск доказательства (20) приведет к бесконечному регрессу, так что доказательство невозможно, что и требовалось установить.

Следствие 10.1. *Мультиплярная форма* П* *не имеет места для* LA*.

Доказательство. Если бы она имела место, то мы могли бы вывести (20) так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A,\ B(c) \quad B(c) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A,\ B(c)}{A \vee B(c) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A,\ B(c)}\ *\mathrm{V}}{\forall x \,.\, A \vee B(x) \mid \mathfrak{a},\ c \vdash A,\ B(c)}\ *\Pi}{\forall x \,.\, A \vee B(x) \mid \mathfrak{a} \vdash A,\ \forall x B(x)}\ \Pi*}{\forall x \,.\, A \vee B(x) \mid \mathfrak{a} \vdash A \vee . \forall x B(x)}\ \mathrm{V}*$$

Замечание. Употребляемые здесь понятия родственны обычному понятию модели. Существуют, однако, некоторые различия. В настоящем контексте мы будем понимать *модель* в следующем смысле. Пусть дана содержательная система $\mathfrak{M}$ (которая может быть другой формальной системой), и пусть термам в качестве значений сопоставляются объекты из $\mathfrak{M}$. Тогда мы получим значения как для термов, так и для высказываний. Не обязательно, чтобы различные термы имели различные значения. Затем мы сопоставляем предикатам классы или отношения (значений) и интерпретируем элементарные высказывания как содержательные утверждения; если элементарное высказывание имеет вид

$$\varphi_k(t_1, \ldots, t_{n_k})$$

то содержательное утверждение — это утверждение, гласящее, что значения $t_1, \ldots, t_{n_k}$ связаны друг с другом в указанном порядке отношением, сопоставленным φ_k; высказывания E_i, которые можно считать частным случаем приведенных выше высказываний при $n_k = 0$, интерпретируются как некоторые содержательные утверждения относительно $\mathfrak{M}$. Когда содержательное утверждение истинно, мы сопоставляем высказыванию значение 1, когда же это утверждение ложно — значение 0 [1]). При этих обстоятельствах мы говорим, что $\mathfrak{M}$ является *полумоделью* (относительно указанного соответствия); если интерпретанты всех утверждаемых высказываний истинны [2]), то $\mathfrak{M}$ является *моделью*. Заметим, что клас-

[1]) Это является тогда оценкой в вышеприведенном смысле, но два высказывания с одним и тем же φ_k, соответствующие термы которых имеют одни и те же значения, должны иметь одно и то же значение как высказывания.

[2]) Здесь возможны по крайней мере две точки зрения. Приняв первую из них, мы можем считать, что лишь элементарные высказывания имеют интерпретанты и истинность составных высказываний, элементарных утверж-

сическая оценка, данная в определении 1, оказывается частным случаем этого определения: мы берем в этом случае термы в качестве их собственных значений и содержательные утверждения как утверждения, гласящие, что высказывание имеет значение 1. При изучении моделей придерживаются платонистской точки зрения и не настаивают на конструктивности; с этой точки зрения теорема 9 говорит, что допустимая оценка дает модель.

6. Таблицы доказательств. Поскольку известно, что классическое исчисление предикатов неразрешимо, не следует ожидать, что какой-либо алгорифм в любом случае дает решение вопроса о том, доказуема ли данная формула или нет. Самое большее, чего можно ожидать от таблицы, — это то, что ее замыкание будет необходимым и достаточным условием доказуемости; но таблица может продолжаться бесконечно, не замыкаясь и вместе с тем не показывая невозможности замыкания. В таком случае при расщеплении таблицы важно рассматривать все подтаблицы одновременно, чтобы никакая возможность замыкания не могла быть пропущена, если построение таблицы продолжать достаточно далеко.

Сейчас будет предложен алгорифм, удовлетворяющий этим условиям. Общие соглашения разд. 5Е8 остаются в силе. Предполагается, что рассматриваемой системой является LA^*_m, LC^*_m, LM^*_m, LJ^*_m, LE^*_m или LK^*_m; далее, что $\mathfrak{S}$ есть $\mathfrak{O}$, Ω пусто и $\mathfrak{e}$ состоит только из e_1. Область данного не указывается; область для начала таблицы должна включать в себе все термовые переменные, входящие свободно; на любом шаге область каждого утверждения, содержащегося в результате, должна быть такой же, что и область данного, за исключением того, что c в II и III, которую нужно добавить к области данного, чтобы получить область результата, должна быть первой переменной в $\mathfrak{g}$ (теорема 1), не содержащейся в области данного. В X и XI термы $t_1, \ldots, t_r$ — это e_1 и все переменные в области (и, следовательно, все атомы, встречающиеся в данном, вместе с e_1). L-правило, разрешающее вывод из результата к данному, указано справа, причем подразумевается, что там, где это необходимо, можно использовать *C*.

I $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Z}_1,\ A \supset B,\ \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{X},\ A \Vdash \mathfrak{Z}_1,\ B,\ \mathfrak{Z}_2} \qquad (\mathrm{P}*)$$

II $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Z}_1,\ \forall x A(x),\ \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{X} \mid c \vdash \mathfrak{Z}_1,\ A(c),\ \mathfrak{Z}_2} \qquad (\Pi*)$$

дений и т. д. определяется по определениям 1—4. В этом случае $\mathfrak{M}$ — модель для $\mathfrak{S}$. Во втором случае мы считаем, что наши операции соответствуют связкам в $\mathfrak{M}$, и тогда составные высказывания имеют интерпретанты. В таком случае требуется, чтобы истинность, определенная нашими соглашениями, влекла содержательную истинность интерпретантов.

III $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ \exists x A(x),\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ A(c),\ \mathfrak{X}_2 \mid c \vdash \mathfrak{Y}} \qquad (*\Sigma)$$

IV $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A \vee B,\ \mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A,\ B,\ \mathfrak{Y}_2} \qquad (\mathrm{V}*)$$

V $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ A \wedge B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ A,\ B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad (*\Lambda)$$

VI $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A \wedge B,\ \mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A,\ \mathfrak{Y}_2 \,\&\, \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ B,\ \mathfrak{Y}_2} \qquad (\Lambda*)$$

VII $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ A \vee B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ A,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y} \,\&\, \mathfrak{X}_1,\ B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad (*\mathrm{V})$$

VIII $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y},\ F} \qquad (\mathrm{Fj})$$

IX $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A,\ \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \Vdash A \text{ или } \mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y},\ A} \qquad (\mathrm{K}*)$$

X $$\frac{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ \exists x A(x),\ \mathfrak{Y}_2}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}_1,\ A(t_1),\ \ldots,\ A(t_r),\ \mathfrak{Y}_2,\ \exists x A(x)} \qquad (\Sigma'*)$$

XI $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ \forall x A(x),\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ A(t_1),\ \ldots,\ A(t_r),\ \mathfrak{X}_2,\ \forall x A(x) \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad (*\Pi')$$

XII $$\frac{\mathfrak{X}_1,\ A \supset B,\ \mathfrak{X}_2 \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ A \supset B \Vdash \mathfrak{Y},\ A \,\&\, \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ B \Vdash \mathfrak{Y}} \qquad (*\mathrm{P})$$

Из соглашения о том, что все правила должны браться в указанном порядке, есть важное исключение; именно, коль скоро любое из правил X—XII применимо к утверждению Г, мы должны применять эти и только эти правила с главными конституэнтами, первоначально появляющимися в Г, пока все такие возможности не исчерпаются; при этом мы не обращаем внимания на появление во время этого процесса других возможностей применения этих же или иных правил; только после того, как каждое из таких правил прошло указанное испытание, нормальный ход алгорифма возобновляется. Приведенная процедура ставит своей целью обеспечить анализ каждого конституэнта; иначе при введении новых термов согласно II и III может случиться, что алгорифм работает бесконечно, но не затрагивает ряда конституэнтов.

В системах, основанных на LC, правило IX опускается, квазиглавный конституэнт в XII удаляется и XII сдвигается вверх, чтобы стать непосредственно после VII. (По поводу других возможных модификаций см. разд. D4.) Правило VIII опускается во всех системах, где не постулируется Fj.

Теорема 11. *Для того чтобы элементарное утверждение было доказуемо, необходимо и достаточно, чтобы его таблица замыкалась.*

Доказательство следует образцу разд. 5Е8, но содержит ряд видоизменений [1]). Прежде чем начинать собственно доказательство, удобно будет привести ряд определений и сделать несколько предварительных замечаний.

Стандартную форму имеет доказательство, проводимое в формулировке IV [2]), с исходными утверждениями типа $(p1)'$ (разд. 5С9) или $(p2)$, причем правила *К* применяются в самом начале или непосредственно после применений правил, сингулярных справа (но без ограничения на вид главного конституэнта [3]). Согласно уже доказанным теоремам, любое доказательство можно сделать стандартным. Степенью стандартного доказательства будет, как и в следствии 5D1.6, общее число его неструктурных выводов; при этом правило Fj, которое просто опускает F, будет рассматриваться как неструктурное.

Конституэнт C в той или иной части будет называться простым в следующих случаях: (1) C элементарен; (2) C расположен справа и имеет вид главного конституэнта правила, сингулярного справа, и (3) C имеет вид квазиглавного конституэнта правила, которое требует главного конституэнта с той же стороны, где расположен C. Любой конституэнт C образован из простых конституэнтов с помощью операций, которые в правилах III—VII образуют главные конституэнты из подчиненных; число m применений таких операций будет называться порядком C. К-порядок стандартного доказательства Δ определяется как общая сумма порядков всех конституэнтов, введенных в Δ посредством *К*.

После этих предварительных замечаний мы переходим непосредственно к доказательству.

Доказательство достаточности получается сразу же, поскольку вывод от результата к данному можно произвести по правилу, указанному справа. В ряде случаев, где два подчиненных равны между собой или подчиненный уже встречается в данном, могут быть необходимы специальные правила формулировки IV.

Для доказательства необходимости рассмотрим сначала случай системы, основанной на LA*, а затем посмотрим, какие

[1]) Некоторые из этих видоизменений были сделаны слишком поздно, чтобы оказать влияние на разд. 5Е8 и 6В6.

[2]) В связи с ограничениями на *К* здесь будет необходим ряд правил, считавшихся тривиальными в разд. 5Е8. Процедура разд. 5Е8, ставящая своей целью опустить повторения, автоматически охватывает все специальные правила формулировки IV. Не вызывает затруднений распространить теорему 5D1 и ее следствия на формулировку IV.

[3]) Это необходимо ввиду условия (d) в теореме 5D1.

видоизменения необходимы для системы, основанной на LC*. Доказательство осуществляется, как и в теореме 5Е10, методом индукции. Пусть Г — данное утверждение и Δ — стандартное доказательство Г, степень которого положим равной n, а К-порядок — равным m. Если $n = 0$, то Г квазиисходно и алгорифм сразу замыкается. В противном случае примем за индуктивное предположение то, что теорема справедлива во всех случаях, когда степень меньше n, а также, если $m > 0$, во всех случаях, когда степень равна n и К-порядок меньше m.

Если к Г применимо одно из правил I—VII, то мы воспользуемся инверсионной теоремой, как в теореме 5Е10. Пусть M — главный конституэнт первого шага алгорифма, применяемого к Г. Если M имеет по крайней мере одного квазипараметрического предка, введенного по операциональному правилу, то по следствию 5D1.6 результаты первого шага алгорифма будут иметь стандартные доказательства степени меньше n. Если это не так, то M должен иметь положительный порядок, ибо M — непременно составное и опущение конституэнта любого из типов I или II привело бы к элементарной теореме с пустым консеквентом, что невозможно в F-формулировке. Тогда в силу следствия 5D1.6 доказательства результатов первого шага алгорифма будут иметь степень, не превосходящую n, и К-порядок, меньший m. В обоих случаях алгорифм замыкается по индуктивному предположению.

Мы можем поэтому предположить, что Г не содержит конституэнта, имеющего вид главного конституэнта одного из правил I—VII. Тогда не применимо ни одно из правил, предшествующих VIII, и последний вывод в Δ должен происходить по одному из правил Fj, К*, Σ*, *П или *Р.

Если последний вывод в Δ происходит по правилу Fj, то результат VIII даст посылку вывода. Так как результат можно получить из данного по К*, то он также имеет доказательство степени n. (Правило Fj следует понимать как структурное, чтобы сохранить индукцию по К-порядку.) Мы можем поэтому предположить, что Г содержит вхождение F и, следовательно, что алгорифм переходит к IX.

Если последний вывод в Δ происходит по правилу К*, то, поскольку это не может быть начальным применением К*, указанное применение должно быть из числа тех, которые следуют непосредственно за применением правила, сингулярного справа. Тогда одна из альтернатив IX даст заключение нашего применения и алгорифм даст посылку согласно I или II. Так как степень доказательства посылки будет $n - 1$, то алгорифм замыкается по индуктивному предположению. (Заметим, что нам нужно рассмотреть те альтернативы в IX, в которых A имеет подходящий вид,

и что нам следует исключить все другие альтернативы, если мы хотим, чтобы доказательство, образованное обращением алгорифма, было стандартным.) Если последний вывод в Δ происходит не по правилу K*, то он должен происходить по одному из правил Σ*, *П или *Р. В этом случае мы совершаем циклические перестановки с помощью IX, и алгорифм переходит к X.

Продолжаем доказательство теоремы. Напомним, что мы рассмотрели все случаи, за исключением тех, когда последний вывод в Δ происходит по одному из правил Σ*, *П или *Р и ни одно из правил I—VIII не применимо к Γ. Тогда по крайней мере одно из правил X—XII должно быть применимо к Γ. По нашему специальному соглашению мы должны прежде всего сделать циклические перестановки с помощью каждого из этих правил, используя лишь главные конституэнты, содержавшиеся в Γ, и не обращая внимания на возможные главные конституэнты (этих или любых других правил), которые могут появиться во время этого процесса. Циклические перестановки с помощью X и XI превратят Γ в Γ', которое получается из Γ ослаблением. Если конституэнты вида $A \supset B$, содержавшиеся в Γ, являются конституэнтами вида (14) разд. 5E8, то циклическая перестановка с помощью XII превратит Γ' в конъюнкцию $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_p$, где $p = 2^m$ (см. упр. 5E12), и каждое из них получается из Γ' обращением и ослаблением. Специальное соглашение предусматривает, чтобы все это было проделано так, как если бы это был единый шаг алгорифма.

Если последний вывод в Δ происходит по одному из правил Σ*, *П из посылки Γ'', то главный конституэнт содержится в Γ. В силу рассуждения, проведенного в конце доказательства теоремы B2, мы можем предположить, что подчиненным конституэнтом является одно из $A(t_i)$. Поэтому оно должно встречаться в Γ'. Поэтому Γ' можно получить из Γ'' ослаблением. Так как процесс обращения не увеличивает степени, то каждое Γ'_i можно получить ослаблением из утверждения со стандартным доказательством степени, меньшей n. По индуктивному предположению в этом случае алгорифм замыкается для каждого из $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_p$, а следовательно, и для Γ.

Остался лишь случай, когда последний вывод в Δ происходит по правилу *Р. Пусть посылками будут Γ_a и Γ_b. Если мы произведем те же шаги ослабления, что и при переходе от Γ к Γ', то мы получим утверждения Γ'_a и Γ'_b, из которых Γ' следует по правилу *Р с тем же главным конституэнтом. Каждое из Γ'_i можно получить из какого-то из Γ'_a, Γ'_b обращением относительно некоторого из $A_j \supset B_j$ и ослаблениями. Так как обращение меняет структуру доказательства лишь тем, что вычеркиваются некоторые операциональные выводы (а именно выводы по правилу R разд. 5D1), то каждое из Γ'_i можно получить ослаблением некоторого утверждения, имеющего доказательство со степенью, меньшей n. Как и раньше, алгорифм тем самым замыкается для каждого Γ'_i, а потому и для Γ.

Этим завершается доказательство теоремы для систем, основанных на LA*. Для систем, основанных на LC*, положение проще. Прежде всего все применения *K* в стандартном доказательстве производятся вначале, поэтому нам не нужно IX и у нас нет альтернативных расщеплений таблицы. Далее, поскольку *Р обратимо без квазиглавного конституэнта, мы можем исключить этот конституэнт, поставить это правило перед VIII и рассматривать его так же, как правила I—VII. Это существенно упрощает дело в конце доказательства.

Теорема 11 поэтому доказана для всех систем, упомянутых в предварительном обсуждении.

Упражнения

Упражнения 1—3 являются леммами при сведении к предваренной нормальной форме в разд. D1.

Там же можно найти частичные ответы.

1. Показать, что все следующие утверждения верны в LC* и что три из них не верны в LA*:

$$\forall x \,.\, A \supset B(x) \Vdash A \supset . \forall x B(x)$$
$$A \supset . \exists x B(x) \Vdash \exists x \,.\, A \supset B(x)$$
$$\forall x \,.\, A(x) \supset B \Vdash \exists x A(x) \,.\, \supset B$$
$$\forall x A(x) \,.\, \supset B \Vdash \exists x \,.\, A(x) \supset B$$
$$\forall x \,.\, A(x) \wedge B \Vdash \forall x A(x) \,.\, \wedge B$$
$$\exists x A(x) \,.\, \wedge B \Vdash \exists (x) \,.\, A(x) \wedge B$$
$$\forall x \,.\, A(x) \vee B \Vdash \forall x A(x) \,.\, \vee B$$
$$\exists x A(x) \,.\, \vee B \Vdash \exists x \,.\, A(x) \vee B$$

2. Показать, что одно из следующих утверждений истинно в LM*, а другое — в LK*, но не в LJ*:

$$\neg\, \forall x A(x) \Vdash \exists x \,.\, \neg\, A(x)$$
$$\forall x \,.\, \neg\, A(x) \Vdash \neg\, \exists x A(x)$$

Для первого из них показать, что квантор общности можно ввести последним; для второго — то же относительно квантора существования.

3. Пусть $M[A]$ — высказывание, содержащее вхождение высказывания A и такое, что M не содержит x, если только x не входит в A. Подразумевая под $M[B]$ результат замены A на B в этом конкретном вхождении, показать, что если вхождение A

положительно, то

$$M[\forall x A(x)] \Vdash \forall x M[A(x)]$$
$$\exists x M[A(x)] \Vdash M[\exists x A(x)]$$

а если вхождение отрицательно, то

$$M[\exists x A(x)] \leqslant \forall x M[A(x)]$$
$$\exists x M[A(x)] \leqslant M[\forall x A(x)]$$

4. Определить, какие из следующих утверждений истинны в LJ* (где A, B, C и т. д. элементарны):

(a) $\Vdash \neg\neg \forall x (A(x) \vee \neg A(x))$

(b) $\Vdash \neg\neg (\forall x . A \vee B(x) . \supset . A \vee \forall x B(x))$

(c) $\Vdash \neg\neg \forall y (\forall x (A(y) \vee B(x)) \supset A(y) \vee \forall x B(x))$

(d) $\Vdash \neg\neg (\forall x \neg\neg A(x) . \supset . \neg\neg \forall x A(x))$

(e) $\neg\neg (\neg \exists x \neg A(x)) \Vdash \neg\neg \forall x \neg\neg A(x)$

(Клини [IMM], теорема 58[1]) со ссылкой на источники.)

5. Показать, что

$$A(a) \vee A(b) \Vdash \exists x A(x)$$

не может быть доказано в LA_1^*, если последним применить правило Σ^*. (Клини [IMM], стр. 463[2]).)

6. Проверить утверждение из примера 1 о том, что

$$\forall x A(x) \Vdash \forall x . A(x) \vee B$$

не может быть выведено даже в LK_m^*, если последним применяется правило *П. (Клини [PIG], стр. 25.)

7. Показать, что

$$\forall x . A \wedge B(x) \Vdash A \wedge \forall x B(x)$$
$$A \vee \exists x B(x) \Vdash \exists x . A \vee B(x)$$

справедливы в LA*, но внешние кванторы должны вводиться ранее внутренних даже в LC*.

8. Показать, что, для того чтобы

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}$$

имело место в LK*, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}, F$$

выполнялось в LE*. (Шураньи [RTE], теорема III; приписывается X.Тиле.)

[1]) Стр. 430 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) Стр. 409 русского издания.— *Прим. ред.*

9. Завершить доказательство теоремы 8.

10. Какое влияние на теорему 7 оказывает неисключение *V?

11. Показать (не обязательно конструктивно), что доказуемое элементарное утверждение в любой L*-системе верно в любой модели. Какие видоизменения необходимы, чтобы сделать это доказательство конструктивным?

* 12. Пересмотреть алгорифм разд. 5 так, чтобы он был применим даже тогда, когда Ω непусто. (Для классических случаев такой пересмотр дан в разд. D4.)

* 13. Допустим, что мы хотим ввести ε-оператор Гильберта правилами

$$\frac{\mathfrak{X}, A(b) \mid \mathfrak{a}, b \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, A(\varepsilon x A(x)) \mid \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{Y}} \qquad \frac{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash A(t), \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash A(\varepsilon x A(x)), \mathfrak{Z}}$$

Каким образом видоизменилась бы теория L*-системы? Можно ли в ней вывести элиминационную теорему, и если да, то что можно сказать относительно отделения новых правил? Не является ли левое правило излишним? (Эти вопросы относятся к ε-теоремам, установленным в книге Гильберта и Бернайса [GLM. II]. Кажется очевидным, что доказательства этих теорем можно значительно улучшить, если использовать генценовские методы. Ср. также Ассер [TLA], Маэхара [PCE], [EAH], Расёва [ETh].)

C. ДРУГИЕ ФОРМЫ ТЕОРИИ КВАНТОРОВ

В этом разделе мы рассмотрим другие формулировки теории кванторов. В разд. 1 мы займемся T-формулировкой, а в разд. 2 — H-формулировкой. Формулировки структурного типа в этой книге рассматриваться не будут.

1. T-формулировка теории кванторов. T-правила для кванторов были предложены при обсуждении семантики в разд. A. Они таковы:

$$\Pi e \quad \frac{\forall x A(x)}{A(t)} \qquad \Pi i \quad \frac{A(c)}{\forall x A(x)}$$

$$\Sigma e \quad \frac{\exists x A(x) \qquad \overset{[A(c)]}{B}}{B} \qquad \Sigma i \quad \frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

причем предполагается, что c не входит ни в какую посылку в Πi, а также в B или в какие-либо посылки, из которых получено B в Σe. Когда эти правила добавлены к формулировке системы TX, получающаяся формулировка будет называться системой TX*. Мы имеем, таким образом, формулировки TA*, TC*, . . ., TK* и т. д.

Пусть утверждение

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash^{\mathrm{T}} B \tag{1}$$

справедливо в точности тогда, когда существует дерево с заключением B и с посылками, содержащимися в $\mathfrak{X}$, а область $\mathfrak{a}$ включает в себя все переменные, входящие свободно в посылки или в B.

Как и ранее, мы используем обозначение

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash^{\mathrm{L}} B \tag{2}$$

когда необходимо ясное указание, что речь идет о элементарном утверждении L*-системы.

В следующих доказательствах опущены технические подробности, относящиеся к области. Если необходимо о них позаботиться, то это можно сделать по образцу теоремы B2.

Теорема 1. *Для того чтобы* (2) *выполнялось в* T*-*системе*, *необходимо и достаточно*, *чтобы* (1) *выполнялось в соответствующей* L*-*системе*.

Доказательство необходимости. Для алгебраических правил это следует из теорем 5D6 и 6C1. Достаточно добавить рассмотрение индукционного шага для кванторных правил. Мы должны показать, что L*-правила справедливы для T*-системы, если '$\vdash^{\mathrm{L}}$' интерпретировать как '$\vdash^{\mathrm{T}}$'.

Это ясно для П* и Σ*, поскольку эти правила при указанной интерпретации становятся соответственно правилами Пi и Σi.

Для *П посылка утверждает, что существует T-доказательство B с посылками $\mathfrak{X}$ и $A(t)$. Помещая над последней посылкой ее вывод из $\forall x A(x)$ по правилу Пе, мы получаем вывод, постулируемый заключением *П.

Для *Σ рассуждаем так. Согласно посылке интерпретированного правила *Σ, существует T-вывод B из $A(c)$ и $\mathfrak{X}$, где c не входит ни в $\mathfrak{X}$, ни в B. Тогда, согласно Σе, существует T-вывод B из $\mathfrak{X}$ и $\exists x A(x)$.

Этим завершается доказательство необходимости.

Доказательство достаточности. Теперь мы должны показать, что когда T*-правила интерпретируются в L*-системе, они справедливы как выводы в последней. Каждая посылка A интерпретируется как $\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash A$ (с подходящей $\mathfrak{a}$), и каждое правило вывода вида

$$\frac{\begin{matrix}[B]\\ A \quad C\end{matrix}}{D}$$

интерпретируется как

$$\frac{\mathfrak{X} \Vdash A \qquad \mathfrak{X}, B \Vdash C}{\mathfrak{X} \Vdash D}$$

с соответствующей областью.

Это ясно для Пi и Σi, так как при указанной интерпретации они превращаются в П* и Σ*. Для Пе рассуждаем так:

$$\frac{\text{Гп} \qquad \dfrac{A(t) \mid \mathfrak{a} \vdash A(t)}{\forall x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash A(t)}\ {}^{*}\Pi}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x)}\ \text{ЭТ}$$
$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash A(t)$$

Для Σе доказательство таково:

$$\frac{\text{Гп. 1} \qquad \dfrac{\text{Гп. 2}\quad \mathfrak{X}, A(c) \mid \mathfrak{a}, c \vdash B}{\mathfrak{X}, \exists x A(x) \mid \mathfrak{a} \vdash B}\ {}^{*}\Sigma}{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \exists x A(x)}\ \text{ЭТ}$$
$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash B$$

Этим завершается доказательство.

2. H-формулировки теории кванторов. Существует ряд способов образования систем теории кванторов, аналогичных системам HX. Формулировки различны в зависимости от того, допускаются ли пустые кванторы или нет, и от того, настаивают ли, чтобы правило modus ponens было единственным, или же допускают и правило обобщения для свободных переменных. Мы назовем все эти системы H*-системами, а система, эквивалентная LX*, TX*, будет называться HX* [1]). Такую систему было бы уместно называть исчислением высказываний, исходя из того, что слово 'исчисление' — в противоположность 'алгебре' — предполагает наличие кванторов; но в традиционном употреблении термин 'исчисление высказываний' используется для алгебраических систем гл. 5 и 6, а 'исчисление предикатов', или 'функциональное исчисление'—для систем H*.

Исчисление предикатов основано на тех же определениях понятий терма, высказывания, вхождения и подстановки, что и в разд. A4. Мы предположим, однако, что система $\mathfrak{S}$ пуста и что операций (Ω) нет; это на самом деле несущественно, так как при рассмотрении случаев, где этого предположения не делается, нужны лишь небольшие изменения. Системы H являются ассерторическими; элементарное утверждение может быть записано в виде

$$\vdash A \tag{3}$$

Запись

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash^{\mathrm{H}} A \tag{4}$$

[1]) Различные варианты HX* аналогичны различным формулировкам LX*.

будет означать, что существует вывод утверждения (3), использующий правила системы, из посылок, являющихся либо исходными утверждениями системы, либо утверждениями высказываний из $\mathfrak{X}$, причем этот вывод таков, что все переменные, входящие свободно в $\mathfrak{X}$ или в A, содержатся в $\mathfrak{a}$. Иногда мы будем игнорировать различие между высказыванием A и утверждением (3).

Особым схемам утверждений, из которых выбираются исходные утверждения, приписываются следующие имена:

Π_0 $\quad \vdash \forall x A(x) . \supset . A(t)$

Π_1 $\quad \vdash \forall x . C \supset A(x) : \supset . C \supset \forall x A(x)$

Π_2 $\quad \vdash C \supset \forall x C$

ПР $\quad \vdash \forall x . A(x) \supset B(x) : \supset : \forall x A(x) . \supset . \forall x B(x)$

Σ_0 $\quad \vdash A(t) . \supset . \exists x A(x)$

Σ_1 $\quad \vdash \forall x . A(x) \supset C : \supset : \exists x A(x) . \supset . C$

Σ_2 $\quad \vdash \exists x C . \supset . C$

ΣР $\quad \vdash \forall x . A(x) \supset B(x) : \supset : \exists x A(x) . \supset . \exists x B(x)$

Здесь $A(x)$, $B(x) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{a}, x)$, $C \in \mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, x не входит свободно в C и $t \in \mathfrak{t}(\mathfrak{a})$. Заметим, что Π_2 и Σ_2 требуют пустых кванторов.

Правила исчислений предикатов таковы:

Ph (modus ponens)

$$\frac{A \supset B \quad A}{B}$$

Ph (обобщение). Если c — неопределенная[1], то

$$\frac{A(c)}{\forall x A(x)}$$

Их следует интерпретировать как процедурные правила в том же смысле, что и в Т-системе.

Система НХ*, постулирующая правила Ph и Ph, будет называться *исчислением предикатов с обобщением* и обозначаться $НХ^*_g$; система НХ*, постулирующая только правило Ph, будет называться *собственным исчислением предикатов* и обозначаться $НХ^*_p$. Мы рассмотрим эти два случая отдельно.

