МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И ОСНОВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНТУИЦИОНИЗМ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

А. Г. ДРАГАЛИН

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.12
Д 72
УДК 517

Альберт Григорьевич Драгалин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНТУИЦИОНИЗМ
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

(Серия: «Математическая логика и основания математики»)

ИБ 11194

М., 1979 г., 256 стр.

Редактор *В. В. Донченко*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, Т. А. Панькова, Г. В. Подвольская*

Сдано в набор 18.05.79. Подписано к печати 29.08.79. Т-16136.
Бумага $84\times108^1/_{32}$. тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 14,13. Тираж 6700 экз. Заказ № 1878.
Цена книги 1 р. 20 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
2-я тип. из-ва «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер, 10

Д $\frac{20203-136}{053(02)-79}$ 70-79 1702020000

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в математической логике большое внимание уделяется исследованию неклассических логик. Многозначные логики высказываний уже довольно давно и весьма успешно применяются в теоретической кибернетике. Модальные логики находят интересные применения в теоретическом программировании. Неклассические логики используются в теории вычислений, информатике, при описании систем эвристического программирования.

Особенно важной из неклассических логик является, несомненно, интуиционистская логика. Прежде всего, само введение этой логики имеет глубокое и интересное философское обоснование, связанное с интуиционистской критикой классической математики, выдвинутой Брауэром. Кроме того, интуиционистская логика — пожалуй, единственная из неклассических логик, в рамках которой действительно фактически производилась достаточно глубокая разработка многих разделов математики. Интуиционистская логика лежит в основе построения многих математических теорий, базирующихся на различных концепциях конструктивности в математике, и позволяет тонко и точно анализировать трудный и важный вопрос о характере существования объектов исследования в математике. Накопленный здесь опыт свидетельствует о поразительном разнообразии возможных оттенков и вариантов различения эффективности в математике. Представление о практических попытках построения математических теорий на базе интуиционистской логики при том или ином понимании конструктивности можно получить из сводных монографий, например, Гейтинга [3], Гудстейна [1], Бишопа [1], Мартин-Лёфа [3], Кушнера [1]. В последней монографии систематически отражены результаты исследований советской школы конструктивной математики, работающей под руководством чл.-корр. АН СССР А. А. Маркова.

Цель этой небольшой книги — изложить важнейшие из методов теории доказательств в интуиционистской логике. Эта теория сейчас не менее богата методами и результатами, чем, например, пользующаяся заслуженной известностью классическая теория моделей. Автор стремился познакомить читателя с основными аксиоматическими теориями, основанными на интуиционистской логике, и их особенностями, часто весьма непривычными даже для специалиста-логика, но привыкшего иметь дело с классической логикой. Можно надеяться, что и специалист по неклассическим логикам обнаружит в книге некоторые новые результаты и методы.

Автор прилагал усилия, чтобы сделать изложение доступным для возможно более широкого круга читателей. От читателя требуется определенная математическая культура и готовность терпеливо восполнять недостающие рутинные шаги в многочисленных индуктивных доказательствах. Что касается логики, то достаточно владеть вводным в классическую математическую логику курсом. Учебник Мендельсона [1], например, содержит все необходимые сведения. Знакомство с литературой по интуиционистской логике, в особенности с книгой Гейтинга [3] и Клини и Весли [1], является желательным, но не необходимым. Возможно, при первом чтении книги читатель пожелает получить представление о различных интуиционистских теориях и способах их исследования и при этом избежать длинных и утомительных доказательств. В такой ситуации можно ограничиться чтением объяснительного текста, определений и формулировок теорем, а часть пятую и оба дополнения можно опустить. Однако для более полного овладения предметом следует, конечно, тщательно проработать доказательства. Книга не содержит специальных упражнений, но построена так, что проведение всех рутинных деталей составляет определенную самостоятельную работу, являющуюся органической частью тщательного изучения книги. Автор надеется, что овладение материалом книги подведет читателя к самостоятельным исследованиям в рассматриваемой области и позволит ему ориентироваться в журнальной литературе по специальности.

При написании книги некоторая проблема состояла в выборе стиля изложения: если излагаются и изучаются различные теории конструктивности в математике, то должен ли сам автор придерживаться в этом изложении некоторой конструктивной точки зрения? Был выбран компромиссный путь. Изложение принципиально не связано с какими-либо ограничениями и временами является обычным теоретико-множественным рассуждением, таким же, какие употребляются при изложении «обыкновенных» содержательных математических теорий вроде топологии или теории меры. Вместе с тем автор старался, по возможности, избегать неконструктивных способов рассуждения и в особенно ответственных случаях (см., например, ч. 5) эта тема специально обсуждается и прилагаются особые усилия. Тем не менее никак нельзя сказать, что все изложение в книге выдержано в некоторых идейно последовательных интуиционистских рамках — возможно, потому, что автор знаком со многими интересными интуиционистскими концепциями и искренне не знает, какой из них отдать предпочтение. Мы предпочтем изучать сами эти концепции аксиоматическим методом. Во всяком случае, читатель, если того пожелает, всегда может считать, что книга представляет собой «взгляд на конструктивную математику с точки зрения классической», хотя такое мнение и не отразит полностью стремления автора не избегать теоретико-множественного изложения, но и не искать его там, где без него можно легко обойтись.

В книге частично представлено содержание нескольких курсов по интуиционистской математике, которые автор читал в течение ряда лет на механико-математическом факультете МГУ. Книга содержит пять частей и два дополнения. В первой части излагаются чисто синтаксические методы исследования интуиционистской логики предикатов, основанные на теореме Генцена об устранении сечения. В частности, доказана теорема Харропа о свойствах дизъюнктивности и экзистенциальности логики предикатов. Более сильный алгоритмический вариант теоремы Генцена с гораздо более сложным доказательством вынесен в дополнение Б. Во второй части, посвященной интуиционистской арифметике, основным инструментом исследования является принадлежащий Клини метод реализуемости. Здесь автор стремился подчеркнуть возможность принципиально различных алгоритмических истолкований логических связок. В третьей части рассматривается теория алгебраических моделей интуиционистской логики и, в частности, доказываются теоремы о полноте для различных вариантов таких моделей. Вновь на примере интуиционистской арифметики показывается полезность введенных понятий для исследования конкретных теорий. В четвертой части, относящейся к интуиционистскому анализу, основное внимание уделено обсуждению принципов интуиционистского анализа и обзору современных результатов в этой области. Превосходное изложение двух моделей типа реализуемости для анализа можно найти в монографии Клини и Весли [1]. Мы приводим две алгебраические модели для различных вариантов интуиционистского анализа. Наконец, в пятой части алгебраические модели используются для решения важной задачи синтаксического характера: теоремы об устранении сечения в интуиционистской логике высокого порядка. Показано, что решение этой задачи принципиально не может быть достигнуто элементарными синтаксическими методами. В дополнении А описывается класс структур, позволяющий с единых алгебраических позиций рассмотреть как алгебраические модели, так и модели типа реализуемости.

Знак $\rhd$ в тексте отмечает начало доказательства, а знак $\square$ — его окончание. Знаки $\leftrightharpoons$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ заменяют словесные обороты: «есть по определению», «если. . . , то. . .», «тогда и только тогда» соответственно.

Автор благодарит своего учителя А. А. Маркова за внимание к своей работе, а слушателей своих спецкурсов за их постоянный энтузиазм и ценные замечания. При подготовке рукописи к печати мне помогали И. А. Ломакина, Ю. В. Гавриленко, Е. С. Божич, которым автор выражает свою искреннюю признательность.

А. Г. Драгалин

ЧАСТЬ 1

ЛОГИКА

Мы начинаем с неформального обсуждения интуиционистской логики и семантики. Далее приводятся две формы интуиционистского исчисления предикатов. Наконец, формулируется исчисление предикатов в форме исчисления секвенций Генцена и затем, доказав допустимость в этой системе правила сечения, мы устанавливаем его эквивалентность с первоначальными исчислениями. Это позволяет получить первые точные результаты относительно интуиционистской логики: невыводимость закона исключенного третьего, свойства дизъюнктивности и экзистенциальности.

1. **Неформальные пояснения.** Допустим, что мы интересуемся смыслом утверждений некоторой области математики. Общий подход математической логики состоит в том, что следует, прежде всего, фиксировать некоторый *логико-математический язык* Ω, формулы которого и будут выражать суждения и отношения рассматриваемой области математики. Сейчас для нас не важны детали строения Ω. Предположим, что Ω содержит некоторый класс *атомарных формул*, из которых обычным образом строятся сложные *формулы* с помощью логических связок $\wedge$ (конъюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, «или»), $\supset$ (импликация, «если, то»), константы $\perp$ («ложь») и кванторов $\forall$ (общность, «для всех»), $\exists$ (существование, «существует»). Отрицание $\neg\varphi$ определяется стандартным образом через импликацию и «ложь», а именно, $\neg\varphi$ есть по определению $(\varphi \supset \perp)$. Язык может содержать несколько сортов *переменных*, каждый сорт переменных рассматривается как пробегающий некоторую область объектов данного сорта. Вхождения переменных в формулу обычным образом делятся на *свободные* и *связанные*; переменные, входящие в формулу свободно, называются ее *параметрами*. Формула рассматривается как выражающая некоторое параметрическое суждение, т. е. утверждение в рассматриваемой области математики, зависящее от значений

параметров. Если приписать параметрам формулы объекты из соответствующих областей, то формула будет задавать некоторое конкретное математическое высказывание. Как говорят, формула определяет *высказывательную форму*. В частности, если формула является *предложением*, т. е. вовсе не содержит параметров, то она выражает конкретное высказывание. Формулу, всем параметрам которой приписаны объекты соответствующих областей, назовем *оцененной формулой*. Можно, естественно, рассматривать и частично оцененные формулы, в которой лишь части параметров составлены объекты. Частично оцененная формула определяет высказывательную форму, зависящую от оставшихся параметров.

Обычно трудной проблемой является способ описания того, «что выражают формулы данного языка», т. е. каким именно образом следует сопоставить формуле высказывательную форму. Трудность состоит в том, что объекты исследования математической теории часто составляют бесконечную совокупность, неясен статус существования этих объектов и т. п. Для обычных математических теорий таких, как арифметика, анализ, теория множеств, как известно, невозможно задать эффективную процедуру, позволяющую по предложению языка выяснить, задает ли это предложение истинное или ложное высказывание. Приходится ограничиваться формулировкой некоторых общих принципов, *семантических соглашений*, которым должно удовлетворять наше понимание формул языка. Совокупность семантических соглашений составляет то, что называется *семантикой* языка. Семантика развитых математических теорий таких, как анализ или теория множеств, по необходимости является недостаточно ясной и носит отчасти философский характер. Однако, исходя из семантических соглашений, можно уже точно формулировать некоторые формальные аксиоматические теории. Если признать, что аксиомы и правила вывода аксиоматической теории T согласованы со всеми семантическими требованиями семантики языка Ω, то можно признать, что формулы, выводимые в T, отражают по крайней мере некоторый фрагмент содержательной математической теории. Теорию T можно затем подвергнуть точному математическому исследованию и, таким образом, судить об особенностях

семантики самого языка Ω. Такой метод формализации широко распространен в математической логике, и мы будем систематически его использовать при исследовании классической и интуиционистской семантик.

Опишем теперь неформально некоторые семантические соглашения, характерные именно для интуиционистского понимания суждений. С интуиционистской точки зрения каждая формула представляет собой неполное сообщение о некотором выполненном построении. Например, формула вида $\exists x\varphi(x)$ сообщает, что

(i) можно указать объект a того сорта, который пробегает переменная x;

(ii) доказать, что верно $\varphi(a)$, т. е. выполнить построение, связанное с оцененной формулой $\varphi(a)$.

Формула вида $\exists x\varphi(x)$ считается истинной, только если предъявлено построение, удовлетворяющее условиям (i) и (ii).

Более подробно, с каждой истинной оцененной формулой φ мы связываем некоторую конструкцию k, являющуюся «полным подтверждением φ». При этом k должно удовлетворять некоторым естественным условиям в зависимости от строения φ.

1) Если φ — конъюнкция, $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, то k подтверждает φ тогда и только тогда, когда из k можно извлечь конструкции k_1 и k_2, подтверждающие φ_1 и φ_2 соответственно. В некотором смысле k задает упорядоченный набор, состоящий из k_1 и k_2.

2) k подтверждает $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ в точности тогда, когда из k можно извлечь информацию о том, какой именно из членов φ_i дизъюнкции истинен, и конструкцию k_i, подтверждающую этот член φ_i. Таким образом, конструкция k должна определять упорядоченный набор (i, k_i), где $i = 1$ или $i = 2$.

3) k подтверждает импликацию $(\varphi_1 \supset \varphi_2)$ в точности тогда, когда k задает общий способ, позволяющий по всякой конструкции l_1, подтверждающей φ_1, отыскивать конструкцию l_2, подтверждающую φ_2.

4) Константа $\perp$ не имеет никакой конструкции, ее подтверждающей. Роль этой константы проявляется в том, что она связана определенными семантическими соглашениями с конструкциями, подтверждающими другие логические связки. Например, всегда имеется некоторая три-

виальная конструкция, подтверждающая импликацию вида $(\perp \supset \varphi)$.

5) k подтверждает $\exists x \varphi_1(x)$ в точности тогда, когда k определяет, для какого именно объекта a имеет место $\varphi_1(a)$, и задает конструкцию k_1, подтверждающую $\varphi_1(a)$. Таким образом, конструкция k должна естественно определять упорядоченный набор (a, k_1).

6) k подтверждает $\forall x \varphi_1(x)$, если k задает общий способ, позволяющий для всякого объекта a отыскивать подтверждение k_a суждения $\varphi_1(a)$.

Разумеется, приведенные нами пояснения 1) — 6) отнюдь не составляют строгого математического определения отношения «k подтверждает φ». Во-первых, недостаточно уточнено само понятие конструкции, во-вторых, явно нуждаются в уточнении слова, намекающие на эффективность построений типа «можно извлечь информацию», «задаем общий способ» и т. п. Наконец — и это составляет, по-видимому, главную сложность — пояснения 1) — 6) содержат круг. Так, поясняя истинность формулы $\forall x \varphi_1(x)$, мы неформально использовали утверждение типа общности. То же относится к импликации и другим логическим связкам.

Можно заподозрить, что различные исследователи будут по-разному уточнять семантические требования 1) — 6) и, таким образом, получать различные семантики одного и того же языка. Как мы увидим далее, дело именно так и обстоит. Возможен весьма богатый спектр различных форм интуиционистских и конструктивных семантик.

В качестве самого крайнего случая рассмотрим попытку толкования 1) — 6) с точки зрения исследователя, придерживающегося традиционного теоретико-множественного взгляда на основания математики. Такой математик сразу же заметит, что нетрудно сопоставить каждой оцененной формуле φ некоторое истинностное значение $z(\varphi)$ строгой математической индукцией по построению формулы φ. Значением $z(\varphi)$ будет либо 0 — «ложь», либо 1 — «истина», и «вычисление» $z(\varphi)$ идет в соответствии с обычным классическим пониманием связок:

$$z(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \min(z(\varphi_1),\ z(\varphi_2));\ z(\perp) = 0;$$
$$z(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \max(z(\varphi_1),\ z(\varphi_2));$$
$$z(\forall x \varphi(x)) = \min\{z(\varphi(a)) \mid a \in U\} \text{ и т. д.}$$

Теперь объявим единицу 1 конструкцией, подтверждающей φ тогда и только тогда, когда $z(\varphi) = 1$. Можно убедиться, что требования 1) — 6) выполняются, если слова, намекающие на эффективность построений, толковать просто как утверждения о существовании с наивной теоретико-множественной точки зрения. Например, если $z(\varphi_1 \supset \varphi_2) = 1$, то по всякой конструкции, подтверждающей φ_1 (а это может быть только 1), можно указать конструкцию, подтверждающую φ_2 (а именно, следует взять единицу). Мы видим, что классическая семантика, оказывается, удовлетворяет интуиционистским семантическим требованиям!

Причина недоразумения состоит в том, что обычно интуиционист вовсе не склонен толковать эффективность теоретико-множественно. В этом смысле приведенное выше толкование является вырожденным, «нестандартным». Если утверждается существование конструкции, то предполагается, что онтологически имеется потенциально осуществимый процесс построения этой конструкции. Таким образом, в рамках математической теории должны приниматься во внимание возможности субъектов-исследователей. Эту философскую идею можно уточнять многими неэквивалентными способами с помощью дальнейших семантических соглашений. Например, с конструктивной точки зрения, если установлена истинность арифметического суждения вида $\forall x \exists y \varphi(x, y)$, где переменные x и y пробегают натуральные числа, то необходимо должна существовать общерекурсивная функция, выдающая по каждому x соответствующее y. Конструктивно мы трактуем слова «имеется общий способ» как «имеется вычислимая, в частности, общерекурсивная функция». Такое толкование приводит к семантике, существенно отличной от классической, так как нетрудно привести пример истинного классически арифметического предложения вида $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ такого, что нужной общерекурсивной функции не существует.

Попробуем, не уточняя пока наших семантических требований, пояснить ситуацию на следующем простом примере (ван Дален [2]).

Теорема. *Существуют два иррациональных действительных числа a и b такие, что a^b рационально.*

Доказательство первое. Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Если это число рационально, то теорема доказана: достаточно положить $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Если же $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ иррационально, то нужные a и b вновь можно найти. А именно, достаточно взять $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $b = \sqrt{2}$. Тогда $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$. Таким образом, при любых обстоятельствах нужные a и b существуют. Теорема доказана.

Доказательство второе. В силу одного очень глубокого результата А. О. Гельфонда из иррациональности $\sqrt{2}$ следует трансцендентность и, следовательно, иррациональность $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Таким образом, можно взять $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Теорема доказана.

Первое доказательство весьма кратко, но обладает неприятной особенностью: проделав его, мы так и не выясним, чему же, собственно, равны a и b. Были предложены альтернативы для их выбора, но из доказательства никоим образом нельзя извлечь, какую именно альтернативу следует выбрать. Это типичный образец доказательства «чистого» существования, характерного для классической математики. Причина неэффективности состоит в том, что в доказательстве использован разбор случаев:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ иррационально или } \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ рационально,}$$

и, хотя и не видно, какой именно из случаев имеет место, классически несомненно, что дизъюнкция все же верна — она имеет вид закона исключенного третьего $A \vee \neg A$. Второе доказательство несравненно сложнее, оно использует некоторые глубокие факты, но зато позволяет указать истинный член этой дизъюнкции и тем самым исключить неэффективный разбор случаев.

Мы ожидаем, что «настоящее» интуиционистское понимание логических связок таково, что из доказательства истинности суждения всегда можно извлечь способ построения объектов, существование которых утверждается. Так, если в конкретной ситуации мы признали истинность дизъюнкции $(\varphi \vee \psi)$, то конструкция, подтверждающая это суждение, должна давать способ указания истинного члена этой дизъюнкции. С этой точки зрения дизъюнкцию вида $(\varphi \vee \neg\varphi)$ можно признать подтвержденной не для любого предложения φ, а лишь для такого, для которого известно, что именно имеет место φ или не-φ. В то же время нетрудно обосновать истинность суждения $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Действительно, гипотеза $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ немедленно ведет к противоречию. В самом деле, если допустить еще φ, то было бы $(\varphi \vee \neg\varphi)$, вопреки гипотезе. Следовательно, имеет место $\neg\varphi$. Но если $\neg\varphi$, то вновь имеем $(\varphi \vee \neg\varphi)$, вопреки гипотезе. Следовательно, $\neg\neg\varphi$, т. е. $\neg\varphi \supset \perp$. Из $\neg\varphi$ и $\neg\varphi \supset \perp$ заключаем, что $\perp$. Таким образом, допустив $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$, выводим $\perp$, т. е. $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \supset \perp$, т. е. $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Итак, $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ всегда истинно, а $(\varphi \vee \neg\varphi)$ может быть и не истинно (по крайней мере для некоторых интуиционистских семантик). Это свидетельствует о том, что закон снятия двойного отрицания $\neg\neg\varphi \supset \varphi$ также не всегда приемлем с интуиционистской точки зрения. Для доказательства $\neg\neg\psi$ достаточно уметь привести к противоречию гипотезу $\neg\psi$, в то время как для доказательства ψ может оказаться необходимым отыскать способы построения некоторых сложных объектов. С интуиционистской точки зрения это далеко не одно и то же.

Если язык Ω снабжен некоторой интуиционистской семантикой, интуиционистским способом понимания, то про некоторые предложения этого языка мы можем утверждать, что они истинны, про некоторые можем утверждать, что они ложны, т. е. истинно их отрицание, а некоторые являются неустановленными к настоящему времени. Это не означает, что наша логика становится трехзначной со значениями «истина», «ложь» и «не установлено» (позже — см. с. 97, п. 3.1 — мы точно установим, что она не трехзначна и даже не конечнозначна), так как три значения здесь неравноправны: объем истинных и ложных суждений со временем увеличивается, в то время как объем неустановленных суждений убывает.

Например, если φ — простое арифметическое предложение, выражающее нерешенную математическую проблему (большая теорема Ферма!), то φ не установлено и интуиционистски естественно считать, что $(\varphi \vee \neg\varphi)$ также не установлено (хотя классически это очень даже установленное истинное суждение!) на том основании, что не имеется эффективного способа установления истинного члена этой дизъюнкции. Конечно, такой способ может быть открыт завтра и $(\varphi \vee \neg\varphi)$ перекочует в разряд истинных суждений.

Может показаться, что такой подход делает нашу математику крайне сложной и субъективной: мы ставим в зависимость математическую теорию от возможностей субъекта-исследователя, которые к тому же зависят от времени. То, что сегодня не истинно, не обязательно является ложным — оно может быть неустановленным и может стать истинным завтра. Ситуация действительно много сложнее, чем в классической математике, но возможности построения приемлемых интуиционистских математических теорий все же имеются. Прежде всего, мы относим собственно к интуиционистской математике только истинные суждения языка Ω. Далее, мы отказываемся от обозрения всего множества истинных суждений ввиду обычно крайней неопределенности этого множества. Все, на что мы рассчитываем,— это формулировать некоторые общие принципы, согласованные с семантическими требованиями, и получить из них математические следствия.

Когда мы говорим, что суждение $(\varphi \vee \neg\varphi)$ не установлено, это — не математическое утверждение и ценность его для математической теории состоит лишь в том, что такие примеры показывают, что неразумно включать закон $(\varphi \vee \neg\varphi)$ для всех φ в качестве общего логического принципа в нашу теорию, так как мы не желаем включать в теорию неустановленные факты.

Кроме того, в интуиционистской математике, так же как и в классической, используются некоторые существенные идеализации. Мы принимаем *принцип сохранности*, состоящий в том, что если истинность некоторого суждения обнаружена, то оно остается истинным и в будущем. Принимается и *принцип потенциальной осуществимости*, состоящий в том, что исследователь отвлекается от ограниченности своих ресурсов в пространстве и во времени. Считается, например, что для всякого натурального числа n осуществимо большее натуральное число $n+1$. В то же время использование теоретико-множественной абстракции актуальной бесконечности ограничивается в интуиционистской математике требованиями эффективности.

Следует сразу отметить, что возможны различные интуиционистские семантики одного и того же языка Ω и, следовательно, различные математические теории одной и той же области математики. Такая сложная ситуация является ценой, которую мы платим за более тонкий (по сравнению с классической математикой) анализ эффективности в математике.

2. Интуиционистская логика предикатов. Мы начнем с формулировки общих логических принципов, приемлемых с интуиционистской точки зрения.

Рассмотрим сначала классическое исчисление предикатов для формул в языке Ω. Исчисление CPC содержит следующие хорошо известные аксиомы и правила вывода:

1) $\varphi \supset (\psi \supset \varphi)$;
2) $(\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \eta))$;
3) $\varphi \supset (\psi \supset \varphi \wedge \psi)$; 4) $\varphi \wedge \psi \supset \varphi$; 5) $\varphi \wedge \psi \supset \psi$;
6) $(\varphi \supset \eta) \supset ((\psi \supset \eta) \supset (\varphi \vee \psi \supset \eta))$;
7) $\varphi \supset \varphi \vee \psi$; 8) $\psi \supset \varphi \vee \psi$; 9) $\perp \supset \varphi$;
10) $\neg\neg\varphi \supset \varphi$; 11) $\forall x\varphi \supset \varphi(x \mid t)$;
12) $\forall x(\varphi \supset \psi(x)) \supset (\varphi \supset \forall x\psi(x))$;
13) $\varphi(x \mid t) \supset \exists x\varphi$;
14) $\forall x(\psi(x) \supset \varphi) \supset (\exists x\psi(x) \supset \varphi)$;
15) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \supset \psi}{\psi}$; 16) $\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}$.

Здесь в схемах аксиом и правилах вывода фигурируют формулы языка Ω. Мы пользуемся обычными правилами сокращенного написания формул: не пишем внешние скобки, конъюнкция и дизъюнкция считаются связывающими сильнее, чем импликация. Через $\varphi(x \mid t)$ обозначается результат подстановки терма t вместо всех с в о б о д н ы х вхождений переменной x в формулу φ. При этом предполагается, что производится переименование связанных переменных формулы φ, если параметры t попадают в область действия кванторов φ. Вообще, на протяженности всей книги мы будем систематически отождествлять формулы, отличающиеся лишь переименованием связанных переменных, и, в частности, в выводах свободно заменяем такие формулы друг на друга. Так как язык Ω может содержать несколько сортов переменных, следует отметить, что переменная x и терм t в схемах 11) и 13) имеют один и тот же сорт. В схемах 12) и 14), как обычно, формула φ не содержит свободно переменной x. Напомним, что $\neg\varphi$ есть сокращение для $(\varphi\supset\bot)$. Далее, схема аксиом 9) является лишней — она выводится с помощью 10) и остальных аксиом.

Анализ логических принципов СРС с точки зрения предыдущего обсуждения показывает, что среди них лишь один вызывает сомнения. А именно, это схема аксиом 10) — закон снятия двойного отрицания. Рассмотрим поэтому исчисление НРС (*исчисление предикатов Гейтинга*, интуиционистское исчисление предикатов), получающееся из СРС выбрасыванием схемы 10). Схема 9) при этом остается и уже является существенно необходимой.

Набором формул назовем конечное множество формул языка Ω, в котором, однако, допускаются повторения формул. Таким образом, порядок формул в наборе Γ несуществен, но для каждой формулы указано, в скольких экземплярах она присутствует в Γ. В соответствии с этим следует понимать отношения и операции с наборами. Так, отношение $\Gamma\subseteq\Delta$, где Γ и Δ — наборы, означает, что всякая формула φ, входящая в Γ, входит и в Δ, причем Δ содержит не меньшее количество экземпляров формулы φ, чем Γ. При объединении $\Gamma\cup\Delta$ наборов количество экземпляров каждой формулы суммируется. Объединение $\Gamma\cup\Delta$ мы будем кратко записывать в виде $\Gamma\Delta$. Таким образом, $\Gamma\Delta$ и $\Delta\Gamma$ есть один и тот же набор. Набор $\varphi\Gamma$ получается из Γ присоединением одного экземпляра формулы φ.

Будем употреблять обозначение РС в качестве общего названия одного из исчислений СРС или НРС. Если Γ — набор формул и φ — формула, то запись $\Gamma\vdash\varphi$ (читается «из Γ выводима φ») или, более подробно, $\mathrm{PC},\Gamma\vdash\varphi$, означает, что φ можно вывести из списка формул Γ с помощью схем аксиом и правил вывода исчисления РС, причем не применяя правило обобщения 16) по отношению к параметрам Γ.

2.1. Теорема о дедукции. *Для данного исчисления* РС *в языке* Ω *имеем*

$$\Gamma\varphi\vdash\psi\Leftrightarrow\Gamma\vdash(\varphi\supset\psi).$$

Доказательство этой теоремы, пригодное как для СРС, так и для НРС, можно найти в любом учебнике математической логики, см., например, Мендельсон [1], Клини [2].

Приведем теперь еще одну эквивалентную формулировку СРС и НРС, часто более удобную в доказательствах. Мы будем ссылаться на эту формулировку как на CPC_1 и HPC_1. Начнем с CPC_1. Это исчисление содержит следующие схемы аксиом и правила вывода:

$$1)\ \frac{\varphi,\ \varphi\supset\psi}{\psi};\quad 2)\ \frac{\varphi\supset\psi;\ \psi\supset\eta}{\varphi\supset\eta};\quad 3)\ \frac{\varphi\wedge\psi\supset\eta}{\varphi\supset(\psi\supset\eta)};$$

$$4)\ \frac{\varphi\supset(\psi\supset\eta)}{\varphi\wedge\psi\supset\eta};\quad 5)\ \varphi\wedge\psi\supset\varphi;\quad 6)\ \varphi\wedge\psi\supset\psi\wedge\varphi;$$

$$7)\ \varphi\supset\varphi\wedge\varphi;\quad 8)\ \frac{\varphi\supset\eta;\ \psi\supset\eta}{\varphi\vee\psi\supset\eta};$$

$$9)\ \varphi\supset\varphi\vee\psi;\quad 10)\ \varphi\vee\psi\supset\psi\vee\varphi;$$

$$11)\ \bot\supset\varphi;\quad 12)\ \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi};\quad 13)\ \forall x\varphi\supset\varphi(x\,|\,t);$$

$$14)\ \frac{\varphi\supset\psi(x)}{\varphi\supset\forall x\psi(x)};\quad 15)\ \frac{\psi(x)\supset\varphi}{\exists x\psi(x)\supset\varphi};$$

$$16)\ \varphi(x\,|\,t)\supset\exists x\varphi.$$

Здесь в схемах 14) и 15), как обычно, φ не содержит свободно переменную x.

Интуиционистское исчисление HPC_1 получается из CPC_1 путем удаления правила вывода 12).

2.2. *Формулировки* СРС *и* CPC_1, *равно как и формулировки* НРС *и* HPC_1, *эквивалентны в том смысле, что всякая формула выводима в* РС *тогда и только тогда, когда она выводима в* PC_1.

Рутинное доказательство этой теоремы состоит в непосредственной проверке того, что аксиомы и правила вывода одной системы допустимы в другой системе. Мы оставляем эту проверку читателю в качестве упражнения. Для облегчения выполнения этого упражнения приведем все же несколько результатов о выводимости в PC_1.

2.2.1. $\vdash\varphi\supset\varphi$.

$\rhd$ $\varphi\supset\varphi\wedge\varphi$ — аксиома 7), $\varphi\wedge\varphi\supset\varphi$ — аксиома 5), $\varphi\supset\varphi$ — с помощью 2). $\square$

2.2.2. $\vdash\varphi\supset(\psi\supset\varphi)$.

$\rhd$ $\varphi\wedge\psi\supset\varphi$ — аксиома 5), $\varphi\supset(\psi\supset\varphi)$ — ввиду 3). $\square$

2.2.3. $\dfrac{\varphi}{\psi\supset\varphi}$.

$\rhd$ $\varphi\supset(\psi\supset\varphi)$ — ввиду 2.2.2, применяем 1). $\square$

2.2.4. $\varphi \supset (\psi \supset \eta)/\psi \supset (\varphi \supset \eta)$.

$\triangleright$ $\varphi \supset (\psi \supset \eta)$ — дано, $\varphi \wedge \psi \supset \eta$ — ввиду 4), $\psi \wedge \varphi \supset \varphi \wedge \psi$ — аксиома 6), $\psi \wedge \varphi \supset \eta$ — ввиду 2), $\psi \supset (\varphi \supset \eta)$ — ввиду 3). $\square$

2.2.5. $\vdash \varphi \supset (\psi \supset \varphi \wedge \psi)$.

$\triangleright$ $\varphi \wedge \psi \supset \varphi \wedge \psi$ — ввиду 2.2.1, $\varphi \supset (\psi \supset \varphi \wedge \psi)$ — с помощью 3). $\square$

2.2.6. $\vdash \varphi \wedge \psi \supset \psi$.

$\triangleright$ $\psi \wedge \varphi \supset \psi$ — аксиома 5), $\varphi \wedge \psi \supset \psi \wedge \varphi$ — аксиома 6), $\varphi \wedge \psi \supset \psi$ — ввиду 2). $\square$

2.2.7. $(\varphi \supset \psi)$, $(\varphi \supset \eta)/\varphi \supset \psi \wedge \eta$.

$\triangleright$ $\psi \supset (\eta \supset \psi \wedge \eta)$ — ввиду 2.2.5, $\varphi \supset \psi$ — дано, $\varphi \supset (\eta \supset \psi \wedge \eta)$ — ввиду 2), $\eta \supset (\varphi \supset \psi \wedge \eta)$ — ввиду 2.2.4, $\varphi \supset \eta$ — дано, $\varphi \supset (\varphi \supset \psi \wedge \eta)$ — ввиду 2), $\varphi \wedge \varphi \supset \psi \wedge \eta$ — ввиду 4), $\varphi \supset \varphi \wedge \varphi$ — аксиома 7), $\varphi \supset \psi \wedge \eta$ — согласно 2). $\square$

2.2.8. $(\varphi \supset \psi)$, $(\varphi \supset (\psi \supset \eta))/\varphi \supset \eta$.

$\triangleright$ $\varphi \supset (\psi \supset \eta)$ — дано, $\psi \supset (\varphi \supset \eta)$ — ввиду 2.2.4, $\varphi \supset \psi$ — дано, $\varphi \supset (\varphi \supset \eta)$ — ввиду 2), $\varphi \wedge \varphi \supset \eta$ — ввиду 4), $\varphi \supset \varphi \wedge \varphi$ — аксиома 7), $\varphi \supset \eta$ — согласно 2). $\square$

2.2.9. $\vdash (\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \eta))$.

$\triangleright$ Положим $S = ((\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \wedge (\varphi \supset \psi)) \wedge \varphi$. $S \supset \varphi$ — ввиду 2.2.6, $S \supset (\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \wedge (\varphi \supset \psi)$ — аксиома 5), $(\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \wedge (\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset (\psi \supset \eta))$ — аксиома 5), $S \supset (\varphi \supset (\psi \supset \eta))$ — из предыдущего с помощью 2), $S \supset (\psi \supset \eta)$ — из предыдущего с помощью 2.2.8, $S \supset (\varphi \supset \psi)$ — так как $S \supset (\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \wedge (\varphi \supset \psi)$ и $(\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \wedge (\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \psi)$, $S \supset \psi$ — из $S \supset \varphi$ и $S \supset (\varphi \supset \psi)$ с помощью 2.2.8, $S \supset \eta$ — из $S \supset \psi$ и $S \supset (\psi \supset \eta)$ с помощью 2.2.8. Теперь, применяя к $S \supset \eta$ правило 3) несколько раз, получим результат. $\square$

2.2.10. $\vdash \varphi \supset (\neg \varphi \supset \psi)$.

$\triangleright$ $\neg \varphi \supset (\varphi \supset \bot)$ — ввиду 2.2.1, $\varphi \supset (\neg \varphi \supset \bot)$ — ввиду 2.2.4, $\varphi \wedge \neg \varphi \supset \bot$ — с помощью 4), $\bot \supset \psi$ — аксиома 11), $\varphi \wedge \neg \varphi \supset \psi$ — с помощью 2), $\varphi \supset (\neg \varphi \supset \psi)$ — ввиду 3). $\square$

2.2.11. $\vdash \neg \neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi)$.

$\triangleright$ $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \varphi \supset \varphi$ — см. 2.2.6, $\varphi \supset (\neg \neg \varphi \supset \varphi)$ — см. 2.2.2, $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \varphi \supset (\neg \neg \varphi \supset \varphi)$ — с помощью 2), $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \varphi \supset ((\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset \bot)$ — это аксиома 5), $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \varphi \supset \bot$ — из предыдущего с помощью 2.2.8, $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset \neg \varphi$ — применяя 3), $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \neg \varphi \supset \neg \varphi$ — см. 2.2.6, $\neg \varphi \supset (\neg \neg \varphi \supset \varphi)$ — ввиду 2.2.10, $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \neg \varphi \supset (\neg \neg \varphi \supset \varphi)$ — с помощью 2), $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \neg \varphi \supset ((\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset \bot)$ — это аксиома 5), $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \wedge \neg \varphi \supset \bot$ — из предыдущего с помощью 2.2.8, $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset (\neg \varphi \supset \bot)$ — применяя 3), $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset \bot$ — из выведенных $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset \neg \varphi$ и $\neg (\neg \neg \varphi \supset \varphi) \supset (\neg \varphi \supset \bot)$ с помощью 2.2.8. $\square$

3. Исчисление секвенций. Приведем еще формулировку исчисления предикатов в форме исчисления секвенций. *Секвенцией* назовем фигуру вида $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ — наборы формул. Каждой секвенции стандартным образом сопоставим формулу — *формульный образ* данной секвенции. А именно, если дана секвенция S вида $\varphi_1 \ldots \varphi_n \to \psi_1 \ldots \psi_m$, то ей сопоставляется формула S^Φ, имеющая вид

$$\top \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \supset \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m \vee \bot.$$

Здесь $\top = (\bot \supset \bot)$ — «стандартная истина». Порядок формул слева и справа несуществен. В частности, если правая часть секвенции пуста ($m = 0$), то S^Φ эквивалентна в логике предикатов формуле $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$. Пустая секвенция $\to$ имеет в качестве формульного образа формулу $\top \supset \bot$, эквивалентную $\bot$.

Исчисление GHPC (интуиционистское исчисление предикатов в форме исчисления секвенций, исчисление предикатов в стиле Генцена) приспособлено для вывода секвенций. Оно содержит аксиомы следующих двух видов: $\varphi\Gamma \to \Delta\varphi$, где φ — атомарная формула языка Ω, и $\bot\,\Gamma \to \Delta$. Заметим, что $\bot$ не считается атомарной формулой (это — логическая константа). Правила вывода исчисления построены весьма симметрично и вводят логические связки слева и справа:

$$(\supset\to)\quad \frac{(\varphi \supset \psi)\,\Gamma \to \varphi;\ \psi\Gamma \to \Delta}{(\varphi \supset \psi)\ \Gamma \to \Delta};\qquad (\to\supset)\quad \frac{\varphi\Gamma \to \psi}{\Gamma \to \Delta\,(\varphi \supset \psi)};$$

$$(\wedge\to)\quad \frac{\varphi\psi\Gamma \to \Delta}{(\varphi \wedge \psi)\,\Gamma \to \Delta};\qquad (\to\wedge)\quad \frac{\Gamma \to \Delta\varphi;\ \Gamma \to \Delta\psi}{\Gamma \to \Delta\,(\varphi \wedge \psi)};$$

$$(\vee\to)\quad \frac{\varphi\Gamma \to \Delta;\ \psi\Gamma \to \Delta}{(\varphi \vee \psi)\,\Gamma \to \Delta};\qquad (\to\vee)\quad \frac{\Gamma \to \Delta\varphi\psi}{\Gamma \to \Delta\,(\varphi \vee \psi)};$$

$$(\forall\to)\ \frac{\forall x\psi(x)\,\psi(t)\,\Gamma\to\Delta}{\forall x\psi(x)\,\Gamma\to\Delta};\qquad(\to\forall)\ \frac{\Gamma\to\psi(y)}{\Gamma\to\Delta\forall x\psi(x)};$$

$$(\exists\to)\ \frac{\psi(y)\,\Gamma\to\Delta}{\exists x\psi(x)\,\Gamma\to\Delta};\qquad(\to\exists)\ \frac{\Gamma\to\Delta\exists x\psi(x)\,\psi(t)}{\Gamma\to\Delta\exists x\psi(x)}.$$

В правиле $(\to\forall)$ набор Γ не содержит свободно переменной y, в правиле $(\exists\to)$ наборы Γ и Δ не содержат свободно переменной y и ($y=x$ или x — не параметр $\psi(y)$). Обозначение $\psi(t)$ есть сокращение для $\psi(x\mid t)$. Обратите внимание, что в правилах $(\to\supset)$ и $(\to\forall)$ набор Δ стоит в заключении правила, но не в его посылке. Это характерная черта интуиционистской логики секвенций. В правиле $(\supset\to)$ главная формула заключения повторяется в левой посылке.

Запись $\vdash S$ означает, что секвенция S выводима (в данном случае в исчислении GHPC).

Вывод оформляется в виде дерева. *Высота* вывода есть количество секвенций в самой длинной ветви.

Следующая теорема утверждает эквивалентность GHPC и HPC.

3.1. *Если секвенция S выводима в* GHPC, *то ее формульный образ S^{Φ} выводим в* HPC. *Обратно, если S^{Φ} выводится в* HPC, *то S выводится в* GHPC.

Доказательство первой части этой теоремы проводится без труда индукцией по построению вывода S в GHPC. Необходимо проверить только, что формульные образы аксиом и правил вывода GHPC допустимы в HPC. Рутинная эта проверка предоставляется читателю. Доказательство второй части теоремы распадается в серию лемм, относящихся к выводимости в GHPC.

3.1.1. *Если выводима секвенция S, то выводима и секвенция $S(x\mid t)$, причем с помощью вывода той же самой высоты.*

$\triangleright$ Пусть дан вывод секвенции S, произведем в этом выводе замену свободных вхождений параметра x на терм t (переименовывая, разумеется, в случае необходимости связанные переменные и собственные переменные вывода S; *собственными* называются переменные, используемые явно в правилах $(\to\forall)$ и $(\exists\to)$ в качестве y). Индукцией по построению вывода убедимся, что в результате получится вывод секвенции $S(x\mid t)$.

3.1.2. *Если выводима секвенция* $\Gamma\to\Delta\perp$, *то выводима и секвенция* $\Gamma\to\Delta$, *причем с помощью вывода той же высоты.*

$\triangleright$ Двигаясь снизу вверх в данном выводе $\Gamma\to\Delta\perp$, будем вычеркивать все вхождения $\perp$ справа, происходящие в выводе из-за указанного вхождения $\perp$ в последнюю секвенцию. Индукцией по построению вывода убедимся, что в результате этой процедуры получится вывод секвенции $\Gamma\to\Delta$. $\square$

3.1.3. (Допустимость правила добавления.) *Из выводимости* $\Gamma\to\Delta$ *следует выводимость* $\Gamma\Pi\to\Delta\Phi$, *причем с помощью вывода той же высоты.*

$\triangleright$ Индукцией по построению вывода $\Gamma\to\Delta$. При рассмотрении случая, когда $\Gamma\to\Delta$ получено по правилам $(\to\forall)$ или $(\exists\to)$, используем 3.1.1. $\square$

3.1.4. (*Обратимость* некоторых правил вывода.) *Все правила вывода* GHPC, *кроме* $(\supset\to)$, $(\to\supset)$ *и* $(\to\forall)$, *обратимы, т. е. из выводимости заключения каждого из правил следует выводимость любой из посылок. Что касается правила* $(\supset\to)$, *то из выводимости заключения этого правила следует выводимость правой посылки* $\psi\Gamma\to\Delta$. *Более того, во всех случаях вывод посылки имеет высоту, не превосходящую высоты вывода заключения.*

$\triangleright$ Для правил $(\forall\to)$ и $(\to\exists)$ это следует из 3.1.3. Для каждого из остальных правил лемму следует доказывать отдельно индукцией по построению вывода заключения правила. $\square$

3.1.5. (Допустимость правила сокращения.) *Следующие правила допустимы в* GHPC:

$$\frac{\Gamma\to\Delta\varphi\varphi}{\Gamma\to\Delta\varphi};\qquad\frac{\varphi\varphi\Gamma\to\Delta}{\varphi\Gamma\to\Delta}.$$

Более того, заключение можно вывести с помощью вывода, высота которого не превосходит высоты вывода посылки.

$\triangleright$ Доказательство ведем индукцией по построению формулы φ, при фиксированной же формуле φ используем индукцию по высоте вывода посылки. Рассмотрим только случай, когда φ есть импликация: $\varphi=(\psi\supset\eta)$. Если $\Gamma\to\Delta\varphi\varphi$ есть аксиома, то $\Gamma\to\Delta\varphi$ — также аксиома и утверждение доказано. То же относится и к секвенции вида $\varphi\varphi\Gamma\to\Delta$. Далее, если $\Gamma\to\Delta\varphi\varphi$ (соответственно $\varphi\varphi\Gamma\to\Delta$) получена по правилу вывода, не относящемуся к явно выписанным φ, то следует, пользуясь предположением индукции, произвести сокращение φ в посылках и, применив то же правило, получить секвенцию $\Gamma \to \Delta\varphi$ (соответственно $\varphi\Gamma \to \Delta$). Пусть $\varphi\varphi\Gamma \to \Delta$ получена по правилу ($\supset \to$), относящемуся к рассматриваемым формулам. В посылках этого последнего правила стоят секвенции $(\psi \supset \eta)(\psi \supset \eta)\,\Gamma \to \psi$ и $(\psi \supset \eta)\,\eta\Gamma \to \Delta$. По индуктивному предположению из первой секвенции получим $(\psi \supset \eta)\,\Gamma \to \psi$. Из второй секвенции с помощью 3.1.4 получим $\eta\eta\Gamma \to \Delta$ и затем по индуктивному предположению $\eta\Gamma \to \Delta$. Отсюда по правилу ($\supset \to$) выведем $(\psi \supset \eta)\,\Gamma \to \Delta$.

Наконец, пусть $\Gamma \to \Delta\varphi\varphi$ получена по правилу ($\to \supset$), относящемуся к φ. Тогда посылка имеет вид $\psi\Gamma \to \eta$ и из нее непосредственно по ($\to \supset$) получим $\Gamma \to (\psi \supset \eta)$. $\square$

3.1.6. (Допустимость *правила сечения*, так называемая основная теорема Генцена.) *Следующее правило вывода, называемое сечением, допустимо в* GHPC:

$$\frac{\Gamma \to \Delta\varphi;\ \varphi\Pi \to \Phi}{\Gamma\Pi \to \Delta\Phi}.$$

$\triangleright$ Пусть даны выводы секвенций $\Gamma \to \Delta\varphi$ и $\varphi\Pi \to \Phi$ в GHPC. Припишем этой паре выводов тройку натуральных чисел (k, l, m), где k — *логическая сложность* формулы φ, т. е. количество знаков $\wedge \vee \supset \forall\exists$, участвующих в построении φ из атомарных формул, l — высота вывода $\Gamma \to \Delta\varphi$ и m — высота вывода $\varphi\Pi \to \Phi$. Доказательство выводимости заключения ведем индукцией по величине k, при фиксированном k — индукцией по величине l, а при фиксированных k и l — индукцией по величине m. Фактически для доказательства следует указать, каким образом следует заменить данное сечение фигурой вывода без сечений или по крайней мере фигурой вывода с сечениями меньшего веса (k, l, m).

Разберем случаи строения данной пары выводов.

1) Одна из посылок сечения есть аксиома. Тогда заключение нетрудно вывести в GHPC. Например, если φ — атомарная формула и $\Gamma = \varphi\Gamma'$, так что $\Gamma \to \Delta\varphi$ есть аксиома, то $\Gamma\Pi \to \Delta\Phi$ получается из данного $\varphi\Pi \to \Phi$ по правилу добавления 3.1.3.

2) Одна из посылок сечения получена по правилу, не относящемуся к выделенной формуле φ. Тогда следует применить сечение к посылкам этого правила (при этом уменьшается l или m), а затем применить то же самое правило.

3) Не имеют места случаи 1) и 2), и, следовательно, каждая из посылок получена по правилу вывода, вводящему формулу φ. Здесь следует действовать различным образом в зависимости от строения формулы φ. Мы разберем лишь три случая, оставляя остальные читателю.

$\varphi = (\psi \supset \eta)$. Данное сечение имеет вид

$$\frac{\dfrac{\psi\Gamma \to \eta}{\Gamma \to \Delta(\psi \supset \eta)} \qquad \dfrac{(\psi \supset \eta)\,\Pi \to \psi;\ \eta\Pi \to \Phi}{(\psi \supset \eta)\,\Pi \to \Phi}}{\Gamma\Pi \to \Delta\Phi};$$

мы преобразуем эту фигуру к виду

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta(\psi \supset \eta);\ (\psi \supset \eta)\,\Pi \to \psi}{\Gamma\Pi \to \Delta\psi;\ \psi\Gamma \to \eta}}{\Gamma\Gamma\Pi \to \Delta\eta;\ \eta\Pi \to \Phi}}{\cfrac{\Gamma\Gamma\Pi\Pi \to \Delta\Phi}{\overline{\Gamma\Pi \to \Delta\Phi}}}.$$

Здесь верхнее сечение имеет меньшую высоту правого вывода, а два нижних сечения применяются к формулам меньшей логической сложности, так что по индуктивному предположению эти сечения допустимы. Двойная черта означает здесь и далее серию применений правил сокращения и добавления. Эти правила допустимы согласно 3.1.3 и 3.1.5.

$\varphi = \forall x\psi(x)$. Данное сечение имеет вид

$$\frac{\dfrac{\Gamma \to \psi(y)}{\Gamma \to \Delta\forall x\psi(x)} \qquad \dfrac{\forall x\psi(x)\,\psi(t)\,\Pi \to \Phi}{\forall x\psi(x)\,\Pi \to \Phi}}{\Gamma\Pi \to \Delta\Phi}.$$

Мы преобразуем эту фигуру к виду

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta\forall x\psi(x);\ \forall x\psi(x)\,\psi(t)\,\Pi \to \Phi}{\Gamma \to \psi(t);\quad \psi(t)\,\Gamma\Pi \to \Delta\Phi}}{\cfrac{\Gamma\Gamma\Pi \to \Delta\Phi}{\overline{\Gamma\Pi \to \Delta\Phi}}}.$$

Здесь верхнее сечение имеет меньшую высоту правого вывода, а нижнее применяется к формуле меньшей сложности. Вывод $\Gamma \to \psi(t)$ получается из $\Gamma \to \psi(y)$ с помощью 3.1.1.

$\varphi = \exists x\psi(x)$. Данное сечение

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Delta\exists x\psi(x)\,\psi(t)}{\Gamma\to\Delta\exists x\psi(x)} \qquad \dfrac{\psi(y)\,\Pi\to\Phi}{\exists x\psi(x)\,\Pi\to\Phi}}{\Gamma\Pi\to\Delta\Phi}$$

преобразуем к виду

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Delta\psi(t)\,\exists x\psi(x);\ \exists x\psi(x)\,\Pi\to\Phi}{\Gamma\Pi\to\Delta\Phi\psi(t)} \qquad \psi(t)\,\Pi\to\Phi}{\Gamma\Pi\Pi\to\Delta\Phi\Phi}}{\Gamma\Pi\to\Delta\Phi}.\ \square$$

3.1.7. *Для всякой формулы* φ *в* GHPC *выводима секвенция* $\varphi\to\varphi$.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. $\square$

3.1.8. *Если* φ *выводится в* HPC, *то секвенция* $\to\varphi$ *выводится в* GHPC.

$\triangleright$ Индукцией по построению вывода формулы φ в HPC. Ключевым моментом доказательства является рассмотрение правила 15): пусть выведены секвенции $\to\varphi$ и $\to(\varphi\supset\psi)$, требуется вывести в GHPC секвенцию $\to\psi$. Сначала выведем секвенцию $(\varphi\supset\psi)\ \varphi\to\psi$, затем, применяя сечение 3.1.6 с $\to(\varphi\supset\psi)$, получим $\varphi\to\psi$ и, наконец, применяя сечение с $\to\varphi$ и $\varphi\to\psi$, выведем секвенцию $\to\psi$. $\square$

Теперь, владея результатами 3.1.1 — 3.1.8, нетрудно установить и вторую часть теоремы 3.1 и полностью завершить ее доказательство. Мы оставляем читателю детали.

4. Некоторые результаты относительно интуиционистской логики предикатов. Замечательная симметрия системы GHPC позволяет нам без труда получить первые результаты об интуиционистской логике предикатов.

4.1. *Пусть* p *— атомарная формула. Тогда формулы* $p\vee\neg p$ *и* $\neg\neg p\supset p$ *невыводимы в* HPC.

$\triangleright$ Предположим, например, что $p\vee\neg p$ выводится в HPC. Тогда $\to p\vee\neg p$ выводится в GHPC. Но тогда необходимо выводится и $\to p\neg p$. Последняя же секвенция может быть выведена лишь из $p\to\bot$, а эта секвенция явно невыводима в GHPC. Подобный непосредственный анализ позволяет установить и невыводимость $\neg\neg p\supset p$. $\square$

Множество формул X языка Ω назовем *полным в смысле Харропа*, если выполняются следующие четыре условия:

1) если $(\varphi\wedge\psi)\in X$, то $\varphi\in X$ и $\psi\in X$;

2) если $(\varphi\supset\psi)\in X$, то $\psi\in X$;

3) если $\forall x\psi(x)\in X$, то $\psi(t)\in X$ для всякого терма t языка Ω;

4) никакая формула вида $(\varphi\vee\psi)$ или $\exists x\psi(x)$ не принадлежит множеству X.

Например, пустое множество является полным в смысле Харропа, множество всех формул, не содержащих $\vee$ и $\exists$, также полно в смысле Харропа.

Секвенцию вида $\Gamma\to\Delta\Pi$ назовем *секвенцией Харропа* по отношению к множеству X, полному в смысле Харропа, если

(i) всякий элемент Γ принадлежит X;

(ii) $\Delta\Pi$ — непустой набор формул;

(iii) всякий элемент Δ есть формула, начинающаяся с существования.

Заметим, что Δ или Π по отдельности могут быть и пустыми.

4.2. (Теорема Харропа.) *Пусть* X *— множество формул, полное в смысле Харропа. Пусть* $\Gamma\to\Delta\Pi$ *есть секвенция Харропа по отношению к* X *и* $\Gamma\to\Delta\Pi$ *выводится в* GHPC. *Тогда имеет место один из следующих случаев*:

a) *существует формула* φ *из набора* Π *такая, что секвенция* $\Gamma\to\varphi$ *выводима в* GHPC, *или*

b) *существуют формула* $\exists x\psi(x)$ *из набора* Δ *и терм* t *такие, что в* GHPC *выводима секвенция* $\Gamma\to\psi(t)$.

$\triangleright$ Индукцией по высоте вывода $\Gamma\to\Delta\Pi$ в GHPC. Заметим, что, так как $\Gamma\to\Delta\Pi$ есть секвенция Харропа, она не может быть получена по правилам $(\vee\to)$, $(\exists\to)$. Мы разберем только случай, когда $\Gamma\to\Delta\Pi$ получена по правилу $(\to\exists)$, оставляя проверку остальных возможностей читателю. В этом случае $\Gamma\to\Delta\Pi$ может иметь один из следующих видов: $\Gamma\to\Delta'\,\exists x\psi(x)\Pi$, где $\Delta=\Delta'\exists x\psi(x)$, или $\Gamma\to\Delta\Pi'\,\exists x\psi(x)$, где $\Pi=\Pi'\,\exists x\psi(x)$.

В первом варианте представим посылку в виде секвенции Харропа $\Gamma\to\Delta''\Pi''$, где $\Delta''=\Delta=\Delta'\exists x\psi(x)$ и $\Pi''=\Pi\psi(t)$, и применим к $\Gamma\to\Delta''\Pi''$ индуктивное предположение. Здесь имеются четыре возможности: 1) найдутся формула $\exists y\eta(y)$ из Δ' и терм r такие, что $\vdash\Gamma\to\eta(r)$; 2) найдется терм r такой, что $\vdash\Gamma\to\psi(r)$;

3) найдется формула η из Π такая, что $\vdash \Gamma \to \eta$; 4) $\vdash \Gamma \to \psi(t)$. Мы видим, что для всех четырех возможностей выполняется заключение теоремы Харропа.

Если же $\Gamma \to \Delta\Pi$ имеет вид $\Gamma \to \Delta\Pi'\exists x\psi(x)$, то представим посылку в виде секвенции $\Gamma \to \Delta''\Pi''$, где $\Delta'' = \Delta$ и $\Pi'' = \Pi'\exists x\psi(x)\psi(t)$, после чего применим индуктивное предположение. $\square$

4.3. (*Свойство дизъюнктивности* НРС.) *Если в* НРС $\vdash \varphi \vee \psi$, *то в* НРС $\vdash \varphi$ *или* $\vdash \psi$.

4.4. (*Свойство экзистенциональности* НРС.) *Если в* НРС $\vdash \exists x\psi(x)$, *то найдется терм t такой, что в* НРС $\vdash \psi(t)$.

$\rhd$ 4.3 и 4.4 суть непосредственные следствия 4.2 (и 3.1.8). В качестве X следует взять пустое множество. $\square$

Обращаем внимание, что факты 4.2—4.4 характерны именно для интуиционистского исчисления предикатов. Так, в СРС $\vdash p \vee \neg p$ для атомарной формулы p, но, конечно, не имеет места ни $\vdash p$, ни $\vdash \neg p$. Содержательно в пользу, например, 4.3 можно привести следующий довод. Пусть мы доказали в логике предикатов $\varphi \vee \psi$. То, что доказательство происходило в логике предикатов, означает, что мы не использовали никакой информации о содержании суждений φ или ψ, а руководствовались только логической формой этих суждений. В то же время доказательство было интуиционистским, т. е. в принципе должен быть способ распознавания истинного члена дизъюнкции $\varphi \vee \psi$. Но каким может быть такой способ, если содержание ни φ, ни ψ не принималось во внимание? Фактически мы должны доказать предварительно либо φ, либо ψ!

Точные результаты 4.1—4.4 свидетельствуют в пользу того, что исчисление НРС выбрано удачно. Все принципы НРС выглядят довольно убедительными с точки зрения интуиционистской математики. Следующая интересная проблема состоит в исследовании п о л н о т ы НРС. Не пропустили ли мы какие-нибудь важные общие принципы, которые следует присоединить к нашей логике? Как мы увидим далее (с. 72,120), этот тонкий вопрос допускает различные решения в зависимости от уточнения постановки вопроса о полноте НРС.

5. Классическое исчисление секвенций. Приведем для полноты картины формулировку классического исчисления секвенций GCPC, аналогичного GHPC. Для GCPC удобно изменить несколько язык Ω. А именно, вместо логической константы $\perp$ («ложь») мы будем в GCPC употреблять логическую связку $\neg$ (отрицание, «не»). Исчисление GCPC содержит схему аксиом следующего вида: $\varphi\Gamma \to \Delta\varphi$, где φ — атомарная формула языка Ω. Правила вывода вводят логические связки слева и справа, в том числе и связку $\neg$:

$$(\supset\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi;\ \psi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\supset\psi)\,\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\supset)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\Delta\psi}{\Gamma\to\Delta\,(\varphi\supset\psi)};$$

$$(\neg\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi}{\neg\varphi\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\neg)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta\neg\varphi};$$

$$(\forall\to)\quad \frac{\forall x\psi(x)\,\psi(t)\,\Gamma\to\Delta}{\forall x\psi(x)\,\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\forall)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\psi(y)}{\Gamma\to\Delta\forall x\psi(x)}.$$

Здесь в правиле $(\to\forall)$ наборы Γ и Δ не содержат свободно переменной y. Остальные правила вывода $(\wedge\to)$, $(\to\wedge)$, $(\vee\to)$, $(\to\vee)$, $(\exists\to)$, $(\to\exists)$ имеют тот же вид, что и в GHPC.

Имеет место факт, аналогичный 3.1, об эквивалентности GCPC и CPC. Разумеется, при построении формульного образа S^Φ классической секвенции S формулу вида $\neg\varphi$ следует переводить как $(\varphi\supset\perp)$. Обратно, константу $\perp$ можно изображать в GCPC в виде формулы $\varphi\wedge\neg\varphi$ с некоторой фиксированной атомарной формулой φ. Доказательство эквивалентности GCPC и CPC можно провести аналогично плану, намеченному в 3.1.1—3.1.8. Основным моментом является доказательство допустимости в GCPC правила сечения (см. 3.1.6). В связи с 3.1.4 отметим, что в GCPC в с е п р а в и л а в ы в о д а о б р а т и м ы. Мы оставляем эти доказательства читателю в качестве очень полезного, хотя и громоздкого упражнения.

Ценным свойством исчислений GHPC и GCPC является *свойство подформульности*: все формулы в посылках правил вывода этих исчислений составлены из подформул формул заключения. Это сильно облегчает поиск вывода данной секвенции и является источником получения многих результатов. Например, если в рассматриваемых исчислениях секвенций выбросить четыре правила вывода, относящиеся к кванторам, то несложный анализ оставшихся исчислений (*исчислений высказываний* в форме исчисления секвенций) позволяет найти эффективный способ установления выводимости произвольной секвенции в данном исчислении. Таким образом, классическое и интуиционистское исчисления высказываний оказываются *разрешимыми*. Хорошо известно, что соответствующие исчисления предикатов неразрешимы. Тем не менее формулировка исчислений в форме исчислений секвенции и здесь приводит к интересным результатам.

Заметим, что все рассуждения пп. 3—5 носили элементарно-комбинаторный характер и приемлемы одинаково как с интуиционистской, так и с традиционной классической точек зрения. Использование множеств в теореме Харропа не является существенным: в интересных случаях всегда можно ограничиться конкретными простыми множествами X (например, $X = \varnothing$). Перед нами — образец исследования интуиционистской логики скромными средствами, математика этого исследования нейтральна, приемлема и с классической и с интуиционистской позиций.

6. Формальные аксиоматические теории. *Формальная аксиоматическая теория* (мы будем часто опускать один или оба из этих эпитетов) определяется набором из трех объектов:

$$T = \langle \Omega, l, A \rangle,$$

где Ω — логико-математический язык; l — логика теории — мы будем рассматривать всего две логики, CPC и HPC, и в соответствии с этим подразделять теории на *классические* и *интуиционистские*; A — некоторое множество предложений (т. е. замкнутых формул языка Ω), называемое множеством *нелогических аксиом* теории T. Описывая нелогические аксиомы теории, мы будем часто приводить незамкнутые формулы. В этом случае всегда имеется в виду, что следует взять замыкание рассматриваемых формул кванторами общности.

Если Γ — набор формул, а φ — формула в Ω, то запись $T, \Gamma \vdash \varphi$ (читается «в теории T из Γ *выводится* φ») означает, что существует конечное подмножество $A' \subseteq A$ такое, что в исчислении l имеет место $A'\Gamma \vdash \varphi$ (см. с. 20). Если Γ пусто, получаем понятие выводимости в теории $T \vdash \varphi$. Упоминание о теории слева опускаем, если ясно, о какой теории идет речь.

Теория T, по определению, *непротиворечива*, если неверно, что $T \vdash \bot$. Секвенция $\Gamma \to \Delta$ *выводима* в T, если в T выводим ее формульный образ, что, конечно, эквивалентно выводимости $T, \Gamma \vdash \Delta$.

В связи с интуиционистской логикой полезно несколько обобщить понятие формальной аксиоматической теории. А именно, *составная формальная аксиоматическая теория* определяется набором четырех объектов:

$$T = \langle \Omega, l, A, B \rangle,$$

где Ω, l — как и раньше, язык и логика соответственно, а A и B — два множества предложений языка Ω. Предложения из A называются *позитивными нелогическими аксиомами*, а предложения из B — *негативными нелогическими аксиомами*. Если $B = \varnothing$, то мы отождествляем T с *простой* теорией $\langle \Omega, l, A \rangle$.

Мы говорим, что формула φ выводится в составной теории T, и пишем $T \vdash \varphi$, если существуют конечные подмножества $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ такие, что секвенция $A' \to B'\varphi$ выводится в логическом исчислении l. Формула φ *отвергается* в T (записываем $T \dashv \varphi$), если существуют конечные подмножества $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ такие, что секвенция $\varphi A' \to B'$ выводится в логическом исчислении l. Для простой теории понятие выводимости, как нетрудно видеть, совпадает с ранее данным, а $T \dashv \varphi$ равносильно $T \vdash \neg\varphi$.

Составная теория *непротиворечива*, если для всех конечных $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$ секвенция $A' \to B'$ не выводится в l. Очевидно, что для простой теории это понятие совпадает с данным ранее. В подразумеваемой интерпретации формулы, выводимые в теории,— это истинные формулы (хотя, конечно, может быть, и не все истины выводимы в теории), а формулы, отвергаемые в T,— это заведомо не истинные формулы теории. Последнее, однако, отнюдь не означает, что отвергаемые формулы ложны в том смысле, что отрицание их истинно. В интуиционистской модели истинности, как мы увидим далее, вполне возможны ситуации, когда φ и $\neg\varphi$ одновременно не являются истинными. На содержательном уровне мы эту ситуацию уже обсуждали в п. 1.

Для классической же теории понятие составной аксиоматической теории неинтересно — оно легко сводится к понятию простой теории. А именно, если для данной классической составной теории $T = \langle \Omega, \mathrm{CPC}, A, B \rangle$ определить

$$B^- = \{\neg\varphi \mid \varphi \in B\} \quad \text{и} \quad T' = \langle \Omega,\ \mathrm{CPC},\ A \cup B^- \rangle,$$

то отношение $T \vdash \varphi$ совпадает с $T' \vdash \varphi$, а $T \dashv \varphi$ эквивалентно $T' \vdash \neg\varphi$.

Мы используем понятие составной формальной аксиоматической теории в теории интуиционистских моделей.

7. Библиографические замечания. Хорошее обсуждение метода формализации в математической логике, программы Гильберта обоснования математики, финитных методов в математике можно найти во вводных главах известных учебников Клини [2] и Новикова [2]. Элементы классической семантики и теории моделей изложены во многих книгах, например, в стандартном учебнике Мендельсона [1]. Интуиционистскую критику классического теоретико-множественного подхода к математике и обсуждение особенностей интуиционистской математики можно найти в книгах Гейтинга [3] и Клини и Весли [1], где можно найти библиографию ранней литературы по интуиционизму, в том числе обсуждение пионерских работ основателя интуиционистского направления в математике — Брауэра. Конструктивное направление в математике является с нашей точки зрения разновидностью интуиционизма. Подробное обсуждение конструктивной концепции можно найти в статьях Маркова [1], [2] и Шанина [1]. Систематическое построение обширных разделов математики с конструктивных позиций различного рода можно найти в монографиях Гейтинга [3], Бишопа [1], Кушнера [1], Гудстейна [1], Мартин-Лёфа [3], Фан Динь Зиеу [1]. В книге Клини и Весли [1] фрагмент интуиционистского математического анализа, включая знаменитую теорему Брауэра о веере, проведен в рамках некоторой формальной аксиоматической теории FIM. Другие важные формализации интуиционистской математики имеются в статьях Крайзела и Трулстры [1] и Майхилла [2], [3].

Современное обсуждение важнейших интуиционистских принципов можно найти в работах ван Далена [2] и Трулстры [1]. Сборник Трулстры [6] содержит весьма содержательный обзор современных методов исследования интуиционистских теорий, а также обширную библиографию по математике интуиционизма вплоть до 1973 г. Дальнейшая информация по теории доказательств может быть найдена в обзоре Минца [2].

Формулировка интуиционистской логики предикатов была предложена Гейтингом [1] в 1930 г. Наша формулировка CPC и HPC близка к предложенным в учебниках Клини [1] и Мендельсона [2]. Формулировка типа CPC_1 и HPC_1 восходит к работе Гёделя [3] 1958 г. и является ее некоторым упрощением (см. также Драгалин [6], п. 8.3). Формулировка исчисления секвенций и теорема об устранении сечения принадлежат Генцену [1] (1934 г.). Наша формулировка GHPC и GCPC близка к исчислению G3 в книге Клини [2], но удобнее для поиска вывода, так как мы секвенцию трактуем как множество с повторениями и поэтому правило сокращения у нас не получается автоматически. Наше доказательство допустимости сечения отлично от приведенного в книге Клини [2] и приспособлено непосредственно к нашим исчислениям.

Теорема Харропа была установлена Харропом [1] в 1960 г., но частные ее случаи восходят к работам Гёделя. Исчисления секвенций применяются для получения результатов типа теоремы Харропа, но для более широких систем таких, как арифметика или анализ, в работах Скарпеллини [2], [3] и Хинаты [1]. Другой способ установления теоремы Харропа с помощью так называемого метода реализуемости по Клини используется в работах Клини [4] — [6], Фридмана [1], Майхилла [5]. Устранение сечения и его приложения в системах натурального вывода Генцена — эти системы мы здесь использовать не будем — можно найти в работах Правица [3], Джервела [1], Мартин-Лёфа [1], [2], Трулстры [6], Полерса [1], Тейта [2]. Об устранении сечения в логике высокого порядка см. работы Тейта [1], Правица [2], Такахаси [1] — [3], Жирара [1], Освальда [1], [2], Буххольца [1], Драгалина [12]. Понятие составной аксиоматической теории сформулировано в работах Драгалина [3], [10].

АРИФМЕТИКА

Чтобы получить некоторое представление о том, насколько интуиционистская математическая теория может отличаться от классической, каким образом требования эффективности можно отражать внутри теории, мы изучим некоторые формальные теории арифметики с интуиционистской логикой. Эффективность в таких теориях мы будем трактовать как алгоритмичность. Такой подход характерен для конструктивного направления в математике как разновидности интуиционизма.

Мы увидим, что возможно много неэквивалентных подходов уточнения идеи эффективности. Некоторые из этих подходов противоречат друг другу, хотя каждый в отдельности естествен и непротиворечив. Более того, получаемые теории эквивалентны в том смысле, что допускают взаимную интерпретацию друг в друге. Основной инструмент исследования в этом параграфе — разработанный Клини *метод реализуемости.*

1. Аналитический язык. Пусть фиксировано конечное, может быть, и пустое множество U, элементы которого назовем *сортами функциональных переменных.* Можно считать, что U — это множество натуральных чисел. Фиксируем некоторое счетное множество переменных для натуральных чисел (числовых переменных). Мы будем обозначать элементы этого множества через x, y, z, ... Кроме того, для каждого $k \in U$ фиксируем счетное множество *переменных для функций сорта* k: α^k, β^k, γ^k, α_1^k, ... В подразумеваемой интерпретации значениями переменной являются некоторые одноместные функции из натуральных чисел в натуральные числа, определенные для всех натуральных чисел.