3. Исчисление предикатов с обобщением. Системы $НХ^*_g$ имеют две формы. В первой форме схемами аксиом являются Π_0, Π_1, Σ_0 и Σ_1; во второй форме схемы Π_1 и Σ_1 заменяются на Π_2, ПР, Σ_2, ΣР. Вторая форма подходит, очевидно, только для того случая, когда допускаются пустые кванторы. Следующая теорема справедлива для обеих форм, но доказательство проводится только для первой формы; справедливость теоремы для второй формы будет следовать из теоремы 3.

[1]) То есть если посылка правила выводима из посылок, не содержащих c, то заключение выводимо из тех же посылок.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы* (4) *имело место в системе* $НХ^*_p$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash^{\mathrm{T}} A \tag{5}$$

имело место в системе ТХ*.

Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и. При интерпретации (4) как (5) правило Ph становится правилом Ре, а правило Ph — правилом Пi. В силу теоремы 1 доказать, что схемы исходных утверждений приводят к истинным утверждениям вида (5), — это просто упражнение на применение технических приемов разд. В. Необходимость, таким образом, получается по дедуктивной индукции.

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и. Мы должны показать, что правила ТХ*, когда их интерпретируют в терминах (4) (ср. интерпретацию в терминах L-утверждений разд. 1), верны в НХ*. Для Пе это утверждение следует в силу Π_0 и Ph, для Σi — в силу Σ_0 и Ph и для Пi — в силу Ph. Для алгебраических правил, если только утверждение было установлено для Pi, это было показано в разд. 5В2. Достаточно поэтому установить наше утверждение для Pi и Σе.

Прежде всего установим Pi. Предположим, что Δ — вывод B из A, шагами которого являются $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Единственное добавление, которое нужно сделать к доказательству теоремы 5В2, — это случай, когда B_k получается из B_i посредством Ph. В этом случае B_i — это некоторое $D(c)$ и B_k имеет вид $\forall x D(x)$. По индуктивному предположению имеем

$$\vdash A \supset D(c)$$

где c не входит в A свободно[1]). В силу Ph

$$\vdash \forall x . A \supset D(x)$$

и, следовательно, в силу Π_1 и Ph

$$\vdash A \supset \forall x D(x)$$

что́ и является требуемым образом B_k. Это — с учетом доказательств из разд. 5В2 и 5В3 — завершает доказательство для Pi и для всех алгебраических правил.

[1]) В силу требований, накладываемых на Ph, c не входит ни в одну из посылок, использованных в выводе B_i. Если A не использовалась как посылка при выводе B_i, то c могла входить в A, но тогда мы можем заменить c некоторой другой переменной, не входящей в A. Это можно показать с помощью рассуждений, подобных применяемым в доказательстве леммы 1 из разд. А.

Доказательство для Σe теперь таково. Из правой посылки по Pi получаем

$$\vdash A(c) \supset B$$

а отсюда по Πh

$$\vdash \forall x \,.\, A(x) \supset B$$

Следовательно, в силу Σ_1 и Ph получаем

$$\vdash \exists x A(x) \,.\, \supset B$$

Отсюда и из левой посылки Σe получаем требуемый результат в силу Ph.

Этим заканчивается доказательство теоремы 2 для первой формы HX^*_g. Следующая теорема распространяет результат на вторую форму.

Теорема 3. *Если допускаются пустые кванторы и постулируются* Π_0, Ph, Πh, *то схема* Π_1 *эквивалентна конъюнкции* Π_2 *и* ΠP; *далее, если имеют место* Π_0, Σ_0, Π_1, Ph, Πh, *то схема* Σ_1 *эквивалентна конъюнкции* Σ_2 *и* ΣP.

Доказательство. Доказательство будет состоять из: (1) вывода Π_1 из Π_2, ΠP; (2) вывода Σ_1 из Σ_2, ΣP; (3) вывода Π_2 из Π_1; (4) вывода Σ_2 из Σ_1; (5) вывода ΠP из Π_0, Π_1; (6) вывода ΣP из Π_0, Π_1, Σ_0, Σ_1.

Вывод Π_1:

$$\vdash \forall x \,.\, C \supset A(x) : \supset : \forall x C \,.\, \supset \,.\, \forall x A(x) \quad \text{по ΠP}$$

Отсюда мы получаем Π_1 в силу Π_2 и ТЗ.

Вывод Σ_1:

$$\vdash \forall x \,.\, A(x) \supset C : \supset : \exists x A(x) \,.\, \supset \,.\, \exists x C \quad \text{по ΣP}$$

Опять-таки мы получаем Σ_1 в силу Σ_2 и ТЗ.

Вывод Π_2:

$$\vdash C \supset C \quad \text{по PI}$$
$$\vdash \forall x \,.\, C \supset C \quad \text{по Πh}$$
$$\vdash \forall x \,.\, C \supset C : \supset : C \,.\, \supset \forall x C \quad \text{по } \Pi_1$$
$$\vdash C \,.\, \supset \,.\, \forall x C \quad \text{по Ph}$$

Вывод Σ_2:

$$\vdash \forall x \,.\, C \supset C \quad \text{как в предыдущем случае}$$
$$\vdash \forall x \,.\, C \supset C : \supset : \exists x C \,.\, \supset \,.\, C \quad \text{по } \Sigma_1$$
$$\vdash \exists x C \,.\, \supset \,.\, C \quad \text{по Ph}$$

Вывод ΠP. По теореме 2 достаточно показать выводимость в TX*, что делается так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \,.\, A(x) \supset B(x)}{A(c) \supset B(c)}\,\Pi e \qquad \dfrac{\forall x A(x)}{A(c)}\,\Pi e}{B(c)}\,Pe}{\forall x B(x)}\,\Pi i$$

Отсюда, дважды применяя Pi, получим ΠP.

Вывод ΣP. Как и раньше, достаточно показать выводимость в TX*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{\forall x \,.\, A(x) \supset B(x)}}{A(c) \supset B(c)}\,\Pi e \qquad \dfrac{\overline{3}}{A(c)}}{B(c)}\,Pe}{\exists x B(x)}\,\Sigma i \qquad \dfrac{2}{\exists x A(x)}}{\exists x B(x)}\,\Sigma i - 3$$

Снова применяя Pi дважды, получаем ΣP.

Этим завершается доказательство теоремы 3.

4. Собственное исчисление предикатов. Для исчисления HX^*_p требуются некоторые дополнительные соглашения. Если $A(a)$ — высказывание, содержащее a, то мы назовем $\forall x A(x)$ *замыканием* $A(a)$ относительно a. Если $\mathfrak{b}$ — класс переменных, то замыканием A относительно $\mathfrak{b}$ будет высказывание, которое получится, если исходить из A и последовательно применять операцию замыкания по отношению к переменным из $\mathfrak{b}$ в некотором порядке.

Если дан класс $\mathfrak{a}$ реальных переменных, то мы формулируем *собственное исчисление предикатов* HX^*_p *с областью* $\mathfrak{a}$, взяв в качестве исходных утверждений все замыкания исходных утверждений системы HX^*_g относительно переменных, не содержащихся в $\mathfrak{a}$, а также аналогичные замыкания примеров ПР (если они еще не постулировались).

Теорема 4. *Для того чтобы* (4) *имело место для системы* HX^*_p, *необходимо и достаточно, чтобы оно было выводимо в соответствующей системе* HX^*_g.

Доказательство необходимости. Если (4) выполняется в HX^*_p, то существует вывод, утверждения которого являются: (*a*) либо утверждениями высказываний из $\mathfrak{X}$, (*b*) либо аксиомами, (*c*) либо следствиями из предшествующих утверждений согласно Ph. В случае (*a*) (2) истинно в любой форме исчисления. В случае (*b*) формула B является, по определению, замыканием

формулы B' относительно некоторой области $\mathfrak{b}$, причем утверждение формулы B' является аксиомой в HX_g^*; тогда в HX_g^* имеем

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \vdash B'$$

откуда получаем (4), последовательно применяя Ph. В случае (*c*) примем в качестве индуктивного предположения, что утверждение теоремы имеет место для посылок; тогда оно имеет место и для (4), так как Ph является правилом системы с обобщением.

Доказательство достаточности сводится к тому, чтобы показать допустимость Ih для собственного исчисления предикатов. Мы докажем это, воспользовавшись намеченным в разд. 2A2 методом, а именно покажем, что можно исключить применение Ih, над которым в дереве доказательства нет других применений этого правила. Доказательство будет подробно проведено для случая, когда допускаются пустые кванторы и постулируются правила Π_2 и ПР; замечание в конце доказательства показывает, как получить этот результат для других формулировок с пустыми кванторами, а рассмотрение случаев, где пустые кванторы не допускаются, предоставляется читателю в качестве упражнения.

Итак, предположим, что у нас есть вывод в HX_p^*, показывающий, что

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a},\ b \vdash A(b) \tag{6}$$

где b не входит в $\mathfrak{X}$. Следует показать, что

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A(x) \tag{7}$$

Мы сделаем это дедуктивной индукцией. Нужно рассмотреть три следующих случая:

Случай 1. $A(b)$ подобно конституэнту $\mathfrak{X}$. Тогда $A(b)$ не содержит b и существует C из $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, такое, что

$$A(b) \equiv A(x) \equiv C$$

В этом случае мы можем перейти от (6) к (7) по Π_2.

Случай 2. $A(b)$ — аксиома. Тогда $\forall x A(x)$ также является аксиомой, а потому имеет место (7).

Случай 3. Утверждение $\vdash A(b)$ получается согласно Ph. Пусть $A(b) \equiv A_2(b)$, тогда существует такое $A_1(b)$, что

$$\vdash A_1(b)$$
$$\vdash A_1(b) \supset A_2(b)$$

предшествует $\vdash A_2(b)$ в доказательстве (6). По индуктивному предположению

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A_1(x) \tag{8}$$
$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x . A_1(x) \supset A_2(x) \tag{9}$$

Из (9) получаем, согласно ПР и Ph,

$$\mathfrak{X} \mid \mathfrak{a} \vdash \forall x A_1(x) . \supset . \forall x A_2(x)$$

Отсюда и из (8), согласно Ph, получаем (7).

Замечание 1. Если правило Π_2 не пост
можно вывести, как показано в доказательстве
$$\vdash \forall x C \supset C$$
и Π_1. Но (10) получается только в случаях 2 и 3,
Π_2. Заметим, что ПР постулируется в любой

Упражнения

1. Показать, что если добавить к HX схемы

$$\vdash \forall x A(x) . \supset . A(t)$$
$$\vdash A(t) . \supset . \exists x A(x)$$

и правила

$$\vdash C \supset A(a) \longrightarrow \vdash C \supset \forall x A(x)$$
$$\vdash A(a) \supset C \longrightarrow \vdash \exists x A(x) \supset C$$

где a не свободна в C, то получается система в то
утверждениями, что и HX*. (Это по существу фор
берта и Аккермана [GZT$_3$]. В [GZT$_4$] используетс
подобная формулировке Шютте.)

2. В математике мы часто пользуемся следу
суждения. Отправляясь от определенных посы
теорему, гласящую, что

$$\vdash \exists x A(x)$$

Тогда мы говорим: пусть y такова, что

$$A(y)$$

Затем, используя modus ponens и посылки, не
мы выводим

$$\vdash B$$

Допуская, что такие рассуждения можно оправ
тельства, использующие HX* и посылки, не с
ни y, показать, что эти рассуждения устанавлив

$$\vdash B$$

как следствие исходных посылок. Каковы требуем
(Россер [LMt], стр. 128 и след., ср. Куайн [MeL].

3. Показать, что если интерпретировать

$$A_1, \ldots, A_m \mid \mathfrak{a} \vdash B_1, \ldots, B_n$$

как

$$\vdash \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_m \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n$$

где все имеющиеся свободные переменные содержатся в $\mathfrak{a}$, то выполняются правила системы LK*. Использовать эти правила для формулировки системы, в которой утверждается то же, что и в HK*. (Ср. Шютте [SWK].)

4. Вывести

$$\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall y \forall x A(x, y)$$

в HA^*_g и HA^*_p.

5. "Исчисление предикатов с равенством" часто определяется как исчисление, утверждения которого получаются добавлением к исчислению предикатов схем

$$\vdash a = a$$
$$\vdash a = b \,.\supset.\, A(a) \supset A(b)$$

Показать, что если добавить эти схемы как схемы утверждений к некоторому HX* ($\mathfrak{S}$), то получающаяся система совпадает с системой, полученной из LX*($\mathfrak{S}'$), где $\mathfrak{S}'$ образуется из $\mathfrak{S}$ добавлением вспомогательных схем

$$a = a$$
$$a = b, \qquad b = c \vdash a = c$$
$$a = b, \qquad \psi(a) \vdash \psi(b)$$

(здесь ψ — любой унарный термовый оператор, полученный фиксированием всех аргументов некоторого φ из Φ, кроме одного). Поэтому исчисление предикатов с равенством является специальным случаем исчисления предикатов над $\mathfrak{S}$.

* 6. Каким путем можно было бы видоизменить настоящую теорию, если бы предположение A1 было опущено, и как относилась бы полученная теория к H-теориям для кванторов над произвольными (в том числе пустыми) областями? (См. Гальперин [QTE], [TRQ], Яськовский [RSF], разд. 5, Мостовский [RPP], Куайн [QED].)

* 7. В какой степени результаты разд. 4 зависят от порядка кванторов при образовании замыкания? (Ср. Куайн [MLg_2], стр. 88—95.)

D. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭПИТЕОРИЯ

Среди огромного разнообразия эпитеорем, относящихся к классическому исчислению предикатов, мы рассмотрим лишь четыре, в том числе одну неконструктивную. Их, по-видимому, можно распространить с соответствующими видоизменениями на другие системы — распространения на LC*, LE* в большинстве случаев получаются сразу. Но подробно заниматься этим вопросом мы не будем (сделаем лишь несколько замечаний); на протяжении всего раздела предполагается, что мы имеем дело с LK* или некоторыми ее вариациями.

1. Предваренная нормальная форма. Говорят, что об системы HX* находится в *предваренной нормальной форме*, если все его кванторы расположены снаружи, т. е. в его конструкции из атомов сначала производятся все алгебраические операции, а затем навешиваются кванторы. Например,

$$\forall x \exists y \forall u \forall v \exists w A$$

находится в предваренной нормальной форме, если A не содержит кванторов, но

$$A \vee \forall x B(x) \,.\supset.\, \exists x C(x)$$

не находится в предваренной нормальной форме.

В обычной формулировке для HK*, справедлизой также для HC*, утверждается, что если дан любой об A, то существует об B в предваренной нормальной форме, такой, что

$$\vdash A \supset B \,\&\, \vdash B \supset A$$

Мы докажем несколько более общую теорему, ведущую к этому результату, а именно что если A содержит квантор внутри себя, т. е. в начале алгебраической компоненты, то этот квантор можно вынести наружу. Новый квантор будет того же вида, что и первоначальный, если вхождение было положительным, и противоположного вида, если вхождение было отрицательным.

Мы напомним определения $\leqslant$ и $=$ из разд. 5A1:

$$A \leqslant B \rightleftarrows \vdash A \supset B$$
$$A = B \rightleftarrows A \leqslant B \,\&\, B \leqslant A$$

В силу теорем разд. 5D4

$$A \leqslant B \rightleftarrows A \Vdash B$$

Символы '$\leqslant$' и '$\Vdash$' поэтому могут заменять друг друга.

Если A — высказывание, то пусть $M[A]$ — высказывание, содержащее фиксированную алгебраическую компоненту A, вхо-

ждение которой либо положительно, либо отрицательно. Тогда $M[B]$ будет высказыванием, полученным заменой A на B в этом фиксированном вхождении. В последующем будем предполагать, что ни b, ни x не входят в $M[A]$, если они не входят в A.

Теорема 1. *Если вхождение A в $M[A]$ положительно, то*

$$\forall x M[A(x)] = M[\forall x A(x)] \tag{1}$$

$$\exists x M[A(x)] = M[\exists x A(x)] \tag{2}$$

Если вхождение A в $M[A]$ отрицательно, то

$$\forall x M[A(x)] = M[\exists x A(x)] \tag{3}$$

$$\exists x M[A(x)] = M[\forall x A(x)] \tag{4}$$

Доказательство. Часть этого доказательства легка. Действительно, так как

$$\forall x A(x) \leqslant A(b) \leqslant \exists x A(x)$$

то мы в силу теоремы о замене (разд. 5D3) имеем в положительном случае

$$M[\forall x A(x)] \leqslant M[A(b)] \leqslant M[\exists x A(x)] \tag{5}$$

и, следовательно, в силу Π^* и $^*\Sigma$ 70

$$M[\forall x A(x)] \leqslant \forall x M[A(x)] \tag{6}$$

$$\exists x M[A(x)] \leqslant M[\exists x A(x)] \tag{7}$$

В отрицательном случае справедливы неравенства, противоположные неравенствам (5); следовательно, в силу того же рассуждения получаем

$$\exists x M[A(x)] \leqslant M[\forall x A(x)] \tag{8}$$

$$M[\exists x A(x)] \leqslant \forall x M[A(x)] \tag{9}$$

Эти результаты справедливы для всех систем LX*.

Чтобы установить обращения (6)—(9), мы воспользуемся структурной индукцией. Базис этой индукции, имеющий вид $M[A] \equiv A$, тривиален. Индуктивный шаг проводится с помощью следующих

формул:

$$\forall x . B \supset A(x) \Vdash B \supset . \forall x A(x) \qquad (\text{LA}^*)$$

$$B \supset . \exists x A(x) \Vdash \exists x . B \supset A(x) \qquad (\text{LC}^*)$$

$$\forall x A(x) . \supset B \Vdash \exists x . A(x) \supset B \qquad (\text{LC}^*)$$

$$\forall x . A(x) \supset B \Vdash \exists x A(x) . \supset B \qquad (\text{LA}^*)$$

$$\forall x . A(x) \wedge B \Vdash \forall x A(x) . \wedge B \qquad (\text{LA}^*)$$

$$\exists x A(x) . \wedge B \Vdash \exists x . A(x) \wedge B \qquad (\text{LA}^*)$$

$$\forall x . A(x) \vee B \Vdash \forall x A(x) . \vee B \qquad (\text{LC}^*)$$

$$\exists x A(x) . \vee B \Vdash \exists x . A(x) \vee B \qquad (\text{LA}^*)$$

$$\neg \forall x A(x) \Vdash \exists x . \neg A(x) \qquad (\text{LK}^*)$$

$$\forall x . \neg A(x) \Vdash \neg \exists x A(x) \qquad (\text{LM}^*)$$

Доказательства этих формул предоставляются читателю в качестве упражнений (см. упражнения B1 и B2). Системы, в которых они имеют место, указаны справа.

2. Теорема Эрбрана — Генцена. Речь сейчас пойдет о теореме, которую Генцен назвал обобщенной основной теоремой ("erweiterter Hauptsatz"). Теорема эта, однако, имеет мало общего с ЭТ (соответствующей в нашем изложении "основной теореме" ("Hauptsatz") Генцена [1]). Но она тесно связана с основной теоремой Эрбрана [RTD] [2]). Уместно поэтому назвать ее теоремой Эрбрана — Генцена. Она утверждает следующее.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— элементарная теорема системы* LX*, *основанной на* LC. *Пусть конституэнты* Γ *находятся в предваренной нормальной форме. Тогда существует* Γ', *являющаяся элементарной теоремой* LX (*и, следовательно, алгебраической*), *такая, что* Γ *можно получить из* Γ' *только посредством навешивания кванторов и структурных правил.*

Доказательство. Ввиду теорем B5 и B6, 5C2 и 5E6 мы можем предположить, что имеем дело с формулировкой II, что исходные утверждения не содержат кванторов и что правила *K* применяются в самом начале, причем главные конституэнты

[1]) У Генцена ЭТ постулирована, и его "основная теорема" гласит, что любое доказательство можно преобразовать в такое, в котором ЭТ не употребляется. Поэтому для того, чтобы доказать теорему, аналогичную теореме, рассматриваемой в данный момент, он должен был начать с обращения к "основной теореме", чтобы быть уверенным в существовании доказательства без сечения. У нас, однако, это заключение следует из определения.

[2]) Дребен, Эндрюс и Андреа [FLH] обнаружили ошибку в работе Эрбрана и анонсировали ее устранение; подробное доказательство некоторого обобщения теоремы Эрбрана см. в статье Минца [ТЭр].— *Прим. ред.*

этих правил не содержат кванторов. Пусть Δ — доказательство Γ, удовлетворяющее этим условиям. Мы покажем, что всегда, когда вывод по кванторному правилу непосредственно (если не считать выводов по структурным правилам) следует за выводом по алгебраическому правилу, эти два вывода можно переставить. Используя обозначения разд. 5D1, которые не указывают, в какую часть входят конституэнты, мы представим кванторное правило как правило R_1 вида

$$\frac{\mathfrak{X}, P}{\mathfrak{X}, Q} \tag{10}$$

где Q — главный конституэнт, а P — подчиненный; алгебраическое правило R_2 с двумя посылками будет иметь вид

$$\frac{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{U}_1 \quad \mathfrak{X}_2, \mathfrak{U}_2}{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, M} \tag{11}$$

где M — главный конституэнт, а $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ — подчиненные; алгебраическое правило с одной посылкой получается просто отбрасыванием правой посылки и $\mathfrak{X}_2$ в заключении [1]). Случай, когда R_2 непосредственно следует за R_1 в Δ, представляется схемой

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{X}_1, P}{\mathfrak{X}_1, Q}}{\mathfrak{X}_2, Q, \mathfrak{U}_1} \quad (\mathfrak{X}_3, \mathfrak{U}_2)}{\mathfrak{X}_2, (\mathfrak{X}_3), Q, M} \tag{12}$$

где двойная горизонтальная черта указывает на преобразование посредством (разве лишь) структурных правил. В силу инверсионной теоремы, эту схему можно заменить следующей [2]):

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{X}_1, P}{\mathfrak{X}_2, P, \mathfrak{U}_1} \quad (\mathfrak{X}_3, \mathfrak{U}_2)}{\cfrac{\mathfrak{X}_2, (\mathfrak{X}_3), M, P}{\mathfrak{X}_2, (\mathfrak{X}_3), M, Q}} \tag{13}$$

(если необходимо, то характеристическую переменную в P можно изменить по теореме A1).

[1]) Если бы нужно было допустить в качестве алгебраических правил такие правила, как $\vdash *$, которые могут иметь более двух посылок, то легко было бы сделать необходимые изменения.

[2]) Мы можем предположить, что указанные выводы по структурным правилам не включают в себя применения *W* с Q в качестве главного конституэнта. Такое применение *W* можно с самого начала перебросить ниже вывода по алгебраическому правилу, так как вывод по алгебраическому правилу уже допускает Q в качестве параметра, и все правила таковы, что если они допускают один параметр, то они будут допускать и любое число его повторений.

Применяя этот процесс, пока имеются такие пары R_1, R_2, мы должны в конце концов [1]) прийти к доказательству, в котором нет вывода по кванторному правилу над выводом по алгебраическому правилу.

Тогда, поскольку кванторные и структурные правила являются однопосылочными, мы можем начать с Γ и идти по Δ вверх, пока мы не достигнем Γ', являющегося заключением алгебраического правила. Тогда в силу ограничений, высказанных в начале доказательства, Γ' не будет содержать никаких конституэнтов с кванторами [2]). Поэтому Γ' обладает свойствами, которые утверждаются в теореме.

3. Сколемовская нормальная форма. Говорят, что об системы НК* находится в *сколемовской нормальной форме*, если он находится в предваренной нормальной форме, причем все кванторы существования стоят впереди кванторов общности [3]). Если система НК* содержит неограниченные предикатные переменные (разд. A4, замечание 3, см. упр. A4), то мы увидим здесь, что, коль скоро дано любое высказывание A, существует высказывание A^S в сколемовской нормальной форме, такое, что

$$\vdash A \rightleftarrows \vdash A^S \tag{14}$$

Предположим сначала, что A есть $\forall x B(x)$. Пусть

$$A^* \equiv \forall x \,.\, B(x) \supset \varphi(x) \,.\supset.\, \forall y \varphi(y)$$

где φ — предикатная переменная, не входящая в A. Тогда мы получаем $A \leqslant A^*$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{1}}{\cfrac{A}{B(a)}\,\text{Пе}} \quad \cfrac{\overline{2}}{\cfrac{\forall x \,.\, B(x) \supset \varphi(x)}{B(a) \supset \varphi(a)}\,\text{Пе}}}{\varphi(a)}\,\text{Ре}}{\forall y \varphi(y)}\,\text{Пі}}{A^*}\,\text{Рі}-2}{A \supset A^*}\,\text{Рі}-1$$

[1]) Если мы определим порядок Δ как общее число пар R_1, R_2, таких, что R_1 — вывод по кванторному правилу, R_2 — вывод по алгебраическому правилу и R_1 расположен (не обязательно непосредственно) над R_2, то описываемый процесс уменьшает порядок и в конце концов должен свести его к нулю.

[2]) Если бы мы должны были опустить ограничения на *K*, то можно было бы воспользоваться теоремой 5C1 для устранения всех таких конституэнтов.

[3]) Сюда следует включить случаи, когда вообще отсутствуют кванторы того или иного вида, а также и обоих видов.

Обратно, если мы подставим $B(a)$ вместо $\varphi(a)$ в A^*, то мы получим такое A', что $A' \leqslant A$. Если мы определим

$$A^S \equiv \exists x \forall y : B(x) \supset \varphi(x) . \supset . \varphi(y)$$

то $A^S = A^*$ и, следовательно, (14) выполняется.

Отношение между A и так определенным A^S сильнее, чем просто (14). Действительно, положив, по определению,

$$A (=) B \tag{15}$$

если

$$A \leqslant B$$

и если существует такое B', полученное из B подстановкой на место предикатной переменной, что

$$B' \leqslant A$$

мы найдем, что $A (=) A^S$.

Отношение (15) не является эквивалентностью, но оно рефлексивно и транзитивно, а также обладает свойствами

$$A = B \rightarrow A (=) B \rightarrow . \vdash A \rightleftarrows \vdash B \tag{16}$$

$$A (=) B \rightarrow f(A) (=) f(B) \tag{17}$$

где f — любая прямо монотонная унарная операция. Итак, с помощью только что описанного процесса может быть установлена

Т е о р е м а 3. *Пусть A образовано приписыванием p кванторов общности и q кванторов существования спереди к высказыванию M, и пусть система допускает неограниченные предикатные переменные. Пусть $r = p + q$. Тогда существует A^S вида*

$$\exists x_1 \ldots \exists x_r \forall y_1 \ldots \forall y_p M^*$$

(где M^* образовано из M и предикатных переменных с помощью алгебраических операций), такое, что

$$A (=) A^S$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A уже находится в сколемовской нормальной форме, то доказывать нечего. Мы покажем, что, используя метод, описанный в начале этого раздела, и индукцию по числу кванторов общности, предшествующих квантору существования, мы можем найти A^S. При этом для любого C мы понимаем под C^P результат подстановки кажущихся переменных x_i, y, z, которые стоят при кванторах, предшествующих C^P, на место соответствующих реальных переменных a_i, b, c.

Теперь предположим, что

$$A \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_m A_1^P \qquad (m < p)$$

$$A_1 \equiv \forall z B^P$$

$$A_2 \equiv \forall z . B^P \supset \varphi(z) . \supset . \forall y \varphi(y)$$

где φ — предикатная переменная, зависящая от $a_1, \ldots, a_m$ и не входящая в B. Пусть A_3 получается из A_2 заменой B на B^*, причем

$$B (=) B^* \tag{18}$$

Пусть

$$A^* \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_m A_3^P$$

Тогда, согласно сказанному выше,

$$A_1 (=) A_2$$

Поскольку B входит в A_2 положительно, то из (17) следует, что

$$A_2 (=) A_3$$

Следовательно, по (τ)

$$A_1 (=) A_3$$

а потому, согласно (17),

$$A (=) A^*$$

Если мы в качестве B^* возьмем B^S (которое определено и удовлетворяет (18) по индуктивному предположению), то после того, как мы перебросим кванторы из A^* в начало по теореме 1, мы получим в силу (16) высказывание A^S, удовлетворяющее условиям теоремы, что и требовалось доказать.

Заметим, что в выборе B^* существует некоторый произвол, так что охарактеризовать A^S можно более определенным образом. Мы не будем здесь заниматься этим.

4. Теорема о полноте. Гёдель [VAL] показал, что система НК* полна в том смысле, что высказывание, верное в любой счетной модели, доказуемо. Этот результат по необходимости неконструктивен, так как Чёрч [NEP] доказал, что система НК* рекурсивно неразрешима, и если бы существовал конструктивный метод решения вопроса о том, верно ли высказывание A в любой модели или нет, то он давал бы и конструктивную разрешающую процедуру. Будучи неконструктивным, этот результат выходит за рамки нашей книги. Но есть два довода в пользу того, чтобы рассмотреть его. Первый из них состоит в том, что теорема о полноте играет фундаментальную роль для обширного круга активно разрабатываемых в наше время проблем математической логики; второй же — в том,

что Расёва и Сикорский [GTh] нашли доказательство этой теоремы, очень тесно связанное с методами этой книги. Таким образом, эта теорема представляет собой в некотором смысле идеальный переход от оснований математической логики к ее высшим разделам.