Введем понятие *примитивно рекурсивной (п. р.) функции* и *примитивно рекурсивного (п. р.) описания.* Каждое п. р. описание представляет собой кортеж из $\geqslant 3$ членов: $\langle k, l, p, \ldots \rangle$, где k, l — натуральные числа, а

p — в свою очередь кортеж $\langle k_1, \ldots, k_m \rangle$ членов U, $k_i \in U$, причем возможно, что $m = 0$, т. е. кортеж p пуст. Пара $\langle l, p \rangle$ называется *типом* п. р. описания, число l — количеством *числовых аргументных мест,* а число m — количеством *функциональных аргументных мест.* Кортеж p называется *распределением* функциональных аргументных мест по сортам.

Понятие примитивно рекурсивного описания вводится индуктивно, при этом каждому п. р. описанию одновременно сопоставляется функция — примитивно рекурсивная функция, *имеющая данное описание.* Следующие пять пунктов составляют базис этого определения:

1) $\langle 1, 1, \langle \ \rangle \rangle$, $F(x) = x + 1$;

2) $\langle 2, 1, \langle k \rangle \rangle$, $F(x, \alpha) = \alpha(x)$,

здесь $k \in U$ и α — переменная сорта k;

3) $\langle 3, 1, \langle \ \rangle \rangle$, $F(x) = x$;

4) $\langle 4, 1, \langle \ \rangle, m \rangle$, $F(x) = m$,

здесь m — произвольное натуральное число;

5) $\langle 5, 0, \langle k \rangle, m \rangle$, $F(\alpha) = m$,

здесь $k \in U$, α — переменная сорта k, m — произвольное натуральное число.

Индуктивный шаг определения п. р. описания составляют следующие четыре пункта:

6) Пусть $l \geqslant 0$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant l$, $k_1 \in U, \ldots, k_m \in U$; пусть дано п. р. описание g типа $\langle l, \langle k_{j_1}, \ldots, k_{j_m} \rangle \rangle$, причем g сопоставлена функция G. Тогда можно определить новое п. р. описание

$$\langle 6, l, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle, g, i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_m \rangle,$$

которому сопоставляется функция

$$F(x_1, \ldots, x_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_m}).$$

Здесь α_i — переменная сорта k_i.

7) Пусть g — п. р. описание типа $\langle l, \langle k_1, \ldots, k_m \rangle \rangle$, причем $l > 0$; пусть h — п. р. описание типа $\langle p, \langle n_1, \ldots, n_s \rangle \rangle$. Тогда можно определить новое п. р. описание $\langle 7, l+p-1, \langle k_1, \ldots, k_m, n_1, \ldots, n_s \rangle, g, h \rangle$, которому сопоставляется функция

$$F(x_1, \ldots, x_{l-1}, y_1, \ldots, y_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_s) = G(H(y_1, \ldots, y_p, \beta_1, \ldots, \beta_s), x_1, \ldots, x_{l-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha\ ).$$

Здесь функциональные переменные имеют соответствующие сорта.

8) Пусть g — п. р. описание типа $\langle 2, \langle\ \rangle\rangle$ и m — натуральное число. Тогда можно образовать новое п. р. описание $\langle 8, 1, \langle\ \rangle, g, m\rangle$, которому сопоставляется функция F, удовлетворяющая тождествам

$$F(0) = m;\ F(x+1) = G(x, F(x)).$$

9) Пусть h — п. р. описание типа $\langle m, \langle k_1, \ldots, k_n\rangle\rangle$ и g — п. р. описание типа $\langle m+2, \langle k_1, \ldots, k_n\rangle\rangle$. Тогда можно определить новое п. р. описание $\langle 9, m+1, \langle k_1, \ldots, k_n\rangle, g, h\rangle$, которому сопоставляется функция F, удовлетворяющая следующим тождествам:

$$F(0, x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = H(x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n);$$
$$F(x+1, x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$$
$$G(x, F(x, x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Определение примитивно рекурсивного описания закончено.

Числовые термы языка $\mathrm{An}(U)$ определим индуктивно:

1) константа 0 есть числовой терм;

2) числовая переменная x есть числовой терм;

3) если p есть примитивно рекурсивное описание типа $\langle l, \langle k_1, \ldots, k_m\rangle\rangle$ и $t_1, \ldots, t_l$ суть числовые термы, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — переменные для функций, причем α_i — переменная сорта k_i, то выражение $p(t_1, \ldots, t_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ есть числовой терм.

В дальнейшем, когда речь идет об аналитическом языке, числовые термы мы будем называть просто *термами*. *Функциональные* же термы языка $\mathrm{An}(U)$ суть по определению просто переменные для функций.

Через $t(x \mid r)$ мы, аналогично п. 2 ч. 1, будем обозначать результат подстановки терма r в терм t вместо в с е х вхождений переменной x в терм t. Такой же смысл имеет и обозначение $t(\alpha \mid \beta)$, где α и β — две переменные для функций одного и того же сорта. Введем естественные сокращенные обозначения для термов специального вида:

$$S(x) \rightleftharpoons x + 1 \rightleftharpoons \langle 1, 1, \langle\ \rangle\rangle\,(x);\quad \alpha(x) \rightleftharpoons \langle 2, 1, \langle k\rangle\rangle\,(x, \alpha),$$

где α — переменная сорта k.

Атомарные формулы языка $\mathrm{An}(U)$ имеют вид $(t = r)$, где t и r — числовые термы. Разумеется, здесь $=$ является формальным знаком языка $\mathrm{An}(U)$ и его следует отличать от употребления равенства в тексте для с о д е р ж а т е л ь н о г о сообщения о совпадении объектов. *Формулы* языка $\mathrm{An}(U)$ строятся из атомарных обычным образом с помощью констант и связок логики предикатов: $\wedge\ \vee\ \supset\ \perp\ \forall\ \exists$. При этом кванторы $\forall$ и $\exists$ употебляются как по числовым переменным, так и по переменным для функций всех имеющихся сортов.

Описание языка $\mathrm{An}(U)$ закончено. $\mathrm{An}(U)$ — *многосортный аналитический язык*, количество сортов переменных зависит от U. Особенно важен случай, когда U — одноэлементное множество, т. е. имеется всего один сорт переменных для функций. Такой язык мы будем обозначать через An, опуская обозначение одноэлементного множества U, и называть просто аналитическим языком.

Многосортный арифметический язык $\mathrm{A}(U)$ отличается от $\mathrm{An}(U)$ лишь тем, что в $\mathrm{A}(U)$ кванторы $\forall$ и $\exists$ применяются только к числовым переменным. Переменные для функций в $\mathrm{A}(U)$ играют роль *неопределенных констант* для функций. Особенно важен случай, когда U пусто, т. е. переменных для функций нет вовсе. Такой язык мы обозначим через A и будем называть просто *арифметическим языком*.

Термы типа $0, S0, SS0, \ldots$, когда они встречаются в формулах и термах, мы будем отождествлять с соответствующими натуральными числами $0, 1, 2, \ldots$

2. Основные арифметические теории. Сформулируем теперь аксиоматическую теорию, предназначенную для описания обширного фрагмента классической арифметики. Мы обозначим эту теорию через $\mathrm{FA}(U)$— «классическая формальная арифметика в языке $\mathrm{A}(U)$». Логика $\mathrm{FA}(U)$ — классическая логика предикатов CPC, сформулированная для языка $\mathrm{A}(U)$. В качестве нелогических аксиом $\mathrm{FA}(U)$ следует взять замыкания кванторами общности следующих формул:

1) $x = x$;

2) $x = y \wedge x = z \supset y = z$;

3) $x = y \supset Sx = Sy$;

4) $x = y \supset \alpha(x) = \alpha(y)$;

5) $\neg Sx = 0$;

6) $Sx = Sy \supset x = y$;

7) *определяющие аксиомы* для примитивно рекурсивных описаний, т. е. для каждого п. р. описания (кроме 1) и 2)) следует в качестве аксиомы взять определяющее тождество соответствующей примитивно рекурсивной функции, например,

$$\langle 3,\ 1,\ \langle\rangle\rangle(x) = x,\quad \langle 5,0,\ \langle k\rangle,\ 2\rangle\ (\alpha) = SS0,$$
$$\langle 8,1,\ \langle\ \rangle,\ g,\ 2\rangle\ (0) = SS0,$$
$$\langle 8,1,\ \langle\ \rangle,\ g,\ 2\rangle\ (Sx) = g(x,\ \langle 8,1,\langle\ \rangle,\ g,\ 2\rangle\ (x))$$

и т. д., все эти аксиомы имеют вид равенств;

8) следующая схема аксиом Ind (*принцип полной математической индукции, формальная индукция*):

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \supset \varphi(Sx)) \supset \forall x\varphi(x).$$

Определение FA(U) закончено. *Классическая формальная арифметика* FA есть по определению система FA(U) для случая, когда множество U пусто. FA — теория в арифметическом языке A. Аксиома 4) при этом, естественно, исключается из списка ее нелогических аксиом, а в аксиомах 7) употребляются лишь описания, не содержащие аргументов для функций. Напомним, что кванторы для переменных по функциям в языке A(U) отсутствуют.

Интуиционистская формальная арифметика HA(U) (*арифметика Гейтинга*) отличается лишь в одном отношении от классической теории FA(U): а именно, в HA(U) используется интуиционистское исчисление предикатов HPC вместо классического CPC. HA есть по определению система HA(U) при пустом U.

2.1. HA(U) $\vdash \varphi \Rightarrow$ FA(U) $\vdash \varphi$.

$\rhd$ Всякий вывод HA(U) $\vdash \varphi$ есть одновременно и вывод в FA(U), так как HPC есть часть исчисления CPC. $\square$

Таким образом, HA есть подсистема FA с точки зрения выводимости. Тем не менее многие обычные арифметические факты выводятся в HA так же успешно, как и в FA. Мы будем предполагать, что читатель имеет определенный опыт построения формальных выводов в FA (опыт этот можно почерпнуть в стандартных учебниках Мендельсона [1] или Клини [2], причем в последнем автор специально отмечает интуиционистский характер выводов) и не будем вдаваться в подробности, если содержательное доказательство непосредственно переводится в интуиционистский вывод. При этом специальные усилия будут прилагаться, чтобы в содержательных рассуждениях не использовать без необходимости законы классической логики типа снятия двойного отрицания или закона исключенного третьего. Подробную сводку формул, выводимых в HPC, можно найти в §§ 26 — 35 книги Клини [2].

Отметим специально некоторые свойства равенства и эквивалентности. Определим обычным образом:

$$(\varphi \equiv \psi) \rightleftharpoons (\varphi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \varphi),$$
$$(\alpha = \beta) \rightleftharpoons \forall x(\alpha(x) = \beta(x)).$$

2.2. *Пусть t, r, s — термы или функциональные переменные (не обязательно одного сорта).*

Тогда в HA(U):

1) $t = t$;

2) $t = r \supset r = t$;

3) $t = r \wedge r = s \supset t = s$.

$\rhd$ Это — непосредственное следствие аксиом равенства 1) — 4). $\square$

2.3. *Пусть p — п. р. описание*; *тогда в* HA(U) *выводятся следующие правила замены*:

1) $x = y \supset p(\ldots,\ x,\ \ldots) = p(\ldots,\ y,\ldots)$;

2) $\alpha = \beta \supset p(\ldots,\ \alpha,\ \ldots) = p(\ldots,\ \beta,\ldots)$.

$\rhd$ Индукцией по длине п. р. описания p. Пусть, например, $p = \langle 8,\ 1,\ \langle\ \rangle,\ g,\ m\rangle$. Покажем

$$\forall xy(x = y \supset p(x) = p(y)).$$

Обозначим эту формулу через $\forall xy\psi(x,\ y)$ и для ее вывода воспользуемся формальной индукцией по x. Следует вывести

$$\forall y\psi(0,\ y), \qquad (1)$$
$$\forall x(\forall y\psi(x,\ y) \supset \forall y\psi(Sx,\ y)). \qquad (2)$$

Для вывода (1) применим формальную индукцию по y. Таким образом, необходимо вывести $\psi(0,\ 0)$ и $\forall y(\psi(0,\ y) \supset \psi(0,\ Sy))$. Для получения $\psi(0,\ 0)$ заметим, что имеет место $p(0) = p(0)$ ввиду 2.2. Для доказательства второй формулы установим $\forall y\psi(0,\ Sy)$, что непосредственно следует из $\neg(0 = Sy)$. Итак, (1) установлено.

Для вывода (2) допустим

$$\forall y\psi(x,\ y) \qquad (3)$$

и докажем $\forall y \psi(Sx, y)$ формальной индукцией по y. Необходимо установить $\psi(Sx, 0)$ и $\forall y(\psi(Sx, y) \supset \psi(Sx, Sy))$. $\psi(Sx, 0)$ немедленно следует из $\neg(Sx = 0)$. Для доказательства второй формулы достаточно установить $\forall y \psi(Sx, Sy)$. Допустим $Sx = Sy$ и выведем $p(Sx) = p(Sy)$. По свойству p имеем

$$p(Sx) = g(x, p(x)),$$
$$p(Sy) = g(y, p(y)).$$

Из $Sx = Sy$ следует $x = y$ и, ввиду (3), $p(x) = p(y)$. Так как g имеет более короткое описание, чем p, то по индуктивному предположению отсюда $g(x, p(x)) = g(y, p(y))$ и с помощью 2.2 отсюда $p(Sx) = p(Sy)$. □

2.4. *Пусть t — терм, x, y, z — числовые переменные, α, β, γ — переменные для функций одного сорта. Тогда в* НА(U):

1) $x = y \supset t(z \mid x) = t(z \mid y)$;

2) $\alpha = \beta \supset t(\gamma \mid \alpha) = t(\gamma \mid \beta)$.

▷ Индукцией по построению t с использованием 2.3. □

2.5. *Пусть φ — формула, x, y, z — числовые переменные, а α, β, γ — переменные для функций одного сорта. Тогда в* НА(U):

1) $x = y \supset (\varphi(z \mid x) \equiv \varphi(z \mid y))$;

2) $\alpha = \beta \supset (\varphi(\gamma \mid \alpha) = \varphi(\gamma \mid \beta))$.

▷ Индукцией по построению φ. В атомарном случае используем 2.2 и 2.4. □

Богатый набор п. р. описаний позволяет преобразовать всякий терм к некоторому нормальному виду.

2.6. *Пусть t — терм и $x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — список различных переменных такой, что все параметры t находятся в этом списке. Тогда найдется п. р. описание p такое, что в* НА(U)

$$p(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = t.$$

▷ Индукцией по построению t. Суть дела состоит в том, что подстановка выражается через примитивно рекурсивные операции п. 1. □

В системе НА имеются широкие возможности для определения примитивно рекурсивных операций над натуральными числами и доказательства их элементарных свойств. Приведем некоторые определения. Фиксируем

взаимно однозначное примитивно рекурсивное соответствие между парами натуральных чисел и натуральными числами. Пусть числам x и y соответствует число $j(x, y)$. Например, в НА можно определить терм $j(x, y) = (\max^2(x, y) + y) + (\max(x, y) \dot{-} x)$ и соответствующие обратные операции j_1 и j_2, так, что в НА:

$$j(j_1 z, j_2 z) = z;$$
$$j_1(j(x, y)) = x; \; j_2(j(x, y)) = y;$$
$$j(0, 0) = 0; \;\; x \leqslant j(x, y); \;\; y \leqslant j(x, y).$$

Далее, нумерация n-ок чисел может быть введена, например, следующим образом: $\nu_1(x) = x$, $\nu_2(x_1, x_2) = j(x_1, x_2)$, и при $n \geqslant 1$ $\nu_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = j(x_0, \nu_n(x_1, \ldots, x_n))$ с соответствующими обратными функциями

$$\delta_i^n(\nu_n(x_1, \ldots, x_n)) = x_i,$$

где $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Можно определить взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и всеми кортежами натуральных чисел. А именно, набору чисел $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 1)$ сопоставим число $j(n - 1, \nu_n(x_1, \ldots, x_n)) + 1$, которое обозначим через $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$; пустому кортежу, не содержащему членов,— число $\langle\,\rangle = 0$. Таким образом, натуральные числа в зависимости от способа кодирования можно отождествлять с парами, с тройками и с произвольными кортежами натуральных чисел. Пусть $x * y$ — операция соединения кортежей: $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle * \langle y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \rangle$. Двуместная операция $[x]_z$ «высекает» элемент кортежа x: $[\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle]_z = x_z$ при $z < n$ (заметим, что здесь нумерация элементов кортежа начинается с нуля, а не с единицы). Операция $\mathrm{lh}\, x$ определяет длину кортежа: $\mathrm{lh}\, 0 = 0$, $\mathrm{lh}(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle) = n$.

Нам понадобится еще операция почленного соединения кортежей. По данным числам x_1 и x_2 определим число $x = \tilde{\nu}_2(x_1, x_2)$, где $x = \langle y_0, \ldots, y_{m-1} \rangle$, $m = \max(\mathrm{lh}\, x_1, \mathrm{lh}\, x_2)$, $y_k = j(x_1^k, x_2^k)$, причем $x_1^k = [x_1]_k$, если $k < \mathrm{lh}\, x_1$ (в противном случае $x_1^k = 0$), и, аналогично, $x_2^k = [x_2]_k$, если $k < \mathrm{lh}\, x_2$. Можно определить и естественные обратные операции. Так, если $x = \langle y_0, \ldots, y_{m-1} \rangle$, то положим $\widetilde{\delta}_i^2(x) = \langle \delta_i^2(y_0), \ldots, \delta_i^2(y_{m-1})\rangle$, где $i = 1, 2$. Операция $\tilde{\nu}_n$ почленного соединения более чем двух кортежей определяется аналогично.

В НА(U) можно определять и функциональные символы, имеющие аргументами переменные для функций. Так, «функция-обрезок»

$$\overline{\alpha}(x) = \langle \alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(x-1)\rangle$$

определяется с помощью примитивной рекурсии как терм от α и x:

$$\overline{\alpha}(0) = 0, \ \overline{\alpha}(Sx) = \overline{\alpha}(x) * \langle \alpha(x)\rangle.$$

Подобным образом можно ввести термы с параметрами α и x типа

$$\textstyle\sum_{i<x}\alpha(i), \quad \prod_{i<x}\alpha(i).$$

Мы не будем останавливаться на точных формулировках и доказательствах элементарных свойств этих термов (некоторые подробности можно найти у Клини и Весли [1] и Клини [2]).

3. **Негативная интерпретация.** Анализ принципов, положенных в основу НА, показывает, что все они, по-видимому, приемлемы с интуиционистской точки зрения. Формулы НА выражают суждения о конструктивных объектах, а способы рассуждения согласуются с эффективным пониманием логических связок. Выводы НА приемлемы и с классической точки зрения просто потому, что НА — часть FA. В этом смысле на НА можно смотреть как на нейтральную теорию, и если некоторое предложение выведено в НА, то можно считать, что такое предложение выведено особенно надежно, доказано *финитно*. Можно считать, что непротиворечивость системы НА очевидна в силу самой содержательной интерпретации этой теории.

Заметим сразу же, что это отнюдь не единственная разумная точка зрения. Можно считать, что надежный финитный смысл могут иметь только арифметические суждения ограниченной сложности. Особенно интересно рассмотреть здесь крайний случай, когда приемлемыми считаются лишь бескванторные арифметические формулы.

В качестве формальной теории тогда следует рассмотреть теорию PRA — *примитивно рекурсивную арифметику*, бескванторный фрагмент теории НА. Оказывается, что неожиданно обширную часть математики можно рассматривать уже в PRA, см. по этому поводу работы Гудстейна [1] и Минца [3]. С другой стороны, можно пытаться расширять НА, сохраняя ее финитный и нейтральный характер, например, таким образом, чтобы иметь возможность вывести непротиворечивость НА в расширенной теории. Варианты такого расширения с помощью различных принципов типа трансфинитной индукции восходят к Генцену [2], [3] (см. также Скарпеллини [3], Драгалин [1], [8]). По поводу конструктивного истолкования сложных арифметических суждений см. также Марков [3], Шанин [2], [3], Минц [1]. Однако в этом параграфе мы будем считать базисными именно выводы в НА, отождествляя такие выводы с «финитными» выводами.

Термин же «конструктивное рассуждение» мы будем употреблять в более расплывчатом смысле для обозначения нескольких содержательных рассуждений в самой этой книге, которые, хотя, может быть, и не формализуются естественно в НА, тем не менее удовлетворяют многим условиям конструктивности — не используют закона исключенного третьего, указывают способ построения объектов, существование которых утверждается, и т. п. Не будем и пытаться очертить метаматематически объем этого понятия, предоставляя читателю самому судить о степени конструктивности тех рассуждений, которые мы называем конструктивными.

Оказывается, что имеется естественная интерпретация классической арифметики FA в НА, восходящая к Колмогорову [1] и Гёделю [1]. Формулу языка A назовем *бескванторной*, если она не содержит вхождений $\forall$ и $\exists$, *негативной* — если она не содержит $\vee$ и $\exists$ (но может содержать $\forall$), и *почти негативной* — если формула не содержит $\vee$ и содержит $\exists$ только в комбинации с атомарной формулой, т. е. всякое вхождение существования в почти негативную формулу (если таковое имеется) имеет вид $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \varphi$, где φ — атомарная формула.

3.1. *Если φ — бескванторная формула, то в* НА *имеем* $\varphi \vee \neg\varphi$ *и* $\neg\neg\varphi \supset \varphi$.

$\triangleright$ Вначале с помощью формальной индукции установим

$$\forall xy(x = y \vee \neg x = y) \text{ и } \forall xy(\neg\neg x = y \supset x = y),$$

откуда утверждение следует для атомарных формул, а затем воспользуемся содержательной индукцией по построению φ. $\square$

3.2. *Если φ — негативная формула, то в* НА $\neg\neg\varphi \supset \varphi$.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. Для атомарного случая используем 3.1. Далее воспользуемся следующими формулами, выводимыми в НРС:

$$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi,$$

$$\neg\neg(\varphi \supset \psi) \equiv (\neg\neg\varphi \supset \neg\neg\psi),\ \neg\neg\bot \equiv \bot,$$

$$\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi \equiv \forall x\neg\neg\varphi. \ \square$$

Заметим, что в НРС выводится импликация $\neg\neg\forall x\varphi \supset \forall x\neg\neg\varphi$, но не выводится, вообще говоря, обратная импликация $\forall x\neg\neg\varphi \supset \neg\neg\forall x\varphi$, поэтому в доказательстве 3.2 приходится использовать несколько более сложную эквивалентность.

Определим *«классические» логические связки* — дизъюнкцию и существование — следующим образом:

$$(\varphi \vee_c \psi) \leftrightharpoons \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),$$

$$\exists_c x\psi \leftrightharpoons \neg\forall x\neg\psi.$$

Для всякой формулы φ через φ_c обозначим результат замены всех связок $\vee$ и $\exists$ на их классические варианты, φ_c назовем *негативной интерпретацией* φ. Очевидно, φ_c — всегда негативная формула.

3.3. FA $\vdash \varphi \equiv \varphi_c$.

$\triangleright$ Очевидной индукцией по построению φ. С точки зрения классической логики классические и обычные связки эквивалентны. $\square$

3.4. FA $\vdash \varphi \Rightarrow$ НА $\vdash \varphi_c$.

$\triangleright$ Индукцией по построению вывода FA $\vdash \varphi$. Удобно рассмотреть формулировку CPC_1. Специфическое правило $\neg\neg\varphi/\varphi$ после перевода приобретает вид $\neg\neg\varphi_c/\varphi_c$ и следует из 3.2 и негативности φ_c. Рассмотрим еще только кванторное правило: $\psi(x) \supset \varphi/\exists x\psi(x) \supset \varphi$, где x — не параметр φ. После перевода оно приобретает вид $\psi_c(x) \supset \varphi_c/\neg\forall x\neg\psi_c(x) \supset \varphi_c$ и оказывается допустимым в HPC_1.

Действительно, в HPC_1 из посылки выводим $\exists x\psi_c(x) \supset \varphi_c$; отсюда по законам HPC_1 имеем $\neg\forall x\neg\psi_c(x) \supset \neg\neg\varphi_c$, и остается воспользоваться 3.2. $\square$

3.5. FA $\vdash \varphi \Leftrightarrow$ НА $\vdash \varphi_c$.

$\triangleright$ Ввиду 3.3 и 3.4. $\square$

3.6. *Если φ — негативная формула, то*

$$\text{FA} \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{НА} \vdash \varphi.$$

3.7. FA *непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива теория* НА.

Результаты 3.5 — 3.7 показывают, что FA интерпретируется в НА, причем в FA и в НА доказуемы одни и те же негативные формулы. Можно сказать и так, что все, что доказуемо классически, доказуемо и интуиционистски, только связки $\vee$ и $\exists$ следует понимать при этом «классически» (изменение, несущественное с классической точки зрения!). Система НА только по видимости слабее FA, фактически, она способна выразить все возможности FA и, кроме того, имеет дополнительные логические связки $\vee$ и $\exists$, позволяющие выражать «конструктивное существование». Классические связки $\vee_c$ и $\exists_c$ не являются необходимыми и выражаются через остальные. Значение полученной интерпретации выходит далеко за рамки формальной арифметики. Современное исследование показывает, что интуиционистские теории гораздо более разнообразно и гибко изучают эффективность в математике, чем их классические аналоги. Многие классические понятия нетривиально разветвляются в интуиционистской теории на несколько неэквивалентных (ср. Бишоп [1], Кушнер [1], Фан Динь Зиеу [1]). В то же время классические теории часто содержатся в соответствующих интуиционистских в качестве некоторого негативного фрагмента. О распространении негативной интерпретации на теорию множеств и теорию типов см. Майхилл [4], Поуэлл [5], Фридман [2]. Принципиальное значение имеет рассматриваемая интерпретация и для теории доказательств. Так, если считать непротиворечивость НА надежно установленной, непротиворечивость классической теории FA уже может быть установлена с помощью финитного рассуждения пп. 3.4—3.7. Дальнейшее обсуждение этой темы можно найти в книге Клини [2], § 81.

4. Формальный тезис Чёрча. Займемся теперь существенно интуиционистскими формальными теориями, не допускающими присоединения закона исключенного третьего.

Далее мы будем пользоваться элементарными свойствами примитивно рекурсивных функций и отношений, не выводя их фактически в НА. Предполагается, что читатель имеет определенный опыт в технике вывода, и мы игнорируем формальные выводы в тех случаях, когда известные элементарные доказательства непосредственно формализуются в НА. В более сложных случаях мы будем приводить более или менее подробное содержательное рассуждение, оставляя его формализацию читателю.

Особенно важны примитивно рекурсивный предикат Клини $T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z)$ (см., например, Мендельсон [1], с. 267, или Клини [2], с. 250) и примитивно рекурсивная операция Uz. Напомним, что если e есть номер частично рекурсивной функции $\{e\}$ от n аргументов, то $T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z)$ имеет место тогда и только тогда, когда z есть кортеж, естественно кодирующий полный процесс вычисления значения $\{e\}(x_1, \ldots, x_n) = y$. В этом случае $y = Uz$, т. е. U по протоколу z полного процесса вычисления выдает результат вычисления. В НА предикат T_n естественно изображается атомарной формулой, а U — некоторым термом с единственным параметром. Все обычные свойства T_n и U могут быть выведены в НА. Например, единственность процесса вычисления выражается формулой, выводимой в НА:

$$T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z_1) \wedge T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z_2) \supset z_1 = z_2.$$

В НА можно ввести естественные сокращения

$$\{e\}(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightharpoons \exists z (T_n(e, x_1, \ldots, x_n, z) \wedge Uz = y);$$

$$!\{e\}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \exists y(\{e\}(x_1, \ldots, x_n) = y).$$

Теперь мы в состоянии рассмотреть некоторые схемы аксиом, отражающие конструктивную специфику понимания логических связок и расходящиеся с классической семантикой. Наибоее замечательный из них — *формальный тезис Чёрча*

$$\text{CT: } \forall x \exists y\, \varphi(x, y) \supset \exists e \forall x \exists y (\{e\}(x) = y \wedge \varphi(x, y)),$$

здесь формула $\varphi(x, y)$ — формула языка А (а не А(U)!). СТ утверждает, что если верно, что для всякого x существует y, удовлетворяющее некоторому отношению $\varphi(x, y)$, то существует общекурсивная функция, выдающая по x это y.

Более слабый вариант этого принципа требует единственности в посылке

$$\text{CT!: } \forall x \exists ! y \varphi(x, y) \supset \exists e \forall x \exists y (\{e\}(x) = y \wedge \varphi(x, y))$$

с тем же ограничением на формулу $\varphi(x, y)$. Здесь квантор $\exists!$ (читается «существует и единственное») определяется обычным образом:

$$\exists ! x \eta(x) \leftrightharpoons \exists x \eta(x) \wedge \forall xy (\eta(x) \wedge \eta(y) \supset x = y).$$

Следующий результат показывает, что уже СТ! противоречит классической математике.

4.1. *В* НА + СТ! *имеем*

$$\neg \forall x (\neg \exists y T_1(x, x, y) \vee \neg\neg \exists y T_1(x, x, y)).$$

$\rhd$ Допустим $\forall x(\neg \exists y T_1(x, x, y) \vee \neg\neg \exists y T_1(x, x, y))$. Определим $\psi(x, z) \leftrightharpoons ((z = 0 \wedge \neg\neg \exists y T_1(x, x, y)) \vee (z = 1 \wedge \neg \exists y T_1(x, x, y)))$. Из допущения следует $\forall x \exists ! z\, \psi(x, z)$. Ввиду СТ! найдется e такое, что $\forall x \exists z(\{e\}(x) = z \wedge \psi(x, z))$. Из свойств ψ следует, что для всякого x $\{e\}(x) = 0 \vee \{e\}(x) = 1$ и, кроме того,

$$\{e\}(x) = 1 \equiv \neg \exists y T_1(x, x, y).$$

По данному e построим натуральное f такое, что

$$!\{f\}(x) \equiv \{e\}(x) = 1$$

(здесь мы используем выводимость в НА элементарных свойств предиката T_1). Отсюда

$$\exists y T_1(f, x, y) \equiv \neg \exists y T_1(x, x, y).$$

Подставляя сюда вместо x число f, немедленно получаем противоречие. $\square$

Полученный результат позволяет другим способом установить невыводимость некоторых формул в НРС (см п. 3.4 ч. 1). Пусть p — атомарная формула НРС.

4.2. *Если* НА + СТ! *непротиворечива (а позже мы установим, что непротиворечивость этой теории следует* *из непротиворечивости* НА), *то формулы* $p \vee \neg p$, $\neg p \vee \neg\neg p$, $\neg\neg p \supset p$ *не выводятся в* НРС.

$\rhd$ Если бы, например, $\neg p \vee \neg\neg p$ выводилась в НРС, то, повторяя этот вывод в языке А, мы вывели бы в НА

$$(\neg \exists y T_1(x, x, y) \vee \neg\neg \exists y T_1(x, x, y)),$$

а затем и $\forall x(\neg \exists y T_1(x, x, y) \vee \neg\neg \exists y T_1(x, x, y))$, что давало бы противоречие с 4.1. Для доказательства невыводимости $\neg\neg p \supset p$ следует в качестве p взять $\neg \exists y T_1(x, x, y) \vee \neg\neg \exists y T_1(x, x, y)$ и воспользоваться тем, что тогда $\neg\neg p$ выводится в НРС, а p не выводится. $\square$

4.3. Возьмем $\psi(x, z)$, как в доказательстве 4.1. Тогда из факта, доказанного в 4.1, следует, что в НА + СТ! имеет место одновременно $\neg \forall x \exists z \psi(x, z)$ и $\forall x \neg\neg \exists z \psi(x, z)$. Отсюда и из непротиворечивости НА + СТ! следует, что

$$\forall x \neg\neg \eta(x) \supset \neg\neg \forall x \eta(x)$$

не выводится в НРС для атомарной предикатной буквы $\eta(x)$ (см. замечание на с. 46).

Несколько более тщательное рассуждение, аналогичное 4.1, показывает, что в НА + СТ! выводится одновременно

$$\neg \forall x \exists z \psi_c(x, z) \text{ и } \forall x \neg\neg \exists z \psi_c(x, z).$$

Если положить $\varphi \leftrightharpoons \forall x \exists z \psi_c(x, z)$, то в НА + СТ! выводится одновременно φ_c и $\neg \varphi$, так что невыводимо $\varphi_c \equiv \neg\neg \varphi$. Негативная интерпретация не эквивалентна, вообще говоря, двойному отрицанию первоначальной формулы.

Отмеченные факты показывают, что теория НА + СТ! уже весьма непохожа на классическую теорию FA. Мы покажем тем не менее, что эта теория, подобно FA, интерпретируется в НА. Однако, теперь эта интерпретация должна учитывать неклассический характер логических связок. Мы впервые сталкиваемся с необходимостью построения неклассической модели для теории НА + СТ!. Мы построим эту модель сразу для теории с более мощным вариантом тезиса Чёрча, утверждающим существование и частично определенных алгоритмов. Такого рода принцип имеет вид СТ (ψ, φ):

$$\forall x(\psi(x) \supset \exists y \varphi(x, y)) \supset \exists e \forall x(\psi(x) \supset \exists y(\{e\}(x) = y \wedge \varphi(x, y)))$$

и утверждает, что существует частично рекурсивная функция $\{e\}$, которая определена по крайней мере на всех x, для которых $\psi(x)$, и для каждого такого x выдает y такое, что $\varphi(x, y)$.

Однако, при некоторых ψ и φ принцип СТ (ψ, φ) противоречит НА.

4.4. *Пусть* $\psi(x) \leftrightharpoons (\exists y T_1(x, x, y) \vee \neg \exists y T_1(x, x, y))$, $\varphi(x, y) \leftrightharpoons ((y > 0 \wedge T_1(x, x, y \dot{-} 1)) \vee (y = 0 \wedge \neg \exists y T_1(x, x, y)))$. *Тогда* НА $\vdash \neg$ СТ (ψ, φ).

$\rhd$ Действительно, легко видеть, что

$$\forall x(\psi(x) \supset \exists y \varphi(x, y)).$$

Если допустить СТ (ψ, φ), то отсюда найдется e такое, что из $\psi(x)$ следует $\exists y(\{e\}(x) = y \wedge \varphi(x, y))$. Но $\forall x \neg\neg \psi(x)$, так что $\forall x \neg\neg \exists y(\{e\}(x) = y \wedge \varphi(x, y))$. Выберем f так, что $!\{f\}(x) \equiv \{e\}(x) = 0$. Тогда $\neg\neg ! \{f\}(x) = \neg \exists y T_1(x, x, y)$, т. е.

$$\neg\neg \exists y T_1(f, x, y) \equiv \neg \exists y T_1(x, x, y).$$

Заменяя x на f, получим противоречие. $\square$

Можно привести и интуитивные аргументы, показывающие, что СТ (ψ, φ) неприемлем, по крайней мере, для некоторых ψ. В самом деле, требуемого алгоритма может и не существовать в тех случаях, когда установление свойства $\psi(x)$ само требует отыскания некоторых конструктивных объектов. Тогда для вычисления y такого, что $\varphi(x, y)$, на вход алгоритму $\{e\}$ следует подавать не только x, но и эти конструктивные объекты, без них же нет никаких оснований надеяться вычислить нужное y. Так, в примере 4.4 нетрудно построить алгоритм, который выдает y по заданному x и п о у к а з а н и ю, какой из членов дизъюнкции $\psi(x)$ верен. Построить же алгоритм, который выдает y по одному только x, как было показано, невозможно.

Мы рассмотрим два принципа, получающиеся ограничением класса формул ψ в СТ (ψ, φ). Схема nСТ состоит из всех примеров СТ (ψ, φ), где формула ψ н а ч и н а е т с я с о т р и ц а н и я. Схема ЕСТ состоит из всех примеров СТ (ψ, φ), где ψ — п о ч т и н е г а т и в н а я формула. Как мы увидим далее, обе схемы ЕСТ и nСТ уже совместны с НА.

5. Рекурсивная реализуемость по Клини. Будем считать до конца этой части, что все наши арифметические теории формулируются в языке А, т. е. без переменных для функций. Начнем с изучения теории НА + ЕСТ. Сопоставим с каждой формулой φ почти негативную формулу $(xr\varphi)$ (читается «x реализует формулу φ»). Здесь x — числовая переменная, формула $(xr\varphi)$ содержит те же параметры, что и φ, и, кроме того, может быть, еще параметр x.

Определяем $(xr\varphi)$ индукцией по построению формулы φ:

1) $xr\ (t = r) \leftrightharpoons (t = r)$;

2) $xr\ (\varphi \wedge \psi) \leftrightharpoons (j_1x)\ r\varphi \wedge (j_2x)\ r\psi$;

3) $xr\ (\varphi \vee \psi) \leftrightharpoons (j_1x = 0 \supset (j_1j_2x)\ r\varphi) \wedge (j_1x \neq 0 \supset (j_2j_2x) r\psi)$;

4) $xr\ (\varphi \supset \psi) \leftrightharpoons \forall y\ (yr\varphi \supset \exists v T_1\ (x, y, v)) \wedge \forall yz\ (yr\varphi \wedge T_1\ (x, y, z) \supset (Uz)\ r\psi)$;

5) $xr \perp \leftrightharpoons \perp$;

6) $xr\forall y\psi\ (y) \leftrightharpoons \forall y \exists z T_1\ (x, y, z) \wedge \forall yz\ (T_1\ (x, y, z) \supset (Uz)\ r\psi\ (y))$;

7) $xr\exists y\psi\ (y) \leftrightharpoons (j_1x)\ r\psi\ (j_2x)$.

Определим еще формулу $r\varphi$ (читатется «φ реализуемо»):

$$r\varphi \leftrightharpoons \exists x\ (xr\varphi).$$

Интуитивно, $xr\varphi$ имеет место в точности тогда, когда x есть полный набор конструкций, нужный для обоснования φ с алгоритмической, конструктивной точки зрения. Например, $xr\ (\varphi \supset \psi)$ означает, что $\{x\}$ есть алгоритм, перерабатывающий всякую реализацию φ в реализацию ψ. Если $xr\exists y\psi\ (y)$, то j_1x реализует $\psi\ (j_2x)$, т. е. x определяет как тот член, который «существует», так и реализацию утверждения ψ от этого члена. Определение реализуемости близко следует неформальному обсуждению смысла интуиционистских логических связок в п. 1 ч. 1, но отличается от него, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, эффективность уточняется в алгоритмическом стиле. Во-вторых, реализация формулы содержит все же не всю подразумеваемую информацию о формуле. Если $xr\ (\varphi \supset \psi)$, то x определяет алгоритм, необходимый для конструктивного обоснования формулы $(\varphi \supset \psi)$, но x не определяет упомянутого в п. 1 ч. 1 доказательства того, что этот алгоритм работает, как нужно. Такое доказательство должно быть проведено некоторыми средствами, неуточняемыми в рамках определения реализуемости. Тем не менее это определение оказывается согласованным с принципами НА. Точнее, имеет место следующий факт: если φ — предложение НА и НА + ЕСТ $\vdash \varphi$, то существет натуральное n такое, что НА $\vdash nr\varphi$.

Рассмотрим некоторую формализацию теории частично рекурсивных функций. Введем понятие *частично рекурсивного* (*ч. р.*) *терма* индуктивно:

1) константа 0 и числовая переменная суть ч. р. термы;

2) если p есть п. р. описание типа $\langle l, \langle\,\rangle\rangle$ (т. е. без аргументов для функций) и $t_1, \ldots, t_l$ суть ч. р. термы, то $p\ (t_1, \ldots, t_l)$ есть ч. р. терм;

3) если $t, t_1, \ldots, t_l$ суть ч. р. термы, то $\{t\}\ (t_1, \ldots, t_l)$ есть ч. р. терм.

Частично рекурсивный терм назовем *примитивно рекурсивным*, если в его определении не фигурирует п. 3); такие термы суть в точности термы языка А.

Конечно, ч. р. термы не фигурируют в языке А, однако для каждого ч. р. терма t можно определить формулу $(t = y)$ как сокращение некоторой арифметической формулы. Это определение проводится индукцией по построению t; случай, когда t имеет вид, например, $\{t_1\}\ (t_2, t_3)$, трактуется следующим образом: $(\{t_1\}\ (t_2, t_3) = y) \leftrightharpoons \exists y_1y_2y_3\ ((t_1 = y_1) \wedge (t_2 = y_2) \wedge (t_3 = y_3) \wedge \{y_1\}\ (y_2, y_3) = y)$, здесь $(t_i = y_i)$ определены на предыдущем этапе индукции (ср. сокращение на с. 48).

Далее определим (ср. Клини [2], с. 292)

$$!\, t \leftrightharpoons \exists y\ (t = y);$$
$$t = r \leftrightharpoons \exists y\ (t = y \wedge r = y);$$
$$t \simeq r \leftrightharpoons \forall y\ ((t = y) \equiv (r = y)).$$

Теперь можно доказывать в НА обычные факты относительно частично рекурсивных функций. Упомянем некоторые из них без доказательства.

5.1. *Пусть t — ч. р. терм и $x_1, \ldots, x_n$ — список различных переменных, среди которых имеются все параметры t. Тогда может быть построено натуральное n такое, что в* НА *выводимо $t \simeq \{n\}\ (x_1, \ldots, x_n)$.*

5.2. *Пусть t — замкнутый ч. р. терм, причем значение его определено и есть натуральное число n. Тогда в* НА *выводится $t = n$.*

5.3. *Пусть* t — *ч. р. терм и* x — *переменная. Тогда может быть построен* *примитивно рекурсивный* *терм* t_1, *содержащий те же параметры, что и* t, *кроме* x, *и такой, что в* НА *выводится* $\{t_1\}(x) \simeq t$.

Последний результат есть формализация так называемой S_n^m-теоремы Клини (Клини [2], с. 305, 306). Мы будем обозначать терм t_1 через (Λxt) или $\Lambda x.\ t$. Заметим, что, хотя терм t есть ч. р. терм и, вообще говоря, в язык А не входит, терм Λxt — уже вполне законный терм языка А. Назовем ч. р. терм t *всюду определенным* или *общерекурсивным*, если его значение определено при всякой замене его параметров числами.

Теперь мы можем формулировать наш вариант теоремы о согласованности реализуемости с арифметикой.

5.4. *Если* НА + ЕСТ $\vdash \varphi$, *то может быть построен общерекурсивный ч. р. терм* t, *содержащий только те параметры, которые входят в* φ, *и такой, что* НА $\vdash \exists y\,((t = y) \wedge (yr\varphi))$.

$\rhd$ Индукцией по построению вывода НА + ЕСТ $\vdash \varphi$. Необходимо построить соответствующий терм для всех аксиом НА + ЕСТ и для каждого правила вывода показать, как нужно определить термы для заключения, имея термы для посылок. Логику предикатов удобно взять в форме HPC_1. Мы опишем соответствующие термы для всех аксиом и правил вывода, а вывод в НА наметим лишь для Ind и ЕСТ. Заинтересованному читателю весьма рекомендуем восстановить все детали доказательства. Ч. р. термы, построенные для посылок правил вывода, обозначим через t и r.

Правила логики:

1) $\varphi,\ \varphi \supset \psi / \psi$; $\{r\}(t)$;
2) $\varphi \supset \psi,\ \psi \supset \eta / \varphi \supset \eta$; $\Lambda x \{r\}(\{t\}(x))$;
3) $\varphi \wedge \psi \supset \eta / \varphi \supset (\psi \supset \eta)$; $\Lambda x \Lambda y\ \{t\}(j(x, y))$;
4) $\varphi \supset (\psi \supset \eta) / \varphi \wedge \psi \supset \eta$; $\Lambda x\ \{\{t\}(j_1 x)\}(j_2 x)$;
5) $\varphi \wedge \psi \supset \varphi$; $\Lambda x j_1 x$;
6) $\varphi \wedge \psi \supset \psi \wedge \varphi$; $\Lambda x\, j(j_2 x,\ j_1 x)$;
7) $\varphi \supset \varphi \wedge \varphi$; $\Lambda x\, j(x, x)$;
8) $\varphi \supset \eta,\ \psi \supset \eta / \varphi \vee \psi \supset \eta$;

построим ч. р. терм s, зависящий от тех же параметров, что и $\varphi \vee \psi \supset \eta$, и такой, что $\{s\}(0, x) \simeq \{t\}(j_1 j_2 x)$ и $\{s\}(Sz, x) \simeq \{r\}(j_2 j_2 x)$ (причем, если, например, $!\{s\}(0, x)$, то совсем не требуется, чтобы было $!\{r\}(j_2 j_2 x)$); искомая реализация имеет вид $\Lambda x\ \{s\}(j_1 x, x)$;

9) $\varphi \supset \varphi \vee \psi$; $\Lambda x j(0, j(x, 0))$;
10) $\varphi \vee \psi \supset \psi \vee \varphi$; $\Lambda x\, j(1 \dot{-} j_1 x,\ j(j_2 j_2 x,\ j_1 j_2 x))$;
11) $\perp \supset \varphi$; $\Lambda x 0$;
13) $\forall x \varphi \supset \varphi(x \mid t)$; $\Lambda y.\ \{y\}(t)$;
14) $\varphi \supset \psi(x) / \varphi \supset \forall x \psi(x)$; $\Lambda y \Lambda x\ \{t(x)\}(y)$;
15) $\psi(x) \supset \varphi / \exists x \psi(x) \supset \varphi$; $\Lambda y\ \{t(x \mid j_1 y)\}(j_2 y)$;
16) $\varphi(x \mid t) \supset \exists x \varphi$; $\Lambda y.\ j(t, y)$.

Аксиомы арифметики. Для всех таких аксиом, имеющих вид равенства, в качестве t возьмем 0. Для аксиом, имеющих вид импликации, возьмем терм $\Lambda x 0$.

Остается проверить схему индукции и принцип ЕСТ. Для принципа индукции $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \supset \varphi(Sx)) \supset \forall x \varphi(x)$ построим натуральное n так, что

$$\{n\}(u, x, y) \simeq \{\{j_2 u\}(x)\}(y).$$

Далее с помощью примитивной рекурсии определим натуральное m таким образом, что

$$\{m\}(u, 0) \simeq j_1(u);$$
$$\{m\}(u, x+1) \simeq \{n\}(u, x, \{m\}(u, x)).$$

Окончательно результирующая реализация Ind имеет вид

$$\Lambda u \Lambda x\ \{m\}(u, x).$$

В самом деле, пусть u реализует посылку Ind, тогда $(j_1 u)\, r\varphi(0)$ и $(j_2 u)\, r \forall x(\varphi(x) \supset \varphi(Sx))$, т. е. $\{j_2 u\}(x)\, r\, (\varphi(x) \supset \varphi(Sx))$. Необходимо установить, что $\Lambda x\ \{m\}(u, x)$ реализует $\forall x \varphi(x)$. С этой целью индукцией по x докажем, что $\{m\}(u, x)$ реализует $\varphi(x)$. Но $\{m\}(u, 0) = j_1 u$, так что для $x = 0$ утверждение доказано. Пусть $\{m\}(u, x)\, r\varphi(x)$; установим, что $\{m\}(u, Sx)\, r\varphi(Sx)$. Но $\{m\}(u, Sx) \simeq \{n\}(u, x, \{m\}(u, x)) \simeq \{\{j_2 u\}(x)\}(\{m\}(u, x))$, что по вышеуказанному свойству $\{j_2 u\}(x)$ как раз и дает искомое утверждение.

Перед проверкой ЕСТ установим некоторые вспомогательные факты.

5.4.1. *В* НА

$$(r \neg \varphi) \equiv \forall x\, (xr \neg \varphi) \equiv \forall x \neg (xr\varphi).$$

5.4.2. *Пусть* φ — *негативная формула, тогда существует натуральное* n *такое, что в* НА

$$(nr\varphi) \equiv r\varphi \equiv \varphi.$$

$\triangleright$ Обозначим соответствующее n через $n[\varphi]$. Строим число $n[\varphi]$ и вывод эквивалентностей индукцией по построению φ:

$$n[t = r] = 0,\ n[\varphi \wedge \psi] = j\,(n[\varphi],\ n[\psi]),$$

$$n[\varphi \supset \psi] = \Lambda x.\, n[\psi],\ n[\bot] = 0,\ n[\forall x\psi] = \Lambda x.\, n[\psi].$$

Рассмотрим случай индукции, когда $\varphi = (\psi \supset \eta)$. Пусть $r\varphi$, например, $xr\varphi$. Покажем, что $n[\varphi]\, r\varphi$. С этой целью допустим $yr\psi$ и установим $\{n[\varphi]\}\,(y)\, r\eta$. Ввиду $xr\,(\varphi)$ имеем $\{x\}\,(y)\, r\eta$, так что $r\eta$ и, следовательно, по индуктивному предположению, η и $n[\eta]\, r\eta$. Но $n[\varphi] = \Lambda xn\,[\eta]$, так что $\{n[\varphi]\}\,(y) = n[\eta]$ реализует η. Итак, $n[\varphi]\, r\,\varphi$. Покажем, что отсюда в свою очередь следует φ. Допустим ψ и установим η. Если ψ, то $n[\psi]\, r\psi$ (по индуктивному предположению), а тогда $\{n[\varphi]\}\,(n[\psi])\, r\eta$, т. е. $r\eta$ и, значит, η. Остается из φ вывести $r\varphi$. Достаточно, допустив φ, получить $n[\varphi]\ r\varphi$. Пусть $yr\psi$; покажем $\{n[\varphi]\}\,(y)\, r\eta$. Но $\{n[\varphi]\}\,(y) = n[\eta]$. Если $yr\psi$, то $r\psi$ и, значит, ψ. А отсюда ввиду φ, имеем η, что дает $n[\eta]\, r\eta$. $\square$

5.4.3. *Пусть* φ — *почти негативная формула. Тогда существует ч. р. терм* t, *содержащий лишь те параметры, которые имеются в* φ, *и такой, что в* НА

$$r\varphi \equiv \exists y\, ((t = y) \wedge (yr\varphi)).$$

$\triangleright$ Обозначим соответствующий терм через $t\,(\varphi)$. Строим $t\,(\varphi)$ индукцией по построению φ:

$$t\,[t = r] = 0;\ \ t\,[\varphi \wedge \psi] = j\,(t\,[\varphi],\ \ t\,[\psi]);$$

$$t\,[\varphi \supset \psi] = \Lambda xt\,[\psi];\ \ t\,[\bot] = 0;\ \ t\,[\forall x\psi] = \Lambda xt\,[\psi];$$

$$t\,[\exists x\psi] = j\,(0,\ \mu x\psi).$$

Ввиду почти негативности, в комбинации $\exists x\psi$ формула ψ атомарна, поэтому можно построить ч. р. терм $\mu x\psi$, выдающий наименьшее x, удовлетворяющее равенству ψ,

если такое x существует, и не определенный в противном случае. $\square$

Рассмотрим теперь принцип ECT:

$$\forall x\, (\psi\,(x) \supset \exists y\varphi\,(x, y)) \supset$$
$$\exists e\forall x\, (\psi\,(x) \supset \exists v\, (T_1\,(e, x, v) \wedge \varphi\,(x, Uv))).$$

Мы записали его в эквивалентной форме, более удобной для проверки. Здесь $\psi\,(x)$ — почти негативная формула, так что согласно 5.4.3 можно найти соответствующий терм $t\,(x)$.

Далее, если $ur\forall x\, (\psi\,(x) \supset \exists y\varphi\,(x, y))$, то

$$\{u\}\,(x)\ r\,(\psi\,(x) \supset \exists y\varphi\,(x, y)).$$

Поэтому, если $r\psi\,(x)$, то найдется $\bar{y}$, $t\,(x) = \bar{y}$ и $\bar{y}r\psi\,(x)$ и отсюда $\{\{u\}\,(x)\}\,(\bar{y})\ r\exists y\ \varphi\,(x, y)$, что дает

$$j_1\,(\{\{u\}\,(x)\}\,(\bar{y}))\ r\varphi\,(x,\ j_2\,(\{\{u\}\,(x)\}\,(\bar{y}))).$$

Определим ч. р. термы

$$r_1\,(u) \rightleftharpoons \Lambda xj_1\,(\{\{u\}\,(x)\}\,(t\,(x))),$$
$$r_2(u) \rightleftharpoons \Lambda xj_2\,(\{\{u\}\,(x)\}\,(t\,(x))).$$

Из отмеченного выше следует, что из $ur\forall x\, (\psi \supset \exists y\varphi\,(x, y))$ и $r\psi\,(x)$ следует $!\{r_1\,(u)\}\,(x)$, $!\{r_2\,(u)\}\,(x)$ и $\{r_1\,(u)\}\,(x)\ r\varphi\,(x,\ \{r_2\,(u)\}\,(x))$.

Определим теперь натуральное число A так, что

$$!\{A\}\,(e, x) \equiv\ !\{e\}\,(x);$$
$$\{A\}\,(e, x) = z \supset T_1\,(e, x, z).$$

Теперь мы можем написать терм, реализующий ECT:

$$\Lambda u.j\,(\Lambda x\Lambda w.j\,(j\,(0,\ \{r_1\,(u)\}\,(x)),\ \{A\}\,(r_2\,(u),\ x)),\ r_2\,(u)).$$

Проверка того, что этот терм удовлетворяет условиям теоремы, непосредственна и опирается на вышеупомянутые свойства $r_1\,(u)$, $r_2\,(u)$, A.

Доказательство 5.4 закончено. Отметим, что параллельно доказательству выводимости в НА формулы $\exists y\, ((t = y) \wedge (yr\varphi))$ нам необходимо установить еще и некоторый содержательный факт, а именно, общерекурсивность t. Это установление фактически сводится к тому, что мы на каждом этапе индукции по построению вывода повторяем содержательно формальное доказательство

$\exists y\,(t = y)$, которое нам приходится проводить в процессе вывода в НА для вышеупомянутой формулы. □

5.5. Следствие. *Если* НА + ЕСТ $\vdash \varphi$, *то* НА $\vdash r\varphi$.

5.6. *Если* φ *— негативная формула, то*

$$\text{HA} + \text{ECT} \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{HA} \vdash \varphi.$$

▷ С помощью 5.5 и 5.4.2. □

5.7. НА + ЕСТ *непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива* НА.

Сравните 5.5—5.7 и 3.5—3.7. Мы видим, что «арифметика реализуемости» НА + ЕСТ, так же как и FA, интерпретируется в НА, причем негативные формулы в НА, FA и НА + ЕСТ выводятся одни и те же. Различие в понимании логических связок в различных теориях не сказывается, если отсутствуют «существенно конструктивные» связки — дизъюнкция и существование. Попутно мы построили погружающую операцию, позволяющую интерпретировать сугубо конструктивную теорию НА + ЕСТ в нейтральной теории НА.

Следующая теорема оправдывает название «арифметика реализуемости» за теорией НА + ЕСТ.

5.8. 1) *В* НА + ЕСТ *выводится* $\varphi \equiv r\varphi$ *для всякой формулы* φ.

2) *Если к* НА *присоединить в качестве схемы аксиом* $\varphi \equiv r\varphi$ *для всех формул* φ, *то принцип* ЕСТ *выводится в полученной теории.*

▷ 1) доказывается индукцией по построению φ. Когда φ начинается с квантора общности $\forall$, используем принцип СТ. В случае же, когда φ имеет вид импликации, используется полный принцип ЕСТ. При этом существенно, что формула вида $(xr\psi)$ является почти негативной.

2) Так как НА + ЕСТ $\vdash$ ЕСТ, то НА $\vdash r$ (ЕСТ) согласно 5.5. □

5.9. НА + ЕСТ $\vdash$ nСТ.

▷ Достаточно показать, что в НА + ЕСТ всякая формула, начинающаяся с отрицания, эквивалентна почти негативной. Используем 5.8, $\psi \equiv \exists y\,(yr\psi)$, $\neg\psi \equiv \forall y \neg (yr\psi)$, и справа стоит почти негативная формула. □

Отметим далее свойства дизъюнктивности и экзистенциальности НА + ЕСТ.

5.10. *Пусть* $\varphi \vee \psi$ *— предложение А,* $\vdash$ *означает выводимость в* НА + ЕСТ. *Тогда из* $\vdash \varphi \vee \psi$ *следует* $\vdash \varphi$ *или* $\vdash \psi$.

Пусть НА + ЕСТ $\vdash \varphi \vee \psi$. Ввиду 5.4 может быть построен замкнутый общерекурсивный терм t такой, что в НА имеем $\exists y\,((t = y) \wedge yr\,(\varphi \vee \psi))$. Так как t общерекурсивен, то можно вычислить натуральное число n — его значение. Ввиду 5.2 в НА выводится $t = n$. Отсюда в НА $\vdash nr\,(\varphi \vee \psi)$. Далее рассмотрим случаи $j_1 n = 0$ или $j_1 n \neq 0$. Пусть, например, $j_1 n = 0$, тогда НА $\vdash j_1 n = 0$ и из определения $xr\,(\varphi \vee \psi)$ непосредственно НА $\vdash (j_1 j_2 n)\, r\varphi$. Согласно 5.8 тогда НА + ЕСТ $\vdash \varphi$. □

5.11. *Пусть* $\exists x\psi(x)$ *— предложение А и* $\vdash$ *означает выводимость в* НА + ЕСТ. *Тогда, если* $\vdash \exists x\psi(x)$, *то существует натуральное* n, *для которого* $\vdash \psi(n)$.

▷ Аналогично 5.10. □

Разумеется, для формул с параметрами подобные свойства, вообще говоря, неверны. Например, выводится формула $x = 0 \vee \neg x = 0$ (см. 3.1), но, конечно, нельзя вывести в отдельности $x = 0$ или $\neg x = 0$. Полученные результаты сходны с пп. 4.3 и 4.4 ч. 1, и их интуиционистскую приемлемость можно обосновать следующим образом: если мы интуиционистски вывели предложение $\exists x\psi(x)$, то это — некоторое конкретное сообщение, относящееся к теории чисел. Эффективное понимание квантора существования предполагает, что можно найти натуральное n такое, что $\psi(n)$.

Если формальная теория не удовлетворяет свойствам типа 5.10, 5.11, то это не означает, что теория неприемлема с интуиционистской точки зрения — она может быть просто существенно неполна. Однако, наличие свойств дизъюнктивности и экзистенциальности является некоторым доводом, указывающим на существенно интуиционистский характер теории. Во главу угла интуиционистская математика ставит «эффективное понимание» логических связок, и указанные теоремы являются одним из подтверждений этой эффективности. Нашей же задачей является обсуждение и уточнение идеи эффективности в математических теориях.

Вот еще одна типичная теорема, свидетельствующая об эффективном характере НА + ЕСТ.

5.12. *Пусть* $\forall x \exists y\, \varphi(x, y)$ — *предложение* А, $\vdash$ — *выводимость в* НА + ЕСТ. *Тогда из* $\vdash \forall x \exists y\, \varphi(x, y)$ *следует, что существует натуральное* n *такое, что* $\vdash \forall x \exists y\, (\{n\}(x) = y \wedge \varphi(x, y))$.

$\triangleright$ Если $\vdash \forall x \exists y\, \varphi(x, y)$, то ввиду СТ $\vdash \exists e \forall x \exists y\, (\{e\}(x) = y \wedge \varphi(x, y))$. Остается воспользоваться 5.11. $\square$

6. Рекурсивная реализуемость и свойства эффективности логических связок в НА. Для нейтральной теории НА факты типа 5.10—5.12, свидетельствующие об эффективном характере логических связок, также имеют место, но доказательство их иное (так как нельзя воспользоваться ЕСТ и теоремой 5.8). Следует модифицировать понятие реализуемости таким образом, чтобы из реализуемости формулы следовала она сама. Мы воспользуемся модификацией одной конструкции Клини [4] — [6].

А именно, определим формулу $(xr_1\varphi)$ индукцией по построению φ совершенно аналогично $(xr\varphi)$ в п. 5. Все пункты этой индукции будут иметь тот же вид, что в п. 5 (с заменой r на r_1), за одним единственным исключением: случай импликации приобретает вид

$$xr_1(\varphi \supset \psi) \leftrightharpoons (\varphi \supset \psi) \wedge \forall y\, (yr_1\varphi \supset \exists v T_1(x, y, v)) \wedge \forall yz\, (yr_1\varphi \wedge T_1(x, y, z) \supset (Uz)\, r_1\psi).$$

Таким образом, по сравнению с $xr(\varphi \supset \psi)$ добавляется конъюнктивно член $(\varphi \supset \psi)$. Поэтому формула $(xr_1\varphi)$ уже не является почти негативной.

В утверждениях 6.1— 6.5 ниже знак $\vdash$ означает выводимость в НА.

6.1. $\vdash ((xr_1\varphi) \supset \varphi)$.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. $\square$

6.2. *Если* $\vdash \varphi$, *то существует общерекурсивный ч. р. терм* t *такой, что* $\vdash \exists y\, ((t = y) \wedge (yr_1\varphi))$.

$\triangleright$ Аналогично 5.4; фактически нужно использовать те же термы, что и в доказательстве 5.4. $\square$

6.3. *Если* $\vdash \varphi \vee \psi$, *где* φ, ψ *замкнуты, то* $\vdash \varphi$ *или* $\vdash \psi$.

$\triangleright$ Пусть $\vdash \varphi \vee \psi$. Ввиду 6.2 найдется общерекурсивный терм t такой, что в НА имеем $\exists y\, ((t = y) \wedge yr_1(\varphi \vee \psi))$. Так как t общерекурсивен, то можно вычислить его значение n. Ввиду 5.2 $\vdash t = n$ и отсюда $nr_1(\varphi \vee \psi)$. Рассмотрим случаи $j_1 n = 0$ или $j_1 n \neq 0$. Пусть, например, $j_1 n \neq 0$, тогда $\vdash j_1 n \neq 0$ и из определения непосредственно $\vdash j_2 j_2 n r_1 \psi$. Ввиду 6.1 отсюда $\vdash \psi$. $\square$

6.4. *Если* $\vdash \exists x \psi(x)$, *где* $\exists x \psi(x)$ *замкнуто, то существует натуральное* n, *для которого* $\vdash \psi(n)$.

6.5. *Если* $\vdash \forall x \exists y \varphi(x, y)$, $\forall x \exists y\, \varphi(x, y)$ *замкнуто, то существует натуральное* n *такое, что* $\vdash \forall x \exists y\, (\{n\}(x) = y \wedge \varphi(x, y))$.

$\triangleright$ Пусть $\vdash \forall x \exists y\, \varphi(x, y)$. Ввиду 6.2 отсюда $\vdash \exists e\, (t = e \wedge er_1 \forall x \exists y \varphi(x, y))$. Ввиду 6.4 найдется натуральное m, $\vdash mr_1 \forall x \exists y\, \varphi(x, y)$. По определению реализуемости отсюда $\vdash \forall x \exists y\, (\{m\}(x) = y \wedge j_1 y r_1 \varphi(x, j_2 y))$. Ввиду 6.1 отсюда $\vdash \forall x \exists y\, (\{m\}(x) = y \wedge \varphi(x, j_2 y))$. Достаточно теперь определить n, так, чтобы

$$\vdash \{n\}(x) \simeq j_2(\{m\}(x)). \ \square$$

7. Принцип конструктивного подбора (принцип Маркова) и принцип Р. А. А. Марков в лекциях 1952—53 гг. предложил в качестве принципа, приемлемого с конструктивной точки зрения, утверждение, которое в нашем языке может быть записано следующим образом:

$$\text{M:}\ \forall x\, (\varphi(x) \vee \neg \varphi(x)) \wedge \neg\neg \exists x\, \varphi(x) \supset \exists x\, \varphi(x).$$

В пользу приемлемости этого принципа можно привести следующий довод (ср. Марков [1]): допустим посылки М и укажем способ разыскания x такого, что $\varphi(x)$. С этой целью будем постепенно порождать натуральные числа 0, 1, 2, ... и для каждого n проверять $\varphi(n)$ или $\neg\varphi(n)$ (это осуществимо ввиду гипотезы $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$). Если $\varphi(n)$, то нужное $n = x$ найдено. Наш процесс не может продолжаться безгранично, иначе было бы $\neg \exists x\, \varphi(x)$, в то время как по допущению $\neg\neg \exists x \varphi(x)$. Следовательно, процесс закончится (это —главный момент рассуждения!); когда он закончится, мы и найдем нужное x.

Принцип Маркова нашел широкое применение, особенно в работах советской школы конструктивной математики, см., например, Кушнер [1]. Логические аспекты этого принципа широко исследовались методами теории доказательств (Драгалин [1], Трулстра [6]). Фактически различные аналоги этого принципа привлекали внимание специалистов еще и до точной формулировки его А. А. Марковым (Новиков [1], Брауэр [1], [3]), причем формулировались доводы в пользу как его приемлемости, так и неприемлемости в различных ситуациях. Обобщение принципа Маркова для предикатов, определяемых по индукции, и приложения этого обобщения к проблемам теории доказательств можно найти в работе Драгалина [8]. Здесь мы исследуем этот принцип в рамках формальной арифметики.

Рассмотрим более слабую версию принципа Маркова:

$$\mathrm{M}^-:\ \neg\neg\exists x\varphi \supset \exists x\varphi,$$

где φ — бескванторная формула. М влечет M^- ввиду 3.1.

7.1. *В* НА + СТ! *принципы* М *и* M^- *эквивалентны.*

$\triangleright$ Допустим $\forall x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ и $\neg\neg\exists x\,\varphi(x)$ и установим $\exists x\varphi(x)$. Положим

$$\psi(x, z) \leftrightharpoons (z = 0 \wedge \varphi(x)) \vee (z = 1 \wedge \neg\varphi(x)).$$

Из допущения имеем $\forall x\exists! z\psi(x, z)$. Ввиду СТ! найдется e такое, что $\forall x\exists z\,(\{e\}(x) = z \wedge \psi(x, z))$. Из допущений получаем $\neg\neg\exists xv\,(T_1(e, x, v) \wedge Uv = 0)$, т. е.

$$\neg\neg\exists w\,(T_1(e, j_1w, j_2w) \wedge Uj_2w = 0).$$

Применяя M^-, заключаем, что найдется $w = j(x, v)$ такое, что $T_1(e, x, v)$ и $Uv = 0$. Для этого x и имеем $\varphi(x)$. $\square$

7.2. *В* НА + M^- *принципы* ЕСТ *и* nСТ *эквивалентны.*

$\triangleright$ См. 5.9. Чтобы вывести ЕСТ из nСТ, достаточно заметить, что в присутствии M^- всякая почти негативная формула эквивалентна негативной, так как

$$\exists x\,(t = r) \equiv \neg\neg\exists x\,(t = r) \equiv \neg\forall x\neg(t = r).$$

Далее используем 3.2. $\square$

В теории НА + ЕСТ + М (= НА + nСТ + M^-) естественно формализуются все основные результаты, полученные в рамках конструктивного анализа в стиле школы Маркова. Эта теория интерпретируется в FA.

7.3. *Если* НА + ЕСТ + М $\vdash \varphi$, *то может быть построен общерекурсивный терм* t, *содержащий только те параметры, которые входят в* φ, *и такой, что* FA $\vdash \exists y\,((t = y) \wedge (y r \varphi))$.

$\triangleright$ Дословно повторяет 5.4. Использование FA вместо НА позволяет установить реализуемость принципа M^- (см. 5.1). Для реализации $\neg\neg\exists x\varphi(x) \supset \exists x\varphi(x)$ возьмем терм $\Lambda y.j(0, \mu x\varphi)$, где $\mu x\varphi$ — «наименьшее x такое, что φ» — есть ч. р. терм, определяемый бескванторной формулой φ. Если $yr\neg\neg\exists x\varphi$, то $\neg\neg\exists x\varphi$ и в классической теории FA имеем $\exists x\varphi$ и, значит, определено $\mu x\varphi$. $\square$

С помощью 3.5 и 5.4.2 отсюда нетрудно получить

7.4. *Если* φ — *негативная формула, то*

$$\text{НА} + \text{ЕСТ} + \text{М} \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{НА} \vdash \varphi.$$

7.5. *Если* НА — *непротиворечивая теория, то* НА + ЕСТ + М *также непротиворечива.*

Рассмотрим теперь принцип Р, являющийся в некотором смысле альтернативой к М:

$$\mathrm{P}:\quad (\neg\psi \supset \exists y\,\varphi(y)) \supset \exists y\,(\neg\psi \supset \varphi(y)),$$

где ψ не содержит свободно y.

В пользу этого принципа можно привести следующую интуитивную аргументацию. Можно допустить, что все алгоритмы, нужные для конструктивного обоснования формул, берутся из некоторого заранее заданного семейства. Это семейство достаточно богато, чтобы «обеспечить» алгоритмами все аксиомы и правила вывода НА, но все же состоит далеко не из всех алгоритмов. Например, в нашем семействе может быть заранее обеспечена всюду определенность на объектах нужных типов. Такой подход может быть приемлем с некоторой «узкоконструктивной» точки зрения, когда считается интуитивно неясным ничем не ограниченное понятие общерекурсивной функции. В этой ситуации, если реализована посылка Р, нужное y может быть получено непосредственно применением к этой реализации тривиальной реализации формулы $\neg\psi$. Эти рассуждения находятся, однако, в конфликте с аргументацией в пользу М, где процесс проверки $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ... ничем заранее не ограничен.

Следующая лемма является точным выражением этого конфликта.