Вспомним описание таблицы доказательств из разд. B6. Мы видоизменим ее так, чтобы пользоваться ею без предположения о том, что Ω пусто. Сделаем это так. Поскольку в LK правило *P обратимо, мы можем продвинуть XII вперед до тех пор, пока оно не станет непосредственно после VII. Тогда правила I—VII и XII устранят все внешние алгебраические операции, и VIII просто введет F направо. Алгорифм либо замкнется, либо перейдет к X. Члены $\mathfrak{t}(\mathfrak{q})$ образуют счетное множество; пусть $t_1, t_2, \ldots$ — какой-либо их фиксированный пересчет. Предположим, что мы видоизменим X и XI, выкинув $A(t_1), A(t_2), \ldots, A(t_{r-1})$ и приняв в качестве t_r первый член в фиксированной последовательности термов, не испытывавшихся в роли подчиненных ни для какого из $\forall x A(x)$ или $\exists x A(x)$, находящихся в ветви между данным узлом и началом таблицы. Чтобы предотвратить бессмысленное топтание на месте, мы предусматриваем, что правила X и XI применяются попеременно.

Теперь предположим, что мы начали алгорифм с элементарного утверждения Γ_0, которое мы расположили в начале таблицы. Если алгорифм приводит нас к замкнутой таблице, то мы получим конструктивное доказательство Γ_0. У нас будет доказательство теоремы Гёделя о полноте, если мы из того, что таблица не замыкается, получим прямую интерпретацию над счетной моделью, такую, что в ней Γ_0 неверно. В силу замечания разд. B5 мы можем заключить это из следующего обращения теоремы B9:

Теорема 4 (неконструктивная). *Утверждение* Γ_0 *доказуемо в* LK($\mathfrak{D}$), *если нет контроценки для* Γ_0.

Доказательство. Для системы LK($\mathfrak{D}$) алгорифм имеет следующие характерные черты: во-первых, если не все конституэнты данного элементарны, всегда найдется правило, которое можно применить. Во-вторых, нет дизъюнктивных расщеплений: если таблица расщепляется, то она разбивается конъюнктивно и самое большее на две подтаблицы. Следовательно, каждая ветвь таблицы определит последовательность $i_1, i_2, i_3, \ldots$, где $i_k = 0$, если на k-м шаге был только один результат или если было два результата и брался левый, и $i_k = 1$, если было два результата и брался правый. Может случиться, что на k-м шаге в некоторой ветви мы придем к Γ_k, все конституэнты которого элементарны, но оно само не квазиисходно, или же может быть ветвь, которая продолжается неограниченно, никогда не приходя к квазиисходному утверждению [1]). Пусть Δ — ветвь, удовлетворяющая одному из указанных условий, и пусть утверждения в ней расположены в таком порядке: $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$. Последовательность будет конечной при первой возможности и бесконечной при второй.

Теперь определим два класса $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ элементарных высказываний. Пусть $\mathfrak{M}$ состоит из всех элементарных высказываний, входящих в Δ как левые конституэнты некоторого Γ_k, а $\mathfrak{N}$ состоит из всех элементарных высказываний, входящих в Δ как правые конституэнты некоторого Γ_k. Тогда мы покажем, что: (a) классы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ не пересекаются и (b) любая оценка, по которой все члены $\mathfrak{M}$ принимают значение 1 и все члены $\mathfrak{N}$ — значение 0, является контроценкой для Γ_0.

Что касается утверждения (a), то алгорифм обладает тем свойством, что, когда элементарный конституэнт появляется на какой-либо стороне в любом Γ_i, он остается на той же стороне во всех Γ_j для $j > i$. Следовательно, если бы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имели общий член, то некоторое Γ_k было бы квазиисходным, что приводит к противоречию.

Чтобы исследовать утверждение (b), назовем конституэнт Γ_k положительным, когда он является правым конституэнтом со значением 1 или левым конституэнтом со значением 0, и отрицательным в противном случае. В силу нашего построения все элементарные конституэнты отрицательны. Определим порядок конституэнта как число операциональных шагов в его построении. Если Γ_0 верно, то оно должно содержать положительный конституэнт; назовем его A. Алгорифм таков, что A останется на одной и той же стороне, пока не станет главным конституэнтом. Пусть это произойдет в утверждении Γ_k. Если A имеет один из видов $B \supset C$, $B \vee C$, $B \wedge C$, $\neg B$, $\forall x B(x)$ справа или $\exists x B(x)$ слева, то подчиненный в Γ_{k+1} будет низшего порядка. Если A имеет вид $\exists x B(x)$ справа, то, поскольку такой конституэнт никогда не устраняется, Δ бесконечна. Поскольку $\exists x B(x)$ положителен, должен существовать $B(t_i)$, который положителен, и в конце концов будет существовать Γ_k, где A — главный конституэнт и $B(t_i)$ — подчиненный. Двойственная ситуация возникает, если A имеет вид $\forall x B(x)$ слева. Тогда во всех случаях если в Γ_0 существует положительный конституэнт порядка n, то ниже его будет положительный конституэнт порядка $n - 1$, еще ниже — положительный конституэнт

[1]) Мы можем даже воспользоваться рассуждением, подобным рассуждению в обычном доказательстве теоремы Больцано — Вейерштрасса, для того чтобы однозначно определить такую последовательность. Действительно, определив $i_1, \ldots, i_k$, мы возьмем $i_{k+1} = 1$, если таблица расщепляется в этом месте и левая подтаблица замыкается; в противном случае мы возьмем $i_{k+1} = 0$. Неконструктивный элемент состоит в том, что вопрос о замыкании подтаблицы является неопределенным.

порядка n — 2 и т. д. В конце концов мы придем к положительному элементарному конституэнту, что невозможно. Это противоречие получилось из предположения о том, что Γ_0 верно. Следовательно, Γ_0 неверно, что и требовалось доказать.

Упражнения

*** 1.** Какой вид нормальной формы может заменить предваренную нормальную форму в системах, основанных на LA?

2. Показать, что теорема Эрбрана — Генцена верна для LA_m, LM_m, LJ_m при условии, что правило *V удалено, но что если допустить правило *V, то

$$B \vee C,\ \forall x.\, B \supset A(x) \| \!- \forall x\, A(x), C$$

будет противоречащим примером. (Клини [IMM], стр. 460—463 [1]). Контрпример Клини, приведенный в разд. B1 как пример 1, не проходит для LA_m.)

3. Показать, что сколемовскую нормальную форму можно далее превратить в "нормальную дизъюнкцию", т. е. в дизъюнкцию высказываний, каждое из которых находится в сколемовской нормальной форме с единственным квантором общности (Гильберт и Бернайс [GLM.I], стр. 159).

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Общие исторические и библиографические комментарии. Эта глава является переработкой гл. 3 книги [TFD]. В большей части данной главы общий метод, установленный в предыдущих главах, распространяется на теорию кванторов. Ссылки, приведенные в разд. 1S5, 5S1 и 6S, большей частью применимы и к настоящей главе.

Источники, в которых излагается принятый в настоящей книге способ обращения со связанными переменными, приведены в основном тексте в разд. A2. Различные иные способы обращения рассматривались с критическими комментариями в книге Чёрча [IML_2], стр. 290 [2]). См. также Куайн [MLg], [MeL]. Особенно отчетливо Куайн объясняет перевод кванторов в выражения обычного языка.

Настоящая трактовка (разд. B5) классической оценки содержит ряд усовершенствований по сравнению с трактовкой в [TFD], разд. III.6. Понятие модели в том виде, как оно описано в замечании в конце разд. B5, является основным для современной семантической эпитеории (разд. 3S3), и уже в первых работах, посвященных исследованию этого понятия, оно было сформулировано очень точно. Поэтому в разд. B5 нет ничего нового. Однако в современных работах термин 'оценка' не всегда употребляется в том же смысле, что и в разд. B5.

Результат теоремы B10 был независимо получен несколькими учеными. Впервые ее результат, полученный с помощью генценовских методов, был опубликован Клини [ILg]; примерно в то же время Мостовский [PND] получил эти результаты другим методом. Оба они ссылаются на предшествующие доказательства невыводимости, использовавшие арифметические модели. Наше доказательство взято из [TFD]; в свою очередь доказательство в последней книге взято после ряда исправлений из наброска доказательства, которое было первоначально подготовлено для [PFD]. По поводу других примеров интуиционистской невыводимости см. упражнение B4.

По поводу истории таблиц доказательств см. разд. 1S5. В настоящем изложении к приведенным ранее правилам просто добавляются правила для кванторов, основанные на правилах из статьи Бета [SCI]. По поводу иных методов, предназначенных для достижения той же цели, что и алгорифм Бета, см. Стенли [EPQ], Куайн [PPQ].

Системами исчисления предикатов в современных трудах по математической логике являются большей частью системы HX* (обычно HK^*_g). Информация об истории этих систем дана в книге Чёрча [IML_2], гл. 3 и 4, особенно § 49. Систематическое описание систем HK^*_g см., например, у Чёрча [IML_2], Гильберта и Аккермана [GZT], Гильберта и Бернайса [GLM] и Клини [IMM].

По поводу систем HK^*_p см. особенно Куайн [MLg_2], где на стр. 88 и след. имеется краткий исторический очерк. Эта история восходит к 1935 г. До этого времени широко распространенной — если не общепризнанной — была идея, согласно которой свободные переменные с семантической точки зрения следует рассматривать как связанные квантором общности и что поэтому свободные переменные в принципе не должны встречаться в элементарных теоремах логики. Эта идея обнаруживается у Яськовского [RSF], разд. 5; свободные переменные исключаются из элементарных теорем в работе Чёрча [SPF], и одна из основных идей ранних работ по комбинаторной логике (в том числе еще у Шейнфинкеля [BML]) состояла в том, что можно построить логику, из которой вообще изгнаны переменные (разумеется, лишь из элементарных утверждений; тезис упразднения переменных как эпитеоретического средства отнюдь не отстаивался). Настоящее изложение является продуктом этой точки зрения. Например, обозначение 'ПР' исходит из работы [UQC], 'Π_0'— из [AVS], а доказательство допустимости Пh проведено по образцу доказательства из

[1]) Стр. 407—409 русского издания.— *Прим. ред.*
[2]) Стр. 278 и след. русского издания (§ 49).— *Прим. ред.*

[PEI]. Большое сходство получившейся теории и теории Куайна обусловлено, как говорят биологи, своего рода конвергенцией; читателю предоставляется выяснить точные взаимоотношения между двумя подходами в качестве упражнения (упр. C8).

Предваренная нормальная форма является стандартным техническим средством исчисления предикатов. Ее рассмотрение можно найти в любой работе. По поводу истории см. книгу Чёрча [IML_2], стр. 292 [1]).

Термин 'теорема Эрбрана — Генцена' был предложен Крэйгом [LRN]. В этой и в других статьях он доказал ряд обобщений этой теоремы. О происхождении теоремы сказано в тексте.

По поводу сколемовской нормальной формы см. Гильберт и Бернайс [GLM.I], стр. 159, и Чёрч [IML_2], § 42; там же даны ссылки на источники.

По поводу теоремы Гёделя о полноте см. разд. 3S1.

2. Дальнейшее развитие. Литература, связанная с исчислением предикатов, столь обширна, что бесполезно делать что-либо большее, чем прокомментировать ряд направлений развития; выбор будет неизбежно во многом произвольным. По поводу направлений, включающих в себя неконструктивные или семантические методы, см. разд. 3S3.

В течение долгого времени изучение исчисления предикатов было сосредоточено в основном на проблеме разрешения (Entscheidungsproblem). Это проблема отыскания конструктивного процесса, который, будучи применен к данному высказыванию из НК*, определил бы, доказуемо оно или нет. (Это синтаксическая форма проблемы; существует также семантическая форма, когда доказуемость заменяется истинностью при любой оценке; обе формы эквивалентны в силу теоремы Гёделя о полноте.) Так как в этой системе можно сформулировать большое число математических проблем, то решение проблемы разрешения позволило бы передать решение многих важных математических проблем машине. В начале 30-х годов было потрачено много усилий на то, чтобы получить ряд специальных результатов, относящихся к этой проблеме. В 1936 г. Чёрч в [NEP] и [CNE] показал ее неразрешимость. Так как другие системы можно отобразить в НК*, то проблема разрешения неразрешима также для всех систем НХ*.

После результата Чёрча проблема разрешения стала довольно специальной областью исследования. В этой области продолжают получать два вида результатов: во-первых, решение указанной проблемы для особых случаев (таких, как случай, где все предикаты одноместны, или случай, где $r \leqslant 2$ в сколемовской нормальной форме) и, во-вторых, сведéние общей проблемы к случаям, когда

[1]) Стр. 281 и 438—439 русского издания.— *Прим. ред.*

исследуемое высказывание имеет какой-нибудь специальный вид (например, случай, когда в сколемовской нормальной форме $r = 3$ и имеется один двуместный предикат). Теперь известны монографии по обоим этим направлениям: по первому — Аккерман [SCD], по второму — Шураньи [RTE]. Обширная информация об этой проблеме дана в книгах Чёрча [IML_2], гл. 4, и Гильберта и Аккермана [GZT_4], гл. IV, § 11.

Системы, строящиеся на базе исчисления предикатов, были предметом систематического изучения (главным образом Тарским и др.). По поводу их см. разд. 3S3.

Другим вопросом, связанным с исчислением предикатов, является устранение дескриптивных функций. Мы допустим здесь возможность термовых операций Ω. Существуют теории, в которых имеются функции, значениями которых являются термы, а аргументами — высказывания или скорее (поскольку эти операции, связывая переменную, подобны кванторам) пропозициональные функции. К таким функциям относится оператор дескрипции (описания); он образует из $A\,(b)$ терм

$$\iota x A\,(x)$$

который интерпретируется как единственный объект a, такой, что $\vdash A\,(a)$. Другим примером является ε-оператор Гильберта

$$\varepsilon x A\,(x)$$

Это терм, интерпретируемый как некоторый объект a (если таковой существует), такой, что $\vdash A\,(a)$. Для ε-операций постулируют

$$A\,(t) \leqslant A\,(\varepsilon x A\,(x))$$

и тогда в классической системе получают квазиопределения:

$$\forall x A\,(x) \equiv A\,(\varepsilon x \neg A\,(x)) \qquad \exists x A\,(x) \equiv A\,(\varepsilon x A\,(x))$$

Эти операции родственны. Теоремы о возможности исключения различных таких понятий представляют известный интерес. Возможно, в доказательствах этих теорем очень помогут генценовские методы. Для ε-оператора такая теорема предложена в упр. B13. По поводу дескрипций (описаний) см. Гильберт и Бернайс [GLM.I], разд. 7, Ассер [AFP], Гальперин [RID], [TRQ], Иоганссон [CCA], Леблан и Гальперин [NDS], Монтегю и Калиш [RDN], Россер [CQN], [LMt], гл. 8, Шрётер [TBA], Шютте [EBA]. В теории сведéния проблемы разрешения имеются результаты, относящиеся к исключению дескриптивных функций вообще.

Ряд авторов интересовался формулировками исчисления предикатов, содержащими разные сорта термов, или, более общо, переменных, области значений которых каким-либо образом ограничены. По этому вопросу см. Эрбран [RTD], разд. III3, Шмидт

[DTM], [ZBM], Ван [LMS], Хинтикка [RTT], Куайн [UUS], Гальперин [TRQ], Лайтстоун и Робинсон [STr], Гилмор [ALM].

Ставился вопрос, нельзя ли сформулировать кванторные правила в терминах структур. Конечно, можно — примерами таких систем являются цилиндрические алгебры Тарского и Генкина и полиадические алгебры Халмоша. О цилиндрических алгебрах см. Тарский [NMB], Генкин [ACQ], [SAT], [RTS], Генкин и Тарский [CAI]. Полиадическим алгебрам посвящены работы Халмоша: [BCA] (общее описание), [PBA] (обзор специальных понятий) и [ALg] (подробное исследование). См. также Галлер [CPA].

Глава 8

МОДАЛЬНОСТИ

С самого зарождения логики было подмечено различие между истинами, являющимися таковыми, так сказать, в силу необходимости, и истинами случайными. Некоторые логики, начиная с Аристотеля, пытались учесть это различие. Таким путем возникла ветвь логики, называемая *модальной логикой*, в которой проводится указанное различие.

Модальная логика — довольно специальная ветвь логики. Поэтому большей своей частью она выходит за рамки данной книги. Но несомненный интерес — и притом с точки зрения оснований логики — представляет тот факт, что модальную логику можно трактовать математическими средствами. Кроме того, рассмотрение модальной логики методами данной книги позволит нам глубже уловить значение этих методов. Данная глава посвящена рассмотрению модальной логики в той степени, в какой это поможет нам добиться указанной цели.

А. УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ НЕОБХОДИМОСТИ

В этом разделе мы рассмотрим понятие необходимости и затем построим L-систему, соответствующую этому семантическому анализу.

1. Анализ понятия необходимости. Мы должны прежде всего отделаться от каких бы то ни было метафизических или психологических ассоциаций, которые имеются у нас в отношении логической необходимости. Если такие ассоциации и возникают, мы должны считать их такими же несущественными, как и в предыдущих главах. Здесь, как и ранее, мы стремимся получить совершенно объективное понятие.

Чтобы добиться этого, напомним, как задается формальная теория: мы задаем некоторую категорию $\mathfrak{E}$ элементарных утверждений и некоторые способы порождения подкласса $\mathfrak{T}$ класса $\mathfrak{E}$; члены этого подкласса называются элементарными теоремами. Мы имеем формальную теорию с отрицанием, если у нас есть другой подкласс $\mathfrak{F}$ класса $\mathfrak{E}$, удовлетворяющий условиям, которые мы изучали в гл. 6. Таким же путем соглашения, которые определяют не только $\mathfrak{T}$, но и некоторый подкласс $\mathfrak{N}$ класса $\mathfrak{T}$,

дают нам теорию с понятием необходимости. Если теория является дедуктивной, то это значит, что у нас имеются два множества дедуктивных правил — внутреннее, которое определяет $\mathfrak{N}$, и внешнее, которое определяет $\mathfrak{T}$, причем эти множества таковы, что всегда, когда применимо правило из внутреннего множества, применимо и правило из внешнего множества. При этом совершенно безразлично, какие метафизические или психологические понятия мы связываем с $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{T}$.

Если в такой ситуации утверждения о необходимости отождествляются с $\mathfrak{N}$, то имеется несколько возможных путей приложения теории. Если бы мы формализовали экспериментальную науку, то мы могли бы считать утверждениями о необходимости те утверждения, которые получаются с помощью одной лишь теории, тогда как $\mathfrak{T}$ могла бы содержать утверждения, полученные с помощью некоторых экспериментов. Или, например, если бы мы изучали биофизику, то мы могли бы считать $\mathfrak{N}$ множеством принимаемых нами утверждений физики, положенной нами в основу, тогда как $\mathfrak{T}$ была бы основана на добавлении к указанным утверждениям ряда биологических принципов. Если бы мы изучали теоретическую физику, то мы могли бы считать, что $\mathfrak{N}$ состоит из утверждений, установленных на чисто математических основаниях. Это все примеры из области экспериментальной науки. Но мы можем рассматривать и внутриматематические применения. Так, если бы мы изучали элементарную геометрию, то мы могли бы отнести к $\mathfrak{N}$ те утверждения, которые получаются только из аксиом инцидентности, или утверждения, инвариантные при любом проективном преобразовании. Наконец, мы могли бы отнести к $\mathfrak{N}$ утверждения, полученные строго конструктивно, тогда как в $\mathfrak{T}$ допускалась бы классическая логика.

Эти примеры показывают не только то, как можно объективно понимать необходимость, но подсказывают возможные обобщения. Прежде всего возможны случаи, когда имеется более двух уровней различий. Это, однако, не приводит к появлению чего-то принципиально нового. Более интересен вопрос о том, можно ли получить анализ возможности. Очевидно, если имеется отрицание, то можно было бы определить утверждение о возможности как утверждение, отрицание которого не является необходимым. Но можно было бы определить возможность непосредственно. Так, в отношении евклидовой геометрии можно было бы определить утверждения о необходимости как утверждения абсолютной геометрии, тогда как наша интуиция подсказала бы нам, что утверждения о возможности должны включать утверждения гиперболической и эллиптической неевклидовой геометрии. Этот пример наводит на мысль, что можно определить необходимость и возможность относительно множества $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, ... теорий,

говоря, что утверждения о необходимости — это те, которые выполняются во всех $\mathfrak{T}_i$, а утверждения о возможности — это те, которые выполняются в некоторых из $\mathfrak{T}_i$. Таким образом, необходимость имеет некоторые черты квантора общности, а возможность — некоторые черты квантора существования. Как показывает наш пример, утверждения о возможности могут быть несовместимыми друг с другом.

В данной главе мы не будем касаться этих обобщений [1]) и перейдем к формализации понятия необходимости, описанного тремя абзацами ранее.

2. Формализация понятия необходимости. Мы продолжаем в духе разд. 6А. Не обязательно задерживаться на предварительных шагах, которые здесь аналогичны; мы можем предположить, что имеем дело скорее с высказываниями, чем с утверждениями, и что у нас есть одноместная операция, обозначаемая префиксом '$\Box$' [2]), такая, что $\Box A$ принимается тогда и только тогда, когда A необходимо.

Для того чтобы формулировать L-правила, мы различаем два уровня системы — внутренний и внешний. В качестве элементарных утверждений мы берем следующие:

$$\mathfrak{X} \Vdash\!\dashv \mathfrak{Y} \tag{1}$$

$$\mathfrak{X} \Vdash\!\dashv' \mathfrak{Y} \tag{1'}$$

имея в виду, что правила внутреннего уровня должны применяться к утверждениям вида (1), а правила обоих уровней — к утверждениям вида (1'). Мы будем употреблять инфикс '$\Vdash$—' в случаях, когда не определено, имеется ли в виду внутренняя или внешняя система (т. е. уровень); в конкретном контексте все вхождения '$\Vdash$—' должны заменяться вхождениями одного из '$\Vdash\!\dashv$' или '$\Vdash$—''.

Пытаясь найти обоснование для правил, относящихся к (1), мы ограничимся сингулярным случаем, потому что мы обнаружили, что именно этот случай обосновывается семантически; обоснование для мультиплярного случая тогда следует искать, интерпретируя мультиплярную систему в сингулярной.

Исследуем, при каких обстоятельствах можно заключить

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \Vdash\!- \Box B \tag{2}$$

[1]) Высказанное в предыдущем абзаце предположение относительно возможности никогда как следует не разрабатывалось. Предположения о возможности в [TFD] оказались ложными, а понятие возможности, предложенное в [ETM], состоит просто в том, что утверждения о возможности образуют подкласс класса $\mathfrak{E}$, более обширный, нежели $\mathfrak{T}$. Возможность трактуется как связка, двойственная необходимости, в работе Ониси и Мацумото [GMM].

[2]) В [TFD] употреблялся префикс '#', но '$\Box$' более согласуется с обычной практикой. Смешение с инфиксом '$\Box$', употребляемым в разд. 2D1, вряд ли опасно.

Согласно интерпретации, которую мы связываем с (2), это будет означать, что имеется вывод некоторого вида, ведущий от посылок

$$\vdash A_i \tag{3}$$

к

$$\vdash \Box B \tag{4}$$

Но согласно интерпретации из разд. 1, утверждение (4) будет означать, что существует вывод, верный во внутренней системе, ведущий к

$$\vdash B \tag{5}$$

Однако вывод верен во внутренней системе, только если (*a*) он проводится в соответствии с правилами внутренней системы и (*b*) его посылки истинны во внутренней системе. Теперь i-я посылка (3) не говорит, что A_i является утверждением внутренней системы, а лишь что A_i является утверждением внешней системы. Поэтому вывод от (3) к (5), проводимый согласно правилам внутренней системы, будет верным выводом (5) во внутренней системе, только если каждое A_i имеет вид $\Box A_i'$. Следовательно, правило для введения $\Box B$ справа должно иметь вид

$$\Box \mathfrak{X} \Vdash\!\dashv B \to \Box \mathfrak{X} \Vdash\!\!- \Box B \tag{6}$$

где $\Box \mathfrak{X}$ по аналогии с $\neg\mathfrak{Y}$ из гл. 6 [1]) представляет собой просеквенцию, образованную из $\mathfrak{X}$ заменой каждого конституэнта A на $\Box A$ [2]).

Теперь для установления правил введения слева мы зададим вопрос, какой вывод мы сможем получить из $\vdash \Box A$. Основной семантический принцип состоит в том, что $\vdash \Box A$ имеет то же самое значение, как если бы оно было только что введено; следовательно, из $\vdash \Box A$ можно сделать любой вывод, какой можно сделать из $\vdash A$, что приводит к правилу

$$\mathfrak{X}, A \Vdash\!\!- B \to \mathfrak{X}, \Box A \Vdash\!\!- B \tag{7}$$

Итак, (6) и (7) являются подходящими сингулярными правилами. Но мультиплярная форма (6), даже в виде

$$\Box \mathfrak{X} \Vdash\!\dashv B, \Box \mathfrak{Z} \to \Box \mathfrak{X} \Vdash\!\!- \Box B, \Box \mathfrak{Z} \tag{8}$$

[1]) См. упражнение 6В7.

[2]) Заметим, что если бы '$\Box$' был опущен перед '$\mathfrak{X}$' в (6), то мы вывели бы

$$B \Vdash\!\!- \Box B$$

что противоречит интерпретации, которую мы имеем для $\Box B$. Предыдущее обсуждение помогает понять, почему такое заключение оказывается неправильным.

была бы неприемлема, ибо с ее помощью мы получили бы

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash\!\dashv A,\ \Box B \qquad \Box B \Vdash\!\dashv A,\ \Box B}{A \vee \Box B \Vdash\!\dashv A,\ \Box B}}{\Box(A \vee \Box B) \Vdash\!\dashv A,\ \Box B}}{\Box(A \vee \Box B) \Vdash\!\!- \Box A,\ \Box B}}{\Box(A \vee \Box B) \Vdash\!\!- \Box A \vee \Box B}$$

Заключение этого доказательства не было бы выводимо в сингулярной системе [1]), и поэтому интерпретация мультиплярной системы в сингулярной была бы неправильной. С другой стороны, нет возражений против мультиплярной формы правила (7). Поэтому мы считаем подходящими следующие правила:

Y *Правила для необходимости*

$$*\mathrm{Y}\ \dfrac{\mathfrak{X}, A \Vdash\!\!- \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \Box A \Vdash\!\!- \mathfrak{Y}} \qquad \mathrm{Y}*\ \dfrac{\Box \mathfrak{X} \Vdash\!\dashv B}{\Box \mathfrak{X} \Vdash\!\!- \Box B}$$

Система, образованная присоединением этих правил к системе LX, будет называться *системой* LXY. Если имеются кванторы, то это будет указываться обычным образом; по-видимому, введение кванторов не вызывает никаких существенных трудностей.

В. L-ТЕОРИЯ НЕОБХОДИМОСТИ

Этот раздел будет посвящен краткому изучению L-теории необходимости. Это изучение будет ограничено инверсионной теоремой и элиминационной теоремой, с одной стороны, и теоремой о представлении внешней системы во внутренней системе — с другой. Можно было бы перейти к выводу теорем о разрешимости и т. д., но мы этого делать здесь не будем.

1. Инверсионная теорема и элиминационная теорема. Посмотрим, до какой степени инверсионная и элиминационная теоремы затрагиваются новыми правилами.

Я утверждаю, что в случае, когда M инверсионной теоремы или A элиминационной теоремы не являются модальными, т. е. не имеют вида $\Box B$, доказательства этих теорем совсем не меняются, ибо, поскольку правило Y* не допускает никаких немодальных параметров, для этого правила не будет возможности входить в Δ_1 инверсионной теоремы или в Δ_2 этапов 1 и 2 из доказательства ЭТ [2]). Правило *Y регулярно. Поэтому на этих этапах дока-

[1]) Можно показать это либо непосредственно, либо используя оценку над булевой алгеброй с двумя точками α и β, взяв $\Box 0 = \Box\alpha = 0$, $\Box\beta = \beta$, $\Box 1 = 1$ и интерпретируя $\Vdash\!\!-$ как отношение $\leqslant$ между булевым произведением левых конституэнтов и правым конституэнтом. (Взять $A = \alpha$, $B = \beta$.)

[2]) На этапе 2 доказательства ЭТ либо $\mathfrak{U}_k$, либо $\mathfrak{V}_k$ непусто, и тогда конституэнты немодальные.

зательства затруднений нет. Эта часть рассуждения верна, даже если Y* заменено на (8).

Если правило R инверсионной теоремы есть Y*, то не может быть сингулярных выводов, применяемых в Δ_1 (поскольку M само является параметрическим справа), и, следовательно, в частности там нет применений Y*. Замена M (т. е. $\Box B$) на B не нарушит справедливости выводов в Δ_1. Поэтому Y* непосредственно обратимо (если только нарушение условия (*a*) не делает непосредственное обращение невозможным). Если правило R есть *Y, то замена $\Box B$ на B может нарушить правильность любых выводов по Y*, которые могут быть в Δ_1. Это правило *Y не будет непосредственно обратимым. У нас есть та же трудность с обеих сторон, если Y* заменяется на (8) (но не в случае, если произвольные параметры допускаются справа).