7.6. *В* НА + СТ! *принципы* Р *и* M^- *несовместны.*

$\triangleright$ Если M^-, то, в частности,

$$\forall x\,(\neg\neg\exists y T_1(x, x, y) \supset \exists y\, T_1(x, x\, y)).$$

Ввиду Р отсюда получаем

$$\forall x\exists y\,(\neg\neg\exists y T_1(x, x, y) \supset T_1(x, x, y)).$$

Вновь пользуясь M^-, отсюда выводим

$$\forall x \exists z\, (\exists y T_1\,(x, x, y) \supset T_1\,(x, x, z)).$$

Далее по законам логики

$$\forall x\, (\exists y T_1\,(x, x, y) \vee \neg \exists y\, T_1\,(x, x, y)),$$

что противоречит CT! (см. 4.1). □

Таким образом, теории HA + nCT + M и HA + nCT + P противоречат друг другу. Тем не менее сама по себе вторая теория ничуть не хуже первой. В частности, она интерпретируется в HA. Для установления этого мы введем еще один вид реализуемости.

Пусть φ — формула A; определим формулу $(x\varepsilon\varphi)$ с единственным параметром x, которую можно читать как «x есть возможный кандидат в реализации для φ», индукцией по построению φ:

1) $x\varepsilon\,(t = r) \rightleftharpoons (x = x)$;
2) $x\varepsilon\,(\varphi \wedge \psi) \rightleftharpoons (j_1 x\varepsilon\varphi) \wedge (j_2 x\varepsilon\psi)$;
3) $x\varepsilon\,(\varphi \vee \psi) \rightleftharpoons ((j_1 j_2 x)\varepsilon\varphi) \wedge ((j_2 j_2 x)\varepsilon\psi)$;
4) $x\varepsilon\,(\varphi \supset \psi) \rightleftharpoons \forall y\,(y\varepsilon\varphi \supset \exists z\,(\{x\}\,(y) = z \wedge z\varepsilon\psi))$;
5) $x\varepsilon \perp \rightleftharpoons (x = x)$;
6) $x\varepsilon\forall y\psi\,(y) \rightleftharpoons \forall y \exists z\,(\{x\}\,(y) = z \wedge \forall v\,(z\varepsilon\psi\,(v)))$;
7) $x\varepsilon\, \exists y\psi\,(y) \rightleftharpoons \forall y\,(j_1 x\, \varepsilon\psi\,(y))$.

7.7.1. *Для всякой формулы* φ *может быть определено натуральное* n *такое, что* HA $\vdash (n\varepsilon\varphi)$.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. Ср. с леммой п. 5.4.2. □

Теперь определим нашу модифицированную реализацию.

1) $xr_2\,(t = r) \rightleftharpoons (t = r)$;
2) $xr_2\,(\varphi \wedge \psi) \rightleftharpoons ((j_1 x)\, r_2\varphi) \wedge ((j_2 x) r_2\psi)$;
3) $xr_2\,(\varphi \vee \psi) \rightleftharpoons x\varepsilon\,(\varphi \vee \psi) \wedge$
$(j_1 x = 0 \supset (j_1 j_2 x) r_2\varphi) \wedge (j_1 x \neq 0 \supset (j_2 j_2 x)\, r_2\psi)$;
4) $xr_2\,(\varphi \supset \psi) \rightleftharpoons x\varepsilon\,(\varphi \supset \psi) \wedge$
$\forall yz\,(yr_2\varphi \wedge T_1\,(x, y, z) \supset (Uz)\, r_2\psi)$;
5) $xr_2 \perp \rightleftharpoons \perp$;
6) $xr_2\forall y\psi\,(y) \rightleftharpoons x\varepsilon\forall y\psi\,(y) \wedge$
$\forall yz\,(T_1\,(x, y, z) \supset (Uz) r_2\psi\,(y))$;
7) $xr_2\exists y\psi\,(y) \rightleftharpoons (j_1 x)\, r_2\psi\,(j_2 x)$.

Как видно, отличие от реализуемости r состоит в дополнительном требовании $(x\varepsilon\varphi)$ для некоторых видов формулы φ.

7.7.2. *В* HA *имеем* $(xr_2\varphi) \supset (x\varepsilon\varphi)$.

$\triangleright$ Непосредственной индукцией по построению φ. □

Нас будет интересовать теория HA + nCT + P.

Отметим предварительно

7.7.3. *В* HA + P *принципы* CT *и* nCT *эквивалентны*.

$\triangleright$ Очевидно, из nCT следует CT (и даже в HA). Обратно, допустим CT. Если допустить посылку nCT вида $\forall x\,(\neg\psi\,(x) \supset \exists y\, \varphi\,(x, y))$, то ввиду P отсюда $\forall x \exists y\,(\neg\psi\,(x) \supset \varphi\,(x, y))$. Остается воспользоваться принципом CT. □

Основной факт относительно реализуемости r_2 выражается следующей теоремой.

7.8. *Если* HA + nCT + P $\vdash \varphi$, *то может быть построен общерекурсивный терм* t, *содержащий только параметры* φ, *такой, что* HA $\vdash \exists y\,((t = y) \wedge (yr_2\varphi))$.

$\triangleright$ Нужный терм t строим индукцией по построению вывода HA + nCT + P $\vdash \varphi$ аналогично доказательству 5.4. Фактически предлагаемые в доказательстве 5.4 термы нужно лишь немного подправить, чтобы они оказались возможными кандидатами в реализацию r_2. Например, для аксиомы 9) $\varphi \supset \varphi \vee \psi$ вместо терма $\Lambda x.j\,(0, j\,(x, 0))$ следует взять $\Lambda x.j\,(0, j\,(x, n\,[\psi]))$ (терм $n\,[\psi]$ строится в 7.7.1). Принцип CT рассматривается аналогично ECT (рассматривать nCT отдельно нет необходимости ввиду 7.7.3).

Остановимся подробнее на принципе P. Пусть $ur_2\,(\neg\psi \supset \exists y\varphi\,(y))$. Если $\neg\psi$ реализуемо, то $\Lambda x 0 r_2\, \neg\psi$ (напомним, что $\neg\psi \rightleftharpoons (\psi \supset \perp)$). Кроме того, независимо от реализуемости $\neg\psi$ всегда $\Lambda x 0 \varepsilon\, \neg\psi$. Так как $u\varepsilon\,(\neg\psi \supset \exists y\, \varphi\,(y))$, то всегда определено $\{u\}\,(\Lambda x 0)$. Если же $\neg\psi$ реализуемо, то дополнительно имеем $\{u\}\,(\Lambda x\, 0)\, r_2\exists y\varphi\,(y)$ и в этом случае $j_1\,(\{u\}\,(\Lambda x 0))\; r_2\varphi\,(j_2\,(\{u\}\,(\Lambda x\, 0)))$. При нашем допущении мы можем реализовать $\exists y\,(\neg\psi \supset \varphi\,(y))$ термом $t\,(u) \rightleftharpoons j\,(\Lambda v j_1\,(\{u\}\,(\Lambda x 0)), j_2(\{u\}\,(\Lambda x 0)))$. Действительно, как отмечено выше, из $ur_2\,(\neg\psi \supset \exists y\varphi\,(y))$ следует, что определено число $p = \{u\}\,(\Lambda x 0)$. Необходимо показать, что $\Lambda v.j_1\,(p)\; r_2\,(\neg\psi \supset \varphi\,(j_2 p))$. Пусть $vr_2\,\neg\psi$; покажем, что $(j_1 p)\; r_2\varphi\,(j_2 p)$. Но это следует из рассуждений выше. Теперь в качестве реализации P можно взять терм $\Lambda u t\,(u)$. □

7.9. *Если* φ — *негативная формула, то существует натуральное n такое, что в* НА

$$(nr_2\varphi) \equiv r_2\varphi \equiv \varphi.$$

$\rhd$ См. 5.4.2. $\square$

7.10. *Если* φ — *негативная формула, то*

$$\mathrm{HA} + \mathrm{nCT} + \mathrm{P} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{HA} \vdash \varphi.$$

7.11. *Если* НА *непротиворечива, то непротиворечива и теория* НА + nCT + P.

8. Дополнительные результаты. Мы рассмотрели серию интуиционистских формальных аксиоматических теорий:

1) НА + «нейтральная арифметика»;
2) FA — «классическая арифметика»;
3) НА + ЕСТ — «арифметика реализуемости»;
4) НА + ЕСТ + М — «традиционный конструктивизм»;
5) НА + nCT + P — «нетрадиционный конструктивизм».

Можно сказать, что теории 2) — 5) отражают различные способы понимания логических связок: 2) — теория с классической логикой, а 4) и 5) отражают различные варианты конструктивного, алгоритмического понимания. При этом варианты 4) и 5) противоречат друг другу! Это не мешает всем нашим теориям интерпретироваться в самой бедной нейтральной теории НА. Если представить себе математика, который придерживается принципов одной из этих теорий в качестве «подлинно истинных» (для классически настроенного математика это может быть FA, для конструктивиста — теория 4) или 5)), то он может вполне воспринимать и теоремы другой теории, но косвенно, через соответствующую интерпретацию. Интересный класс составляют негативные формулы. Теоремы, имеющие негативный вид, одинаковы во всех теориях и в этом смысле «нейтральны», «не содержат конструктивной задачи».

Наш вывод состоит в том, что не существует одного выделенного конструктивного или интуиционистского понимания логических связок. Скорее, следует говорить о целом спектре семантик с различными оттенками эффективности. Классическая теория FA и конструктивная НА + ЕСТ + М — всего лишь разные полюсы в этом спектре.

Мы значительно укрепимся в этой мысли, когда перейдем к изучению теорий интуиционистского анализа, где возможности различных пониманий еще гораздо разнообразнее.

8.1. *Теории с интуиционистской логикой* 1), 3) — 5) *обладают свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности.*

$\rhd$ Для теорий 1) и 3) мы проверили это в пп. 5.10—5.12 и 6.3—6.5. Для теорий 4) и 5) достаточно модифицировать их основные реализуемости r и r_2 в стиле п. 6. Мы ограничимся этими краткими замечаниями. $\square$

Мы ввели несколько вариантов тезиса Чёрча. Нетрудно усмотреть, что в НА имеют место импликации:

$$\mathrm{ECT} \supset \mathrm{nCT} \supset \mathrm{CT} \supset \mathrm{CT!}.$$

Следующий результат принадлежит Лифшицу [1].

8.2. *Существует такой пример схемы* CT, *который не выводится в* НА + CT!.

$\rhd$ Доказательство Лифшица основано на специальном понятии реализуемости. Положим

$$(x \in V_y) \leftrightharpoons (x \leqslant j_1 y) \wedge \neg ! \{j_2 y\}(x).$$

Далее индукцией по построению формулы определим:

1) $xr_3(t = r) \leftrightharpoons (t = r)$;
2) $xr_3(\varphi \wedge \psi) \leftrightharpoons (j_1 x) r_3 \varphi \wedge (j_2 x) r_3 \psi$;
3) $xr_3(\varphi \vee \psi) \leftrightharpoons \exists y\, (y \in V_x) \wedge \forall y\, (y \in V_x \supset (j_1 y = 0 \supset (j_1 j_2 y) r_3 \varphi) \wedge (j_1 y \neq 0 \supset (j_2 j_2 y) r_3 \psi))$;
4) $xr_3(\varphi \supset \psi) \leftrightharpoons \forall y\, (yr_3\varphi \supset \exists z T_1(x, y, z)) \wedge \forall yz\, (yr_3\varphi \wedge T_1(x, y, z) \supset (Uz) r_3 \psi)$;
5) $xr_3 \perp \leftrightharpoons \perp$;
6) $xr_3 \forall y \psi(y) \leftrightharpoons \forall y \exists z T_1(x, y, z) \wedge \forall yz\, (T_1(x, y, z) \supset (Uz)\, r_3\, \psi(y))$;
7) $xr_3 \exists y \psi(y) \leftrightharpoons \exists y\, (y \in V_x) \wedge \forall y\, (y \in V_x \supset (j_1 y)\, r_3\, \psi(j_2 y))$,

$r_3\varphi \leftrightharpoons \exists x\, (xr_3\varphi)$.

Таким образом, отличие от реализуемости r относится лишь к дизъюнкции и существованию.

Далее доказывается теорема корректности типа 5.4. Здесь она звучит следующим образом:

8.2.1. *Если* НА + СТ! $\vdash \varphi$, *то может быть построен ч. р. терм* t *такой, что* FA $\vdash \exists y\, ((t = y) \wedge y r_3 \varphi)$.

Доказывается теорема индукцией по построению вывода НА + СТ! $\vdash \varphi$ аналогично 5.4. Среди логических постулатов (в формулировке HPC_1) отличным от 5.4 образом трактуются лишь постулаты, относящиеся к дизъюнкции и существованию. Мы рассмотрим их последовательно, доказывая попутно необходимые вспомогательные факты. При этом мы перейдем на несколько более беглый стиль изложения, чем в доказательстве 5.4.

Мы начнем с леммы

8.2.2. *По всякой формуле* φ *может быть построен ч. р. терм* $t\,(y)$, *содержащий, кроме параметров* φ, *только еще новую переменную* y, *такой, что в* FA *имеем*

$$\exists z\, (z \in V_y) \wedge \forall z\, (z \in V_y \supset (z r_3 \varphi)) \supset \exists v)\, ((t\,(y) = v) \wedge (v r_3 \varphi)).$$

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. Обозначим соответствующий терм через $t\,[\varphi]\,(y)$, вместо V_y будем писать $V\,[y]$. Вместо явного определения $T\,[\varphi]\,(y)$ будем иногда просто описывать, как нужно вычислять $t\,[\varphi]\,(y)$.

$\varphi = (\psi \wedge \eta)$. По данному y найдем эффективно (используя утверждение 8.2.3 ниже) y_1 и y_2 так, что

$$V\,[y_1] = \{j_1 z \mid z \in V\,[y]\}, \quad V\,[y_2] = \{j_2 z \mid z \in V\,[y]\}.$$

Затем положим $t\,[\varphi]\,(y) = j\,(t\,[\psi]\,(y_1),\ t\,[\eta]\,(y_2))$.

8.2.3. *Пусть* a *и* y *таковы, что* $(\forall z \in V\,[y])\, !\{a\}\,(z)$. *Тогда можно алгоритмически указать* y_1,

$$V\,[y_1] = \{\{a\}\,(z) \mid z \in V\,[y_1]\}.$$

$\triangleright$ Из определения $V\,[y]$ и a следует, что для всех z имеем $!\{a\}\,(z) \vee !\{j_2 y\}\,(z)$. Определим общерекурсивную функцию $f\,(u)$ следующим образом: начнем применять одновременно $\{a\}\,(z)$ и $\{j_2 y\}\,(z)$. Если первым применится $\{a\}\,(z)$, то $f\,(z) = \{a\}\,(z) + 1$. Если же первым применится $\{j_2 y\}\,(z)$, то $f\,(z) = 0$. Пусть $b = \max\limits_{u \leqslant j_1 y} f\,(u)$. Определим ч. р. функцию $\{d\}$ так, что

$$!\{d\}\,(z) \equiv (\forall n \leqslant j_1 y)\ (!\{j_2 y\}\,(n) \vee f\,(n) = 0 \vee Sk \neq f\,(n)).$$

Теперь достаточно положить $y_1 = j\,(b,\ d)$. $\square$

$\varphi = (\psi \vee \eta)$. По y найдем эффективно (с помощью утверждения 8.2.4 ниже) y_1 такое, что

$$V\,[y_1] = \bigcup\, \{V\,[z] \mid z \in V\,[y]\}.$$

Остается положить $y_1 = t\,[\varphi]\,(y)$.

8.2.4. *По* y *можно алгоритмически указать* y_1 *такое, что* $V\,[y_1] = \bigcup\, \{V\,[z] \mid z \in V\,[y]\}$.

$\triangleright$ Определим ч. р. функцию $\{d\}$, так, что $!\{d\}\,(n) \equiv (\forall k \leqslant j_1 y)\ (!\{j_2 y\}\,(k) \vee (j_1 k < n) \vee !\{j_2 k\}\ (n))$. Положим $a = \max\limits_{k \leqslant j_1 y} (j_1 k)$. Остается положить $y_1 = j\,(a,\ d)$.

$\varphi = (\psi \supset \eta)$. Пусть дано y; определим ч. р. функцию $\{d\}$ таким образом, чтобы из $(\forall k \in V\,[y])\, !\{k\}\,(a)$ следовало $V\,[\{d\}\,(a)] = \{\{k\}\,(a) \mid k \in V\,[y]\}$. Для построения такого d следует использовать 8.2.5 ниже. Далее определим $\{t\,[\varphi]\,(y)\}\,(a) \simeq t\,[\eta]\,(\{d\}\,(a))$. $\square$

8.2.5. *Можно построить ч. р. функцию* $f\,(y,\ a)$ *такую, что из* $(\forall k \in V\,[y])\, !\{k\}\,(a)$ *следует, что определено* $y_1 = f\,(y,\ a)$ *и* $V\,[y_1] = \{\{k\}\,(a) \mid k \in V\,[y]\}$.

$\triangleright$ Если a удовлетворяет указанному условно, то для всякого k $!\{k\}\,(a)$ или $!\{j_2 y\}\,(k)$. Определим общерекурсивную функцию $f\,(k)$: одновременно применяем $\{k\}\,(a)$ и $\{j_2 y\}\,(k)$. Если сначала применяется $\{k\}\,(a)$, то положим $f\,(k) = \{k\}\,(a) + 1$; если же первым применяется $\{j_2 y\}\,(k)$, то $f\,(k) = 0$. Пусть $b = \max\limits_{k \leqslant j_1 y} f\,(k)$. Определим $\{h\}$ так, что

$$!\{h\}\,(n) \equiv (\forall k \leqslant j_1 y)\ (!\{j_2 y\}\,(k) \vee n + 1 \neq f\,(k)).$$

Остается положить $y_1 = j\,(b,\ h)$. $\square$

$\varphi = \perp$. $t\,[\varphi]\,(y) = 0$.

$\varphi = \forall x \psi\,(x)$. Определим ч. р. функцию $\{d\}$ таким образом, чтобы из $(\forall k \in V\,[y])!\, \{k\}\,(a)$ следовало $!\{d\}\,(a)$ и $V\,[\{d\}\ (a)] = \{\{k\}\,(a) \mid k \in V\,[y]\}$. Это делается с помощью 8.2.5. Затем определим h так, что $\{h\}\,(a) \simeq t\,[\psi\,(a)]\,(\{d\}\,(a))$, и положим $t\,[\forall x\, \psi\,(x)]\,(y) = h$.

$\varphi = \exists x \psi\,(x)$. По данному y найдем y_1 таким образом, чтобы $V\,[y_1] = \bigcup\, \{V\,[k] \mid k \in V\,[y]\}$ (см. 8.2.4). Положим $t\,[\exists\, x \psi\,(x)]\,(y) = y_1$.

Лемма 8.2.2 доказана. $\square$

Продолжим доказательство 8.2.1.

Правило $\varphi \supset \eta;\ \psi \supset \eta \ / \ \varphi \vee \psi \supset \eta$. Допустим $y_1 r_3 (\varphi \supset \eta)$, $y_2 r_3 (\psi \supset \eta)$, $y_3 r_3 (\varphi \vee \psi)$. Опишем процедуру для отыскания y_4, $y_4 r_3 \eta$.

Вначале установим еще две леммы.

8.2.6. *По данным y_1 и y_2 можно алгоритмически найти y_3 и y_4 так, что*

$$V[y_3] = V[y_1] \cap V[y_2], \quad V[y_4] = V[y_1] \cup V[y_2]. \ \square$$

8.2.7. *По всякому конечному множеству F, заданному списком своих членов, можно алгоритмически указать y такое, что $V[y] = F$.*

Более педантичная «арифметизированная» формулировка этого свойства такова: в FA выводится

$$\exists h \forall x \exists y \, (y = \{h\}(x) \wedge \forall z \, (z \in V_y \equiv \exists j \, (j < \mathrm{lh}\, x \wedge z = [x]_j))).$$

По поводу обозначений см. с. 43. $\square$

Теперь, используя 8.2.3, 8.2.6 и 8.2.7, построим y_5 и y_6 так, что

$$V[y_5] = \{n \mid j(0, n) \in V[y_3]\},$$
$$V[y_6] = \{j_2 n \mid j_1 n \neq 0, \ n \in V[y_3]\}.$$

Затем с помощью 8.2.8 строим y_7 и y_8,

$$V[y_7] = \{\{y_1\}(n) \mid n \in V[y_5]\},$$
$$V[y_8] = \{\{y_2\}(n) \mid n \in V[y_6]\}.$$

Затем с помощью 8.2.6

$$V[y_9] = V[y_7] \cup V[y_8].$$

И, наконец, по лемме 8.2.2 $y_4 = t[\eta](y_9)$.

Правило $\psi(x) \supset \eta / \exists x \, \psi(x) \supset \eta$. Пусть для всякого x имеем $\{y_1\}(x)\ r_3\ (\psi(x) \supset \eta)$, и пусть $y_2 r_3\ \exists x \psi(x)$; укажем способ отыскания y_3, $y_3 r_3 \eta$. Определим (8.2.3) y_4 так, что $V[y_4] = \{\{\{y_1\}(j_2 n)\}(j_1 n) \mid n \in V[y_2]\}$. Затем по лемме 8.2.2 положим $y_3 = t[\eta](y_4)$.

Последний принцип, реализуемость которого следует проверить, — это схема CT!:

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y) \supset \exists u \forall x \exists z \, (T_1(u, x, z) \wedge \varphi(x, Uz)).$$

Пусть a реализует посылку. Тогда для всякого x

$$j_1(\{a\}(x))\ r_3 \exists y \varphi(x, y),$$

$$j_2(\{a\}(x))\ r_3\ \forall y_1 y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \supset y_1 = y_2).$$

Для всякого x определим b_x так, что (8.2.3)

$$V[b_x] = \{j_2 n \mid n \in V[j_1(\{a\}(x))]\}.$$

Анализируя реализуемости, нетрудно установить, что для каждого x множество $V[b_x]$ содержит в точности один элемент. А тогда можно эффективно разыскать эти элементы, т. е. можно построить ч. р. функцию $\{d\}$ так, что для всякого x $\{d\}(x) \in V[b_x]$. Действительно, $V[b_x] = \{k \mid k \leqslant j_1 b_x \wedge \neg\, !\{j_2 b_x\}(k)\}$. Для получения $\{d\}(x)$ мы включаем одновременно $\{j_2 b_x\}(k)$ для всех $k \leqslant j_1 b_x$ и ждем, пока применятся все алгоритмы, кроме одного. Соответствующее k и следует взять в качестве $\{d\}(x)$.

Найденное d и нужно взять в качестве того, которое требуется в заключении принципа CT!. Остальную часть реализуемости уже нетрудно сконструировать стандартными приемами (ср., например, доказательство 5.4). Теорема о корректности 8.2.1 доказана. $\square$

Для доказательства 8.2 остается еще привести пример схемы CT, нереализуемый в смысле r_3. Мы покажем, что нереализуемо даже следующее легкое следствие CT:

$$\forall x (\varphi(x) \vee \psi(x)) \supset \exists u \forall x \exists z \, (T_1(u, x, z) \wedge (Uz = 0 \supset \varphi(x)) \wedge (Uz \neq 0 \supset \psi(x))),$$

где

$$\varphi(x) \leftrightharpoons \neg \exists z T_1(k, x, z),$$
$$\psi(x) \leftrightharpoons \neg \exists z T_1(m, x, z);$$

здесь k и m задают номера рекурсивно перечислимых, но рекурсивно неотделимых множеств. Так как наши множества $A = \{x \mid \exists z T_1(k, x, z)\}$ и $B = \{x \mid \exists z T_1(m, x, z)\}$ не пересекаются, то с классической точки зрения (в теории FA) $\forall x (\varphi(x) \vee \psi(x))$. Для всякого x можно алгоритмически указать d_x такое, что

$$!\{d_x\}(0) \equiv\ !\{k\}(x), \quad \{d_x\}(Sz) = 0,$$

и, аналогично,

$$!\{p_x\}(0) \equiv\ !\{m\}(x), \quad \{p_x\}(Sz) = 0.$$

Далее определим q_x так, что

$$V[q_x] = \{j(0, n) \mid n \in V[j(0, d_x)]\},$$
$$V[r_x] = \{j(1, n) \mid n \in V[j(0, p_x)]\}.$$

Наконец, s_x определяется так, что $V[s_x] = V[q_x] \cup V[r_x]$. Тогда для всякого x $s_x r_3$ $(\varphi(x) \vee \psi(x))$ и мы видим, что посылка изучаемого принципа r_3-реализуема. Реализуемость же заключения означает возможность рекурсивного пополнения множеств A и B.

Теорема 8.2 доказана. $\square$

9. Семантика реализуемости для логики предикатов. Особый интерес реализуемости r с точки зрения конструктивной математики наводит на мысль определить семантику формул логики высказываний на основе этой реализуемости. Пусть $F[p_1, \ldots, p_n]$ — формула логики высказываний, где $p_1, \ldots, p_n$ — полный список всех ее пропозициональных переменных. Будем говорить, что эта формула *тождественно реализуема*, если существует алгоритм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий всякий набор замкнутых арифметических формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в натуральное число $n = \mathfrak{A}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, реализующее арифметическую формулу $F[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$, т. е. такое, что формула $nrF[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ *истинна*. Разумеется, это понятие уже неэлементарное, семантическое и зависит от способа понимания арифметических суждений. Начиная с этого места и до конца пункта, мы не будем ограничиваться содержательно финитными способами рассуждения и будем традиционно применять теоретико-множественную терминологию и классическую логику.

Пусть LR — множество всех тождественно реализуемых формул логики высказываний. Нетрудно видеть, что LR содержит все бескванторные формулы, выводимые в НРС, замкнуто относительно подстановки и правила $\varphi;\ \varphi \supset \psi/\psi$. Множества формул логики высказываний, обладающие этими тремя свойствами, называются *суперинтуиционистскими* логиками (в другой терминологии — *промежуточными* логиками). Итак, LR — промежуточная логика. Неизвестно, разрешимо ли множество LR. Однако, если $(\varphi \vee \psi) \in$ LR, то $\varphi \in$ LR или $\psi \in$ LR (К и п н и с [1]). Как заметил Дж. Р о у з [1] в 1953 г., LR — собственное расширение интуиционистской логики высказываний. Обширный разрешимый подкласс LR, содержащий большое количество формул, невыводимых в НРС, указывает В а р п а х о в с к и й [1].

Аналогичное понятие тождественной реализуемости можно ввести и для формул логики предикатов. Однако это множество устроено гораздо сложнее. О р е в к о в [1] привел пример тождественно реализуемой формулы логики предикатов, невыводимой в СРС (всякая формула LR заведомо является тавтологией). П л и с к о [1], [2] показал, что множество тождественно реализуемых формул логики предикатов не является перечислимым (и даже не определяется арифметической формулой).

Таким образом, НРС с точки зрения тождественной реализуемости оказывается *неполной* логикой.

Имеются и общие результаты, восходящие к Гёделю и показывающие, что в с я к а я семантика логики предикатов, основанная на конструктивной точке зрения, необходимо неполна. См. по этому поводу К р а й з е л [3], Л е й в а н т [2].

Приведем построенный Ц е й т и н ы м [1] пример формулы, принадлежащей LR, но не выводимой в НРС (невыводимость доказывается на с. 97):

$$\neg(p_1 \wedge p_2) \wedge (\neg p_1 \supset q_1 \vee q_2) \wedge (\neg p_2 \supset q_1 \vee q_2) \supset$$
$$(\neg p_1 \supset q_1) \vee (\neg p_2 \supset q_2) \vee (\neg p_2 \supset q_1) \vee (\neg p_2 \supset q_2).$$

Фактически можно указать одно конкретное натуральное число, которое реализует л ю б о й арифметический пример вышеуказанной формулы. Как говорят, формула Цейтина допускает *постоянную реализацию*. Возможно, что все формулы LR допускают постоянную реализацию. Для формул логики предикатов это не так, что следует из вышеупомянутых работ Плиско. Следующая формула Я н к о в а [1] является тавтологией, но не принадлежит LR (см. также К и п н и с [2]):

$$((\neg\neg p \supset p) \supset (\neg\neg p \vee \neg p)) \supset (\neg\neg p \vee \neg p).$$

Приведем здесь рассуждение, подтверждающее тождественную реализуемость формулы Цейтина. Подставим вместо p_1, p_2, q_1, q_2 соответственно арифметические предложения $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$. Допустим, что u реализует посылку полученной формулы. Тогда

$$u_1 = j_1(u)\, r \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2),$$
$$u_2 = j_1 j_2(u)\, r\ (\neg\varphi_1 \supset \psi_1 \vee \psi_2),$$
$$u_3 = j_2 j_2(u)\, r\, (\neg\varphi_2 \supset \psi_1 \vee \psi_2).$$

Заметим, что невозможно одновременно $\neg !\{u_2\}(0)$ и $\neg !\{u_3\}(0)$. Действительно, $\neg !\{u_i\}(0)$ влечет, что $\neg \varphi_i$ нереализуемо, в то время как реализуемо $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Следовательно, $!\{u_2\}(0)$ или $!\{u_3\}(0)$. Рассмотрим ч. р. функцию $f(u_2, u_3)$, которая производит следующее вычисление: включаем одновременно $\{u_2\}(0)$ и $\{u_3\}(0)$. Если первым применится $\{u_2\}(0)$, разбираем два случая: a) $j_1(\{u_2\}(0)) = 0$, тогда $f(u_2, u_3) = j(1, j_1j_2(\{u_2\}(0)))$; b) $j_1(\{u_2\}(0)) \neq 0$, тогда $f(u_2, u_3) = j(2, j_2j_2(\{u_2\}(0)))$. Если первым применяется $\{u_3\}(0)$, то вновь разбираем два случая: a) $j_1(\{u_3\}(0)) = 0$, тогда $f(u_2, u_3) = j(3, j_1j_2(\{u_3\}(0)))$; b) $j_1(\{u_3\}(0)) \neq 0$, тогда $f(u_2, u_3) = j(4, j_2j_2(\{u_3\}(0)))$. Таким образом, $j_1(f(u_2, u_3))$ указывает, какой из конъюнктивных членов заключения будет реализуем, а $j_2(f(u_2, u_3))$ выдает реализацию соответствующего ψ_j. $\Lambda uf(j_1j_2u, j_2j_2u)$ есть конкретное натуральное число, с помощью которого уже нетрудно сконструировать реализацию всей формулы.

Обратим внимание, что доказательство тождественной реализуемости формулы Цейтина не было вполне интуиционистским: утверждая $!\{u_2\}(0)$ или $!\{u_3\}(0)$, мы воспользовались содержательно принципом Маркова. Все известные примеры формул LR, невыводимых в HPC, таковы, что доказательство их тождественной реализуемости использует принцип Маркова. Неизвестно, является ли это обстоятельство неизбежным.

10. Дополнительные библиографические замечания. Выразительные возможности аналитического языка традиционно были предметом исследования дескриптивной теории множеств, теории алгоритмов, аксиоматической теории множеств. По поводу сведений о современном состоянии этих исследований см. Шенфилд [1], Роджерс [1], Кановей [1], [2], Любецкий [1], Йех [1].

Система интуиционистской арифметики, только в технических деталях отличающаяся от нашей системы HA, была сформулирована Гейтингом [2] в 1930 г. Исследование системы термов для примитивно рекурсивных функций можно найти, например, в работе Клини [3]. Метод реализуемости был предложен Клини [1] в 1945 г. и со временем стал одним из важнейших методов

исследования интуиционистских теорий. Вот некоторые из более современных работ, связанных с реализуемостью: Клини [4] — [6], Клини и Весли [1], Фридман [1], Майхилл [5], Тейт [2], Крайзел и Трулстра [1], Трулстра [5], [6], Бизон [1], [2], Гудмен [1].

Клини [2] (§ 82) предложил свое понятие реализуемости как содержательное отношение. Наша формализованная версия и результаты пп. 5.4 —5.12 долгое время относились к фольклору предмета (часть этого фольклора нашла свое отражение в работе Трулстры [5]). Результаты 5.10—5.12 указывают на полезность формализации отношения реализуемости. Некоторая версия принципа P упоминается в работе Драгалина [2], где вводится и реализуемость, аналогичная r_2, но основанная на теории примитивно рекурсивных функционалов конечного типа. Теоретико-модельное исследование принципа P проведено в статье Сморинского [1]. Невыводимость M^- в HA установлена Крайзелом [2] в 1959 г. (резюме). Неэквивалентность M и M^- доказана Сморинским [1]. Реализация интуиционистского анализа со свойствами, аналогичными r_2, приведена в книге Клини и Весли [1], § 10 и далее. Фридман [3] показал, что в арифметических теориях дизъюнктивное свойство влечет экзистенциальное. Весли [1], [2] использует принцип, аналогичный P, но в языке анализа, для обоснования аргументов Брауэра, зависящих от решения проблем (Гейтинг [3], с. 143).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В этой части мы введем и изучим теоретический инструмент для исследования формальных аксиоматических теорий с интуиционистской логикой — алгебраические модели различных типов. При этом спектр таких моделей куда богаче, чем в случае классической логики. Центральным фактом общей теории являются теоремы о полноте, аналогичные известной теореме Гёделя о полноте классического исчисления предикатов. Мы будем доказывать существование моделей самых узких классов — моделей Крипке, топологических моделей. В приложениях же будут использоваться конкретные модели и более общего вида: ВК-модели и алгебраические модели в широком смысле этого слова.

1. Псевдобулевы алгебры, топологические пространства.

1.1. Назовем *пропозициональной логической матрицей* (или просто матрицей) структуру вида

$$M = \langle B, B_0, \wedge^+, \vee^+, \supset^+, \perp^+\rangle,$$

где B — непустое множество *истинностных значений* матрицы M, $B_0 \subseteq B$ — множество *выделенных значений*, $\wedge^+$, $\vee^+$, $\supset^+$ — двуместные операции на B, $\perp^+$ — элемент B. Эти операции назовем так же, как и логические связки: конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и «ложью» и будем опускать плюс вверху, если нет опасности смешения с логическими связками.

Пусть $F[p_1, \ldots, p_n]$ — формула логики высказываний (*пропозициональная* формула) и $p_1, \ldots, p_n$ — полный список всех ее атомарных подформул (*пропозициональных переменных*). Результат замещения $F[a_1, \ldots, a_n]$ всех пропозициональных переменных элементами B назовем формулой, *оцененной в* M, или просто *оцененной* формулой.

Для каждой оцененной формулы F естественно определено ее *значение* $\| F \|$ — элемент множества B, получающийся после вычисления логических связок F по правилам алгебры M.

Будем говорить, что матрица M *согласована* с логикой высказываний НРС (или с какой-нибудь другой логикой высказываний), если для всякой формулы F, выводимой в нашей логике, при произвольной ее оценке F' получающееся значение $\| F' \|$ оказывается выделенным в матрице M.

1.2. Мы заинтересованы в отыскании широкого класса логических матриц, согласованных с интуиционистским исчислением высказываний. Важный класс таких матриц составляют *псевдобулевы алгебры* (*п. б. а.*), в другой терминологии — *алгебры Брауэра*. Напомним их определение.

Пусть $\langle B, \leqslant\rangle$ — множество с заданным на нем отношением, причем выполняются следующие девять условий:

1) $a \leqslant a$;

2) $a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$;

для любых двух элементов a и b существует третий элемент $a \wedge b$, называемый *точной нижней гранью* или *конъюнкцией* a и b и такой, что

3) $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$;

4) $c \leqslant a$, $c \leqslant b \Rightarrow c \leqslant a \wedge b$;

для любых двух элементов a и b существует третий элемент $a \vee b$, называемый *точной верхней гранью* или *дизъюнкцией* a и b и такой, что

5) $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$;

6) $a \leqslant c$, $b \leqslant c \Rightarrow a \vee b \leqslant c$;

для любых двух элементов a и b существует третий элемент $(a \supset b)$, называемый *импликацией* от a к b и такой, что

7) $a \wedge (a \supset b) \leqslant b$;

8) $c \wedge a \leqslant b \Rightarrow c \leqslant (a \supset b)$;

существует элемент $\perp$ («ложь» или «*нуль*» алгебры) такой, что для всех a

9) $\perp \leqslant a$.

Тогда $\langle B, \leqslant\rangle$ называется *псевдобулевой* алгеброй.

Выполнение 1), 2) означает, что $\leqslant$ есть *квазиупорядоченное множество* (*к.у.м.*). Указанные свойства позволяют ввести на B отношение естественной эквивалентности.

Обычно (см., например, Расёва и Сикорский [1]) псевдобулевой алгеброй называют не $\langle B, \leqslant\rangle$, а результат факторизации B по отношению *естественной эквивалентности*:

$$(a = b) \rightleftharpoons (a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a).$$

Нам, однако, удобнее не проводить эту факторизацию, а рассматривать операции с точностью до естественной экивалентности. Естественная эквивалентность совпадает с равенством, если $\langle B, \leqslant\rangle$ есть *частично упорядоченное множество* (*ч. у. м.*), т. е. если из $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ следует сов падение a и b.

Выполнение 3) — 6) вместе с 1), 2) означает, что $\langle B, \leqslant\rangle$ есть *решетка*. Хорошо известно, что элементы $a \wedge b$, $a \vee b$, удовлетворяющие условиям 3) — 6), определяются единственным образом (с точностью до естественной эквивалентности, разумеется). Условия 7) — 8) совместно с предыдущими означают, что $\langle B, \leqslant\rangle$ есть *импликативная решетка*, операция $(a \supset b)$ условиями 7) — 8) определяется однозначно. Всякая импликативная решетка *дистрибутивна*, т. е. выполняются естественные эквивалентности

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

и

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Наконец, условие 9) обеспечивает псевдобулевость алгебры. Элемент $\top = (\perp \supset \perp)$ называется «истиной» или «*единицей*» алгебры. Имеем $a \leqslant \top$ для всех элементов алгебры. П. б. а. называется *булевой алгеброй*, если дополнительно выполняется условие

10) $a \vee (a \supset \perp) = \top$.

Отношение $\leqslant$ назовем *основным отношением* (*естественным упорядочением*) алгебры. Естественное упорядочение определяется операциями решетки:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

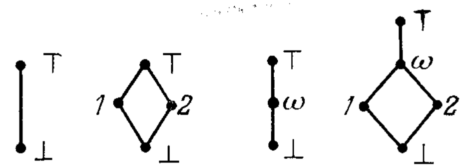
Здесь $=$ — отношение естественной эквивалентности.

Как следует из 1) — 9), всякая п.б.а. автоматически порождает пропозициональную логическую матрицу $\langle B, \top, \wedge, \vee, \supset, \perp\rangle$ с единственным выделенным значением $\top$.

Когда говорят об *изоморфизмах, гомоморфизмах* п.б.а. и т. д., имеют в виду отображения, сохраняющие все операции этой матрицы. Известно, что п.б.а. можно определить, не прибегая явно к основному отношению (Расёва и Сикорский [1], с. 148). Оказывается, что эта матрица всегда согласована с интуиционистской логикой высказываний. Если п.б.а. является булевой алгеброй, то она согласована с классической логикой высказываний. Это нетрудно показать индукцией по построению вывода формулы в бескванторной части HPC_1 (или CPC_1, см. также Расёва и Сикорский [1], где имеются и другие элементарные сведения о п.б.а. и б.а.).

Ценным свойством матрицы п.б.а. является то, что она полностью определяется своим основным отношением квазиупорядочения.

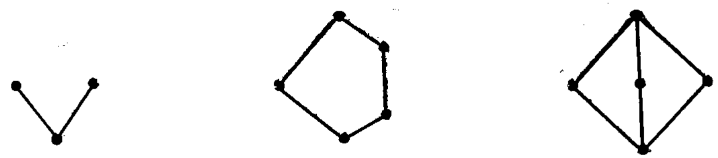
Пример 1. Следующие конечные частично упорядоченные множества определяют псевдобулевы алгебры (проверьте!):



a) b) c) d)

При этом a) и b) суть булевы алгебры.

Пример 2. a) не является решеткой, b) и c) — решетки, но не дистрибутивные.



a) b) c)

Пример 3. a) Множество натуральных чисел с естественным порядком образует дистрибутивную, но не импликативную решетку (отсутствует $0 \supset 0$); b) множество отрицательных целых чисел с естественным порядком образует импликативную решетку, но не п.б.а.

П р и м е р 4. a) n-элементарная *цепная* п.б.а. $Ц_n$ задается конечным множеством $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ натуральных чисел с естественным порядком. Здесь $\bot = 0$, $\top = n-1$, $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$. Далее, если $a \leqslant b$, то $(a \supset b) = \top$; если же $a > b$, то $(a \supset b) = b$. $Ц_2$ совпадает с алгеброй из примера 1a), $Ц_3$ — с алгеброй примера 1c).

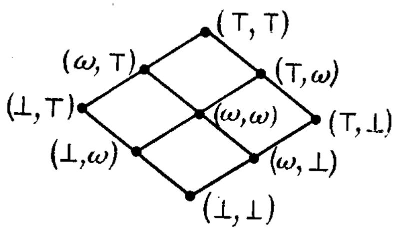
b) По двум алгебрам $\langle B_1, \leqslant_1\rangle$, $\langle B_2, \leqslant_2\rangle$ можно образовать их *прямое произведение*, т. е. множество упорядоченных пар $B_1 \times B_2$ с основным отношением

$$(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \leqslant_1 b_1) \wedge (a_2 \leqslant_2 b_2).$$

Это также будет п.б.а., причем операции определяются почленно, например,

$$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2).$$

Так, в обозначениях примера 1c) п.б.а. $Ц_3 \times Ц_3$ имеет вид



Если $Q \subseteq B$, то элемент $a \in B$ называется *точной нижней гранью*, *пересечением* или *конъюнкцией* элементов Q (обозначается через $\bigwedge Q$), если

a) $c \in Q \Rightarrow a \leqslant c$;

b) $(\forall c \in Q)(d \leqslant c) \Rightarrow d \leqslant a$.

Аналогично, элемент $b \in B$ называется *точной верхней гранью*, *объединением* или *дизъюнкцией* элементов Q (обозначается через $\bigvee Q$), если

a) $c \in Q \Rightarrow c \leqslant b$;

b) $(\forall c \in Q)(c \leqslant d)) \Rightarrow b \leqslant d$.

Так, очевидно, $a \wedge b = \bigwedge \{a, b\}$, $a \vee b = \bigvee \{a, b\}$. Для пустого множества положим $\bigwedge\varnothing = \top$, $\bigvee\varnothing = \bot$.

Точные грани бесконечных множеств в псевдобулевой алгебре не всегда существуют, но если точная грань данного множества существует, то она единственна (конечно, с точностью до естественной эквивалентности в псевдобулевой алгебре). П.б.а. называется *полной*, если для любого подмножества элементов алгебры существуют точная верхняя и нижняя грани.

1.3. Пусть X — некоторое множество, $\mathsf{P}X$ — множество всех его подмножеств. Будем рассматривать $\mathsf{P}X$ как алгебру $\langle \mathsf{P}X, \subseteq\rangle$, взяв в качестве основного отношения отношение теоретико-множественного включения:

$$a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x\,(x \in a \Rightarrow x \in b) \text{ для } a, b \in \mathsf{P}X.$$

Нетрудно убедиться, что $\langle \mathsf{P}X, \subseteq\rangle$ является полной псевдобулевой алгеброй. Основные операции в этой алгебре вычисляются по следующим хорошо известным правилам:

$$a \wedge b = a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\},$$
$$a \vee b = a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\},$$
$$a \supset b = \{x \in X \mid x \in a \Rightarrow x \in b\},$$
$$\neg a = X \setminus a = \{x \in X \mid x \notin a\},$$
$$\top = X,$$
$$\bot = \varnothing;$$

если $Q \subseteq \mathsf{P}X$, то

$$\bigvee Q = \bigcup Q = \{x \in X \mid (\exists a \in Q)(x \in a)\},$$
$$\bigwedge Q = \bigcap Q = \{x \in X \mid (\forall a \in Q)(x \in a)\}.$$

З а м е ч а н и е. Если мы придерживаемся классической метаматематики, то легко видеть, что $\langle \mathsf{P}X, \subseteq\rangle$ является даже полной *булевой* алгеброй. Действительно, $a \vee \neg a = a \cup (X \setminus a) = X = \top$. Однако, если вести рассуждения, оставаясь в рамках интуиционистской логики, то последний вывод нельзя сделать в общем случае. Если $x \in X$, то $x \in a \cup (X \setminus a)$ эквивалентно утверждению $x \in a \vee x \notin a$ и с интуиционистской точки зрения нет оснований считать, что это утверждение (представляющее собой форму закона исключенного третьего) верно в общем случае. Но и в рамках интуиционистского рассмотрения $\langle \mathsf{P}X, \subseteq\rangle$ является *псевдобулевой* алгеброй, причем импликацию следует определять именно так, как это сделано выше, а не, скажем, в виде $(a \supset b) = (X \setminus a) \bigcup b$, что эквивалентно нашему определению с классической, но отнюдь не с интуиционистской точки зрения. Разумеется, в некоторых частных случаях можно и интуиционистски убедиться, что $\langle \mathsf{P}X, \subseteq \rangle$ является булевой алгеброй, например, если X — конечное, заданное явным списком множество.

1.4. Рассмотрим хорошо известную топологическую конструкцию, позволяющую строить новые псевдобулевы алгебры.

Назовем *топологической псевдобулевой алгеброй* (*т. п. б. а.*) алгебру вида $A = \langle B, \leqslant, \boldsymbol{I} \rangle$, где $\langle B, \leqslant \rangle$ есть п.б.а. Операции этой п.б.а. обозначим через $\bigwedge \bigvee \supset \bot \top \neg$. Далее, $\boldsymbol{I}$ есть одноместная операция на B, называемая операцией *взятия внутренности*. Мы предполагаем, что эта операция удовлетворяет следующим условиям:

1) $\boldsymbol{I}a \leqslant a$;

2) $\boldsymbol{I}\boldsymbol{I}a = \boldsymbol{I}a$;

3) $\boldsymbol{I}(a \bigwedge b) = \boldsymbol{I}a \bigwedge \boldsymbol{I}b$.

Кроме того, мы, конечно, предполагаем, что $\boldsymbol{I}$ определена *корректно* по отношению к естественной эквивалентности алгебры B, т. е. если a эквивалентно b, то и $\boldsymbol{I}a$ необходимо экивалентно $\boldsymbol{I}b$. Подобные обстоятельства мы не будем специально оговаривать впредь.

Так как $a \bigwedge b = b \Leftrightarrow a \leqslant b$, то из указанных свойств легко следует *свойство монотонности*:

4) $a \leqslant b \Rightarrow \boldsymbol{I}a \leqslant \boldsymbol{I}b$.

Часто еще дополнительно требуют от операции взятия внутренности выполнения следующего условия:

5) $\boldsymbol{I}\top = \top$,

которое называется условием *полной открытости*. Мы не будем в общем случае предполагать, что оно имеет место.

Элемент $a \in B$ называется *открытым*, если $\boldsymbol{I}a = a$. Множество всех открытых элементов B обозначим через $\mathrm{O}(B)$. Значение топологических псевдобулевых алгебр для наших целей определяется следующей теоремой:

Пусть $A = \langle B, \leqslant, \boldsymbol{I} \rangle$ есть т. п. б. а. Тогда множество $\mathrm{O}(B)$ открытых элементов B вместе с порядком $\leqslant$, индуцированным из алгебры A, образует псевдобулеву алгебру $A^0 = \langle \mathrm{O}(B), \leqslant \rangle$.

Основные операции A^0 вычисляются следующим образом:

$$a \bigwedge{}^0 b = a \bigwedge b, \quad a \bigvee{}^0 b = a \bigvee b, \quad a \supset^0 b = \boldsymbol{I}(a \supset b),$$

$$\neg^0 a = \boldsymbol{I}(\neg a) = \boldsymbol{I}(a \supset \bot), \quad \bot^0 = \bot, \quad \top^0 = \boldsymbol{I}\top.$$

Далее, если $Q \subseteq \mathrm{O}(B)$ и в A существует пересечение $\bigwedge Q$, то в A^0 также существует пересечение $\bigwedge^0 Q = \boldsymbol{I}(\bigwedge Q)$. Если в A существует объединение $\bigvee Q$, то в A^0 также существует объединение $\bigvee^0 Q = \bigvee Q$.

В частности, если A удовлетворяет условию полной открытости, то $\top^0 = \top$. Если $\langle B, \leqslant \rangle$ — полная п.б.а., то A^0 также есть полная п.б.а.

$\rhd$ Доказательство состоит в элементарной проверке свойств 1) — 9) псевдобулевой алгебры. Например, свойство 8) приобретает вид $c \bigwedge a \leqslant b \Rightarrow c \leqslant \boldsymbol{I}(a \supset b)$, где a, b, c — открытые элементы B. Оно немедленно следует из $c \leqslant a \supset b$ и свойства монотонности операции $\boldsymbol{I}$. $\square$

Если в т.п.б.а. $A = \langle B, \leqslant, \boldsymbol{I} \rangle$ структура $\langle B, \leqslant \rangle$ оказывается булевой алгеброй, то A называется *топологической булевой алгеброй* (*т.б.а.*) (Расёва и Сикорский [1], с. 190). Разумеется, A^0 при этом может и не быть булевой алгеброй. В булевой алгебре операция импликации выражается через дизъюнкцию и отрицание, так что в A^0 в этом случае $a \supset^0 b = \boldsymbol{I}(\neg a \bigvee b)$.

Можно показать (классически), что *всякая* п.б.а. изоморфна псевдобулевой алгебре вида A^0, где A — некоторая подходящая топологическая булева алгебра (Расёва и Сикорский [1], с. 153).

1.5. На практике т.п.б.а. задают чаще не с помощью операции $\boldsymbol{I}$ взятия внутренности, а через семейство своих открытых элементов. А именно, т.п.б.а. задается набором $\langle B, \leqslant, S \rangle$, где $\langle B, \leqslant \rangle$ есть п.б.а. и $S \subseteq B$ — семейство элементов B, называемое *семейством открытых элементов* A. При этом выполняются следующие условия:

1′) для всякого $a \in B$ существует объединение $\bigvee \{b \in S \mid b \leqslant a\}$ и это объединение принадлежит S;

2′) $a, b \in S \Rightarrow a \bigwedge b \in S$.

Если $\langle B, \leqslant \rangle$ — полная п.б.а., то условие 1′) может быть формулировано более просто:

1″) если $S' \subseteq S$, то $(\bigvee S') \in S$. Эквивалентность обоих определений т.п.б.а. следует из утверждений:

a) *Если* $\langle B, \leqslant, \boldsymbol{I}\rangle$ — *т.п.б.а., то множество* $S = \mathrm{O}(B) = \{a \in B \mid \boldsymbol{I}a = a\}$ *удовлетворяет условиям* 1′), 2′), *причем* $\boldsymbol{I}a = \bigvee \{b \in S \mid b \leqslant a\}$.

b) *Если* $\langle B, \leqslant, S\rangle$ *удовлетворяет условиям* 1′), 2′), *то операция* $\boldsymbol{I}$, *заданная правилом* $\boldsymbol{I}a = \bigvee \{b \in S \mid b \leqslant a\}$, *удовлетворяет всем условиям* 1) — 3) *операции взятия внутренности, причем* $b \in S \Leftrightarrow (\boldsymbol{I}b = b)$.

c) *В условиях* b) *имеем* $\boldsymbol{I}\top = \top \Leftrightarrow \bigvee S = \top$.

▷ Непосредственно проверяется. Покажем, например, что в b) операция $\boldsymbol{I}$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{I}(a \wedge b) = \boldsymbol{I}a \wedge \boldsymbol{I}b$. Неравенство $\bigvee \{c \in S \mid c \leqslant a \wedge b\} \leqslant \{c \in S \mid c \leqslant a\}$ очевидно, так как каждое слагаемое слева встречается и справа. Отсюда $\boldsymbol{I}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{I}a$. Подобным образом $\boldsymbol{I}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{I}b$, что и дает $\boldsymbol{I}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{I}a \wedge \boldsymbol{I}b$. Докажем обратное неравенство. Если $c, d \in S$, $c \leqslant a$, $d \leqslant b$, то $c \wedge d \leqslant a \wedge b$, так что $c \wedge d \leqslant \bigvee \{f \in S \mid f \leqslant a \wedge b\} = \boldsymbol{I}(a \wedge b)$. Отсюда $c \leqslant d \supset \boldsymbol{I}(a \wedge b)$. Суммируя слева по всем $c \in S$, $c \leqslant a$, получим $\boldsymbol{I}a \leqslant d \supset \boldsymbol{I}(a \wedge b)$. Следовательно, $d \wedge \boldsymbol{I}a \leqslant \boldsymbol{I}(a \wedge b)$. Далее, $d \leqslant \boldsymbol{I}a \supset \boldsymbol{I}(a \wedge b)$. Теперь суммируем слева по всем $d \in S$, $d \leqslant b$. Отсюда $\boldsymbol{I}b \leqslant \boldsymbol{I}a \supset \boldsymbol{I}(a \wedge b)$, что и дает $\boldsymbol{I}a \wedge \boldsymbol{I}b \leqslant \boldsymbol{I}(a \wedge b)$. □

Заметим, что $\bot \in S$, так как $\bot = \bigvee \{b \in S \mid b \leqslant \bot\}$.

Часто т.п.б.а. $\langle B, \leqslant, S\rangle$ задают, определяя не все семейство открытых элементов, а лишь так называемый *базис открытых элементов*. А именно, подмножество $S_0 \subseteq S$ называется базисом открытых элементов т.п.б.а. $\langle B, \leqslant, S\rangle$, если всякий элемент $a \in S$ представляется как объединение элементов S_0, т. е. $(\forall a \in S)(\exists S_1 \subseteq S_0)(a = \bigvee S_1)$. S_0 может состоять далеко не из всех открытых элементов, например, вполне возможно, $\bot \notin S_0$, хотя $\bot \in S$, так как $\bot = \bigvee \varnothing$.

1.6. Важнейшим частным случаем т.п.б.а. является *топологическое пространство*. Топологическое пространство задается набором $T = \langle X, S\rangle$, где X есть множество, называемое *множеством точек* пространства T, и S — семейство подмножеств X такое, что

1) $\varnothing \in S$, $X \in S$;

2) $a, b \in S \Rightarrow a \cap b \in S$;

3) $Q \subseteq S \Rightarrow \bigcup Q \in S$

($\bigcup Q$ — теоретико-множественное объединение). Множество S называется *топологией* пространства T.

Топологическое пространство стандартным образом задает полную т.п.б.а. в смысле п. 1.5, а именно, $\langle \mathsf{P}X, \subseteq, S\rangle$, т. е. топология S есть как раз семейство всех открытых подмножеств X. Ввиду 1) операция взятия внутренности в топологическом пространстве удовлетворяет условию полной открытости. Полную псевдобулеву алгебру всех открытых подмножеств топологического пространства T обозначим через $\mathrm{O}(T)$; имеем $\mathrm{O}(T) = \langle S, \subseteq\rangle$. В соответствии с пп. 1.3 и 1.4 основные операции в этой алгебре определяются следующим образом:

$$a \wedge b = a \cap b, \quad a \vee b = a \cup b,$$

$$a \supset b = \{x \in X \mid (\exists\, d \in S)(x \in d,\ d \cap a \subseteq b)\},$$

$$\neg a = \{x \in X \mid (\exists d \in S)(x \in d,\ d \cap a = \varnothing)\},$$

$$\top = X, \quad \bot = \varnothing;$$

если $Q \subseteq S$, то $\bigvee Q = \bigcup Q = \{x \in X \mid (\exists\, d \in Q)(x \in d)\}$, $\bigwedge Q = \boldsymbol{I}(\bigcap Q) = \{x \in X \mid (\exists\, d \in S)(x \in d,\ d \subseteq \bigcap Q)\}$. В стиле п. 1.3 эти рассмотрения имеют смысл и в рамках интуиционистской метаматематики.

Замечание. В определении $a \supset b$, $\neg a$, $\bigwedge Q$ можно заменить S на S_0, где S_0 — базис открытых подмножеств топологического пространства.

Приведем еще известный признак того, что некоторое семейство $S_0 \subseteq \mathsf{P}X$ определяет базис топологии.

Теорема *Пусть X — множество и $S_0 \subseteq \mathsf{P}X$ — семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующим двум условиям:*

a) $\bigcup S_0 = X$;

b) *если* $x \in a \in S_0$, $x \in b \in S_0$, *то существует* $d \in S_0$, $x \in d \subseteq a \cap b$.

В этом случае семейство всевозможных объединений элементов S_0 образует топологию на множестве X. Последнее означает, что $S = \{a \in \mathsf{P}X \mid (\exists S_1 \subseteq S_0)(a = \bigcup S_1)\}$ *удовлетворяет условиям* 1) — 3) *топологического пространства.* □

Утверждение, что $\mathrm{O}(T)$ есть полная псевдобулева алгебра, восходит к Лукасевичу и Тарскому [1].

1.7. Укажем два вида топологических пространств, играющих существенную роль в дальнейшем.

Пример 5. Пусть J — фиксированное множество индексов. Рассмотрим множество J^ω всех функций, определенных на натуральных числах и со значениями в J. Обозначим через J^* множество конечных кортежей элементов из J. Можно считать, что если $p \in J^*$, то p есть функция, определенная на конечном начальном отрезке натурального ряда $p = \langle p(0), \ldots, p(n-1)\rangle$, где $p(i) \in J$. Мы рассматриваем также пустой кортеж $\langle\ \rangle$ — нигде не определенную функцию. Пусть $\alpha \in J^\omega$, $p \in J^*$. Будем говорить, что α *проходит через* p, и писать $\alpha \in p$, если $p = \langle p(0), \ldots, p(n-1)\rangle$ и $\alpha(0) = p(0), \ldots, \alpha(n-1) = p(n-1)$. Каждому кортежу p мы сопоставим множество $[p] \subseteq J^\omega$ всех функций, проходящих через p. В частности, $[\langle\rangle] = J$. Семейство всех $[p]$ для $p \in J^*$ удовлетворяет условию теоремы п. 1.6 выше и поэтому образует базис некоторой топологии.

Полученное топологическое пространство назовем (*обобщенным*) *пространством Бэра*. Множества вида $[p]$ $(p \in J^*)$ называются *каноническими окрестностями* этого пространства. Подмножество $a \subseteq J^\omega$ является открытым, если из $\alpha \in a$ следует, что найдется натуральное n такое, что для всех $\beta \in J^\omega$ из $\alpha(0) = \beta(0), \ldots, \alpha(n-1) = \beta(n-1)$ следует $\beta \in a$.

В частности, если $J = \{0, 1\}$, то J^ω называется *пространством Кантора* или *канторовым дисконтинуумом* и обозначается через K^ω. Если $J = \omega$ есть множество всех натуральных чисел, то J^ω называется *пространством Бэра* и обозначается через B^ω.

Пример 6. Пусть $\langle M, \leqslant\rangle$ — произвольное квазиупорядочение (т. е. выполняются условия 1) и 2) п. 1.2). Каждому элементу $x \in M$ сопоставим множество $[x] = \{y \in M \mid y \leqslant x\}$ — *острый конус*, порожденный x. Семейство острых конусов вновь удовлетворяет критерию п. 1.6 и поэтому задает базис некоторой топологии. Эта топология называется *порядковой топологией* на M. Подмножество $a \subseteq M$ открыто в этой топологии тогда и только тогда, когда

$$(\forall xy \in M)(x \in a,\ y \leqslant x \Rightarrow y \in a).$$

Определенное таким образом топологическое пространство обозначим через $\mathrm{K}(M, \leqslant)$. Естественным образом можно рассмотреть полную псевдобулеву алгебру всех открытых множеств этого топологического пространства, эту алгебру назовем *алгеброй Крипке* и обозначим через $\mathrm{OK}(M, \leqslant)$. В этой ситуации структуру $\langle M, \leqslant\rangle$ часто называют *шкалой Крипке* или *логическим остовом.* Крипке [1] использовал (неявным образом) алгебру $\mathrm{OK}(M, \leqslant)$ для построения моделей интуиционистских теорий.

Для порядковой топологии характерно следующее свойство, не имеющее места в общем случае: пересечение произвольного семейства открытых множеств вновь открыто.

Основные операции над открытыми множествами в порядковой топологии имеют следующий вид:

$$U \wedge V = U \cap V,\ U \vee V = U \cup V,\ \bot = \varnothing,\ \top = M,$$
$$U \supset V = \{x \in M \mid (\forall y \leqslant x)(y \in U \Rightarrow y \in V)\},$$
$$\neg U = \{x \in M \mid (\forall y \leqslant x)(y \notin U)\}.$$

Если $Q \subseteq \mathrm{O}(M)$, то $\bigwedge Q = \bigcap Q, \bigvee Q = \bigcup Q$ (теоретико-множественные пересечения и объединения).

2. Алгебры с пополнением, шкалы Бета—Крипке. Теория, развитая в предыдущем пункте, снабдила нас богатым запасом логических матриц, согласованных с интуиционистской логикой высказываний. Тем не менее нам нужны еще некоторые конструкции для построения п.б.а.

Пусть дана псевдобулева алгебра $A = \langle M, \leqslant\rangle$. Пусть $\boldsymbol{D}$: $M \to M$ — отображение элементов алгебры. Будем говорить, что $\boldsymbol{D}$ есть оператор *типа замыкания* на A, если для всех элементов M выполняются условия:

1) $a \leqslant \boldsymbol{D}a$;

2) $a \leqslant b \Rightarrow \boldsymbol{D}a \leqslant \boldsymbol{D}b$;

3) $\boldsymbol{DD}a = \boldsymbol{D}a$.

Заметим, что в силу 1) условие 3) можно эквивалентным образом записать в виде

3′) $\boldsymbol{DD}a \leqslant \boldsymbol{D}a$.

Элемент $a \in M$ назовем *полным*, если $a = \boldsymbol{D}a$. Множество всех полных элементов M обозначим через $\mathrm{C}(M)$.

2.1. *Если* $\boldsymbol{D}$ — *оператор типа замыкания, то*

(i) $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}b$;

(ii) $a, b \in \mathrm{C}(M) \Rightarrow \boldsymbol{D}(a \wedge b) = a \wedge b$;

(iii) $a \in C(M) \Rightarrow \boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant a \wedge \boldsymbol{D}b$.

▷ (i) $a \wedge b \leqslant a$; $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}(a)$;

аналогично, $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}(b)$; отсюда

$$\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}(a) \wedge \boldsymbol{D}(b).$$

(ii) Ввиду (i) имеем $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}(a) \wedge \boldsymbol{D}(b) = a \wedge b$. Обратное очевидно: $a \wedge b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$.

(iii) $a \wedge b \leqslant a$; $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}(a) = a$. Кроме того, из $a \wedge b \leqslant b$ следует $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant \boldsymbol{D}(b)$, что и дает $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \leqslant a \wedge \boldsymbol{D}(b)$. □

2.2. *Если $\boldsymbol{D}$ — оператор типа замыкания, то следующие три условия эквивалентны:*

(i) $a \in C(M)$, $a \leqslant \boldsymbol{D}(b) \Rightarrow a \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$;

(ii) $a \in C(M) \Rightarrow a \wedge \boldsymbol{D}(b) = \boldsymbol{D}(a \wedge b)$;

(iii) $a, b \in C(M) \Rightarrow (a \supset b) = \boldsymbol{D}(a \supset b)$.

▷ (i) ⇒ (ii). Пусть имеет место (i), и пусть $a \in C(M)$. Ввиду 2.1 (iii) достаточно установить $\boldsymbol{D}(a \wedge b) \geqslant a \wedge \boldsymbol{D}b$. Очевидно, $a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}b$. Кроме того, по 2.1 (ii) $a \wedge \boldsymbol{D}b \in C(M)$. Ввиду (i) тогда $a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge \boldsymbol{D}b \wedge b)$, но ввиду $b \leqslant \boldsymbol{D}b$ $a \wedge \boldsymbol{D}b \wedge b = a \wedge b$. Таким образом, $a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$.

(ii) ⇒ (iii). Пусть имеет место (ii), и пусть $a, b \in C(M)$; покажем $\boldsymbol{D}(a \supset b) \leqslant (a \supset b)$. С этой целью достаточно установить $a \wedge \boldsymbol{D}(a \supset b) \leqslant b$. Согласно (ii) $a \wedge \boldsymbol{D}(a \supset b) = \boldsymbol{D}(a \wedge (a \supset b))$. Но $a \wedge (a \supset b) \leqslant b$, так что $a \wedge \boldsymbol{D}(a \supset b) \leqslant \boldsymbol{D}b = b$.

(iii) ⇒ (i). Пусть имеет место (iii) — установим (i). Пусть $a \in C(M)$ и $a \leqslant \boldsymbol{D}b$; покажем $a \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$. Очевидно, $a \wedge b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$. Отсюда $b \leqslant (a \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b))$ и, далее,

$$\boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b)).$$

Используя (iii), заключаем

$$\boldsymbol{D}b \leqslant a \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b);$$

$$a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b).$$

Но из $a \leqslant \boldsymbol{D}b$ следует $a \wedge \boldsymbol{D}b = a$, так что

$$a \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b).\ \square$$

2.3. *Если $\boldsymbol{D}$— оператор типа замыкания, то следующие два условия эквивалентны:*

(i) $\boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}b = \boldsymbol{D}(a \wedge b)$;

(ii) $b \in C(M) \Rightarrow (a \supset b) = \boldsymbol{D}(a \supset b)$.

▷ (i) ⇒ (ii). Допустим (i), и пусть $b \in C(M)$. Установим $\boldsymbol{D}(a \supset b) \leqslant (a \supset b)$. Достаточно вывести $a \wedge \boldsymbol{D}(a \supset b) \leqslant b$, а для этого, в свою очередь, достаточно вывести $\boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}(a \supset b) \leqslant b$. Но ввиду (i) это неравенство равносильно

$$\boldsymbol{D}(a \wedge (a \supset b)) \leqslant b.$$

Но $a \wedge (a \supset b) \leqslant b$, так что достаточно установить $\boldsymbol{D}b \leqslant b$, что очевидно ввиду $b \in C(M)$.

(ii) ⇒ (i). Ввиду 2.1 (i) достаточно, допустив (ii), вывести $\boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$. Имеем

$$a \wedge b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b); \quad a \leqslant b \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b);$$

$$\boldsymbol{D}a \leqslant \boldsymbol{D}(b \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b)) = (b \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b));$$

$$b \wedge \boldsymbol{D}a \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b);$$

$$b \leqslant \boldsymbol{D}a \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b);$$

$$\boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}a \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b)) = (\boldsymbol{D}a \supset \boldsymbol{D}(a \wedge b));$$

$$\boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b).\ \square$$

Оператор типа замыкания $\boldsymbol{D}$ на псевдобулевой алгебре A назовем *оператором типа пополнения*, если для всяких $a \in C(M)$, $b \in M$ имеем

4) $a \leqslant \boldsymbol{D}b \Rightarrow a \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$.

Лемма 2.2 указывает эквивалентные формы этого условия. В силу 2.1 (iii) в заключении этого условия можно писать $a = \boldsymbol{D}(a \wedge b)$.

Для проверки условия 4) достаточно проверить выполнение более сильного условия

4′) $\boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}b \leqslant \boldsymbol{D}(a \wedge b)$.

В силу 2.1 (i) условие 4′) эквивалентно выполнению равенства $\boldsymbol{D}a \wedge \boldsymbol{D}b = \boldsymbol{D}(a \wedge b)$. Лемма 2.3 описывает эквивалентные формы 4′).

Замечание. Следующий пример показывает, что условия 4) и 4′), вообще говоря, не эквивалентны. Пусть $X = \{a, b\}$. Превратим X в топологическое пространство («дискретное двоеточие»), объявив открытыми множества

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}.$$

Пусть $A = \mathrm{O}(X)$ — псевдобулева алгебра всех открытых множеств X. Определим оператор $\boldsymbol{D}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{D}\varnothing = \varnothing, \boldsymbol{D}\{a\} = \boldsymbol{D}\{b\} = \boldsymbol{D}\{a,\ b\} = \{a,\ b\}.$$

Непосредственно проверяется, что $\boldsymbol{D}$ есть оператор типа пополнения на A, тем не менее

$$\boldsymbol{D}\{a\} \cap \boldsymbol{D}\{b\} = \{a,\ b\}, \quad \boldsymbol{D}(\{a\} \cap \{b\}) = \boldsymbol{D}\varnothing = \varnothing.$$

Следующая теорема указывает на назначение операторов типа пополнения.

2.4. *Пусть на псевдобулевой алгебре* $A = \langle M, \leqslant\rangle$ *задан оператор* $\boldsymbol{D}$: $M \to M$ *типа пополнения. Тогда множество* $\mathrm{C}(M)$ *полных элементов* M *вместе с порядком* $\leqslant$ *алгебры* A *образует псевдобулеву алгебру* $A^+ = \langle \mathrm{C}(M), \leqslant\rangle$. *Основные операции* A^+ *вычисляются следующим образом:*

$$a \wedge^+ b = a \wedge b, \quad a \vee^+ b = \boldsymbol{D}(a \vee b), \quad a \supset^+ b = a \supset b,$$
$$\bot^+ = \boldsymbol{D}(\bot), \quad \neg^+ a = (a \supset \boldsymbol{D}(\bot)).$$

Далее, если $Q \subseteq \mathrm{C}(M)$ *и в* A *существует пересечение* $\bigwedge Q$, *то в* A^+ *также существует пересечение и* $\bigwedge^+ Q = \bigwedge Q$. *Если в* A *существует объединение* $\bigvee Q$, *то в* A^+ *также существует объединение и* $\bigvee^+ Q = \boldsymbol{D}(\bigvee Q)$.

В частности, если A *— полная п.б.а., то* A^+ *— также полная п.б.а.*

(Ср. вычисление операций в A^+ и т.п.б.а. в п. 1.4.)

$\triangleright$ Непосредственной проверкой девяти аксиом п.б.а. в п. 1. Заметим, что ввиду свойства 2) п. 2 оператор $\boldsymbol{D}$ согласован с естественной эквивалентностью. Проверим свойства бесконечных операций. Пусть существует $\bigwedge Q$, $Q \subseteq \mathrm{C}(M)$; покажем, что $\bigwedge Q$ полно, т. е. $\boldsymbol{D}(\bigwedge Q) \leqslant \bigwedge Q$. Если $a \in Q$, то из $\bigwedge Q \leqslant a$ следует $\boldsymbol{D}(\bigwedge Q) \leqslant \boldsymbol{D}a = a$. Поэтому $\boldsymbol{D}(\bigwedge Q) \leqslant \bigwedge Q$. Отсюда тривиально $\bigwedge^+ Q = \bigwedge Q$.

Проверим $\bigvee^+ Q = \boldsymbol{D}(\bigvee Q)$. Если $a \in Q$, то из $a \leqslant \bigvee Q$ очевидно $a \leqslant \boldsymbol{D}(\bigvee Q)$. Пусть $c \leqslant a$ для всех $a \in Q$, причем $c \in \mathrm{C}(M)$. Тогда $c \leqslant \bigvee Q$ в A и поэтому $c = \boldsymbol{D}c \leqslant \boldsymbol{D}(\bigvee Q) = \bigvee^+ Q$. $\square$

2.5. Применения теоремы 2.4 мы начнем с рассмотрения одного важного класса алгебраических моделей, допускающих хорошее интуитивное обоснование.

Пусть $\langle M, \leqslant\rangle$ — непустое множество с заданным на нем отношением. Эту структуру назовем *квазиупорядочением*, если для всех a, $b \in M$ имеем: а) $a \leqslant a$; b) $a \leqslant b$, $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Обозначим через $\mathsf{P}M$ множество всех подмножеств M. Квазиупорядочение на M стандартным образом индуцирует квазиупорядочение на $\mathsf{P}M$, которое мы также обозначим через $\leqslant$. А именно, для S', $S \in \mathsf{P}M$

$$S' \leqslant S \leftrightharpoons (\forall a \in S)\,(\exists b \in S')\,(b \leqslant a).$$

ВК-*шкала* (т. е. Бета —Крипке *шкала*) задается набором $\langle M, \leqslant, Q\rangle$. Здесь M — непустое множество, элементы которого называются разнообразно, в зависимости от интерпретации M, *точками*, *моментами*, *возможными мирами*, *вынуждающими условиями*. Отношение $\leqslant$ определяет на M квазиупорядочение. Это отношение называется *отношением достижимости*, *отношением информативности*. Если $a \leqslant b$, то будем говорить, что *a информативнее* b или что момент *a позднее* момента b. Q есть функция, определенная на M; если $a \in M$, то $Q(a) \subseteq \mathsf{P}M$, т. е. является семейством подмножеств M. Если $S \in Q(a)$, то мы говорим, что S есть *путь*, *выходящий из момента* a. При этом функции Q удовлетворяет следующим условиям:

1°. $(\forall S \in Q(a))\ \exists b\ (b \in S)$.

2°. $b \in S \in Q(a) \Rightarrow (\exists a' \in S)(a' \leqslant b \wedge a' \leqslant a)$.

3°. $a' \leqslant a \Rightarrow (\forall S' \in Q(a'))(\exists\ S \in Q(a))(S' \leqslant S)$.

4°. $a' \in S \in Q(a) \Rightarrow (\exists S' \in Q(a'))(S \leqslant S')$.

Описание ВК-шкалы закончено.

Употребляются и усиления этих условий, например,

2°°. $b \in S \in Q(a) \Rightarrow b \leqslant a$.

3°°. $a' \leqslant a \Rightarrow Q(a') \subseteq Q(a)$.

Квазиупорядочение на M позволяет ввести на M порядковую топологию (пример 6 п. 1.7), а функция Q позволяет определить на множестве открытых подмножеств M операцию пополнения следующим образом: если $U \subseteq M$ открыто, то

$$\boldsymbol{D}U = \{a \in M \mid (\forall S \in Q(a))(\exists\ b \in S)(b \in U)\},$$

т. е. a принадлежит пополнению U, если на всяком пути, выходящем из a, найдется элемент b, принадлежащий U.

Таким образом, операция пополнения $\boldsymbol{D}$ порождает согласно 2.4 полную псевдобулеву алгебру (ОК $(M, \leqslant))^+$ из алгебры Крипке ОК $(M, \leqslant)$. Мы обозначим эту алгебру через ВК $(M, \leqslant, Q)$ и назовем *алгеброй Бета—Крипке, порожденной* шкалой $\langle M, \leqslant, Q\rangle$.

$\triangleright$ Проверим, что $\boldsymbol{D}$ удовлетворяет условиям 1) — 3), 4′) выше. Прежде всего, $\boldsymbol{D}U$ открыто. Действительно, если $a \in \boldsymbol{D}U$ и $a' \leqslant a$, то $a' \in \boldsymbol{D}U$. В самом деле, если $S' \in Q(a')$, то согласно 3° найдется $S \in Q(a)$, $S' \leqslant S$. Так как $a \in \boldsymbol{D}U$, то найдется $b \in S$, $b \in U$. Из $S' \leqslant S$ следует, что найдется $b' \in S'$, $b' \leqslant b$. Отсюда $b' \in U$, ввиду открытости U и $b \in U$, что и доказывает $a' \in \boldsymbol{D}U$.

$U \subseteq \boldsymbol{D}U$. Пусть $a \in U$ и $S \in Q(a)$, тогда ввиду 1° и 2° найдется $a' \in S$, $a' \leqslant a$. Ввиду открытости U, $a' \in U$, что и доказывает $a \in \boldsymbol{D}U$.

$U \subseteq V \Rightarrow \boldsymbol{D}U \subseteq \boldsymbol{D}V$. Пусть $a \in \boldsymbol{D}U$, $S \in Q(a)$. Тогда найдется $b \in S$, $b \in U$ и, ввиду $U \subseteq V$, $b \in V$. Таким образом, $b \in \boldsymbol{D}V$.

$\boldsymbol{DD}U \subseteq \boldsymbol{D}U$. Пусть $a \in \boldsymbol{DD}U$; покажем $a \in \boldsymbol{D}U$. Пусть $S \in Q(a)$; найдем сначала $b' \in S$, $b' \in \boldsymbol{D}U$. Ввиду 4° существует $S' \in Q(b')$, $S \leqslant S'$. Из $b' \in \boldsymbol{D}U$ следует, что существует $b'' \in S'$, $b'' \in U$. Но ввиду $S \leqslant S'$ найдется $b \in S$, $b \leqslant b''$. Так как U открыто, то $b \in U$. Итак, $(\forall S \in Q(a))(\exists\, b \in S)\ (b \in U)$, т. е. $a \in \boldsymbol{D}U$.

$\boldsymbol{D}(U \cap V) = \boldsymbol{D}(U) \cap \boldsymbol{D}(V)$. Введем импликацию $(U \supset V)$ в порядковой топологии (пример 6 п. 1). Ввиду 2.3 достаточно показать, что $\boldsymbol{D}(U \supset V) \subseteq (U \supset V)$, если U открыто, а V полно. Пусть $a \in \boldsymbol{D}(U \supset V)$; для доказательства $a \in (U \supset V)$ возьмем произвольный элемент $a' \leqslant a$, $a' \in U$ и установим $a' \in V$. Ввиду полноты V достаточно показать, что для всякого пути $S' \in Q(a')$ найдется элемент $b' \in S'$, $b' \in V$. Пусть $S' \in Q(a')$. Ввиду 3° найдется $S \in Q(a)$, $S' \leqslant S$. Так как $a \in \boldsymbol{D}(U \supset V)$, то найдется $b \in S$, $b \in (U \supset V)$. Ввиду $S' \leqslant S$ найдется $b'' \in S'$, $b'' \leqslant b$. Ввиду 2° найдется $b' \in S'$, $b' \leqslant b''$, $b' \leqslant a'$. Тогда $b' \in (U \supset V)$ и $b' \in U$, т. е. $b' \in V$. $\square$

Опишем правила вычисления основных псевдобулевых операций в ВК-алгебре:

$$U \wedge V = U \cap V;$$

$$a \in (U \vee V) \Leftrightarrow (\forall S \in Q(a))(\exists b \in S)(b \in U \vee b \in V);$$

$$a \in (U \supset V) \Leftrightarrow (\forall b \leqslant a)(b \in U \Rightarrow b \in V);$$

$$\bot = \{a \in M \mid Q(a) = \varnothing\}; \quad \top = M;$$

$$a \in \neg U \Leftrightarrow (\forall\, b \leqslant a)(b \in U \Rightarrow Q(b) = \varnothing).$$

Если Q — семейство полных элементов, то

$$\bigwedge Q = \bigcap Q;$$

$$a \in \bigvee Q \Leftrightarrow (\forall\ S \in Q(a))(\exists b \in S)(\exists U \in Q)(b \in U).$$

Элементы множества $\bot$ называются *странными мирами*. Шкала, не содержащая странных миров, т. е. миров a, $Q(a) = \varnothing$, называется *нормальной*.

Пример 1. Пусть N — множество всех кортежей натуральных чисел; определим на N упорядочение, положив $a \leqslant b \leftrightharpoons \exists c\ (a = b * c)$ (обозначения см. на с. 43—44), т. е. более информативными являются более длинные кортежи. Пусть α — функция из натуральных чисел в натуральные, т. е. элемент пространства Бэра B^ω. Будем говорить, что α *проходит через кортеж* a, и писать $\alpha \in a$, если существует натуральное n такое, что $\bar{\alpha}(n) = a$, т. е. $a = \langle \alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$. Для данного α через S_α обозначим множество всех «обрезков» α, $S_\alpha = \{\bar{\alpha}(n) \mid n$ — натуральное число$\}$, и, далее,

$$S_\alpha^a = \{b \mid b \in S_\alpha,\ b \leqslant a\}.$$

Пусть теперь M — *стандартно вложенное поддерево* N, т. е. a) $M \subseteq N$; b) $\langle\ \rangle \in M$; c) $a * \hat{x} \in M \Rightarrow a \in M$. Например, множество B_0 всех *бинарных кортежей* (составленных из 0 и 1) является стандартно вложенным поддеревом N.

Для данного M и $a \in M$ определим $Q(a)$:

$$Q(a) = \{S_\alpha^a \cap M \mid \alpha \in B^\omega,\ \ \alpha \in a\}.$$

Тем самым определена шкала $\langle M, \leqslant, Q\rangle$, которую мы назовем *шкалой Бета*. Соответствующая п.б.а. ВК $(M, \leqslant, Q)$ использовалась (неявным образом) Бетом для построения моделей логики предикатов (см. Бет [1], с. 447, Гжегорчик [1]). Проверка выполнения условий 1° — 4° непосредственна.

Пример 2. Всегда можно наделить произвольное квазиупорядочение $\langle M, \leqslant\rangle$ *тривиальной структурой путей*, считая, что $Q(a)$ есть одноэлементное множество

$\{a\}$. Тогда оператор пополнения тривиален, $\boldsymbol{D}U = U$, и алгебра ВК совпадает с алгеброй шкалы Крипке.

Пример 3. Пусть $\langle M, \leqslant\rangle$ — произвольное квазиупорядочение. Если $a \in M$, то обозначим $[a] = \{b \in M \mid b \leqslant a\}$ (*острый конус*, порожденный элементом a). Определим теперь $Q(a) = \{[b] \mid b \leqslant a\}$. Легко проверить, что для $\langle M, \leqslant, Q\rangle$ вновь выполняются условия 1° — 4°. Убедимся, что эта ВК-шкала задает булеву алгебру. Пусть $U \subseteq M$ — полный элемент; покажем, что $U \vee \neg U = M$, т. е. что для всех a $(\forall x \leqslant a)(\exists y \leqslant x)(y \in U$ или $y \in \neg U\}$. Пусть $x \leqslant a$; разберем две исчерпывающие возможности: a) существует $y \leqslant x$, $y \in U$ — тогда утверждение доказано; b) для всех $y \leqslant x$, $y \notin U$ — тогда по определению $x \in \neg U$ и вновь утверждение доказано (заметим, что в этом маленьком рассуждении мы существенно использовали закон исключенного третьего). Полученную булеву алгебру ВК $(M, \leqslant, Q)$ назовем *алгеброй Макнейла* и обозначим через $\mathrm{MN}(M, \leqslant)$, так как в этом частном случае наше построение совпадает с его конструкцией полных булевых алгебр (см., например, Йех [1], п. 16, с. 51).

Следующие два результата характеризуют универсальность введенных нами понятий.

2.6. *Произвольная полная псевдобулева алгебра представима в виде алгебры полных элементов с операцией пополнения на открытых множествах некоторой шкалы Крипке. При этом операция пополнения удовлетворяет равенствам*

$$\boldsymbol{D}(x \cap y) = \boldsymbol{D}x \cap \boldsymbol{D}y, \quad \boldsymbol{D}(\varnothing) = \varnothing.$$

$\rhd$ Пусть $A = \langle B, \leqslant\rangle$ — полная псевдобулева алгебра. Пусть W — произвольный базис A, т. е. семейство ненулевых элементов B такое, что всякий элемент B представим в виде объединения элементов W (при этом нуль алгебры $\perp$ представляется объединением пустого множества элементов W). Например, можно взять $W = B \setminus \{\perp\}$. Рассмотрим теперь шкалу Крипке $\langle W, \leqslant\rangle$ и определим операцию пополнения $\boldsymbol{D}$ на открытых элементах соответствующей порядковой топологии, т. е. на элементах $\mathrm{OK}(W, \leqslant)$. А именно, для открытого $x \subseteq W$ определим $\boldsymbol{D}x = \{a \in W \mid a \leqslant \bigvee x\}$; здесь $\bigvee x$ — объединение в алгебре A. Нетрудно проверить выполнение условий 1) — 4′) для операции пополнения. Остановимся на проверке 4′), т. е. $\boldsymbol{D}(x \cap y) = \boldsymbol{D}(x) \cap \boldsymbol{D}(y)$. Согласно 2.3 достаточно убедиться, что если x открыто, а y полно в $\mathrm{OK}(W, \leqslant)$, то

$$\boldsymbol{D}(x \supset y) \subseteq (x \supset y);$$

здесь $(x \supset y) = \{a \in W \mid (\forall b \leqslant a)(b \in x \Rightarrow b \in y)\}$ — стандартная импликация в шкале Крипке. Пусть $a \in \boldsymbol{D}(x \supset y)$ и $b \leqslant a$, $b \in x$. Покажем, что $b \in y$. Из $a \in \boldsymbol{D}(x \supset y)$ и $b \leqslant a$ следует $b = b \wedge \bigvee\{d \mid d \in (x \supset y)\} = \bigvee\{b \wedge d \mid d \in (x \supset y)\} = \bigvee\{d \mid d \leqslant b, d \in (x \supset y)\}$. Здесь мы воспользовались дистрибутивностью $(a \wedge (\bigvee x)) = \bigvee\{a \wedge b \mid b \in x\}$) (см. Расёва и Сикорский [1], с. 160) и открытостью множества $(x \supset y)$. Но ввиду $b \in x$ имеем

$$\{d \leqslant b \mid d \in (x \supset y)\} = \{d \leqslant b \mid d \in y\}.$$

Таким образом, $b = \bigvee\{d \mid d \leqslant b, d \in y\} \leqslant \bigvee y$. Но y — полный элемент, так что из $b \leqslant \bigvee y$ следует $b \in y$.

Остается заметить, что алгебра полных элементов $\mathrm{OK}(W, \leqslant)^+$ изоморфна A. А именно, изоморфизм φ: $A \to \mathrm{OK}(W, \leqslant)^+$ задается соотношением $\varphi(a) = \{b \in W \mid b \leqslant a\}$. $\square$

2.7. *Псевдобулева алгебра всех открытых подмножеств топологического пространства может быть представлена как алгебра полных элементов нормальной ВК-шкалы.*

$\rhd$ Пусть $T = \langle X, \Pi\rangle$ — топологическое пространство. Тогда $\langle \Pi, \subseteq\rangle$ есть полная п.б.а. $\mathrm{O}(T)$. Пусть W — произвольный базис $\mathrm{O}(T)$ (определение см. в доказательстве п. 2.6). Подмножество $S \subseteq W$ назовем *базисом точки* $\alpha \in X$, если

(i) $U \in S \Rightarrow \alpha \in U$;

(ii) $V \in \Pi$, $\alpha \in V \Rightarrow (\exists U \in S)(U \subseteq V)$.

Будем говорить, что базис S точки α *содержится* в открытом множестве $U \in \Pi$, если $\alpha \in U$ и $V \subseteq U$ для всех $V \in S$. Для $U \in W$ через $Q(U)$ обозначим множество всех базисов для всех точек U, содержащихся в U. Легко проверить, что Q имеет свойства 1° — 4° структуры путей для шкалы Крипке $\langle W, \leqslant\rangle$. Рассмотрим 3°. Пусть $U' \subseteq U$, $S' \in Q(U')$, тогда $S' \in Q(U)$. Для доказательства 4° допустим $U' \in S \in Q(U)$. Положим $S' = \{V \in$

$S \mid V \subseteq U'\}$. Тогда S' есть базис той же точки, что и S, и $S' \in Q\,(U')$, причем, очевидно, $S \leqslant S'$.

Итак, можно рассмотреть алгебру $B = \mathrm{BK}\,(W, \subseteq, Q)$, так как Q порождает стандартную операцию пополнения на ОК $(W, \subseteq)$. А именно,

$$Dx = \{U \in W \mid (\forall S \in Q\,(U))(\exists\, V \in S)(V \in x)\}.$$

Мы утверждаем, что $Dx = \{U \mid U \in W,\ U \subseteq \bigcup x\}$. В самом деле, пусть $U \subseteq \bigcup x$, $S \in Q\,(U)$. Тогда S есть базис некоторой точки $\alpha \in U$. Из $U \subseteq \bigcup x$ следует, что найдется $V' \in x$, $\alpha \in V'$. Так как S — базис, то найдется $V \in S$, $V \subseteq V'$. Так как x открыто (элемент ОК $(W, \subseteq)$), то $V \in x$. Обратно, пусть неверно, что $U \subseteq \bigcup x$. Тогда найдется точка $\alpha \in U$, $\alpha \notin \bigcup x$. Возьмем базис S точки α, содержащийся в U. Очевидно $(\forall V \in S)\,(V \notin x)$.

Теперь изоморфизм алгебр О (T) и B строится так же, как в доказательстве п. 2.6: $\varphi\,(U) = \{V \in W \mid V \subseteq U\}$. Нормальность шкалы следует из того, что каждый элемент есть непустое открытое множество.

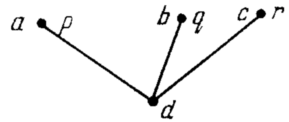
3. Приложения к логике высказывания. Интуиционистская логика не является конечнозначной. Имеющийся запас логических матриц позволяет нам легко доказывать, что некоторые формулы невыводимы в интуиционистской логике высказываний. Достаточно для испытуемой формулы подобрать псевдобулеву алгебру и приписать пропозициональным переменным формулы элементы этой алгебры (*оценить* ее переменные, см. с. 77) таким образом, чтобы в результате ее *значение* оказалось отличным от единицы $\top$ алгебры. Тогда из согласованности п.б.а. вытекает, что испытуемая формула невыводима.

Пример 1. Рассмотрим следующее двуэлементное множество:

как ч.у.м., где $1 < 2$. Будем рассматривать это множество как шкалу Крипке с соответствующей алгеброй ОК $(\{1, 2\}, \leqslant)$. Припишем переменной p элемент $\{1\}$ — открытое множество порядковой топологии. Тогда значения формул $p \vee \neg p$, $\neg\neg p \supset p$ отличны от единицы (единицей служит все пространство $\{1, 2\}$, в то время как непосредственным вычислением по правилам п. 1, пример 6, убеждаемся, что 2 не принадлежит значению формул). Более подробно,

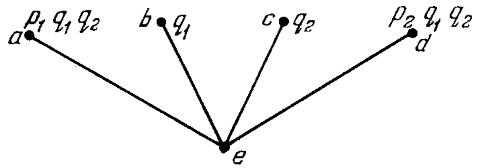
$$\| p \| = \{1\},\quad \| \neg p \| = \varnothing,\quad \| p \vee \neg p \| = \{1\},$$
$$\| \neg\neg p \| = \{1, 2\},\quad \| \neg\neg p \supset p \| = \{1\}.$$

Пример 2. Рассмотрим следующее четырехэлементное множество $\{a, b, c, d\}$, частично упорядоченное, как указано на рисунке (меньшие элементы стоят выше):



Припишем значения переменных следующим образом: $\| p \| = \{a\}$, $\| q \| = \{b\}$, $\| r \| = \{c\}$. Тогда $d \notin \| (\neg p \supset q \vee r) \supset (\neg p \supset q) \vee (\neg p \supset r) \|$, так что эта формула невыводима в НРС.

Пример 3. Следующая шкала Крипке:



с оценкой $\| p_1 \| = \{a\}$, $\| p_2 \| = \{d\}$, $\| q_1 \| = \{a, b, d\}$, $\| q_2 \| = \{a, c, d\}$ позволяет установить невыводимость формулы Цейтина (см. с. 73). Подбор соответствующей шкалы Крипке сильно облегчается, если принять во внимание интуитивную интерпретацию моделей Бета—Крипке, которую мы обсудим ниже (см. с. 115). Теорема о полноте (замечание 1 к теореме 5.1 ниже) показывает, в частности, что любая невыводимая формула логики высказываний опровержима на некоторой конечной шкале Крипке.

Следующий результат принадлежит Гёделю [2].

3.1. *Не существует конечной логической матрицы* $M = \langle B, B_0, \wedge, \vee, \supset, \perp \rangle$ *такой, что множество всех* *формул, выводимых в интуиционистской логике высказываний, было бы в точности равно множеству всех формул, принимающих в M выделенное значение при любой оценке.*

$\triangleright$ Для каждого натурального $n > 1$ рассмотрим формулу $P_n = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (p_i \equiv p_j)$ от пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$. Каждая формула P_n невыводима в НРС. В самом деле, она опровергается в цепной п.б.а. $Ц_{n+1}$ (см. п. 1, пример 4а)), если оценить $\| p_i \| = (i - 1)$.

Допустим теперь, что существует конечная матрица M такая, что множество B ее элементов содержит n элементов. Так как P_{n+1} невыводима, то при некоторой оценке в M значение $\| P_{n+1} \| \notin B_0$. В множестве B только n элементов, а в P_{n+1} имеется $(n + 1)$ переменных, поэтому найдутся p_k и p_l такие, что $\| p_k \| = \| p_l \|$. Рассмотрим формулу P'_{n+1}, полученную заменой вхождений p_k в P_{n+1} на p_l. Очевидно, $\| P'_{n+1} \| = \| P_{n+1} \|$. Но P'_{n+1} содержит дизъюнктивный член $p_l \equiv p_l$ и поэтому выводима. Но тогда должно быть $\| P'_{n+1} \| \in B_0$, и мы приходим к противоречию. $\square$

3.2. *Покажем, что, в отличие от классической логики, все связки $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\perp$ в интуиционистском исчислении высказываний независимы.*

$\triangleright$ Пусть φ — произвольная формула, построенная только с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\supset$. Тогда $\perp \equiv \varphi$ не выводится. В самом деле, эта эквивалентность опровергается на алгебре $Ц_2$, если всем переменным φ приписать значение 1.

Пусть теперь φ составлена из $\wedge \supset \perp$. Тогда $p \vee q \equiv \varphi$ не выводится. В самом деле, эта эквивалентность опровергается на алгебре п. 1, пример 1d), если оценить $\| p \| = 1$, $\| q \| = 2$ и значение $\| r \| = 1$ для остальных переменных. Тогда слева от эквивалентности будет стоять ω, в то время как справа ввиду отсутствия $\vee$ не может получиться ω.

Пусть теперь формула φ составлена с помощью связок $\vee$, $\supset$, $\perp$. Тогда формула $p \wedge q \equiv \varphi$ не выводится, так как опровергается на алгебре $Ц_2 \times Ц_3$ при оценке $\| p \| = (\top, \omega)$, $\| q \| = (\perp, \top)$ и $\| r \| = (\perp, \top)$ (см. п. 1, пример 4b)). Тогда $\| p \wedge q \| = (\perp, \omega)$, а все значения, которые могут принимать подформулы φ справа, суть

$$(\top, \top), \ (\top, \omega), (\top, \perp), (\perp, \top), (\perp, \perp).$$

Наконец, рассмотрим формулу φ, построенную с помощью связок $\wedge \vee \perp$. Тогда формула $(p \supset q) \equiv \varphi$ не выводится, так как опровергается на алгебре $Ц_3 \times Ц_3$ при оценке $\| p \| = (\top, \omega)$, $\| q \| = (\omega, \omega)$ и $\| r \| = (\omega, \omega)$ для остальных переменных r. Тогда $\| p \supset q \| = (\omega, \top)$, а все значения, которые могут принимать подформулы φ справа, суть $(\top, \top)$, $(\top, \omega)$, (ω, ω), $(\perp, \perp)$. $\square$

В этой книге нас главным образом интересуют прикладные интуиционистские теории, арифметика, анализ, логика предикатов, поэтому мы ограничимся этими краткими сведениями о выводимости в логике высказываний. В настоящее время теория суперинтуиционистских логик высказываний интенсивно изучается, здесь получено много глубоких результатов. Упомянем некоторые из современных исследований: Кузнецов [1], [2], Кузнецов и Герчиу [1], Янков [1], [2], Раца [1], Максимова [1], [2], Шехтман [1] — [3], Эсакиа [1], Соболев [1], [2], Гуревич [1], Габбай [1].

4. Модели Бета — Крипке, алгебраические и топологические модели.

4.1. Опишем теперь класс интуиционистских моделей, приспособленных к языкам с кванторами. Мы рассматриваем обычные *логико-математические языки*, может быть, с многими сортами переменных. Каждый такой язык Ω задается набором

$$\Omega = \langle V, \mathrm{Cnst}, \mathrm{Fn}, \mathrm{Pr} \rangle,$$

где V — непустое множество *сортов переменных*, для каждого сорта $k \in V$ фиксирован счетный набор *переменных сорта* k: x^k, y^k, z^k, ... Cnst — множество *констант* языка, считается, что каждой константе приписан определенный сорт. Fn — множество *функциональных символов* языка, каждый функциональный символ имеет некоторое количество, большее нуля, аргументных мест, причем каждое аргументное место имеет определенный сорт. Из переменных, констант и функциональных символов можно конструировать *термы* языка. Каждый терм имеет определенный сорт. Pr — непустое множество *предикатных символов* языка. Каждый предикатный символ имеет некоторое количество ($\geqslant 0$) аргументных мест, причем каждое аргументное место имеет определенный сорт.

Атомарные формулы языка получаются путем замещения в предикатных символах аргументных мест термами соответствующих сортов. *Равенство* в языке отдельно не выделяется: оно может присутствовать для некоторых сортов переменных в качестве рядового предикатного символа. *Формулы* строятся из атомарных обычным образом с помощью логических связок $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\perp$, $\forall$, $\exists$, кванторы употребляются по всем сортам переменных. Логическая константа $\perp$ в множество Cnst констант языка не входит. *Мощность* языка есть по определению максимум счетной мощности и мощности прямого объединения множеств V, Cnst, Fn, Pr. Таким образом, мощность языка всегда бесконечна.

При изучении теорий с классической логикой иногда мы будем вместо $\perp$ употреблять одноместную логическую связку $\neg$ — отрицание. При наличии $\perp$ отрицание выражаем стандартным образом: $\neg\varphi \rightleftharpoons (\varphi \supset \perp)$.

Типичным примером языка рассматриваемого типа является язык An (U) п. 1 ч. 2.

Мы начнем с введения некоторого чрезвычайно общего понятия алгебраической модели для данного языка. Фактически эта общая алгебраическая конструкция применима не только к интуиционистской логике. Алгебраическую модель можно рассматривать, если задана подходящая логическая матрица ее истинностных значений.

4.2. *Алгебраическая модель для языка* Ω определяется набором $A = \langle B, D, R, \widehat{\mathrm{Cnst}}, \widehat{\mathrm{Fn}}, \widehat{\mathrm{Pr}}\rangle$. Здесь B — полная псевдобулева алгебра, называемая *алгеброй истинностных значений* модели, D — семейство предметных областей модели, т. е. D есть функция, перерабатывающая каждый сорт π языка Ω в некоторое множество D_π — множество *предметных объектов* данного сорта (*предметная область*).

R есть трехместная функция, перерабатывающая сорт π языка Ω и предметные объекты p, $q \in D_\pi$ в элемент $R(\pi, p, q) \in B$. Предполагается, что R удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(\pi, p, q) \leqslant R(\pi, p, p)$;
2) $R(\pi, p, q) = R(\pi, q, p)$;
3) $R(\pi, q_1, q_2) \wedge R(\pi, q_2, q_3) \leqslant R(\pi, q_1, q_3)$;
4) $\bigvee \{R(\pi, q, q) \mid q \in D_\pi\} = \top$.

Если известно, о каком сорте π идет речь, мы будем писать просто $\| p \sim q \|$ вместо $R(\pi, p, q)$ и $\| q \|$ вместо $R(\pi, q, q)$. Элемент $R(\pi, p, q)$, интуитивно говоря, оценивает «степень равенства» объектов p и q. Условия 2) и 3) при этом соответствуют симметричности и транзитивности равенства. Условие рефлексивности в этих терминах можно было бы записать в виде $R(\pi, q, q) = \top$. Вместо него мы используем более слабые условия 1) и 4). Можно считать, что $\| q \| = R(\pi, q, q)$ есть «мера (область) определенности» объекта q. Может оказаться, например, что в некоторой модели $\| q \| = \top$ для всех $q \in D_\pi$. В такой ситуации мы говорим, что наша модель имеет *постоянную предметную область* сорта π. В интуиционистской теории моделей существенную роль играют модели с непостоянной предметной областью.

Функцию R мы назовем *степенью равенства* в модели.

Для данных p, $q \in D_\pi$ определим $(p, q)_B = \bigvee \{a \in B \mid p$ есть $q\}$. Таким образом, если p совпадает с q, то $(p, q)_B = \top$; если же p не совпадает с q, то $(p, q)_B = \perp$. Наше косвенное определение $(p, q)_B$ связано с желанием избежать употребления закона исключенного третьего в метаматематике.

Во всякой модели можно тривиальным образом определить степень равенства *по совпадению*, положив $R(\pi, p, q) = (p, q)_B$. Все условия 1) — 4) при этом выполняются автоматически.

Менее тривиальный способ введения R — *через меру определенности*. При этом сначала задают $R(\pi, q, q)$ для всех $q \in D_\pi$ таким образом, чтобы выполнялось условие 4), а затем определяют для произвольных $p, q \in D_\pi$:

$$R(\pi, p, q) = R(\pi, p, p) \wedge R(\pi, q, q) \wedge (p, q)_B.$$

Условия 1) — 4) при этом можно доказать (и без использования закона исключенного третьего). При этом способе задания R если p и q различны, то $R(\pi, p, q) = \perp$.

Заметим, что мы не исключаем случая пустой предметной области, $D_\pi = \varnothing$ для некоторого сорта π. Однако, из условия 4) следует, что в этом случае алгебра B тривиальна, $\perp = \top$.

Функция $\widehat{\mathrm{Cnst}}$ сопоставляет каждой константе c сорта π языка Ω некоторый предметный объект $\bar{c} = \widehat{\mathrm{Cnst}}(c) \in D_\pi$. При этом

5) $R(\pi, c, c) = \top$.

Из условия 5) следует 4), если язык Ω содержит хотя бы одну константу рассматриваемого сорта π.

Функция $\widehat{\mathrm{Fn}}$ приписывает значение функциональным символам языка Ω. Пусть f — k-местный функциональный символ языка и аргументные места f имеют сорта $\pi_1, \ldots, \pi_k$ соответственно, а сам символ f имеет сорт π. Пусть $q_1, \ldots, q_k, q$ — предметные объекты, $q_i \in D_\pi$, $q \in D_\pi$. Тогда определено значение $\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) \in B$. Функция $\widehat{\mathrm{Fn}}$ должна еще удовлетворять условиям, выражающим некоторые алгебраические варианты всюду определенности, единственности и согласованности с равенством для f:

$$6)\ \| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_k \| \leqslant \bigvee \{\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) \mid q \in D_\pi\};$$

$$7)\ \| q_1 \sim q_1' \| \wedge \ldots \wedge \| q_k \sim q_k' \| \wedge \widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) \wedge \widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1', \ldots, q_k', q') \leqslant \| q \sim q' \|;$$

$$8)\ \| q \sim q' \| \wedge \| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_k \| \wedge \widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) \leqslant \widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q').$$

В важном частном случае, когда R вводится через меру определенности, условие 8) выполняется автоматически.

Часто функция $\widehat{\mathrm{Fn}}$ задается *операторным образом*. А именно, задается функция F^*, которая каждому функциональному символу f языка сопоставляет о т о б р а ж е н и е $\bar{f} = F^*(f)$ типа $D_{\pi_1} \times \ldots \times D_{\pi_k} \to D_\pi$. Если F^* задано, то $\widehat{\mathrm{Fn}}$ определяется канонически следующим образом:

$$\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) = R(\pi, F^*(f)(q_1, \ldots, q_k), q),$$

т. е. $\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) = \| \bar{f}(q_1, \ldots, q_k) \sim q \|$.

Чтобы $\widehat{\mathrm{Fn}}$ удовлетворяла требованиям 6) — 8), достаточно, чтобы F^* удовлетворяла следующим условиям:

$$6')\ \| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_k \| \leqslant \| \bar{f}(q_1, \ldots, q_k) \|;$$

$$7')\ \| q_1 \sim q_1' \| \wedge \ldots \wedge \| q_k \sim q_k' \| \leqslant \| \bar{f}(q_1, \ldots, q_k) \sim \bar{f}(q_1', \ldots, q_k') \|.$$

Фактически, если $\widehat{\mathrm{Fn}}$ задается операторным образом, вместо 6′) мы будем требовать выполнения более сильного

условия:

$$6'')\ \| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_k \| = \| \bar{f}(q_1, \ldots, q_k) \|.$$

Далее, если P — предикатный символ языка Ω, аргументные места которого имеют сорта $\pi_1, \ldots, \pi_k$ соответственно, и $q_1, \ldots, q_k$ — предметные объекты, $q_i \in D_{\pi_i}$, то определено значение $\widehat{\mathrm{Pr}}(P, q_1, \ldots, q_k) \in B$. Никаких дополнительных условий на функцию $\widehat{\mathrm{Pr}}$ не накладывается.

Определение алгебраической модели закончено.

4.3. Если задана алгебраическая модель A, то можно приписать определенные значения замкнутым термам и формулам языка Ω. Рассмотрим язык Ω', полученный из Ω путем добавления к последнему некоторого множества новых констант. А именно, для каждого сорта π добавим в качестве новых констант сорта π все элементы множества D_π. Точнее, к Ω следует добавлять не сами предметные объекты, а их имена, и добавляемые имена должны быть отличны от уже имеющихся констант языка Ω. Исключение составляют предметные объекты, сопоставляемые в A константам языка Ω,— их имена можно отождествить с самими этими константами. Обозначим язык Ω' через $\Omega[A]$.

З а м к н у т ы е термы и формулы языка $\Omega[A]$ назовем термами и формулами, *оцененными в* A. Можно представлять себе, что оцененные выражения получаются из обычных путем замещения в последних некоторых параметров предметными объектами A.

Значения в модели приписываются именно оцененным формулам и термам. Разумеется, замкнутые выражения языка Ω по определению являются оцененными.

4.4. Пусть t — оцененный терм сорта π и $q \in D_\pi$. Определим $\| t \sim q \| \in B$ — «истинностное значение того, что t изображает объект q» — индукцией по построению t.

1) Если t есть предметный объект, то значение $\| t \sim q \|$ задано в модели A.

2) Если c — константа языка и $\bar{c} = \widehat{\mathrm{Cnst}}(c)$ — предметный объект, соответствующий в модели константе c, то по определению $\| c \sim q \| = \| \bar{c} \sim q \|$.

3) Пусть оцененный терм t имеет вид $f(t_1, \ldots, t_k)$, где f — функциональный символ языка, t_i — оцененный

терм сорта π_i. Положим

$$\| t \sim q \| = \bigvee \{\widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, q_1, \ldots, q_k, q) \wedge \| t_1 \sim q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| t_k \sim q_k \| \mid q_1 \in D_{\pi_1}, \ldots, q_k \in D_{\pi_k}\}.$$

Определим, далее, *меру определенности* оцененного терма

$$\| t \| = \bigvee \{ \| t \sim q \| \mid q \in D_\pi\}.$$

Заметим, что в случае, когда t есть предметный объект, это определение согласуется с данным в п. 4.2, так как ввиду 1) п. 4.2 имеем $\| p \sim p \| = \bigvee \{ \| p \sim q \| \mid q \in D_\pi\}$.

Докажем теперь несколько элементарных свойств отношения $\| t \sim q \|$.

4.4.1. $\| t \sim p \| \wedge \| t \sim q \| \leqslant \| p \sim q \|$.

$\triangleright$ Индукцией по построению t. Если t есть объект, то неравенство следует из требований 1) — 3) п. 4.2 на отношение $\| p \sim q \|$. Пусть $t = f\,(t_1, \ldots, t_k)$. Мы ограничимся рассмотрением случая $k = 2$. Тогда для доказательства неравенства достаточно показать, что для всяких $q_1, q_1' \in D_{\pi_1}$ и $q_2, q_2' \in D_{\pi_2}$ имеем

$$\widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, q_1, q_2, p) \wedge \| t_1 \sim q_1 \| \wedge \| t_2 \sim q_2 \| \wedge \widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, q_1', q_2', q) \wedge \| t_1 \sim q_1' \| \wedge \| t_2 \sim q_2' \| \leqslant \| p \sim q \|.$$

Но $\| t \sim q_1 \| \wedge \| t_1 \sim q_1' \| \leqslant \| q_1 \sim q_1' \|$ по индуктивному предположению. Аналогично для q_2 и q'. Поэтому левую часть можно умножить на $\| q_1 \sim q_1' \| \wedge \| q_2 \sim q' \|$. После этого остается воспользоваться свойством 7) в п. 4.2. $\square$

Если в этой лемме выбрать p совпадающим с q, то получим:

4.4.2. $\| t \sim p \| \leqslant \| p \|$.

Далее,

4.4.3. *Пусть* t — *оцененный терм сорта* π *и* $q_1, \ldots, q_n$ — *список предметных объектов, содержащий все объекты, встречающиеся в* t. *Тогда* $\| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_n \| \leqslant \| t \|$.

$\triangleright$ Индукцией по построению t. Если t — константа языка, то $\| t \| = \top$. Если t есть предметный объект, то утверждение очевидно, так как $\| t \|$ встречается как сомножитель в левой части. Пусть t имеет вид $f\,(t_1, \ldots, t_k)$. Вновь ограничимся случаем $k = 2$. По индуктивному предположению $\| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_n \| \leqslant \| t_i \|$ для $i = 1, 2$, так что достаточно показать $\| t_1 \| \wedge \| t_2 \| \leqslant \| t \|$. Так как $\| t_i \| = \bigvee \{ \| t_i \sim p_i \| \mid p_i\}$, то достаточно установить, что для всяких $p_1 \in D_{\pi_1}$ и $p_2 \in D_{\pi_2}$ имеем $\| t_1 \sim p_1 \| \wedge \| t_2 \sim p_2 \| \leqslant \| f\,(t_1, t_2) \|$. Но согласно определению выражения справа достаточно показать, что

$$\| t_1 \sim p_1 \| \wedge \| t_2 \sim p_2 \| \leqslant \bigvee \{\widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, p_1, p_2, q) \wedge \| t_1 \sim p_1 \| \wedge \| t_2 - p_2 \| \mid q \in D_\pi\},$$

что равносильно

$$\| t_1 \sim p_1 \| \wedge \| t_2 \sim p_2 \| \leqslant \| t_1 \sim p_1 \| \wedge \| t_2 \sim p_2 \| \wedge \{\widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, p_1, p_2, q) \mid q \in D_\pi\}.$$

Согласно 4.4.2 $\| t_i \sim p_i \| \leqslant \| p_i \|$, так что левая часть искомого неравенства может быть пересечена с $\| p_1 \| \wedge \| p_2 \|$. После этого остается воспользоваться свойством 6) в п. 4.2. $\square$

4.4.4. $\| t \sim p \| \wedge \| p \sim q \| \leqslant \| t \sim q \|$.

$\triangleright$ Индукцией по построению t. Если t есть объект, то это следует из требований 1) — 3) в п. 4.2. Пусть $t = f(t_1, \ldots, t_k)$. Рассмотрим случай $k = 2$. Из определения $\| t \sim p \|$ и $\| t \sim q \|$ в этом случае следует, что достаточно установить, что для произвольных q_1, q_2 соответствующих сортов

$$\| p \sim q \| \wedge \widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, q_1, q_2, p) \wedge \| t_1 \sim q_1 \| \wedge \| t_2 \sim q_2 \| \leqslant \widehat{\mathrm{Fn}}\,(f, q_1, q_2, q) \wedge \| t_1 \sim q_1 \| \wedge \| t_2 \sim q_2 \|.$$

Но $\| t_i \sim q_i \| \leqslant \| q_i \|$ ввиду 4.4.2. Поэтому левая часть без изменения может быть пересечена с $\| q_1 \| \wedge \| q_2 \|$. После этого достаточно воспользоваться условием 8) п. 4.2. $\square$

Лемма ниже обеспечивает возможность «заменять равное на равное» в оцененных термах.

4.4.5.

a) $\| t \sim p \| \wedge \| r\,(t) \sim q \| \leqslant \| r\,(p) \sim q \|$;

b) $\| t \sim p \| \wedge \| r\,(p) \sim q \| \leqslant \| r\,(t) \sim q \|$.

$\triangleright$ Оба неравенства доказываем одновременной индукцией по построению оцененного терма $r\,(t)$. Если $r\,(t)$ не содержит фактически вхождений t, то $r\,(t)$ совпадает с $r\,(p)$ и оба неравенства тривиальны. Пусть $r\,(t)$ есть в точности t и $r\,(p)$ есть p. Тогда первое неравенство приобретает вид

$$\| t \sim p \| \wedge \| t \sim q \| \leqslant \| p \sim q \|$$

и следует из 4.4.1. Второе же неравенство

$$\| t \sim p \| \wedge \| p \sim q \| \leqslant \| t \sim q \|$$

следует из 4.4.4. Пусть, наконец, $r(t) = f(t_1(t), \ldots, t_k(t))$. Как всегда, рассмотрим лишь случай $k = 2$. По определению

$$\| r(t) \sim q \| = \bigvee \{\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, q_2, q) \wedge \| t_1(t) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(t) \sim q_2 \| \mid q_1 \in D_{\pi_1},\ q_2 \in D_{\pi_2}\},$$

$$\| r(p) \sim q \| = \bigvee \{\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, q_2, q) \wedge \| t_1(p) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(p) \sim q_2 \| \mid q_1 \in D_{\pi_1},\ q_2 \in D_{\pi_2}\}.$$

Поэтому для установления, например, $\| t \sim p \| \wedge \| r(t) \sim q \| \leqslant \| r(p) \sim q \|$ достаточно показать, что для всяких q_1, q_2

$$\| t \sim p \| \wedge \| t_1(t) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(t) \sim q_2 \| \leqslant \| t_1(p) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(p) \sim q_2 \|,$$

что следует из индуктивного предположения. $\square$

Если $\widehat{\mathrm{Fn}}$ задается операторным образом, то для каждого оцененного терма t естественным образом определено *значение* $\bar{t}$. С помощью условий 6″) и 7′) в п. 4.2 нетрудно показать индукцией по построению оцененного терма t равенство

4.4.6. $\| t \sim q \| = \| \bar{t} \sim q \|$.

4.5. Определим теперь истинностное значение произвольной оцененной формулы φ индукцией по построению φ:

1) если φ есть атомарная формула и имеет вид $P(t_1, \ldots, t_k)$, то $\| \varphi \| = \bigvee \{\widehat{\mathrm{Pr}}(P, q_1, \ldots, q_k) \wedge \| t_1 \sim q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| t_k \sim q_k \| \mid q_1 \in D_{\pi_1}, \ldots, q_k \in D_{\pi_k}\}$;

в частности, если t_i суть предметные объекты, t_i есть p_i, то $\| P(p_1, \ldots, p_k) \| = \| p_1 \| \wedge \ldots \wedge \| p_k \| \wedge \widehat{\mathrm{Pr}}(P, p_1, \ldots, p_k)$;

2) $\| \psi \wedge \eta \| = \| \psi \| \wedge \| \eta \|$;

3) $\| \psi \vee \eta \| = \| \psi \| \vee \| \eta \|$;

4) $\| \psi \supset \eta \| = \| \psi \| \supset \| \eta \|$;

5) $\| \perp \| = \perp$;

6) $\| \forall x \psi(x) \| = \bigwedge \{ \| q \| \supset \| \psi(q) \| \mid q \in D_\pi \}$;

7) $\| \exists x \psi(x) \| = \bigvee \{ \| q \| \wedge \| \psi(q) \| \mid q \in D_\pi \}$;

здесь справа используются операции алгебры B. Заметим своеобразную трактовку кванторов. Если предметная область D_π постоянна, то пункты, относящиеся к кванторам, приобретают более стандартный вид:

6′) $\| \forall x \psi(x) \| = \bigwedge \{ \| \psi(q) \| \mid q \in D_\pi \}$;

7′) $\| \exists x \psi(x) \| = \bigvee \{ \| \psi(q) \| \mid q \in D_\pi \}$.

Следующая лемма выражает возможность заменять в оцененной формуле равные объекты равными.

4.5.1. *Пусть t — оцененный терм, q — объект сорта, совпадающего с сортом t. Пусть $\psi(t)$ — оцененная формула. Тогда*

a) $\| t \sim p \| \wedge \| \psi(t) \| \leqslant \| \psi(p) \|$;

b) $\| t \sim p \| \wedge \| \psi(p) \| \leqslant \| \psi(t) \|$.

$\rhd$ Индукцией по построению формулы ψ докажем оба неравенства одновременно. Начнем со случая, когда $\psi(t)$ — атомарная формула и имеет вид $P(t_1(t), t_2(t))$, где P — предикатный символ. Необходимо показать, например, $\| t \sim p \| \wedge \| P(t_1(t), t_2(t)) \| \leqslant \| P(t_1(p), t_2(p)) \|$. Но $\| P(t_1(t), t_2(t)) \| = \bigvee \{\widehat{\mathrm{Pr}}(P, q_1, q_2) \wedge \| t_1(t) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(t) \sim q_2 \| \mid q_1, q_2\}$, так что нужно показать $\| t \sim p \| \wedge \widehat{\mathrm{Pr}}(P, q_1, q_2) \wedge \| t_1(t) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(t) \sim q_2 \| \leqslant \| P(t_1(p), t_2(p)) \|$ для всяких q_1, q_2 соответствующих сортов. Мы покажем, что левая часть этого неравенства меньше или равна даже одного слагаемого в правой части, а именно,

$$\widehat{\mathrm{Pr}}(P, q_1, q_2) \wedge \| t_1(p) \sim q_1 \| \wedge \| t_2(p) \sim q_2 \|.$$

Но это следует непосредственно из 4.4.5, так как

$$\| t \sim p \| \wedge \| t_1(t) \sim q_1 \| \leqslant \| t_1(p) \sim q_1 \|.$$

Пусть $\psi(t)$ имеет теперь вид импликации, $\psi(t)$ есть $\eta(t) \supset \xi(t)$. Необходимо показать $\| t \sim p \| \wedge \| \eta(p) \supset \xi(p) \| \leqslant \| \eta(t) \supset \xi(t) \|$, т. е.

$$\| t \sim p \| \wedge \| \eta(p) \supset \xi(p) \| \wedge \| \eta(t) \| \leqslant \| \xi(t) \|.$$

Но $\| t \sim p \| \wedge \| \eta(t) \| \leqslant \| \eta(p) \|$ по индуктивному предположению, так что левую часть можно пересечь с $\| \eta(p) \|$. Далее, во всякой псевдобулевой алгебре $\| \eta(p) \| \wedge \| \eta(p) \supset \xi(p) \| \leqslant \| \xi(p) \|$, так что левую часть полученного неравенства можно без ее изменения пересечь и с $\| \xi(p) \|$. После этого $\| t \sim p \| \wedge \| \eta(p) \supset \xi(p) \| \wedge \| \eta(t) \| \wedge$

$\| \eta (p) \| \wedge \| \xi (p) \| \leqslant \| \xi (t) \|$ следует из индуктивного предположения: $\| t \sim p \| \wedge \| \xi (p) \| \leqslant \| \xi (t) \|$.

Остальные случаи индукции предоставляются читателю. □

Факт согласованности алгебраических моделей с интуиционистской логикой выражается следующей теоремой.

4.5.2. (Теорема о корректности алгебраических моделей.) *Пусть* φ *— формула языка* Ω *и* $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ *— конечное множество предметных объектов. Обозначим* $\| Q \| = \| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_n \|$, *причем для пустого* Q *положим* $\| Q \| = \top$. *Пусть* φ' *— оцененная формула, получающаяся заменой параметров* φ *элементами* Q. *Тогда, если* φ *выводится в* НРС, *то* $\| Q \| \leqslant \| \varphi' \|$.

В частности, если φ *— предложение* Ω, *то из выводимости* φ *следует* $\| \varphi \| = \top$.

Далее, если все предметные области модели постоянны, то всегда $\| Q \| = \top$ *и из выводимости* φ *просто следует* $\| \varphi' \| = \top$.

▷ Индукцией по построению вывода φ в НРС$_1$.

Все постулаты, не относящиеся к кванторам, следуют из того, что всякая псевдобулева алгебра согласована с интуиционистской логикой высказываний. Некоторая специфика модели проявляется лишь в обращении с $\| Q \|$. Используем следующую лемму, позволяющую сокращать множество $\| Q \|$, вычеркивая неиспользуемые элементы.

4.5.2.1. *Пусть* φ' *— формула, оцененная элементами* Q, *и пусть для всех* $q \in D_\pi$ *имеем* $\| Q \cup \{q\} \| \leqslant \| \varphi' \|$. *Тогда* $\| Q \| \leqslant \| \varphi' \|$.

▷ Это следует из нашего требования 4) в п. 4.2:

$$\bigvee \{ \| q \| \mid q \in D_\pi \} = \top. \ \square$$

Рассмотрим теперь для примера правило вывода

$$\varphi (x, y), \ \varphi (x, y) \supset \psi (x) \ / \ \psi (x).$$

По индуктивному предположению $\| p \| \wedge \| q \| \leqslant \| \varphi (p, q) \|$ и $\| p \| \wedge \| q \| \leqslant \| \varphi (p, q) \supset \psi (p) \|$. По законам п.б.а. отсюда заключаем $\| p \| \wedge \| q \| \leqslant \| \psi (p) \|$ и, воспользовавшись леммой, $\| p \| \leqslant \| \psi (p) \|$.

Рассмотрим постулаты, относящиеся к кванторам. Пусть дана аксиома $\psi (t) \supset \exists x \psi (x)$. Необходимо установить $\| Q \| \leqslant \| \psi' (t') \supset \exists x \psi' (x) \|$. Ввиду 4.4.3 $\| Q \| \leqslant \| t' \|$, так что достаточно показать $\| t' \| \leqslant \| \psi' (t') \supset$

$\exists x \psi' (x) \|$ или $\| t' \| \wedge \| \psi' (t') \| \leqslant \| \exists x \psi' (x) \|$. Но $\| t' \| = \bigvee \{ \| t' \sim p \| \mid p \in D_\pi \}$, так что достаточно показать

$$\| t' \sim p \| \wedge \| \psi' (t') \| \leqslant \bigvee \{ \| q \| \wedge \| \psi' (q) \| \mid q \in D_\pi \}$$

для всех $p \in D_\pi$. Ввиду 4.5.1 и 4.4.2 $\| t' \sim p \| \wedge \| \psi (t') \| \leqslant \| \psi' (p) \|$ и $\| t' \sim p \| \leqslant \| p \|$; поэтому мы достигнем цели, если покажем

$$\| p \| \wedge \| \psi' (p) \| \leqslant \bigvee \{ \| q \| \wedge \| \psi' (q) \| \mid q \in D_\pi \}.$$

Последнее же очевидно, так как элемент слева фигурирует в качестве слагаемого и справа.

Рассмотрим теперь аксиому $\forall x \psi (x) \supset \psi (t)$. Необходимо установить $\| Q \| \leqslant \| \forall x \psi' (x) \supset \psi' (t') \|$ или $\| Q \| \wedge \| \forall x \psi' (x) \| \leqslant \| \psi' (t') \|$. Имеем $\| Q \| \leqslant \| t' \|$ и $\| t' \| = \bigvee \{ \| t' \sim p \| \mid p \in D_\pi \}$, поэтому достаточно для каждого $p \in D_\pi$ установить $\| Q \| \wedge \| t' \sim p \| \wedge \| \forall x \psi' (x) \| \leqslant \| \psi' (t') \|$. Но из определения имеем $\| \forall x \psi' (x) \| \leqslant (\| p \| \supset \| \psi' (p) \|)$, так что достаточно доказать $\| t' \sim p \| \wedge (\| p \| \supset \| \psi' (p) \|) \leqslant \| \psi' (t') \|$. Имеем $\| t' \sim p \| \leqslant \| p \|$ и $\| p \| \wedge (\| p \| \supset \| \psi' (p) \|) \leqslant \| \psi' (p) \|$. Наше неравенство следует из $\| t' \sim p \| \wedge \| \psi' (p) \| \leqslant \| \psi' (t') \|$, что в свою очередь следует из 4.5.1.

Рассмотрим теперь правило

$$\psi (x) \supset \eta \ / \ \exists x \psi (x) \supset \eta,$$

где, как обычно, η не содержит свободно x. По индуктивному предположению $\| Q \| \wedge \| q \| \leqslant \| \psi' (q) \supset \eta' \|$. По законам п.б.а. отсюда $\| q \| \wedge \| \psi' (q) \| \leqslant (\| Q \| \supset \| \eta' \|)$. Взяв слева объединение по всем $q \in D_\pi$, получим $\| \exists x \psi' (x) \| \leqslant (\| Q \| \supset \| \eta' \|)$ и вновь по законам п.б.а. $\| Q \| \leqslant \| \exists x \psi' (x) \supset \eta' \|$. □

4.6. Пусть дана модель для языка Ω. Оцененная формула φ называется *истинной в модели* A, если $\| q_1 \| \wedge \ldots \wedge \| q_n \| \leqslant \| \varphi \|$, где $q_1, \ldots, q_n$ — полный список всех предметных объектов, встречающихся в φ.

В частности, если φ — предложение Ω (а значит, вовсе не содержит предметных объектов), то φ истинно в A тогда и только тогда, когда $\| \varphi \| = \top$.

Рассмотрим теперь составную аксиоматическую теорию G в языке Ω. Пусть E — множество ее позитивных аксиом и F — множество ее негативных аксиом.

Будем говорить, что модель A есть *модель для теории* G, если

a) $\varphi \in E \Rightarrow \|\varphi\| = \top$, т. е. все позитивные аксиомы истинны в A;

b) для любого конечного набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ негативных аксиом из $\|\varphi_1\| \vee \ldots \vee \|\varphi_n\| = \top$ следует, что $\top = \perp$, т. е. что алгебра истинностных значений A тривиальна.

Заметим, что из наличия модели теории G еще не следует, что эта теория непротиворечива. Если G имеет модель A и в этой модели $\perp \neq \top$, то отсюда уже вытекает, что G — непротиворечивая теория.

Наиболее важным является, конечно, понятие модели для *простой* аксиоматической теории. Оно получается, если оставить лишь пункт a) в предыдущем определении.

Следующий факт является непосредственным следствием 4.5.2.

4.6.1. *Если G — простая теория и $G \vdash \psi$, а ψ' получается из ψ заменой всех параметров ψ предметными объектами соответствующих сортов, то оцененная формула ψ' истинна во всякой модели теории G.*

Отсюда вытекает обычный способ установления невыводимости некоторых предложений в G: достаточно подобрать модель для G, в которой интересующее нас предложение не истинно.

4.7. Конкретные виды моделей интуиционистской логики получаются путем специализации псевдобулевых алгебр истинностных значений.

Например, в качестве алгебры истинностных значений можно взять алгебру $\mathrm{O}(T)$ всех открытых подмножеств топологического пространства T. Такие модели называют *топологическими*. Впрочем, по традиции, *топологическими моделями* мы далее будем называть несколько более узкий класс моделей. А именно, мы будем дополнительно предполагать:

что T непусто, т. е. алгебра $\mathrm{O}(T)$ нетривиальна;

все предметные области постоянны;

степень равенства определяется по совпадению;

функциональные символы задаются операторным образом.

Значением $\|\varphi\|$ оцененной формулы в топологической модели является открытое подмножество пространства T.

Если u — точка пространства T, то определим *отношение вынуждения*: $u \Vdash \varphi \leftrightharpoons u \in \|\varphi\|$ (читается «*u вынуждает* нас признать, что имеет место φ» или, иначе, «в момент u имеет место φ»). Операции над истинностными значениями п. 1.6 можно сформулировать в терминах вынуждения:

4.7.1. 1) $u \Vdash \varphi \wedge \psi \;\Leftrightarrow\; (u \Vdash \varphi) \wedge (u \Vdash \psi)$;

2) $u \Vdash \varphi \vee \psi \;\Leftrightarrow\; (u \Vdash \varphi) \vee (u \Vdash \psi)$;

3) $u \Vdash \varphi \supset \psi \;\Leftrightarrow$ существует открытое множество d, $u \in d$, такое, что $(\forall v \in d)\,(v \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash \psi)$;

4) $u \Vdash \neg\varphi \;\Leftrightarrow$ существует открытое множество d, $u \in d$, такое, что $(\forall v \in d)\,\neg\,(v \Vdash \varphi)$;

5) $u \Vdash \perp$ всегда ложно;

6) $u \Vdash \forall x \varphi(x) \Leftrightarrow$ существует открытое множество d, $u \in d$, такое, что $(\forall v \in d)\,(\forall q \in D_\pi)\,(v \Vdash \varphi(q))$;

7) $u \Vdash \exists x \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; (\exists q \in D_\pi)\,(u \Vdash \varphi(q))$.

Здесь ясно видно, что вынуждение «очень похоже» на обычное определение истинности в классической модели, хотя имеет и важные отличия в случае импликации, отрицания и всеобщности.

Значения атомарных формул находятся по правилу

4.7.2. $\|P(t_1, \ldots, t_k)\| = \widehat{\Pr}(P, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_k)$.

4.8. Второй важный частный случай алгебраических моделей — *модели Крипке* (Крипке [1]). Этот вид моделей отличается рядом особенностей, которые мы и перечислим. В качестве алгебры истинностных значений берется алгебра Крипке $\mathrm{OK}(M, \leqslant)$. Предполагается, что множество M непусто, так что алгебра Крипке нетривиальна. Степень равенства в моделях Крипке задается через меру определенности, а предметные области часто бывают существенно непостоянными.

Мера определенности в моделях Крипке задается следующим образом. Для каждого сорта π и точки $u \in M$ задается непустое множество $U(\pi, u) \subseteq D_\pi$ (область предметных объектов, *известных к моменту* u). При этом функция U удовлетворяет следующему условию:

$$v \leqslant u \Rightarrow U(\pi, u) \subseteq U(\pi, v).$$

После этого положим $\|q\| = \{u \in M \mid q \in U(\pi, u)\}$. Вышеуказанное условие обеспечивает открытость $\|q\|$.

Степень равенства в нашем случае будет определяться следующим образом:

$$\| p \sim q \| = \{u \in M \mid p \in U(\pi, u),\ p \text{ есть } q\}.$$

Функция $\widehat{\mathrm{Fn}}$ в моделях Крипке также задается специальным образом. Сначала задается функция $\bar{F}$, сопоставляющая каждому функциональному символу f *и моменту* $u \in M$ некоторое отображение $\bar{f}_u = \bar{F}(f, u)$ типа $U(\pi_1, u) \times \ldots \times U(\pi_k, u) \to U(\pi, u)$. При этом на $\bar{F}$ накладывается следующее ограничение: если $v \leqslant u$ и $q_i \in U(\pi_i, u)$, то

$$\bar{f}(u, q_1, \ldots, q_k) = \bar{f}(v, q_1, \ldots, q_k)$$

(здесь $\bar{f}(u, q_1, \ldots, q_k) \rightleftharpoons \bar{f}_u(q_1, \ldots, q_k)$). После этого определим $\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) = \{u \mid \bar{f}(u, q_1, \ldots, q_k) = q\}$.

Этот способ определения $\widehat{\mathrm{Fn}}$ напоминает операторный способ п. 4.2 с тем существенным отличием, однако, что функция $\bar{f}$ здесь *зависит от* $u \in M$. Условия 6) — 8) п. 4.2 при этом выполняются автоматически.

Пусть V — оцененный терм или оцененная формула и $q_1, \ldots, q_k$ — точный список всех предметных объектов, встречающихся в V. Положим по определению $[V] = \| q_1 \| \cap \ldots \cap \| q_k \|$. $u \in [V]$ читается как «*V оценено в момент u*». В частности, если этот список пуст, то $[V] = M$. Если t есть предметный объект, то $[t] = \| t \|$; если t есть $f(t_1, \ldots, t_m)$, то $[t] = [t_1] \cap \ldots \cap [t_m]$.

Если $u \in [t]$, то можно естественно определить *значение терма t в момент u* индукцией по определению t:

a) если t — предметный объект, то $\bar{t}_u = t$;

b) если t — константа, то $\bar{t}_u = \bar{t}$;

c) если t есть $f(t_1, \ldots, t_m)$, то

$$\bar{t}_u = \bar{f}(u, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m).$$

Теперь мы можем выразить $\| t \sim q \|$ в терминах $\bar{t}_u$.

4.8.1. $u \in \| t \sim q \| \Leftrightarrow u \in [t] \wedge \bar{t}_u = q$.

Здесь равенство справа означает совпадение объектов. Лемма доказывается непосредственной индукцией по построению терма t.

Используя эту лемму, установим

4.8.2. $\| t \| = [t]$ *для всякого оцененного терма* t

Далее, если определить отношение вынуждения, как в п. 4.7, $u \Vdash \varphi \Leftrightarrow u \in \| \varphi \|$, то операции над истинностными значениями в модели Крипке можно сформулировать следующим образом:

4.8.3.

1) $u \Vdash P(t_1, \ldots, t_k) \Leftrightarrow u \in [P(t_1, \ldots, t_k)] \wedge u \in \widehat{\Pr}(P, \bar{t}_{1u}, \ldots, \bar{t}_{ku})$;

2) $u \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (u \Vdash \varphi) \wedge (u \Vdash \psi)$;

3) $u \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (u \Vdash \varphi) \vee (u \Vdash \psi)$;

4) $u \Vdash \varphi \supset \psi \Leftrightarrow (\forall v \leqslant u)(v \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash \psi)$;

5) $u \Vdash \neg \varphi \Leftrightarrow (\forall v \leqslant u) \neg (v \Vdash \varphi)$;

6) $u \Vdash \perp$ всегда ложно;

7) $u \Vdash \forall x \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall v \leqslant u)(\forall q \in U(\pi, v))(v \Vdash \varphi(q))$;

8) $u \Vdash \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists q \in U(\pi, u))(u \Vdash \varphi(q))$.

Следующее хорошо известное свойство вынуждения выражает открытость истинностного значения:

4.8.4. $v \leqslant u,\ u \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash \varphi$.

Общая теорема о корректности 4.5.2 для моделей Крипке приобретает следующий вид:

4.8.5. *Если* НРС $\vdash \varphi$ *и* φ' — *оцененная формула, получающаяся заменой параметров* φ *предметными объектами модели Крипке, то из* $u \in [\varphi']$ *следует* $u \Vdash \varphi'$.

Оговорка $u \in [\varphi']$, конечно, существенна.

4.9. Наконец, третий вид алгебраических моделей, который мы специально рассмотрим,— это ВК-*модели* (*Бета — Крипке модели*).

В качестве алгебры истинностных значений на этот раз берется алгебра ВК-шкалы $\langle M, \leqslant, Q \rangle$. Мы не предполагаем, вообще говоря, что множество M непусто.

Степень равенства в BK-модели задается через меру определенности. Мера же определенности задается следующим образом. Для каждого сорта π и точки $u \in M$ определяется множество $U(\pi, u) \subseteq D_\pi$ (область предметных объектов, *известных к моменту* u). При этом, как и в п. 4.8, выполняется условие

$$v \leqslant u \Rightarrow U(\pi, u) \subseteq U(\pi, v)$$

и, кроме того, условие

$$(\forall u \in M)(\forall S \in Q(u))(\exists v \in S)\, \exists q\, (q \in U(\pi, v)).$$

После этого определим $|q| = \{u \in M \mid q \in U(\pi, u)\}$, $\|q\| = \boldsymbol{D}\,|q| = \{u \in M \mid (\forall S \in Q(u))\,(\exists v \in S)\,(q \in U(\pi, v))\}$. Наши условия обеспечивают выполнение условия 4) п. 4.2.

Заметим, что мы отнюдь не исключаем наличия в рассматриваемой ВК-шкале *странных миров*, $Q(u) = \varnothing$.

Функция $\widehat{\mathrm{Fn}}$ в ВК-моделях, аналогично моделям Крипке, задается специальным образом. Сначала задается функция $\bar{F}$, сопоставляющая каждому функциональному символу f и моменту u некоторое частичное отображение $\bar{f}_u = \bar{F}(f, u)$. Область определения $\bar{f}_u$ включена в множество $U(\pi_1, u) \times \ldots \times U(\pi_k, u)$, а область значений включена в множество $U(\pi, u)$. При этом на $\bar{f}_u$ накладываются следующие условия:

a) если $v \leqslant u$ и определено значение $\bar{f}(u, q_1, \ldots, q_k)$, то определено и значение $\bar{f}(v, q_1, \ldots, q_k)$ и, кроме того, $\bar{f}(u, q_1, \ldots, q_k) = \bar{f}(v, q_1, \ldots, q_k)$;

b) если $u \in M$, $S \in Q(u)$, $q_1 \in U(\pi_1, u), \ldots, q_k \in U(\pi_k, u)$, то существует $v \in S$ такое, что определено $\bar{f}(v, q_1, \ldots, q_k)$. После этого определим $\widehat{\mathrm{Fn}}(f, q_1, \ldots, q_k, q) = \{u \in M \mid (\forall S \in Q(u))\,(\exists v \in S)\,(\bar{f}(v, q_1, \ldots, q_k) = q)\}$. Условия 6) — 8) п. 4.2 на $\widehat{\mathrm{Fn}}$ при этом выполняются.

Для задания $\widehat{\mathrm{Pr}}$ сначала определяют открытое множество $\overline{\mathrm{Pr}}(P, q_1, \ldots, q_k))$, а затем задается полное множество

$$\overline{\mathrm{Pr}}(P, q_1, \ldots, q_k) = \boldsymbol{D}(\widehat{\mathrm{Pr}}(P, q_1, \ldots, q_k)).$$

Вновь положим $u \Vdash \varphi \Leftrightarrow u \in \|\varphi\|$ и сформулируем основные свойства отношения вынуждения в ВК-моделях.

4.9.1.

1) $u \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (u \Vdash \varphi) \wedge (u \Vdash \psi)$;

2) $u \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (\forall S \in Q(u))\,(\exists v \in S)\,(v \Vdash \varphi \vee v \Vdash \psi)$;

3) $u \Vdash \varphi \supset \psi \Leftrightarrow (\forall v \leqslant u)\,(v \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash \psi)$;

4) $u \Vdash \perp \Leftrightarrow Q(u) = \varnothing$;

5) $u \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow (\forall v \leqslant u)\,(v \Vdash \varphi \Rightarrow Q(v) = \varnothing)$;

6) $u \Vdash \forall x \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall v \leqslant u)\,(\forall q \in U(\pi, v))\,(v \Vdash \varphi(q))$;

7) $u \Vdash \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow (\forall S \in Q(u))\,(\exists v \in S)\,(\exists q \in U(\pi, v))\,(v \Vdash \varphi(q))$.

Следующие две формулы выражают открытость и полноту $\|\varphi\|$ в терминах вынуждения:

4.9.2. $v \leqslant u$, $u \Vdash \varphi \Rightarrow v \Vdash \varphi$.

4.9.3. $(\forall S \in Q(u))\,(\exists v \in S)\,(v \Vdash \varphi) \Rightarrow u \Vdash \varphi$.

Заметим, что модели Крипке являются частным случаем ВК-моделей. Другой частный случай — *модели Бета* (см. Бет [1], Трулстра [7], Крипке [1]). Они получаются, если взять алгебру шкалы Бета в качестве алгебры истинностных значений и, кроме того, наложить еще некоторые другие традиционные ограничения (модели Бета обычно рассматриваются с постоянными предметными областями, с операторным способом определения значений функциональных символов и т. п.).