Теперь взглянем на ЭТ. Этапы 1 и 2, где A — немодальное, уже были рассмотрены. Предположим, что A есть $\Box B$. Тогда ситуация аналогична случаю с $A \supset B$ в LA_m. Мы рассмотрим сначала этап 2. Тогда в Δ_2 не может быть никакого применения Y*, за исключением такого, которое вводит A, так как либо имеется параметрическое вхождение A (в $\mathfrak{B}_k$), либо система сингулярна и немодальный конституэнт находится слева (в $\mathfrak{U}_k$). По той же причине либо система сингулярна, либо в Δ_2 не может использоваться никакое другое сингулярное правило. Поэтому все правила в Δ_2 удовлетворяют ($r6$), и доказательство этапа 2 проходит. Мы можем, следовательно, предположить, что $\mathfrak{X}'$ (в ЭТ, разд. 5D2) имеет вид $\Box\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{Z}$ пусто. Тогда замены, которые мы должны сделать в доказательстве этапа 1, не нарушают справедливости никакого из выводов этапа 1, и доказательство этапа 1 также проходит.

Остается рассмотреть этап 3. Если гипотезы этапов 1 и 2 удовлетворяются, то мы имеем рассуждение следующего вида:

$$\dfrac{\dfrac{\Box\mathfrak{W} \Vdash B}{\Box\mathfrak{W} \Vdash \Box B} \qquad \dfrac{\mathfrak{X},\ B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ \Box B \Vdash \mathfrak{Y}}}{\mathfrak{X},\ \Box\mathfrak{W} \Vdash \mathfrak{Y}}\ \text{ЭТ}$$

Его можно заменить на

$$\dfrac{\dfrac{\Box\mathfrak{W} \Vdash\!\dashv B}{\Box\mathfrak{W} \Vdash B} \qquad \mathfrak{X},\ B \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ \Box\mathfrak{W} \Vdash \mathfrak{Y}}\ \text{ЭТ}$$

Здесь первый шаг слева необходим только тогда, когда заключение делается во внешней системе; в этом случае оно получается по дедуктивной индукции, так как все постулаты внутренней системы справедливы во внешней. Поэтому имеем следующую теорему:

Т е о р е м а 1. *Элиминационная теорема справедлива для всех систем* LXY; *кроме того, правило* Y* *непосредственно обратимо.*

З а м е ч а н и е. Доказательство не проходит, если Y* заменяется на (8); это происходит потому, что, когда $A \equiv \Box B$, мы не можем быть уверены в том, что A не входит в $\Box\mathfrak{Z}$ некоторого другого применения правила Y*.

2. Интерпретация внешней системы во внутренней. Теорема, которую мы сейчас докажем, содержит теоремы 5E4, 6B9 и 7B8 и упражнения 6B9 и 7B9 (с некоторыми вспомогательными рассуждениями) как частные случаи.

Т е о р е м а 2. *Пусть* ЭТ *справедлива во внутренней системе, а внешняя система получается добавлением к внутренней системе правил вида*

$$\dfrac{\mathfrak{X} \Vdash' A_i, \mathfrak{Z} \qquad i = 1, 2, \ldots, m}{\mathfrak{X} \Vdash' B,\ \mathfrak{Z}} \tag{1}$$

$$\dfrac{\mathfrak{X},\ B \Vdash' \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A_1, \ldots, A_m \Vdash' \mathfrak{Y}} \tag{2}$$

Пусть Δ *— доказательство во внешней системе утверждения*

$$\mathfrak{X} \Vdash' \mathfrak{Y} \tag{3}$$

Если (1) *и* (2) *применяются к узлу* Δ, *то пусть*

$$C \equiv A_1 . \supset . A_2 \supset . \ldots \supset . A_m \supset B$$

и пусть C^* *получается замыканием* C *относительно всех характеристических переменных, встречающихся в* Δ *ниже этого узла. Пусть* $\mathfrak{M}$ *— просеквенция, состоящая из всех таких* C^*. *Тогда*

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{M} \Vdash\!| \mathfrak{Y} \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta \equiv \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ — данное доказательство утверждения (3), и пусть $\mathfrak{M}_k$ — это C^*, которое было введено в Δ в узле Γ_k или в узлах, расположенных над Γ_k. Если Γ_k есть

$$\mathfrak{X}_k \Vdash' \mathfrak{Y}_k$$

то пусть Γ'_k есть

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_k \Vdash\!| \mathfrak{Y}_k$$

Мы покажем дедуктивной индукцией, что Γ'_k верно для всех k.

Если Γ_k квазиисходно типа ($p1$) или типа ($p2$), когда аксиома является аксиомой внутренней системы, то Γ'_k также квазиисходно, а $\mathfrak{M}_k$ пусто. Если Γ_k квазиисходно типа ($p2$), когда используется аксиома E внешней системы, то мы имеем разновидность (1) с $m = 0$ и Γ'_k можно вывести последовательными применениями

*П из квазиисходного утверждения

$$\mathfrak{X}_k,\ E \Vdash\!\dashv E,\ \mathfrak{Z}_k$$

Здесь $\mathfrak{M}_k$ состоит только из E^*. Так поступают всегда, когда Γ_k получается по (1) с $m = 0$.

Если Γ_k получается по правилу R, которое немодально и справедливо во внутренней системе, или если R есть *Y, то пусть посылками будут Γ_{i_1}, Γ_{i_2}, . . . Тогда Γ'_k можно получить из Γ'_1, Γ'_2, . . . по тому же правилу R. Добавление $\mathfrak{M}_k$ в качестве дополнительных параметров не нарушает правильности вывода, так как никакой из них не может содержать характеристическую переменную правила R (если таковая имеется).

Если Γ_k получается по правилу Y*, то Γ_k получается так:

$$\frac{\mathfrak{X}_k \Vdash\!\dashv D}{\mathfrak{X}_k \Vdash' \Box D}$$

Вывод останется правильным, если мы заменим $\Vdash'$ на $\Vdash\!\dashv$. Отсюда мы получаем Γ'_k посредством *K.

Допустим, что Γ_k получается по (1). Тогда в силу индуктивного предположения и *K

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1} \Vdash\!\dashv A_i,\ \mathfrak{Z} \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{5}$$

Пусть

$$C_i \equiv A_{i+1} \supset . A_{i+2} \supset . \ldots \supset . A_m \supset B$$

Тогда мы увидим, что для всех i

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1},\ C_i \Vdash\!\dashv B,\ \mathfrak{Z} \tag{6}$$

Действительно, поскольку $C_m \equiv B$, это утверждение квазиисходно для $i = m$; предполагая, что оно верно для данного i, имеем

$$\frac{\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1} \Vdash\!\dashv A_i,\ \mathfrak{Z} \qquad \mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1},\ C_i \Vdash\!\dashv B,\ \mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1},\ C_{i-1} \Vdash\!\dashv B,\ \mathfrak{Z}} *\mathrm{P}$$

Поэтому (6) верно для всех i, в частности для $i = 0$. Последовательными применениями *П получим

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1},\ C_0^* \Vdash\!\dashv B,\ \mathfrak{Z}$$

то есть Γ'_k.

Допустим, что Γ_k получается посредством (?); тогда выводом будет

$$\frac{\mathfrak{X}_k,\ B \Vdash\!\dashv' \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}_k,\ A_1,\ \ldots,\ A_m \Vdash' \mathfrak{Y}}$$

По индуктивному предположению

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1},\ B \Vdash\!\dashv \mathfrak{Y}$$

Но в LA, а следовательно, и во внутренней системе имеем

$$A_1,\ \ldots,\ A_m,\ C \Vdash\!\dashv B$$

Из последних двух утверждений и ЭТ для внутренней системы имеем

$$\mathfrak{X}_k,\ \mathfrak{M}_{k-1},\ C,\ A_1,\ \ldots,\ A_m \Vdash\!\dashv \mathfrak{Y}$$

Отсюда получаем Γ'_k, применяя *П. Это завершает доказательство теоремы. Заметим, что ЭТ не требуется во внешней системе.

Следующие следствия мы получаем, беря LM* как внутреннюю систему и LJ*, LD* как внешнюю систему. Эти следствия можно получить из H-формулировок по теореме о дедукции, но их отношение к модальной логике небезынтересно.

Следствие 2.1. *Если* (3) *справедливо в* LJ*, *то* (4) *справедливо с* LM*, *взятой как внутренняя система, если* $\mathfrak{M}$ *состоит из подходящих замыканий всех* $F \supset A_i$, *где* $A_1,\ \ldots,\ A_n$ — *все главные конституэнты различных применений* Fj.

Следствие 2.2. *Если* (3) *справедливо в* LD*, *то* (4) *справедливо с* LM*, *взятой как внутренняя система, при условии что* $\mathfrak{M}$ *состоит из подходящих замыканий применений закона исключенного третьего.*

Действительно, вывод по N* может быть получен так:

$$\frac{\dfrac{\mathfrak{X},\ A \Vdash \mathfrak{Y} \qquad \mathfrak{X},\ \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X},\ A \vee \neg A \Vdash \mathfrak{Y}}}{\mathfrak{X} \Vdash \mathfrak{Y}}\ (2)$$

В случае когда роль внутренней системы играет LA_1^*, мы имеем также

Следствие 2.3. *Если* (3) *справедливо в* LC_1^*, *то и* (4) *имеет место—так, как оно сформулировано в* LA_1^* *с* $\mathfrak{M}$, *состоящим из подходящих замыканий применений закона Пирса.*

Действительно, вывод по Px можно получить так:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{X},\ A \supset B \Vdash' A}{\mathfrak{X} \Vdash' A \supset B . \supset A} \qquad \mathfrak{X},\ A \Vdash' A}{\mathfrak{X},\ A \supset B . \supset A . \supset A \Vdash' A} *\mathrm{P}}{\mathfrak{X} \Vdash' A}\ (2)$$

Аналог следствия 2.2 можно, конечно, получить для LK*.

С. Т- и Н-ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРИИ НЕОБХОДИМОСТИ

1. Т-формулировка. Т-правила для необходимости, которые получаются из L-правил способом, аналогичным применявшемуся в предыдущих главах, таковы:

$$\text{Ye}\ \frac{\Box A}{A} \qquad \text{Yi}\ \frac{(\Box)}{\Box A}$$

Здесь '$(\Box)$' над 'A' в Yi указывает, что A выводится из посылок, являющихся утверждениями о необходимости, по правилам внутренней системы. Систему, образованную присоединением правил Ye и Yi к TX, естественно обозначить через TXY.

Вряд ли стоит давать формальные доказательства того, что эти правила эквивалентны L-правилам в том же смысле, что и в соответствующих местах предыдущих глав. Вместо этого мы дадим определение и выведем ряд конкретных результатов.

Определение 1. Определим строгую импликацию, обозначаемую инфиксом '$\prec$', так:

$$A \prec B \equiv \Box (A \supset B)$$

Теорема 1. *Какова бы ни была основная система* $\mathfrak{S}$, *справедливо следующее*:

(a) $\quad \vdash \Box A \prec A$

(b) $\quad \vdash \Box A \prec \Box\Box A$

(c) $\quad \vdash A \prec B \,.\prec.\, \Box A \prec \Box B$

Далее, если $\mathfrak{S}$ *есть* $\mathfrak{D}$, *то*

(d) $\quad$ *Если* $\vdash A$, *то* $\vdash \Box A$

Доказательство. В силу Ye, а также Pi и Yi получаем (a); в силу Yi — (d). Чтобы вывести (b) и (c), воспользуемся схемами

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{1}}{\Box A}\,\text{Yi}}{\Box\Box A}\,\text{Pi}-1}{\dfrac{\Box A \supset \Box\Box A}{\Box A \prec \Box\Box A}\,\text{Yi}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{1}}{A \prec B}\,\text{Ye} \quad \dfrac{\overline{2}}{\Box A}\,\text{Ye}}{A \supset B}}{B}\,\text{Pe}}{\Box B}\,\text{Yi}}{\Box A \supset \Box B}\,\text{Pi}-2}{\Box A \prec \Box B}\,\text{Yi}}{A \prec B \supset .\, \Box A \prec \Box B}\,\text{Pi}-1}{A \prec B \,.\prec.\, \Box A \prec \Box B}\,\text{Yi}$$

Н-формулировку, включающую те же утверждения, что и TXY, обозначим через HXY. Удобно расширить этот термин таким образом, чтобы включить не только систему, основанную лишь на modus ponens (Ph), но и систему, основанную на следующем правиле Yh, аналогичном Ih:

Yh $\quad \dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$

Сначала рассмотрим случай, когда нет иных правил, кроме Ph, потому что тогда предыдущие доказательства проходят без изменений.

Теорема 2. *Если* Ph — *единственное исходное правило, то система исходных утверждений для* HXY *состоит из утверждений вида* $\Box A$, *где* A — *исходное утверждение* HX, *а также из всех частных случаев схем* (a) — (c) *теоремы* 1 *и схем*

(a') $\quad \vdash \Box A \supset A$

Доказательство. Пусть H_2 — система, описанная в теореме. Тогда все исходные высказывания H_2 являются утверждениями HXY по теореме 1. [Заметим, что (a') следует непосредственно из Ye и Pi.] Так как Ph — то же самое, что и Pe, то оно будет допустимым правилом для HXY. По дедуктивной индукции каждое утверждение H_2 является также утверждением HXY.

Чтобы доказать обратное, мы должны показать, что правила TXY допустимы в H_2. Это ясно для Pe, поскольку оно есть не что иное, как Ph. Для немодальных правил это было показано в предыдущих главах. Для Ye это немедленно следует из (a') и Ph.

Остается рассмотреть Yi. Чтобы установить его допустимость, заметим сначала, что правило

Ph′ $\quad \dfrac{\vdash A \prec B \qquad \vdash A}{\vdash B}$

допустимо ввиду Ph и (a'). Предположим теперь, что A выведено в H_2 из посылок вида $\Box C$. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — шаги этого вывода. Мы увидим, что $\Box B_k$ для любого k является утверждением H_2. Если B_k имеет вид $\Box C$, то $\vdash \Box B_k$ следует из (b) и Ph′. Сказанное верно для всех случаев, когда B_k является посылкой или исходным утверждением, отличным от (a'). Если B_k является применением (a'), то $\Box B_k$ является применением (a). Если B_k получается по Pe, то пусть посылки будут B_i и $B_j \equiv B_i \supset B_k$. Тогда имеем $\vdash \Box B_k$ из $\vdash \Box B_i$ и $\vdash \Box B_j$ в силу (c) и Ph′, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *При правилах* Ph *и* Yh *система исходных утверждений для* HXY *состоит из исходных утверждений для* HX *вместе с*

(a') $\quad \vdash \Box A \supset A$

(b') $\quad \vdash \Box A \supset \Box\Box A$

(c') $\quad \vdash A \prec B . \supset : \Box A . \prec . \Box B$

Доказательство. Пусть H_3 — система теоремы 3, H_2 — система теоремы 2. Тогда исходные утверждения H_2 получаются в H_3 по Yh. Утверждения H_3 справедливы в H_2 ввиду (a') и Pe; далее, Yh, являющееся частным случаем Yi, допустимо в H_2.

S. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Исторические и библиографические комментарии. Непосредственными источниками для этой главы являются [TFD], гл. 5, и [ETM]. Я намеренно воздерживаюсь от обсуждения дальнейшего развития этой темы на том основании, что оно представляется слишком специальным для книги такого рода.

По поводу античной модальной логики см. работы, упомянутые в разд. 1S3, в особенности книгу Бохенского.

Начало современной модальной логики было положено работами Льюиса, хотя говорят, что его в чем-то предвосхитил Мак-Колл. (Ссылки см. у Чёрча [BSL] под фамилиями этих авторов.) Льюис представил один вариант своей системы в работе [SSL]. Дальнейшее развитие мы видим в соответствующей части книги Льюиса и Лэнгфорда [SLg]. В конце книги представлены пять систем S1—S5, сила которых возрастает в порядке возрастания номеров. Сам Льюис заявил, что он не может решить, какая из его систем "выражает приемлемые принципы вывода".

После Льюиса в области модальной логики работали ряд ученых, в том числе Беккер, Перри, Вайсберг, Фейс, Мак-Кинси, Тан, Рут Баркан, Мо, фон Райт, Г. А. Шмидт, Холден, Леммон и Андерсон. У Холдена есть целый ряд систем, идущих дальше систем Льюиса; он и некоторые другие авторы вставили ряд промежуточных по силе систем в ряду S1 — S5. Все эти системы основаны на НК. Единственная неклассическая модальная логика, которую я знаю, — это логика Фитча [IML]. По поводу общего обзора того, что́ может быть названо классическим подходом к модальностям, см. Прайор [FLg], гл. III, 1 (особенно полезны списки постулатов в приложении); Леммон [NFL]. Шмидт [VAL] (п.п. 161—192) весьма подробно излагает модальную логику; он, однако, не прослеживает связи с работами других авторов. Книга Беккера [ELg] также может быть все еще полезной[1]).

Гёдель [IIA] указал, что существует близкое родство между системой S4 Льюиса и системой HJ. Он показал, что HJ можно интерпретировать в HKY, и схемы (a) — (c) теорем C2 и C3 принадлежат ему. По поводу дальнейших исследований в этом направлении см. Мак-Кинси и Тарский [TSC], Маэхара [DIL]. Топологические связи с алгебрами замыканий были установлены Таном [APG], Мак-Кинси и Тарским [AT_D] и др.

Система, к которой мы пришли здесь в результате семантического подхода, эквивалентна системе S4 Льюиса. Другие семантические подходы также приводили к S4, а в некоторых случаях — к S5. Так, Мак-Кинси [SCS] приходит к S4, Карнап [MNc] — к S5.

Генценовские методы в связи с модальными логиками изучались также в статье Ониси и Мацумото [GMM], согласно которой система, в которой Y* заменяется на (8) разд. A, есть по существу система S5 Льюиса. Они формулируют генценовские правила для нескольких модальных систем, включающих как возможность, так и необходимость, устанавливают эквивалентность с более обычными H-формулировками и доказывают ЭТ для некоторых из них. Их вторая статья содержит доказательство ЭТ для S5.

Крипке недавно предпринял глубокое изучение модальных логик, используя технические средства, похожие на средства Генцена и Бета. См. его [CTM], [SAM].

Системы структурного характера, относящиеся к модальным логикам, рассматривались несколькими авторами, например Портом [RLM], Расёвой и Сикорским [ALL], [ETN], Рубином [RCA]; см. также статьи, приведенные выше в связи с топологическими приложениями.

Есть ряд трудных вопросов относительно интерпретации кванторов в модальной логике. По этому поводу имеется довольно обширная литература, например Хинтикка [MRM], Кангер [MSP], [NQM], Крипке [SAM], Майхилл [PAF], Куайн [PIM].

[1]) См. также Фейс [MLg], Шютте [VSL], Минц [ИМЛ]. — *Прим. ред.*

БИБЛИОГРАФИЯ

В настоящую библиографию включены только работы, упоминаемые в тексте книги. При цитировании указывается автор работы и сокращенное обозначение ее названия в квадратных скобках. Эти сокращения названий располагаются для каждого автора в алфавитном порядке названий [1]) (за исключением сокращений, начинающихся с 'rev', относящихся к обзорам и рефератам; эти ссылки помещаются в библиографии после остальных работ того же автора).

Если работа принадлежит нескольким авторам, то эта группа авторов [2]) рассматривается в библиографии как отдельный "автор". В тех случаях, когда нет надобности перечислять всех авторов какой-либо работы, мы позволим себе писать 'и др.'; это означает, как обычно, что, кроме упоминаемого, у работы есть еще один или более авторов. Перекрестные ссылки на этих дополнительных авторов устанавливаются с помощью авторского указателя.

Ссылки без (явного или подразумеваемого) указания автора — это ссылки на мои работы (или когда речь идет о [CLg] — на монографию Карри и Фейса). Так же делаются ссылки на работы того же автора, встречающиеся внутри самой библиографии; но, конечно, если работа принадлежит другому автору, то это обстоятельство отмечается.

Инициалы авторов, как правило, при ссылках не указываются — их можно найти в библиографии. Исключения составляют ссылки на работы однофамильцев.

Если работа состоит из двух или более томов или частей, ссылка на конкретный том или часть производится указанием номера тома (части) после соответствующей аббревиатуры внутри квадратных скобок. Повторные издания отмечаются подстрочными цифровыми индексами, например Уайтхед и Рассел [PMt.I_2] означает второе издание первого тома [PMt]. Таким же образом иногда различаются работы, имеющие одинаковые названия, даже если они и не являются разными изданиями одной работы.

Если требуется указать на определенное место цитируемой работы, то мы указываем номера соответствующих страниц или параграфов, помещая эти указания после сокращенного наименования работы, стоящего в квадратных скобках.

Сокращения названий журналов приводятся в соответствии с обычными соглашениями, принятыми в *Mathematical Reviews* [3]) (см. т. 19, стр. 1417—1430 и аналогичные перечни в предыдущих томах *Math. Rev.*). Если речь

[1]) Имеется в виду английский алфавит; появившиеся при переводе русские аббревиатуры названий стоят на тех же местах, где были в оригинале их английские прообразы.— *Прим. ред.*

[2]) Перечисляемая в том порядке, в каком они следуют на титуле цитируемой работы.— *Прим. ред.*

[3]) И в реферативном журнале «Математика».— *Прим. ред.*

идет о журнале, не реферировавшемся в *Math. Rev.*, сокращение его названия делается в естественном соответствии с установившейся в *Math. Rev.* практикой.

При ссылках на журнальные статьи после названия журнала указывается том, затем номер выпуска, страницы и, наконец, предполагаемая дата публикации (в скобках). Иногда точную датировку работы установить затруднительно. В таких случаях мы старались дать наилучшую информацию, которой располагали, не претендуя на ее исчерпывающий характер.

В цитировании русских работ в библиографии приняты русские же сокращения их названий [1]).

Адян С. И.

∘ [ОАП] Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, **85** (1966), 121 стр.

Айдукевич (Ajdukiewicz K.)

[TCD] Three concepts of definition, *Logique et analyse*, n.s., 1^{e} Année (1958), 115—126.

Аккерман (Ackermann W.)

[BSI] Begründung einer strengen Implikation, *J. Symb. Logic*, **21** (1956), 113—128.

[SCD] Solvable cases of the decision problem, Amsterdam, 1954.

Американское математическое общество (American Mathematical Society)

[SLM] Structure of language and its mathematical aspects, Proc. 12th Symposium in Applied Mathematics, New York, 1960 (опубликована в 1961 г.).

Андерсон (Anderson A. R.)

[CTS] Completeness theorem for the systems E of entailment and EQ of entailment with quantification, Tech. Rep. 6, Contract SAR/Nonr-609 (16) (Problem Solving and Social Interaction) for U.S. Office of Naval Research, New Haven, Conn., 1959.

Андерсон (Anderson A. R.) и Белнап (Belnap N. D.)

[PCE] The pure calculus of entailment, *J. Symb. Logic*, **27** (1962).

Ассер (Asser G.)

[AFP] Über die Ausdrucksfähigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Funktionalen, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **2** (1956), 250—264.

[NPA] Normierte Postsche Algorithmen, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **5** (1959), 323—333.

[TLA] Theorie der logischen Auswahlfunktionen, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **3** (1957), 30—68.

[1]) В оригинале и в этом случае использовались английские аббревиатуры русских названий, транслитерированных латинским шрифтом. Поскольку при переводе мы заменили их русскими сокращениями, текст последнего абзаца авторских пояснений к библиографии при переводе изменен. Работы, отмеченные кружком, внесены редактором перевода.— *Прим. ред.*

[TMM] Turing-Maschinen und Markowsche Algorithmen, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **5** (1959), 346—365.

Бахман (Bachmann H.)

[TZh] Transfinite Zahlen, Berlin, 1955.

Беккер (Becker O.)

[ELg] Einführung in die Logistik, Meisenheim am Glan, 1951.

Беман (Behmann H.)

[PKL] Der Prädikatenkalkül mit limitierten Variablen, Grundlegung einer natürlichen exakten Logik, *J. Symb. Logik*, **24** (1959), 112—140.

[WLM] Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **40** (1931), 37—48.

Беннет (Bennett A. A.)

[SSO] Semi-serial order, *Amer. Math. Monthly*, **37** (1930), 418—423.

Бергман (Bergmann G.)

[FHN] Frege's hidden nominalism, *Philos. Rev.*, **67** (1958), 437—459.

Бернайс (Bernays P.)

[AUA] Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der «Principia mathematica», *Math. Z.*, **25** (1926), 305—320.

[BSB] Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung, *Theoria* (Madrid), **1** (1952), 153—154.

[HGG] Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik, *Jber. Deutsche Math. Verein*, **31** (1922), 10—19.

[LCI] Logical Calculus (лекции в Институте Высших Исследований, записанные Ф. А. Фикеном), Princeton, N.J., 1935—1936.

[PMt] Sur le platonisme dans les mathématiques, *Enseignement Math.*, **34** (1935—1936), 52—69.

[QMA] Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration, Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques (December 6—9, 1938), 1941, 144—152; Discussion, 153—161.

[rev. C] Реферат на статьи Карри [DNF] и [SLD], *J. Symb. Logic*, **18** (1953), 266—268.

Бернайс (Bernays P.) и Френкель (Fraenkel A.)

[AST] Axiomatic set theory, Amsterdam, 1958.

Берри (Berry G. D. W.)

[OSL] Symposium: On the ontological significance of the Löwenheim-Skolem Theorem, Academic Freedom, Logic, and Religion (American Philosophical Association, Eastern Division), Philadelphia, 1953, 39—55. См. также Майхилл [OSL].

Берстейн (Berstein B. A.)

[FBA] On finite boolean algebras, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 733—742.

Бет (Beth E. W.)

[CSL] Construction sémantique de la logique intuitionniste, Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales (Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique), vol. 70, 1958, 77—84.

[CTL] Some consequences of the Theorem of Löwenheim—Skolem—Gödel — Malcev, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, ser. A, **56** (=*Indag. Math.* 15) (1953), 66—71.

[FMt] Foundations of mathematics, Amsterdam, 1959. (Русский перевод извлечений, относящихся к семантическим таблицам: Бет Э., Метод семантических таблиц; в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 191—499.)

[SCI] Semantic construction of intuitionistic logik, *Meded. Kon. Nederl. Akad. Wetensch., Letterkunde*, n.s., **19** (1956), 357—388.

[SEF] Semantical entailment and formal derivability, *Meded. Kon. Nederl. Akad. Wetensch., Letterkunde*, n.s., **18** (1955), 309—342.

[SLG] Symbolische Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften, «Bibliographische Einführungen in das Studium der Philosophie», 1948.

[TPT] A topological proof of the Theorem of Löwenheim — Skolem — Gödel, *Nederl. Akad. Wetensch.*, ser. A, **54** (=*Indag. Math.*, **13**) (1951), 436—444.

[VIn] Verstand en Intuitie, *Algemeen Nederl. Tijdschr. Wijsbegeerte en Psychologie*, **46** (1953—1954), 213—224.

Бёнер (Boehner Ph.)

[MLg] Medieval logic: An outline of its development from 1250-c. 1400, Chicago, 1952.

Биркгоф (Birkhoff Garrett)

[CSA] On the combination of subalgebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **29** (1933), 441—464.

[LTh] Lattice theory, American Mathematical Society, 1st ed., 1940, 2nd ed., 1948. (Русский перевод второго издания: Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952.)

Биркгоф (Birkhoff G.) и фон Нейман (von Neumann J.)

[LQM] The logic of quantum mechanics, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 823—842.

Бирн (Byrne L.)

[TBF] Two brief formulations of boolean algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 269—272.

Бланше (Blanché Robert)

[ILC] Introduction à la logique contemporaine, Paris, 1957.

Блейк (Blake A.)

[CEB] Canonical expressions in boolean algebra, диссертация, University of Chicago, 1938.

Блэк (Black M.)

[NMt] The nature of mathematics: A Critical Survey, New York, 1934.

[RMP] The relevance of mathematical philosophy to the teaching of mathematics, *Math. Gaz.*, **22** (1938), 149—163.

Борковский (Borkowski L.) и Слупецкий (Słupecki J.)

[LWJ] The logical works of J. Łukasiewicz, *Studia Logica*, 8 (1958), 7—56.

Бохенский (Bocheński I. M.)

[AFL] Ancient formal logic, Amsterdam, 1951.

[FLg] Formale Logik, Münich, 1956.

[NLL] Nove lezioni di logica simbolica, Rome, 1938.

[PLM] Précis de logique mathématique, Bussum, 1949.

Браун (Brown R.)

[WTh] Words and things: An introduction to language, Glencoe, Ill., 1959.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

[CPM] Consciousness, philosophy, and mathematics, Proc. 10th Internat. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, 1235—1249.

[GLW] Over de grondslagen der wiskunde, Amsterdam, 1907.

[HBP] Historical background, principles and methods of intuitionism, *South African J. Sci.*, **49** (1952), 139—146.

[IBF] Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, **31** (1931), 374—379.

[IZM] Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **36** (1927), 127—129.

[OLP] De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschrift wijsbegeerte*, 2 (1908), 152—158.

Бун (Boone W. W.)

○ [WDU] Partial results regarding world-problem and recursively enumerable degrees of unsolvability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68**, № 6 (1962), 616—623.

○ [WPr] The world-problem, *Math. Annalen*, **70**, № 2 (1959), 207—256.

Бурали-Форти (Burali-Forti C.)

[LMt] Logica mathematica, Milan, 1894; 2nd ed., 1919.

Вайсберг (Wajsberg M.)

[MLB] Metalogische Beiträge, *Wiadomosci Mat.*, part I, **43** (1936), 131—168; part II, **47** (1939), 119—139.

[UAK] Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting, *Wiadomosci Mat.*, **46** (1938), 45—101.

Вайсман (Waisman F.)

[EMD] Einführung in das mathematische Denken: Die Begriffsbildung der modernen Mathematik, Vienna, 1936; 2nd ed., 1947.

Ван (Wang H.)

[FMt] The formalization of mathematics, *J. Symb. Logic*, **19** (1954), 241—266.

[LMS] The logic of many-sorted theories, *J. Symb. Logic*, **17** (1952), 105—116.

Ван (Wang H.) и Мак-Нотон (MacNaughton R.)

[SAT] Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles, Paris, 1953. (Русский перевод: Ван Хао и Мак-Нотон Р., Аксиоматические системы теории множеств, ИЛ, 1963.)

Вейль (Weyl H.)

[DHM] David Hilbert and his mathematical work, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 612—654.

[PMN] Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, Munich und Berlin, 1927. (Сокращенный русский перевод в кн. Вейль Г., О философии математики, Гостехиздат, 1934, 34—91 (под названием "Философия математики").)

Воот (Vaught R. L.)

[ALS] Applications of the Löwenheim—Skolem—Tarski theorem to problems of completeness and decidability, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, A, 57 (*Indag. Math.*, **16**) (1954), 467—472.

Галлер (Galler B. A.)

[CPA] Cylindric and polyadic algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 176—183.

Гальперин (Hailperin T.)

[QTE] Quantification theory and empty individual-domains, *J. Symb. Logic*, **18** (1953), 197—200.

[RID] Remarks on identity and description in first-order axiom systems, *J. Symb. Logic*, **19** (1954), 14—20.

[TRQ] Theory of Restricted Quantification, *J. Symb. Logic*, **22** (1957), 19—35, 113—129.

Гейтинг (Heyting A.)

[CIL] La conception intuitionniste de la logique, *Études philos.*, n.s., **11** (1956), 226—233.

[CMt] Constructivity in mathematics, Amsterdam, 1959.

[FMI] Les fondements des mathématiques, intuitionnisme, théorie de la démonstration, Paris, 1955 (перевод [MGL]).

[FRI] Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, 1930, 42—56.

[Int] Intuitionism: An introduction, Amsterdam, 1956. (Русский перевод: Гейтинг А., Интуиционизм, «Мир», 1965.)

[MGL] Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, Berlin, 1934. (Русский перевод: Гейтинг А., Обзор исследований по основаниям математики, ОНТИ, 1936.)

Генкин (Henkin L.)

[ACQ] An Algebraic characterizations of quantifiers, *Fund. Math.*, **37** (1950), 63—74.

[ASM] The algebraic structure of mathematical theories, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **7** (1955), 131—136.

[BRS] Banishing the rule of substitution for functional variables, *J. Symb. Logic*, 18 (1953), 201—208.
[CTT] Completeness in the theory of types, *J. Symb. Logic*, 15 (1950), 81—91.
[RTC] The representation theorem for cylindrical algebras, в книге Сколема [MIF], 85—97.
[SAT] La structure algébrique des théories mathématiques, Paris, 1956.

Генкин (Henkin L.), Саппс (Suppes P.) и Тарский (Tarski A.)

[AMS] The axiomatic method with special reference to geometry and physics, Amsterdam, 1959.

Генкин (Henkin L.) и Тарский (Tarski A.)

[CAl] Cylindrical algebras, summaries of talks, presented at the summer institute for symbolic logic, Cornell University, 1957, 332—340.

Генцен (Gentzen G.)

[EUA] Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen, *Math. Ann.*, 107 (1932), 329—350.
[NFW] Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reinen Zahlentheorie, *Forsch. Logik und Grundlegung exakten Wiss.*, n.s., 4 (1938), 19—44. (Русский перевод: Генцен Г., Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел; в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 154—190.)
[RDL] Recherches sur la deduction logique, Paris, 1955 (перевод работы [ULS] с комментариями Р. Фейса и Ж. Ладриера).
[ULS] Untersuchungen über das logische Schliessen, *Math. Z.*, 39 (1934), 176—210, 405—431. (Русский перевод: Генцен Г., Исследования логических выводов; в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 9—74.)
[WFR] Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Ann.*, 112 (1936), 493—565. (Русский перевод: Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел; в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 77—153.)

Гермес (Hermes H.)

[EVT] Einführung in die Verbandstheorie, Berlin, 1955.
[GLM] Über die gegenwärtige Lage der mathematischen Logik und Grundlagenforschung, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, 59 (1956), 49—69.
[IPO] Der Inversionsprinzip der operativen Logik, в книге Гейтинга [CMt], 62—68.
[Smt] Semiotik, *Forsch. Logik und Grundlegung exakten Wiss.*, n.s., 5 (1938), 5—22.

Гермес (Hermes H.) и Кёте (Köthe G.)

[TVr] Theorie der Verbände, «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften», vol. I, № 13, 1938.

Гермес (Hermes H.) и Марквальд (Markwald M.)

[GLM] Grundlagen der Mathematik, *Grundzüge Math. für Lehrer an Gymnasien sowie für Math. in Industrie und Wirtschaft*, 1 (1958), 1—89.

Гермес (Hermes H.) и Шольц (Scholz H.)

[MLg] Mathematische Logik, «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften», vol. I, № 1, Leipzig, 1952.
[NVB] Ein neuer Vollständigkeitbeweis für das reduzierte Fregeschen Axiomensystem des Aussagenkalküls, *Forsch. Logik und Grundlegung exakten Wiss.*, n.s., 1 (1937), 1—40.

Герц (Hertz P.)

[ASB] Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme, *Math. Ann.*, 101 (1929), 457—514.

Гёдель (Gödel K.)

[BNB] Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica*, 12 (1958), 280—287. (Русский перевод: Гёдель К., Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения; в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 299—304.)
[CAC] The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory (Ann. Math. Studies, № 3), Princeton N.J., 1940. (Русский перевод: Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, *Успехи матем. наук*, 3, № 1 (1948), 96—149.)
[FUS] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme, I, *Monatsh. Math. Phys.*, 38 (1931), 173—198.
[IAK] Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, *Akad. Wiss. Anzeiger*, 69 (1932), 65—66.
[IAZ] Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, *Erg. math. Kolloq.*, 4 (1933), 34—38.
[IIA] Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, *Erg. math. Kolloq.*, 4 (1933), 39—40.
[RML] Russell's mathematical logic, в книге «The Philosophy of Bertrand Russell», под ред. Шильпа, Chicago, 1944, 123—153.
[UPF] On undecidable propositions of formal mathematical systems, mimeographed report of lectures by Gödel at the Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1934.
[VAL] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatsh. Math. Phys.*, 37 (1930), 349—360.
[WIC] What is Cantor's continuum problem?, *Amer. Math. Monthly*, 44 (1947), 515—525.

Гжегорчик (Grzegorczyk A.)

[SLR] The Systems of Lésniewski in relation to contemporary logical research, *Studia Logica*, 3 (1955), 77—95.

Гилмор (Gilmore P. C.)

[ALM] An addition to logic of many-sorted theories, *Compositio Math.*, 13 (1958), 277—281.
[AST] An alternative to set theory, mimeographed manuscript, 1959.

Гильберт (Hilbert D.)

[GAb] Gesammelte Abhandlungen, в 3 томах, Berlin, 1932—1935.
[GLG] Grundlagen der Geometrie, 7th ed., Leipzig — Berlin, 1930.

(Русский перевод: Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.)

[GLM] Die Grundlagen der Mathematik (Hamburger mathematische Einzelschriften, № 5), Leipzig, 1928. (Перепечатана с сокращениями в 7-м изд. книги Grundlagen der Geometrie, Leipzig — Berlin, 1930. Русский перевод последней: Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, 365—388.)

[NBM] Neubegründung der Mathematik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1 (1922), 157—177. (Перепечатано в [GAb], т. 3, стр. 157—177.)

Гильберт (Hilbert D.) и Аккерман (Ackermann W.)

[GZT] Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin, 1928; 2nd ed., 1938; 3d ed., 1949; 4th ed., 1959. (Русский перевод со 2-го изд. с добавлениями из 1-го изд.: Гильберт Д. и Аккерман В., Основы теоретической логики, с пред. и коммент. С. А. Яновской, ИЛ, 1947.)

[PML] Principles of mathematical logic, New York, 1950. (Перевод [GZT_2] на английский язык Хаммонда, Леки и Штейнгардта под ред. и с комментариями Люса.)

Гильберт (Hilbert D.) и Бернайс (Bernays P.)

[GLM] Grundlagen der Mathematik, том 1, Berlin, 1934; том 2, Berlin, 1939.

Гливенко В. И.

[LBr] Sur la logique de M. Brouwer, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 14 (1928), 225—228.

[PLB] Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 15 (1929), 183—188.

[TGS] Théorie générale des structures, Paris, 1938.

Гонсет (Gonseth F.)

[MRI] Les mathématiques et la réalité: Essai sur la méthode axiomatique, Paris, 1936.

Гудстейн (Goodstein R. L.)

[CFr] Constructive formalism, Leicester, England, 1951.

[MLg] Mathematical logic, Leicester, England, 1957. (Русский перевод: Гудстейн Р. Л., Математическая логика, ИЛ, 1961.)

[NMS] On the nature of mathematical systems, *Dialectica*, 12 (1958), 296—316.

[RNT] Recursive number theory, Amsterdam, 1957.

Дайамонд (Diamond A. H.) и Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)

[ASA] Algebras and their subalgebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 959—962.

Дайсон (Dyson V. H.) и Крайзель (Kreisel G.)

[ABS] Analysis of Beth's construction of intuitionistic logic, Appl. Math. and Statist. Lab. Tech. Rep., 3, Stanford University, Calif., 1961.

Дедекинд (Dedekind R.)

[GMW] Gesammelte Mathematische Werke, в 3 томах, Braunschweig, 1930—1932.

[WSW] Was sind und was sollen die Zahlen? 6th ed., Braunschweig, 1930.

[ZZG] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler, Festschrift Tech. Hoch. Braunschweig, 1897 (перепечатано в [GMW], том 2, 103—148).

Детловс В. К.

[АлР] Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, *ДАН СССР*, 90 (1953), 723—725.

Джонсон (Johnson W. E.)

[Lgc] Logic, part I, London, 1921; part II, London, 1922; part III, London, 1924.

Джордан (Jordan Z.)

[DML] The development of mathematical Logic and of logical positivism in Poland between the two wars, London, 1945.

Дилуорт (Dilworth R. P.)

[ARL] Abstract residuation over lattices, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 262—268.

Допп (Dopp J.)

[VSD] Les variétés syntaxiques de la définition dans les langages rigoureux, Études philos., 1956, № 2, 209—225.

Дребен (Dreben B.), Эндрюс (Andrews P. B.) и Андреа (Aandreaa S.)

∘ [FLH] False Lemmas in Herbrand, *Bull. Amer. Math. Soc*, **69**, № 5 (1963), 699—706.

Дубислав (Dubislav W.)

[Dfn] Über die Definition, Berlin, 1926; 2nd ed., Leipzig, 1931.

[PMG] Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, Berlin, 1932.

Дэвис (Davis M.)

[CUn] Computability and Unsolvability, New York — London, 1958. (Готовится русский перевод в изд-ве «Наука».)

Дюбрей-Жакотен (Dubreil-Jacotin M. L.), Лезье (Lesieur L.) и Круазо (Croisot R.)

[LTT] Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées, et des treillis géometriques, Paris, 1953.

Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д. и Тайцлин М. А.

∘ [ЭлТ] Элементарные теории, *Успехи матем. наук*, **20** (1965), вып. 4, 37—108. (Обзор.)

Есенин-Вольпин А. С.

∘ [АПО] Анализ потенциальной осуществимости, в сб. Логические исследования, изд-во АН СССР, 1959, 218—262.

∘ [PUF] Le programme ultra-intuitioniste des fondements des mathématiques, в сб. Infinitistic Methods, Warsaw, 1959, 201—223.

∘ [ТМд] О теории модальностей, в сб. «Логика и методология науки», «Наука», 1967, 56—67.

Жегалкин И. И.

[АСЛ] Арифметизация символической логики, *Матем. сб.*, **35** (1928), 311—377; **36** (1929), 205—338.

Зубиета (Zubieta R. G.)

[SVF] Sobre la substitucion de les variables functionales en el calculo functional de primer orden, *Bol. Soc. Mat. Mexanico*, **7** (1950), 1—21.

Идельсон А. В. и Минц Г. Е. (ред.)

∘ [МЛВ] Математическая теория логического вывода (Сборник переводов, включающий [ULS], [WFR] и [NFW] Генцена, §§ 67, 68, 70 и 92 из [FMt] Бета, [PIG] Клини, [BNB] Гёделя и др. с приложением статьи Минца [ТЭр]), «Наука», 1967.

Иоганссон (Johansson I.)

[CCA] Sur le concept de «le» (ou de «ce qui») dans le calcul affirmatif et dans les calculs intuitionistes, Les méthodes formelles en axiomatique (Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, vol. 36), 1953, 65—72.

[MKR] Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, *Compositio Math.*, **4** (1936), 119—136.

Йонсон (Jonson B.) и Тарский (Tarski A.)

[BAO] Boolean algebras with operators, part I, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 891—939; part II, **74** (1952), 127—162.

Йордан (Jordan P.)

[TSV] Die Theorie der Schrägverbände, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **21** (1937), 127—138.

Йоргенсен (Jørgensen J.)

[TFL] A treatise of Formal Logic, в 3 томах, Copenhagen — London, 1931.

Камке (Kamke E.)

[MLh] Mengenlehre, Berlin — Leipzig, 1928.

Кангер (Kanger S.)

[MSP] The Morning Star Paradox, *Theoria* (Sweden), **23** (1957), 1—11.

[NPP] A note on partial postulate sets for propositional logic, *Theoria* (Sweden), **21** (1955), 99—104.

[NQM] A note on quantification and modalities, *Theoria* (Sweden), **23** (1957), 133—134.

Кантор (Cantor G.)

[GAb] Gesammelte Abhandlungen, под ред. Цермело, Berlin, 1932.

Карнап (Carnap R.)

[ESL] Einführung in die symbolische Logik, Vienna, 1954.

[FLg] Formalization of logic, Cambridge, Mass., 1943.

[FLM] Foundations of logic and mathematics, «International Encyklopedia of Unified Science», vol. I, № 3, Chicago, 1939.

[ISL] Introduction to symbolic logic and applications, New York, 1958 (перевод [ESL] на английский язык).

[ISm] Introduction to semantics, Cambridge, Mass., 1942.

[LSL] The logical syntax of language, London — New York, 1937 (перевод [LSS] на английский язык, выполненный А. Смитон).

[LSS] Logische Syntax der Sprache, Vienna, 1934.

[MNc] Meaning and necessity: A study in semantics and modal logic, Chicago, 1947. (Русский перевод: Карнап Р., Значение и необходимость, ИЛ, 1958.)

Карри (Curry H. B.)

[ALS] An analysis of logical substitution, *Amer. J. Math.*, **51** (1929), 363—384.

[APM] Some aspects of the problem of mathematical rigor, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 221—241.

[AVS] Apparent variables from the standpoint of combinatory logic, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 381—404.

[CFS] Calculuses and formal systems, *Dialectica*, **12** (1958), 249—273.

[DFS] Definitions in formal systems, *Logique et analyse*, n.s., 1e Annee, **1** (1958), 105—114.

[DNF] On the definition of negation by a fixed proposition in the inferential calculus, *J. Symb. Logic*, **17** (1952), 98—104.

[DSR] On the definition of substitution, replacement, and allied notions in an abstract formal system, *Rev. philos. Louvain*, **50** (1952), 251—269.

[DTC] The deduction theorem in the combinatory theory of restricted generality, *Logique et analyse*, n.s., 3e Annee (1959), 15—39.

∘ [EDF] The equivalence of two definitions of elementary formal system, *Compositio Math.*, **20** (1968), 13—20.

[ETM] The elimination theorem when modality is present, *J. Symb. Logic*, **17** (1952), 249—265.

[GDT] Generalizations of the deduction theorem, Proc. Internat. Congress of Mathematicians, 1954, 399—400.

[GKL] Grundlagen der kombinatorischen Logic, *Amer. J. Math.*, **52** (1930), 509—536, 789—834.

[IAL] The inferential approach to logical calculus, part I, *Logique et analyse*, 3e Annee (1960), 119—136; part II, там же, 4e Annee (1961), 5—22.

[IFI] The interpretation of formalized implication, *Theoria* (Sweden), **25** (1959), 1—26.

[LAG] Some logical aspects of grammatical structure, в сб. Американского математического общ-ва [SLM], 56—68.

[LFS] Languages and formal systems, Proc. 10th Internat. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, 770—772 (резюме статьи [LMF]).

[LLA] Leçons de logique algébrique, Paris — Louvain, 1952.

[LMF] Language, metalanguage, and formal system, *Philos. Rev.*, **59** (1950), 346—353.

[LSF] L-semantics as a formal system, *Actualités Sci. Ind.*, **1134** (1951), 19—29.

[LSG] The logical structure of grammar, lecture delivered November, 1948 (мимеографированный конспект лекций, частично включен в [LAG]).
[MSL] Mathematics, syntactics and logic, *Mind*, **62** (1953), 172—183.
[NAL] A note on the associative law in logical algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (1936), 523—524.
[NRG] A note on the reduction of Gentzen's calculus LJ, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 288—293.
[OFP] Outlines of a formalist philosophy of mathematics, Amsterdam, 1951.
[PBP] Philosophische Bemerkungen zu einigen Problemen der mathematischen Logik, *Arch. Philos.*, **4** (1951), 147—156.
[PEI] Some properties of equality and implication in combinatory logic, *Ann. of Math.* (2), **35** (1934), 849—860.
[PFD] Some properties of formal deducibility (резюме), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 615
[PKR] The paradox of Kleene and Rosser, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 454—516.
[PRC] The permutability of rules in the classical inferential calculus, *J. Symb. Logic*, **17** (1952), 245—248.
[RDN] Remarks on the definition and nature of mathematics, *J. Unified Sci.*, **9** (1939), 164—169 (перепечатано в *Dialectica*, **8** (1954), 228—233).
[SFL] Les systèmes formels et les langues, les méthodes formelles en axiomatique (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, vol. 36), 1953, 1—10.
[SLD] The system LD, *J. Symb. Logic*, **17** (1952), 35—42.
[STC] A simplification of the theory of combinators, *Synthese*, **7** (1949), 391—399.
[TCm] La théorie des combinateurs, *Rend. Math. e Appl.*, 5th ser., **10** (1951), 347—359.
[TEA] Two examples of algorithms.
[TFD] A theory of formal deducibility, *Notre Dame Mathematical Lectures*, № 6, Notre Dame, Ind., 1950; 2nd ed., 1957.
[UDB] On the use of dots as brackets in logical expressions, *J. Symb. Logic*, **2** (1937), 26—28.
[UQC] The universal quantifier in combinatory logic, *Ann. of Math.* (2), **32** (1931), 154—180.
[rev. C] Реферат на книгу Чёрча [IML$_2$], *J. Franklin Inst.*, **264** (1957), 244—246.
[rev. R] Реферат на книгу Россера [LMt], *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), 266—272.

Карри (Curry H. B.) и Фейс (Feys R.)

[CLg] Combinatory logic, Amsterdam, 1958.

Кемени (Kemeny J. G.)

[NAS] A new approach to semantics, Part I, *J. Symb. Logic*, **21** (1956), 1—27.

Кемпнер (Kempner A. J.)

[PCS] Paradoxes and common sense, New York, 1959.

Кетонен (Ketonen D.)

[UPK] Untersuchungen zum Prädikatenkalkül, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, ser. A, 1944.

Клини (Kleene S. C.)

[GRF] General recursive functions of natural numbers, *Math. Ann.*, **112** (1936), 727—742.
[ILg] On the intuitionistic logic, Proc. 10th Internat. Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948, 741—743.
[IMM] Introduction to metamathematics, Amsterdam—Gröningen, 1952. (Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.)
◦ [MLg] Mathematical logic, New York, 1967.
[PIG] Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **10** (1952), 1—26. (Русский перевод: Клини С. К., Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях LK и LJ; в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 208—236.)
[rev. C] Реферат на статью Карри [APM], *J. Symb. Logic*, 6 (1941), 100—102.

Клини (Kleene S. C.) и Весли (Vesley R. E.)

◦ [FIM] The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions, Amsterdam, 1965.

Коган (Cogan E.)

[FTS] A formalization of the theory of sets from the point of view of combinatory logic, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **1** (1955), 198—240.

Колмогоров А. Н.

[ПТN] О принципе tertium non datur, *Матем. сб.*, **32** (1924—1925), 646—667.

Копи (Copi I. M.)

[BFP] The Burali-Forti paradox, *Philos. Sci.*, **25** (1958), 281—286.

Котарбиньский (Kotarbiński T.)

[JLW] Jan Łukasiewicz's works on the history of logic, *Studia Logica*, 8 (1958), 57—62.
[LPO] La logique en Pologne, son originalité et les influences étrangères, *Acad. Polacca Sci. Lett. Bibl. Roma*, vol. 7 (1959).

Коупленд (Copeland A. H., Sr.)

[IBA] Implicative boolean algebra, *Math. Z.*, 53 (1950), 285—290.
[POP] Probabilities, observations, and predications, *Proc. 3d Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probability*, Berkeley, Calif., 2 (1955), 41—47.

Коэн (Cohen P. J.)

◦ [SCH] Set theory and continuum hypothesis. New York, 1966. (Русский перевод: Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, «Мир», 1969.)

Крайзель (Kreisel G.)

[HPr] Hilbert's programme, *Dialectica*, **12** (1958), 346—372.
[INF] On the interpretation of non-finitist proofs, Part I, *J. Symb. Logic*, **16** (1951), 241—267.
◦ [MLg] Mathematical logic, в Lectures of modern mathematics, vol. III, New York, 1966.

Крайзель (Kreisel G.) и Патнэм (Putnam H.)

[UBM] Eine Unableitbarkeitsbeweismethode für den intuitionistischen Aussagenkalkül, *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.*, **3** (1957), 74—78.

Крипке (Kripke S. A.)

[CTM] A completeness theorem in modal logic, *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 1—14.

[DCn] Distinguished constituents (резюме), *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 323.

[PEn] The problem of entailment (резюме), *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 324.

[SAM] Semantical analysis of modal logic (резюме), *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 323.

[SLE] The System LE.

Крэйг (Craig W.)

[LRN] Linear reasoning. A new form of the Herbrand — Gentzen theorem, *J. Symb. Logic*, **22** (1957), 250—268.

Куайн (Quine W. V.)

[CBA] Concatenation as a basis for arithmetic, *J. Symb. Logic*, **11** (1946), 105—114.

[CQT] Completeness of quantification theory: Löwenheim's theorem, дополнение к книге [MeL], 253—260.

[ELg] Elementary logic, Boston, Mass., 1941.

[ISC] Interpretations of sets of conditions, *J. Symb. Logic*, **19** (1954), 97—102.

[LPV] From a logical point of view, 9 Logico-Philosophical Essays, Cambridge, Mass., 1951.

[MeL] Methods of logic, New York, 1950; пересмотренное издание, New York, 1959.

[MLg] Mathematical logic, New York, 1940; 2nd ed., Cambridge, Mass., 1951.

[NDd] On natural deduction, *J. Symb. Logic*, **15** (1950), 93—102.

[NFM] New foundations for mathematical logic, *Amer. Math. Monthly*, **44** (1937), 70—80 (перепечатано с дополнительными замечаниями в [LPV], 80—101).

[PIM] The problem of interpreting modal logic, *J. Symb. Logic*, **12** (1947), 43—48.

[PPQ] A proof procedure for quantification theory, *J. Symb. Logic*, **20** (1955), 141—149.

[QED] Quantification and the empty domain, *J. Symb. Logic*, **19** (1954), 177—179.

[SLg] A system of logistic, Cambridge, Mass., 1934.

[SNL] O sentido da nova logica, São Paulo, 1944.

[UUS] Unification of universes in set theory, *J. Symb. Logic*, **21** (1956), 267—279.

[WOb] Word and object, New York—Cambridge, Mass., 1960.

Курода (Kuroda S.)

○ [ILM] An investigation of the logical structure of mathematics I—XII.(Цикл из 12° статей, опубликованных в 1958—1959 гг. в *Abhand. Math. Sem. Univ. Hamburg, Nagoya Math. J., J. Symb. Logic, Osaka Math. J.* и *Proc. Japan Acad.*; на русском языке—краткие рефераты Ю. А. Гастева в реф. журн. «Математика» за 1960 г.)

Кутюра (Couturat L.)

[ALg] L'algèbre de la logique, 1st ed., Paris, 1905; 2nd ed., Paris, 1914.

Ладриер (Ladrière J.)

[LIF] Les limitations internes des formalismes, Paris—Louvain 1957.

Лайтстоун (Lightstone A. H.) и Робинсон (Robinson A.)

[STr] Syntactical transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 220—245.

Ландау (Landau E.)

[FAn] The foundations of analysis: The arithmetic of whole, rational, irrational, and complex numbers, New York, 1951 (перевод [GLA] на английский язык).

[GLA] Grundlagen der Analysis, Leipzig, 1930; 3rd ed., New York, 1960. (Русский перевод: Ландау Э., Основы анализа, ИЛ, 1947.)

Леблан (Leblanc H.)

[IDL] An introduction to deductive logic, New York — London, 1955.

Леблан (Leblanc H.) и Гальперин (Hailperin T.)

[NDS] Nondesignating singular terms, *Philos. Rev.*, **68** (1959), 239—243.

Леджет (Leggett H. W.)

[BRP] Bertrand Russell, O. M., A Pictorial Biography, New York, 1950.

Ледли (Ledley R. S.)

[CMS] Computational methods in symbolic logic: A New Methodology in Operations Research, Johns Hopkins University Operations Research Office, 1955.

[DCM] Digital computational methods in symbolic logic with examples in biochemistry, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **41** (1955), 498—511.

[DSF] A digitalization, systematization and formulation of the theory and methods of the propositional calculus, Nat. Bureau Standards Rep. 3363, 1954.

[MFC] Mathematical foundations and computational methods for a digital logic machine, *J. Operations Res. Sci. Amer.*, **2** (1954), 249—274.

Леммон (Lemmon E. J.)

[NFL] New foundations for Lewis modal systems, *J. Symb. Logic*, **22** (1957), 176—186.

Лесьневский (Leśniewski S.)

[GZN] Grundzüge einen neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, *Fund. Math.*, **14** (1929), 1—81.

Лёвенгейм (Löwenheim L.)

[MRK] Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Ann.*, **76** (1915), 447—470.

Линдон (Lyndon R. C.)

○ [ЗПЛ] Заметки по логике, пер. с англ., «Мир», 1968 г.

Лоренцен (Lorenzen P.)

[ALU] Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände, *J. Symb. Logic*, **16** (1951), 81—106.

[EQL] Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin—Göttingen — Heidelberg, 1955.

[FLg] Formale Logik, Berlin, 1958.

[KBM] Konstruktive Begründung der Mathematik, *Math. Z.*, **53** (1950), 162—202.

[LRF] Logical reflection and formalism, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 241—249.

Лукасевич (Łukasiewicz J.)

[ASS] Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic, Oxford, England, 1951. (Русский перевод: Лукасевич Я., Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. ИЛ, 1959.)

[ITD] On the intuitionistic theory of deduction, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, ser. A55 (=*Indag. Math.*), **14** (1952), 202—212.

[LGL] Die Logic und das Grundlagenproblem, Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 1941, 82—100; Diskussion, там же, 100—108.

[SAr] O sylogistyce Arystotelesa, *Sprawozdania z czynnosci i posiedzeń Polskiej Akad. Umiejętnosći*, **44** (1939), 220—227.

Лукасевич (Łukasiewicz J.) и Тарский (Tarski A.)

[UAK] Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Soc. Sci. Lett. Varsovie, C.R.*, Cl. III, **23** (1953), 30—50.

Льюис К. (Lewis C. I.)

[ASL] Alternative systems of logic, *Monist*, **42** (1932), 481—507.

[SSL] A survey of symbolic logic, Berkeley, Calif., 1918.

Льюис К. (Lewis C. I.) и Лэнгфорд (Langford C.)

[SLg] Symbolic logic, New York — London, 1932.

Льюис Х. (Lewis H. D.)

[CBP] Contemporary british philosophy, 3rd ser., London — New York, 1956.

Майхилл (Myhill J.)

[OSL] Symposium: On the ontological significance of the Löwenheim — Skolem theorem, Academic Freedom, Logic and Religion (American Philosophical Association, Eastern Division), Philadelphia, 1953. (См. также Берри [OSL].)