Наш подход позволяет естественно рассмотреть некоторые обобщения моделей Крипке и моделей Бета как ВК-модели специального вида. Например, можно рассматривать модели Крипке и Бета со странными мирами. Согласно 4.9.1 в странном мире имеет место $\perp$, а следовательно, и любая оцененная формула. Такие обобщенные модели Бета и Крипке с успехом использовались для получения интуиционистских вариантов теоремы о полноте (см. Вельдман [1], Лопес-Эскобар и Вельдман [1], де Сварт [1] — [3], Трулстра [7]). В статье Трулстры [7] странные миры названы *взрывающимися* (exploded).

Мы не будем воспроизводить доказательства вышеупомянутых интуиционистских результатов. Вместо этого в п. 5 ниже мы дадим классические доказательства полноты интуиционистской логики. Эти доказательства используют метаматематически закон исключенного третьего, но позволяют получить доказательство существования весьма просто устроенных интуиционистских моделей. Интуиционистское доказательство полноты в нашей версии и для более общей логики мы отложим до части 5.

4.10. Читатель, возможно, уже ощутил большую естественность определения вынуждения в моделях Бета — Крипке.

Опишем теперь некоторую философскую интерпретацию понятия истинности в ВК-моделях. В несколько менее общей ситуации она обсуждалась в работах Крипке [1] и Гжегорчика [1], [2]. Конечно, такого рода интерпретация не лишена элемента произвольности; вероятно, возможны и другие толкования вводимых структур. Тем не менее она служит хорошим эвристическим средством отыскания новых математических фактов и проливает свет на значение теории интуиционистских моделей.

Итак, пусть дана некоторая ВК-модель. Будем интерпретировать моменты структуры как возможные состояния знания некоторого познающего субъекта. Субъект видит, что в настоящий момент он находится в состоянии u — это его «реальный мир». В этом мире имеется определенная информация о модели: имеются объекты $D(\pi, u)$, которые он «экспериментально обнаружил» к моменту u, относительно обнаруженных объектов известны первоначальные факты вида $u \in \widehat{\Pr}(P, q_1, \ldots, q_l)$, кроме того, над обнаруженными объектами иногда можно произвести преобразования вида $\bar{f}(u, q_1, \ldots, q_n) = q$.

Если $v \leqslant u$, то состояние v можно рассматривать как более позднее, как результат развития u. Соответственно информация, приписанная v, является расширением информации u. Точно это выражается условиями открытости предикатов на ВК-модели. Мы считаем, что со временем найденная информация не теряется, а может лишь приобретаться. Это есть выражение *принципа сохранности*, о котором шла речь в неформальной дискуссии п. 1 ч. 1. Для состояния u все состояния $v \leqslant u$ являются «возможными мирами», в которые u может попасть в процессе познания. Субъекту известна структура $\langle M, \leqslant, Q\rangle$ и известно, что из любого данного мира v развитие идет лишь по одному из путей $S \in Q(v)$, однако неизвестно, по какому именно пути пойдет это развитие.

Условие п. 4.9 показывает, что, находясь в мире u, субъект может быть уверен, что при любом развитии событий обязательно будет обнаружен предметный объект. Это условие гарантирует непустоту области исследования. При этом в момент u, может быть, и неизвестно, каков именно этот объект,— это зависит от того, по какому именно пути, выходящему из u, пойдет развитие.

Условие на $\widehat{\mathrm{Fn}}$ гласит, что операции нашей модели всюду определены в том смысле, что если их аргументы известны в момент u, то при любом развитии событий, вдоль любого пути, выходящего из u, будет определено значение. Однако вновь нельзя сказать в момент u, чему это значение равно,— это зависит от конкретного пути развития исследования.

В соответствии с этой концепцией $\| t \sim q \|$ — это множество тех миров, в которых можно гарантировать, что со временем значение t определится и будет равно q, а $\| t \|$ есть множество миров, в которых можно гарантировать, что значение t будет определено. С этой точки зрения 4.4.2 выражает очевидный факт: если в мире u известно, что t будет обязательно определено и его значение будет p, то можно гарантировать, что предмет p будет непременно обнаружен. Факт 4.4.3 выражает всюду определенность наших термов, его можно интерпретировать так: если в некоторый момент можно с уверенностью утверждать, что аргументы терма обязательно будут найдены, то в этот же момент можно гарантировать и определенность самого терма.

В каком случае субъект, находящийся в ситуации u, может признать суждение φ истинным? Мы будем записывать это обстоятельство в виде $u \Vdash \varphi$. Например, когда можно утверждать $u \Vdash \psi \supset \eta$ на основании информации, имеющейся в u? Если $u \Vdash \eta$, то, конечно, $u \Vdash \psi \supset \eta$. А если неверно $u \Vdash \eta$ и неверно $u \Vdash \psi$? В общем случае нет оснований утверждать $u \Vdash \psi \supset \eta$! В самом деле, может оказаться, что для всех $v \leqslant u$ неверно $v \Vdash \eta$, в то время как для некоторого $v \in S \in Q(u)$, $v \leqslant u$, имеем $v \Vdash \psi$. Тогда в этот момент v отношение $v \Vdash \psi \supset \eta$, очевидно, ложно. Оказалось бы, что мы признаем $u \Vdash \psi \supset \eta$, но отрицаем $v \Vdash \psi \supset \eta$ для $v \in S \in Q(u)$. Это не согласуется с принципом сохранности: мы желаем, чтобы установленный в момент u факт оставался верным при любом дальнейшем развитии событий. Правильное определение дается условием 4.9.1, 3) определения вынуждения. В момент u истинно суждение $\psi \supset \eta$, если для всякого $v \leqslant u$, для которого $v \Vdash \psi$, необходимо $v \Vdash \eta$.

Согласно 4.9.1, 2) определения вынуждения $u \Vdash \psi \vee \eta$ означает, что на любом пути, выходящем из u, мы обязательно встретим момент, когда будет истинно ψ или η. Таким образом, можно гарантировать истинность ψ или η, хотя в момент u, может быть, и нельзя узнать, что́ именно истинно: ψ или η, так как на одном пути развития исследования это может быть ψ, а на другом η. Аналогична ситуация с $u \Vdash \exists x\psi(x)$ (п. 7) определения), что означает, что в будущем непременно найдется объект q, для которого $\psi(q)$, хотя в момент u, может быть, принципиально невозможно сказать, каков этот объект.

Факт 4.9.2 показывает, что наше определение истинности удовлетворительно. Если суждение истинно в некотором мире, то оно истинно и в любом более позднем возможном мире (принцип сохранности). Если при любом возможном развитии данного состояния знания u можно утверждать некоторое суждение, то это означает, что информации, уже имеющийся в u, достаточно, чтобы утверждать суждение (факт 4.9.3). Факт 4.5.2 показывает, что определенная таким образом истинность согласована с интуиционистской логикой предикатов. В следующем пункте мы покажем, что эта истинность *адекватна* интуиционистской логике.

Становится понятным, в частности, почему может оказаться в некотором мире не истинным закон исключенного третьего $\varphi \vee \neg \varphi$: вполне может оказаться, что не $u \models \varphi$, в то время как для некоторого $v \leqslant u$ $v \Vdash \varphi$. Мы рекомендуем читателю в свете развитой концепции вернуться к примерам моделей Крипке для логики высказываний, приведенным в п. 3.

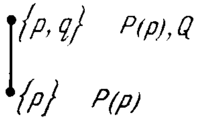
Роль конструкции, подтверждающей суждение φ, «реализации», играет в этой концепции момент u, $u \Vdash \varphi$, точнее, информация о φ, содержащаяся в u.

П р и м е р 1. Рассмотрим следующие четыре модели Крипке. Моменты обозначены точками, причем точки, стоящие выше, информативнее. Рядом с каждым моментом приписаны область предметов, известных к этому моменту, и те атомарные формулы, которые истинны в этот момент.

a) В этой модели не истинна формула

$$\forall x\,(P(x) \vee Q) \supset \forall x P(x) \vee Q$$

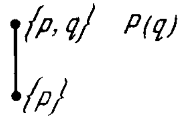
(*формула Гжегорчика*).



Нетрудно проверить (классически), что формула Гжегорчика истинна во всякой модели Крипке с п о с т о я н н о й о б л а с т ь ю.

b) В этой модели не является истинным *принцип Маркова*

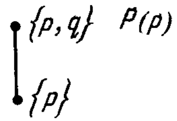
$$\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg\neg \exists x P(x) \supset \exists x P(x).$$



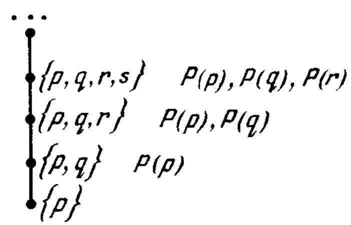
c) В этой модели обе формулы

$$\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \text{ и } \neg \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$$

не являются истинными.



d) В этой модели формула $\neg \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$ является и с т и н н о й.



П р и м е р 2. *Модели Бета* (Б е т [1]) суть ВК-модели, в которых $\langle M, \leqslant, Q\rangle$ есть шкала Бета (пример 1 п. 2) и предметная область постоянна. Нетривиальная структура путей моделей Бета позволяет обходиться постоянной областью.

Пусть, например, M есть множество B_0 всех бинарных кортежей, постоянная предметная область есть множество ω всех натуральных чисел. Односортный язык Ω содержит всего одну одноместную предикатную букву P. Определим функцию $\widehat{\mathrm{Pr}}(P, n)$ следующим образом. $a \in \overline{\mathrm{Pr}}(P, n)$ в точности тогда, когда $a = b * d$, где длина b равна n, а кортеж d содержит по крайней мере одну единицу.

Тогда для всякого кортежа a длины n вдоль пути: a, $a * \langle 0\rangle$, $a * \langle 00\rangle$, ...— имеем $a * \langle 0 \ldots 0\rangle \notin \overline{\mathrm{Pr}}(P, n)$ и в то же время для всякого $b \leqslant a$ $b * \langle 1 \rangle \in \overline{\Pr}(P, n)$. Таким образом, в этой модели истинна формула $\neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$.

Пример 3. С помощью результата п. 2.7 легко показать, что всякая топологическая модель изоморфна в естественном смысле некоторой ВК-модели, канонически определяемой по данной топологической модели. Моментами этой ВК-модели являются открытые множества — элементы некоторого фиксированного базиса топологического пространства, а пути образуют базисы точек этого пространства. Отношение $a \Vdash \varphi$ в ВК-модели означает, что a есть элемент базиса и $a \subseteq \|\varphi\|$, где $\|\varphi\|$ — значение оцененной формулы в топологической модели.

При конкретном выборе пространства топологическая модель с постоянной предметной областью имеет в качестве соответствующей ей изоморфной ВК-модели модель Бета.

Пусть K^ω — пространство Кантора (п. 1, пример 5). Семейство множеств вида $\{\alpha \mid \alpha \in K^\omega, \alpha \in a\}$ (здесь a — произвольный бинарный кортеж, обозначение $\alpha \in a$ см. в п. 2, пример 1) образует базис W пространства K^ω. Допуская некоторую небрежность, мы элементы W будем отождествлять с соответствующими кортежами. Тогда на путь $Q(a)$, который согласно п. 2.7 есть семейство элементов базиса W, можно смотреть как на семейство кортежей. Само же W тождественно с множеством B_0 всех бинарных кортежей. Каждый путь $S \in Q(a)$ взаимно однозначно определяет путь в шкале Бета $\langle B_0, \leqslant, Q\rangle$.

Мы видим, что отношение $a \Vdash \varphi$ в топологической модели (a — элемент базиса W) совпадает с отношением $a \Vdash \varphi$ в модели Бета (a — кортеж) при вышеуказанном отождествлении. Точно так же топологическая модель, определяемая пространством Бэра B^ω, может быть отождествлена с моделью Бета, логический остов которой есть множество N всех кортежей натуральных чисел.

Обратно, всякая шкала Бета определяет топологическое пространство — подмножество B^ω. А именно, это пространство всех путей этой шкалы. Точками пространства являются пути, а кортежи составляют базис «старых» множеств.

5. Теоремы о полноте. Квазиупорядоченное множество $\langle M, \leqslant\rangle$ называется *частично упорядоченным* (ч.у.м.), если

выполняется закон антисимметричности: $a \leqslant b$, $b \leqslant a \Rightarrow a = b$, где равенство означает совпадение объектов. Частично упорядоченное множество назовем *деревом*, если дополнительно выполняется следующее свойство: $a \leqslant b$, $a \leqslant d \Rightarrow b \leqslant d$ или $d \leqslant b$. В нашем определении дерево ветвится в меньшую сторону: меньшие элементы находятся в дереве «выше». Мы говорим, что дерево *высоты до* ω, если для всякого $a \in M$ множество $\{b \in M \mid a \leqslant b\}$ конечно. Количество элементов в этом множестве без единицы называется *ярусом* элемента a. Мы говорим, что b *непосредственно выше* a, и пишем $b \mathrel{\dot{<}} a$, если $b \leqslant a$ и для всякого $d \in M$ имеем $b \leqslant d \leqslant a \Rightarrow b = d$ или $d = a$. *Мощностью ветвления* момента a назовем мощность множества $\{b \mid b \mathrel{\dot{<}} a\}$. Мощность ветвления $\langle M, \leqslant\rangle$ есть по определению верхняя грань мощностей ветвления всех его моментов. Элемент a ч.у.м. M назовем *корнем*, если $b \leqslant a$ для всех $b \in M$. Если корень существует, то он, очевидно, единствен. Существенным результатом этого пункта является следующая теорема.

5.1. (Теорема о полноте для моделей Крипке.) *Если (вообще говоря, составная) аксиоматическая теория T в языке Ω непротиворечива, то для нее существует модель Крипке.*

Далее, логический остов этой модели есть дерево с корнем высоты до ω и с мощностью ветвления не выше мощности языка Ω. Мощности всех предметных областей этой модели также не превышают мощности языка Ω. Далее, если Ω — язык счетной мощности, то можно выбрать модель с мощностью ветвления логического остова $\leqslant 2$.

$\rhd$ Мы ограничимся случаем, когда Ω — язык с одним сортом объектов и имеет счетную мощность. Распространение доказательства на общий случай довольно рутинно. Если сортов несколько, то вместо одного множества констант ниже следует взять несколько множеств, для каждого сорта свое. Если язык несчетной мощности, то следует вполне упорядочить все объекты языка и использовать трансфинитные индукции вместо обычных.

Положим $V_0 = \mathrm{Cnst}$ — множество всех констант языка Ω. Для каждого $n > 0$ фиксируем счетное множество констант V_n, причем $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Определим последовательность языков Ω_n, положив $\Omega_0 = \Omega$, и Ω_{n+1}

получается из Ω_n добавлением множества V_{n+1} в качестве множества дополнительных констант. Через Ω_ω обозначим язык, получающийся из Ω добавлением всего множества $V = \bigcup_n V_n$ новых констант.

Пусть G — некоторое исчисление секвенций в языке Ω_ω (определение секвенции см. в п. 3 ч. 1). Предположим, что все аксиомы и правила вывода GHPC допустимы в G и, кроме того, в G допустимы следующие правила сокращения, добавления и опускания лжи:

$$\frac{\varphi\varphi\Gamma \to \Delta}{\varphi\Gamma \to \Delta}; \quad \frac{\Gamma \to \Delta\varphi\varphi}{\Gamma \to \Delta\varphi}; \quad \frac{\Gamma \to \Delta}{\varphi\Gamma \to \Delta}; \quad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta\varphi}; \quad \frac{\Gamma \to \Delta\perp}{\Gamma \to \Delta}.$$

Например, в качестве G можно взять само исчисление GHPC (см. ч. 1, пп. 3.3.2, 3.3.3, 3.3.5) или некоторое его расширение. Допустимость правила сечения (ч. 1, п. 3.3.6) в исчислении G заранее не предполагается.

Если K, L — два множества формул Ω_ω, то $K \vdash {}^+L$ означает, что существуют конечные подмножества $\Gamma \subseteq K$ и $\Delta \subseteq L$ такие, что $\Gamma \to \Delta$ выводится в G.

Наша теорема 5.1 будет следовать из следующей фундаментальной леммы.

5.1.1. *Пусть K, L — два множества предложений языка Ω и неверно $K \vdash {}^+L$. Тогда существует модель Крипке для языка Ω такая, что все формулы из K истинны в этой модели, а дизъюнкция любого конечного множества формул из L не истинна в этой модели.*

Дополнительно можно потребовать, чтобы эта модель удовлетворяла требованиям второго и третьего абзацев теоремы 5.1.

Действительно, пусть 5.1.1 доказана. Возьмем в качестве G следующее исчисление: $\Gamma \to \Delta$ выводится в G в точности тогда, когда формульный образ этой секвенции (ч. 1, п. 3) выводится в HPC. Пусть K — множество позитивных аксиом T, а L — множество негативных аксиом T. Условие, что не $K \vdash {}^+L$, в этом случае как раз означает непротиворечивость T, и мы немедленно получаем теорему.

Лемма 5.1.1 позволяет также дать новое, семантическое доказательство допустимости сечения в GHPC (ч. 1, п. 3.3.6).

5.1.2. *Сечение допустимо в* GHPC.

$\rhd$ Допустим, что в GHPC выводятся секвенции $\varphi\Gamma \to \Delta$ и $\Gamma \to \Delta\varphi$, но не выводится секвенция $\Gamma \to \Delta$. Замещая параметры этих секвенций различными константами, можно добиться, чтобы все формулы — члены этих секвенций уже не содержали свободных переменных.

Возьмем в качестве G исчисление GHPC и рассмотрим модель A из леммы 5.1.1. для Γ и Δ в качестве K и L соответственно. Так как $\Gamma \to \Delta\varphi$, $\varphi\Gamma \to \Delta$ выводимы в GHPC, то их формульные образы выводимы в HPC и по теореме о корректности 4.5.2 истинны в A. Но тогда по правилам вычисления истинности во всякой BK-модели нетрудно увидеть, что формульный образ $\Gamma \to \Delta$ также истинен в A. Это, однако, противоречит выбору модели A. $\square$

Итак, будем доказывать лемму 5.1.1.

Местом назовем кортеж вида $\langle K, S, i\rangle$, где R, S — множества предложений языка Ω_i. Место назовем *совместным*, если неверно, что $R \vdash {}^+S$. Совместное место $\langle R, S, i\rangle$ назовем *полным*, если выполняются следующие девять условий:

1) $(\varphi \wedge \psi) \in R \Rightarrow \varphi \in R$ и $\psi \in R$;
2) $(\varphi \wedge \psi) \in S \Rightarrow \varphi \in S$ или $\psi \in S$;
3) $(\varphi \vee \psi) \in R \Rightarrow \varphi \in R$ или $\psi \in R$;
4) $(\varphi \vee \psi) \in S \Rightarrow \varphi \in S$ и $\psi \in S$;
5) $(\varphi \supset \psi) \in R$ и не $\{\psi\} \cup R \vdash {}^+S \Rightarrow \psi \in R$;
6) $\forall x\varphi(x) \in R \Rightarrow \varphi(t) \in R$ для всякого замкнутого терма t языка Ω_i;
7) $\exists x\varphi(x) \in R \Rightarrow \varphi(d) \in R$ для некоторой константы d из V_i;
8) $\exists x\varphi(x) \in S \Rightarrow \varphi(t) \in S$ для всякого замкнутого терма t языка Ω_i;
9) $\perp \in S$.

Следующая лемма о пополнении носит технический характер.

5.1.3. *Если место $\langle R, S, i\rangle$ совместно, то найдется полное место $\langle R', S', i+1\rangle$ такое, что $R \subseteq R'$, $S \subseteq S'$.*

$\rhd$ С помощью довольно громоздкого, но достаточно стандартного процесса пополнения Генкина — Хазенъегера. Мы оформим этот процесс следующим образом. Назовем *нумерованной парой языка* Ω_k всякое множество Ψ троек вида $\langle n, j, \varphi\rangle$, где n — натуральное число, $j = 0$

или $j = 1$, φ — предложение Ω_k, причем выполняются условия:

a) $\langle n_1, j_1, \varphi_1\rangle \in \Psi$, $\langle n_2, j_2, \varphi_2\rangle \in \Psi$, $n_1 = n_2 \Rightarrow j_1 = j_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2$;

b) существует лишь конечное число нечетных n таких, что $\langle n, j, \varphi\rangle \in \Psi$;

c) неверно, что $\{\varphi \mid \exists n (\langle n, 0, \varphi\rangle \in \Psi)\} \vdash^{+} \{\varphi \mid \exists n (\langle n, 1, \varphi\rangle \in \Psi)\}$.

Каждая нумерованная пара языка Ω_k определяет некоторое совместное место. А именно, если определить

$$\Psi^0 = \{\varphi \mid \exists n (\langle n, 0, \varphi\rangle \in \Psi)\}$$

и

$$\Psi^1 = \{\varphi \mid \exists n (\langle n, 1, \varphi\rangle \in \Psi)\},$$

то это будет место $\langle \Psi^0, \Psi^1, k\rangle$. Далее, если $u = \langle n, j, \varphi\rangle \in \Psi$, то число n назовем *очередью* элемента $u \in \Psi$. Очередь уже полностью определяет j и φ в данной тройке. *Очередным* назовем элемент $u \in \Psi$ с наименьшей очередью. По условию, Ψ содержит лишь конечное число элементов с нечетной очередью. Определим натуральное число $\widetilde{\Psi}$ следующим образом. Если $\widetilde{\Psi}$ не содержит элементов с нечетной очередью, то положим $\widetilde{\Psi} = 0$; если же $2m - 1$ — наибольшая нечетная очередь в Ψ, то положим $\widetilde{\Psi} = m$.

Приступим к доказательству леммы. Пусть дано совместное место $\langle R, S, i\rangle$. Построим нумерованную пару Ψ_1 такую, что $\Psi_1^0 = R$, $\Psi_1^1 = S \cup \{\perp\}$, $\widetilde{\Psi} = 0$, перенумеровав все формулы из R, $S \cup \{\perp\}$ *четными* числами. Далее, индуктивно определим последовательность $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$ нумерованных пар языка Ω_{i+1} таким образом, что каждое множество формул $\Psi_j^0 \cup \Psi_j^1$ содержит лишь конечное множество констант из V_{i+1}. Заметим, что это верно по отношению к Ψ_1, так как R, S — из языка Ω_i и констант из V_{i+1} не содержат вовсе.

Пусть уже построена нумерованная пара Ψ_n; покажем, как следует определить Ψ_{n+1}. Пусть $\langle m, j, \varphi\rangle$ есть очередной элемент Ψ_n. Ψ_{n+1} получается из $\Psi_n \setminus \{\langle m, j, \varphi\rangle\}$ путем добавления некоторого конечного количества троек. Сначала добавим тройку $\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 1, j, \varphi\rangle$, а затем разберем случаи в зависимости от строения j и φ. Пусть $Q = (\Psi_n \setminus \{\langle m, j, \varphi\rangle\}) \cup \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 1, j, \varphi\rangle\}$.

1) $j = 0$, $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, тогда

$$\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 3, 0, \varphi_1\rangle, \langle 2\widetilde{\Psi}_n + 5, 0, \varphi_2\rangle\}.$$

2) $j = 1$, $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Заметим, что не может быть одновременно

$$\Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1 \cup \{\varphi_1\},$$

$$\Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1 \cup \{\varphi_2\},$$

так как тогда было бы

$$\Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1$$

(ввиду $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \Psi_n^1$) вопреки совместности места $\langle \Psi_n^0, \Psi_n^1, i\rangle$. Пусть неверно $\Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1 \cup \{\varphi_j\}$. Определим

$$\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 3, 1, \varphi_j\rangle\},$$

здесь $j = 1$ или $j = 2$.

3) $j = 0$, $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Заметим, что не может быть одновременно

$$\{\varphi_1\} \cup \Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1,$$

$$\{\varphi_2\} \cup \Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1,$$

так как тогда $\Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1$ (ввиду $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \Psi_n^0$). Пусть неверно $\{\varphi_j\} \cup \Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1$, где $j = 1$ или $j = 2$. Определим $\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 3, 0, \varphi_j\rangle\}$.

4) $j = 1$, $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, тогда

$$\Psi_{n+1} = \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 3, 1, \varphi_1\rangle, \langle 2\widetilde{\Psi}_n + 5, 1, \varphi_2\rangle\} \cup Q.$$

5) $j = 0$, $\varphi = (\varphi_1 \supset \varphi_2)$. Если $\{\varphi_2\} \cup \Psi_n^0 \vdash^{+} \Psi_n^1$, то $\Psi_{n+1} = Q$. В противном случае $\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 3, 0, \varphi_2\rangle\}$.

6) $j = 0$, $\varphi = \forall x \varphi_1(x)$. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — первые n замкнутых термов языка Ω_{i+1}. Тогда

$$\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2(\widetilde{\Psi}_n + j) + 3, 0, \varphi_1(t_j)\rangle \mid j = 1, \ldots, n\}.$$

7) $j = 0$, $\varphi = \exists x \varphi_1(x)$. Выберем первую константу $a \in V_{i+1}$, не встречающуюся в $\Psi_n^0 \cup \Psi_n^1$. Положим

$$\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2\widetilde{\Psi}_n + 3, 0, \varphi_1(a)\rangle\}.$$

8) $j = 1$, $\varphi = \exists x \varphi_1(x)$. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — первые n замкнутых термов языка Ω_{i+1}. Тогда

$$\Psi_{n+1} = Q \cup \{\langle 2(\widetilde{\Psi}_n + j) + 3, 1, \varphi_1(t_j)\rangle \mid j = 1, \ldots, n\}.$$

9) Если j и φ не имеют ни одного из видов, упомянутых в пп. 1) — 8), то определим $\Psi_{n+1} = Q$.

Теперь остается положить

$$R' = \bigcup_n \Psi_n^0,\ S' = \bigcup_n \Psi_n^1.$$

Заметим, что $\Psi_n^0 \subseteq \Psi_{n+1}^0$, $\Psi_n^1 \subseteq \Psi_{n+1}^1$ и каждое из мест $\langle \Psi_n^0, \Psi_n^1, i+1\rangle$ совместно, откуда и следует совместность $\langle R', S', i+1\rangle$. Нетрудно убедиться, что это место является полным. Проверим, например, выполнение условия 5) полноты. Пусть $(\psi \supset \eta) \in R'$ и $\eta R' \not\vdash {}^+S'$. Установим $\eta \in R'$. По определению R' найдется n такое, что $(\psi \supset \eta) \in \Psi_n^0$, т. е. $\langle m, 0, \psi \supset \eta\rangle \in \Psi_n$. Увеличивая, в случае необходимости, номер n, можно добиться, чтобы $\langle m, 0, \psi \supset \eta\rangle$ была очередной тройкой Ψ_n. Заметим, что $\eta\Psi_n^0 \not\vdash {}^+\Psi_n^1$, так как в противном случае было бы $\eta R' \vdash {}^+S'$. Тогда, согласно построению, $\eta \in \Psi_{n+1}^0$, т. е. $\eta \in R'$. Лемма 5.1.3. доказана. □

Пусть $p = \langle R, S, i\rangle$ — произвольное полное место. Пару (j, φ), где φ — предложение Ω_i, а $j = 0$ или $j = 1$, назовем *p-критической* в следующих трех случаях:

1) $\varphi = (\psi \supset \eta)$, $(\psi \supset \eta) \in R$, $\eta \notin R$, $j = 0$;

2) $\varphi = (\psi \supset \eta)$, $(\psi \supset \eta) \in S$, $j = 1$;

3) $\varphi = \forall x\psi(x)$, $\forall x\psi(x) \in S$, $j = 1$.

Множество всех p-критических пар обозначим через W_p. Для каждого элемента $v \in W_p$ определим некоторое полное место $p[v]$ в соответствии с упомянутыми выше случаями следующим образом:

1) $v = (0, \psi \supset \eta)$, $(\psi \supset \eta) \in R$, $\eta \notin R$. Ввиду полноты $\eta R \vdash {}^+S$ и отсюда, ввиду совместности (R, S, i), $R \not\vdash {}^+\psi$. Рассмотрим место $\langle R, \psi, i\rangle$ и в качестве $p[v]$ возьмем пополнение этого места согласно лемме: $p[v] = \langle R', S', i+1\rangle$, $R \subseteq R'$, $\psi \in S'$.

2) $v = (1, \psi \supset \eta)$, $(\psi \supset \eta) \in S$. Ввиду совместности $\langle R, S, i\rangle$, $\psi R \vdash {}^+\eta$ не выполняется. Возьмем в качестве $p[v]$ пополнение места $\langle \{\psi\} \cup R, \{\eta\}, i\rangle$.

3) $v = \langle 1, \forall x\psi(x)\rangle$, $\forall\psi(x) \in S$. Выберем константу $a \in V_{i+1}$. Она не встречается в R и в $\psi(x)$, поэтому не выполняется $R \vdash {}^+\psi(a)$ (ввиду совместности $\langle R, S, i\rangle$). Совместное место $\langle R, \psi(a), i+1\rangle$ пополним в соответствии с 5.1.3 до полного места $\langle R', S', i+2\rangle$. Его и возьмем в качестве $p[v]$.

Рассмотрим теперь множество N всех кортежей натуральных чисел с естественным частичным упорядочением

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists c\,(a = b * c).$$

Это есть дерево с мощностью ветвления ω и с корнем $\langle\ \rangle$. Определим функцию h так, что область определения h есть стандартно вложенное поддерево M дерева N. Структура $(M, \leqslant)$ и будет логическим остовом будущей модели Крипке A.

Значение $h(a)$ определим индукцией по длине кортежа a. Рассмотрим место $\langle K, L, 0\rangle$. Оно является по условию совместным, так что по лемме 5.1.3 его можно расширить до полного места $\langle K_1, L_1, 1\rangle$, где $K \subseteq K_1$, $L \subseteq L_1$. Положим по определению $h(\langle\ \rangle) = \langle K_1, L_1, 1\rangle$.

Пусть уже задано множество кортежей a длины $\leqslant n$, на которых определена функция h, и определено значение $h(a)$ для каждого кортежа из этого множества. Пусть $b = a * \langle k\rangle$ — кортеж длины $(n+1)$. Чтобы $h(b)$ было определено, необходимо, чтобы было определено $h(a) = p$, p было полным местом и $W_p \neq \varnothing$. В указанной ситуации пусть $v_0, v_1, \ldots, v_k, \ldots$ — некоторый пересчет множества W_p без повторений (это может быть конечная или бесконечная последовательность). Положим $h(a * \langle k\rangle) = p[v_k]$. Таким образом, $h(a * \langle k\rangle)$ определено лишь для тех k, для которых существует v_k.

Индуктивное определение функции h закончено.

Обозначим через M область определения h. Если $a \in M$ и $h(a) = \langle R, S, i\rangle$, то положим $a^0 = R$ и $a^1 = S$. Если φ — предложение языка Ω_ω, то определим два множества кортежей:

$$\|\varphi\|^- = \{a \in M \mid \varphi \in a^0\},$$
$$\|\varphi\|^+ = \{a \in M \mid (\forall b \leqslant a)\,(b \in M \Rightarrow \varphi \notin b^1)\}.$$

Если t — замкнутый терм Ω_ω, то определим $a \in \|t\| \Leftrightarrow h(a) = \langle R, S, i\rangle$ и t является замкнутым термом языка Ω_i. Обозначим через Tm множество всех замкнутых термов языка Ω_ω и $V = \bigcup_n V_n$.

Следующая лемма описывает нужные нам свойства этих множеств. Операции и отношения рассматриваются в полной псевдобулевой алгебре ОК $(M, \leqslant)$. Вид этих операций приведен в п. 1, пример 6. Напомним, что основное отношение порядка в этой алгебре есть отношение теоретико-множественного включения.

5.1.4. *Имеем*

1) $\| \varphi \|^- \leqslant \| \varphi \|^+$;
2) $\| \psi \wedge \eta \|^- \leqslant \| \psi \|^- \wedge \| \eta \|^-$;
3) $\| \psi \|^+ \wedge \| \eta \|^+ \leqslant \| \psi \wedge \eta \|^+$;
4) $\| \psi \vee \eta \|^- \leqslant \| \psi \|^- \vee \| \eta \|^-$;
5) $\| \psi \|^+ \vee \| \eta \|^+ \leqslant \| \psi \vee \eta \|^+$;
6) $\| \psi \supset \eta \|^- \leqslant \| \psi \|^+ \supset \| \eta \|^-$;
7) $\| \psi \|^- \supset \| \eta \|^+ \leqslant \| \psi \supset \eta \|^+$;
8) $\| \bot \|^+ = \| \bot \|^- = \bot$;
9) $\| \forall x \psi (x) \|^- \leqslant \bigwedge \{\| t \| \supset \| \psi (t) \|^- \mid t \in \mathrm{Tm}\}$;
10) $\bigwedge \{\| c \| \supset \| \psi (c) \|^+ \mid c \in V\} \leqslant \| \forall x \psi (x) \|^+$;
11) $\| \exists x \psi (x) \|^- \leqslant \bigvee \{\| c \| \wedge \| \psi (c) \|^- \mid c \in V\}$;
12) $\bigvee \{\| t \| \wedge \| \psi (t) \|^+ \mid t \in \mathrm{Tm}\} \leqslant \| \exists x \psi (x) \|^+$.

Если свойства 1) — 12) выполняются, то мы будем говорить, что *функции* $\| t \|$, $\| \varphi \|^-$, $\| \varphi \|^+$ *образуют полуоценку в алгебре* ОК$(M, \leqslant)$.

$\rhd$ 1) Пусть $a \in \| \varphi \|^-$; установим $a \in \| \varphi \|^+$. По построению h имеем $b \leqslant a \Rightarrow a^0 \subseteq b^0$. Поэтому если $b \leqslant a$, $b \in M$, то $\varphi \in b^0$ и, следовательно, $\varphi \notin b^1$ ввиду совместности $h (b)$. Это и означает $a \in \| \varphi \|^+$.

2) Пусть $a \in \| \psi \wedge \eta \|^-$, т. е. $(\psi \wedge \eta) \in a^0$. Ввиду полноты $h (a)$ тогда $\psi \in a^0$, $\eta \in a^0$, т. е. $a \in \| \psi \|^- \cap \| \eta \|^-$.

3) Пусть $a \in \| \psi \|^+$ и $a \in \| \eta \|^+$. Для доказательства $a \in \| \psi \wedge \eta \|^+$ возьмем произвольное $b \leqslant a$, $b \in M$. Тогда, если $(\psi \wedge \eta) \in b^1$, то ввиду полноты $h (b)$ было бы $\psi \in b^1$ или $\eta \in b^1$. Мы имели бы в первом случае $\psi \in b^0$ и $\psi \in b^1$, а во втором $\eta \in b^0$ и $\eta \in b^1$, что невозможно в силу совместности $h (b)$.

4) Пусть $a \in \| \psi \wedge \eta \|^-$, т. е. $(\psi \vee \eta) \in a^0$. Ввиду полноты $h (a)$ тогда $\psi \in a^0$ или $\eta \in a^0$, т. е. $a \in \| \psi \|^- \cup \| \eta \|^-$.

5) Пусть $a \in \| \psi \|^+ \cup \| \eta \|^+$, например, $a \in \| \psi \|^+$. Для доказательства $a \in \| \psi \vee \eta \|^+$ рассмотрим $b \in M$, $b \leqslant a$ и установим $(\psi \vee \eta) \notin b^1$. Действительно, если бы $(\psi \vee \eta) \in b^1$, то ввиду полноты $h (b)$ было бы $\psi \in b^1$ и $\eta \in b^1$. Но из $a \in \| \psi \|^+$ следует $\psi \in b^0$, что невозможно ввиду совместности $h (b)$.

6) Необходимо показать $\| \psi \supset \eta \|^- \subseteq \| \psi \|^+ \supset \| \eta \|^-$. По свойству импликации в псевдобулевой алгебре это равносильно включению $\| \psi \supset \eta \|^- \cap \| \psi \|^+ \subseteq \| \eta \|^-$. Пусть $a \in \| \psi \supset \eta \|^-$ и $a \in \| \psi \|^+$; необходимо показать $a \in \| \eta \|^-$, т. е. $\eta \in a^0$. Если допустить, что $\eta \notin a^0$, то ввиду $(\psi \supset \eta) \in a^0$ пара $(0, \psi \supset \eta)$ становится $h (a)$-критической. Тогда по построению функции h найдется $b \in M$, $b \leqslant a$, такое, что $\psi \in b^1$. Но это противоречит утверждению $a \in \| \psi \|^+$.

7) Пусть $a \in \| \psi \|^- \supset \| \eta \|^+$. Установим, что $a \in \| \psi \supset \eta \|^+$. Предположим противное, т. е. что найдется $b \leqslant a$, $(\psi \supset \eta) \in b^1$. Тогда пара $(1, \psi \supset \eta)$ является $h (b)$-критической и поэтому найдется $b_1 \leqslant b$, $\psi \in b_1^0$, $\eta \in b_1^1$. Тогда $b_1 \in \| \psi \|^-$. Кроме того, из допущения получаем $b_1 \in \| \psi \|^- \supset \| \eta \|^+$. По свойству импликации отсюда $b_1 \in \| \eta \|^+$, что невозможно ввиду $\eta \in b_1^1$.

8) Действительно, $\| \bot \|^- \subseteq \| \bot \|^+ = \varnothing$, так как ввиду полноты $\bot \in a^1$ для всех $a \in M$.

9) Необходимо показать, что

$$\| \forall x \psi (x) \|^- \subseteq (\| t \| \supset \| \psi (t) \|^-)$$

для всех $t \in \mathrm{Tm}$. Это равносильно включению $\| \forall x \psi (x) \|^- \cap \| t \| \subseteq \| \psi (t) \|^-$. Пусть $\forall x \psi (x) \in a^0$ и $a \in \| t \|$. Тогда $\psi (t) \in a^0$ ввиду полноты $h (a)$, т.е. $a \in \| \psi (t) \|^-$.

10) Пусть $a \in (\| c \| \supset \| \psi (c) \|^+)$ для всех $c \in V$; установим $a \in \| \forall x \psi (x) \|^+$. Предположим противное. Тогда найдется $b \leqslant a$, $b \in M$, $\forall x \psi (x) \in b^1$. В этом случае пара $(1, \forall x \psi (x))$ является $h (b)$-критической и по построению функции h найдется $b_1 \leqslant b$ и $c \in V$, $b_1 \in \| c \|$, так, что $\psi (c) \in b_1^1$. По допущению $b_1 \in (\| c \| \supset \| \psi (c) \|^+)$, что дает $b_1 \in \| \psi (c) \|^+$. Последнее же невозможно ввиду $\psi (c) \in b_1^1$.

11) Если $a \in \| \exists x \psi (x) \|^-$, т. е. $\exists x \psi (x) \in a^0$, то ввиду полноты места $h (a)$ найдется константа $c \in V$, $a \in \| c \|$, $\psi (c) \in a^0$. Тогда $a \in \| c \| \wedge \| \psi (c) \|^-$, т. е. $a \in \bigcup \{\| c \| \wedge \| \psi (c) \|^- \mid c \in V\}$.

12) Достаточно показать, что для всякого $t \in \mathrm{Tm}$ $\| t \| \cap \| \psi (t) \|^+ \subseteq \| \exists x \psi (x) \|^+$. Пусть $a \in \| t \|$ и $a \in \| \psi (t) \|^+$. Если $a \notin \| \exists x \psi (x) \|^+$, то найдется $b \leqslant a$,

$\exists x\psi(x) \in b^1$. Ввиду полноты $h(b)$ тогда $\psi(t) \in b^1$, что невозможно, так как $a \in \|\psi(t)\|^+$. □

Определим теперь искомую модель A. В качестве структуры возможных миров возьмем $(M, \leqslant)$. Если $a \in M$ и $h(a) = \langle R, S, i\rangle$, то определим предметную область $U(\pi, a)$ как множество всех выражений вида $\langle t\rangle$, где t — замкнутый терм языка Ω_i.

Для каждого функционального символа f языка Ω если $a \in M$ и $\langle t_1\rangle, \ldots, \langle t_n\rangle \in U(\pi, a)$, то определим

$$\bar{f}(a, \langle t_1\rangle, \ldots, \langle t_n\rangle) = f(t_1, \ldots, t_n)\rangle.$$

Каждой константе c языка сопоставим предметный объект $\langle c\rangle$ модели.

Наконец, если P — предикатный символ языка Ω, $a \in M$, $\langle t_1\rangle, \ldots, \langle t_n\rangle \in U(\pi, a)$, то определим

$$a \in \widehat{\Pr}(P, \langle t_1\rangle, \ldots, \langle t_n\rangle) \Leftrightarrow P(t_1, \ldots, t_n) \in a^0.$$

Тем самым модель Крипке A полностью определена, причем, как легко видеть, она удовлетворяет условиям второго абзаца теоремы 5.1.

Для доказательства того, что A — искомая модель, установим следующую лемму.

5.1.5. *Пусть φ — формула, оцененная в модели A, и φ^* — предложение Ω_ω, получающееся из φ стиранием угловых скобок $\langle\ \rangle$. Тогда $\|\varphi^*\|^- \leqslant \|\varphi\| \leqslant \|\varphi^*\|^+$.*

▷ Непосредственной индукцией по построению формулы φ с использованием 5.1.4. Если φ атомарна, то по определению $\|\varphi\| = \|\varphi^*\|^-$. Далее разберем лишь случаи импликации и всеобщности.

$\varphi = (\psi \supset \eta)$. Используем 5.1.4 и индуктивное предположение, $\|\psi^* \supset \eta^*\|^- \leqslant \|\psi^*\|^+ \supset \|\eta^*\|^- \leqslant \|\psi\| \supset \|\eta\| = \|\psi \supset \eta\| \leqslant \|\psi^*\|^- \supset \|\eta^*\|^+ \leqslant \|\psi^* \supset \eta^*\|^+$.

$\varphi = \forall x\psi(x)$. $\|\forall x\psi^*(x)\|^- \leqslant \bigwedge\{\|t\| \supset \|\psi^*(t)\|^- \mid t \in \mathrm{Tm}\} \leqslant \bigwedge\{\|\langle t\rangle\| \supset \|\psi(\langle t\rangle)\| \mid \langle t\rangle \in D_\pi\} = \|\forall x\psi(x)\| \leqslant \bigwedge\{\|\langle c\rangle\| \supset \|\psi(\langle c\rangle)\| \mid c \in V\} \leqslant \bigwedge\{\|c\| \supset \|\psi^*(c)\|^+ \mid c \in V\} \leqslant \|\forall x\psi^*(X)\|^+$. □

Если теперь φ — позитивная аксиома теории, то $\varphi \in \langle\ \rangle^0$ и поэтому $\|\varphi\|^- = \top = M$, т. е., ввиду $\|\varphi\|^- \subseteq \|\varphi\|$, формула φ истинна в модели A. Если же φ — негативная аксиома, то $\varphi \in \langle\ \rangle^1$ и поэтому $\langle\ \rangle \notin \|\varphi\|^+$ и, значит, ввиду $\|\varphi\| \subseteq \|\varphi\|^+$, φ не истинна в момент $\langle\ \rangle$. Отсюда, если $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ — дизъюнкция негативных аксиом, то эта дизъюнкция не истинна в момент $\langle\ \rangle$. Итак, A есть модель нашей теории.

Для окончания доказательства 5.1.1 (а также 5.1) остается еще только установить, что если Ω — язык счетной мощности, то можно выбрать логический остов с мощностью ветвления $\leqslant 2$.

Две ВК-модели A_1 и A_2 для одного и того же языка Ω назовем *равносильными относительно моментов* a_1 и a_2, где a_i есть момент A_i, если, во-первых, их предметные области в эти моменты совпадают, т. е. $U(\pi, a_1) = U(\pi, a_2)$ для всех сортов π языка Ω, и, во-вторых, для всякой формулы φ, оцененной в момент a_1, имеем $a_1 \Vdash \varphi \Leftrightarrow a_2 \Vdash \varphi$, где слева — вынуждение в модели A_1, а справа — в A_2.

5.1.6. (Лемма о сокращении ветвления.) *Пусть A — модель Крипке для языка Ω, логический остов которой есть дерево высоты до ω с корнем и с не более чем счетной мощностью ветвления. Тогда существует модель Крипке A', логический остов которой есть дерево высоты до ω с корнем и с мощностью ветвления $\leqslant 2$, равносильная модели A (относительно корней деревьев).*

▷ Пусть N — множество всех кортежей натуральных чисел. Определим на N упорядочение $a \leqslant b \rightleftharpoons \exists c\,(a = b * c)$ (обозначения см. на с. 43). Указанный порядок превращает N в дерево высоты до ω и со счетной мощностью ветвления в каждый момент. При этом $b \dot{<} a$ означает, что b получается из a приписыванием одного члена справа. Корнем N является пустой набор $0 = \langle\ \rangle$. Ясно, что всякое дерево высоты до ω и со счетной мощностью ветвления может быть изоморфно погружено в N, поэтому мы будем считать, что логический остов A есть поддерево M, стандартно вложенное в N (см. п. 2, пример 1, с. 93).

Пусть 0^k означает кортеж длины k, составленный лишь из нулей. В частности, $0^0 = \langle\ \rangle$. Обозначим через E множество упорядоченных пар вида (a, b), где $a, b \in N$ и b составлен лишь из нулей и единиц (*бинарный кортеж*). Определим на E частичный порядок, положив

$$(a', b') \leqslant (a, b) \Leftrightarrow a' \leqslant a \text{ и } b' \leqslant b.$$

Набор (a, b) назовем *отмеченным*, если b оканчивается единицей, т. е. $b = b_1 * \langle 1\rangle$. Далее, кортеж $a \in M$ назовем *перспективным*, если существует натуральное k

такое, что $a * \langle k\rangle \in M$. Для всякого перспективного $a \in M$ фиксируем функцию h_a, определенную на множестве ω всех натуральных чисел, причем такую, что область изменения h_a есть множество $\{k \mid a * \langle k\rangle \in M\}$ и, наконец, каждое значение k функция h_a принимает бесконечное количество раз, т. е. из $a * \langle k\rangle \in M$ следует, что имеется бесконечно много m, для которых $h_a(m) = k$.

Пусть $(a, b) \in E$ — отмеченный набор. Будем говорить, что (a', b') есть *продолжение* (a, b), если a перспективно и существуют натуральные m и s такие, что

a) $a' = a * \langle h_a(m)\rangle$;

b) $b' = b * 0^m * \langle 1\rangle * 0^s$;

c) если a' не перспективно, то $s = 0$.

Далее, для каждого натурального n определим множество $E_n \subseteq E$ индуктивно. Если $\langle\ \rangle \in M$ — не перспективный кортеж, то $E_0 = \{(\langle\ \rangle, \langle 1\rangle)\}$. Если же $\langle\ \rangle$ — перспективный кортеж, то $E_0 = \{(\langle\ \rangle, \langle 1\rangle * 0^s) \mid s \in \omega\}$. Определим теперь E_{n+1} как множество всех продолжений всех отмеченных наборов $(a, b) \in E_n$, где a перспективно. Положим $M' = \bigcup_n E_n \subseteq E$. Частичный порядок на M' по определению индуцируется порядком на E.

Отметим простые свойства M'.

5.1.6.1. Если $(a, b) \in M'$, то b начинается с единицы (т. е. самый левый член кортежа b есть единица) и содержит ровно $\mathrm{lh}\, a + 1$ единиц ($\mathrm{lh}\, a$ — длина кортежа a). Если a не перспективно, то b оканчивается единицей.

$\triangleright$ Индукцией по длине a. $\square$

5.1.6.2. Пусть $(a_1, b) \in M'$ и $(a_2, b * 0^s) \in M'$. Тогда $a_1 = a_2$ и, кроме того, для всякого b_3, $b \leqslant b_3$, существует в точности одно a_3 такое, что $(a_3, b_3) \in M'$ и для этого a_3 верно $a_1 \leqslant a_3$.

$\triangleright$ Индукцией по количеству единиц в b. Если в b содержится одна единица, то согласно 5.1.6.1 $a_1 = a_2 = \langle\ \rangle$. Пусть b имеет не менее 2 единиц. Тогда $b = b' * \langle 1\rangle * 0^m * \langle 1\rangle * 0^k$. По определению M' тогда (a_1, b) есть продолжение $(a_0', b' * \langle 1\rangle)$ и (a_2, b) есть продолжение $(a_2', b' * \langle 1\rangle)$. По индуктивному предположению $a_1' = a_2' = a'$. По определению продолжения тогда $a_1 = a_2 = a' * \langle h_{a'}(m)\rangle$. Пусть теперь $b \leqslant b_3$. Если количество единиц в b и b_3 совпадает, то $b = b_3 * 0^s$ и, повторяя предыдущее рассуждение, убедимся, что можно взять $a_3 = a_1 = a_2$. Если же в b_3 строго меньше единиц, то $b' \leqslant b_3$. Используя индуктивное предположение для b', убедимся, что существует в точности одно a_3, $(a_3, b_3) \in M'$, и для этого a_3 имеем $a_1 \leqslant a_1' \leqslant a_3$. $\square$

5.1.6.3. Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M'$. Тогда

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow b_1 = b_2$$

и, кроме того,

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow b_1 < b_2.$$

$\triangleright$ Это следствие 5.1.6.1 и 5.1.6.2. $\square$

5.1.6.4. M' представляет собой дерево высоты до ω с мощностью ветвления $\leqslant 2$. Это дерево изоморфно частично упорядоченному множеству бинарных кортежей $\{b \mid \exists a\, ((a, b) \in M')\}$.

$\triangleright$ См. 5.1.6.2 и 5.1.6.3. $\square$

5.1.6.5. Если $a \in M$, то существует b, $(a, b) \in M'$. Если $(a, b) \in M'$, то $a \in M$.

$\triangleright$ Индукцией по длине a. $\square$

5.1.6.6. Пусть $(a, b) \in M'$, $a_1 \leqslant a$, $a_1 \in M$. Тогда существует $b_1 \leqslant b$, $(a_1, b_1) \in M'$.

$\triangleright$ Рассмотрим сначала случай, когда $a_1 = a * \langle k\rangle$. Тогда a перспективно и b имеет вид $b = b' * \langle 1\rangle * 0^m$. Выберем $n \geqslant m$, $h_a(n) = k$. Пусть $b_1 = b * 0^n * \langle 1\rangle$. Тогда $b_1 \leqslant b$ и (a_1, b_1) есть продолжение (a, b), так что $(a_1, b_1) \in M'$.

Общий случай $a_1 \leqslant a$ разбирается индукцией по величине ($\mathrm{lh}\, a_1 - \mathrm{lh}\, a$). Мы представляем $a_1 = a_2 * \langle k\rangle$, где $a_2 \leqslant a$. По индуктивному предположению для a_2 найдется $b_2 \leqslant a$, $(a_2, b_2) \in M'$. Переход от a_2 к a_1 осуществляется с помощью вышеприведенного рассуждения. $\square$

Пусть U — открытое множество порядковой топологии M, т. е. $U \in \mathrm{OK}(M, \leqslant)$; определим элемент $w[U] \in \mathrm{OK}(M', \leqslant)$ следующим образом:

$$(a, b) \in w[U] \Rightarrow (a, b) \in M' \wedge a \in U.$$

5.1.6.7. Отображение w: $\mathrm{OK}(M, \leqslant) \to \mathrm{OK}(M', \leqslant)$ есть изоморфное вложение (*инъекция, мономорфизм*) п.б.а. OK $(M, \leqslant)$ в OK $(M', \leqslant)$, сохраняющее бесконечные объединения и пересечения.

$\triangleright$ Прежде всего, $w[U]$ открыто. В самом деле, если $(a, b) \in w[U]$ и $(a_1, b_1) \leqslant (a, b)$, то из открытости U следует $a_1 \in U$ и, значит, $(a_1, b_1) \in w[U]$.

Очевидно, $w[\varnothing] = \varnothing$. Далее, $w[M] = M'$. Если $U, V \in \mathrm{OK}(M, \leqslant)$ и $U \subseteq V$, то легко видеть из определения, что $w[U] \subseteq w[V]$. Обратно, если $w[U] \subseteq w[V]$, то $U \subseteq V$. Действительно, если $a \in U$, то $(a, b) \in w[U]$ для некоторого b (см. 5.1.6.5). Тогда $(a, b) \in w[V]$ и, следовательно, $a \in V$.

Пусть $U, V \in \mathrm{OK}(M, \leqslant)$; покажем, что

$$w[U \supset V] = w[U] \supset w[V].$$

Если $(a, b) \in w[U \supset V]$ и $(a, b) \in w[U]$, то $(a, b) \in w[V]$. В самом деле, из допущений имеем $a \in (U \supset V)$ и $a \in U$, тогда $a \in V$, т. е. $(a, b) \in w[V]$. Обратно, пусть $(a, b) \in w[U] \supset w[V]$. Для доказательства $(a, b) \in [U \supset V]$ нужно установить $a \in (U \supset V)$. Возьмем произвольное $a_1 \leqslant a$, $a_1 \in U$, и покажем $a_1 \in V$. Согласно 5.1.6.6 существует $b_1 \leqslant b$, $(a_1, b_1) \in M'$. Тогда $(a_1, b_1) \in w[U]$ и $(a_1, b_1) \in w[U] \supset w[V]$, т. е. $(a_1, b_1) \in w[V]$; значит, $a_1 \in V$.

Пусть теперь $\{U_j \mid j \in J\}$ — семейство элементов $\mathrm{OK}(M, \leqslant)$. Докажем

$$w[\bigwedge \{U_j \mid j \in J\}] = \bigwedge \{w[U_j] \mid j \in J\}.$$

Пересечение в алгебре $\mathrm{OK}(M', \leqslant)$ есть просто теоретико-множественное пересечение. Для $(a, b) \in M'$

$$(a, b) \in w[\bigcap \{U_j \mid j \in J\}] \Leftrightarrow \forall j\,(a \in U_j) \Leftrightarrow$$
$$\forall j\,((a, b) \in w[U_j]) \Leftrightarrow (a, b) \in \bigcap \{w[U_j] \mid j \in J\}.$$

Наконец, докажем

$$w[\bigvee \{U_j \mid j \in J\}] = \bigvee \{w[U_j] \mid j \in J\}.$$

Объединение в наших алгебрах также совпадает с теоретико-множественным объединением. Для $(a, b) \in M'$ имеем

$$(a, b) \in w[\bigcup \{U_j \mid j \in J\}] \Leftrightarrow \exists j\,(a \in U_j) \Leftrightarrow$$
$$\exists j\,((a, b) \in w[U_j]) \Leftrightarrow (a, b) \in \bigcup \{w[U_j] \mid j \in J\}. \quad \square$$

Опишем теперь искомую модель Крипке A'. В качестве ее логического остова возьмем M'. Предметные области зададим правилом $U(\pi, (a, b)) = U(\pi, a)$; функции, соответствующие функциональным и предикатным символам,— правилами:

$$\bar{f}((a, b), q_1, \ldots, q_n) = \bar{f}(a, q_1, \ldots, q_n),$$
$$(a, b) \in \widehat{\Pr}(P, q_1, \ldots, q_n) = a \in \widehat{\Pr}(P, q_1, \ldots, q_n),$$

здесь справа стоят соответствующие объекты модели A.

5.1.6.8. Если φ — формула, оцененная в момент (a, b) модели A', то

$$(a, b) \Vdash \varphi \Leftrightarrow a \Vdash \varphi.$$

$\triangleright$ Если $\|\varphi\|$ — значение оцененной формулы в A, а $\|\varphi\|'$ — ее значение в A', то индукцией по построению φ установим

$$\|\varphi\|' = w[\|\varphi\|].$$

Для доказательства используем 5.1.6.7 и алгебраическую трактовку логических связок в модели Крипке (с. 87). Отметим еще, что непосредственно из определения для всякого оцененного терма t имеем $\|t\|' = w[\|t\|]$. $\square$

Из этой последней леммы непосредственно следует, что модель A' равносильна A. Лемма 5.1.6 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Наша конструкция дает б е с к о н е ч н ы й логический остов с мощностью ветвления $\leqslant 2$, даже если первоначальная шкала была конечной. Можно построить примеры теорий (даже в логике высказываний), имеющих конечные модели Крипке, но не имеющих конечных моделей с мощностью ветвления $\leqslant 2$. Применяя лемму 5.1.6 к уже построенной модели, мы полностью завершаем доказательство леммы 5.1.1 и, тем самым, теоремы 5.1. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Если данная теория содержит конечное число бескванторных аксиом, развитый метод доказательства позволяет доказать существование к о н е ч н о й модели Крипке (т. е. модели с конечным логическим остовом).

Это обстоятельство дает доказательство разрешимости интуиционистской логики высказываний (см. также обсуждение на с. 32). Для данной формулы достаточно одновременно систематически искать ее вывод в интуиционистской логике высказываний и подбирать конечную модель, на которой эта формула опровергается. Один из этих процессов обязательно закончится в силу теоремы о полноте, и мы узнаем, выводима данная формула или нет.

Замечание 2. Пусть K и L — два множества предложений, причем для всякой формулы $\varphi \in L$ неверно, что $K \vdash \varphi$ в НРС. Тогда может быть построена модель A, в которой все формулы из K истинны и ни одна из формул L не истинна, однако эта модель может быть *без корня*. Например, если $K = \{p \vee q\}$, $L = \{p, q\}$, то можно в качестве A взять следующую модель с логическим остовом из двух несравнимых элементов:

$$\bullet p \qquad\qquad \bullet q$$

Рассмотрим составную аксиоматическую теорию T с множеством позитивных аксиом K и с множеством негативных аксиом L. Вышеприведенная модель A не является моделью теории T, так как дизъюнкция двух негативных аксиом p и q истинна в этой модели (хотя ни одна из негативных аксиом в отдельности и не истинна в модели A!). Теория T вообще не имеет модели Крипке, так как противоречива (см. обсуждение на с. 110).

Займемся теперь существованием топологических моделей.

5.2. (Теорема о полноте для топологических моделей.) *Если (вообще говоря, составная) аксиоматическая теория непротиворечива, то для нее существует топологическая модель.*

Пусть I — множество, имеющее мощность языка теории. Тогда в качестве топологического пространства модели можно взять обобщенное пространство Бэра I^ω и модель можно выбрать с мощностью предметных областей, не превосходящих мощности языка теории.

$\triangleright$ Так же как и в доказательстве теоремы 5.1, мы ограничимся случаем, когда Ω — язык счетной мощности с одним сортом объектов. Распространение нашего доказательства на общий случай является довольно громоздким, но не сложным теоретико-множественным упражнением. И само доказательство параллельно доказательству теоремы 5.1, но теперь мы не будем интересоваться устранением сечения и поэтому опустим упоминание о системе G.

Итак, дана непротиворечивая теория в языке Ω с интуиционистской логикой, множеством позитивных аксиом K и негативных аксиом L. Непротиворечивость означает, что неверно $K \vdash L$ (выводимость в НРС).

Так же как в доказательстве 5.1, введем семейства констант $V_0 = \mathrm{Const}$, V_n, $V = \bigcup_n V_n$ и последовательность расширяющихся языков Ω_i, Ω_ω. Далее введем понятие места, совместного места, полного места так же, как в доказательстве 5.1, заменяя только выводимость $R \vdash {}^+S$ на $R \vdash S$ в НРС. Согласно 5.1.3 каждое совместное место p в языке Ω_i может быть стандартным образом расширено до полного места p^* в языке Ω_{i+1}.

Для каждого полного места p рассмотрим, как и в доказательстве 5.1, множество W_p всех p-критических пар. Для каждого элемента $v \in W_p$ определим полное место $p\,[v]$.

Рассмотрим теперь множество N всех кортежей натуральных чисел с естественным частичным порядком. Определим функцию h всюду на N. Значение $h\,(a)$ определим индукцией по длине кортежа a. Пусть

$$h\,(\langle\,\rangle) = \langle K_1, L_1, 1\rangle = \langle K, L, 0\rangle^*.$$

Пусть уже определено значение $h\,(a)$ для всех кортежей a длины $\leqslant n$. Для данного кортежа a длины n рассмотрим полное место $p = h\,(a)$. Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — некоторый пересчет множества $\{p\,[v] \mid v \in W_p\} \cup \{p^*\}$, может быть, с повторениями, так что указанная последовательность бесконечна. Предположим еще, что $p_0 = p^*$ — стандартное расширение места p в следующий язык в соответствии с леммой 5.1.3. Определим, для каждого натурального k, $h\,(a * \langle k\rangle) = p_k$. Индуктивное определение функции h закончено.

Если $a \in N$ и $h\,(a) = \langle R, S, i\rangle$, то положим $a^0 = R$ и $a^1 = S$. Если φ — предложение языка Ω_ω, то определим два открытых множества пространства Бэра B^ω:

$$\|\varphi\|^- = \{\alpha \mid \exists n\,(\varphi \in \overline{\alpha}\,(n)^0\}:$$

$$\|\varphi\|^+ = \{\alpha \mid \exists n\,(\forall b \leqslant \overline{\alpha}\,(n))\,(\varphi \notin b^1)\}.$$

Напомним, что $\bar{\alpha}\,(n)$ есть кортеж из N:

$$\overline{\alpha}\,(n) = \langle \alpha\,(0), \ldots, \alpha\,(n-1)\rangle.$$

5.2.1. *Утверждение* 5.1.4 *имеет место и при новом определении* $\|\varphi\|^-$, $\|\varphi\|^+$ *с той лишь разницей, что вычисления следует производить в псевдобулевой алгебре открытых множеств пространства Бэра* B^ω *и в нашем случае* $\|t\| = \top = B^\omega$ *для всякого замкнутого терма* t *языка* Ω_ω.

Короче говоря, $\|\varphi\|^-$, $\|\varphi\|^+$ *образуют полуоценку в алгебре* $O(B^\omega)$.

1) Если $\varphi \in \overline{\alpha}(n)^0$ и $b \leqslant \overline{\alpha}(n)$, $\varphi \in b^1$, то необходимо $\varphi \in b^0$ и место $h(b)$ оказалось бы несовместным, что невозможно.

2) Если $\alpha \in \|\psi \wedge \eta\|^-$, то $(\psi \wedge \eta) \in \overline{\alpha}(n)^0$. Ввиду полноты $h(\overline{\alpha}(n))$ тогда $\psi \in \overline{\alpha}(n)^0$ и $\eta \in \overline{\alpha}(n)^0$, т. е. $\alpha \in \|\psi\|^-$ и $\alpha \in \|\eta\|^-$.

3) Если $\alpha \in \|\psi\|^+$ и $\alpha \in \|\eta\|^+$, то для некоторого n имеем $(\forall b \leqslant \overline{\alpha}(n))(\psi \notin b^1 \wedge \eta \notin b^1)$. Если же допустить, что для некоторого $b \leqslant \overline{\alpha}(n)$ имеет место $(\psi \wedge \eta) \in b^1$, то ввиду полноты $h(b)$ необходимо $\psi \in b^1$ или $\eta \in b^1$, что невозможно. Таким образом, $\alpha \in \|\psi \wedge \eta\|^+$.

4) Если $(\psi \vee \eta) \in \overline{\alpha}(n)^0$, то ввиду полноты $h(\overline{\alpha}(n))$ необходимо $\psi \in \overline{\alpha}(n)^0$ или $\eta \in \overline{\alpha}(n)^0$, т. е. $\alpha \in \|\psi\|^- \cup \|\eta\|^-$.

5) Пусть $\alpha \in \|\psi\|^+ \cup \|\eta\|^+$, например, $\alpha \in \|\psi\|^+$. Тогда для некоторого n $(\forall b \leqslant \overline{\alpha}(n))(\psi \notin b^1)$. Если бы для некоторого $b \leqslant \overline{\alpha}(n)$ было $(\psi \vee \eta) \in b^1$, то ввиду полноты $h(b)$ необходимо $\psi \in b^1$ и $\eta \in b^1$, что невозможно. Таким образом, $\alpha \in \|\psi \vee \eta\|^+$.

6) Для доказательства $\|\psi \supset \eta\|^- \subseteq \|\psi\|^+ \supset \|\eta\|^-$ достаточно установить $\|\psi \supset \eta\|^- \cap \|\psi\|^+ \subseteq \|\eta\|^-$. Пусть $(\psi \supset \eta) \in \overline{\alpha}(n)^0$ и, кроме того, $\psi \notin b^1$ для всех $b \leqslant \overline{\alpha}(n)$. Если допустить теперь, что $\eta \notin \overline{\alpha}(n)^0$, то пара $(0, \psi \supset \eta)$ оказывается $h(\overline{\alpha}(n))$-критической. Тогда в силу конструкции h найдется $b \leqslant \overline{\alpha}(n)$ такое, что $\psi \in b^1$, что невозможно. Таким образом, $\eta \in \overline{\alpha}(n)^0$, т. е. $\alpha \in \|\eta\|^-$.

7) Допустим $\alpha \in (\|\psi\|^- \supset \|\eta\|^+)$, $\alpha \notin \|\varphi \supset \eta\|^+$ и получим противоречие. Так как множество $\|\psi\|^- \supset \|\eta\|^+$ открыто, найдется натуральное n такое, что для всех β из $\overline{\beta}(n) = \overline{\alpha}(n)$ следует $\beta \in \|\psi\|^- \supset \|\eta\|^+$. Возьмем такое n и заметим, что ввиду $\alpha \notin \|\psi \supset \eta\|^+$ найдется $b \leqslant \overline{\alpha}(n)$, $(\psi \supset \eta) \in b^1$. Это означает, что пара $(1, \psi \supset \eta)$ является $h(b)$-критической. В силу конструкции h найдется $b_1 \leqslant b$, $\psi \in b_1^0$, $\eta \in b_1^1$. Очевидно, $b_1 \leqslant \overline{\alpha}(n)$, поэтому существует $\beta \in B^\omega$, $\overline{\beta}(n) = \overline{\alpha}(n)$, $\overline{\beta}(m) = b_1$ для некоторого $m \geqslant n$ и, кроме того, $\beta(m+k) = 0$, т. е. $\overline{\beta}(m+k) = b_1 * 0^k$ для всех k. Так как $\psi \in b_1^0$, то $\psi \in \overline{\beta}(m)^0$, т. е. $\beta \in \|\psi\|^-$. Кроме того, по выбору n и ввиду $\overline{\beta}(n) = \overline{\alpha}(n)$ имеем $\beta \in (\|\psi\|^- \supset \|\eta\|^+)$. Отсюда немедленно $\beta \in \|\eta\|^+$. Это означает, что для некоторого натурального s имеем $(\forall b \leqslant \overline{\beta}(s))(\eta \notin b^1)$. Увеличивая, в случае необходимости, s, можно считать, что $s \geqslant m$. Но тогда $\overline{\beta}(s) = b_1 * 0^k$ и, ввиду конструкции h, $\overline{\beta}(m)^1 \subseteq \overline{\beta}(s)^1$. Но $\eta \in b_1^1 = \overline{\beta}(m)^1$, и мы приходим к противоречию.

8) $\|\perp\|^- \subseteq \|\perp\|^+ = \varnothing$, так как $\perp \in a^1$ для всех a ввиду полноты $h(a)$.

9) Достаточно показать, что $\|\forall x\psi(x)\|^- \subseteq \|\psi(t)\|^-$ для всех $t \in \mathrm{Tm}$. Пусть для некоторого n $\forall x\psi(x) \in \bar{\alpha}(n)^0$. Увеличивая n, мы будем получать полное место $h(\bar{\alpha}(n))$ во все более широком языке. Если фиксировать $t \in \mathrm{Tm}$, то при достаточно большом n терм t окажется термом языка полного места $h(\bar{\alpha}(n))$. Ввиду полноты $h(\bar{\alpha}(n))$ тогда из $\forall x\psi(x) \in \bar{\alpha}(n)^0$ следует $\psi(t) \in \bar{\alpha}(n)^0$, т. е. $\alpha \in \|\psi(t)\|^-$.

10) Допустим $\alpha \in \bigwedge\{\|\psi(c)\|^+ \mid c \in V\}$, $\alpha \notin \|\forall x\psi(x)\|^+$ и получим противоречие. Из первой гипотезы следует, что найдется натуральное n такое, что для всех β из $\overline{\beta}(n) = \bar{\alpha}(n)$ следует $\beta \in \bigwedge\{\|\psi(c)\|^+ \mid c \in V\}$. Согласно второму допущению найдется $b \leqslant \bar{\alpha}(n)$, $\forall x\psi(x) \in b^1$. Пара $(1, \forall x\psi(x))$ является $h(b)$-критической. Согласно определению h тогда найдется $b_1 \leqslant b$ и $c \in V$ так, что $\psi(c) \in b_1^1$. Выберем функцию β таким образом, чтобы $\bar{\alpha}(n) = \overline{\beta}(n)$ и $\overline{\beta}(m) = b_1$ для некоторого $m \geqslant n$ и, кроме того, $\beta(m+k) = 0$ для всех k, т. е. $\overline{\beta}(m+k) = b_1 * 0^k$. Тогда для всех $s \geqslant m$ имеем $\psi(c) \in \overline{\beta}(s)^1$, откуда следует, что $\beta \notin \|\psi(c)\|^+$, что противоречит $\bar{\alpha}(n) = \overline{\beta}(n)$ и выбору n.

11) Пусть $\alpha \in \|\exists x\psi(x)\|^-$, т. е. $\exists x\psi(x) \in \bar{\alpha}(n)^0$ для некоторого n. Ввиду полноты $h(\bar{\alpha}(n))$ тогда найдется $c \in V$, $\psi(c) \in \bar{\alpha}(n)^0$, т. е. $\alpha \in \|\psi(c)\|^-$.