[PAF] Problems arising in the formalization of intensional logic, *Logique et analyse*, n.s., **1** (1958), 74—83.

[PIM] Some philosophical implications of mathematical logic, I, Three Classes of Ideas, *Rev. Metaphys.*, **6** (1952), 165—198.

Майхилл (Myhill J.) и Деккер (Decker J. C. E.)

[RET] Recursive equivalence types, Berkeley — Los Angeles, 1960.

Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)

[PIP] Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions, *J. Symb. Logic*, **4** (1939), 155—158.

[SCS] On the syntactical construction of systems of modal logic, *J. Symb. Logic*, **10** (1945), 83—94.

Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.) и Тарский (Tarski A.)

[ATp] The algebra of topology, *Ann. of Math.* (2), **45** (1944), 141—191.

[CEC] On closed elements in closure algebras, *Ann. of Math.* (2), **47** (1946), 122—162.

[TSC] Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, *J. Symb. Logic*, **13** (1948), 1—15.

Мак-Лейн (MacLane S.)

[ABL] Abgekürzte Beweise im Logikkalkül (inaugural dissertation), Göttingen, 1934.

Мальцев А. И.

○ [АРФ] Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», 1965, 391 стр.

Марков А. А.

[ТАл$_1$] Теория алгорифмов, *Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, XXXVIII, Изд-во АН СССР, 1951, 176—189.

[ТАл$_2$] Теория алгорифмов, *Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, XLII, Изд-во АН СССР, 1954.

Мартин (Martin R.)

[SPr] Toward a systematic pragmatics, Amsterdam, 1959.

[TDn] Truth and denotation: A study in semantical theory, Chicago, 1958.

Маслов С. Ю.

○ [ОМВ] Обратный метод установления выводимости для логических исчислений, в [ЛМИ] под ред. Оревкова, стр. 26—87.

Маэхара (Maehara S.)

[DIL] Eine Dartstellung der intuitionistischen Logik in der Klassischen, *Nagoya Math. J.*, **7** (1954), 45—64.

[EAH] Equality axiom on Hilbert's ε-symbol, *J. Faculty Sci., Univ. Tokyo*, sec. I, **7** (1957), 419—435.

[PCE] The predicate calculus with ε-symbol, *J. Math. Soc. Japan*, **7** (1955), 323—344.

Менгер (Menger K.)

[ATF] An axiomatic theory of functions and fluents, в книге под ред. Генкина, Сапписа и Тарского [AMS], 454—473.

[GAp] Gulliver in Applyland, Eureka, October, 1960.

[GLO] Gulliver in the Land with One, Two, Three, *Math. Gaz.*, **43** (1959), 241—250.

[GRL] Gulliver's Return to the Land without One, Two, Three, *Math. Gaz.*, **67** (1960), 641—648.
[MMi] Multiderivatives and multi-integrals, *Amer. Math. Monthly*, **64** (1957), 58—70.
[RVP] Random variables from the point of view of a general theory of variables, Proc. Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probability, 1955, 215—229.

Мендельсон (Mendelson E.)

○ [IML] Introduction to mathematical logic, Princeton (New Jersey) — New York — Toronto — London, 1964, X+300 стр. (Готовится к печати русский перевод в издательстве «Наука».)

Мередит (Meredith C. A.)

[SAP] A single axiom of positive logic, *J. Computing Systems*, **1** (1953), 169—170.

Минц Г. Е.

○ [ИМЛ] О некоторых исчислениях модальной логики, в [ЛМИ] под ред. Оревкова, стр. 88—111.
○ [ТЭр] Теорема Эрбрана, в [МЛВ] под ред. Идельсона и Минца, стр. 311—350.

Моисил (Moisil G.)

[LPs] Sur la logique positive, *An. Univ. C.I. Parhon — Bucuresti, seria Acta Logica*, 1958, № 1, 149—171.
[RAL] Recherches sur l'algèbre de la logique, *Ann. Sci. Univ. Jassy*, **22** (1936), 1—118.
[RPI] Recherches sur le principe d'identité, *Ann. Sci. Univ. Jassy*, **23** (1937), 7—56.

Монтегю (Montague R.) и Калиш (Kalish D.)

[RDN] Remarks on descriptions and natural deduction, *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.*, **3** (1957), 50—64, 65—73.

Монтейро (Monteiro A. A.)

[AIA] Axiomes independants pour les algèbres de Brouwer, *Rev. Un. Mat. Argentina*, **17** (1955), 149—160.

Монтейро (Monteiro A. A.) и Варшавский (Varsavsky O.)

[AHM] Algebras de Heyting monadicas, *Actas X Jornadas Un. Mat. Argentina, Bohia Blanca*, 1957, 52—62.

Моррис (Morris C. W.)

[FTS] Foundations of the theory of signs, International Encyclopedia of Unified Science, vol. 1, № 2, Chicago, 1938.
[SLB] Signs, languages and behavior, New York, 1946.

Мостовский (Mostowski A.)

[LMt] Logika matematyczna. Kurs universitecki, Warszawa, 1948.
[OSJ] L'oeuvre scientifique de Jan Łukasiewicz dans le domain de la logique mathématique, *Fund. Math.*, **44** (1957), 1—11.
[OUM] Quelques observations sur l'usage des méthodes non-finistes dans la méta-mathématique, *Le raisonnement en mathématiques et en sciences experimentales* (Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, vol. 70), 1958, 19—28.
[PND] Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus, *J. Symb. Logic*, **13** (1948), 204—207.
[PSI] The present state of investigations on the foundations of mathematics, *Rozprawy Mat.*, vol. 9 (1955). (Русский вариант: Мостовский А., Современное состояние исследований по основаниям математики, *УМН*, **9**, № 3(61) (1954). Расширенное изложение доклада, прочитанного на VIII съезде польских математиков, Варшава, 1953.)
[RPP] On the rules of proof in the pure functional calculus of the first order, *J. Symb. Logic*, **16** (1951), 107—111.
[SUF] Sentences undecidable in formalized arithmetic: An exposition of the theory of Kurt Gödel, Amsterdam, 1952.

Муди (Moody E.)

[TCM] Truth and consequence in medieval logic, Amsterdam, 1953.

Нагель (Nagel E.)

[FMC] The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry, *Osiris*, **7** (1939), 142—222.

Нагель (Nagel E.) и Ньюмен (Newman J. R.)

[GPr] Gödel's proof, New York, 1958.

Нагорный Н. М.

[УТП] К усилению теоремы приведения теории алгорифмов, *ДАН СССР*, **90** (1953), 341—342.

фон Нейман (Neumann J., von)

[HBT] Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Z.*, **26** (1927), 1—46.

Нил (Kneale W.)

[PLg] The province of logic, в книге Х. Льюиса [СВР], 235—261.

Новиков П. С.

[АНП] Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, *Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, XLIV, Изд-во АН СССР, 1955.
[ЭМЛ] Элементы математической логики, Физматгиз, 1959. (Имеется английский перевод Л. Борона.)
○ [CLC] On the consistency of certain logical calculus, *Мат. сборник*, **12**(54), 1943, 231—261

Огасавара (Ogasawara T.)

[RIL] Relations between intuitionistic logic and lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A, **9** (1939), 157—164.

Огден (Ogden C. K.) и Ричардс (Richards I. A.)

[MMn] The meaning of meaning, New York — London, 1927.

Они си (Ohnishi M.) и Мацумото (Matsumoto K.)

[GMM] Gentzen method in modal calculi, part I, *Osaka Math. J.*, **9** (1957), 113—129; part II, там же, **11** (1959), 115—120.

Оревков В. П. (ред.)

[ЛМИ] Логические и логико-математические исчисления I. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, т. XCVIII, 1968.

Пеано (Peano G.)

[APN] Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin, 1889 (перепечатано в [OSc], том II, 20—56).

[CNm] Sul concetto di numero, *Riv. di mat.*, **1** (1891), 87—102, 256—267 (перепечатано в [OSc], том III, 80—109).

[FMt] Formulaire de mathématiques, том I, Turin, 1895; том II, Turin, 1898; том III, Turin, 1901; том IV, Turin, 1902; том V, Turin, 1908.

[OSc] Opere scelte: A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglo Nazionale delle Ricerche, том I, Rome, 1957; том II, Rome, 1958; том III, Rome, 1959.

Петер (Péter R.)

[RFn] Rekursive Funktionen, Budapest, 1951; 2nd ed., Budapest, 1957. (Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, ИЛ, 1954.)

Пирс (Peirce C.)

[ALg$_1$] On the algebra of logic, *Amer. J. Math.*, **3** (1880), 15—57 (перепечатано с исправлениями в [CPC], том III, 104—157).

[ALg$_2$] On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation, *Amer. J. Math.*, **7** (1885), 180—202 (перепечатано в [CPC], том III, 210—249).

[CPC] Collected papers of Charles Sanders Peirce, тт. I—VIII, под ред. Хартсхорна, Вейса и Бёркса, Cambridge, Mass., 1931—1958.

Порт (Porte J.)

[DSS] Deux systèmes simples pour le calcul des propositions, *Publ. Sci. Univ. Alger*, ser. A, **5** (1958), 1—16.

[PCP] Une propriété du calcul propositionnel intuitionniste, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, ser. A, **60** (= *Indag. Math.*, **20**) (1958), 362—365.

[RLM] Recherches sur les logiques modales, *Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales* (Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, vol. 70), 1958, 117—126.

[SCP] Schémas pour le calcul des propositions fondé sur la conjonction et la négation, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 421—431.

[SPA] Systèmes de Post, algorithmes de Markov, *Cybernetica*, 1958, № 2, 1—35.

Пост (Post E. L.)

[FRG] Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 197—215.

[IGT] Introduction to a general theory of elementary propositions, *Amer. J. Math.*, **43** (1921), 163—185.

[RES] Recursive enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 284—316.

[TVI] The two valued iterative systems of mathematical logic, Princeton, N.J., 1941.

Прайор (Prior A.N.)

[ECr] Epimenides the cretan, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 261—266.

[FLg] Formal logic, Oxford, England, 1955.

[PAP] Peirce's axioms for propositional calculus, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 135—136.

Рамсей (Ramsey E. P.)

[FML] The foundations of mathematics and other logical essays, (под ред. Брейтуэйта), London, 1931.

[FMt] The foundations of mathematics, *Proc. London Math. Soc.*, 2nd ser., **25** (1926), 338—384 (перепечатано в [FML], 1—61).

Расёва (Rasiowa H.)

[ASP] Axiomatisation d'un système partiel et la théorie de la déduction. *Soc. Sci. Lett. Varsovie, C.R., Cl. III Sci. Math. Phys.*, **40** (1947), 22—37.

[ETh] On the ε-theorems, *Fund. Math.*, **43** (1956), 156—165.

Расёва (Rasiowa H.) и Сикорский (Sikorski R.)

[ALL] An application of lattices to logic, *Fund. Math.*, **42** (1955), 83—100.

[ETN] On existential theorems in non-classical functional calculi, *Fund. Math.*, **41** (1954), 21—28.

[GTh] On the Gentzen theorem, *Fund. Math.*, **48** (1960), 57—69.

[PLS] A proof of the Löwenheim — Skolem theorem, *Fund. Math.*, **38** (1951), 230—232.

Рассел (Russell B.)

[IMP] Introduction to mathematical philosophy, London, 1919.

[PMt] Principles of mathematics, Cambridge, England, 1903; 2nd ed., 1938.

Робинсон (Robinson A.)

[CTh] Complete theories, Amsterdam, 1956.

[MMA] The metamathematics of algebra, Amsterdam, 1951.

[OIM] Outline of an introduction to mathematical logic, I, *Canad. Math. Bull.*, I (1958), 41—54; II, там же (1958), 113—127; III, там же (1958), 193—208; IV, там же (1959), 33—42.

∘ [TMA] Introduction to model and metamathematics of algebra, Amsterdam, 1963. (Включает материал [MMA], [CTh] и др. работ автора; русский перевод: Робинсон А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, «Наука», 1967.)

Роджерс (Rogers H., Jr.)

∘ [TRF] Theory of recursive functions and effective computability, New York, 1967. (Готовится русский перевод в изд-ве «Мир».)

Розенблюм (Rosenbloom P. C.)

[EML] The elements of mathematical logic, New York, 1950.

[PAl] Post algebras. I. Postulates and general theory, *Amer. J. Math.*, **44** (1942), 167—188.

Россер (Rosser J. B.)

[BFP] The Burali-Forti paradox, *J. Symb. Logic*, 7 (1942), 1—17.
[CQN] On the consistency of Quine's «New foundations for mathematical logic», *J. Symb. Logic*, 4 (1939), 15—24.
[ETG] Extensions of some theorems of Gödel and Church, *J. Symb. Logic*, 1 (1936), 87—91.
[IEP] An informal exposition of proofs of Gödel's theorems and Church's theorem, *J. Symb. Logic*, 4 (1939), 53—60.
[LMt] Logic for mathematicians, New York, 1953.
[MLV] A mathematical logic without variables, *Ann. of Math.* (2), 36 (1935), 127—150; *Duke Math. J.*, 1 (1935), 328—355.

Россер (Rosser J. B.) и Тюркетт (Turquett A. R.)

[MVL] Many-valued logics, Amsterdam, 1952.

Рубин (Rubin J. E.)

[RCA] Remarks about a closure algebra in which closed elements are open, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 30—34.

Рунс (Runes D.)

[DPh] The dictionary of philosophy, New York, 1942.

Саппс (Suppes P.)

[AST] Axiomatic set theory, Princeton, N.J., 1960.
[ILg] Introduction to logic, New York, 1957.

Серпинский (Sierpinski W.)

[CON] Cardinal and ordinal numbers, Warsaw, 1958.
[LNT] Leçons sur les nombres transfinis, Paris, 1928.

Сикорский (Sikorski R.)

[BAl] Boolean algebra, Berlin, 1960. (Русский перевод 2 изд.: Сикорский Р., Булевы алгебры, «Мир», 1969.)

Сколем (Skolem T.)

[BEA] Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich, *Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-Nat. Klasse*, № 6, 1923.
[CRF] Some considerations concerning recursive functions, *Math. Scand.*, 1 (1953), 213—221.
[MIF] Mathematical interpretations of formal systems, Amsterdam, 1955.
[PTL] Sur la portée du theorème de Löwenheim—Skolem, *Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques* (December 6—9, 1938), 1941, 25—47; Discussion, там же, 47—52.
[UAK] Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summations-Probleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen, *Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-Nat. Klasse*, № 3, 1919.
[VLt] Über gewisse «Verbände» oder «lattices», *Avhandlinger utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Mat. naturv. kl.*, № 7, 1936.

лисенко А. О. (ред.)

∘ [КМЛ] Исследования по конструктивной математике и математической логике, I, Зам. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 4, 1967; II, *там же*, т. 8, 1968.

Слупецкий (Słupecki J.)

[GML] Toward a generalized mereology of Lésniewski, *Studia Logica*, 8 (1958), 131—154.
[SLC] S. Lésniewski's calculus of names, *Studia Logica*, 3 (1955), 7—71.
[SLP] S. Lésniewski's protothetics, *Studia Logica*, 1 (1954), 44—112.

Собоциньский (Sobociński B.)

[MJL] In memoriam Jan Łukasiewicz, *Philos. Studies*, 6 (1956), 3—49.

Стениус (Stenius E.)

[PLA] Das Problem der logischen Antinomien, *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math.*, 14 (1949).

Стенли (Stanley R.)

[EPQ] An extended procedure in quantificational logic, *J. Symb. Logic*, 18 (1953), 97—104.

Столл Р. Р. (Stoll R. R.)

∘ [МЛА] Множества. Логика. Аксиоматические теории (пер. с англ.), «Просвещение», 1968.

Стоун (Stone M. H.)

[NFL] Note on formal logic, *Amer. J. Math.*, 59 (1937), 506—514.
[RBA] The representation of boolean algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 807—816.
[TRB] The theory of representations for boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1963), 37—111.

Строусон (Strawson P. F.)

[ILT] Introduction to logical theory, London, 1952.

Стяжкин Н. И.

∘ [ФМЛ] Формирование математической логики, «Наука», 1967.

Такеути (Takeuti G.)

[GLC] On a generalized logic calculus, *Jap. J. Math.*, 23 (1953), 39—96.

Тан (Tang T. C.)

[APG] Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 737—744.

Тарский (Tarski A.)

[BBO] Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit, *Monatsh. Math. Phys.*, 40 (1933), 97—112 (перепечатано в книге [LSM], 279—295).

[FBM] Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I, *Monatsh. Math. Phys.*, **37** (1930), 361—404 (перепечатано в книге [LSM], 60—109).

[GTP] A general theorem concerning primitive notions of euclidean geometry, *Nederl. Akad. Wentensch. Proc.*, ser. A, **59** (=*Indag. Math.*, 18) (1956), 468—474.

[GZS] Grundzüge des Systemenkalküls, Part I, *Fund. Math.*, **25** (1935), 503—526; Part II, там же, **26** (1936), 283—301 (перепечатано в книге [LSM], 342—383).

[ILM] Introduction to logic and the methodology of the deductive sciences, New York, 1941. (Русский перевод: Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, ИЛ, 1948.)

[LSM] Logic, semantics, and metamathematics, Oxford, England, 1956 (перевод избранных статей Тарского, выполненный Дж. Х. Вуджером).

[NMB] Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass.*, 1950, **1** (1952), 705—720.

[SCT] The semantic conception of truth and the foundations of semantics, *Philos. and Phenomenological Res.*, **4** (1944), 341—376.

[WBF] Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philos.*, **1** (1936), 261—405 (перепечатано в книге [LSM], 152—278).

Тарский (Tarski A.), Мостовский (Mostowski A.) и Робинсон Р. (Robinson R.)

[UTh] Undecidable theories, Amsterdam, 1953.

Титгемейер (Titgemeyer R.)

○ [WCM] Über einem Widerspruch in Cogans Darstellung der Mengenlehre, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **7** (1961), 161—163.

Тьюринг (Turing A. M.)

[CNA] On computable numbers with an Application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*, **42** (1936), 230—265.

Уайтхед (Whitehead A. N.)

[UAl] A treatise on universal algebra with applications, I, Cambridge, England, 1898.

Уайтхед (Whitehead A. N.) и Рассел (Russell B.)

[PMt] Principia mathematica, в 3 томах, Cambridge, England, 1910—1913; 2nd ed., 1925—1927.

Уилдер (Wilder R. L.)

[IFM] Introduction to the foundations of mathematics, New York — London, 1952.

Умедзава (Umezawa T.)

[IPL] On intermediate propositional logics, *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 20—36.

Фейс (Feys R.)

[Lgs] Logistique, Philosophie (Chronique des années d'apres-guerre 1946—1948), XIII, *Philosophie des sciences*, l'Institut International de Philosophie (Actualités scientifiques et industrielles, № 1105), Paris, 1950, 19—32.

○ [MLg] Modal logic, Amsterdam, 1965.

[MRD] Les méthodes récentes de déduction naturelle, *Rev. Philos. Louvain*, **44** (1946), 370—400.

[NCM] Note complémentaire sur les méthodes de déduction naturelle, *Rev. Philos. Louvain*, **1** (1947), 60—72.

[SLP] Systèmes L propositionnels avec soustraction, *Logique et analyse*, 1956, № 6, 3—16.

Финдлей (Findlay J.)

[GSN] Goedelian sentences: A non-numerical approach, *Mind*, n.s., **51** (1942), 259—265.

Фитч (Fitch F. B.)

[EVE] An extensional variety of extended basic logic, *J. Symb. Logic*, **23** (1958), 13—21.

[IML] Intuitionistic modal logic with quantifiers, *Portugal. Math.*, **7** (1948), 113—118.

[QCF] Quasi-constructive foundation for mathematics, в книге Гейтинга [CMt], 26—36.

[SLg] Symbolic logic: an introduction, New York, 1952.

Фреге (Frege G.)

[GGA] Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, том I, Jena, 1893; том II, Jena, 1895.

Фреге (Frege G. и др.)

○ [FrG] From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic 1879—1931, Cambridge. Mass., 1967.

Френкель (Fraenkel A. A.)

[AST] Abstract set theory, Amsterdam, 1953; 2d ed. Amsterdam, 1961.

[EML] Einführung in die Mengenlehre, 3d ed., Berlin, 1928.

Френкель (Fraenkel A. A.) и Бар-Хиллел (Bar-Hillel Y.)

[FST] Foundations of set theory, Amsterdam, 1958. (Русский перевод: Френкель А. и Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, «Мир», 1966.)

Фридман А. А.

○ [СТГ] Степени неразрешимости проблемы тождества для конечно-определенных групп, «Наука», 1967.

Фринк (Frink O.)

[NAL] New algebras of logic, *Amer. Math. Monthly*, **45** (1938), 210—219.

Халмош (Halmos P. R.)

[ALg] Algebraic logic, Part I, Monadic Boolean Algebras, *Compositio Math.*, **12** (1955), 217—249; Part II, Homogeneous locally finite polyadic boolean algebras of infinite degree, *Fund. Math.*, **43** (1955), 255—325; Part III, Predicates, terms, and operations in polyadic algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 430—470; Part IV, Equality in polyadic algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 1—27.

[BCA] The basic concepts of algebraic logic, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 363—387.

[PBA] Polyadic boolean algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40** (1954), 296—301.

Хантингтон (Huntington E. V.)

[BAC] Boolean algebra: a correction, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 557—558.

[NSI] New sets of independent postulates for the algebra of logic with special reference to Whitehead and Russell's principia mathematica, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 274—304.

[NSP] A new set of postulates for betweenness, with proof of complete independence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26** (1924), 257—282.

[SIP] Sets of independent postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **5** (1904), 288—309.

Харди (Hardy G. H.)

[MPr] Mathematical proof, *Mind*, **38** (1929), 1—25.

Харрон (Harrop R.)

[DES] On disjunctions and existential statements in intuitionistic systems of logic, *Math. Ann.*, **132** (1956), 347—361.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

[GZM] Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. (Русский перевод: Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.)

Хиж (Hiz H.)

[ESC] Extendible sentential calculus, *J. Symb. Logic*, **24** (1959), 193—202.

Хинтикка (Hintikka K. J. J.)

[FCQ] Form and content in quantification theory, *Acta Philos. Fenn.*, 8 (1955), 11—55.

[MRM] Modality as referential multiplicity, *Ajatus*, **20** (1957), 49—63.

[RTT] Reductions in the theory of types, *Acta Philos. Fenn.*, 8 (1955), 57—115.

Цермело (Zermelo E.)

[UGL] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *Math. Ann.*, **65** (1908), 261—281.

Чан (Chang C. C.)

[AAM] Algebraic analysis of many valued logic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88 (1958), 467—490.

Чаудхури (Choudhury A. C.)

[BNr] On boolean narings, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **46** (1954), 41—45.

Чернявский В. С.

[КНА] Об одном классе нормальных алгорифмов Маркова, сб. «Логические исследования», Изд-во АН СССР, 1959.

Чёрч (Church A.)

[BBF] Brief bibliography of formal logic, *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.*, **80** (1952), 155—172.

[BSL] A bibliography of symbolic logic, *J. Symb. Logic*, **1** (1936), 121—218; Additions and corrections, там же, **3** (1938), 178—212.

[CLC] The calculi of lambda-conversion, *Ann. Math. Studies*, № 6, Princeton, N. J., 1941; 2nd ed., 1951.

[CNE] Correction to «A note on the Entscheidungsproblem»; *J. Symb. Logic*, **1** (1936), 101—102.

[Dfn] Definition, статья в словаре Рунса [DPh], 224.

[FST] A formulation of the simple theory of types, *J. Symb. Logic*, 5 (1940), 56—68.

[IML] Introduction to mathematical logic. Part I (*Ann. Math. Studies*, № 13), Princeton, N. J., 1944; 2nd ed. (коренным образом переработано и расширено для переиздания с подзаголовком «т. I» в Princeton mathematical series), Princeton, N. J., 1956. (Русский перевод изд. 1956: Чёрч А., Введение в математическую логику, т. I, ИЛ, 1961.)

[LEM] On the law of the excluded middle, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **34** (1928), 75—78.

[MiL] Minimal logic (резюме), *J. Symb. Logic*, **16** (1951), 239.

[NEP] A note on the Entscheidungsproblem, *J. Symb. Logic*, **1** (1936), 40—41.

[PLg] Paradoxes, logical, статья в словаре Рунса [DPh], 224.

[SAS] Schröder's anticipation of the simple theory of types, *J. Unified Sci.*, **9** (1939), 149—152.

[SPF] A set of postulates for the foundation of logic, part I, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 346—366; part II, там же (2), **34** (1933), 839—864.

[UPE] An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.*, 58 (1936), 345—363.

[WTI] The weak theory of implication, Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und zur Logik der Einzelwissenschaften, под ред. Менне, Вильгельми и Ангзиля (Festgabe zum 60. Geburtstag von Prof. W. Britzelmayr), Munich, 1951, 22—37.

[rev. C] Реферат на заметку Карри [RDN], *J. Symb. Logic*, **22** (1957), 85—86.

[rev. HA] Реферат на книгу Гильберта и Аккермана [GZT], *J. Symb. Logic*, **15** (1950), 59.

Чин (Chin L. H.) и Тарский (Tarski A.)

[DML] Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras, *Univ. California Publ. Math.*, **1** (1951), 341—384.

Шанин Н. А.

[ЛПА] О некоторых логических проблемах арифметики, *Трубы Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, XLIII, Изд-во АН СССР, 1955.

Шейнфинкель М. И.

[BML] Über die Bausteine der mathematischen Logik, *Math. Ann.*, **92** (1924), 305—316.

Шёнфилд (Shoenfield J. R.)

с [MLg] Mathematical logic, Reading, 1967.

Шеффер (Scheffer H. M.)

[SFI] A set of five independent logical postulates for Boolean algebras with application to logical constants, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 481—488.

Шильп (Schilpp P. A.)

[PBR] The philosophy of Bertrand Russell, Chicago, 1944.

Шмидт (Schmidt H. A.)

[DTM] Über dediktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen, *Math. Ann.*, **115** (1938), 485—506.

[MGL] Mathematische Grundlagenforschung, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, том I, № 2, 1950.

[VAL] Vorlesungen über Aussagenlogik (также Mathematische Gesetze der Logik, I), Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

[ZBM] Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortigen Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik, *Math. Ann.*, **123** (1951), 187—200.

Шмульян (Smullyan R. M.)

[TFS] Theory of formal systems (*Ann. Math. Studies*, № 47), Princeton, N. J., 1961.

◦ [FOL] First-order logic, Berlin—New York, 1968.

Шольц (Scholz H.)

[GZM] См. [VGZ].

[MJL] In memorian Jan Lukasiewicz, *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.*, **3** (1957), 3—18.

[VGZ] Vorlesungen über Grundzüge der mathematischen Logik, parts 1, 2, 1st. ed., Münster, 1949; 2nd ed., Münster, 1950.

Шпеккер (Specker E. P.)

[ACQ] The Axiom of choice in Quine's New foundations for mathematical logic, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39** (1953), 972—975.

[AML] Die Antinomien der Mengenlehre, *Dialectica*, 8 (1954), 234—244.

Шрёдер (Schröder E.)

[VAL] Vorlesungen über die Algebra der Logik, в 3 томах, Leipzig, 1890—1905.

Шрётер (Schröter K.)

[AKB] Ein allgemeiner Kalkülbegriff, *Forsch. Logik und Grundlegung exakten Wiss.*, n.s., **6** (1941).

[TBA] Theorie des bestimmten Artikels, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **2** (1956), 37—56.

[UHA] Eine Umformung des Heytingschen Axiomensystems für den intuitionistischen Aussagenkalküls, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **3** (1957), 18—29.

[VIE] Die Vollständigkeit der die Implikation enthaltenden zweiwertigen Aussagenkalküle und Prädikatenkalküle der ersten Stufe, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **3** (1957), 81—107.

[WIM] Was ist eine mathematische Theorie? *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **53** (1943), 69—82.

Штегмюллер (Stegmüller W.)

[WPI] Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik: Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap, Vienna, 1957.

Шураньи (Suranyi J.)

[RTE] Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stuffe, Budapest, 1959.

Шютте (Schütte K.)

◦ [BIZ] Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie, *Math. Ann.*, **122** (1951), 369—389.

[BTh] Beweistheorie, Berlin, 1960.

[EBA] Die Eliminierbarkeit des bestimmten Artikels in Kodifikaten der Analysis, *Math. Ann.*, **123** (1951), 166—186.

[SVS] Ein System des verknüpfenden Schliessens, *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.*, 2 (1956), 55—67.

[SWK] Schlussweisen-Kalküle der Prädikatenlogik, *Math. Ann.*, **122** (1950), 47—65.

◦ [VSL] Vollständige Systeme modaler und intuitionistische Logik, Berlin—New York, 1968.

Экснер (Exner R. M.) и Россконф (Rosskopf M. F.)

[LEM] Logic in elementary mathematics, New York, 1959.

Эрбран (Herbrand J.)

[RTD] Recherches sur la théorie de la démonstration (Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences Mathématiques et Physiques, No 33), 1930.

Эндрюс (Andrews P. B.)

◦ [TTV] A transfinite type theory with type variables, Amsterdam, 1965.

Яновская С. А.

◦ [МЛО] Математическая логика и основания математики, сб. «Математика в СССР за сорок лет, 1917—1957», том I, Физматгиз, 1959, 13—120.