12) Пусть $t \in \mathrm{Tm}$; установим $\| \psi(t) \|^+ \subseteq \| \exists x \psi(x) \|^+$. Пусть $\alpha \in \| \psi(t) \|^+$, тогда существует n такое, что $(\forall b \leqslant \bar{\alpha}(n)) (\psi(t) \notin b^1)$. Увеличивая n, всегда можно добиться, чтобы терм t принадлежал языку полного места $h(\bar{\alpha}(n))$. Если теперь допустить, что существует $b \leqslant \bar{\alpha}(n)$, $\exists x \psi(x) \in b^1$, то ввиду полноты $h(b)$ необходимо $\psi(t) \in b^1$, что невозможно. Таким образом, $(\forall b \leqslant \bar{\alpha}(n)) (\exists x \psi(x) \notin b^1)$, т. е. $\alpha \in \| \exists x \psi(x) \|^+$. □

Определим теперь искомую топологическую модель A. В качестве топологического пространства возьмем пространство Бэра B^ω. Постоянную предметную область D_π определим как множество всех выражений вида $\langle t \rangle$, где t — замкнутый терм языка Ω_ω. Для каждого функционального символа f языка Ω определим соответствующую функцию в модели

$$\bar{f}(\langle t_1 \rangle, \ldots, \langle t_n \rangle) = \langle f(t_1, \ldots, t_n) \rangle.$$

Наконец, определим значение каждого предикатного символа — открытое подмножество B^ω:

$$\| P(\langle t_1 \rangle, \ldots, \langle t_n \rangle) \| \rightleftharpoons \| P(t_1, \ldots, t_n) \|^-.$$

Тем самым модель A полностью определена. Остается показать, что она является моделью данной теории. Это следует из леммы

5.2.2. *Пусть φ — формула, оцененная в модели A и φ^* — предложение Ω_ω, получающееся из φ стиранием угловых скобок $\langle , \rangle$. Тогда $\| \varphi^* \|^- \leqslant \| \varphi \| \leqslant \| \varphi^* \|^+$.*

▷ Используем 5.2.1, см. доказательство 5.1.5. □

Если φ — позитивная аксиома, то $\varphi \in (\langle\ \rangle)^0$, поэтому $\| \varphi \|^- = \top$ и, следовательно, $\| \varphi \| = \top$. Если же φ — негативная аксиома, то $\varphi \in (\langle\ \rangle)^1$. Пусть $\alpha_0(n) = 0$ для всех n, тогда $\alpha_0 \notin \| \varphi \|^+$ и поэтому $\alpha_0 \in \| \varphi \|$. Этим доказано, что A есть модель нашей теории. □

В соответствии с обсуждением в примере 3 п. 5 (с. 120) всякая топологическая модель с пространством Бэра может быть отождествлена с некоторой моделью Бета. Таким образом, из теоремы 5.2 следует

5.3. *Всякая непротиворечивая теория в языке счетной мощности имеет модель Бета.* □

6. Приложения к интуиционистской арифметике, операция Сморинского. Покажем, как можно использовать развитые алгебраические методы для исследования выводимости в НА. В частности, мы получим другие доказательства для некоторых из результатов ч. 2.

Модели Крипке для НА имеют некоторую специфику. В НА выводится разрешимость равенства НА $\vdash \forall xy (x = y \vee \neg\, x = y)$. Поэтому, если в модели M теории НА неверно $a \Vdash (q_1 = q_2)$ для некоторых объектов q_1, $q_2 \in U(a)$, то $a \Vdash \neg (q_1 = q_2)$. Тогда отношение $(q_1 \approx q_2) \Leftrightarrow a \Vdash (q_1 = q_2)$ является отношением эквивалентности в предметной области каждого из миров и это отношение с о х р а н я е т с я в более поздние моменты. Отождествляя в каждом из миров эквивалентные объекты, мы получим модель M' для НА, в которой равенство в модели означает просто совпадение объектов. В этой модели с «настоящим» равенством в каждый момент a вынуждаются в точности те же оцененные формулы, которые вынуждаются в a и в модели M. В этом смысле модели M и M' эквивалентны.

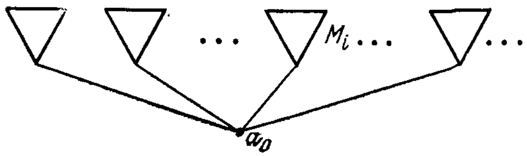
Далее, если M — модель НА, то предметная область $U(a)$ момента a этой модели содержит предмет $\bar{0}$, соответствующий константе 0 языка, и р а з л и ч н ы е предметные объекты $S\bar{0}$, $SS\bar{0}$, ... Переименовывая предметы областей модели, мы будем считать, что эти предметные объекты суть просто натуральные числа 0, 1, 2, ... Они образуют *стандартную часть* области $U(a)$. Разумеется, стандартная часть, вообще говоря, отнюдь не исчерпывает всей области $U(a)$ даже в модели с настоящим равенством. Но все функциональные символы НА переводят стандартную часть в себя.

До конца этого пункта под м о д е л ь ю НА мы будем понимать модель Крипке теории НА, модель с корнем, с настоящим равенством и с множеством ω всех натуральных чисел в качестве стандартной части каждой области.

Из теоремы 5.1 и рассуждений выше следует, что всякая непротиворечивая (составная) аксиоматическая теория T, содержащая все нелогические аксиомы НА в качестве позитивных аксиом, имеет модель в только что указанном смысле.

Пусть дано семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ моделей НА. Определим новую модель $M = (\sum_i M_i)'$ с помощью *операции Сморинского*. А именно, в качестве логического остова M возьмем прямое объединение логических остовов всех M_i

и добавим еще новый наибольший элемент a_0 в качестве корня:



Моменты, принадлежащие различным M_i, таким образом, остаются несравнимыми. Предметные области и функциональные символы модели M в моменты, относящиеся к модели M_i, определяются так же, как они определялись в M_i. Что касается корня a_0, то в качестве предметной области a_0 мы возьмем стандартное множество ω всех натуральных чисел и функциональные символы на ω определим стандартным образом.

6.1. Ключевой факт состоит в том, что *если все M_i суть модели* НА, *то $M = (\sum_i M_i)'$ есть также модель* НА.

$\triangleright$ Непосредственно проверяем все нелогические аксиомы НА в модели M. $\square$

Теперь можно приступить к доказательству некоторых утверждений относительно выводимости в НА.

6.2. (Свойство экзистенциальности НА.) *Пусть $\varphi(x)$ — формула* НА *с единственным параметром x, причем* НА $\vdash \exists x \varphi(x)$. *Тогда найдется натуральное n такое, что* НА $\vdash \varphi(n)$.

$\triangleright$ Пусть НА $\vdash \exists x\, \varphi(x)$, и допустим противное, т. е. что для всех n неверно, что НА $\vdash \varphi(n)$. Тогда для каждого n найдется модель M_n для НА такая, что в корне b_n модели M_n не вынуждается $\varphi(n)$. Рассмотрим модель $M = (\sum_n M_n)'$. Тогда для корня a_0 модели M имеем $\forall n \neg (a_0 \Vdash \varphi(n))$, т. е. неверно, что $a_0 \Vdash \exists x \varphi(x)$. Последнее противоречит, однако, допущению НА $\vdash \exists x \varphi(x)$. $\square$

6.3. (Свойство дизъюнктивности НА.) *Пусть φ, ψ — предложения* НА *и* НА $\vdash \varphi \vee \psi$. *Тогда* НА $\vdash \varphi$ *или* НА $\vdash \psi$.

$\triangleright$ Аналогично 6.2. $\square$

6.4. *Пусть $\varphi(x)$ — формула с единственным параметром x, причем $\forall n$* (НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$). *Тогда следующие три утверждения эквивалентны*:

1) НА $\vdash \neg\neg \exists x \varphi(x) \supset \exists x \varphi(x)$;

2) НА $\vdash \exists y (\neg\neg \exists x \varphi(x) \supset \varphi(y))$;

3) НА $\vdash \exists x \varphi(x) \vee \forall x \neg \varphi(x)$.

$\triangleright$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) легко выводится в НА. Покажем 1) $\Rightarrow$ 3). Допустим 1). Если для некоторого n НА $\vdash \varphi(n) \vee \forall x \neg \varphi(x)$, то 3) устанавливается тривиально. Предположим поэтому, что для всякого n неверно НА $\vdash \varphi(n) \vee \forall x \neg \varphi(x)$. Тогда неверно НА $\vdash \forall x \neg \varphi(x)$ и для всякого n неверно НА $\vdash \varphi(n)$. Ввиду 6.3 и того, что НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$, заключаем отсюда, что для всех n имеем НА $\vdash \neg \varphi(n)$. Найдем теперь модель M^0 такую, что в ее корне b неверно $b \Vdash \forall x \neg \varphi(x)$. Последнее означает, что найдутся $b_1 \leqslant b$ и объект q модели M^0 такие, что $b_1 \Vdash \neg \varphi(q)$ не имеет места. Это же в свою очередь означает, что для некоторого $b_2 \leqslant b_1$ имеет место $b_2 \Vdash \varphi(q)$, т. е. $b_2 \Vdash \exists x \varphi(x)$. Рассмотрим модель M^*, получающуюся из M^0 ограничением логического остова множеством $\{b_3 \mid b_3 \leqslant b_2\}$. Тогда b_2 — корень M^* и в M^* имеем $b_2 \Vdash \exists x \varphi(x)$. Рассмотрим модель $M = (M^*)'$; пусть a_0 — корень M. Тогда $a_0 \Vdash \neg\neg \exists x \varphi(x)$. Используя НА $\vdash \neg\neg \exists x \varphi(x) \supset \exists x \varphi(x)$, заключаем, что $a_0 \Vdash \exists x \varphi(x)$ и, значит, найдется натуральное n такое, что $a_0 \Vdash \varphi(n)$. С другой стороны, из НА $\vdash \neg \varphi(n)$ следует $a_0 \Vdash \neg \varphi(n)$, и мы приходим к противоречию. $\square$

6.5. (Невыводимость принципа Маркова.) *Существует бескванторная формула $\varphi(x)$ с единственным параметром x такая, что в* НА *не выводится* $\neg\neg \exists x \varphi(x) \supset \exists x \varphi(x)$.

$\triangleright$ Согласно классической теореме Гёделя о неполноте существует бескванторная формула $\varphi(x)$ такая, что даже в классической арифметике не выводятся формулы $\forall x \neg \varphi(x)$ и $\exists x \varphi(x)$ (в классической системе FA эти формулы эквивалентны отрицанию друг друга). Остается воспользоваться 6.4 и 6.3. $\square$

По контрасту с этим результатом можно показать, что «правило Маркова» в НА допустимо.

6.6. *Пусть $\varphi(x)$ — формула с единственным параметром x и такая, что $\forall n$* (НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$) *и* НА $\vdash \neg\neg \exists x \varphi(x)$. *Тогда* НА $\vdash \exists x \varphi(x)$.

$\triangleright$ Из НА $\vdash \neg\neg \exists x \varphi(x)$ следует, что в стандартной классической модели арифметики истинно утверждение $\exists x \varphi(x)$, т. е. найдется натуральное n, для которого истинно $\varphi(n)$. Из допущений следует, что для этого n имеем

НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$, т. е., согласно 6.3, НА $\vdash \varphi(n)$ или НА $\vdash \neg\varphi(n)$. Но вторая возможность не осуществляется, так как из НА $\vdash \neg\varphi(n)$ следовала бы классическая истинность утверждения $\neg\varphi(n)$. Таким образом, НА $\vdash \varphi(n)$, т. е. НА $\vdash \exists x\varphi(x)$. $\square$

Невыводимость принципа P (см. с. 63) следует из утверждения

6.7. *Можно найти предложение* φ *и формулу* $\psi(y)$ *с единственным параметром* y *такие, что в* НА *не выводится*

$$(\neg\varphi \supset \exists y\psi(y)) \supset \exists y(\neg\varphi \supset \psi(y)).$$

$\triangleright$ Выберем бескванторные формулы $\eta(x)$, $\zeta(x)$ таким образом, что

a) $\forall x\eta(x)$ и $\neg\forall x\eta(x)$ невыводимы в FA;

b) формулу $\forall x\eta(x) \wedge \neg\exists x\zeta(x)$ можно без противоречия присоединить к FA;

c) формулу $\forall x\eta(x) \wedge \exists x\zeta(x)$ также можно без противоречия присоединить к FA.

Существование таких формул легко следует из классической теоремы Гёделя о неполноте. В самом деле, формула $\mathrm{Con}_{\mathrm{FA}}$, выражающая непротиворечивость классической арифметики FA, имеет как раз вид $\forall x\eta(x)$ и удовлетворяет условию a). В качестве $\forall x\zeta(x)$ можно взять формулу $\mathrm{Con}_{(\mathrm{FA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{FA}})}$, выражающую непротиворечивость теории $\mathrm{FA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{FA}}$.

Далее, положим

$$\psi(y) \leftrightharpoons (y = 0 \wedge \exists x\zeta(x)) \vee (y = 1 \wedge \neg\exists x\zeta(x)),$$
$$\varphi \leftrightharpoons \neg\forall x\eta(x).$$

Пусть N_1 есть классическая модель теории $\mathrm{FA} + \forall x\eta(x) \wedge \exists x\zeta(x)$, N_2 есть классическая модель теории $\mathrm{FA} + \neg\forall x\eta(x)$ и, наконец, N_3 — классическая модель $\forall x\eta(x) \wedge \neg\exists x\zeta(x)$.

Рассмотрим модель Крипке $M = (N_1 + N_2 + N_3)'$. Если a_0 — корень M, то $a_0 \Vdash \neg\varphi \supset \exists y\psi(y)$, однако неверно $a_0 \Vdash \exists y(\neg\varphi \supset \psi(y))$.

Заметим, что в НА формула $\neg\varphi$ эквивалентна $\forall x\eta(x)$. $\square$

Тем не менее принцип P имеет место в НА в виде правила вывода.

6.8. *Пусть* φ *— предложение и* $\psi(y)$ *— формула с единственным параметром* y. *Пусть имеет место* НА $\vdash \neg\varphi \supset \exists y\psi(y)$. *Тогда* НА $\vdash \exists y(\neg\varphi \supset \psi(y))$.

$\triangleright$ Допустим, что имеет место допущение, а заключение неверно. Тогда для каждого n неверно НА $\vdash \neg\varphi \supset \psi(n)$. По теореме о полноте, для каждого n найдется модель M_n с корнем b_n такая, что $b_n \Vdash \neg\varphi$, и неверно, что $b_n \Vdash \psi(n)$. Рассмотрим модель $M = (\sum_n M_n)'$ с корнем a_0. Очевидно, $a_0 \Vdash \neg\varphi$. Из допущения следует, что $a_0 \Vdash \exists y\psi(y)$, а это означает, что найдется натуральное n такое, что $a_0 \Vdash \psi(n)$. Но в этом случае, ввиду $b_n \leqslant a_0$, имеем $b_n \Vdash \psi(n)$, что невозможно по построению. $\square$

Следующий факт показывает, что так называемый принцип наименьшего числа не выводится в НА.

6.9. *Может быть построена формула* $\varphi(x)$ *с одним параметром* x *такая, что в* НА *не выводится*

$$\exists x\varphi(x) \supset \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(y < x \supset \neg\varphi(y))).$$

$\triangleright$ Пусть $\psi(y)$ — бескванторная формула такая, что как $\exists y\psi(y)$, так и $\neg\exists y\psi(y)$ не выводятся в FA. Пусть N_1 — классическая модель теории $\mathrm{FA} + \exists y\psi(y)$ и N_2 — классическая модель теории $\mathrm{FA} + \neg\exists y\psi(y)$. Рассмотрим модель $M = (N_1 + N_2)'$. Положим

$$\varphi(x) \leftrightharpoons (x = 0 \wedge \exists y\psi(y)) \vee (x = 1 \wedge \neg\exists y\psi(y)) \vee x = 2.$$

Очевидно, НА $\vdash \varphi(2)$, так что $a_0 \Vdash \exists x\varphi(x)$ (здесь a_0, как всегда,— корень M). Если же $a_0 \Vdash \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(y < x \supset \neg\varphi(y))$, то для некоторого n было бы $a_0 \Vdash \varphi(n)$ и $a_0 \Vdash \forall y(y < n \supset \neg\varphi(y))$. Но из $a_0 \Vdash \varphi(n)$ непосредственно следует, что n равно 0, 1 или 2. Более внимательный анализ модели M показывает, что вынуждения $a_0 \Vdash \varphi(0)$ и $a_0 \Vdash \varphi(1)$ неверны, так что остается лишь возможность $n = 2$. Но неверно также $a_0 \Vdash \neg\varphi(1)$, поэтому неверно $a_0 \Vdash \forall y(y < 2 \supset \neg\varphi(y))$. Отсюда следует, что неверно $a_0 \Vdash \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(y < x \supset \neg\varphi(y)))$. $\square$

7. Метод реализуемости и теория интуиционистских моделей. Методы теории моделей позволили нам получить интересные синтаксические результаты, относящиеся к формальной теории НА. При этом, хотя результаты формулируются конструктивно и весьма элементарно, методы доказательства являются классическими, теоретико-множественными. Мы укажем, однако, способ конструктивного доказательства утверждений 6.2—6.9, основанный на методе, аналогичном методу штрих-реализуемости К л и н и [4]. При этом теоретико-множественные рассуждения п. 6 будут играть существенную эвристическую роль, помогая подобрать подходящее понятие реализуемости.

Мы начнем с анализа утверждения 6.9. .Рассмотрим семейство $\{M_j \mid j \in J\}$ в с е х счетных классических моделей FA. Каждая такая модель рассматривается как модель Крипке с единственным возможным миром и имеется в виду, что в каждом классе изоморфных моделей выбирается единственный представитель в качестве M_j, так что мощность нашего семейства ограничена. Пусть $M = (\sum_j M_j)'$ и a_0 — корень M. Если φ — предложение HA, то обозначим $r_4\varphi \leftrightharpoons a_0 \Vdash \varphi$.

Замечательно, что отношение r_4 допускает следующее синтаксическое описание:

7.1.1. 1) $r_4(t = r) \Leftrightarrow (t = r)$ *истинно*;

2) $r_4(\psi \wedge \eta) \Leftrightarrow r_4\psi \wedge r_4\eta$;

3) $r_4(\psi \vee \eta) \Leftrightarrow r_4\psi \vee r_4\eta$;

4) $r_4(\psi \supset \eta) \Leftrightarrow (r_4\psi \Rightarrow r_4\eta) \wedge \mathrm{FA} \vdash \psi \supset \eta$;

5) $r_4 \perp \Leftrightarrow \perp$;

6) $r_4 \forall x\psi(x) \Leftrightarrow \forall n\,(r_4\psi(n)) \wedge \mathrm{FA} \vdash \forall x\psi(x)$;

7) $r_4 \exists x\psi(x) \Leftrightarrow \exists n\,(r_4\psi(n))$.

$\rhd$ Докажем, например, 4). $a_0 \Vdash (\psi \supset \eta) \Leftrightarrow (\forall b \leqslant a_0)(b \Vdash \psi \Rightarrow b \Vdash \eta)$. Если $b = a_0$, то правая часть означает $r_4\psi \Rightarrow r_4\eta$, а утверждение, что для всех j $M_j \Vdash \psi \Rightarrow M_j \Vdash \eta$, в силу известной теоремы о полноте классического исчисления предикатов равносильно $\mathrm{FA} \vdash (\psi \supset \eta)$. $\square$

Далее имеем

7.1.2. $\mathrm{HA} \vdash \varphi \Rightarrow r_4\varphi \Rightarrow \mathrm{FA} \vdash \varphi$.

$\rhd$ Первая импликация следует из того, что M есть модель HA (см. 6.1), вторая же — из того, что если $a_0 \Vdash \varphi$, то для всех j $M_j \Vdash \varphi$. $\square$

Теперь наш конструктивный подход состоит в том, чтобы рассматривать 7.1.1 как с а м о с т о я т е л ь н о е определение отношения $r_4\varphi$ индукцией по построению φ без упоминания о моделях Крипке. При этом 7.1.2 можно доказать, также не используя модели,— первую

импликацию индукцией по построению вывода $\mathrm{HA} \vdash \varphi$, а вторую импликацию — индукцией по построению φ.

В доказательстве 6.9 использовалась некоторая модель Крипке. Вместо нее можно использовать и нашу модель M. Это дает ключ к конструктивному доказательству 6.9, а именно, следует проверить, что формула, невыводимость которой утверждается, нереализуема в смысле отношения r_4, и воспользоваться 7.1.2. Это проверяется непосредственно. Например, неверно, что $r_4\varphi(0)$ следует из того, что $\mathrm{HA} \vdash \varphi(0) \equiv \exists y\psi(y)$, и в FA невыводима формула $\exists y\psi(y)$ (вновь используя 7.1.2).

Итак, если в доказательстве используется некоторая модель M, то мы пытаемся конструктивно описать отношение $a_0 \Vdash \varphi$ и используем это отношение вместо самой модели. Иногда, как это и было сделано выше, первоначальную модель удобно несколько модифицировать. Заметим, что, в отличие от реализуемости r в ч. 2, r_4 есть содержательное отношение, а не формула HA. Впрочем, формализация этого отношения в HA непосредственна.

В качестве следующего примера рассмотрим утверждение 6.8. Фиксируем предложение φ, фигурирующее в формулировке 6.8. Далее, рассмотрим семейство всех моделей Крипке, в которых имеет место $\neg\varphi$, и определим $M = (\sum_j M_j)'$. Отношение $a_0 \Vdash \psi$ допускает конструктивную формулировку: ключевые эквивалентности имеют следующий вид:

$$a_0 \Vdash \psi \supset \eta \Leftrightarrow (a_0 \Vdash \psi \Rightarrow a_0 \Vdash \eta) \wedge \mathrm{HA} \vdash \neg\varphi \supset (\psi \supset \eta);$$

$$a_0 \Vdash \forall x\psi(x) \Leftrightarrow \forall n\,(a_0 \Vdash \psi(n)) \wedge \mathrm{HA} \vdash \neg\varphi \supset \forall x\psi(x);$$

$a_0 \Vdash \perp$ всегда ложно.

Однако построение модели M н е в о з м о ж н о, если $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg\varphi$, так как в этом случае не существует ни одна из моделей M_j. Само же утверждение 6.8, конечно, верно и в этом случае (и даже тривиально). Поэтому использование отношения $a_0 \Vdash \eta$ требует неконструктивного разбора случаев: $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg\varphi$ или неверно, что $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg\varphi$. Мы избежим этого неинтуиционистского шага, дав независимое определение *релятивизированной реализуемости*:

1) $r_5(t = r) \leftrightharpoons \mathrm{HA} \vdash \neg\varphi \supset (t = r)$;

2) $r_5(\psi \wedge \eta) \leftrightharpoons r_5\psi \wedge r_5\eta$;

3) $r_5(\psi \vee \eta) \leftrightharpoons r_5\psi \vee r_5\eta$;
4) $r_5(\psi \supset \eta) \leftrightharpoons (r_5\psi \Rightarrow r_5\eta) \wedge \text{НА} \vdash \neg\varphi \supset (\psi \supset \eta)$;
5) $r_5 \perp \leftrightharpoons \text{НА} \vdash \neg\neg\varphi$;
6) $r_5\forall x\psi(x) \leftrightharpoons \forall n r_5\psi(n) \wedge \text{НА} \vdash \neg\varphi \supset \forall x\psi(x)$;
7) $r_5 \exists x\psi(x) \Leftrightarrow \exists n r_5\psi(n)$.

Связь этого отношения реализуется с вынуждением в модели M дается леммой

7.2.1. *Если неверно, что* НА $\vdash \neg\neg\varphi$, *то* $r_5\psi \Leftrightarrow a_0 \Vdash \psi$. *Если же* НА $\vdash \neg\neg\varphi$, *то* $r_5\psi$ *тождественно верно для всякого предложения* ψ.

$\triangleright$ Оба утверждения леммы доказываются индукцией по построению предложения ψ. $\square$

Теперь, однако, нет необходимости прибегать к этой связи, нужные свойства r_5 можно доказать и непосредственно.

7.2.2. $r_5\psi \Rightarrow \text{НА} \vdash \neg\varphi \supset \psi$.

$\triangleright$ Индукцией по построению ψ. $\square$

7.2.3. *Если* НА $\vdash \psi$ *и* ψ' *получается в результате замещения параметров* ψ *числами, то* $r_5\psi'$.

$\triangleright$ Индукцией по построению вывода НА $\vdash \psi$. $\square$

Теперь 6.8 доказывается непосредственно. Из НА $\vdash \neg\varphi \supset \exists y\psi(y)$ следует $r_5(\neg\varphi \supset \exists y\psi(y))$ (7.2.3). Кроме того, $r_5 \neg\varphi$. В самом деле, если $r_5\varphi$, то НА $\vdash \neg\varphi \supset \varphi$ (7.2.2), т. е. НА $\vdash \neg\neg\varphi$, что и означает $r_5 \perp$. Отсюда $r_5\exists y\psi(y)$ и, значит, найдется n такае, что $r_5\psi(n)$. Отсюда НА $\vdash \neg\varphi \supset \psi(n)$.

7.3. Наметим теперь некоторую общую теорию реализуемости.

Предикат T, определенный на множестве предложений, назовем *r-предикатом* (*предикатом типа реализуемости*), если

(i) НА $\vdash \varphi \Rightarrow T\varphi$;
(ii) $T\varphi$, $T(\varphi \supset \psi) \Rightarrow T\psi$ для всяких предложений φ, ψ.

Например, следующие предикаты являются r-предикатами:

$r_6\varphi$ всегда истинно;
$r_7\varphi \Leftrightarrow \text{НА} \vdash \varphi$;
$r_8\varphi \Leftrightarrow \text{FA} \vdash \varphi$.

Мы укажем две операции, позволяющие строить новые r-предикаты по заданным. Пусть $\{T_i\}_{i\in I}$ — семейство

r-предикатов. Определим предикат $T = \Pi_i T_i$, положив $T\varphi = (\forall i \in I)\ T_i\varphi$. В случае $I = \varnothing$ имеем $\Pi_i T_i = r_6$ — тождественно истинный предикат.

Далее, пусть Λ — высказывание и T — r-предикат. Пусть A — предикат, заданный на множестве замкнутых атомарных формул НА. Допустим, что

a) $\Lambda \Rightarrow A\varphi \Rightarrow T\varphi$ для всех замкнутых атомарных формул НА;

b) $\Lambda \Rightarrow T(\perp)$;

c) если φ — атомарная замкнутая истинная формула, то $A\varphi$;

d) если φ — атомарная замкнутая ложная формула и $A\varphi$, то Λ.

В этой ситуации определим новый предикат $S = S(\Lambda, A, T)$ на множестве предложений НА индукцией по построению предложения φ:

1) $S\varphi \Leftrightarrow A\varphi$, здесь φ — атомарная замкнутая формула;
2) $S(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow S\varphi \wedge S\psi$;
3) $S(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow S\varphi \vee S\psi$;
4) $S(\varphi \supset \psi) \Leftrightarrow (S\varphi \Rightarrow S\psi) \wedge T(\varphi \supset \psi)$;
5) $S \perp \Leftrightarrow \Lambda$;
6) $S\forall x\varphi(x) \Leftrightarrow \forall n S\varphi(n) \wedge T(\forall x\varphi(x))$;
7) $S\exists x\varphi(x) \Leftrightarrow \exists n S\varphi(n)$.

7.3.1. $S\varphi \Rightarrow T\varphi$.

$\triangleright$ Индукцией по построению предложения φ. $\square$

7.3.2. $S(\varphi(t) \equiv \varphi(n))$, *где* n *есть значение постоянного терма* t.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. $\square$

7.3.3. $S(\perp \supset \varphi)$.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. $\square$

7.3.4. *Пусть* φ — *формула* НА *такая, что* НА $\vdash \varphi$, *и* φ' *получается из* φ *замещением всех параметров натуральными числами. Тогда* $S\varphi'$.

$\triangleright$ Это утверждение доказывается непосредственной индукцией по построению вывода НА $\vdash \varphi$. $\square$

7.3.5. $S = S(\Lambda, A, T)$ *есть* r-*предикат*.

$\triangleright$ Это следствие 7.3.4 и определения S от импликации. $\square$

7.4. Теперь нетрудно подобрать подходящую реализуемость для доказательства 6.2 и 6.3. Пусть λ_0 означает ложное высказывание и $a_0\varphi \Leftrightarrow$ (φ истинно) для всякой атомарной замкнутой формулы φ. Положим $r_9 = S(\lambda_0, a_0, r_7)$.

Пусть НА $\vdash \exists x\varphi(x)$, где $\exists x\varphi(x)$ — замкнутая формула. Тогда $r_9(\exists x\varphi(x))$ (7.3.5). По определению r_9 найдется n такое, что $r_9\ \varphi(n)$. Отсюда $r_7\ \varphi(n)$ (7.3.1), т. е. НА $\vdash \varphi(n)$. Аналогично докажем, что если НА $\vdash \varphi \vee \psi$ для замкнутых φ и ψ, то НА $\vdash \varphi$ или НА $\vdash \psi$.

Реализуемость r_9 есть не что иное, как так называемый штрих А ц е л а [1].

К л и н и [4] для доказательства утверждений типа 6.2 и 6.3 использовал другой вид реализуемости. В наших обозначениях реализуемость Клини может быть формулирована следующим образом:

1) $r_{10}(t = r) \Leftrightarrow (t = r)$ истинно;

2) $r_{10}(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow r_{10}\varphi \wedge r_{10}\psi$;

3) $r_{10}(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (r_{10}\varphi \wedge \text{НА} \vdash \varphi) \vee (r_{10}\psi \wedge \text{НА} \vdash \psi)$;

4) $r_{10}(\varphi \supset \psi) \Leftrightarrow (r_{10}\varphi \wedge \text{НА} \vdash \varphi) \Rightarrow r_{10}\psi$;

5) $r_{10} \perp$ всегда ложно;

6) $r_{10}\ \forall x\psi(x) \Leftrightarrow \forall n\ r_{10}\ \psi(n)$;

7) $r_{10}\exists x\ \psi(x) \Leftrightarrow \exists n\ (r_{10}\psi(n) \wedge \text{НА} \vdash \psi(n))$.

Простая связь между r_9 и r_{10} дается леммой

7.4.1. $r_9\ \varphi \Leftrightarrow r_{10}\ \varphi \wedge \text{НА} \vdash \varphi$.

$\triangleright$ Индукцией по построению φ. $\square$

7.5. Для доказательства 6.4 и 6.5 достаточно установить при допущениях 6.4 импликацию 1) $\Rightarrow$ 3), так как остальные рассуждения в 6.4 и 6.5 конструктивны.

Фиксируем формулу $\varphi(x)$ с единственным параметром x такую, что $\forall n$ (НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$) и НА $\vdash \neg\neg\exists x\varphi(x) \supset \exists x\varphi(x)$. Докажем, что НА $\vdash \exists x\varphi(x)$ или НА $\vdash \forall x \neg\varphi(x)$.

Пусть λ_1 есть высказывание НА $\vdash \forall x\neg\varphi(x)$ и $r_{11}\psi \Leftrightarrow$ НА $\vdash \exists x\varphi(x) \supset \psi$. Определим $r_{12} = S(\lambda_1, r_{11}, r_{11})$. Заметим, что $r_{12}\ \neg\neg\exists x\varphi(x)$. Действительно, очевидно, НА $\vdash \exists x\varphi(x) \supset \neg\neg\exists x\varphi(x)$. Кроме того, $r_{12}\neg\exists x\varphi(x) \Rightarrow$ НА $\vdash \forall x\neg\varphi(x)$. Последнее доказываем следующим образом. Если $r_{12}\ \neg\exists x\varphi(x)$, то (7.3.1) НА $\vdash \forall x\varphi(x) \supset \neg\exists x\varphi(x)$, что и дает НА $\vdash \forall x\neg\varphi(x)$. Далее, ввиду НА $\vdash \neg\neg\exists x\varphi(x) \supset \exists x\varphi(x)$, 7.3.4 и предыдущего замечания имеем $r_{12}\ \exists x\varphi(x)$. Это означает, что найдется n такое, что $r_{12}\ \varphi(n)$. Ввиду НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$ и 7.4 имеем две возможности: НА $\vdash \varphi(n)$ — и тогда наше утверждение доказано — или НА $\vdash \neg\varphi(n)$. Во втором случае имеем $r_{12}\ \neg\varphi(n)$ и, значит, $r_{12}\varphi(n) \Rightarrow r_{12} \perp$. В силу $r_{12}\varphi(n)$ отсюда $r_{12} \perp$, т. е. НА $\vdash \forall x\neg\varphi(x)$.

7.6. Доказательство утверждения 6.6, данное в п. 6, конечно, не может удовлетворить интуициониста. Ему это доказательство кажется тавтологией: искомое утверждение доказывается с помощью аналогичного же утверждения, используемого в классической метаматематике! Теперь мы в состоянии предложить доказательство, основанное на иных идеях.

Фиксируем формулу $\varphi(x)$ с единственным параметром x такую, что для всех n имеем НА $\vdash \varphi(n) \vee \neg\varphi(n)$ и НА $\vdash \neg\neg\exists x\varphi(x)$. Докажем, что НА $\vdash \varphi(n)$ для некоторого n.

Пусть λ_2 есть высказывание $\exists n$ (НА $\vdash \varphi(n)$) и $a_1\psi \Leftrightarrow$ (ψ истинно) $\vee\ \lambda_2$ для всякой замкнутой атомарной формулы ψ. Определим $r_{13} = S(\lambda_2, a_1, r_6)$. Эта реализуемость отличается от стандартного определения истинности по Тарскому лишь в пунктах, относящихся к атомарным формулам и лжи.

Для доказательства искомого утверждения достаточно установить $r_{13} \perp$. Так как НА $\vdash \neg\forall x\neg\varphi(x)$, то $r_{13}\ \neg\forall x\neg\varphi(x)$, т. е. $r_{13}\forall x\neg\varphi(x) \Rightarrow r_{13} \perp$. Поэтому достаточно показать $r_{13}\ \forall x\neg\varphi(x)$. Возьмем произвольное n и покажем $r_{13}\neg\varphi(n)$, т. е. что $r_{13}\varphi(n) \Rightarrow r_{13} \perp$. По условию и ввиду 7.4 для данного n имеем две возможности: НА $\vdash \varphi(n)$ или НА $\vdash \neg\varphi(n)$. В первом случае $r_{13} \perp$ непосредственно по определению. Во втором случае из НА $\vdash \neg\varphi(n)$ следует искомое $r_{13}\neg\varphi(n)$.

Предыдущее рассуждение устанавливает, в частности, тривиальность отношения r_{13}: $r_{13}\psi$ верно для всякого предложения ψ. Тем не менее приведенное нами интуиционистское доказательство утверждения 6.6, использующее r_{13}, отнюдь не тривиально!

Более ранние (и более сложные) варианты интуиционистского анализа утверждения 6.6 можно найти в статьях Н о в и к о в а [1] и Д р а г а л и н а [1].

7.7. Наметим еще коротко конструктивную версию доказательства утверждения 6.7. Мы фиксируем формулы $\eta(x)$ и $\zeta(x)$, удовлетворяющие требованиям a) — c) в указанном выше доказательстве, и построим конкретные формулы φ и $\psi(y)$, как там указано. Определим

$$r_{14}\,\xi \Leftrightarrow (\mathrm{FA} \vdash \neg\,\forall x\eta(x) \supset \xi) \wedge$$
$$(\mathrm{FA} \vdash \forall x\eta(x) \wedge \exists x\,\zeta(x) \supset \xi) \wedge$$
$$(\mathrm{FA} \vdash \forall x\eta(x) \wedge \neg\,\exists x\zeta(x) \supset \xi),$$

после чего положим $r_{15} = S(\lambda_0, a_0, r_{14})$. Далее последовательно установим

7.7.1. 1) $\neg\, r_{15}\,\forall x\eta(x)$;

2) $r_{15}\,(\forall x\eta(x) \supset \exists x\zeta(x) \vee \neg\,\exists x\,\zeta(x))$;

3) $r_{15}\,(\neg\,\varphi \supset \exists y\,\psi(y))$;

4) $\neg\, r_{15}\,\exists y\,(\neg\,\varphi \supset \psi(y))$.

$\triangleright$ Наметим лишь доказательство 4). Допустим $r_{15}\exists y\,(\neg\,\varphi \supset \psi(y))$. Тогда найдется натуральное n такое, что $r_{15}\,(\neg\varphi \supset \psi(n))$. Отсюда и из определения φ и $\psi(y)$ имеем

$$\mathrm{FA} \vdash \forall x\eta(x) \wedge \neg\,\exists x\zeta(x) \supset (\neg\,\varphi \supset \psi(n)),$$
$$\mathrm{FA} \vdash \forall x\,\eta(x) \wedge \neg\,\exists x\zeta(x) \supset n = 1.$$

Отсюда в свою очередь следует, что и фактически $n = 1$, так как в противном случае $\mathrm{FA} \vdash \neg(\forall x\eta(x) \wedge \neg\,\exists x\zeta(x))$ вопреки выбору $\eta(x)$ и $\zeta(x)$. Аналогично, изучая выводимость

$$\mathrm{FA} \vdash \forall x\,\eta(x) \wedge \exists x\zeta(x) \supset (\neg\,\varphi \supset \psi(n)),$$

мы получаем $n = 0$, что и дает противоречие. $\square$

8. Семантика де Йонга. Аналогично семантике реализуемости (п. 9 ч. 2) можно определить естественную семантику формул логики высказываний на основе формальной теории HA. Пусть $F[p_1, \ldots, p_n]$ — формула логики высказываний, где $p_1, \ldots, p_n$ — полный список всех ее пропозициональных переменных. Будем говорить, что эта формула *истинна по де Йонгу*, если для всякого набора замкнутых арифметических формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ соответствующее арифметическое предложение $F[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ *выводимо* в HA.

Д е Й о н г [1] в 1970 г. показал, что формулы, истинные по де Йонгу, суть в точности формулы, выводимые

в логике высказываний. Таким образом, логика высказываний п о л н а относительно семантики де Йонга. Оригинальное доказательство де Йонга, основанное на методе реализуемости, до сих пор не опубликовано и известно из препринтов. Подробное рассмотрение теоремы де Йонга для логики высказываний, вариаций и усилений этой теоремы, основанное на теоретико-модельных рассмотрениях, можно найти в статье С м о р и н с к о г о [1].

Аналогичное понятие истинности по де Йонгу можно ввести и для формул логики предикатов. Как показал Л е й в а н т [1], логика предикатов также оказывается полной относительно этой семантики.

9. Дополнительные библиографические замечания. Материал п. 1 довольно стандартен. Дополнительные сведения на темы этого пункта можно найти в монографии Р а с ё в о й и С и к о р с к о г о [1], Д а м м е т а [1] и статьях К р и п к е [1], Ф и т т и н г а [1] и Т о м а с о н а [1]. Алгебры с пополнением определены в статье Д р а г а л и н а [9]. Сходная структура с аксиомой 4′) и $\boldsymbol{D}\,0 = 0$ предложена Гротендиком (см. Ш л о м ю к [1]) в теории топосов. Шкалы Бета и Крипке введены в классических работах Б е т а [1], К р и п к е [1]. BK-шкалы и BK-модели определены в работе Д р а г а л и н а [10]. Теоремы о полноте для интуиционистского исчисления предикатов в различных формах доказывались многими авторами, начиная с Б е т а [1] и К р и п к е [1], см., например, Т о м а с о н [1], Ш ю т т е [1], Т а к а х а с и [2]. Наша версия теоремы 5.1 следует изложению Д р а г а л и н а [4] и является усовершенствованием этого изложения. Оттуда же взята и лемма 5.1.6. Наша форма теоремы 5.2 является, по-видимому, новой. Теоремы п. 6 и операция $(\sum)'$ принадлежат С м о р и н с к о м у [1]. Метод п. 7 и большинство реализуемостей этого пункта изложены в работе Д р а г а л и н а [14].

АНАЛИЗ

В этой части мы подробно сформулируем наиболее известные формальные теории для описания интуиционистских свободно становящихся последовательностей. При этом мы уделим специальное внимание разъяснению интуитивного смысла аксиом теорий и дадим обзор важнейших математических результатов, к ним относящихся. Эта часть носит, в основном, обзорный характер, но все же в конце раздела мы приводим примеры двух ВК-моделей для беззаконных последовательностей и для последовательностей в стиле Клини и Весли [1].

1. Теория FIM, обзор результатов. Интуиционистский анализ отличается от интуиционистской арифметики, прежде всего, наличием новых объектов исследования. Кроме натуральных чисел, в анализе появляются так называемые *последовательности выбора* (в другой терминологии — *свободно становящиеся последовательности*) — объекты исследования, не имеющие непосредственных аналогов в конструктивной или классической математике. В первом приближении свободно становящуюся последовательность можно охарактеризовать как функцию, перерабатывающую объекты одного типа в объекты другого типа. При этом предполагается, что коль скоро определен входной объект свободно становящейся последовательности, то может быть эффективно найден и результат переработки. С другой стороны, исследователю, может быть, и неизвестен полностью закон образования свободно становящейся последовательности. Эта «неизвестность» отражена в специальных аксиомах теорий и в значительной степени определяет специфически интуиционистский характер рассмотрений.

Мы ограничимся изучением лишь свободно становящихся последовательностей, перерабатывающих натуральные числа в натуральные. Все наши формальные теории будут формулироваться в языках An (U) (с. 38), где U — ко-

нечное множество различных сортов свободно становящихся последовательностей. Слово *функция* мы употребляем как собирательное наименование различных видов свободно становящихся последовательностей. Некоторые сорта функций будут иметь специальные наименования, например, *функции, заданные законом* (или *конструктивные функции*, lawlike functions — Крайзел, Трулстра [1], Трулстра [1]), *беззаконные функции* (lawless functions — Крайзел [5]). Нашей задачей является построение интерпретаций теорий, большинство из которых не допускают моделей в классическом понимании этого слова. Так, если переменная α пробегает беззаконные функции, то в теории LS, формулировка которой будет дана ниже, одновременно выводимы $\forall \alpha \neg \forall x (\alpha (x) = 0)$ и $\neg \forall \alpha \exists x (\alpha (x) \neq 0)$. Никакая совокупность функций не может в классическом смысле удовлетворять двум этим условиям. Нельзя указать и совокупность общерекурсивных функций, для которых бы эти условия имели место в традиционном конструктивном смысле. Поэтому наша интерпретация по необходимости использует некоторое неклассическое толкование логических связок.

Мы начнем с формулировки и обсуждения формальной теории FIM (*The Foundations of Intuitionistic Mathematics*) Клини и Весли [1]. FIM формулируется в языке An, т. е. с единственным сортом переменных для функций. Нелогические аксиомы FIM делятся на группы.

1.1. *Арифметические аксиомы.* Это аксиомы теории HA (U), где U — одноэлементное множество. В частности, имеется схема аксиом индукции:

Ind. $$\varphi (0) \wedge \forall x (\varphi (x) \supset \varphi (Sx)) \supset \forall x \varphi (x),$$

где $\varphi (x)$ — произвольная формула языка FIM, а также закон согласованности функций с равенством:

Eq. $$x = y \supset \alpha (x) = \alpha (y).$$

1.2. *Примитивно рекурсивная замкнутость.* Это следующая схема аксиом:

PRC. $$\exists \alpha \forall x (\alpha (x) = t (x)),$$

где $t (x)$ — произвольный терм языка, не содержащий α. Эта схема утверждает, что любая примитивно рекурсивная комбинация функций нашей теории вновь является функцией нашей теории. Если ввести сокращение

$$\alpha = \lambda x t(x) \leftrightharpoons \forall x\, (\alpha(x) = t(x)),$$

то схема PRC может быть записана в виде $\exists \alpha\, (\alpha = \lambda x t(x))$. Собственно, в книге Клини и Весли [1] схема PRC отдельно не формулируется. Она выводится из логических постулатов, поскольку в книге Клини и Весли [1] выражения вида $\lambda x t$ (они называются *функторами*, *термами для функций*) непосредственно введены в язык. Нам, однако, для сравнения различных теорий удобно иметь специальную схему аксиом, выражающую замкнутость функций относительно примитивно рекурсивных операций.

В нашем языке функторы можно использовать только в комбинации $(\alpha = F)$, где F — функтор, расшифровывая эту комбинацию, как указано выше. Например, введем сокращение $(\beta)_x \leftrightharpoons \lambda y \beta\, (j\, (x, y))$. Тогда комбинация $(\alpha = (\beta)_x)$ есть сокращение для формулы $\forall y\, (\alpha(y) = \beta(j\, (x, y)))$.

Схемы Eq и PRC позволяют вывести в FIM ключевое свойство этого сокращения: $\exists!\, \alpha\, (\alpha = F)$, где F — произвольный функтор, не содержащий α.

Теория, основанная на схемах аксиом групп 1.1 и 1.2, составляет подсистему FIM, которая имеет специальное название PrAn (читается «примитивно рекурсивный анализ»). С помощью схемы PRC в этой теории обеспечивается существование примитивно рекурсивных функций.

1.3. Схема выбора:

AC-NC. $\forall x \exists \beta \varphi\, (x, \beta) \supset \exists \alpha \forall x \exists \gamma\, (\gamma = (\alpha)_x \wedge \varphi\, (x, \gamma))$.

Эта схема утверждает, что если для всякого x существует β, удовлетворяющее условию $\varphi\, (x, \beta)$, то существует единая функция α такая, что для всех x имеем $\varphi\, (x, (\alpha)_x)$. Если ввести «сокращение»

$$\varphi\, (x, (\alpha)_x) \leftrightharpoons \exists \gamma\, (\gamma = (\alpha)_x \wedge \varphi\, (x, \gamma)),$$

то схему AC-NC можно записать в более естественном виде:

$$\forall x \exists \beta \varphi\, (x, \beta) \supset \exists \alpha \forall x \varphi\, (x, (\alpha)_x).$$

Такое сокращение, строго говоря, некорректно, так как по сокращенной записи несокращенная восстанавливается неоднозначно, тем не менее мы будем использовать иногда такую нестрогую запись, особенно в доказательствах и дополнительных разъяснениях.

В теории PrAn из схемы AC-NC можно вывести следующие более слабые, но гораздо более употребительные схемы:

AC-NN. $\forall x \exists y \varphi\, (x, y) \supset \exists \alpha \forall x \varphi\, (x, \alpha(x))$;

AC-NN!. $\forall x \exists! y \varphi\, (x, y) \supset \exists \alpha \forall x \varphi\, (x, \alpha(x))$.

Теория PrAn + AC-NN! имеет специальное название EL («элементарный анализ»).

Имеется еще естественная схема выбора — так называемая схема зависимого выбора:

DC-C. $\forall \alpha \exists \beta \varphi\, (\alpha, \beta) \supset \forall \alpha \exists \beta\, (\alpha = (\beta)_0 \wedge \forall x \varphi\, ((\beta)_x (\beta)_{Sx}))$.

Здесь $\varphi\, ((\beta)_x, (\beta)_{Sx})$ следует понимать, конечно, как сокращение для $\exists \gamma \delta\, (\gamma = (\beta)_x \wedge \delta = (\beta)_{Sx} \wedge \varphi\, (\gamma, \delta))$. В PrAn из DC-C выводится AC-NC, однако в состав FIM мы включим в качестве схемы аксиом именно AC-NC, а не DC-C. Фактически DC-C выводится в FIM, но с использованием аксиом группы 1.5 ниже, а нас часто будет интересовать фрагмент FIM, не содержащий этой последней группы аксиом.

1.4. *Бар-индукция.* Теория FIM содержит в качестве схемы аксиом следующий принцип *разрешимой бар-индукции*:

$\mathrm{BI_D}$. $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg \varphi(x)) \wedge \forall \alpha \exists x \varphi\, (\bar{\alpha}(x)) \wedge$
$\forall x\, (\varphi(x) \supset \psi(x)) \wedge \forall x\, (\forall y \psi\, (x * \hat{y}) \supset \psi(x)) \supset \psi(0)$.

Напомним, что $\bar{\alpha}(x) = \langle \alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(x-1) \rangle$ и $\hat{x} = \langle x \rangle$ — номер одночленного кортежа, состоящего из x.

Мотивировка этого важного индуктивного принципа подробно обсуждается в книге Клини и Весли [1], § 6. Принцип $\mathrm{BI_D}$ существенно используется в доказательстве такой важной теоремы, как теорема о веере (Клини и Весли [1], п. 6.10, утверждение *26.7, *а*; п. 7.5, утверждение *27.10; п. 7.4, утверждение *27.8). Следствием $\mathrm{BI_D}$ является и то, что **не все** функции являются общерекурсивными. Точнее, если ввести сокращение

$$\mathrm{GR}(\alpha) \leftrightharpoons \exists y \forall x \exists z\, (T_1(y, x, z) \wedge Uz = \alpha(x))$$

(читается «α — общерекурсивная функция»), то в PrAn + $\mathrm{BI_D}$ можно вывести $\neg \forall\alpha\, \mathrm{GR}(\alpha)$ (Клини и Весли [1], п. 9.3, лемма 9.8 и следствие 9.9). В то же время теория FIM без принципа $\mathrm{BI_D}$ совместна с утверждением $\forall\alpha\, \mathrm{GR}(\alpha)$ (это следует из того, что реализуемость по Клини и Весли [1], §§ 8,9, без $\mathrm{BI_D}$ может быть осуществлена с использованием только общерекурсивных функций).

Заметим, что, хотя в FIM и выводится $\neg \forall\alpha\, \mathrm{GR}(\alpha)$, тем не менее в FIM не выводится $\exists\alpha \neg \mathrm{GR}(\alpha)$. Московакис [1] показала, что с FIM совместно утверждение $\forall\alpha \neg\neg \mathrm{GR}(\alpha)$, а Клини [5] доказал, что если в FIM выводится предложение вида $\exists\alpha\varphi(\alpha)$, то необходимо выводится и $\exists\alpha\, (\mathrm{GR}(\alpha) \wedge \varphi(\alpha))$. Теория PrAn + AC-NC + $\mathrm{BI_D}$ имеет специальное название BSK («базисная система Клини»).

Имеется и более сильный вариант схемы бар-индукции — так называемая *монотонная бар-индукция*:

$$\mathrm{BI_M}.\quad \forall x \forall y\, (\varphi(x) \supset \varphi(x * y)) \wedge \forall\alpha\exists x \varphi(\bar{\alpha}(x)) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \supset \psi(x)) \wedge \forall x\, (\forall y \psi(x * \hat{y}) \supset \psi(x)) \supset \psi(0),$$

отличающаяся лишь первой посылкой от $\mathrm{BI_D}$. В теории PrAn из $\mathrm{BI_M}$ следует $\mathrm{BI_D}$, обратный же вывод монотонного принципа из разрешимого требует использования принципа BC-N, который формулируется ниже в группе аксиом 1.5 (см. Клини и Весли [1], п. 7.6, утверждение *27.13).

1.5. *Принцип непрерывности Брауэра.* Сделаем предварительно несколько неформальных замечаний. Функцию α назовем *стабильной*, если для всех x и y из $\alpha(x) \neq 0$ следует $\alpha(x * y) = \alpha(x)$, и *запирающей*, если для всякой функции β найдется x такое, что $\alpha(\bar{\beta}(x)) \neq 0$. Стабильные запирающие функции назовем *непрерывными функционалами*, класс всех непрерывных функционалов обозначим через K_0. Если $\alpha \in K_0$, то можно естественно определить действие α на функции. А именно, обозначим через $\alpha(\beta)$ натуральное число y такое, что для некоторого z имеем $y + 1 = \alpha(\bar{\beta}(z))$. Ввиду запираемости α такое z необходимо найдется, а ввиду стабильности y не зависит от выбора z и определяется только функцией β. Таким образом, $\alpha \in K_0$ действительно может рассматриваться как *функционал* в традиционном смысле этого слова, причем этот функционал *непрерывен*, если входные функции β рассматривать как элементы топологического пространства Бэра B^{ω}. Непрерывность α проявляется в том, что значение $\alpha(\beta)$ определяется уже по некоторому конечному фрагменту $\bar{\beta}(z)$ функции β.

Если β — произвольная функция, то определим функцию $\gamma = x * \beta$ следующим образом: если $y < \mathrm{lh}\, x$, то $\gamma(y) = [x]_y$, если же $y \geqslant \mathrm{lh}\, x$, то $\gamma(y) = \beta(y - \mathrm{lh}\, x)$. Если на β смотреть как на последовательность натуральных чисел, то $x * \beta$ получается из β «наращиванием» слева кортежа x в качестве набора первых членов последовательности.

Введенное обозначение позволяет естественно определить действие непрерывного функционала как оператора. А именно, обозначим через $(\alpha \mid \beta)$ функцию γ такую, что для всякого натурального v имеем $\gamma(v) = \alpha(\hat{v} * \beta)$. Этот оператор также непрерывен в том смысле, что для каждого v значение $\gamma(v)$ зависит лишь от конечного фрагмента β (но этот фрагмент зависит от v).

Эти понятия легко формализуются в языке анализа. Введем обозначения

$$\alpha \in K_0 \leftrightharpoons K_0(\alpha) \leftrightharpoons \forall xy\, (\alpha(x) \neq 0 \supset \alpha(x * y) = \alpha(x)) \wedge \forall\beta\exists x\, (\alpha(\bar{\beta}(x)) \neq 0);$$

$$(y = \alpha(\beta)) \leftrightharpoons \exists z\, (Sy = \alpha(\bar{\beta}(z)));$$

$$(\gamma = (\alpha \mid \beta)) \leftrightharpoons \forall v \exists z\, (S(\gamma(v)) = \alpha(\hat{v} * \bar{\beta}(z))).$$

Следующие два факта выражают однозначную определенность непрерывных функционалов. А именно:

1) в PrAn выводится

$$\alpha \in K_0 \supset \forall\beta\exists!\, y\, (y = \alpha(\beta));$$

2) в EL выводится

$$\alpha \in K_0 \supset \forall\beta\exists!\, \gamma(\gamma = (\alpha \mid \beta)).$$

Теперь мы можем сформулировать принцип непрерывности Брауэра для функций

$$\text{BC-C.}\quad \forall\alpha\exists\beta\varphi(\alpha, \beta) \supset (\exists\gamma \in K_0)\, \forall\alpha\varphi(\alpha, \gamma \mid \alpha).$$

Более развернутая запись заключения этой схемы имеет вид

$$\exists\gamma\,(\gamma \in K_0 \wedge \forall\alpha\exists\delta\,(\delta = (\gamma \mid \alpha) \wedge \varphi\,(\alpha,\ \delta))).$$

В EL из BC-C следует вариант принципа непрерывности, называемый *принципом Брауэра для чисел*:

BC-N. $\forall\alpha\exists x\varphi\,(\alpha, x) \supset (\exists\gamma \in K_0)\,\forall\alpha\varphi\,(\alpha, \gamma\,(\alpha))$

(см. Клини и Весли [1], п. 7.2, утверждение *27.2). В свою очередь из BC-N в теории PrAn можно вывести *слабый принцип непрерывности*, не содержащий упоминания о непрерывных функционалах (см. Клини и Весли [1], п. 7.7, утверждение *27.15):

WC-N. $\forall\alpha\exists x\varphi\,(\alpha, x) \supset \forall\alpha\exists xy\forall\beta\,(\bar{\beta}\,(y) = \bar{\alpha}\,(y) \supset \varphi\,(\beta, x))$.

Смысл принципа непрерывности состоит, коротко говоря, в том, что наши функции не полностью известны исследователю. Точнее, среди наших функций имеются и такие, относительно которых неизвестен закон их образования, и все, что мы о них знаем,— это последовательно получаемые их значения $\alpha\,(0)$, $\alpha\,(1)$,. . . В такой ситуации, если *для всякого* α эффективно можно указать x такое, что $\varphi\,(\alpha, x)$, то это возможно лишь в случае, когда x фактически определяется уже некоторым конечным фрагментом $\bar{\alpha}\,(z)$ функции α, что, в некоторой точной форме и утверждает схема BC-N. Можно сказать, что принцип непрерывности есть попытка точно выразить идею Брауэра, предлагавшего рассматривать интуиционистский континуум не как завершенную совокупность функций, а как «среду свободного становления» (ср. также обсуждение Клини и Весли [1], п. 7.1). Принцип непрерывности противоречит классической математике; уже к теории PrAn + WC-N нельзя без противоречия присоединить закон исключенного третьего. Более того, в PrAn + WC-N можно подобрать контрпримеры к многим законам классической логики предикатов, невыводимым интуиционистски (Клини и Весли [1], пп. 7.9—7.12).

1.6. Теперь мы можем закончить формулировку теории FIM. FIM — теория в языке анализа An. В наших обозначениях

$$\mathrm{FIM} = \mathrm{PrAn} + \text{AC-NC} + \mathrm{BI_D} + \text{BC-C}.$$

В монографии Клини и Весли [1], гл. III и IX, показано, что в теории FIM могут быть выведены все основные факты интуиционистского анализа Брауэра, включая теорему о веере и теорему о равномерной непрерывности вещественных функций. Фактически при этом достаточно использовать более скромную теорию

$$\mathrm{PrAn} + \text{AC-NN} + \mathrm{BI_D} + \text{BC-N}.$$

Основной метаматематический результат Клини и Весли [1] состоит в построении интерпретации типа реализуемости для теории FIM в теории BSK. Тем самым финитно доказана непротиворечивость теории FIM относительно BSK. Теория BSK допускает стандартную классическую модель, в которой функции интерпретируются просто как теоретико-множественные объекты. Таким образом, установлена непротиворечивость специфически интуиционистской теории FIM с классической точки зрения. Из работы Клини [5] следует, что FIM обладает свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности.

Возможности опровержения законов классической логики предикатов в FIM и в смежных теориях исследовались Гарговым [1].

Большое количество вариантов аксиом анализа порождает и большое количество трудных и интересных проблем, касающихся взаимоотношений этих вариантов. Бóльшая часть возникающих здесь вопросов еще не получила решения. Например, требуется доказать, что, кроме явно отмеченных тривиальных соотношений, между перечисленными принципами нет иных логических связей, — допустим, показать, что в PrAn + AC-NC + $\mathrm{BI_D}$ не выводится $\mathrm{BI_M}$. Ховард и Крайзел [1] показали, что

$$\mathrm{PrAn} + \text{AC-NC} + \mathrm{BI_M} + \text{WC-N} \vdash \text{BC-N}.$$

Требуется установить, что эта выводимость не имеет места, если заменить $\mathrm{BI_M}$ на $\mathrm{BI_D}$. Важными вариантами схем выбора AC и схем непрерывности BC являются такие, в посылке которых стоит вместо существования $\exists$ существование с единственностью $\exists!$, например,

BC-C!. $\forall\alpha\exists!\beta\varphi\,(\alpha,\ \beta) \supset \exists\gamma\forall\alpha\varphi\,(\alpha,\ \gamma \mid \alpha)$.

Такие принципы в некотором отношении «гораздо конструктивнее», чем оригинальные схемы аксиом. Серия проблем состоит в том, чтобы показать, что принципы с единственностью существенно слабее, чем оригинальные принципы. Например, верно ли, что в теории PrAn + AC-NN + BI_D + BC-C! не выводится AC-NC? Заметим, что EL + BC-C $\vdash$ AC-NC. Другая серия задач — показать, что схемы аксиом, в которых не допускаются свободные переменные по функциям, существенно слабее неограниченных принципов.

Принципиальная ценность решения такого рода проблем состоит в том, что при их решении приходится конструктировать специальные понятия неклассической истинности — интуиционистские модели, в которых выполняется большинство интуиционистских законов, за исключением одного из них, который имеет место только в ослабленной форме. Интуиционистская теория призвана отражать некоторую идею эффективного построения в математике. Предлагаемая модель обеспечивает эту эффективность в «чуть-чуть ослабленной» форме. Тем самым мы яснее представляем себе весь богатый спектр различных видов «эффективного существования» в математике. Например, М о с к о в а к и с [2] и К р о л ь [1] — [5] построили несколько топологических моделей анализа, из которых, в частности, следует, что если к BSK присоединить BI_M, BC-N! и BC-N без параметров, то принцип BC-N все же не выводится. Кроме того, если к BSK присоединить BI_M и BC-N, то BC-C все же не выводится.

Интересно исследовать также взаимоотношения анализа с дополнительными интуиционистскими принципами. Например, вариант тезиса Чёрча вида $\forall\alpha\, GR(\alpha)$ просто опровергается в FIM, как мы указывали выше. Тем не менее некоторая сильная форма тезиса Чёрча все же совместна с FIM (С к а р п е л л и н и [4]; сама модель в более общей форме построена ранее в работе Д р а г а л и н а [6], но эта форма тезиса Чёрча в указанной работе не отмечена). А именно, по всякой формуле $\varphi(\alpha)$ может быть построен частично рекурсивный терм $t_\varphi(x)$, содержащий в качестве параметров x и все параметры формулы $\varphi(\alpha)$, кроме α (в том числе и все функциональные параметры φ), причем следующая схема аксиом (при всех $\varphi(\alpha)$) совместна с FIM:

CTR. $\exists\alpha\varphi(\alpha) \supset \exists\alpha(\varphi(\alpha) \wedge \forall x \exists y(y = t_\varphi(x) \wedge y = \alpha(x)))$.

Это значит, что если существует α такое, что $\varphi(\alpha)$, то это α может быть найдено алгоритмически относительно параметров φ. Отсюда, в частности, следует совместность схемы

$$\exists\alpha\varphi(\alpha) \supset \exists\alpha(GR(\alpha) \wedge \varphi(\alpha)),$$

где $\varphi(\alpha)$ содержит е д и н с т в е н н ы й функциональный параметр α. В работе К л и н и [5] исследовано взаимоотношение FIM с принципом Маркова — этот принцип не зависит от FIM. Актуальной задачей является установление точных взаимоотношений между ними. В сборнике Т р у л с т р ы [6] можно найти изложение методов доказательств и описание многих известных результатов.

Обозначим через EL^0 *классический формальный анализ*, т. е. теорию EL, снабженную не интуиционистской, а классической логикой. В работах Л е в и н а [1] — [3] и К а н о в е я [1], [2] взаимоотношение различных вариантов схем выбора AC с EL^0 исследовано очень подробно. Например, из результатов Кановея следует, что после присоединения к EL^0 схемы AC-NC, схемы DC-C без параметров и фрагмента схемы DC-C ограниченной сложности найдется все же невыводимый пример схемы DC-C (большей сложности).

Обзор многочисленных вариантов интуиционистских принципов можно найти в работе К р а й з е л а и Т р у л с т р ы [1].

2. Схема Крипке. Рассмотрим следующие три схемы аксиом в языке FIM:

KS^+. $\exists\alpha(\exists x\, \alpha(x) \neq 0 \equiv \varphi)$;

KS. $\exists\alpha((\forall x\, \alpha(x) = 0 \equiv \neg\varphi) \wedge (\exists x\, \alpha(x) \neq 0 \supset \varphi))$;

KS^-. $\exists\alpha(\forall x\, \alpha(x) = 0 \equiv \neg\varphi)$.

Здесь φ — произвольная формула, не содержащая свободно α. Легко видеть, что в PrAn имеем $KS^+ \supset KS \supset KS^-$.

Схема KS была предложена Крипке в качестве формализации теории Брауэра для последовательностей, зависящих от решения проблем (Брауэр [2], см. также Гейтинг [3], с. 143—145).

Приведем аргументы в пользу схемы KS^+, следуя (приблизительно) изложению Гейтинга [3]. Пусть дано предложение φ. Развернем в соответствии с этим предложением построение некоторой свободно становящейся последовательности α следующим образом. Фиксируем некоторую дискретную последовательность моментов времени $0, 1, 2, \ldots$, потенциально стремящуюся неограниченно в будущее. Например, это может быть отсчет дней, начиная с некоторого фиксированного дня. Значения $\alpha(n)$ будем вычислять последовательно — значение $\alpha(n)$ будет отыскиваться в момент n — согласно следующему правилу. Если к моменту n *доказано* утверждение φ, то положим $\alpha(n) = 1$. В противном случае положим $\alpha(n) = 0$. В частности, если в некоторый момент n доказано утверждение $\neg\varphi$, то для всех бо́льших моментов m автоматически следует положить $\alpha(m) = 0$. Эта последовательность α и будет искомой. В самом деле, если $\exists x\, \alpha(x) \neq 0$, то это означает, что в некоторый момент было доказано φ и, следовательно, имеет место φ. Обратно, если имеет место φ, то, при некотором естественном с интуиционистской точки зрения понимании, это означает, что φ доказано в некоторый момент времени n и, следовательно, $\alpha(n) = 1$, т. е. $\exists x\, \alpha(x) \neq 0$.

Сразу видно, что приведенная выше аргументация содержит много весьма непривычных с точки зрения традиционной теоретико-множественной математики элементов. Во-первых, последовательность α, построенная выше, таинственным образом зависит от течения времени, от исторической ситуации, в силу которой будет или не будет доказано φ. По этой причине метод Брауэра [2] называют также «историческими аргументами Брауэра». Далее, построение α зависит от творческой деятельности некоторого субъекта (или субъектов), который занимается доказательством суждений. Относительно этого «творящего субъекта» неявно делаются некоторые идеализирующие предположения. При построении α, например, используется разбор случаев и, следовательно, предполагается, что в каждый момент можно эффективно выяснить, доказано или не доказано суждение φ. Творящий субъект предполагается потенциально бессмертным, продолжающим свою деятельность в любой момент времени. Впрочем, это последнее предположение не особенно удивительно с традиционных позиций, оно родственно идеализациям типа абстракции потенциальной бесконечности, в силу которой натуральный ряд рассматривается как потенциально бесконечная совокупность.

Исторические аргументы Брауэра имеют важные следствия для анализа, и поэтому были предприняты интенсивные попытки формализовать теорию творящего субъекта (см., например, Крайзел [4], Майхилл [1] — [3], Трулстра [2], ван Роотселаар [1], ван Дален [1]). Схема Крипке (опубликованная в работе Майхилла [1]) является одним из самых удачных предложений такой формализации. Она позволяет получить все требуемые следствия (фактически для этого достаточно уже KS^-), близко соответствует оригинальным рассуждениям Брауэра и не требует расширения аналитического языка новыми предикатами (например, предикатами, выражающими доказуемость суждений творящим субъектом; о таких предикатах см. ван Роотселаар [1], ван Дален [1]), имеющими весьма экзотическую семантику.

В качестве следствия схемы Крипке отметим опровержение некоторого варианта принципа Маркова.

2.1. *В теории* PrAn + BC-N! + KS^- *выводится*

$$\neg\forall\alpha\, (\neg\neg\exists x\, \alpha(x) \neq 0 \supset \exists x\, \alpha(x) \neq 0).$$

$\triangleright$ Допустим противное, и пусть

$$\neg\neg\exists x \alpha(x) \neq 0 \supset \exists x\, \alpha(x) \neq 0.$$

Согласно KS^- найдем β такое, что

$$\forall x\, \beta(x) = 0 \equiv \neg\forall x \alpha(x) = 0.$$

Рассмотрим функцию $\gamma = \lambda x\, (\alpha(x) + \beta(x))$. Если $\forall x \gamma(x) = 0$, то $\forall x \alpha(x) = 0$ и $\forall x \beta(x) = 0$, что невозможно. Поэтому $\neg\forall x \gamma(x) = 0$, т. е. $\neg\neg\exists x \gamma(x) \neq 0$. Пользуясь допущением, отсюда $\exists x \gamma(x) \neq 0$. Тогда для этого x $\alpha(x) \neq 0$ или $\beta(x) \neq 0$. В первом случае $\exists x\, \alpha(x) \neq 0$ и, значит, $\neg \forall x \alpha(x) = 0$, во втором случае $\forall x\, \alpha(x) = 0$. Таким образом, мы получим

$$\forall \alpha (\forall x\, \alpha(x) = 0 \vee \neg \forall x\, \alpha(x) = 0).$$

Однако хорошо известно, что это последнее утверждение опровергается с помощью BC-N! (Клини и Весли [1], п. 7.10, утверждение * 27.17). □ —

Далее, с помощью схемы Крипке можно вывести существование нерекурсивной функции и, более того, установить невозможность нумерации функций натуральными числами.

2.2. *Пусть* $\varphi(z, x, y)$ *— формула аналитического языка. Тогда в* PrAn + AC-NC + KS⁻ *имеем*

$$\exists \alpha \neg \exists z \forall xy (\alpha(x) = y \equiv \varphi(z, x, y)).$$

▷ Используя KS^-, заключаем

$$\forall x \exists \alpha (\forall n \alpha(n) = 0 \equiv \neg \forall n \varphi(x, j(x, n), 0)).$$

С помощью AC-NC отсюда следует, что найдется функция α такая, что

$$\forall x (\forall n \alpha(j(x, n)) = 0 \equiv \neg \forall n \varphi(x, j(x, n), 0)).$$

Покажем, что эта функция искомая. Предположим противное, и пусть для некоторого z

$$\forall xy (\alpha(x) = y \equiv \varphi(z, x, y)).$$

Тогда $\forall n \alpha(j(x, n)) = 0 \equiv \forall n \varphi(z, j(x, n), 0)$. Отсюда по выбору α

$$\forall x (\forall n \varphi(z, j(x, n), 0) \equiv \neg \forall n \varphi(x, j(x, n), 0)).$$

Подставляя $x = z$, немедленно получаем противоречие. □

2.3. *В* PrAn + AC-NC + KS⁻ *выводится*

$$\exists \alpha \neg GR(\alpha).$$

▷ Это следствие 2.2. Достаточно положить

$$\varphi(x, y, z) \leftrightharpoons \exists v (T_1(z, x, v) \wedge Uv = y). \ \square$$

Схема Крипке обладает большой дедуктивной силой. В теории PrAn + AC-NC + KS⁻ можно интерпретировать классический анализ EL^0. Эта тема обсуждается в работах Майхилла [2] и Бернини [1]. Кратко идею интерпретации можно пояснить следующим образом: погружение

EL^0 в интуиционистскую теорию следует проводить с помощью негативной интерпретации Гёделя, при этом предварительно EL^0 следует сформулировать в терминах множеств натуральных чисел, а не функций. С классической точки зрения обе формулировки эквивалентны, так как множества можно изображать функциями (характеристическими функциями множеств), а функции — множествами (множествами пар). При формулировке в терминах множеств аксиома AC-NN заменяется *аксиомой свертывания*

$$\exists X \forall x (x \in X \equiv \varphi(x)),$$

что имеет существенное значение при негативной интерпретации. При интерпретации предикат $x \in X$ изображается отношением $\neg\neg \exists n (\alpha(j(x, n)) \neq 0)$ и для доказательства существования α, изображающего множество X, как раз и используется схема KS^-.

Теперь мы подходим к самому драматическому моменту в истории схемы Крипке — схема KS^- несовместна с FIM!

2.4. *Теория* EL + BC-C + KS⁻ *противоречива.*

▷ Согласно KS^-

$$\forall \alpha \exists \beta (\forall x \beta(x) = 0 \equiv \neg \forall x \alpha(x) = 0).$$

Далее, согласно BC-C найдется $\gamma \in K_0$ такое, что для всякого α

$$\forall x (\gamma \mid \alpha)(x) = 0 \equiv \neg \forall x \alpha(x) = 0.$$

Положим $\alpha_0 = \lambda x 0$ и $\beta_0 = (\gamma \mid \alpha_0)$. Тогда $\neg \forall x \beta_0(x) = 0$. Допустим, что для некоторого z $\beta_0(z) = Sn > 0$. Так как $\beta_0 = (\gamma \mid \alpha_0)$, то это означает, что найдется v такое, что $\gamma(\hat{z} * \bar{\alpha}_0(v)) = SSn$. Определим теперь функцию α_1 так, чтобы $\bar{\alpha}_0(v) = \bar{\alpha}_1(v)$ и $\alpha_1(v) = 1$. Так как $\bar{\alpha}_0(v) = \bar{\alpha}_1(v)$, то $(\gamma \mid \alpha_0)(z) = (\gamma \mid \alpha_1)(z) = Sn$. По свойству γ, так как $\exists z ((\gamma \mid \alpha_1)(z) \neq 0)$, получаем $\forall x \alpha_1(x) = 0$, что абсурдно ввиду $\alpha_1(v) = 1$. Таким образом, сделанное допущение неверно и $\forall z \beta_0(z) = 0$. Но это противоречит отмеченному перед допущением свойству β_0. □

Полученный результат убеждает нас в том, что последовательности, удовлетворяющие схеме Крипке, образуют другой класс последовательностей, отличный от того класса, который изучает теория FIM. Схема KS постулирует некоторый новый способ образования функций, и нельзя ожидать, что эти новые функции обязательно удовлетворяют всем ранее формулированным принципам. Майхилл [2] предложил теорию

$$\mathrm{M} = \mathrm{PrAn} + \mathrm{AC\text{-}NC} + \mathrm{BI_D} + \mathrm{BC\text{-}N} + \mathrm{KS}$$

в качестве формализации свойств класса функций, удовлетворяющих схеме Крипке (функции M называют иногда «эмпирическими», в отличие от «математических» функций FIM (Майхилл [2], [3])). Естественно также рассмотреть более слабую и более сильную теории M^- и M^+, получающиеся из M заменой KS на KS^- и KS^+ соответственно. Основная особенность M по сравнению с FIM — замена принципа BC-C теории FIM на более слабый принцип BC-N и, конечно, добавление схемы Крипке. Полученная теория M и даже M^- очень полно отражают все основные особенности интуиционистского анализа Брауэра. Ослабление принципа BC-C не мешает провести все существенные теоремы анализа (так как для этого достаточна схема BC-N, см. Клини и Весли [1], с. 104), а наличие схемы Крипке позволяет воспроизвести и все исторические аргументы Брауэра.

Весьма нетривиальным оказалось доказательство непротиворечивости M средствами классической математики. Основываясь на идеях Скотта [1], [2], Московакис [2] предложила модель для фрагмента теории M^+ со схемой BC-N! вместо BC-N. Непротиворечивость M^+ установил Кроль [2], [5]. Он же показал, что M^+ обладает свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности, а также (Кроль [4]) неэквивалентность схем KS^+ и KS.

Отметим также, что Весли [2] предложил некоторое ослабление схемы KS, достаточное для получения основных аналитических следствий исторических аргументов Брауэра и в то же время совместное с FIM.

3. Теория IDB (U). Это теория со многими сортами функциональных переменных. Один из сортов выделен, и объекты этого сорта мы будем называть *конструктивными функциями* или *функциями, заданными законом*. Функциональные переменные этого выделенного сорта мы будем обозначать латинскими буквами a, b, c,

d,. . . Параметры по натуральным числам и конструктивным функциям мы будем называть *конструктивными параметрами*, остальные функциональные параметры — *собственными*. В обозначении IDB (U) через U обозначено конечное множество сортов собственных переменных. В частности, если U пусто, мы получим теорию IDB, содержащую только два сорта переменных — для чисел и для конструктивных функций.

Существенные аксиомы теории IDB(U) относятся к конструктивным функциям, а остальные сорта переменных остаются, в сущности, неопределенными, что связано с тем, что теория IDB (U) служит базисом для рассмотрения различных видов последовательностей, которые мы ниже будем описывать с помощью расширений теории IDB (U) новыми аксиомами.

Интуитивно функция задана законом, если имеется точное конечное предписание для вычисления любого ее значения и это предписание полностью известно исследователю. В духе современной теории вычислимых функций имеется естественное желание отождествить функции, заданные законом, с общерекурсивными функциями. Заметим сразу же, что такое отождествление вполне возможно (и к теории IDB (U) можно без противоречия присоединить аксиому, утверждающую, что все конструктивные функции общерекурсивны), но в рамках IDB (U) такое отождествление вовсе не является необходимым. Напротив, можно рассмотреть стандартную классическую модель IDB (U), в которой «конструктивные» функции — это просто все теоретико-множественные функции. Роль конструктивных функций как «заданных законом» проявляется в их отношении к другим сортам функций. Эта роль формализуется в виде точных законов в теориях — расширениях IDB (U), например, в CS или LS ниже.

Язык IDB (U) есть расширение многосортного языка анализа. А именно, добавляется одна одноместная предикатная буква K (a), аргументное место которой можно замещать переменными для конструктивных функций. K (a) читается как «a есть непрерывный функционал» или «a есть непрерывный оператор» и часто будет записываться в виде $a \in K$. Замысел состоит в том, чтобы $a \in K$ означало то же самое, что $\alpha \in K_0$ в теории FIM, но лишь для конструктивных функций. Ясное определение, данное в FIM для $\alpha \in K_0$, в теории IDB (U) непригодно из-за того, что конструктивные функции могут не удовлетворять, например, аксиоме бар-индукции. Поэтому приходится дать самостоятельное индуктивное описание класса K, не обращающееся к другим видам последовательностей. Это описание восходит к Брауэру и формализовано в работах Крайзела и Трулстры [1], Трулстры [1]. Само название IDB — аббревиатура с английского языка («индуктивное определение Брауэра»).

Переходим к точному описанию теории IDB (U).

3.1. Во-первых, аксиомами IDB (U) являются все *арифметические аксиомы*, включая все примеры схем аксиом равенства Eq и индукции Ind в нашем языке (см. с. 155).

3.2. *Аксиома примитивно рекурсивной замкнутости для конструктивных функций* имеет вид

$$\text{PRC-кон.}\quad \exists a \forall x\, (a\,(x) = t\,(x)),$$

где $t\,(x)$ — произвольный терм языка, не содержащий a и содержащий только конструктивные параметры.

Эта схема утверждает, что любая примитивно рекурсивная комбинация конструктивных функций вновь является конструктивной функцией. Ограничение на параметры вполне естественно: комбинация собственных функций может оказаться и неконструктивной.

Функторные обозначения $a = \lambda x\, t(x)$ мы используем так же, как в п. 1 этой части.

3.3. *Аксиомы для непрерывных операторов*:

1) $a = \lambda x S y \supset a \in K$;

2) $a\,(0) = 0 \wedge \forall x b\, (b = \lambda y\, a(\hat{x} * y) \supset b \in K) \supset a \in K$;

3) $\forall a y\, (a = \lambda x S y \supset \varphi\,(a)) \wedge$

$$(\forall a \in K)\,(a\,(0) = 0 \wedge \forall x b\, (b = \lambda y a\,(\hat{x} * y) \supset \varphi\,(b)) \supset \varphi\,(a)) \supset (\forall a \in K)\, \varphi\,(a).$$

Аксиомы 1) — 3) выражают в нашем языке индуктивное определение класса K функций, заданных законом. Аксиома 1) — базис этой индукции: если a есть функция-константа, отличная от нуля, то $a \in K$. Аксиома 2) — шаг индукции: если $a\,(0) = 0$ и для любой «сдвинутой» функции $b = \lambda y a\,(\hat{x} * y)$ уже установлено $b \in K$, то $a \in K$. Удобно представлять себе (с помощью принятой нами нумерации кортежей натуральными числами), что функция $a \in K$ определена на кортежах натуральных чисел. Второй пункт определения класса K говорит, что для выяснения $a \in K$ в случае $a\,(0) = 0$ достаточно установить бесконечный набор «посылок»

$$\lambda y a\,(\hat{0} * y) \in K,\quad \lambda y a\,(\hat{1} * y) \in K, \ldots$$

Определение класса K — пример так называемого *общего индуктивного определения*. Это единственное общее индуктивное определение, которое нам понадобится. Легко указать теоретико-множественную трактовку определения класса K. А именно, класс X конструктивных функций назовем замкнутым, если для X выполняются аксиомы 1) и 2) с заменой K на X. Нетрудно показать, что пересечение любого семейства замкнутых классов есть вновь замкнутый класс. В качестве K следует взять пересечение всех замкнутых классов. Интуиционистское обсуждение общих индуктивных определений см. в статье Трулстры [1].

Индуктивный характер определения K предполагает возможность использовать в доказательствах *принцип индукции по определению* K, который состоит в следующем. Пусть $\varphi\,(a)$ — свойство конструктивных функций, относительно которого установлено:

(i) все функции-константы, отличные от нуля, удовлетворяют φ;

(ii) если $a \in K$, $a\,(0) = 0$ и всякая «сдвинутая» функция $b = \lambda y\, a(\hat{x} * y)$ удовлетворяет φ, то отсюда следует, что и a удовлетворяет φ;

тогда отсюда можно заключить, что при всяком $a \in K$ имеет место $\varphi\,(a)$.

Аксиома 3) как раз и выражает этот индуктивный принцип отражающий ту идею, что класс K получен «только с помощью индуктивных пунктов 1), 2) и никак иначе», т. е. является минимальным замкнутым классом.

С помощью индукции по определению $a \in K$ из аксиом 3.1—3.3 выводится следующее объемное свойство класса K:

3.3.1. $a \in K \wedge b = a \supset b \in K$.

Напомним, что $b = a$ означает $\forall x\,(b\,(x) = a\,(x))$. Далее индуктивно легко вывести стабильность и запираемость функций из K:

3.3.2. $a \in K \wedge a\,(x) \neq 0 \supset a\,(x * y) = a\,(x)$;

3.3.3. $a \in K \supset \forall\beta\exists x\, a\,(\overline{\beta}\,(x)) \neq 0$.

Заметим, что в 3.3.3 β может быть функциональной переменной любого сорта (не обязательно конструктивной).

Другим приложением индукции по определению K является следующий «принцип индуктивного спуска», напоминающий разрешимую бар-индукцию $\mathrm{BI_D}$:

3.3.4. $a \in K \wedge \forall x\,(a\,(x) \neq 0 \supset \varphi\,(x)) \wedge$
$$\forall x\,(\forall y\,\varphi\,(x * \hat{y}) \supset \varphi\,(x)) \supset \varphi\,(0).$$

$\rhd$ Определим формулу

$$\psi\,(a) \leftrightharpoons \forall x\,(\forall y\,(a\,(y) \neq 0 \supset \varphi\,(x * y)) \wedge \forall z\,(\forall y\,\varphi\,(x * z * \hat{y}) \supset \varphi\,(x * z)) \supset \varphi\,(x)).$$

Докажем $(\forall a \in K)\,\psi\,(a)$ индукцией по определению $a \in K$. $\square$

3.4. *Схема выбора.* Это следующая схема аксиом:

AC-NC-кон. $\forall x\exists a\varphi(x,\,a) \supset \exists b\forall x\,\varphi(x,\,(b)_x)$,

где формула $\varphi\,(x,\,a)$ содержит лишь конструктивные параметры. Если для каждого числа x можно найти конструктивную функцию a, удовлетворяющую некоторому условию, не зависящему от неконструктивных параметров, то существует к о н с т р у к т и в н а я функция b, кодирующая такие a для каждого x.

Определение IDB (U) закончено. IDB есть теория IDB (U) в случае пустого U.

Непосредственным следствием схемы выбора является следующая схема:

AC-NN-кон. $\forall x\exists y\,\varphi\,(x,\,y) \supset \exists a\forall x\,\varphi\,(x,\,a\,(x))$,

где формула $\varphi\,(x,\,y)$ содержит лишь конструктивные параметры. Сокращения $(y = \alpha\,(\beta))$ и $(\gamma = (\alpha \mid \beta))$ мы введем так же, как в п. 1.4. Чтобы эти «равенства» имели свойства настоящих равенств, необходимо установить свойства типа однозначной определенности.

3.4.1. В IDB (U)

$$a \in K \supset \forall\beta\exists!\,y\,(y = a\,(\beta)).$$

$\rhd$ Это следствие стабильности и запираемости $a \in K$. $\square$

3.4.2. В IDB (U)

$$a \in K \supset \forall b\exists!c\,(c = (a \mid b)).$$

$\rhd$ Пусть $a \in K$. Фиксируем b. Согласно 3.4.1 $\forall v\,\exists!\,w\,(w = a\,(\hat{v} * b))$. Здесь мы использовали PRC-кон для образования функции $\hat{v} * b$. Применяя AC-NN-кон, найдем искомую функцию c. $\square$

Заметим, что, вообще говоря, невозможно вывести $a \in K \supset \forall\beta\exists!\gamma\,(\gamma = (a \mid \beta))$ для других сортов функций. Некоторые виды функций могут оказаться бедными, незамкнутыми относительно непрерывных операций. Лемма 3.4.2 показывает, что конструктивные функции замкнуты относительно таких операций.

4. **Теория** CS. Это теория в языке IDB (U), где U — одноэлементное множество, т. е. кроме конструктивных функций в теории имеется еще ровно один вид *собственных функций*. Переменные по собственным функциям мы будем обозначать греческими буквами α, β, γ, δ,. . . Теория CS предложена Крайзелом (см. описание в работах: Т р у л с т р а [1], К р а й з е л и Т р у л с т р а [1]; наше описание отличается некоторыми техническими деталями). Сформулируем аксиомы CS.

4.1. Прежде всего это *аксиомы* IDB (U).

4.2. Схема *примитивно рекурсивной замкнутости*:

PRC-соб. $\exists\alpha\forall x\,(\alpha\,(x) = t\,(x))$,

где $t\,(x)$ — произвольный терм теории, не содержащий переменной α (однако он вполне может содержать другие неконструктивные параметры).

С помощью этой схемы легко вывести, что конструктивные функции составляют часть семейства собственных функций. Точнее,

4.2.1. $\forall a\,\exists\alpha\,(a = \alpha)$.

4.3. *Схема выбора* имеет вид

AC-NC-соб. $\forall x\exists\alpha\varphi\,(x,\,\alpha) \supset \exists\beta\forall x\varphi(x,\,(\beta)_x)$.

Здесь, как обычно, $\varphi\,(x,\,(\beta)_x)$ следует понимать как сокращение для $\exists\gamma\,(\gamma = (\beta)_x \wedge \varphi\,(x,\,\gamma))$, а $\gamma = (\beta)_x$ означает $\forall y(\gamma\,(y) = \beta\,(j\,(x,\,y)))$. Эта схема позволяет обычным образом вывести схему выбора для чисел:

AC-NN-соб. $\forall x\exists y\varphi(x,\,y) \supset \exists\alpha\forall x\varphi(x,\,\alpha\,(x))$.

В свою очередь эта последняя схема используется для доказательства замкнутости собственных функций относительности непрерывных операций:

4.3.1. $a \in K \supset \forall\beta\exists!\gamma(\gamma = (a\,|\,\beta))$.

4.4. *Принцип аналитического задания* имеет вид

A. $\varphi(\alpha) \supset (\exists a \in K)\ \exists\gamma\,(\alpha = (a\,|\,\gamma) \wedge \forall\beta\varphi(a\,|\,\beta))$,

где $\varphi(\alpha)$ — произвольная формула, содержащая, кроме α, лишь конструктивные параметры.

Эта принципиальная аксиома отражает то обстоятельство, что закон образования собственной функции α известен исследователю не полностью, а лишь «с точностью до конструктивного непрерывного оператора». Если исследователь установил конкретный факт $\varphi(\alpha)$ относительно некоторой функции α, то факт φ имеет место и для целого «пучка» функций, похожих на α. Точнее, если $\varphi(\alpha)$, то существует конструктивный оператор $a \in K$ такой, что α есть образ этого оператора, $\alpha = (a\,|\,\gamma)$, и имеет место $\varphi(\delta)$ для всех δ, $\delta = (a\,|\,\beta)$. Вместе с α свойством φ автоматически обладают и все функции $(a\,|\,\beta)$ при возможных β. Невозможно установить какое-либо конкретное свойство одной-единственной индивидуальной существенно неконструктивной последовательности.

4.5. *Принцип непрерывности* имеет вид

BC-C-соб. $\forall\alpha\exists\beta\ \varphi(\alpha, \beta) \supset (\exists a \in K)\ \forall\alpha\ \varphi(\alpha, (a\,|\,\alpha))$.

Здесь $\varphi(\alpha, \beta)$ кроме α и β содержит лишь конструктивные параметры. Зато и в заключении утверждается существование не просто непрерывного функционала, а конструктивного непрерывного функционала.

4.6. *Схема выбора для конструктивных функций*:

BC-F. $\forall\alpha\exists a\ \varphi(\alpha, a) \supset (\exists b \in K)\ \exists c\forall\alpha\ \varphi(\alpha, (c)_{b(\alpha)})$.

Здесь α — единственный неконструктивный параметр формулы $\varphi(\alpha, a)$. В этой аксиоме выражена определенная специфика функций, заданных законом. Если $\forall\alpha\exists a\varphi(\alpha, a)$, то должен быть способ, указывающий конструктивный объект a для произвольной функции α. Закон образования α, по крайней мере для некоторых α, может быть и совсем неизвестен исследователю. Следовательно, этот способ должен указывать a фактически уже по конечному отрезку α: для всякого α можно отыскать конечный фрагмент $\overline{\alpha}(n)$, зная который, уже можно целиком вычислить a такое, что $\varphi(\alpha, a)$. Это и выражает заключение схемы BC-F. Эта схема принципиально отличается от BC-C-соб, где каждое значение $\beta(m)$ вычисляется по конечному отрезку α, причем требуемый отрезок α существенно зависит от m.

Разумеется, выражение $\varphi(\alpha, (c)_{b(\alpha)})$ следует расшифровать стандартным образом, чтобы оно превратилось в формулу нашего языка: $\varphi(\alpha, (c)_{b(\alpha)}) \leftrightharpoons \exists dy\,(y = b(\alpha) \wedge d = (c)_y \wedge \varphi(\alpha, d))$.

Определение CS закончено. Мы не стремились дать минимальные варианты аксиом. Например, вместо AC-NC-соб достаточно было взять AC-NN!-соб, а затем AC-NC-соб уже выводится с помощью BC-C-соб и A.

Крайзел и Трулстра [1] показали, что все схемы аксиом FIM выводимы в CS. Отсюда, в частности, следует, что если формула φ не содержит переменных для конструктивных функций и выводима в FIM, то она выводится и в CS. Известен и обратный результат, принадлежащий Трулстре (хотя его доказательство, по-видимому, еще не опубликовано): если формула φ без конструктивных функций выводима в CS, то она выводима и в FIM. Таким образом, в некотором отношении CS есть консервативное расширение FIM. (В статье Крайзела и Трулстры [1] приводится ошибочный контрпример к этому утверждению.)

С другой стороны, в статье Крайзела и Трулстры приводится некоторая интерпретация CS в IDB. Тем самым доказывается непротиворечивость CS относительно IDB. Последняя же теория допускает стандартную классическую модель.

5. Теория LS беззаконных последовательностей. Языки теорий LS и CS совпадают. Однако собственные функции LS имеют совсем иные свойства, чем собственные функции CS.

Аксиомы LS делятся на группы.

5.1. Прежде всего это *аксиомы* IDB (U).

5.2. Аксиома *существования беззаконных последовательностей*:

$$\forall x\, \exists \alpha\, (\alpha \in x).$$

Здесь $\alpha \in x \leftrightharpoons \bar{\alpha}\,(\mathrm{lh}\, x) = x$. Аксиома гласит, что для всякого кортежа x существует функция α, начинающаяся с этого кортежа.

5.3. Определим

$$(\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leftrightharpoons \alpha \neq \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha \neq \alpha_n.$$

Следующая схема аксиом может быть названа принципом *полной неопределенности*:

$$\varphi(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \supset$$
$$\exists x\, (\alpha \in x \wedge \forall \beta\, (\beta \in x \wedge (\beta \neq \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n) \supset \varphi(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n))).$$

Здесь все неконструктивные параметры формулы $\varphi(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ суть $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Если α_i отсутствуют, то в схеме аксиом следует опустить конъюнктивные члены $(\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Аксиома гласит, что если α отлична от остальных беззаконных последовательностей, упоминающихся в условии φ, то все, что известно относительно α,— это некоторое ее начало x. Рассмотрим частный случай этой схемы, когда параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отсутствуют:

$$\varphi(\alpha) \supset \exists x\, (\alpha \in x \wedge (\forall \beta \in x)\varphi(\beta)).$$

Сразу видно, что схема напоминает принцип аналитического задания A теории CS, но выражает гораздо более сильную неопределенность: если установлен факт $\varphi(\alpha)$ относительно беззаконной последовательности α, то факт φ имеет место и для всего семейства функций β, где $\beta \in x$. Кортеж x определяется по свойству φ. Таким образом, невозможно доказать какой-либо факт относительно α, который не определялся бы уже начальным отрезком α. Интуитивно в каждый момент исследователю известен только конечный отрезок функции α «и ничего более» относительно закона образования α.

5.4. *Принцип разрешимости*:

$$\forall \alpha\beta\, (\alpha = \beta \vee \alpha \neq \beta).$$

Аргументировать в пользу этой аксиомы можно следующим образом. Беззаконную последовательность можно представлять себе в виде некоторого источника, порождающего числа, причем закон образования этих чисел совершенно неизвестен исследователю. Если α и β задаются одним и тем же источником, то $\alpha = \beta$. Если же α и β задаются разными источниками, то исследователь принципиально не имеет возможности установить $\alpha = \beta$, а это с интуиционистской точки зрения естественно толковать как отрицание $\alpha = \beta$.

5.5. Определим $\neq(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \leftrightharpoons \bigwedge\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i \neq \alpha_j)$.

Теория LS содержит следующий *принцип непрерывности* BC-N-LS:

$$\forall \alpha_0 \ldots \alpha_n\, (\neq(\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_n) \supset \exists x \varphi(\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_n, x)) \supset$$
$$(\exists a \in K)\ \forall \alpha_0 \ldots \alpha_n\, (\neq (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \supset \varphi\ (\alpha_0, \ \ldots, \alpha_n, a\,(\nu_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)))).$$

Здесь $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — единственные неконструктивные параметры φ. При $n = 0$ посылки $\neq(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ следует опустить. Формулу $\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, a\,(\nu_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)))$ следует расшифровать стандартно:

$$\exists y\, (y = a\,(\nu_n(\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_n)) \wedge \varphi(\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_n, y)).$$

Однако толкование равенства $y = a\,(\nu_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n))$ уже требует осторожности. Его не следует понимать, например, как

$$\exists \gamma\, (\gamma = \nu_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)),$$

где $\nu_n(\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_n) = \lambda x \nu_n(\alpha_0(x), \ \ldots, \ \alpha_n(x))$ есть естественное склеивание нескольких функций в одну. Дело в том, что в LS отсутствует схема PRC примитивно рекурсивной замкнутости для собственных функций, так что мы не в состоянии доказать существование $\gamma = \nu_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Более того, с помощью 5.3 легко доказать, что схема PRC неверна даже в простейших случаях. Например, в LS $\forall \beta \neg \exists \alpha \forall x\, (\alpha(x) = \beta(x) \cdot \beta(x))$. Интуитивно это совершенно ясно: последовательность β^2 уже не беззаконна, о ней кое-что известно, а именно, что она есть квадрат другой последовательности! Поэтому мы истолкуем $y = a\,(\nu_n(\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_n))$ непосредственно в терминах начальных отрезков $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Положим

$$y = a(\nu_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)) \rightleftharpoons \exists z\,(Sy = a(\tilde{\nu}_n(\bar{\alpha}_0(z), \ldots \bar{\alpha}_n(z)))).$$

5.6. *Аксиома выбора для конструктивных функций* имеет вид

$$\text{BC-F-LS.}\quad \forall\alpha_0 \ldots \alpha_n (\neq(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \supset \exists b\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, b)) \supset \exists d\forall\alpha_0 \ldots \alpha_n (\neq(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \supset \exists x\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, (d)_x)).$$

Определение теории LS закончено.

Теория LS предложена Крайзелом [1], [5], аксиома непрерывности приводится нами с исправлением Трулстры [4]. Термин «беззаконная последовательность» принадлежит Гёделю, Крайзел употреблял термин «абсолютно свободно становящаяся последовательность». Крайзел [1] показал, что LS полна по отношению к логике высказываний в следующем смысле: если формула логики высказываний не выводится в HPC, то некоторый ее пример опровергается в LS. В [5] Крайзел намечает интерпретацию LS в IDB, что дает непротиворечивость LS относительно IDB.

Отметим, что беззаконные последовательности теории LS имеют так называемый «антисоциальный» статус (см. Трулстра [3]), состоящий в том, что две такие последовательности либо равны, либо совершенно не зависят друг от друга. Это обстоятельство отражено в аксиоме разрешимости 5.4 и в приставках типа $(\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\neq(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ аксиом 5.3 и 5.6. В работе Драгалина [6] предложен некоторый теоретико-модельный анализ этого явления, в частности, указаны различные виды антисоциальных последовательностей, рассматриваются одновременно в рамках одной теории социальные виды функций (такие, как собственные CS-функции) и антисоциальные — типа функций LS.

6. Примеры моделей. В этом разделе мы приведем и обсудим несколько просто формулируемых примеров моделей для теорий интуиционистского анализа.

Вообще, в литературе имеется довольно много различных интерпретаций теорий FIM, CS, LS и их модификаций, см., например, Клини и Весли [1], Московакис [1], [2], Скотт [1], [2], Кроль [1] — [5], Крайзел и Трулстра [1], Скарпеллини [1], [4], Ершов [1], Драгалин [5] — [7], ван Дален [1], ван Хувен [1].

Гораздо менее исследовалось строение всего спектра различных видов интуиционистских последовательностей. Трулстра [3] предложил схему построения целого класса различных видов функций. Идея состоит в том, чтобы, отправляясь от беззаконных последовательностей, получать остальные функции как результат действия непрерывных операторов на уже полученные функции. В работах Трулстры [4], ван Далена и Трулстры [1] были сделаны попытки уточнить эти идеи, построив конкретные формальные теории, призванные отразить способы описания функций, но таким способом не удалось получить, например, теории CS, что связано со сложностью описания в схеме Трулстры социальных видов функций.

Приводимые ниже примеры являются методической обработкой моделей из работы Драгалина [10].

6.1. Определим BK-модель для языка LS следующим образом.

Для сорта собственных переменных $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ фиксируем стандартное счетное семейство новых констант $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \ldots$, которые назовем *символами функций* или *каналами*. Каналы мы рассматриваем как разрешимое семейство конструктивных объектов, например, как семейство натуральных чисел специального вида.

Момент t есть по определению вычислимая функция, определенная на каналах и перерабатывающая каждый канал в натуральное число. При этом должно выполняться следующее условие: для всякого натурального m найдутся канал $\hat{\alpha}$ и натуральное n такие, что $t(\hat{\alpha}) = m * n$.

Интуитивно t есть информация о начальных фрагментах каналов: $t(\hat{\alpha}) = n$ следует читать как «$\hat{\alpha}$ изображает функцию, начинающуюся с кортежа n», т. е. $\hat{\alpha} \in n$ или $\bar{\hat{\alpha}}(\mathrm{lh}\, n) = n$. Наложенное условие означает, что имеются каналы, начинающиеся с любого наперед заданного кортежа.

Отношение упорядочения на множестве моментов задается естественным образом: $t' \leqslant t \Leftrightarrow$ для всякого канала $\hat{\alpha}$, $t'(\hat{\alpha}) \supseteq t(\hat{\alpha})$, где отношение $x \supseteq y$ означает отношение продолжения кортежей

$$x \supseteq y \rightleftharpoons \exists z\,(x = y * z).$$

Пусть F — функция, сопоставляющая каждому каналу $\hat{\alpha}$ некоторую функцию $F(\hat{\alpha})$ из натуральных чисел в натуральные. Множество S моментов назовем *путем с пределом* F, если, во-первых, $t \in S \Rightarrow F(\hat{\alpha}) \in t(\hat{\alpha})$ для всякого канала $\hat{\alpha}$ и, во-вторых, для всякого конечного списка каналов $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_k$ и всякого семейства кортежей $n_1, \ldots, n_k$ такого, что $F(\hat{\alpha}_j) \in n_j$, найдется момент $t \in S$ такой, что $t(\hat{\alpha}_1) \supseteq n_1, \ldots, t(\hat{\alpha}_k) \supseteq n_k$. Легко видеть, что для данного S существует только один предел F. Множество S моментов назовем *путем*, если существует F такое, что S есть путь с пределом F.

Теперь для данного момента t определим множество путей $Q(t)$, *выходящих из* t. А именно, $S \in Q(t) \Leftrightarrow S$ есть путь и для всякого $t' \in S$ $t' \leqslant t$.

Тем самым полностью определена шкала Бета — Крипке.

Далее, сорту натуральных чисел в качестве объектной области мы сопоставим множество ω натуральных чисел. При этом константе 0 языка сопоставим, конечно, число 0. Сорту конструктивных функций мы сопоставим множество в с е х теоретико-множественных функций. Сорту же собственных функций мы сопоставим множество каналов.

Пусть f — функциональный символ языка LS и $q_1, \ldots, q_n$, m — предметные объекты соответствующих сортов. Определим открытое множество моментов $|f(q_1, \ldots, q_n) \sim m|$. А именно, $t \in |f(q_1, \ldots, q_n) \sim m| \Leftrightarrow$ для всякого пути $S \in Q(t)$ с пределом F после замены каждого канала $\hat{\alpha}$, входящего в $f(q_1, \ldots, q_n)$, на функцию $F(\hat{\alpha})$ можно вычислить соответствующую примитивно рекурсивную функцию $\bar{f}(q_1', \ldots, q_n')$ и ее значение оказывается равным m. Более конструктивно это же определение можно сформулировать следующим образом: $t \in |f(q_1, \ldots, q_n) \sim m| \Leftrightarrow$ можно завершить вычисление $\bar{f}(q_1, \ldots, q_n)$ на основании только той информации о каналах, которая заключена в t, и полученное значение равно m (напомним, что для вычисления значения примитивно рекурсивной функции требуется лишь начальный отрезок ее функциональных аргументов). Далее, определим стандартно $t \in \| f(q_1, \ldots, q_n) \sim m \| \rightleftharpoons (\forall S \in Q(t))(\exists t' \in S)(t' \in |f(q_1, \ldots, q_n) \sim m|)$. Если n_1 и n_2 — два натуральных числа, то $\| n_1 = n_2 \|$ есть все множество моментов или пустое множество в зависимости от того, совпадают или различны числа n_1 и n_2.

Наконец, если A есть теоретико-числовая функция (объект сорта конструктивных функций в нашей модели), то $t \in \| K(A) \| \Leftrightarrow A$ есть непрерывный функционал.

Тем самым мы полностью определили модель языка LS.

Отметим основные свойства отношения вынуждения $t \Vdash \varphi \rightleftharpoons t \in \| \varphi \|$, где φ — *оцененная* формула языка:

1) $t \Vdash (r = s) \Leftrightarrow (\forall S \in Q(t))\,(\exists t' \in S)$ (информация о каналах, заключенная в t', достаточна для вычисления значений оцененных термов r и s, и эти значения оказываются равными);

2) $t \Vdash K(A) \Leftrightarrow A$ есть непрерывный функционал;

3) $t \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (t \Vdash \varphi) \wedge (t \Vdash \psi)$;

4) $t \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (\forall S \in Q(t))\,(\exists t' \in S)((t' \Vdash \varphi) \vee (t' \Vdash \psi))$;

5) $t \Vdash (\varphi \supset \psi) \Leftrightarrow (\forall t' \leqslant t)(t' \Vdash \varphi \Rightarrow t' \Vdash \psi)$;

6) $t \Vdash \bot$ всегда ложно;

7) $t \Vdash \forall u \varphi(u) \Leftrightarrow$ для всех объектов q соответствующего сорта $t \Vdash \varphi(q)$;

8) $t \Vdash \exists u \varphi(u) \Leftrightarrow (\forall S \in Q(t))(\exists t' \in S)\,\exists q\,(t' \Vdash \varphi(q))$.

Мы будем писать $\Vdash \varphi$, если всякий момент t вынуждает φ. Если φ содержит параметры, то истинность $\Vdash \varphi$ означает, как обычно, истинность замыкания формулы φ кванторами общности.

6.1.1. *Пусть* $t \Vdash \varphi(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m)$, *где* $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m$ — *список различных каналов, содержащий все каналы, встречающиеся в* φ. *Пусть* $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m$ — *список различных каналов и* t' — *момент такой, что* $t'(\hat{\beta}_j) \supseteq t(\hat{\alpha}_j)$ *для всех* $j = 1, \ldots, m$. *Тогда* $t' \Vdash \varphi(\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m)$.

$\triangleright$ Индукцией по построению $\varphi(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m)$. $\square$

6.1.2. С л е д с т в и е. *Если оцененная формула* φ *не содержит каналов, то* $t \Vdash \varphi \Leftrightarrow\ \Vdash \varphi$.

6.1.3. Аксиомы IDB (U) выполняются в нашей модели, их истинность связана с тем, что соответствующие принципы верны метаматематически.

Пусть, например, нужно доказать истинность аксиомы индукции. Допустим $t \Vdash \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \supset \varphi(Sx))$ и покажем $t \Vdash \forall x\varphi(x)$. С этой целью установим, что для всех натуральных n $t \Vdash \varphi(n)$. Это же последнее утверждение доказывается без труда с помощью содержательной индукции по n с использованием допущения.

Некоторую специфику представляет только проверка схемы выбора AC-NC-кон теории IDB (U), что связано с особым толкованием существования в нашей модели.

Пусть $t \Vdash \forall x \exists a \varphi(x, a)$. Тогда для всякого натурального n $t \Vdash \exists a \varphi(n, a)$. Отсюда следует, что для всякого пути $S \in Q(t)$ найдутся момент $t' \in S$ и функция A_n такие, что $t' \Vdash \varphi(n, A_n)$. Так как $\varphi(n, A_n)$ не содержит каналов (в схеме AC-NC-кон формула $\varphi(x, a)$ содержит лишь конструктивные переменные!), то $\Vdash \varphi(n, A_n)$. Выберем внешним образом функцию B так, что $(B)_n = A_n$ для всех n. Тогда $\Vdash \forall x\varphi(x, (B)_x)$.

6.1.4. Проверим теперь собственно аксиомы LS. Аксиома существования 5.2 $\forall x \exists \alpha (\alpha \in x)$ выполняется тривиально вследствие нашего определения моментов теории. Аксиома разрешимости 5.4 также имеет место. Действительно, $t \Vdash \hat{\alpha} = \hat{\beta}$, если $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ совпадают, и $t \Vdash \hat{\alpha} \neq \hat{\beta}$, если $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ различны, так как в этом последнем случае ни при каком t невозможно $t \Vdash \forall x(\hat{\alpha}(x) = \hat{\beta}(x))$, в чем легко убедиться, выбрав подходящее n и расширив момент t до момента $t' \leqslant t$ таким образом, чтобы $[t'(\hat{\alpha})]_n \neq [t'(\hat{\beta})]_n$.

Рассмотрим принцип полной неопределенности 5.3. Пусть $t \Vdash \varphi(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$ и $t \Vdash (\hat{\alpha} \neq \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$. Тогда канал $\hat{\alpha}$ отличен от каналов $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$. Возьмем $t' \in S \in Q(t)$, и пусть $n = t'(\hat{\alpha})$. Тогда $t' \Vdash \hat{\alpha} \in n$. Кроме того, если взять любой канал $\hat{\beta}$, отличный от $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n$ и такой, что $t' \Vdash \hat{\beta} \in n$ (что равносильно $t'(\hat{\beta}) \supseteq t'(\hat{\alpha})$), то согласно 6.1.1 имеем $t' \Vdash \varphi(\hat{\beta}, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$. Таким образом,

$$t \Vdash \exists x(\alpha \in x \wedge \forall \beta(\beta \in x \wedge (\beta \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \supset \varphi(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n))).$$

Тем самым истинность 5.3 установлена.

Принцип непрерывности 5.5:

$$\forall \alpha_0 \ldots \alpha_n (\neq (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \supset \exists x \varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, x)) \supset (\exists a \in K) \forall \alpha_0 \ldots \alpha_n (\neq (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \supset \exists yz(Sy = a(\tilde{\nu}_n(\bar{\alpha}_0(z), \ldots, \bar{\alpha}_n(z))) \wedge \varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, y)))$$

также выполняется в нашей модели. Что же касается аксиомы выбора для конструктивных функций 5.6, то она может и не выполняться в нашей простой модели. Тем не менее в рассматриваемой модели истинны многие специфически интуиционистские факты теории беззаконных последовательностей.

Например, следующие две формулы истинны в нашей модели одновременно:

$$\forall \alpha \neg \forall x(\alpha(x) = 0) \quad \text{и} \quad \neg \forall \alpha \exists x(\alpha(x) \neq 0).$$

Никакая совокупность функций не может в классическом смысле удовлетворять двум этим условиям.

Таким образом, ВК-модели могут быть с успехом применены при анализе интуиционистских теорий.

6.2. Приведем еще пример модели для языка FIM. Эта модель предназначена быть моделью теории последовательностей в стиле Клини и Весли.

Множество моментов этой модели есть просто множество всех натуральных чисел. На этом множестве определим порядок, соответствующий упорядочению кортежей: $x \leqslant y \leftrightharpoons x \supseteq y \leftrightharpoons \exists z(x = y * z)$.

Пусть F — функция из натуральных чисел в натуральные. Множество S моментов назовем *путем с пределом* F, если, во-первых, $t \in S \Rightarrow F \in t$ (т. е. для некоторого n $t = \bar{F}(n)$) и, во-вторых, для всякого n найдется $t \in S$, $t \supseteq \bar{F}(n)$. Легко видеть, что для данного S существует только один предел F. Множество S моментов назовем *путем*, если существует функция F такая, что S есть путь с пределом F.

Теперь для данного момента t определим множество путей $Q(t)$, *выходящих из* t. А именно, $S \in Q(t) \Leftrightarrow S$ есть путь и $t' \supseteq t$ для всякого $t' \in S$. Тем самым мы определили некоторую шкалу Бета — Крипке.

Далее, опишем объектные области модели. Сорту натуральных чисел в качестве объектной области мы сопоставим множество ω натуральных чисел, константе 0 языка сопоставим число 0. Сорту собственных функций языка FIM мы сопоставим множество U такое, что если $q \in U$, то q есть функция двух аргументов, причем

1) область определения $\mathrm{Dom}\, q \subseteq \omega \times \omega$, а в качестве значений q принимает натуральные числа, $\mathrm{Rang}\, q \subseteq \omega$;

2) $(t, n) \in \mathrm{Dom}\, q,\ t' \leqslant t \Rightarrow q(t, n) = q(t', n)$;

3) для всякого пути S, $q \in U$, и всякого натурального n существует $t \in S$ такое, что $(t, n) \in \mathrm{Dom}\, q$. Неформально говоря, объект $q \in U$ изображает некоторую свободно становящуюся последовательность α такую, что в момент t известны лишь значения $\alpha(n)$, для которых $(t, n) \in \mathrm{Dom}\, q$ и $\alpha(n) = q(t, n)$. Условия, наложенные на область U, обеспечивают, что все значения α становятся известными вдоль всякого пути. В каждый же данный момент t известен лишь фрагмент q_t функции α, где $q_t(n) = q(t, n)$.

Пусть f — функциональный символ языка FIM и $q_1, \ldots, q_n$ — предметные объекты соответствующих сортов. Определим открытое множество моментов $|\, f(q_1, \ldots, q_n) \sim m\, |$, где m — натуральное число. А именно, $t \in |\, f(q_1, \ldots, q_n) \sim m\, | \Leftrightarrow$ можно завершить вычисление примитивно рекурсивной функции $\bar{f}(q_1, \ldots, q_n)$, имея только фрагменты q_{it} неизвестных функций q_i.

Далее стандартно определим

$$t \in \|\, f(q_1, \ldots, q_n) \sim m\,\| \rightleftharpoons (\forall S \in Q(t))(\exists t' \in S)\,(t' \in |\, f(q_1, \ldots, q_n) \sim m\,|).$$

Как и раньше, $\|\, n_1 = n_2 \,\|$ есть все множество моментов или пустое множество в зависимости от того, совпадают или различны числа n_1 и n_2.

Тем самым определена некоторая ВК-модель для языка FIM.

6.2.1. Наша новая модель резко отличается по своим свойствам от модели п. 6.1. Например, собственные функции модели п. 6.2 замкнуты относительно примитивно рекурсивных операций. Точнее, для всякого терма $r(x)$ языка FIM истинна формула $\exists\alpha\forall x\,(\alpha(x) = r(x))$. Это — схема PRC п. 1.2. А именно, $\Vdash \forall x\,(q(x) = r(x))$, где $q(t, n) = m \Leftrightarrow$ в момент t определено значение оцененного терма $r(n)$ и это значение равно m (в противном случае $q(t, n)$ не определено).

6.2.2. Можно предложить иную интерпретацию нашей модели. Припишем каждой оцененной формуле открытое

подмножество пространства Бэра B^ω по правилу

$$\|\,\varphi\,\| = \{f \in B^\omega \mid \exists n\,((f \in n) \wedge (n \Vdash \varphi))\}.$$

Тем самым возникает некоторая топологическая модель для языка FIM, которая по существу совпадает с топологической моделью, предложенной Московакис [2].

Московакис проверила, что в этой модели истинны все аксиомы FIM, за исключением принципа непрерывности Брауэра BC-C. Принцип непрерывности выполняется в этой модели только в форме BC-N и то лишь в ограниченной форме: с посылкой вида $\forall\alpha\,\exists!x\varphi(\alpha, x)$ или с посылкой вида $\forall\alpha\exists x\varphi(\alpha, x)$, но в случае, если эта посылка не содержит функциональных параметров. Как показали Кроль [1] и ван Дален [1], полный принцип BC-N не имеет места в этой модели.

6.2.3. Особый интерес модель п. 6.2 представляет ввиду истинности в ней схемы Крипке в сильной форме KS+ (см. п. 2). А именно, $\Vdash \exists xq(x) \neq 0 \equiv \varphi$, где объект q определяется следующим образом. Пусть t — момент и $k = \mathrm{lh}\, t$ — его длина. Рассмотрим члены $[t]_0, [t]_1, \ldots, [t]_{k-1}$ кортежа t. Положим $q(t, i) = 0$, где $i \leqslant k$, если неверно $\langle [t]_0, \ldots, [t]_{i-1}\rangle \Vdash \varphi$. Положим $q(t, i) = 1$, если $\langle [t]_0, \ldots, [t]_{i-1}\rangle \Vdash \varphi$. Для $i > k$ значение $q(t, i)$ не определено.

6.2.4. Наше представление топологической модели в форме ВК-модели заметно облегчает исследование интуиционистских принципов. В качестве примера рассмотрим проверку истинности принципа непрерывности в следующей форме:

$$\forall\alpha\exists!x\varphi(\alpha, x) \supset \forall\alpha\exists xz\forall\beta\,(\bar{\alpha}(z) = \bar{\beta}(z) \supset \varphi(\beta, x)).$$

Пусть $t \Vdash \forall\alpha\exists!x\varphi(\alpha, x)$; покажем, что t вынуждает заключение принципа. Непосредственно из допущения следует, что для $t' \leqslant t$ имеем

$$\forall q\,(\forall S \in Q(t'))\,(\exists t'' \in S)\,\exists m\,(t'' \Vdash \varphi(q, m)), \qquad (1)$$

$$\forall qmn\,(t' \Vdash \varphi(q, m) \wedge t' \Vdash \varphi(q, n) \Rightarrow m = n). \qquad (2)$$

Возьмем произвольный функциональный объект q_0 и установим

$$t \Vdash \exists xz\forall\beta\,(\bar{q}_0(z) = \bar{\beta}(z) \supset \varphi(\beta, x)).$$

Предположим, что это не так. Тогда найдется путь $S_0 \in Q(t)$ такой, что для всех $t' \in S_0$ и всех натуральных m, n неверно, что

$$t' \Vdash \forall\beta\,(\bar{q}_0(n) = \bar{\beta}(n) \supset \varphi(\beta, m)).$$

Согласно (1) найдутся $t_0 \in S_0$ и m_0 такие, что

$$t_0 \Vdash \varphi(q_0, m_0). \tag{3}$$

По допущению для всех n и $t' \in S_0$ неверно $t' \Vdash \forall\beta\,(\bar{q}_0(n) = \bar{\beta}(n) \supset \varphi(\beta, m_0))$. Отсюда следует, что можно найти три последовательности $\{t_k\}_k$, $\{t_k'\}_k$, $\{q_k\}_k$ такие, что для всех k имеем $t_k \in S_0$, $t_{k+1} < t_k$, $t_k' \leqslant t_k$, длина t_k (как кортежа натуральных чисел) $\geqslant k$ и, наконец, $t_k \Vdash \bar{q}_k(k) = \bar{q}_0(k)$, в то время как неверно, что $t_k' \Vdash \varphi(q_k, m_0)$.

Пусть $k > 0$. Заметим, что не может быть $(\forall S \in Q(t_k'))(\exists t'' \in S)(t'' \Vdash \varphi(q_k, m_0))_v$, так как тогда было бы $t_k' \Vdash \varphi(q_k, m_0)$. Поэтому найдется путь $S_k' \in Q(t_k')$ такой, что для всех $t'' \in S_k'$ неверно $t'' \Vdash \varphi(q_k, m_0)$. С другой стороны, ввиду (1) найдутся $t_k'' \in S_k'$ и m_k такие, что $t_k'' \Vdash \varphi(q_k, m_k)$. Очевидно, что тогда $m_k \neq m_0$ и $t_k'' \leqslant t_k$.

Сконструируем теперь объект $\tilde{q}$ следующим образом. Вдоль пути S_0 в каждый момент t_k о функции $\tilde{q}$ имеется лишь информация, совпадающая с первыми k значениями функции q_0 вдоль пути S_0. Далее, для четного k строим функцию $\tilde{q}$ так, чтобы $t_k'' \Vdash q = q_0$ и для нечетного k было $t_k'' \Vdash \tilde{q} = q_k$. Возможность такого построения связана с тем, что $t_k \Vdash \bar{q}_k(k) = \bar{q}_0(k)$. Напомним, что $(\alpha = \beta) \leftrightharpoons \forall x\,(\alpha(x) = \beta(x))$. Согласно (1) найдутся некоторое t_s и m так, что $t_s \Vdash \varphi(\tilde{q}, m)$. Если взять четное $k > s$, то отсюда $t_k'' \Vdash \varphi(q_0, m)$, что ввиду (2) дает $m = m_0$. Если же взять нечетное $k > s$, то из $t_k'' \Vdash \tilde{q} = q_k$ получим $t_k'' \Vdash \varphi(q_k, m)$, что вновь ввиду (2) дает $m = m_k$. Но $m_k \neq m_0$, и мы приходим к противоречию.

ЧАСТЬ 5

УСТРАНИМОСТЬ СЕЧЕНИЯ В ИНТУИЦИОНИСТКОЙ ПРОСТОЙ ТЕОРИИ ТИПОВ В ФОРМЕ ИСЧИСЛЕНИЯ СЕКВЕНЦИЙ С ОБЪЕМНОСТЬЮ

В качестве приложения алгебраических методов мы дадим детальное доказательство устранимости сечения в интуиционистской простой теории типов с правилом объемности (экстенсиональности). Теория будет задана при этом в форме генценовского исчисления секвенций. Результат такого типа получен Т а к а х а с и [3]. Наша система отличается от теории Такахаси только наличием полного набора логических связок, но предлагаемое доказательство существенно иное и с интуиционистской точки зрения имеет ряд важных преимуществ.

Как известно, обычные методы доказательства устранимости сечения, например, типа, приведенного нами в первой части, оказываются непригодными для логик высокого порядка. Причиной является н е п р е д и к а т и в н ы й характер таких исчислений, в которых вместо параметров формул в определенных случаях разрешается подставлять термы, более сложные, чем сами исходные формулы. Из-за этого основная индукция по логической сложности главной формулы сечения разрушается и доказательство не проходит. Т а к е у т и [1] показал, что это обстоятельство не случайно: доказав устранимость сечения в простой теории типов, можно уже *элементарно* доказать *непротиворечивость* простой теории типов с *аксиомой бесконечности*. Простая теория типов с аксиомой бесконечности — очень обширная теория, естественно формализующая практически все разделы «работающей» классической математики. Таким образом, в силу известной теоремы Гёделя, само доказательство устранимости сечения не может быть элементарным — более того, оно не может быть даже проведено средствами такой сильной теории, как простая теория типов с аксиомой бесконечности. Доказательство устранимости сечения представляет поэтому замечательный пример весьма неэлементарного доказательства просто формулируемого синтаксического утверждения, представляющего несомненный интерес.

С точки зрения оснований математики принципиальный интерес приобретает анализ формы этого доказательства.

Методы доказательства устранимости сечения в непредикативных теориях появились сравнительно недавно (см., например, Тейт [1], Правиц [2], Такахаси [1]). Метаматематика этих первых доказательств была существенно классическая, теоретико-множественная с применением закона исключенного третьего. Пример такого доказательства для теории определимых множеств с бесконечнопосылочным правилом обобщения можно найти также в работе Драгалина [12]. Позже Жирар [1] предложил новый метод доказательства устранимости сечения в интуиционистских теориях, не требующий применения закона исключенного третьего. Правиц [3] и Мартин-Лёф [2] приложили этот метод для доказательства устранимости сечения в интуиционистской логике второго порядка в форме натурального вывода.

Предлагаемое ниже доказательство (Драгалин [9]) устранимости сечения, конечно, неэлементарно, что и невозможно в силу вышеупомянутого результата Такеути (мы дадим доказательство этого последнего результата в п.4 ниже), но все же не использует закона исключенного третьего и протекает в рамках интуиционистской теории видов. Точнее, можно показать, что доказательство устранимости сечения из выводов *ограниченной сложности* само формализуется в интуиционистской простой теории типов с аксиомой бесконечности. В этом смысле предлагаемое доказательство — в стиле Жирара [1], а не Такахаси [3]. Мы проводим доказательство в стиле Жирара — Мартин-Лёфа — Правица для обычного исчисления секвенций, а не для натурального вывода или систем типа секвенциальной системы Шютте (см., например, Освальд [2], Бухгольц [1]), метод доказательства распространен на теорию с правилом объемности и, наконец, наше доказательство имеет специальную алгебраическую форму. В действительности строится конкретная модель для рассматриваемого исчисления такая, что из истинности секвенции в этой модели следует ее выводимость без сечений. Логика модели образует алгебру с пополнением, так что модель является примером применения алгебр с пополнением в конкретных исследованиях по теории интуиционистского вывода. Кроме того, если в исчислении

отсутствуют связки $\vee$, $\exists$ (а они выражаются через остальные связки, см. ниже п. 4), то наша алгебра образует модель Крипке и мы получаем в качестве побочного результата интуиционистское доказательство следующего варианта теории о полноте: если секвенция верна во всякой модели Крипке (или хотя бы только в нашей выделенной модели), то она выводима (и даже без сечений).

1. Определим язык нашей теории.

1.1. Индуктивное определение *типов*:

1) 0 и 1 суть типы;

2) если $\tau_1, \ldots, \tau_n$ суть типы, то $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ есть тип ($n \geqslant 1$).

1.2. Для каждого типа τ мы фиксируем бесконечное множество Vr^τ *переменных* типа τ.

1.3. Для каждого типа τ язык может содержать некоторое, может быть и пустое, множество *констант* типа τ. Кроме того, язык содержит особую константу $\perp$ типа 1 — «ложь».

Что касается *функциональных символов*, то наш язык содержит лишь функциональные символы типа 0, все аргументные места которых имеют тип 0.

Наконец, язык содержит некоторое, может быть и пустое, множество *предикатных символов*, аргументные места которых имеют тип 0.

1.4. Индуктивное определение *терма* типа τ:

1) переменная типа τ есть терм типа τ;

2) константа типа τ есть терм типа τ;

3) если $t_1, \ldots, t_n$ суть термы типа 0 и f — n-местный функциональный символ, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм типа 0;

4) если $t_1, \ldots, t_n$ суть термы типа 0 и P — n-местный предикатный символ, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм типа 1;

5) если φ, ψ — термы типа 1, то $(\varphi \wedge \psi)$ есть терм типа 1;

6) если φ, ψ — термы типа 1, то $(\varphi \vee \psi)$ есть терм типа 1;

7) если φ, ψ — термы типа 1, то $(\varphi \supset \psi)$ есть терм типа 1;

8) если x — переменная некоторого типа и φ — терм типа 1, то $\forall x \varphi$ есть терм типа 1;

9) если x — переменная некоторого типа и φ — терм типа 1, то $\exists x\varphi$ есть терм типа 1;

10) если $x_1, \ldots, x_n$ суть различные переменные типов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ соответственно и φ — терм типа 1, то $\lambda x_1 \ldots x_n\varphi$ есть терм типа $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$;

11) если l — терм типа $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и $l_1, \ldots, l_n$ — термы типов $\tau_1, \ldots, \tau_n$ соответственно, то $(l_1, \ldots, l_n \in l)$ есть терм типа 1.

Определение терма закончено.

Обычным образом классифицируем переменные в терме на свободные и связанные, считая, что «кванторные приставки» $\forall x$, $\exists x$, $\lambda x_1 \ldots x_n$ связывают соответствующие переменные.

Мы систематически не будем различать термы, отличающиеся лишь переименованием связанных переменных, и, в частности, в выводах свободно заменяем такие термы друг на друга.

Выражение $(l)(x_1, \ldots, x_n \mid l_1, \ldots, l_n)$ означает результат одновременной подстановки вместо свободных вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$ (переменные предполагаются различными) термов $l_1, \ldots, l_n$ соответственно. При этом переменная x_i и терм l_i имеют одинаковый тип. Мы считаем, что при такой подстановке производится в необходимых случаях автоматическое переименование связанных переменных терма l. Рассматриваемое выражение мы сокращаем до $l\,(x_1, \ldots, x_n \mid l_1, \ldots, l_n)$ или даже до $l\,(l_1, \ldots, l_n)$, если упоминание о переменных $x_1, \ldots, x_n$ несущественно.

1.5. Термы типа 1 назовем *формулами*. Формула называется *предложением*, если она не содержит свободных переменных. Множество термов типа τ обозначим через Tm^τ. *Набор формул* есть по определению неупорядоченное конечное (может быть, и пустое) множество формул, в котором, однако, допускается повторение нескольких экземпляров одной и той же формулы. *Секвенция* есть фигура вида $\Gamma \to \varphi$, где Γ — набор и φ — формула.

2. Опишем систему *интуиционистской простой теории типов.*

2.1. *Аксиомы* системы имеют один из видов:

$$\varphi \to \varphi \quad \text{или} \quad \perp \to \varphi,$$

где φ — произвольная формула.

Правила вывода системы делятся на следующие группы:

2.2. *Основные логические правила*:

$$(\wedge\to)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\eta}{(\varphi\wedge\psi)\,\Gamma\to\eta};\qquad (\to\wedge)\quad \frac{\Gamma\to\varphi;\ \Gamma\to\psi}{\Gamma\to(\varphi\wedge\psi)};$$

$$\frac{\psi\Gamma\to\eta}{(\varphi\wedge\psi)\,\Gamma\to\eta};$$

$$(\vee\to)\quad \frac{\psi\Gamma\to\eta;\ \psi\Gamma\to\eta}{(\varphi\vee\psi)\,\Gamma\to\eta};\qquad (\to\vee)\quad \frac{\Gamma\to\varphi}{\Gamma\to(\varphi\vee\psi)};$$

$$\frac{\Gamma\to\psi}{\Gamma\to(\varphi\vee\psi)};$$

$$(\supset\to)\quad \frac{\Gamma\to\varphi;\ \psi\Gamma\to\eta}{(\varphi\supset\psi)\,\Gamma\to\eta};\qquad (\to\supset)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\psi}{\Gamma\to(\varphi\supset\psi)};$$

$$(\to\perp)\quad \frac{\Gamma\to\perp}{\Gamma\to\varphi};$$

$$(\forall\to)\quad \frac{\varphi\,(t)\to\eta}{\forall x\varphi\,(x)\,\Gamma\to\eta};\qquad (\to\forall)\quad \frac{\Gamma\to\varphi}{\Gamma\to\forall x\varphi};$$

$$(\exists\to)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\eta}{\exists x\varphi\Gamma\to\eta};\qquad (\to\exists)\quad \frac{\Gamma\to\varphi\,(t)}{\Gamma\to\exists x\varphi\,(x)};$$

$$(\in\to)\quad \frac{\varphi\,(x_1,\ldots,x_n\mid t_1,\ldots,t_n)\,\Gamma\to\eta}{(t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi)\,\Gamma\to\eta};$$

$$(\to\in)\quad \frac{\Gamma\to\varphi\,(x_1,\ldots,x_n\mid t_1,\ldots,t_n)}{\Gamma\to(t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi)}.$$

Здесь предполагаются выполненными некоторые обычные условия. Так, в правилах $(\to\forall)$ и $(\exists\to)$ переменная x не входит свободно в Γ и η. В правилах $(\forall\to)$ и $(\to\exists)$ переменная x и терм t имеют одинаковый тип. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ в правилах $(\in\to)$ и $(\to\in)$ различны, и каждая переменная x_i имеет тот же тип, что и терм t_i.

2.3. *Правило объемности* (*экстенсиональности*) (ср. Такахаси [3]):

$$\frac{S_{1i_1},\ldots,S_{1i_m},\ S_{2i_1},\ldots,S_{2i_m}}{(t_1,\ldots,t_n\in f)\,\Gamma\to(r_1,\ldots,r_n\in f)},$$

где f есть переменная или константа типа $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, причем по крайней мере одно из τ_i не равно нулю. Далее, если $\tau_i = 0$, то t_i совпадает с r_i. Список $i_1, \ldots, i_m$ есть полный список всех индексов i таких, что $\tau_i \neq 0$. Если $\tau_i = 1$, то S_{1i} есть секвенция $t_i\Gamma \to r_i$, а S_{2i} есть секвенция $r_i\Gamma \to t_i$. Наконец, если $\tau_i = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, то S_{1i} есть секвенция

$$(x_1, \ldots, x_k \in t_i)\ \Gamma \to (x_1, \ldots, x_k \in r_i),$$

а S_{2i} есть секвенция

$$(x_1, \ldots, x_k \in r_i)\ \Gamma \to (x_1, \ldots, x_k \in t_i),$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — список различных переменных, не входящих свободно в r_i, t_i, Γ, типов $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ соответственно.

2.4. *Основные структурные правила:*

$$(\mathrm{ad})\ \frac{\Gamma \to \eta}{\varphi\Gamma \to \eta}; \qquad (\mathrm{st})\ \frac{\varphi\varphi\Gamma \to \eta}{\varphi\Gamma \to \eta}.$$

2.5. Единственное *дополнительное структурное правило — сечение*:

$$(\mathrm{cut})\ \frac{\Gamma \to \varphi;\quad \varphi\Pi \to \eta}{\Gamma\Pi \to \eta}.$$

Формулировка системы закончена.

2.6. Если секвенция S выводима в этой системе, то мы будем писать $\vdash S$; если же S можно вывести без употребления правила сечения, то мы будем писать $\vdash^+ S$.

Основной результат этой части можно формулировать следующим образом: для всякой секвенции S, если $\vdash S$, то $\vdash^+ S$.

3. В нашей системе вместо переменных типа 1 разрешается подставлять произвольные формулы рассматриваемого языка. Это обстоятельство сказывается, например, в формулировке правил $(\forall \to)$ и $(\to \exists)$, если x — переменная типа 1.

Как заметил Правиц [1], в такого рода системах связки $\wedge, \vee, \exists, \perp$ можно выразить через $\supset$ и $\forall$. А именно, если x — переменная типа 1 и y — переменная произвольного типа, то можно положить

$$(\varphi \wedge \psi) \leftrightharpoons \forall x\, ((\varphi \supset (\psi \supset x)) \supset x);$$
$$(\varphi \vee \psi) \leftrightharpoons \forall x\, ((\varphi \supset x) \supset ((\psi \supset x) \supset x));$$
$$\exists y\varphi \leftrightharpoons \forall x\, (\forall y\, (\varphi \supset x) \supset x);$$
$$\perp \leftrightharpoons \forall x x.$$

Если рассмотреть фрагмент нашего языка, не содержащий $\wedge, \vee, \exists, \perp$, а затем ввести эти связки с помощью вышеуказанных определений, то все правила, касающиеся вновь определенных связок, можно вывести как допустимые правила в сокращенной системе. В полном же нашем языке вышеуказанные соотношения можно просто вывести как эквивалентности. Мы все же предпочли систему с полным набором логических связок с целью более ясного выявления алгебраических аспектов нашего доказательства.

4. Наметим теперь доказательство результата Такеути. Предположим, что уже доказана устранимость сечения в нашем исчислении.

Фиксируем двуместный предикатный символ $P\,(x^0, y^0)$ и обозначим через F замкнутую формулу, выражающую, что $P\,(x^0, y^0)$ задает строгое линейное упорядочение объектов типа 0 без наибольшего элемента. Формула F содержит лишь предикатный символ P и кванторы только по переменным типа 0.

Если формула φ выводима в теории типов с аксиомой бесконечности, то секвенция $F \to \varphi$ выводима в нашей системе, так как аксиома бесконечности следует из F. В частности, если теория типов с аксиомой бесконечности противоречива, то в нашей системе выводится $F \to \perp$, а значит, выводится и без сечения. Но F — формула первого порядка, так что вывод *без сечений* секвенции $F \to \perp$ автоматически оказывается выводом в обыкновенном исчислении предикатов первого порядка. Оказывается, таким образом, что обычная теория первого порядка с аксиомой F противоречива.

С другой стороны, существует весьма элементарное доказательство непротиворечивости такой простой теории, как элементарная теория с аксиомой F (например, см. Клини [2], § 79). Таким образом, мы получаем элементарное доказательство непротиворечивости простой теории типов относительно теоремы об устранении сечения.

5. *Модельной структурой* назовем набор $A = \langle B, \{U_\tau\}_\tau \rangle$, где B — полная псевдобулева алгебра, U_0 — непустое множество, $U_1 \subseteq B$ и для каждого типа $\tau = (\tau_1, \ldots,$

$\ldots, \tau_n)$ U_τ есть подмножество множества всех отображений вида

$$U_{\tau_1} \times \ldots \times U_{\tau_n} \to B.$$

5.1. Если $p, q \in U_\tau$, то определим объект $| p = q |$ индукцией по построению типа τ:

1) $\tau = 0$, тогда $| p = q |$ есть единица (наибольший элемент) B в случае совпадения p и q и нуль алгебры B в противном случае.

2) $\tau = 1$, тогда $| p = q | = (p \leftrightarrow q)$, где

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightharpoons (p \supset q) \wedge (q \supset p)$$

и $\supset$, $\wedge$ — операции в псевдобулевой алгебре B.

3) $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, тогда

$$| p = q | \leftrightharpoons \bigwedge \{p (p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow q (p_1, \ldots, p_n) \mid p_1 \in U_{\tau_1}, \ldots, p_n \in U_{\tau_n}\},$$

где пересечение (нижняя грань) берется в смысле алгебры B.

5.2. Модельную структуру A назовем *экстенсиональной*, если для $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $p \in U_\tau$, $p_i, q_i \in U_{\tau_i}$ имеет место

$$| p_1 = q_1 | \wedge \ldots \wedge | p_n = q_n | \wedge p (p_1, \ldots, p_n) \leqslant p (q_1, \ldots, q_n),$$

где $\leqslant$ — естественное частичное упорядочение в алгебре B.

5.3. Лемма. *В экстенсиональной модельной структуре имеют место следующие свойства отношения* $| p = q |$:

a) $| p = p |$ *есть единица алгебры* B;

b) $| p = q | = | q = p |$;

c) $| p = q | \wedge | q = r | \leqslant | p = r |$;

d) $| p = q | \wedge \bigwedge \{| p_i = q_i | \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \wedge p (p_1, \ldots, p_n) \leqslant q (q_1, \ldots, q_n)$.

$\triangleright$ Непосредственной индукцией. $\square$

5.4. Для данной модельной структуры A естественно определяется понятие *оцененного терма* или *A-терма*. А именно, мы расширяем наш язык, добавив к нему для каждого типа τ все элементы области U_τ в качестве новых констант типа τ. Заметим, что мы предполагаем, что вновь введенные константы отличны от остальных элементов языка. Затем определяем понятие терма типа τ в расширенном таким образом языке индуктивно, как в п. 1.4,— это и будут A-термы. Можно представлять себе, что A-термы получаются из обычных термов путем замещения в последних некоторых параметров объектами областей U_τ.

Подобным образом вводится понятие *A-секвенции*, составленной из *A-формул*.

5.5. Будем говорить, что модельная структура A *специализирована* для нашего языка, если

a) каждой константе f типа τ сопоставлен некоторый элемент $\bar{f} \in U_\tau$;

b) каждому n-местному функциональному символу f сопоставлена n-местная функция $\bar{f}\colon U_0 \times \ldots \times U_0 \to U_0$;

c) каждому n-местному предикатному символу P сопоставлена n-местная функция $\bar{P}\colon U_0 \times \ldots \times U_0 \to B$.

Указанное сопоставление называется *специализацией* структуры.

5.6. Если дана специализированная структура, то можно естественно определить частичную функцию, сопоставляющую некоторым замкнутым A-термам *значение*. При этом, если t есть замкнутый A-терм типа τ и значение $| t |$ этого терма определено, то необходимо $| t | \in U_\tau$.

Определение $| t |$ проводится индукцией по построению терма t (см. п. 1.4) и содержит следующие индуктивные пункты:

1) Значение определяется лишь для замкнутых A-термов и не определено для переменных.

2) Если t есть константа языка типа τ, то в соответствии со специализацией структуры положим $| t | = \bar{t}$.

Если $t \in U_\tau$, то положим $| t | = t$.

3) $| f (t_1, \ldots, t_n) | = \bar{f} (| t_1 |, \ldots, | t_n |)$.

4) $| P (t_1, \ldots, t_n) | = \bar{P} (| t_1 |, \ldots, | t_n |)$.

5) $| \varphi \wedge \psi | = | \varphi | \wedge | \psi |$.

6) $| \varphi \vee \psi | = | \varphi | \vee | \psi |$.

7) $| \varphi \supset \psi | = | \varphi | \supset | \psi |$.

8) $| \forall x \varphi | = \bigwedge \{| \varphi (x \mid q) | \mid q \in U_\tau\}$, $x \in \mathrm{Vr}^\tau$.

9) $|\exists x\varphi| = \bigvee \{|\varphi(x \mid q)| \mid q \in U_\tau\}$.

10) $|\lambda x_1 \ldots x_n\varphi|$ есть функция q,

$$q\colon U_{\tau_1} \times \ldots \times U_{\tau_n} \to B,$$

(где переменная x_i типа τ_i) такая, что для всяких $q_i \in U_{\tau_i}$

$$q(q_1, \ldots, q_n) = |\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)|.$$

При этом значение $|\lambda x_1 \ldots x_n\varphi|$ считается определенным, если определены все значения $|\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)|$ и, кроме того, $q \in U_\tau$, где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

11) $|t_1, \ldots, t_n \in t| = |t|(|t_1|, \ldots, |t_n|)$.