◦ [ОМЛ] Основания математики и математическая логика, сб. «Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1947», Гостехиздат, 1948, 9—50.

Яськовский (Jaśkowski S.)

[RSF] On the rules of suppositions in formal logic, *Studia Logica*, **1** (1934), 5—32.

[RSL] Recherches sur le système de la logique intuitioniste, *Internat. Congress Philos. Sci.*, **6** (1936), 58—61.

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

B 181
B′ 181
C 181
E 173
F 62
F_n 62
I 181
I′ 181
K 181
K′ 181
$K_{(1)}$ 181
S 181
W 181

D 164
$e_1, e_2, \ldots$ 446
$E_1, E_2, \ldots$ 446
F 369, 432, 446
$q_1, q_2, \ldots$ 446
R 159
$\boldsymbol{R}_0$ 161

$\mathfrak{e}$ 446
$\mathfrak{E}$ 446
$\mathfrak{E}$ (u) 446
$\mathfrak{F}$ 365, 367, 373
$\mathfrak{g}$ 446
$\mathfrak{o}$ 446
$\mathfrak{O}$ 280, 446
$\mathfrak{P}$ 446
$\mathfrak{P}$ (g) 450
$\mathfrak{P}$ (u) 446, 449
$\mathfrak{q}$ 446
$\mathfrak{r}$ 446
$\mathfrak{s}$ 446
$\mathfrak{S}$ 446
$\mathfrak{t}$ 446
$\mathfrak{T}$ 446
$\mathfrak{t}$ (u) 446
$\mathfrak{U}$ 446
$\mathfrak{x}$ 280, 446

$\mathfrak{y}$ 280, 446
$\mathfrak{Z}$ 280, 446

Γ 289
Δ 241, 289
ε 503
ι 503
$\lambda x\,(M)$ 177
π_k^n 107
φ_k^n 107
Φ 446
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ 446
Ω 446
$\omega_1, \omega_2, \ldots$ 446
$\omega_k^{(n)}$ 96

0 209, 279, 446
1 209

$\cdot$ 67, 116
(101
) 101
$+$ 241
$\cdot$ 241
$-$ 217
$\rightarrow$ 65, 112, 115, 151
$\rightleftarrows$ 65
или 65, 151
& 65, 151
$\equiv$ 65, 168, 447
$=$ 65, 93, 192, 241, 447
∞ 65, 235
$\vee$ 65, 193, 255
$\wedge$ 65, 89, 93, 241, 255
$\supset$ 65, 95, 101, 210, 241, 255
$\supset_x$ 178
′ 409
$\neg$ 65, 95, 101, 368
$\square$ 65, 108, 367, 507

$\leqslant$ 65, 192, 241
$\in$ 447
$\subseteq$ 65
$\subset$ 241, 447
| 417
$\sim$ 101, 422
$(=)$ 496
$|\ldots\vdash$, $|\ldots a\vdash$ 443, 453
$|\ldots\vdash^{\mathrm{L}}$ 482
$|\ldots\vdash^{\mathrm{T}}$ 482
$|\ldots\vdash^{\mathrm{H}}$ 483
$\vdash$ 65, 107, 133, 246, 367
$\dashv$ 65, 367
$\vdash_0$ 272, 280, 448
$\|-$ 272, 507
$\|-^{\mathrm{L}}$ 314, 398
$\|-^{\mathrm{T}}$ 314, 398
$\|-_m$ 317
$\|-_1$ 317
$\|-'$ 507
$\|-|$ 507
$\cap$ 241
$\cup$ 241
$*$ 440
[ ] 180, 241
[/] 449
$\forall$ 178, 440
$\exists$ 178, 440
$\circ$ 106, 274, 397, 413, 450
$\prec$ 514
$\bigvee_{i=1}^{n}$ 421
$\bigwedge_{i=1}^{n}$ 421
507

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Абсолютная алгебра высказываний (absolute propositional algebra) 260, 266
— структура (absolute lattice) 211
Абстрактная система (abstract system) 98
— теория (abstract theory) 134
Абстракция (abstraction) 102
— функциональная (functional abstraction) 177
Абсурдность (absurdity) 364, 432
Автологичное (autological) 25
Автоморфизм (automorphism) 258
Автонимное представление (autonymous representation) 97
Автонимный способ речи (autonymous mode of speech) 59
Адекватная интерпретация 84
Адъюнктор (adjunctor) 136
Аксиома (axiom) 81, 280
— бесконечности (axiom of infinity) 33, 41
— выбора 34
Аксиоматизируемость конечная (finite axiomatisibility) 86
Аксиоматическая теория множеств 48
Аксиоматический об (axiomatic ob) 109
— метод 135
Аксиоматическое высказывание (axiomatic proposition) 81
— расширение (axiomatic extension) 83, 147
— утверждение (axiomatic statement) 109
Аксиом схема (axiom scheme) 94, 176
Аксиомы Пеано 50
Алгебра 132, 242, 483
— высказываний (propositional algebra) 160, 192
— Линденбаума
— логическая (logical algebra) 192
Алгебра Поста 243, 437
Алгебраическое правило (algebraic rule) 454
Алгорифм (algorithm) 114, 127
— в алфавите 116
— марковский 114
— над алфавитом 116
— нормальный 114
— удвоения 116
— универсальный 129
Алгорифмическая функция 130
Алететика (aletheutics) 143
Алфавит 58
Анализ конструкционной последовательности 74
Антецедент (antecedent) 280
— команды 115
Антимонотонность 212
Антиномия 20
Антиномия логическая 20
Аргумент 62
Арифметика (arithmetic) 50
— обобщенная (generalized arithmetic) 135
— рекурсивная (recursive arithmetic) 50
Ассерторическая система (assertional system) 107
Ассоциативная система 94
Ассоциативности закон 204
Ассоциативность 101
Атом 92
Атомическое расширение (atomic extension) 147
Аффикс 65
Аффиксативная система 89

База (base) 177
Базис (basis) 70
— индукции 155
Базисное предложение (basic clause) 165

Базисный об (basic ob) 86
— предикат (basic predicate) 155
— шаг (basic step) 28
Берри парадокс 24
Бесконечности аксиома 33, 41
Бинарный инфикс (binary infix) 65
— инфиксный глагол 65
— — коннектор (binary infixed connector) 65
— — оператор 65
— функтор (binary functor) 65
Блокирование процесса (blocking of process) 166
Брауэровская алгебра (Brouwerian algebra) 241, 242
— логика (Brouwerian logic) 242
— структура (Brouwerian lattice) 242
Буква (letter) 58
Булева алгебра (Boolean algebra) 410
Булево кольцо (Boolean ring) 228
Бурали-Форти парадокс 22

Ветвь (branch) 158
Веф (wef) 93, 97
Включение множеств (inclusion of sets) 196
Возможность (possibility) 506
Вопрос определенный (definite question) 69
— полуопределенный (semidefinite question) 69
Вполне алгорифмическая функция 130
Вспомогательная буква 115
Вспомогательное утверждение 280, 448
Вспомогательный постулат 280
Вхождение (occurence) 115, 159
Выбора аксиома 34
Вывод (deduction) 289
Вывода правило (rule of inference) 81
Выводимость (deducibility) 323, 360
Выделенное значение (designated value) 258
Выпуклое множество 196
Выражение (expression) 58
Высказывание (proposition, statement) 63, 136, 250, 253, 279, 439
— аксиоматическое 81
— содержательное 80
— формальное 80
— элементарное 81
Высказываний алгебра (propositional algebra) 242
Вычислимость по Тьюрингу (Turing computability) 130
— эффективная 188

Гейтинговская алгебра 242
— структура 242
Гетерологичное 25
Гёделев номер 98
Гёделевское представление 98
Гильбертовская программа 32
Главная операция (principal operation) 165
Главный конституэнт (principal constituent) 287
Глагол (verb) 63, 445
Глагольная функция (verbal function) 63, 445
Гомоморфизм 157, 258
Грамматика 61, 143
Грамматическая категория 62
Греллинга парадокс 24
Группа 196

Данное (datum) 343
Двойное отрицание (double negation) 403, 406
Двойные кавычки 60
Двойственности принцип (principle of duality) 203
Дедуктивная индукция (deductive induction) 155
— теория (deductive theory) 81
Дедуктивное правило (deduction rule) 81
Дедукционная теорема (deduction theorem) 265, 356
Денотат (denotate) 28
Деривативная формальная система (derivative formal system) 127
Деривация (derivation) 127
Десигнат (designatum) 63
Детерминативное правило 81
Детерминативный способ 70
Дефинициональная редукция (definitional reduction) 165
Дефинициональное расширение (definitional extension) 165
— тождество (definitional identity) 168
Дизъюнктивная нормальная форма (disjunctive normal form) 424
— сумма (disjunctive sum) 231
Дизъюнктивное разложение 421
Дизъюнкции свойство (alternation property) 329, 358, 436, 467
Дизъюнкция (alternation) 65, 211, 231

Дистрибутивность 199
Доказательство 82
— формальное (formal demonstration) 82
III-доказательство 335
IV-доказательство 335
Доказуемо (provable) 65
Доказуемость (provability) 107
Дополнение 409
Допустимая оценка 277
Допустимое правило 151
Допустимый элемент 68
Древовидная диаграмма 72
Дуал (dual) 191, 414
Дуальности принцип (principle of duality) 203
Дуальный автоморфизм 414

Единичный элемент (unit element) 209
Естественный язык 58

Заключительная команда (stop command) 115
Закон исключенного третьего (law of excluded middle, tertium non datur) 242, 370, 404
— Пирса 268
Законы ассоциативности 204
— идемпотентности 204
— коммутативности 204
— поглощения 204
Замена (replacement) 159
Замкнутая фраза (closed phrase) 62
Замкнутое множество 196
Замкнутый элемент 196
Замыкание (closure) 62
Запуск алгорифма (starting of algorithm) 117
Знак 136
Знак для сообщения 138
— утверждения (assertion sign) 107
Значение (value) 62, 99

Идеал (ideal) 212
Идемпотентная операция 192
Идемпотентности закон (law of idempotence) 204
Изначальная интуиция (primordial intuition) 28
Изоморфизм (isomorphism) 258
Импликативная полуструктура (implicative semilattice) 212
Импликативная структура (implicative lattice) 215, 240
Импликация (implication) 151, 270, 360
(Им)пликация (ply operation) 65
Импликация следования (entailment implication) 359
(Им)плицирует (implies) 94
Имя (noun) 63
Инверсионная теорема 295, 376, 509
Инверсионный принцип (Inversion-princip) 354
Индивид 41
Индуктивное обобщение 153
— определение 131
Индуктивный класс (inductive class) 70
— пункт 131
— шаг (inductive step) 155
Индукционный шаг (induction step) 155
Индукция дедуктивная (induction deductive) 155
— натуральная (induction natural) 155
— структурная (induction structural) 155
Инскрипция (inscription) 38, 59, 251
Интерпретант (interpretant) 84
Интерпретация (interpretation) 84
— Линденбаума 258
— нормальная 254
— посредством классов 194
— через высказывания 194
— — делимость 195
— — замыкание 195
— — открытые множества 196
— — отношения 194
— — порядок 195
Интуиционизм 28
Интуиционистская алгебра высказываний 404
Интуиционистское отрицание 370, 372
Интуиция изначальная (primordial intuition) 28
Инференциальное расширение (inferential extension) 147
Инфикс 64
Иррегулярное правило (irregular rule) 289
Исключенного третьего закон (law of excluded middle, tertium non datur) 242, 370, 404
Искусственная интерпретация 197
Истинности критерии фундаментальные (fundamental truth criteria) 149

Истинность высказывания (truth of proposition) 79
Исходная операция 92
— постоянная (primitive constant) 444
— пропозициональная постоянная (primitive propositional constant) 453
Исходное утверждение (prime statement, prime assertion) 281, 294, 402, 454
Исходные данные (data) 158
Исчисление (calculus) 90, 192, 353, 483
— высказываний (propositional calculus) 481
— предикатов (predicate calculus) 46, 242
— — первой ступени (first order predicate calculus) 46
— — с обобщением 484
— — собственное 484, 487

Кавычки двойные 60
— одинарные 60
Кажущаяся переменная 443
Кантора парадокс 23
Категория грамматическая 62
Квазиатом 99
Квазиглавный конституэнт 288
Квазиисходное утверждение (quasi-prime statement) 294
Квазикавычки 60
Квазиопределение (quasi definition) 413
Квазиупорядочение (quasiordering) 192
— монотонное 161
Квазиупорядоченная система (quasi-ordered system) 107
Квантовой механики логика 239, 243
Квантор (quantifier) 439
Кванторное правило (quantifier rule) 455
Кетоненовская форма (Ketonen form) 294
Классическая импликативная структура (classical implicative lattice) 224
— опровержимость (classical refutability) 372
— оценка (classical valuation) 469
— позитивная алгебра высказываний 260, 267
— система LC 276
Классическая субтрактивная структура (classical subtractive lattice) 224
Классическое отрицание (classical negation) 371, 372
Класс концептуальный 69
Клауза (clause) 63, 253
Коллизия связанных переменных 178, 443
Кольцевая логика 243
Кольцо множеств 219
Команда (command) 115
Комбинатор (combinator) 181
— B 181
— C 181, 274
— I 181
— K 181, 274
— S 181
— W 181 274
Комбинаторная логика (combinatory logic) 51, 181
Комбинаторы производные 274
Комбинация (combination) 157
Коммуникативный язык 58
Коммутативности закон 204
Композиция (composition) 158
Компонента (componente) 158
— собственная (proper componente) 158
— элементарного утверждения 324
Компонентная операция 158
Конечная аксиоматизируемость (finite axiomatisibility) 86
— Булева алгебра 419
Конечный пункт 158
Конкатенативная система (concatenative system) 89
Коннектор (connector) 63
Консеквент (consequence) 115, 280
Консеквентный конституэнт (consequence constituent) 280
Конституэнт (constituent) 279, 287
Конструктивная эпитеорема (constructive epitheorem) 149
Конструктивное (constructive) 29
Конструктивность оценки 470
Конструктивный подход 352
Конструкционная последовательность (construction sequence) 73
Конструкция (construction) 72, 158
Контенсивизм (contensivism) 27
— критический 27
Континуум 28
Континуум-гипотеза 49
Контраксиома (counteraxiom) 365, 373, 432

Контрапозиция (contraposition) 406
Контрбазис (counterbasic) 421
Контроценка (countervaluation) 470
Концептуальный класс 69
Конъюнктивная нормальная форма 424
Конъюнктивное разложение 421
Конъюнктор (conjunctor) 136
Конъюнкция (conjunction) 65, 211, 255
Косвенный пункт 131
Критерий истинности 149
Критический контенсивизм 27

Левая монотонность 213
— просеквенция (left prosequence) 280
Левый конституэнт (left constituent) 280
— пункт 66
Лжеца парадокс 23
Линейный язык (linear languare) 58
Логика 18
— брауэровская 242
— математическая 18
— следствий 351
— философская 17
Логистическая система (logistic system) 107, 133
Логицизм (logicism) 39
Логическая алгебра (logical algebra) 192
— антиномия 20
— группа 240
Логический парадокс 26

Максимальная ветвь (maximal branch) 158
Маркова тезис 188
Математическая логика 18
Матрица (matrix) 259
Матричная интерпретация (matrix interpretation) 258
Машина Тьюринга (Turing machine) 134
Между 241
Метаисчисление (metacalculus) 137
Металогика (metalogic) 137
Метаматематика (metamathematics) 31, 177
Метаметаязык (metametalanguage) 61
Метасемиозис (metasemiosis) 102
Метасистема (metasystem) 102, 137
Метатеорема (metatheorem) 137, 186
Метаязык (metalanguage) 61
Минимальная логика (minimal logic) 432
Минимальное отрицание (minimal negation) 370, 372
Модальная логика (modal logic) 504
Модель (model) 100, 473
Модулярная структура (modular lattice) 208
Монотектоничный класс (monotectonic class) 73
Монотонная эквивалентность (monotone equivalence) 161
Монотонное квазиупорядочение (monotone quasi ordering) 161
— отношение (monotone relation) 161
Монотонность 194
— прямая 159
Морфология 88, 278
Мулева алгебра (Moolean algebra) 243, 437
Мультиассерторическая система (multiassertion system) 109
Мультиплярная просеквенция (multiply prosequence) 279
— система 280
— формулировка 280
Мультиплярное утверждение (multiply assertion) 280
Мультиплярный образ 217

Надтеория (supertheory) 80
Натуральная индукция (natural induction) 155
— система (natural system) 356
Натуральное число (natural number) 28, 32
Начальная команда (starting command) 117, 120
Начальное правило 70
Начальный челнок 120
— элемент 70
Недилеммматическая операция (nondilemmatic operation) 329
Независимость (independence) 414
Незаключительная команда (non-stop command) 115
Некоммутативная структура 243
Нектор (nector) 136
Необходимость (necessity) 65
Неограниченная предикатная переменная 452
Неограниченное правило 331
Неопределенная (indeterminate) 146, 172
Неопределенный об (indeterminate ob) 154
Неполнота (non-completeness) 31, 35

Непосредственная обратимость 298
— опровержимость (direct refutability) 232
Непосредственное обращение (direct inversion) 298
— следование (direct consequence) 83
Непосредственный потомок (direct ancestor) 290
Непротиворечивая теория 81
Непротиворечивость (consistency) 31, 365
Неразрешимость (undecidability) 184
Неэлементарное правило 260
Номинализм 38
Нормализации принцип 114, 188
Нормальная интерпретация (normal interpretation) 254
— конструкционная последовательность (normal construction sequence) 74
— матрица (normal matrix) 259
Нормальный алгорифм 114
Нулевой элемент (zero element) 209

Об (ob) 32, 63
Об аксиоматический 109
Область (range) 454
— действия (scope) 66
Обобщение (generalization) 484
— индуктивное (inductive generalization) 153
— по индукции (generalization by induction) 153
— схематическое (schematic generalization) 153
— эпитеоретическое (epitheoretic generalization) 153
Обобщенная арифметика 135
Обобщенный сам 93
Об-расширение (ob extension) 147
Об-система 92, 146
Общая рекурсия 187
— система 193
Общекурсивная функция 187
Общекурсивность 130
Объединение (union, join) 193, 241
Объект (object) 63
Однозначное дефинициональное расширение 167
Окончательное определяющее (ultimate definiens) 164, 166
Окончательный потомок (ultimate ancestor) 290
— предок (ultimate descendant) 290
Ономатика (onomatics) 144
Онтология (ontology) 361
Оператор (operator) 63, 136
Операторы описания (descriptive operators) 503
Операционное правило (operational rule) 276, 281
— расширение (operational extension) 147
Операция (operation) 63, 92
— замыкания 192, 195
— идемпотентная 192
— компонентная 159
Описание (description) 503
Описания операторы (descriptive operators) 503
Определение индуктивное (inductive definition) 131
Определенный вопрос (definite question) 69
Определяемое (definiendum) 163, 165
Определяющая аксиома 165
Определяющее (definiens) 163, 165
Опровержимо (refutable) 65
Опровержимость (refutability) 365, 432
Ослабленные импликации (weakened implications) 358
Основания математики 19
Основная гипотеза (general conjecture) 47
Основной (principal) 165
Остов первоначальный (primitive frame) 88
Отвергается 65
Отверждение (rejection) 432
Отделенность (separability) 402
Открытое множество 196
Отношение монотонное (monotone relation) 161
Отрицание (negation) 65
Отрицательность (negativeness) 312
Оценка (valuation) 99

Пантактическая система (pantactic system) 98
Парадокс 20
— Берри 24
— Бурали-Форти 22
— Греллинга 24
— Кантора 23
— лжеца 23
— логический 26
— Рассела 21
— Ришара 24

Парадокс семантический 26
— Сколема 25
— эпистемологический 26
Параметр 288
Параметрический конституэнт (parametric constituent) 287
— потомок (parametric ancestor) 290
— предок (parametric descendant) 290
Параметрические
— аксиомы 50
— постулаты 50
Первоначальный остов (primitive frame) 88
Переменная подстановочная (substutive variable) 172
— свободная (free variable) 172
— связанная (bound variable) 172
— формальная (formal variable) 171
Пересечение (meet) 193, 241
— множеств 196
Платонизм 27
Пликация (ply operation) 65, 210
Поглощения закон (law of absorbtion) 204
Подалгебра 196
Подгруппа 196
Поддерево (subtree) 158
Подобные конституэнты 279
Подстановка (subsitution) 122
Подстановки правило (rule of substitution) 113
Подстановочная переменная (substitutive variable) 172
Подтеория (subtheory) 80
Подчиненный конституэнт (subaltern constituent) 287
Позитивная логика (positive logic) 353
Полиадическая алгебра (poliadic algebra) 504
Политектоничный класс 73
Полная абсурдность 371, 372
— опровержимость 371, 372
Полное дефинициональное расширение 167
Полнота (completeness) 82, 322, 365
— в смысле Поста 82, 83
— системы НК 425
— — LE 390
— — LK 390
Положительность (positiveness) 312
Полудедуктивная теория 82
Полумодель 100, 473
Полуопределенный вопрос 69
Полурегулярное правило 289
Полуструктура (semilattice) 199
— импликативная 212
Получелночный алгорифм (semishuttle algorithm) 120
Порождающий элемент 424
Поста алгорифм 128
Постулат 81
Постулаты Пеано 50
Посылка (premise) 81
Потомок (ancestor) 290
Правая монотонность 212
— просеквенция 280
Правила дизъюнкции 282
— для кванторов общности 455
— — — существования 455
— — необходимости 509
— — отрицания 374
— импликации 282
— Кетонена 292
— конъюнкции 282
— непосредственной опровержимости (rules of direct refutability) 374
— перестановки (permutation rules) 273, 282
— Π 455
— Σ 455
Правило 283
— вывода (rule of inference) 81
— дефинициональной редукции (rule of definitional reduction) 165
— допустимое 151
— замыкания 70
— иррегулярное 289
— образования (formation rule) 90
— операциональное (operational rule) 281
— ослабления 273, 282
— Пирса 282
— подстановки 270
— полурегулярное 289
— порождения 70
— преобразования (transformation rule) 90
— регулярное 289
— сокращения 282, 283
— структурное 281
— C 274
— *C* 281, 282
— F_j 374
— F* 365, 374
— Fj 374, 475
— K 274
— K* 475
— *K* 281, 282

Правило N 374
— N* 369, 374, 385
— *N 374, 385
— O* 276
— *O 278
— *O* 281
— P* 274, 277, 474
— *P 275, 277, 291, 475
— *P* 282
— Pe 260, 261, 263
— Pi 260, 261
— Ph 484
— Px 282
— V* 274, 475
— *V 275, 475
— *V* 282
— Vi 260, 261
— Vl 260, 261
— W 274
— *W* 281, 282
— Y 509
— Y* 509
— *Y 509
— Ye 514
— Yi 514
— Yh 515
— Λ* 274, 291, 475
— *Λ 274, 475
— *Λ* 282
— Λe 280
— $Λe_1$ 315
— $Λe_2$ 316
— Λi 260
— Π* 455, 474
— *Π 455
— *Π′ 463, 475
— Πe 481
— Πi 481
— Πh 484
— Σ* 455
— Σ′* 463, 475
— *Σ 475
— Σe 481
— Σi 481
— ℭ-вывода 282
— ⊢*275, 282, 291
— *⊢275
— ⊢i 313
Правильная интерпретация 84
Правильно построенная формула (well formed formula) 93
— построенное предложение (well formed sentence) 93
Правый конституэнт 280
— пункт 66
Прагматика 141
Предваренная нормальная форма (prenex normal form) 491
Предикат (predicate) 63, 445
Предикатная переменная 452
— постоянная 452
Предикатов исчисление (predicate calculus) 242
Предикатор (predicator) 63, 444
Предложение (sentence) 63, 136, 252
— базисное 131
— индуктивное 131
Предметный язык 61
Представление (representation) 96
— по Лукасевичу 97
Префикс 64
Приемлемость теории 84
Прикладное исчисление предикатов (applied predicate calculus) 453
Приложение (application) 110
Применимость алгорифма (applicability of algorithm) 115
— команды (applicability of command) 115
— эффективного процесса (applicability of process) 68
Примитивная рекурсия 187
Примитивно рекурсивная функция 170
Принимается 65
Принцип двойственности 203
— нормализации 114, 118
Присоединенный неопределенный атом (adjointed indeterminare atom) 175
— — об (adjointed indeterminate ob) 154
Проблема разрешения (desicion problem) 502
— тождества слов (word problem) 134
Программа Гильберта 32
Произведение (product, meet) 193, 241
Пропозициональная алгебра 94, 192
— интерпретация 194
— переменная 95
— функция 46
Пропозициональное расширение 147
Пропозициональные связки 255, 439
Пропозициональный оператор 445
Просеквенция (prosequence) 279
Простая абсурдность (simple absurdity) 370, 372
— опровержимость (simple refutability) 370, 372
Противоречие (contradiction) 81
Прямая интерпретация 99
— монотонность 159

Прямой пункт 131
Пункт 66
— косвенный 131
— прямой 131
Пустой квантор 450
Псевдодополнение (pseudocomplement) 404
Псевдопарадокс каталога 22
— парикмахера 22

Равенство 107
— по определению 168
Равнозначность (equisignificance) 252
Разделительная сумма 231
Размеченная диаграмма 72
Разность множеств 224
Разрешимая теория 81
Ранг дерева 299, 332
Рассела парадокс 21
Расширение (extension) 80
— аксиоматическое 147
— атомическое 147
— дефинициональное 165
— инференциональное 147
— операциональное 147
Реализация 95
Реальная переменная (real variable) 443
Регулярная интерпретация 257
Регулярное правило 289
Регулярный вывод 289
Редукция дефинициональная 165
— стандартная 166
Резидуальная структура 241, 243
Результат (resultate) 343
Рекурсивная арифметика 50
— функция 169
Рекурсивное множество 69
— расширение 168
Рекурсивно-перечислимый класс 69
Рекурсия общая 187
— примитивная 187
Реляционная система (relational system) 107, 192
Рефлексивность 193
Решетка (lattice, treillis, Verband) 240
Ришара парадокс 24

Сам 89
Свободная булева алгебра 424
— переменная 172, 177
— система 133
Свободное (булево) расширение 424
Свойство композиции (composition property) 324
— — для составных конституэнтов 324
— отделения (separation property) 325
— подформульности (subformula property) 324
— подформулы (subformula property) 324
— сохранения 327
Связанная переменная 172, 177
Связка (connective) 63
Семантика 141
Семантические таблицы (semantic tableaux) 52, 340
Семантический парадокс 26
Семантическое утверждение 143
Семиотика 58
Семиотическая система 141
Сечение (cut) 353
Символ 58
Симметричная разность (symmetric difference) 231, 241
Симметричность 194
Сингулярная просеквенция (singular prosequence) 279
— формулировка (система) 280
Сингулярное утверждение (singular assertion) 280
Сингулярный образ (singular transform) 317
Синтаксическое утверждение 143
Синтактика 141
Система 56, 86
— ассерторическая 107
— аффиксативная 89
— логистическая 138
— мультиассерторическая 109
— реляционная (relational system) 107, 192
— с (бинарным) отношением (system with binary relation) 107
— семиотическая 141
— формальная 136
— EA 260
— EC 260, 268
— HA 260, 263, 266
— HC 260
— HD 405
— HE 405
— HJ 404
— HK 405
— HM 402
— HX* 483
— HX_g 484

Система HX_p 484
— LA 272, 371
— LA* 455
— LA_1 281
— LA_m 281
— LC 272
— LC_1 281
— LC_m 281
— LD 371, 372, 386
— LD* 455
— LE 372, 386
— LJ 371, 372, 386
— LJ* 455
— LK 371, 372, 386
— LM 371, 372, 386
— LM* 455
— LXY 509
— TA 260
— TA* 481
— TC 260
— TC* 481
— TD 398
— TE 398
— TJ 398
— TK 398
— TK* 481
— TM 398
Сколема парадокс 25
Сколемовская нормальная форма (Skolem normal form) 495
— структура 211, 241, 243
Слабая импликация 359
Следование (entailment) 359
Следования отношение (consequence relation) 82
Следствие (consequence) 360
Слово (word) 58
Сложение 65, 193, 241
Смешанная формулировка (система) 260
Смысл 28
Собственная комбинация 158
— компонента 158
Собственное исчисление предикатов (proper predicate calculus) 484, 487
— расширение (proper extension) 166
Собственно теория (proper theory) 88
Собственный об (proper ob) 174
Содержательное высказывание 80
Сокращаемый конституэнт 332
Сокращение (contraction) 165, 332
Составное утверждение 254, 272
Сочленение (concatenation) 89
Специальные функторы 66
Стандартизованное дефинициональное расширение 166
Стандартная реализация по Лукасевичу 96
— редукция 166
— формулировка HD 405
— — HE 405
— — HJ 405
— — HK 406
— — HM 403
Стандартное представление по Лукасевичу 97
Степень дерева (degree of tree) 299
— предиката (degree of predicate) 87
— функтора (degree of functor) 62
Стратифицированное свойство (stratified property) 49
Строгая импликация (strict implication) 359, 432, 514
Строгое отрицание 371
Строго семантическое утверждение 143
Структура (lattice, treillis, Verband) 133
— абсолютная 211
— импликативная 210, 215
— модулярная 208
— некоммутативная 243
— резидуальная 241, 243
Структура с дополнениями (complemented lattice) 409
— сколемовская 211, 241, 243
— с относительными псевдодополнениями (relatively pseudocomplemented lattice) 241
— с псевдодополнениями 404
— субтрактивная (subtractive lattice) 217
Структурная индукция 155
Структурное правило 231, 273
Субнектор (subnector) 63
Субнекция (subnexus) 63
Субтрактивная структура 217
Суждение 95, 136, 250
Сумма 193, 241
Суффикс 64
Сущность 136
Схема 264
— аксиом (axiom scheme) 94
— доказательств (demonstration scheme) 154
— NB 403
— NB′ 403
— NC 403

Схема NI′ 403
— $NK_{(1)}$ 403
— NS 403
— NW 403
— PB 269
— PB′ 269
— PC 269
— Pc 268
— PI 264, 269
— PK 264, 269
— Pk 268
— PS 265, 269
— PW 269
— VK 264
— VK′ 264
— ΛK 264
— ΛK′ 264
— AS 265
— Π_0 484
— Π_1 484
— Π_2 484
— ΠP 484
— Σ_0 484
— Σ_1 484
— Σ_2 484
— ΣP 484
Схематическое дефинициальное расширение 167
— обобщение 153
Таблица доказательств (proof tableau) 338, 358, 474
— истинности (truth table) 99, 129
Тавтология (tautology) 100
Тантет 89
Тезис Маркова 188
— Чёрча 188
Тектоника 104
Теорема 186
— Гёделя о неполноте 31, 35, 149, 184, 188
— — о полноте 149, 185, 189, 497
— Гливенко 396
— инверсионная 295, 357, 462
— Лёвенгейма — Сколема 149, 185, 189
— о дедукции (deduction theorem) 265, 270
— о замене (replacement theorem) 160, 312
— об устранимости сечений 246, 275
— элементарная 186
— элиминационная 246, 275, 378, 510
— Эрбрана — Генцена 493
Теоретическое расширение 147
Теория 56
— абстрактная 134
— типов 47
— формальной выводимости 256
Терм (term) 136, 439, 448
Термовая переменная (termal variable) 443
Термовое расширение 444
Термовый оператор (termal operator) 444
— функтор (termal functor) 444
Тетел 89
ТЗ 160, 312
Тождество дефинициональное 168
Точечная система обозначений (dot notation) 66
Традиционный подход 352
Транзитивность 193
Тьюринга машина 134
Удаляемое высказывание 302
Удаляемый конституэнт 302
Узел (node) 72
Умножение (meet) 65, 193, 241
Унарная операция 65
Унарный глагол 65
Универсальная категория 173
Универсальное расширение 167
Универсальный алгорифм 129
— предикат 173
Утверждение (statement, assertion) 63, 107, 136, 252, 276
— аксиоматическое 109
Фаза 121
Философская логика 17
Финитный 31, 55
Формализация 31, 102
Формализм 27
Формальная выводимость 152
— переменная 171
— система 56, 135
Формальное высказывание (formal proposition) 80
— доказательство (formal demonstration) 82
Формальный объект 56, 86
Формула правильно построенная (well formed formula) 93
Формулировка I 281
— IK 290, 292
— II 290

Формулировка IIK 290, 292
— III 334
— IV 336
Формулы де Моргана 415
Фраза (phrase) 61, 63
Функтор 63
— предложений 445
— утверждений 445
Функциональная абстракция 177
Функциональное исчисление 483
Функция 63, 111
— алгорифмическая 130
— вполне алгорифмическая 130
— общерекурсивная 187
— примитивно рекурсивная 170
— пропозициональная 46
— рекурсивная 168
— утверждений (statement function) 445
— частично рекурсивная 169

Характеристическая переменная (characteristic variable) 455

Цилиндрическая алгебра (cylindric algebra) 504
Цифровой автомат 188

Частичная интерпретация 84
— рекурсивность 130
Частичное упорядочение (quasi ordering) 192
Частично рекурсивная функция 168
— рекурсивное дефинициональное расширение 167
Частично упорядоченная система (quasi ordered system) 192
Чашка (cup) 241
Челнок 120
Челночный алгорифм 124
Чёрча тезис 188
Чистая морфология 88
Чистое исчисление предметов 453
Чисто синтаксическое утверждение 143
Член (member) 421

Шапка (cap) 241
Штрих Шеффера 417

Эвтактическая система 97
Эквациональная система (equational system) 107
Эквивалентность (equivalence) 380, 386
— монотонная 161
Эквиваленция (equivalence operation) 65
Эквиморфные инскрипции (equimorphe inscriptions) 59
Элемент (element) 63, 257
Элементарная дедуктивная теория (elementary deductive theory) 82
— теорема (elementary theorem) 79, 186
— система (elementary system) 112
Элементарное высказывание (elementary proposition, 79, 81, 272, 279, 448
— правило (elementary rule) 260
— утверждение (elementary statement) 280
Элиминационная теорема (elimination theorem) 246, 275, 302, 378
Эндоморфизм 258
Эпивысказывание (epistatement) 146
Эпистомологический парадокс 26
Эпитеорема 100, 146, 186
Эпитеоретическое обобщение 153
Эпитеория 146
ЭТ 302, 393
Эффективная вычислимость 188
— монотектоничность 73
Эффективный процесс 68

Юнктор (junctor) 136

Явное определение 168
Язык 68
— естественный (natural language) 58
— коммуникативный 58
— -объект 61
— предметный 61

A1 (предположение) 453, 460
A2 (предположение) 453
A-глагол (A verb) 87
A-имя (A noun) 87
A-предложение (A sentence) 87
Assoc (схема аксиом) 237

B-язык 445
Basic logic 131

C 274
C 281, 282

Durchschnitt 241

E-образ 266
EA 260
EC 268
efg 376
Entity 136
Erweiterter Hauptsatz 493
Etwas 136
Ex falso quodlibet 376

F 374
F* 369, 374
F-преобразование (F transformation) 383
Fj 374, 475
FN-формулировка 372, 386

G-преобразование 380
General logical calculus 47
Groupe logique 240

H-теория необходимости 514
HA 260
Halbverband 240
Hauptsatz 246, 275
HC 405
HD 405
HE 405
HJ 404
HK 405
HM 402
HX* 483
HX^*_g 484
HX^*_p 484

Join 241

K 274
K* 475
K 291, 282
Kodificat 52
Konsequenzlogik 351

L*-выводимость (L-deducibility) 467
L-система 271
L*-система 456
L-теория необходимости 509
LA* 455
LA_1 281
LD 372, 386
LD* 455
LE 372, 386
LJ 372, 386
LJ* 455
LK 372, 386
LM 372, 486
LM* 455
Logischer Zusammenhang 359

m-арный функтор 62
Metasprache 140
Mitteilungszeichen 138
Modus ponens 263, 483

N 374
N* 369, 374, 385
*N 374, 385
N-формулировка 372
NB 403
NB′ 403
NC 403
NI′ 403
NK_1 403
NS 403

O* 276
*O 276
O 281
O-алфавит 88
O-буква 88
O-символ 88
O-язык 88

P* 274, 277, 474
*P 275, 277, 291, 475
P 282
(p1) 282, 294
(p1′) 294
(p2) 282, 294
PB 269
PB′ 269
PC 269
Pc 268
Pe 260, 261, 263
Perm (схема аксиом) 237, 418
PI 264, 269
Pi 260, 261
Ph 484
Ph′ 516
PK 264, 269
Pk 269
PS 265, 269
Px 282
PW 269

R1 — R8 (схемы аксиом) 229
(r1) 288
(r2) 288
(r3) 288
(r4) 288
(r4)′ 288
(r4)″ 291
(r5) 288

(r6) 288
(r7) 288
Rückverorderung der Einsetzungen 176

S-преобразование 384
Satz 136
Schichten 50
Schnitt 353
Simp (схема аксиом) 237, 418
Sinn 28
Subformula property 324
Sum (схема аксиом) 237, 418
Syll 353
Szám 91

T-правила 481, 514
T-теория необходимости 514
T-формулировка 514
TA 260
TA* 338, 474, 481
Tantét 91
Taut (схема аксиом) 237, 418
TC 260
TC* 481
TD 398
TE 398
Tétel 91
TJ 398
TK 481
TM 398
Treillis 240

U-переменная 146, 171
U-постоянная 171
U-язык 57

V* 274, 475
*V 275, 475
*V (мультиплярное) 291
*V (сингулярное) 291
V 282
Ve 260, 261
Verband 240
Vereinigung 241
Vi 260, 261
VK 264
VK′ 264
VS 264

W 274
W 281, 282

Y 509
Y* 509
*Y 509
Ye 514
Yh 515
Yi 514

Zeichen 136

ε-оператор 503

λ-конверсия 51
λ-операция 177
Λ* 274, 291, 475
*Λ 274, 475
Λ 282
Λe 260
$Λe_1$ 315
$Λe_2$ 316
Λi 260
ΛK 264
ΛK′ 264
ΛS 265

(μ) 161

(ν) 161

Π 455
Π* 455, 474
*Π 455
*Π′ 463, 475
$Π_0$ 464
$Π_2$ 484
Πe 481
Πi 481
Πh 484
ΠP 484

(ρ) 161

Σ 455
Σ* 455
*Σ 455, 475
$Σ'_*$ 463, 475
$Σ_0$ 484
$Σ_1$ 484
$Σ_2$ 484
(σ) 161
Σe 481
Σi 481
ΣP 484

(τ) 169

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ [1])

Адян С. И. 134
Айдукевич (Ajdukiewicz K.) 185
Аккерман (Ackermann W.) 43, 47, 48, 51, 53, 359, 360, 417, 489, 501, 503
Андерсон (Anderson A. R.) 360, 361, 516
Андреа (Aandreaa S.) 493
Аристотель 959
Ассер (Asser G.) 128, 130, 133, 481, 503

Баркан-(Маркус) (Barcan-(Marcus) R.) 516
Бар-Хиллел (Bar-Hillel Y.) 23, 44, 45, 47, 48, 49, 53, 54, 184, 185, 239
Бахман (Bachman H.) 48
Беккер (Becker O.) 517
Белнап (Belnap N. D., Jr.) 360, 361
Беман (Behmann H.) 51
Бёнер (Boehner Ph.) 46
Беннет (Bennett A. A.) 237
Бергман (Bergmann G.) 40
Бернайс (Bernays P.) 27, 43, 48, 50, 53, 54, 131, 187, 189, 238, 269, 270, 353, 355, 356, 358, 407, 433, 445, 456, 500, 501, 502, 503
Берри (Berry G. D. W.) 24, 185
Берстейн (Berstein B. A.) 436
Бет (Beth E. W.) 44, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 185, 189, 324, 338, 340, 343, 350, 413, 501, 517
Биркгоф (Birkhoff Garrett) 219, 223, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 419, 430, 436
Бирн (Byrne L.) 209, 431, 436
Бистерфельдт (Biesterfeldt H. J.) 13
Бланше (Blanché R.) 43
Блейк (Blake A.) 436
Блэк (Black M.) 20, 44, 54
Больцано (Bolzano B.) 499
Борель (Borel E.) 53
Борковский (Borkowski L.) 64
Боуден (Bowden J.) 238
Бохенский (Bochenski I. M.) 44, 45, 46, 53, 66, 241, 359, 415
Браун (Brown R.) 130
Брауэр (Brouwer L. E. J.) 28, 30, 37, 38, 53, 54, 241, 242
Бреннеман (Brenneman F. S.) 13
Буль (Boole G.) 109, 236, 238, 239, 240, 434
Бун (Boone W. W.) 134
Бурали-Форти (Burali-Forti C.) 22, 23, 25, 49

Вайсберг (Wajsberg M.) 352, 354, 355, 356, 358, 397, 433, 434, 517
Вайсман (Waisman F.) 44
Ван (Wang H.) 47, 48, 504
Варшавский (Varsavsky O.) 242
Вейерштрасс (Weierstrass K.) 499
Вейль (Weyl H.) 44, 54, 259, 432
Весли (Vesley R. E.) 188
Витгенштейн (Wittgenstein L.) 40
Воот (Vaught R. L.) 185

[1]) В соответствии с соглашениями, принятыми в книге при цитировании работ Карри и «Combinatory Logic» Карри и Фейса, в указателе учтены все упоминания об этих работах, хотя бы на соответствующих страницах имена их авторов и не упоминались (в английском издании ссылки на каждую из этих работ в отдельности включены в общий указатель терминов и имен). — *Прим. ред.*

Галлер (Galler B. A.) 504
Гальперин (Hailperin T.) 490, 503, 504
Гастев Ю. А. 258
Гёдель (Gödel K.) 31, 32, 35, 37, 39, 46, 48, 49, 54, 139, 149, 150, 184, 187, 188, 189, 271, 397, 436, 437, 497, 502, 517
Гейгер (Geiger M.) 22
Гейтинг (Heyting A.) 29, 37, 54, 190, 242, 269, 351, 353, 355, 432, 433, 434
Генкин (Henkin L.) 47, 132, 452, 456, 504
Генцен (Gentzen G.) 11, 52, 53, 131, 189, 245, 246, 259, 260, 261, 271, 275, 351, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 370, 432, 493, 500, 502, 517
Гермес (Hermes H.) 44, 45, 46, 132, 133, 237, 240, 241, 354, 355, 407, 408, 434
Герц (Hertz P.) 131, 353, 354
Гжегорчик (Grzegorczyk A.) 51
Гилмор (Gilmore P. C.) 55, 504
Гильберт (Gilbert D.) 7, 31, 32, 37, 38, 40, 43, 47, 50, 53, 54, 102, 104, 107, 131, 135, 137, 139, 140, 141, 184, 186, 187, 269, 353, 354, 355, 356, 407, 417, 434, 445, 456, 481, 489, 500, 501, 502
Гливенко В. И. 237, 241, 242, 355, 396, 397, 408, 432, 433, 436
Говард (Howard W.) 430
Гонсет (Gonseth F.) 22, 135
Грассман (Grassman H.) 50
Греллинг (Grelling K.) 24, 25
Гудстейн (Goodstein R. L.) 7, 43, 54, 187, 190
Гуссерль (Husserl E.) 188

Дайамонд (Diamond A. H.) 431
Дайсон (Dyson V. H.) 358
Дедекинд (Dedekind R.) 50, 105, 140, 187, 237, 352
Деккер (Dekker J. C. E.) 188
Де Морган (De Morgan A.) 415
Детловс В. К. 130, 169, 188
Детуш (Destouches J. L.) 239
Джевонс (Jevons W. S.) 236, 240
Джонсон (Johnson W. E.) 17, 18
Джордан (Jordan Z.) 51
Дилуорт (Dilworth R. P.) 209 212, 240, 241, 243
Донченко В. В. 360
Допп (Dopp J.) 185
Дребен (Dreben B.) 493
Дубислав (Dubislav W.) 44, 185
Дэвис (Davis M.) 132, 188
Дюбрей-Жакотен (Dubreil-Jacotin M. L.) 237, 238, 239, 241

Ершов Ю. Л. 189
Есенин-Вольпин А. С. 32, 189
Есперсен (Jespersen O.) 136

Жегалкин И. И. 240
Жергон (Gergonne J. D.) 241

Зерби В. (Zerbey V. P.) 13
Зерби Ф. (Zerbey F. C.) 13
Зубиета (Zubieta R. G.) 456

Идельсон А. В. 8, 52
Иоганссон (Johansson I.) 370, 371, 432, 433, 503
Ионссон (Jonsson B.) 244
Иордан (Jordan P.) 239, 243

Йоргенсен (Jørgensen J.) 46, 236

Калиш (Kalish D.) 503
Камке (Kamke E.) 48
Кангер (Kanger S.) 408, 433, 434, 517
Кантор (Cantor G.) 23, 25, 48, 49
Карнап (Carnap R.) 40, 43, 47, 85, 90, 102, 130, 140, 141, 143, 144, 186, 432, 517
Карри (Curry H. B.) 5, 6, 7, 8, 14, 40, 51, 53, 54, 55, 62, 73, 78, 91, 98, 106, 113, 128, 133, 134, 137, 140, 141, 142, 169, 184, 185, 223, 228, 236, 238, 239, 270, 349, 351, 353, 357, 358, 362, 396, 407, 409, 416, 418, 421, 423, 438, 443, 450, 500, 502, 507, 516, 517
Кемени (Kemeny J. G.) 130
Кемпнер (Kempner A. J.) 53
Кетонен (Ketonen D.) 291, 292, 294, 311, 322, 357
Кёте (Köthe G.) 237
Клейн Фр. (Klein Fr.) 237, 240
Клини (Kleene S. C.) 6, 7, 43, 52, 53, 54, 55, 74, 114, 126, 131, 135, 155, 169, 185, 186, 188, 189, 290, 299, 324, 349, 357, 436, 464, 480, 500, 501

Коган (Cogan E.) 186
Колмогоров А. Н. 241, 370, 397, 432, 433, 436
Копи (Copi I. M.) 23
Котарбиньский (Kotarbiński T.) 46, 51, 64
Коупленд (Copeland A. H., Sr.) 244
Коэн (Cohen P. J.) 49
Крайзель (Kreisel G.) 54, 189, 190, 358, 436
Крипке (Kripke S. A.) 344, 358, 362, 371, 396, 433, 517
Кронекер (Kronecker L.) 54
Круазо (Croisot R.) 237, 238, 239, 241
Крэвен (Craven W.) 13
Крэйг (Craig W.) 502
Куайн (Quine W. V.) 40, 43, 47, 49, 52, 53, 60, 102, 131, 185, 434, 436, 489, 490, 500, 501, 504, 517
Курода (Kuroda S.) 47
Кутюра (Couturat L.) 236, 434, 436

Ладриер (Ladrière J.) 43, 44, 45, 52, 184, 524
Лайтстоун (Lightstone A. H.) 504
Ландау (Landau E.) 50, 105
Леблан (LeBlanc H.) 43, 45, 46, 131, 503
Лёвенгейм (Löwenheim L.) 25, 149, 185, 189, 456
Леви (Levy A.) 48
Леджет (Leggett H. W.) 21
Ледли (Ledley R. S.) 436
Лезье (Lesieur L.) 237, 238, 239, 241
Лейбниц (Leibniz G. W., von) 46, 236
Леммон (Lemmon E. J.) 517
Лесьневский (Lésniewski S.) 51, 235, 361
Линденбаум (Lindenbaum A.) 258
Линдон (Lyndon R. C.) 7, 43, 49
Лоренцен (Lorenzen P.) 10, 43, 47, 50, 54, 90, 91, 132, 151, 190, 239, 349, 351, 353, 362
Лукасевич (Łukasiewicz J.) 46, 64, 66, 96, 97, 102, 128, 133, 258, 271, 352, 355, 356, 361, 408, 418, 431, 432, 434, 436, 437
Лэнгфорд (Langford C. H.) 236, 516
Льюис К. (Lewis C. I.) 40, 45, 46, 55, 236, 516, 517
Люс (Luce R. E.) 526

Майхилл (Myhill J.) 184, 188, 190, 517
Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.) 239, 240, 241, 397, 431, 517
Мак-Колл (MacColl H.) 516
Мак-Лейн (MacLane S.) 185
Мак-Нотон (McNaughton R.) 47, 48
Мальцев А. И. 8, 127 185, 189
Марквальд (Markwald M.) 44
Марков А. А. 4, 10, 56, 68, 71, 114, 115, 120, 129, 130, 133, 134, 188
Мартин (Martin R.) 130, 141
Маслов С. Ю. 474
Мацумото (Matsumoto K.) 507, 517
Маэхара (Maehara S.) 357, 358, 433, 481, 517
Менгер (Menger K.) 186, 237, 241
Мендельсон (Mendelson E.) 43
Мередит (Meredit C. A.) 270
Минковский (Minkowski H.) 240
Минц Г. Е. 8, 52, 280, 493, 517
Михайлеску (Mihailescu E. G.) 235
Михайлова К. А. 134
Моисил (Moisil G.) 240, 362, 432
Молинаро (Molinaro M.) 238, 239
Монтегю (Montague R.) 503
Монтейро (Monteiro A. A.) 223, 242
Моррис (Morris C. W.) 130, 141
Мостовский (Mostowski A.) 43, 44, 64, 184, 189, 190, 490, 501
Мо Шоу-кей (Moh Shaw-kwei) 516
Муди (Moody E.) 46

Нагель (Nagel E.) 30, 43, 184
Нагорный Н. М. 129, 134
фон Нейман (Neumann J., von) 40, 48, 239
Нётер (Noether E.) 237
Нил (Kneale W.) 356
Новиков П. С. 7, 43, 134, 189
Ньюмен (Newman J. R.) 43, 184

Огасавара (Ogasawara T.) 242
Огден (Ogden C. K.) 130
Ониси (Ohnishi M.) 358, 507, 517
Оре (Ore O.) 241
Оревков В. П. 8

Патнэм (Putnam H.) 436
Пеано (Peano G.) 22, 46, 47, 50, 79, 238, 241
Перри (Parry W. T.) 517

Петер (Péter R.) 187
Пирс (Peirce C.) 188, 235, 236, 238, 239, 240, 244, 282, 352, 356, 417, 439
Порецкий П. С. 436
Порт (Porte J.) 127, 132, 136, 408, 418, 431, 436, 517
Пост (Post E. L.) 81, 82, 83, 127, 128, 132, 133, 134, 185, 188, 243, 365, 366, 432, 436, 437
Прайор (Prior A. N.) 43, 54, 356, 517
Пуанкаре (Poincaré H.) 54

фон Райт (Wright G. H., von) 517
Рамсей (Ramsey F. P.) 25, 26, 33, 40, 47
Расёва (Rasiowa H.) 185, 481, 498, 517
Рассел (Russell B.) 21, 22, 23, 24, 25, 32, 33, 40, 41, 43, 47, 53, 54, 55, 102, 133, 140, 149, 237, 238, 352, 417, 418, 430, 433, 434
Рибейро (Ribeiro H.) 13
Ричардс (Richards I. A.) 130
Ришар (Richard J.) 24
Робинсон А. (Robinson A.) 185, 189
Робинсон Р. (Robinson R.) 184, 189, 504
Робинсон Т. (Robinson T.) 362
Роджерс (Rogers H., Jr.) 188
Розенблюм (Rosenbloom P. C.) 43, 132, 243, 434, 436, 437
Россер (Rosser J. B.) 43, 133, 184, 418, 431, 489, 503, 530
Росскопф (Rosskopf M. F.) 131
Рубин (Rubin J. E.) 517
Рунс (Runes D.) 32, 44

Санчес (Sanchis L. E.) 13
Саппс (Suppes P.) 43, 48, 131, 185
Серпинский (Sierpinski W.) 48
Сикорский (Sikorski R.) 185, 438, 498, 517
Сколем (Skolem T.) 25, 48, 50, 149, 185, 187, 189, 190, 212, 237, 239, 242
Слисенко А. О. 8
Слупецкий (Slupecki J.) 51, 64
Смитон (Smeaton A.) 528
Собоциньский (Sobociński B.) 64, 418, 436
Стениус (Stenius E.) 53
Стенли (Stanley R.) 501
Столл Р. Р. (Stoll R. R.) 43
Стоун (Stone M. H.) 219, 239, 240, 244, 420, 434
Строусон (Strawson P. F.) 44
Стяжкин Н. И. 46

Такеути (Takeuti G.) 47
Тан (Tang T. C.) 517
Тарский (Tarski A.) 43, 44, 53, 83, 109, 132, 133, 139, 143, 184, 186, 189, 239, 240, 241, 244, 258, 270, 352, 356, 357, 431, 437, 504, 517
Тиле (Thiele H.) 480
Титгеймейер (Titgemeyer R.) 186
Тьюринг (Turing A. M.) 126, 130, 133, 134, 188
Тюркетт (Turquette A. R.) 437

Уайтхед (Whitehead A. N.) 21, 24, 47, 133, 140, 149, 236, 237, 238, 352, 417, 418, 430
Уилдер (Wilder R. L.) 43, 44, 53, 54
Уитни (Whitney H.) 241
Умедзава (Umezawa T.) 358, 437
Уоллес (Wallace A. D.) 360
Уорд (Ward M.) 240, 241, 243

Феврие (Fevrier P.) 239
Фейс (Feys R.) 14, 40, 43, 51, 61, 77, 79, 110, 111, 130—137, 141, 144, 163, 169, 171, 179, 183, 235, 348, 358, 432, 443, 450, 517
Филит Косский 23
Финдлей (Findlay J.) 184
Фитч (Fitch F. B.) 43, 51, 360, 517
Фостер (Foster R. L.) 243
Фреге (Frege G.) 21, 28, 32, 46, 47, 48, 102, 131, 133, 140, 188, 238, 352, 355, 417, 434, 439
Френкель (Fraenkel A. A.) 23, 44, 45, 47, 48, 49, 53, 54, 184, 185, 239
Фридман А. А. 134
Фринк (Frink O.) 434, 437

Халмош (Halmos P. R.) 109, 504
Хантингтон (Huntington E. V.) 107, 139, 236, 238, 418, 430, 431, 436
Харди (Hardy G. H.) 39
Харроп (Harrop R.) 436
Хаусдорф (Hausdorff F.) 48
Хиж (Hiz H.) 437
Хинтикка (Hintikka K. J. J.) 504, 517

Холден (Hallden S.) 517
Хомский (Chomsky N.) 252

Цермело (Zermelo E.) 40, 48

Чан (Chang C. C.) 243
Чаудхури (Choudhury A. C.) 243
Чернявский В. С. 120, 121, 129, 130, 134
Чёрч (Church A.) 6, 7, 22, 24, 28, 32, 43, 44, 45, 46, 47, 51, 52, 53, 54, 55, 71, 75, 91, 109, 114, 135, 168, 177, 185, 186, 240, 241, 269, 270, 353, 355, 356, 357, 359, 362, 408, 417, 432, 433, 434, 436, 437, 439, 445, 456, 467, 497, 500, 501, 502, 503
Чин (Chin L. H.) 244

Шанин Н. А. 8, 54, 190, 436
Шейнфинкель М. И. 501
Шеффер (Sheffer H. M.) 417, 436
Шильп (Schilpp P. A.) 21
Шмидт (Schmidt H. A.) 44, 45, 52, 53, 105, 106, 133, 270, 357, 360, 397, 407, 437, 503, 517
Шмульян (Smullyan R. M.) 52, 184
Шольц (Scholz H.) 43, 44, 45, 46, 139, 140, 355, 407, 408, 434
Шпеккер (Specker E. P.) 49, 53
Шрёдер (Schröder E.) 47, 236, 237, 238, 239, 241, 244, 436
Шрётер (Schröter K.) 132, 270, 355, 356, 434, 503
Штегмюллер (Stegmüller W.) 130
Шураньи (Suranyi J.) 480, 503
Шютте (Schütte K.) 43, 47, 50, 51, 52, 54, 189, 357, 489, 490, 503

Эвбулид 23
Экснер (Exner R. M.) 131
Элфорд (Alford J. P.) 13
Эндрюс (Andrews P. B.) 47, 493
Эпименид 23
Эрбран (Herbrand J.) 132, 187, 240, 356, 357, 493, 500, 502, 503

Яновская С. А. 7, 8, 278
Яськовский (Jaśkowski S.) 356, 437, 490, 501

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5
Предисловие 9
Объяснение соглашений 15

Глава 1. **Введение** 17
A. Природа математической логики 17
B. Логические антиномии 20
C. Природа математики 26
D. Математика и логика 39
S. Дополнительные вопросы 42

Глава 2. **Формальные системы** 56
A. Предварительные рассмотрения 56
B. Теории 79
C. Системы 86
D. Специальные формы систем 107
E. Алгорифмы 114
S. Дополнительные вопросы 130

Глава 3. **Эпитеория** 146
A. Природа эпитеории 146
B. Замена и монотонные отношения 157
C. Теория определений 163
D. Переменные 171
S. Дополнительные вопросы 184

Глава 4. **Реляционная логическая алгебра** 191
A. Логические алгебры вообще 192
B. Структуры 198
C. Сколемовские структуры 210
D. Классические сколемовские структуры 224
S. Дополнительные вопросы 236

Глава 5. **Теория импликации** 245
A. Общие принципы ассерторической логической алгебры 247
B. Алгебры высказываний 259
C. Системы LA и LC 271
D. Эквивалентность систем 295
E. L-выводимость 323
S. Дополнительные вопросы 351

Глава 6. **Отрицание** 363
A. Природа отрицания 363
B. L-системы для отрицания 373
C. Другие формулировки отрицания 397
D. Техника классического отрицания 409
S. Дополнительные вопросы 431

Глава 7. **Кванторы** 439
A. Предварительные формулировки 440
B. Теория L*-систем 456
C. Другие формы теории кванторов 481
D. Классическая эпитеория 491
S. Дополнительные вопросы 500

Глава 8. **Модальности** 505
A. Уточнение понятия необходимости 505
B. L-теория необходимости 509
C. T- и H-формулировки теории необходимости 514
S. Дополнительные вопросы 516

Библиография 518
Указатель символов 548
Указатель терминов 549
Именной указатель 563