При этом для определенности сложного терма необходимо, чтобы были определены значения его соответствующих частей и, кроме того, значение сложного терма попадало в соответствующую область. Например, в 6) значение $|\varphi \vee \psi|$ считается определенным тогда и только тогда, когда определены значения $|\varphi|$ и $|\psi|$ и, кроме того, $|\varphi| \vee |\psi| \in U_1$. В 8) значение $|\forall x\varphi|$ определено тогда и только тогда, когда для всякого $q \in U_\tau$ определено значение $|\varphi(x \mid q)|$ и, кроме того,

$$\bigwedge \{|\varphi(x \mid q)| \mid q \in U_\tau\} \in U_1.$$

Модельную структуру, специализированную для языка, назовем *моделью*, если значение $|t|$ оказывается определенным для всякого замкнутого A-терма.

Естественно определяется и значение $|S|$ замкнутой A-секвенции. Именно, значение секвенции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \to \eta$ есть по определению значение формулы $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \supset \eta$.

5.7. Теорема. *Пусть дана экстенсиональная модель A. Пусть S — секвенция, $\vdash S$ и S' — замкнутая секвенция, получающаяся из S замещением всех свободных переменных S объектами A соответствующих типов. Тогда $|S'|$ есть единица псевдобулевой алгебры модели.*

Этот хорошо известный факт доказывается индукцией по построению вывода $\vdash S$ секвенции S. Заметим, что в этой теореме имеется в виду выводимость в полной системе с сечением.

6. Приступим теперь к определению конкретной модельной структуры A, которая и будет единственной существенной для дальнейшего.

Обозначим через N множество всех наборов формул в смысле п. 1.5. Определим на N частичный порядок $\leqslant$, положив $\Gamma \leqslant \Delta$; если $\Delta \subseteq \Gamma$ как множества с повторениями, т. е. если, во-первых, каждая формула из Δ входит и в Γ и, во-вторых, если Δ содержит k экземпляров формулы φ, а Γ содержит l экземпляров формулы φ, то необходимо $k \leqslant l$.

Множество X, $X \subseteq N$, назовем *полным*, если X удовлетворяет следующим условиям:

1) $\perp \in X$;

2) $\Gamma \in X \Rightarrow \varphi\Gamma \in X$;

3) $\varphi\varphi\Gamma \in X \Rightarrow \varphi\Gamma \in X$;

4) $\psi\Gamma \in X$; $\vdash^+ (\Gamma \to \varphi) \Rightarrow (\varphi \supset \psi)\Gamma \in X$;

5) $\varphi\Gamma \in X \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)\Gamma \in X$;
$\psi\Gamma \in X \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)\Gamma \in X$;

6) $\varphi\Gamma \in X$, $\psi\Gamma \in X \Rightarrow (\varphi \vee \psi)\Gamma \in X$;

7) $\varphi(x \mid t)\Gamma \in X \Rightarrow \forall x\varphi\Gamma \in X$;

8) пусть x — переменная типа τ, не встречающаяся свободно в Γ и такая, что для всякой переменной y типа τ $\varphi(x \mid y)\Gamma \in X$, тогда $\exists x\varphi\Gamma \in X$;

9) $\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n)\Gamma \in X \Rightarrow (t_1, \ldots, t_n \in \lambda x_1 \ldots x_n\varphi)\Gamma \in X$.

Можно заметить, что пересечение любого семейства полных множеств вновь оказывается полным и что само множество N является полным. Отсюда следует, что для всякого множества $X \subseteq N$ существует наименьшее полное множество $\boldsymbol{D}X$, $X \subseteq \boldsymbol{D}X$ (а именно, пересечение всех полных множеств, содержащих X).

Таким образом, возникает набор $M = \langle N, \leqslant, \boldsymbol{D}\rangle$, который, как оказывается, образует алгебру с пополнением, заданную порядковой топологией (п. 2 ч. 3).

Действительно, нужно проверить, что операция $\boldsymbol{D}$ удовлетворяет условиям 1) — 4′) п. 2 ч 3. При этом нетривиальной является лишь проверка условия 4′).

Для двух открытых элементов $X, Y \subseteq N$ операция импликации $(X \supset Y)$ определяется согласно п. 2 ч. 3, пример 6 как $(X \supset Y) = \{\Gamma \in N \mid (\forall\Delta \leqslant \Gamma)(\Delta \in X \Rightarrow \Delta \in Y)\}$. По лемме 2.3 ч. 3 для проверки условия 4′) достаточно убедиться, что элемент $(X \to Y)$ будет полным в M для всяких полного Y и открытого X. С этой целью следует проверить, что для $(X \supset Y)$ выполняются сформулированные выше условия 1) — 10). Проверим, например, выполнение условия 4).

Пусть $\psi\Gamma \in (X \supset Y)$ и $\vdash^{+} \Gamma \to \varphi$; установим, что $(\varphi \supset \psi)\Gamma \in (X \supset Y)$. С этой целью возьмем произвольное $\Delta \leqslant (\varphi \supset \psi)\Gamma$, $\Delta \in X$, и покажем $\Delta \in Y$. Выбранное нами Δ необходимо имеет вид $(\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta'$. Имеем $\psi(\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta' \in X$ ввиду открытости X и $\Delta \in X$. Из $\psi\Gamma \in (X \supset Y)$ тогда следует, что $\psi(\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta' \in Y$. Кроме того, из $\vdash^{+} \Gamma \to \varphi$, очевидно, $\vdash^{+} (\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta' \to \varphi$. Так как Y — полный элемент и, следовательно, удовлетворяет условию 4), отсюда $(\varphi \supset \psi)(\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta' \in Y$. А ввиду условия 3) настоящего пункта $(\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta' \in Y$, т. е. $\Delta \in Y$, что и требовалось доказать.

Псевдобулеву алгебру полных подмножеств N мы обозначим через B.

6.1. Например, для всякой формулы φ множество $X = \{\Gamma \mid \vdash^{+} \Gamma \to \varphi\}$ является элементом алгебры B. Проверка условий полноты непосредственна. Этот элемент удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

a) $\varphi \in X$;

b) $\Gamma \in X \Rightarrow \vdash^{+} \Gamma \to \varphi$.

6.2. Можно дать представление и для наименьшего элемента алгебры, $\boldsymbol{D}(\varnothing)$, а именно, $\boldsymbol{D}(\varnothing) = \{\Gamma \mid \vdash^{+} \Gamma \to \bot\}$.

Действительно, $\boldsymbol{D}(\varnothing) \subseteq \{\Gamma \mid \vdash^{+} \Gamma \to \bot\}$, так как $D(\varnothing)$ — наименьший элемент алгебры. Обратное включение доказывается индукцией по построению вывода $\vdash^{+} \Gamma \to \bot$ секвенции $\Gamma \to \bot$.

7. Припишем теперь каждой формуле φ два элемента алгебры B — *нижнее* и *верхнее значения формулы* φ в B. По определению

$$|\varphi|^{-} = \boldsymbol{D}(\{\varphi\});$$

$$|\varphi|^{+} = \{\Gamma \mid \vdash^{+} \Gamma \to \varphi\}.$$

Кроме того, для всяких двух термов t и r типа τ определим *значение* $|t = r|^{0}$ индукцией по построению типа τ.

1) $\tau = 0$. Тогда $|t = r|^{0}$ есть единица алгебры B в случае совпадения t и r и нуль в случае, если t и r различны.

2) $\tau = 1$. Тогда

$$|t = r|^{0} \rightleftharpoons (|t|^{-} \supset |r|^{+}) \wedge (|r|^{-} \supset |t|^{+}).$$

3) $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Тогда $|t = r|^{0}$ есть $\bigwedge \{|x_1, \ldots, x_n \in r|^{-} \supset |x_1, \ldots, x_n \in t|^{+} \mid x_1 \in \mathrm{Vr}^{\tau_1}, \ldots, x_n \in \mathrm{Vr}^{\tau_n}\} \wedge \bigwedge \{|x_1, \ldots, x_n \in t|^{-} \supset |x_1, \ldots, x_n \in r|^{+} \mid x_1 \in \mathrm{Vr}^{\tau_1}, \ldots, x_n \in \mathrm{Vr}^{\tau_n}\}$ (определение множества Vr^{τ} см. в п. 1.2).

7.1. *Пусть* $\Gamma \in |\eta|^{-}$. *Тогда для всякой формулы* ζ *и всякого набора* Δ *из* $\vdash^{+} \eta\Gamma\Delta \to \zeta$ *следует* $\vdash^{+}\Gamma\Delta \to \zeta$.

Фиксируем формулу η. Определим множество X наборов следующим образом: $\Gamma \in X \Leftrightarrow$ для всякой формулы ζ и всякого набора Δ из $\vdash^{+} \eta\Gamma\Delta \to \zeta$ следует $\vdash^{+} \Gamma\Delta \to \zeta$. Мы утверждаем, что

a) $\eta \in X$. В самом деле, если $\vdash^{+} \eta\eta\Delta \to \zeta$, то (п. 2.4) $\vdash^{+} \eta\Delta \to \zeta$.

b) X — полное множество. Проверим выполнение всех условий п. 6.

1) $\bot \in X$, так как всегда $\vdash^{+} \bot\Delta \to \zeta$ (посылка $\vdash^{+}\eta\bot\Delta\Delta \to \zeta$ здесь не используется).

2) Пусть $\Gamma \in X$; покажем $\varphi\Gamma \in X$. Пусть $\vdash^{+} \eta\varphi\Gamma\Delta \to \zeta$, тогда из $\Gamma \in X$ сразу следует $\vdash^{+} \varphi\Gamma\Delta \to \zeta$ (взяв в качестве «нового» Δ набор $\varphi\Delta$).

3) Пусть $\varphi\varphi\Gamma \in X$; проверим $\varphi\Gamma \in X$. Если $\vdash^{+} \eta\varphi\Gamma\Delta \to \zeta$, то $\vdash^{+} \eta\varphi\varphi\Gamma\Delta \to \zeta$ и $\vdash^{+} \varphi\varphi\Gamma\Delta \to \zeta$ (ввиду $\varphi\varphi\Gamma \in X$). Отсюда $\vdash^{+} \varphi\Gamma\Delta \to \zeta$.

4) Пусть $\psi\Gamma \in X$ и $\vdash^{+} \Gamma \to \varphi$. Установим $(\varphi \supset \psi)\Gamma \in X$. Пусть $\vdash^{+} \eta(\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta \to \zeta$. Тогда $\vdash^{+} \eta\psi\Gamma(\varphi \supset \psi)\Delta \to \zeta$ и из $\psi\Gamma \in X$ следует $\vdash^{+} \psi\Gamma(\varphi \supset \psi)\Delta \to \zeta$. Из данного $\vdash^{+} \Gamma \to \varphi$, очевидно, $\vdash^{+} \Gamma(\varphi \supset \psi)\Delta \to \varphi$. Отсюда (по правилу $(\supset \to)$ п. 2.2) $\vdash^{+} (\varphi \supset \psi)\Gamma(\varphi \supset \psi)\Delta \to \zeta$, что дает $\vdash^{+} (\varphi \supset \psi)\Gamma\Delta \to \zeta$.

5) Пусть $\varphi\Gamma \in X$; покажем $(\varphi \wedge \psi)\Gamma \in X$. Пусть $\vdash^{+} \eta(\varphi \wedge \psi)\Gamma\Delta \to \zeta$. Тогда $\vdash^{+} \eta\varphi\Gamma(\varphi \wedge \psi)\Delta \to \zeta$ и из $\varphi\Gamma \in X$ имеем $\vdash^{+} \varphi\Gamma(\varphi \wedge \psi)\Delta \to \zeta$. Отсюда (по правилу $(\wedge \to)$ п. 2.2) $\vdash^{+} (\varphi \wedge \psi)\Gamma(\varphi \wedge \psi)\Delta \to \zeta$, что дает $\vdash^{+} (\varphi \wedge \psi)\Gamma\Delta \to \zeta$.

6) Пусть $\varphi\Gamma \in X$ и $\psi\Gamma \in X$; покажем $(\varphi \vee \psi)\Gamma \in X$. Пусть $\vdash^{+} \eta(\varphi \vee \psi)\Gamma\Delta \to \zeta$. Тогда $\vdash^{+} \eta\varphi\Gamma(\varphi \vee \psi)\Delta \to \zeta$. Из $\varphi\Gamma \in X$ следует $\vdash^{+} \varphi\Gamma(\varphi \vee \psi)\Delta \to \zeta$. Аналогич-

но установим $\vdash^+ \psi\Gamma(\varphi\vee\psi)\Delta\to\zeta$. Отсюда (по правилу $(\vee\to)$ п. 2.2) $\vdash^+(\varphi\vee\psi)\Gamma(\varphi\vee\psi)\Delta\to\zeta$ и, далее, $\vdash^+(\varphi\vee\psi)\Gamma\Delta\to\zeta$.

7) Пусть $\varphi(x\mid t)\Gamma\in X$; установим $\forall x\varphi\Gamma\in X$. Допустим $\vdash^+\eta\forall x\varphi\Gamma\Delta\to\zeta$. Тогда $\vdash^+\eta\varphi(x\mid t)\Gamma\forall x\varphi\Delta\to\zeta$ и из $\varphi(x\mid t)\Gamma\in X$ имеем $\vdash^+\varphi(x\mid t)\Gamma\forall x\varphi\Delta\to\zeta$. Отсюда (по правилу $(\forall\to)$ п. 2.2) $\vdash^+\forall x\varphi\Gamma\forall x\varphi\Delta\to\zeta$ и, далее, $\vdash^+\forall x\varphi\Gamma\Delta\to\zeta$.

8) Пусть $\varphi(x\mid y)\Gamma\in X$ для всякой переменной y типа, совпадающего с типом переменной x. Покажем $\exists x\varphi\Gamma\in X$. Пусть $\vdash^+\eta\exists x\varphi\Gamma\Delta\to\zeta$. Выберем переменную y, не входящую свободно в рассматриваемую секвенцию. Имеем $\vdash^+\varphi(x\mid y)\Gamma\exists x\varphi\Delta\eta\to\zeta$. Ввиду $\varphi(x\mid y)\Gamma\in X$ отсюда $\vdash^+\varphi(x\mid y)\Gamma\exists x\varphi\Delta\to\zeta$. Отсюда (по правилу $(\exists\to)$ п. 2.2) $\vdash^+\exists y\varphi(x\mid y)\Gamma\exists x\varphi\Delta\to\zeta$. Ввиду нашего соглашения о свободном переименовании связанных переменных (п. 1.4) отсюда $\vdash^+\exists x\varphi\Gamma\exists x\varphi\Delta\to\zeta$ и, далее, $\vdash^+\exists x\varphi\Gamma\Delta\to\zeta$.

9) Пусть $\varphi(x_1,\ldots,x_n\mid t_1,\ldots,t_n)\Gamma\in X$; докажем $(t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi)\Gamma\in X$. Пусть $\vdash^+\eta(t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi)\Gamma\Delta\to\zeta$. Тогда $\vdash^+\eta\varphi(x_1,\ldots,x_n\mid t_1,\ldots,t_n)\Gamma(t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi)\Delta\to\zeta$. По допущению отсюда $\vdash^+\varphi(x\mid t)\Gamma(t\in\lambda x_n\varphi)\Delta\to\zeta$. Отсюда по правилу $(\in\to)$ п. 2.2 и затем по правилу сокращения $\vdash^+(t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi)\Gamma\Delta\to\zeta$. Утверждение b) доказано. Из a) и b) и минимальности $|\eta|^-$ следует $|\eta|^-\subseteq X$, что и доказывает лемму. □

8. Теорема. *Выполняются следующие пятнадцать условий:*

1) $|\varphi|^-\leqslant|\varphi|^+$;

2) $|\varphi\wedge\psi|^-\leqslant|\varphi|^-\wedge|\psi|^-$;

3) $|\varphi|^+\wedge|\psi|^+\leqslant|\varphi\wedge\psi|^+$;

4) $|\varphi\vee\psi|^-\leqslant|\varphi|^-\vee|\psi|^-$;

5) $|\varphi|^+\vee|\psi|^+\leqslant|\varphi\vee\psi|^+$;

6) $|\varphi\supset\psi|^-\leqslant|\varphi|^+\supset|\psi|^-$;

7) $|\varphi|^-\supset|\psi|^+\leqslant|\varphi\supset\psi|^+$;

8) $|\bot|^-=|\bot|^+\leqslant|\varphi|^-$;

9) $|\forall x\varphi|^-\leqslant\bigwedge\{|\varphi(x\mid t)|^-\mid t\in \mathrm{Tm}^\tau\}$;

10) $\bigwedge\{|\varphi(x\mid y)|^+\mid y\in \mathrm{Vr}^\tau\}\leqslant|\forall x\varphi|^+$;

11) $|\exists x\varphi|^-\leqslant\bigvee\{|\varphi(x\mid y)|^-\mid y\in \mathrm{Vr}^\tau\}$;

12) $\bigvee\{|\varphi(x\mid t)|^+\mid t\in \mathrm{Tm}^\tau\}\leqslant|\exists x\varphi|^+$;

13) $|t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi|^-\leqslant|\varphi(x_1,\ldots,x_n\mid t_1,\ldots,t_n)|^-$;

14) $|\varphi(x_1,\ldots,x_n\mid t_1,\ldots,t_n)|^+\leqslant|t_1,\ldots,t_n\in\lambda x_1\ldots x_n\varphi|^+$;

15) если f есть переменная или константа типа $(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, то для всяких t_i, r_i типа τ_i имеем $\bigwedge\{|t_i=r_i|^0\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\wedge|t_1,\ldots,t_n\in f|^-\leqslant|r_1,\ldots,r_n\in f|^+$.

▷ 1) Очевидно, ввиду минимальности и п. 6.1.

2) Из определений $\varphi\in|\varphi|^-$. Ввиду 5) п.6 отсюда $(\varphi\wedge\psi)\in|\varphi|^-$. Подобным образом $(\varphi\wedge\psi)\in|\psi|^-$. Отсюда $(\varphi\wedge\psi)\in|\varphi|^-\wedge|\psi|^-$, т. е. $|\varphi\wedge\psi|^-\leqslant|\varphi|^-\wedge|\psi|^-$.

3) Если $\Gamma\in|\varphi|^+$, то $\vdash^+\Gamma\to\varphi$. Аналогично, если $\Gamma\in|\psi|^+$, то $\vdash^+\Gamma\to\psi$. Таким образом, из $\Gamma\in|\varphi|^+\wedge|\psi|^+$ следует $\vdash^+\Gamma\to\varphi\wedge\psi$ (по правилу $(\to\wedge)$ п. 2.2), т. е. $\Gamma\in|\varphi\wedge\psi|^+$.

4) Из определения $\varphi\in|\varphi|^-$, $\psi\in|\psi|^-$. Но $|\varphi|^-\subseteq|\varphi|^-\vee|\psi|^-$ и $|\psi|^-\subseteq|\varphi|^-\vee|\psi|^-$, так что φ и ψ принадлежат $|\varphi|^-\vee|\psi|^-$, т. е. согласно 6) п. 6 тогда $(\varphi\vee\psi)\in|\varphi|^-\vee|\psi|^-$, т. е. $|\varphi\vee\psi|^-\leqslant|\varphi|^-\vee|\psi|^-$.

5) Если $\Delta\in|\varphi|^+$, то $\vdash^+\Delta\to\varphi$ и (по правилу $(\to\vee)$ п. 2.2) $\vdash^+\Delta\to\varphi\vee\psi$. Таким образом, $|\varphi|^+\subseteq|\varphi\vee\psi|^+$. Аналогично, $|\psi|^+\subseteq|\varphi\vee\psi|^+$. Но тогда $|\varphi|^+\vee|\psi|^+\subseteq|\varphi\vee\psi|^+$.

6) Достаточно показать, что $(\varphi\supset\psi)\in|\varphi|^+\supset|\psi|^-$. Согласно определению импликации в B (см. п. 6) с этой целью рассмотрим набор $(\varphi\supset\psi)\Delta\in|\varphi|^+$ и покажем $(\varphi\supset\psi)\Delta\in|\psi|^-$. Из допущения следует $\vdash^+(\varphi\supset\psi)\Delta\to\varphi$. Кроме того, $\psi\in|\psi|^-$ и, значит (п. 6.2), $\psi(\varphi\supset\psi)\Delta\in|\psi|^-$. Согласно 4) п. 6 отсюда $(\varphi\supset\psi)(\varphi\supset\psi)\Delta\in|\psi|^-$ и ввиду 3) п. 6 $(\varphi\supset\psi)\Delta\in|\psi|^-$.

7) Пусть $\Gamma\in|\varphi|^-\supset|\psi|^+$. Так как $\varphi\in|\varphi|^-$, то $\varphi\Gamma\in|\varphi|^-$ и отсюда $\varphi\Gamma\in|\psi|^+$. Из определений тогда $\vdash^+\varphi\Gamma\to\psi$. Но тогда (по правилу $(\to\supset)$ п. 2.2) $\vdash^+\Gamma\to(\varphi\supset\psi)$, т. е. $\Gamma\in|\varphi\supset\psi|^+$.

8) Очевидно ввиду п. 6.2.

9) Имеем $\varphi(x\mid t)\in|\varphi(x\mid t)|^-$. Согласно 7) п. 6 тогда $\forall x\varphi\in|\varphi(x\mid t)|^-$. Отсюда $\forall x\varphi\in\bigwedge\{|\varphi(x\mid t)|^-\mid t\in \mathrm{Tm}^\tau\}$.

10) Пусть $\Gamma \in \bigwedge \{ |\varphi(x \mid y)|^+ \mid y \in \mathrm{Vr}^\tau \}$. Выберем переменную y, отличную от всех свободных переменных Γ и φ. По допущению $\Gamma \in |\varphi(x \mid y)|^+$, т. е. $\vdash^+ \Gamma \to \varphi(x \mid y)$. Тогда (по правилу $(\to \forall)$ п. 2.2) $\vdash^+ \Gamma \to \forall y\, \varphi(x \mid y)$. Ввиду нашего соглашения относительно свободного переименования связанных переменных (п. 1.4) $\vdash^+ \Gamma \to \forall x \varphi$, т. е. $\Gamma \in |\forall x \varphi|^+$.

11) Пусть $X = \bigvee \{ |\varphi(x \mid y)|^- \mid y \in \mathrm{Vr}^\tau \}$. Так как $\varphi(x \mid y) \in |\varphi(x \mid y)|^-$, то ввиду 8) п. 6 имеем $\exists x \varphi \in X$, т. е. $|\exists x\, \varphi|^- \subseteq X$.

12) Если $\Gamma \in |\varphi(x \mid t)|^+$, то $\vdash^+ \Gamma \to \varphi(x \mid t)$ и (по правилу $(\to \exists)$ п. 2.2) $\vdash^+ \Gamma \to \exists x \varphi$, т. е. $\Gamma \in |\exists x\, \varphi|^+$. Таким образом, для любого $t \in \mathrm{Tm}^\tau$ $|\varphi(x \mid t)|^+ \subseteq |\exists x \varphi|^+$. Но тогда $\bigvee \{ |\varphi(x \mid t)|^+ \mid t \in \mathrm{Tm}^\tau \} \subseteq |\exists x \varphi|^+$.

13) Из определений $\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n) \in |\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n)|^-$. Но согласно 9) п. 6 тогда $(t_1, \ldots, t_n \in \lambda x_1 \ldots x_n \varphi) \in |\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n)|^-$.

14) Пусть $\Gamma \in |\varphi(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n)|^+$, т. е. $\vdash^+ \Gamma \to \varphi(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n)$. Тогда (по правилу $(\to \in)$ п. 2.2) $\vdash^+ \Gamma \to (t_1, \ldots, t_n \in \lambda x_1 \ldots x_n \varphi)$, т. е. $\Gamma \in |t_1, \ldots, t_n \in \lambda x_1 \ldots x_n \varphi|^+$.

15) Предположим для простоты записи $n = 1$. Необходимо показать $|t_1 = r_1|^0 \wedge |t_1 \in f|^- \leqslant |r_1 \in f|^+$. Здесь f — переменная или константа типа τ, $\tau = (\tau_1)$. Разберем случаи в зависимости от вида τ_1.

$\tau_1 = 0$. Если t_1 и r_1 не совпадают, то $|t_1 = r_1|^0$ есть нуль B и неравенство очевидно. Если же t_1 совпадает с r_1, то $|t_1 = r_1|^0$ есть единица и наше неравенство превращается в $|t_1 \in f|^- \leqslant |t_1 \in f|^+$, уже отмеченное в случае 1) доказываемой теоремы.

$\tau_1 = 1$. Тогда $|t_1 = r_1|^0 = (|t_1|^- \supset |r_1|^+) \wedge (|r_1|^- \supset |t_1|^+)$. Пусть $\Gamma \in |t_1 = r_1|^0$ и $\Gamma \in |t_1 \in f|^-$. Очевидно, $t_1\Gamma \in |t_1|^-$ и $r_1\Gamma \in |r_1|^-$. Ввиду $\Gamma \in |t_1 = r_1|^0$ отсюда $t_1\Gamma \in |r_1|^+$ и $r_1\Gamma \in |t_1|^+$, что дает $\vdash^+ t_1\Gamma \to r_1$ и $\vdash^+ r_1\Gamma \to t_1$. По правилу объемности (п. 2.3) отсюда $\vdash^+ (t_1 \in f)\Gamma \to (r_1 \in f)$. По лемме п. 7.1 из $\Gamma \in |t_1 \in f|^-$ следует $\vdash^+ \Gamma \to (r_1 \in f)$. Таким образом, $\Gamma \in |r_1 \in f|^+$.

$\tau_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. Вновь для простоты записи положим $k = 1$. Имеем $|t_1 = r_1|^0 = \bigwedge \{ |x \in t_1|^- \supset |x \in r_1|^+ \mid x \in \mathrm{Vr}^{\sigma_1} \} \wedge \bigwedge \{ |x \in r_1|^- \supset |x \in t_1|^+ \mid x \in \mathrm{Vr}^{\sigma_1} \}$. Пусть $\Gamma \in |t_1 = r_1|^0$ и $\Gamma \in |t_1 \in f|^-$. Выберем переменную x, не входящую

в рассматриваемые термы. Очевидно, $(x \in t_1)\Gamma \in |x \in t_1|^-$ и $(x \in r_1)\Gamma \in |x \in r_1|^-$. Ввиду $\Gamma \in |t_1 = r_1|^0$ отсюда $(x \in t_1)\Gamma \in |x \in r_1|^+$ и $(x \in r_1)\Gamma \in |x \in t_1|^+$. Отсюда $\vdash^+ (x \in t_1)\, \Gamma \to (x \in r_1)$, $\vdash^+ (x \in r_1)\, \Gamma \to (x \in t_1)$. По правилу объемности (п. 2.3) отсюда $\vdash^+ (t_1 \in f)\, \Gamma \to (r_1 \in f)$. По лемме п. 7.1 ввиду $\Gamma \in |t_1 \in f|^-$ тогда $\vdash^+ \Gamma \to (r_1 \in f)$, т. е. $\Gamma \in |r_1 \in f|^+$. □

Доказанная теорема показывает, что введенные нами операции $|\varphi|^-$ и $|\varphi|^+$ образуют по терминологии Такахаси [3] *полуоценку* (ср. с. 128). Теорема позволяет воспользоваться готовым алгебраическим методом Такахаси [3], модифицированный вариант которого мы и воспроизведем в пп. 9—12. Конкретные особенности именно нашей полуоценки начинают играть роль лишь с п. 13, где наше рассуждение опять отлично от использованного в вышеупомянутой работе. Именно, путем построения специальной полуоценки п. 8 мы избегаем неинтуиционистского рассуждения от противного.

9. Определим семейство *объектных областей* $\{U_\tau\}_\tau$ индукцией по построению типа τ. В действительности мы будем одновременно определять три вида объектов:

a) множество U_τ;

b) функцию $|p = q|$ вида $U_\tau \times U_\tau \to B$;

c) бинарное отношение $p \approx t$ между элементами U_τ и термами типа τ.

При этом функция $|p = q|$ окажется той же, что и в п. 5.1.

1) $\tau = 0$. U_0 есть множество всех объектов вида $[t]$, где t — произвольный терм типа 0. $|[t] = [r]|$ есть единица или нуль алгебры B в зависимости от того, совпадают или различны термы t и r. Отношение $[t] \approx r$ имеет место тогда и только тогда, когда t и r совпадают.

2) $\tau = 1$. Если $X \in B$ и φ — формула, то положим $X \approx \varphi$ по определению, если $|\varphi|^- \leqslant X \leqslant |\varphi|^+$. Далее, $X \in U_1$ тогда и только тогда, когда $X \in B$ и существует формула φ такая, что $X \approx \varphi$. Наконец, положим $|X = Y| \rightleftharpoons (X \leftrightarrow Y)$ в алгебре B (см. п. 5.1).

3) $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Пусть q есть функция вида $U_{\tau_1} \times \ldots \times U_{\tau_n} \to B$ и t — терм типа τ. Будем считать $q \approx t$, если для всяких $q_1 \in U_{\tau_1}, \ldots, q_n \in U_{\tau_n}$ и для всяких термов

$t_1, \ldots, t_n$ таких, что $q_i \approx t_i$, имеем

$$q(q_1, \ldots, q_n) \approx (t_1, \ldots, t_n \in t)$$

в смысле предыдущего пункта.

В качестве U_τ возьмем множество функций q вида $U_{\tau_1} \times \ldots \times U_{\tau_n} \to B$, которые, во-первых, *экстенсиональны*, т. е. для всяких $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ в B выполняется неравенство

$$|p_1 = q_1| \wedge \ldots \wedge |p_n = q_n| \wedge q(q_1, \ldots, q_n) \leqslant q(p_1, \ldots, p_n),$$

и, во-вторых, для каждого $q \in U_\tau$ найдется терм t типа τ такой, что $q \approx t$.

Наконец, если $q, r \in U_\tau$, то определим

$$|q = r| \leftrightharpoons \bigwedge \{q(q_1, \ldots, q_n) \leftrightarrow r(q_1, \ldots, q_n) \mid q_1 \in U_{\tau_1}, \ldots, q_n \in U_{\tau_n}\}.$$

Таким образом, определена модельная структура $\langle B, \{U_\tau\}\rangle$. Из определений непосредственно ясно, что она является экстенсиональной в смысле п. 5.2.

10. *Пусть τ — тип, тогда*

a) *если f — переменная или константа типа τ, то найдется элемент $q \in U_\tau$ такой, что $q \approx f$;*

b) *если $p, q \in U_\tau$, $t, r \in \mathrm{Tm}^\tau$, причем $p \approx t$ и $q \approx r$, то*

$$|p = q| \leqslant |t = r|^0.$$

$\triangleright$Оба утверждения леммы будем доказывать одновременно индукцией по построению типа τ.

$\tau = 0$.

a) Возьмем $q = [f]$.

b) Если $p \approx t$ и $q \approx r$, то $p = [t]$, $q = [r]$ и $|p = q| = |t = r|^0$ из определений п. 7 и п. 9.

$\tau = 1$.

a) Возьмем, например, $q = |f|^-$, тогда, согласно 2) п. 9 и 1) п. 8, $q \approx f$.

b) Из $p \approx t$ и $q \approx r$ следует $|t|^- \leqslant p \leqslant |t|^+$ и $|r|^- \leqslant q \leqslant |r|^+$. Отсюда $(p \supset q) \leqslant (|t|^- \supset |r|^+)$ и $(q \supset p) \leqslant (|r|^- \supset |t|^+)$. Из определений имеем $|p = q| \leqslant |t = r|^0$.

$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

a) Определим предварительно функцию

$$q'\colon U_{\tau_1} \times \ldots \times U_{\tau_n} \to B,$$

положив

$q'(q_1, \ldots, q_n) = \bigvee \{|t_1, \ldots, t_n \in f|^- \mid t_i \in \mathrm{Tm}^{\tau_i},\ q_i \approx t_i\}.$
Эта функция, однако, вообще говоря, не экстенсиональна. Поэтому мы возьмем в качестве искомой другую функцию q, определив

$$q(q_1, \ldots, q_n) = \bigvee \{q'(p_1, \ldots, p_n) \wedge \bigwedge_i |q_i = p_i| \mid p_j \in U_{\tau_j}\}.$$

Положим далее для упрощения записи $n = 1$. Функция q уже экстенсиональна. В самом деле,

$$|p_1 = q_1| \wedge q(q_1) = |p_1 = q_1| \wedge \bigvee \{|q_1 = p_1'| \wedge q'(p_1') \mid p_1' \in U_{\tau_1}\} =$$
$$\bigvee \{|p_1 = q_1| \wedge |q_1 = p_1'| \wedge q'(p_1') \mid p_1' \in U_{\tau_1}\} \leqslant \bigvee \{|p_1 = p_1'| \wedge q'(p_1') \mid p_1' \in U_{\tau_1}\} = q(p_1).$$

Здесь мы воспользовались п. 5.3. Покажем теперь, что $q \approx f$. Возьмем произвольные $q_1 \in U_{\tau_1}$, $r_1 \in \mathrm{Tm}^{\tau_1}$, $q_1 \approx r_1$ и покажем $q(q_1) \approx (r_1 \in f)$. С этой целью необходимо установить

$$|r_1 \in f|^- \leqslant q(q_1) \leqslant |r_1 \in f|^+.$$

Но $q(q_1) = \bigvee \{|q_1 = p_1| \wedge q'(p_1) \mid p_1 \in U_{\tau_1}\} = \bigvee \{|q_1 = p_1| \wedge |t_1 \in f|^- \mid p_1 \in U_{\tau_1},\ t_1 \in \mathrm{Tm}^{\tau_1},\ p_1 \approx t_1\}$. Отсюда $|r_1 \in f|^- \leqslant |q_1 = q_2| \wedge |r_1 \in f|^- \leqslant q(q_1)$ ввиду $q_1 \approx r_1$. Кроме того, если $p_1 \approx t_1$, то

$$|q_1 = p_1| \wedge |t_1 \in f|^- \leqslant |r_1 \in f|^+.$$

Действительно, $|q_1 = p_1| \leqslant |r_1 = t_1|^0$ по индуктивному предположению леммы, а $|r_1 = t_1|^0 \wedge |t_1 \in f|^- \leqslant |r_1 \in f|^+$ ввиду 15) п. 8 и п. 5.3. Отсюда непосредственно

$$q(q_1) \leqslant |r_1 \in f|^+.$$

b) Пусть $p \approx t$ и $q \approx r$. Возьмем произвольную переменную $x_1 \in \mathrm{Vr}^{\tau_1}$. По индуктивному предположению леммы найдется $q_1 \in U_{\tau_1}$, $q_1 \approx x_1$. Тогда $p(q_1) \approx (x_1 \in t)$ и $q(q_1) \approx (x_1 \in r)$. Рассуждая, как и в случае $\tau = 1$, b), установим $(p(q_1) \supset q(q_1)) \leqslant |x_1 \in t|^- \supset |x_1 \in r|^+$. Но $|p = q| \leqslant$

$p(q_1) \supset q(q_1)$ (см. п. 5.1), так что

$$|p = q| \leqslant |x_1 \in t|^- \supset |x_1 \in r|^+.$$

Аналогично, $|p = q| \leqslant |x_1 \in r|^- \supset |x_1 \in t|^+$. Так как переменная x_1 произвольна, то из определения 3) п. 7

$$|p = q| \leqslant |t = r|^0. \square$$

11. Специализируем теперь нашу модельную структуру (п. 9).

Каждой константе f типа τ нашего языка сопоставим элемент $\bar{f} \in U_\tau$, $\bar{f} \approx f$, построенный в доказательстве леммы п. 10.

Каждому n-местному функциональному символу f сопоставим функцию $\bar{f}$, положив

$$\bar{f}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)].$$

Каждому n-местному предикатному символу P сопоставим функцию $\bar{P}$, положив

$$\bar{P}([t_1], \ldots, [t_n]) = |P(t_1, \ldots, t_n)|^-.$$

Тем самым согласно п. 5.6 возникает частичная функция, сопоставляющая значение замкнутым A-термам. Мы покажем ниже (п. 12), что эта функция определена для всякого терма и, таким образом, определенная в п. 9 и п. 11 специализированная модельная структура является моделью.

12. Теорема. *Пусть t — терм, $x_1, \ldots, x_n$ — список различных переменных, среди членов которого содержатся все свободные переменные t. Пусть $q_1', \ldots, q_n'$ и $q_1'', \ldots, q_n''$ — два списка объектов типов, соответствующих списку переменных. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — список термов такой, что $q_i' \approx t_i$, $q_i'' \approx t_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Пусть t' и t'' — оцененные термы:*

$$t' = t(x_1, \ldots, x_n \mid q_1', \ldots, q_n'),$$
$$t'' = t(x_1, \ldots, x_n \mid q_1'', \ldots, q_n'').$$

Пусть $t^* = t(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n)$.

Тогда

a) *значения $|t'|$, $|t''|$ определены;*

b) $|t'| \approx t^*$, $|t''| \approx t^*$;

c) $\bigwedge_{i=1}^n |q_i' = q_i''| \leqslant ||t'| = |t''||$.

$\triangleright$ Индукцией по построению t в соответствии с п. 1.4.

1) Если t есть переменная, $t = x_i$, то $t' = q_i'$ и $t'' = q_i''$ и утверждения теоремы тривиальны.

2) Если t есть константа языка, $t = f$, то $t' = t'' = t$ и значение $|t|$ определено (п. 5.6).

3) t типа 0, $t = f(r_1, \ldots, r_k)$, утверждение очевидно из определений (см. 3) п. 5.6 и п. 9).

4) $t = P(r_1, \ldots, r_k)$, где P — k-местный предикатный символ и $r_1, \ldots, r_k$ типа 0. Утверждение следует из определений (п. 9 и п. 11) и утверждения 1) теоремы п. 8.

5—7) строения t согласно п. 1.4 рассматриваются сходным образом. Пусть, например, $t = (\varphi \supset \psi)$. Тогда $|t'| = |\varphi' \supset \psi'| = (|\varphi'| \supset |\psi'|)$. Последнее значение определено, так как по индуктивному предположению определены $|\varphi'|$ и $|\psi'|$. Кроме того, из $|\varphi'| \approx \varphi^*$ и $|\psi'| \approx \psi^*$ следует $|\varphi^*|^- \leqslant |\varphi'| \leqslant |\varphi^*|^+$ и $|\psi^*|^- \leqslant |\psi'| \leqslant |\psi^*|^+$. Отсюда, используя утверждения 6) и 7) теоремы п. 8, имеем $|\varphi^* \supset \psi^*|^- \leqslant |\varphi^*|^+ \supset |\psi^*|^- \leqslant |\varphi'| \supset |\psi'| \leqslant |\varphi^*|^- \supset |\psi^*|^+ \leqslant |\psi^* \supset \psi^*|^+$, что доказывает $|\varphi' \supset \psi'| \approx (\varphi^* \supset \psi^*)$ и устанавливает $|\varphi' \supset \psi'| \in U_1$, т. е. определенность $|\varphi' \supset \psi'|$.

Подобным образом, $|t''| \in U_1$, $|t''| \approx t^*$. Пусть здесь и ниже $s \leftrightharpoons \bigwedge_{i=1}^n |q_i' = q_i''|$. По индуктивному предположению $s \leqslant ||\varphi'| = |\varphi''||$ и $s \leqslant ||\psi'| = |\psi''||$. Но по определению (п. 5.1)

$$||\varphi'| = |\varphi''|| = (|\varphi'| \supset |\varphi''|) \wedge (|\varphi''| \supset |\varphi'|)$$

и аналогично для $||\psi'| = |\psi''||$. Отсюда с помощью несложных алгебраических выкладок

$$s \leqslant |(|\varphi'| \supset |\psi'|) = (|\varphi''| \supset |\psi''|)|,$$

т. е. $s \leqslant ||t'| = |t''||$.

Случаи 8), 9) строения t рассматриваются сходным образом. Пусть, например, $t = \exists x\varphi$. Тогда $|t'| = \bigvee\{|\varphi'(x \mid q)| \mid q \in U_\tau\}$. Последняя верхняя грань существует, так как по индуктивному предположению определены все $|\varphi'(x \mid q)|$ и наша псевдобулева алгебра B полная. Если $q \in U_\tau$, то по определению U_τ (п. 9) найдется терм r типа τ, $q \approx r$. По индуктивному предположению

$|\varphi'(x \mid q)| \approx \varphi^*(x \mid r)$, т. е.

$$|\varphi^*(x \mid r)|^- \leqslant |\varphi'(x \mid q)| \leqslant |\varphi^*(x \mid r)|^+.$$

Согласно 11) и 12) п. 5.8, далее,

$$|\exists x\varphi^*|^- \leqslant \bigvee\{|\varphi^*(x \mid y)|^- \mid y \in \mathrm{Vr}^\tau\} \leqslant \bigvee\{|\varphi'(x \mid q)| \mid q \in U_\tau\} = |\exists x\varphi'| \leqslant \bigvee\{|\varphi^*(x \mid r)|^+ \mid r \in \mathrm{Tm}^\tau\} \leqslant |\exists x\varphi^*|^+.$$

Здесь мы использовали еще, что для всякой переменной $y \in \mathrm{Vr}^\tau$ существует $q \in U_\tau$, $q \approx y$ (лемма п. 10). Таким образом, доказано $|t'| \approx t^*$ и установлена определенность $|t'|$. Подобным образом $|t''| \in U_1$, $|t''| \approx t^*$.

По индуктивному предположению для всякого элемента $q \in U_\tau$

$$s = s \wedge |q = q| \leqslant ||\varphi'(x \mid q)| = |\varphi''(x \mid q)||$$

Отсюда с помощью несложных преобразований в нашей псевдобулевой алгебре $s \leqslant ||\exists x\varphi'| = |\exists x\varphi''||$.

10) Пусть $t = \lambda y_1 \ldots y_m\varphi$. Для простоты записи мы положим далее $m = 1$. Пусть x_1 — переменная типа τ_1. Определим функцию $q'\colon U_{\tau_1} \to B$, положив для всякого $q_1 \in U_{\tau_1}$ $q'(q_1) = |\varphi'(y_1 \mid q_1)|$. Заметим, что по индуктивному предположению $|\varphi'(y_1 \mid q_1)|$ определено при всяком $q_1 \in U_{\tau_1}$. Кроме того, по пункту с) индуктивного предположения теоремы функция q' экстенсиональна в смысле п. 9.

Покажем, что $q' \approx t^*$. Возьмем произвольные элементы $q_1 \in U_{\tau_1}$ и $r_1 \in \mathrm{Tm}^{\tau_1}$, $q_1 \approx r_1$, установим $q'(q_1) \approx (r_1 \in t^*)$, т. е.

$$|r_1 \in \lambda y_1\varphi^*|^- \leqslant |\varphi'(y_1 \mid q_1)| \leqslant |r_1 \in \lambda y_1\varphi^*|^+.$$

Действительно, в силу утверждений 13) и 14) теоремы п. 5.8 и индуктивного предположения получим

$$|r_1 \in \lambda y_1\varphi^*|^- \leqslant |\varphi^*(y_1 \mid r_1)|^- \leqslant |\varphi'(y_1 \mid q_1)| \leqslant \varphi^*(y_1 \mid r_1)|^+ \leqslant |r_1 \in \lambda y_1\varphi^*|^+.$$

Это указывает, что $q' \in U_\tau$ и, таким образом, определено $|t'| = q'$ и $|t'| \approx t^*$. Докажем $s \leqslant |q' = q''|$. С этой целью достаточно показать, что для всякого $q_1 \in U_{\tau_1}$ $s \leqslant |q'(q_1) = q''(q_1)|$. Но это следует из индуктивного предположения:

$$s \leqslant s \wedge |q_1 = q_2| \leqslant ||\varphi'(y_1 \mid q_1)| = |\varphi''(y_1 \mid q_1)|| = |q'(q_1) = q''(q_1)|.$$

11) Пусть $t = (r_1, \ldots, r_k \in r)$. В качестве значения положим $|t'| = |r'|(|r_1'|, \ldots, |r_k'|)$. Заметим, что $|t'|$ определено и $|t'| \in U_1$, так как по индуктивному предположению определены все $|r_i'|$ и $|r'|$. $|t'| \approx t^*$ следует непосредственно из индуктивного предположения $|r'| \approx r^*$, $|r_i'| \approx r_i^*$ и того, что $|r'|$ принадлежит объектной области и, следовательно, есть экстенсиональная функция (см. п. 9). Подобным образом установим $|t''| \approx t^*$.

$s \leqslant ||t'| = |t''||$ следует из индуктивного предположения, экстенсиональности $|r'|$, $|r''|$ и свойств равенства п. 5.3.

13. Пусть S — секвенция вида $\Gamma \to \eta$, где Γ есть набор $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Выберем для каждой свободной переменной x типа τ секвенции S некоторый объект $q \in U_\tau$, $q \approx x$ (лемма п. 10). Пусть S' есть результат замещения всех параметров соответствующими объектами. Таким образом, S' есть замкнутая A-секвенция. Согласно п. 12 определено значение $|S'|$. Если теперь $\vdash S$, то ввиду п. 5.7 это значение $|S'|$ равно единице алгебры B. Это означает, что имеет место включение

$$|\varphi_1'| \wedge \ldots \wedge |\varphi_n'| \subseteq |\eta'|.$$

Заметим, далее, что $\Gamma \in |\varphi_i'|$ при каждом i. В самом деле, $\varphi_i \in |\varphi_i|^-$ и, следовательно, $\Gamma \in |\varphi_i|^-$, так как $\Gamma \leqslant \varphi_i$. Но $|\varphi_i'| \approx \varphi_i$ (ввиду п. 12), так что $|\varphi_i|^- \leqslant |\varphi_i'|$. Ввиду вышеупомянутого включения отсюда $\Gamma \in |\eta'|$. Но $|\eta'| \approx \eta$, так что $|\eta'| \leqslant |\eta|^+$. Таким образом, $\Gamma \in |\eta|^+$, что означает $\vdash {}^+\Gamma \to \eta$.

14. Теорема. *Если S — секвенция и $\vdash S$, то $\vdash {}^+S$.*

ДОПОЛНЕНИЕ А

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛЯМ ТИПА РЕАЛИЗУЕМОСТИ

При исследовании интуиционистских теорий мы употребляли два вида структур — модели типа реализуемости r, r_1— r_{15} и алгебраические модели типа ВК-моделей, топологических моделей и т. п. Естественно попытаться рассматривать модели того и другого типа с некоторой единой алгебраической точки зрения. Такой подход имеет важные преимущества. Например, возникает возможность использовать общие алгебраические конструкции такие, как прямое произведение, предел прямого и обратного спектров, ультрапроизведение, для построения «гибридных» моделей из данных моделей типа реализуемости и моделей типа моделей Крипке.

Алгебраическое исследование моделей типа реализуемости приводит к рассмотрению существенно неполных псевдобулевых алгебр, нижние и верхние грани в которых заведомо существуют лишь для некоторых семейств элементов, определяемых структурой языка теории. Поэтому необходимо предложить систематические методы построения и изучения таких неполных алгебр. Ниже мы предложим некоторый вариант такого рассмотрения (Драгалин [11]), несколько напоминающий цилиндрические алгебры Генкина и Тарского [1] или полиадические алгебры Халмоша [1] и рассмотрим важнейшие реализуемости.

1. *Функциональная псевдобулева алгебра* задается набором $\langle B, \hat{D}, F\rangle$, где B — псевдобулева алгебра (алгебра *истинностных значений*), $\hat{D}$ есть двуместная функция с непустой областью определения и со значениями в алгебре B. Непустое множество $V = \{\pi \mid \exists q\, ((\pi, q) \in \mathrm{Dom}\,\hat{D})\}$ мы назовем *множеством сортов объектов* алгебры. Для каждого $\pi \in V$ множество $D_\pi = \{q \mid (\pi, q) \in \mathrm{Dom}\,\hat{D}\}$ назовем *предметной* (или *объектной*) *областью* сорта π. Мы требуем, чтобы области D_π для различных сортов π не пересекались. Тогда для каждого объекта $q \in D_\pi$

однозначно определена *область определенности объекта* q, $\| q \| = \hat{D}(\pi, q)$. При этом (как и в п. 4. 2 ч. 3) мы требуем выполнения *условия непустоты* предметной области:

(i) $\bigvee \{\| q \| \mid q \in D_\pi\} = \top$.

Для всех $\pi \in V$ слева стоит объединение в алгебре B (требуется, чтобы оно существовало), а справа — единица алгебры B. Далее, F есть семейство функций, называемое семейством *форм* функциональной п.б.а. Элемент $f \in F$ представляет собой функцию нескольких аргументов, причем каждому аргументному месту приписан определенный сорт — элемент множества V. Если $f \in F$ — n-местная функция, а $q_1, \ldots, q_n$ — объекты соответствующих сортов, то значение $f(q_1, \ldots, q_n)$ есть элемент алгебры B. Множество F может содержать и 0-местные функции, которые мы отождествляем с элементами алгебры B.

Мы требуем, чтобы семейство F обладало следующими свойствами:

(ii) F замкнуто относительно операций:

a) добавления фиктивного аргумента;

b) перестановки аргументов;

c) отождествления аргументов.

(iii) F содержит нуль и единицу алгебры B в качестве 0-местных функций.

(iv) F замкнуто относительно псевдобулевых операций $\bigwedge$, $\bigvee$, $\supset$. Это означает, например, что если $f, g \in F$ суть две формы с одинаковым набором аргументных мест, то существует функция h с тем же набором аргументных мест такая, что для всяких объектов $q_1, \ldots, q_n$ соответствующих сортов $h(q_1, \ldots, q_n) = f(q_1, \ldots, q_n) \bigwedge g(q_1, \ldots, q_n)$. Мы обозначим $h = f \bigwedge g$. Подобным образом требуется существование форм $f \bigvee g$ и $f \supset g$.

(v) Множество F замкнуто относительно взятия верхних и нижних граней. Это означает следующее. Пусть $f \in F$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Фиксируем некоторое аргументное место x_i сорта π. В дальнейшем для простоты записи положим $i = 1$ (общее определение аналогично). Тогда требуется, чтобы существовали функции $g, h \in F$ от аргументов $x_2, \ldots, x_n$ такие, что для всяких объектов $q_2, \ldots, q_n$ соответствующих сортов

$$g(q_2, \ldots, q_n) = \bigwedge \{\| q \| \supset f(q, q_2, \ldots, q_n) \mid q \in D_\pi\},$$
$$h(q_2, \ldots, q_n) = \bigvee \{\| q \| \bigwedge f(q, q_2, \ldots, q_n) \mid q \in D_\pi\},$$

т. е. мы требуем, в частности, чтобы существовали соответствующие пересечения и объединения в алгебре B.

Неформально мы будем писать

$$g(x_2, \ldots, x_n) = \forall x f(x, x_2, \ldots, x_n),$$
$$h(x_2, \ldots, x_n) = \exists x f(x, x_2, \ldots, x_n).$$

Определение функциональной псевдобулевой алгебры закончено.

Заметим, что н е т р е б у е т с я, чтобы п.б.а. B была полной, достаточно, чтобы множество форм было замкнуто относительно взятия граней.

2. Мы рассматриваем обычные логико-математические языки такие, как в п. 4 ч. 3, с тем упрощением, что в языках теперь мы не допускаем функциональных символов. Как известно, всякая теория в языке с функциональными символами может быть эквивалентным образом сформулирована и в языке без функциональных символов (см. К л и н и [2], § 74, пример 11). С другой стороны, излагаемую ниже теорию можно приспособить и к языкам с функциональными символами, но мы не будем этим заниматься, чтобы не загромождать основную идею конструкции.

Итак, каждый язык задается набором

$$\Omega = \langle V, \mathrm{Cnst}, \mathrm{Pr}\rangle$$

сортов переменных, констант и предикатных символов.

Функциональная алгебраическая модель для языка Ω определяется набором

$$A = \langle B, \widehat{D}, F, \widehat{\mathrm{Cnst}}, \widehat{\mathrm{Pr}}\rangle,$$

где набор $\langle B, \widehat{D}, F\rangle$ образует функциональную псевдобулеву алгебру. Функция $\widehat{\mathrm{Cnst}}$ сопоставляет каждой константе c сорта π предметный объект $\bar{c} = \widehat{\mathrm{Cnst}}(c)$, $\bar{c} \in D_\pi$, $\|\bar{c}\| = \top$. При этом предполагается, что область сортов объектов V, определяемая функцией $\widehat{D}$, совпадает с множеством сортов переменных языка Ω. Далее, если P — предикатный символ языка Ω, то функция $\widehat{\mathrm{Pr}}$ сопоставляет P элемент F с тем же набором аргументов: $\|P\| = \widehat{\mathrm{Pr}}(P) \in F$.

От множества форм модели A мы требуем выполнения дополнительного свойства замкнутости:

(vi) F замкнуто относительно фиксации аргумента объектами вида $\bar{c}$, где $c \in \mathrm{Cnst}$. Это означает, что если $f \in F$, $f = f(x_1, x_i, x_n)$, $c \in \mathrm{Cnst}$, x_i и c имеют один и тот же сорт, то существует функция $g \in F$ такая, что

$$g(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n) = f(q_1, \ldots, \bar{c}, \ldots, q_n)$$

для всех q_j соответствующих сортов.

3. Если задана функциональная алгебраическая модель A языка Ω, то можно определить *значение в модели* для всякой формулы языка Ω. Значением $\|\varphi\|$ формулы φ будет некоторая форма функциональной псевдобулевой алгебры, $\|\varphi\| \in F$. Заметим, что, в отличие от алгебраических моделей п. 4.12 ч. 3, значение приписывается не оцененным формулам, а просто формулам языка Ω, в том числе формулам с параметрами.

Для определения значения формулы в модели будем помечать аргументные места форм переменными языка Ω. С этой целью линейно упорядочим все переменные языка Ω каким-либо фиксированным способом. Если дана формула φ, то все ее параметры выпишем в список $x_1, \ldots, x_n$ в вышеупомянутом линейном порядке. В качестве значения формуле φ будет сопоставляться формула $f \in F$ именно от аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Теперь определим значение $\|\varphi\|$ индукцией по построению φ.

1) Если φ — атомарная формула вида $P(u_1, \ldots, u_n)$, где u_i — переменные или константы, а $x_1, \ldots, x_k$ — стандартный список параметров φ, то $\|P(u_1, \ldots, u_n)\|$ есть форма от аргументов $x_1, \ldots, x_k$, получающаяся из $\|P\|$ с помощью тривиальных операций (ii), (vi) над аргументами $\|P\|$.

А именно, если заместить $u_1, \ldots, u_n$ соответствующими объектами $q_1, \ldots, q_n$ (при этом переменным $x_1, \ldots, x_k$, как входящим в список $u_1, \ldots, u_n$, автоматически сопоставляются некоторые объекты $q'_1, \ldots, q'_k$), то в алгебре B

$$\|P(u_1, \ldots, u_n)\|(q'_1, \ldots, q'_k) = \|P\|(q_1, \ldots, q_n).$$

Значение формы слева мы будем кратко записывать в виде

$$\|P(q_1, \ldots, q_n)\| \in B.$$

2) Значение $\|\bot\|$ есть нуль алгебры B.

3) Если φ имеет вид $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\psi \supset \eta)$, то форму $\| \varphi \|$ вычисляем следующим образом. Сначала найдем $\| \psi \|$ и $\| \eta \|$. Затем с помощью тривиальных операций перестановки и добавления фиктивных аргументов (см. (ii)) получим из $\| \psi \|$ и $\| \eta \|$ формы $f_1 (x_1, \ldots, x_n)$ и $f_2 (x_1, \ldots, x_n)$ от параметров формулы φ и, наконец, вычислим $\| \varphi \|$ как форму $f_1 \wedge f_2$, $f_1 \vee f_2$ или $f_1 \supset f_2$.

4) Если φ имеет вид $\forall x \psi (x)$ или $\exists x \eta (x)$, то определим $\| \varphi \| = \forall x \| \psi (x) \|$ или соответственно $\| \varphi \| = \exists x \| \eta (x) \|$.

Точнее, если x не является параметром $\psi (x)$, то положим $\| \forall x \psi (x) \| = \| \psi (x) \|$. Если же x есть параметр $\psi (x)$, то форма $\| \psi (x) \|$ зависит от x как от аргументного места и согласно (v) п. 2 определена форма $\forall x \| \psi (x) \|$, которую мы и назначим значением формулы $\forall x \psi (x)$.

Если φ — предложение языка Ω, то форма $\| \varphi \|$ оказывается 0-местной, т. е. является элементом алгебры B. Предложение φ назовем *истинным* в модели A, если $\| \varphi \| = \top$. Далее, понятие *модели A для теории G* может быть определено так же, как в п. 4.6 ч. 3 определялась алгебраическая модель для теории G.

4. Заметим, что алгебраическая модель для языка Ω (без функциональных символов):

$$\langle B, \widehat{D}, \widehat{\mathrm{Cnst}}, \widehat{\mathrm{Pr}} \rangle$$

с полной псевдобулевой алгеброй B в качестве алгебры истинностных значений может рассматриваться как частный случай функциональной алгебраической модели.

А именно, образуем функциональную алгебраическую модель

$$\langle B, \widehat{D}, F, \widehat{\mathrm{Cnst}}, \widehat{\mathrm{Pr}} \rangle,$$

сохранив те же B, $\widehat{D}$, $\widehat{\mathrm{Cnst}}$ и взяв в качестве F множество *всех* функций $f (x_1, \ldots, x_n)$ с аргументными местами соответствующих сортов и значениями в B. Приписание значений предикатным символам при этом осуществляется естественно:

$$(\widehat{\mathrm{Pr}} (P)) (q_1, \ldots, q_n) = \widehat{\mathrm{Pr}} (P, q_1, \ldots, q_n)$$

(см. п. 4.2 ч. 3).

С помощью непосредственной индукции легко показать, что значение $\| \varphi (q_1, \ldots, q_n) \|$ формы $\| \varphi (x_1, \ldots, x_n) \|$ в функциональной алгебре совпадает со значением оцененной формулы $\varphi (q_1, \ldots, q_n)$ в исходной алгебраической модели. В частности, если φ — предложение языка Ω, то значения φ в функциональной и исходной алгебраической моделях совпадают.

5. Аналогом теоремы о корректности п. 4.5.2 ч. 3 является здесь следующая

Теорема. *Если A — функциональная алгебраическая модель для языка Ω, φ — формула Ω, выводимая в* НРС, *а φ' — предложение, получающееся путем замыкания φ кванторами общности, то $\| \varphi' \| = \top$.*

$\rhd$ Индукцией по построению вывода формулы φ в HPC_1, ср. с доказательством п. 4.5.2 ч.3. $\square$

6. Далее мы рассмотрим различные виды реализуемости в языке арифметики. Сам язык НА при этом следует модифицировать, чтобы избежать употребления функциональных символов. Это делается с помощью стандартной процедуры (Клини [2], § 74): каждому n-местному функциональному символу $f (x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляется $(n + 1)$-местный предикатный символ $(y = f (x_1, \ldots, x_n))$ и все аксиомы, относящиеся к этому функциональному символу, естественным образом заменяются на аксиомы, относящиеся к предикатному символу. Соответственно несколько изменяются и другие аксиомы. Например, принцип арифметической индукции приобретает вид

$$\varphi (0) \wedge \forall xy (\varphi (x) \wedge (y = Sx) \supset \varphi (y)) \supset \forall x \varphi (x).$$

Мы считаем, что наш язык (мы его по-прежнему будем обозначать через НА) имеет один сорт переменных $x, y, z, \ldots$ для натуральных чисел и семейство констант $0, 1, 2, \ldots$ для каждого натурального числа.

Все функциональные алгебраические модели для языка НА, которые мы рассмотрим ниже, будут иметь одну и ту же объектную область, т. е. в моделях $A = \langle B, \widehat{D}, F, \widehat{\mathrm{Cnst}}, \widehat{\mathrm{Pr}} \rangle$ функция $\widehat{D}$ будет одной и той же. А именно, для единственного сорта π объектная область D_π состоит, во-первых, из всех констант $0, 1, 2, \ldots$ для натуральных чисел и, во-вторых, из счетного семейства символов $[x]$,

$[y]$, $[z]$, . . ., которые мы будем называть *каналами*. Интуитивно говоря, канал изображает константу — натуральное число, «о котором ничего не известно». Если $q \in D_\pi$, то для всех моделей ниже $\|q\| = \top$, так что мы не будем упоминать об области определенности объекта.

Функция $\widehat{\text{Cnst}}$ во всех моделях ниже определяется тривиальным образом: константе n языка сопоставляется объект $n \in D_\pi$.

Таким образом, в рассматриваемых примерах модель задается определением B, F и $\widehat{\text{Pr}}$.

Оцененное выражение (например, оцененная формула) — это, как всегда, выражение, в котором в с е параметры замещены объектами из D_π.

7. Определим теперь модель, соответствующую рекурсивной реализуемости r Клини (см. п. 5 ч. 2).

7.1. Если φ — формула, а x — переменная, то выражение $\hat{x}\varphi$ назовем *видом*. Здесь $\hat{x}$ играет роль квантора, так что переменная x в $\hat{x}\varphi$ связана, остальные параметры формулы φ остаются в $\hat{x}\varphi$ свободными. Мы, как всегда, отождествляем выражения, отличающиеся только переименованием связанных переменных. Выражение $\hat{x}\varphi(x)$ можно читать как «множество тех натуральных чисел x, для которых $\varphi(x)$».

Если $\hat{x}\varphi$ — вид, а t — терм (т. е. переменная или константа), то через $(t \varepsilon \hat{x}\varphi)$ обозначим формулу $\varphi(x \mid t)$ — результат подстановки вместо свободных вхождений x в φ терма t.

Пусть a, b — виды, e — новая переменная. Обозначим через $R[a, b, e]$ арифметическую формулу

$$\forall u\, ((u \varepsilon a) \supset \exists zv\, (T(e, u, z) \wedge (v = Uz) \wedge (v \varepsilon b))).$$

Сделаем некоторый неформальный комментарий. Пусть a есть $\hat{x}\varphi(x, y)$ и b есть $\hat{w}\psi(w, y)$. Вид $\hat{x}\varphi(x, y)$ можно рассматривать как обозначение арифметически выразимой функции, задающей для каждого натурального y множество $\{x \mid \varphi(x, y)\}$. Формула $R[a, b, e]$ утверждает, что e есть номер частично рекурсивной функции $\{e\}$ такой, что (при фиксированных y) для всякого элемента $u \in \hat{x}\varphi(x, y)$ определено значение $\{e\}(u)$ и $\{e\}(u) \in \hat{w}\psi(w, y)$.

7.2. В качестве алгебры B истинностных значений возьмем множество всех *оцененных* видов.

Множество форм F задается множеством всех видов. При этом вид $\hat{x}\varphi$ мы канонически рассматриваем *как функцию* от своих параметров. А именно, если параметрам $x_1, \ldots, x_n$ вида $\hat{x}\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ приписать значения $q_1, \ldots, q_n$ из D_π, то автоматически определяется некоторый элемент B — элемент $\hat{x}\varphi(q_1, \ldots, q_n, x)$, полученный замещением параметров соответствующими объектами. Мы говорим, что каждый вид задает форму *относительно операции замещения параметров*.

Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — атомарная формула, то ее значением мы объявим вид $\hat{w}\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, где w — новая переменная, отличная от всех параметров $x_1, \ldots, x_n$ формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Для окончания построения модели нам еще следует определить на B структуру псевдобулевой алгебры. С этой целью достаточно (см. п. 1 ч. 3) определить естественное упорядочение $\leqslant$ на множестве B.

Пусть $a = a([x_1], \ldots, [x_n])$ и $b = b([x_1], \ldots, [x_n])$ — два элемента B. Здесь $[x_1], \ldots, [x_n]$ — полный список каналов, встречающихся в a и b. Выберем новые переменные $x_1', \ldots, x_n'$ и положим $a' = a(x_1', \ldots, x_n')$, $b' = b(x_1', \ldots, x_n')$. Мы будем говорить, что a', b' получаются из a, b путем *согласованного* превращения каналов в переменные; a', b' уже суть виды.

Определим теперь $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда существует общерекурсивный ч.р. терм t, содержащий только те параметры, которые входят в виды a', b', и такой, что $\text{HA} \vdash \exists e\, ((t = e) \wedge R[a', b', e])$, ср. с формулировкой п. 5.4 ч. 2.

Далее следует проверить, что B действительно образует псевдобулеву алгебру, а множество форм F удовлетворяет всем требуемым условиям. Мы ограничимся некоторыми указаниями, а именно, опишем, как можно производить псевдобулевы операции над формами, включая операции «взятия кванторов» ((v) п. 1):

$$a \wedge b = \hat{e}\exists uv((e = j(u, v)) \wedge (u \varepsilon a) \wedge (v \varepsilon b));$$

$$a \vee b = \hat{e}\exists uv((e = j(u, v)) \wedge (u = 0 \supset (v \varepsilon a)) \wedge (u \neq 0 \supset (v \varepsilon b)));$$

$$a \supset b = \hat{e}\,(\forall u\,((u \varepsilon a) \supset \exists z T(e, u, z)) \wedge \forall uzv\,((u \varepsilon a) \wedge T(e, u, z) \wedge v = Uz \supset (v \varepsilon b)));$$

$$\neg\, a = \hat{e}\, \forall u \neg\, (u\varepsilon a);$$
$$\bot = \hat{e}\, (0 = 1);$$
$$\forall xa = \hat{e}\, (\forall x \exists z T\, (e, x, z) \wedge \forall xzu\, (T\, (e, x, z) \wedge (u = Uz) \supset (u\varepsilon a));$$
$$\exists xa = \hat{e}\, \exists xu\, ((e = j\, (u, x)) \wedge (u\varepsilon a)).$$

Разумеется, эти операции определены не однозначно, а с точностью до естественной эквивалентности в алгебре B (см. п. 1 ч. 3). Например, используя вместо $j\,(u, v)$ функцию $2^u \cdot 3^v$ в предыдущих определениях, мы получим эквивалентные определения операций.

7.3. Бросается в глаза явное сходство операций в алгебре B с определением реализуемости п. 5 ч. 2. Это сходство, конечно, не случайно. Точным выражением этой связи является следующая

7.3.1. Лемма. *Если φ — формула* НА, *x — переменная, не встречающаяся в φ, то значением $\| \varphi \|$ формулы φ в нашей модели является (с точностью до естественной эквивалентности) форма, заданная видом $\hat{x}\, (xr\varphi)$.*

$\triangleright$ Непосредственной индукцией по построению φ. $\square$

Из этой леммы следует

7.3.2. Теорема. *Если φ — предложение* НА, *то*

$$\text{НА} \vdash r\varphi \Leftrightarrow \| \varphi \| = \top.$$

Этот результат характеризует истинные формулы нашей модели — это в точности предложения, реализуемость которых выводима в НА.

7.4. Сам Клини [2], § 82, определял реализуемость $xr\varphi$ не как формулу языка, а как содержательное отношение между числом x и параметрами φ, сопоставляемое формуле φ индукцией по построению φ. Нетрудно соответствующим образом модифицировать модель п. 7.2. А именно, на множестве B отношение $a \leqslant b$ зададим следующим образом: $a \leqslant b \Leftrightarrow$ существует общерекурсивный ч. р. терм t такой, что формула, полученная из $\exists e\, ((t = e) \wedge R\, [a', b', e])$ замыканием кванторами общности, истинна в стандартной арифметической модели. В этой модификации определение псевдобулевых операций и лемма 7.3.1 сохраняются, а теорема 7.3.2 приобретает вид:

7.4.1. *Если φ — предложение* НА, *то*

$$(r\varphi \text{ истинно}) \Leftrightarrow \| \varphi \| = \top.$$

8. Определим теперь модель, соответствующую реализуемости Лифшица r_3 (см. ч. 2, п. 8.2). Напомним обозначение

$$(x \in Vy) \rightleftharpoons (x \leqslant j_2 y) \wedge \neg\, !\{j_2\, y\}\, (x).$$

Определим вид $V\,(y) \rightleftharpoons \hat{x}\, (x \in Vy)$.

Вид a назовем *правильным*, если может быть построен ч. р. терм $t\,(y)$, содержащий, кроме параметров a, только еще новую переменную y, такой, что в FA выводима формула

$$\exists z (z\varepsilon V\,(y)) \wedge \forall z ((z\varepsilon V\,(y)) \supset (z\varepsilon a)) \supset \exists v ((t\,(y) = v) \wedge (v\varepsilon a))$$

(ср. с формулировкой п. 8.2.2 ч. 2).

Оцененный вид a назовем правильным, если правильным оказывается вид a', полученный из a путем превращения каналов в переменные.

В качестве алгебры B_1 истинностных значений мы возьмем теперь множество всех правильных оцененных видов. Это собственное подмножество алгебры B п. 7.2. Основное отношение $\leqslant$ мы определим следующим образом: $a \leqslant b \Leftrightarrow$ существует ч.р. терм t, содержащий только те параметры, которые встречаются в видах a', b' (полученных из a, b путем согласованного превращения каналов в переменные), и такой, что

$$\text{FA} \vdash \exists e\, ((t = e) \wedge R\, [a', b', e]).$$

Множество форм задается множеством всех правильных видов — каждый вид задает форму относительно операции замещения параметров.

Псевдобулевы операции над формами определяются так же, как в п. 7.2, за исключением дизъюнкции и существования. Их следует определить следующим образом:

$$a \vee b = \hat{e}\, (\exists y (y\varepsilon V(e)) \wedge \forall y ((y\varepsilon V(e)) \supset \exists vw ((y = j\,(v, w)) \wedge (v = 0 \supset w\varepsilon a) \wedge (v \neq 0 \supset w\varepsilon b))));$$
$$\exists xa = \hat{e}\, (\exists y\, (y\varepsilon V(e)) \wedge \forall y\, ((y\varepsilon V(e)) \supset \exists v \exists x\, ((y = j\,(v, x)) \wedge v\varepsilon a\,))).$$

Значение атомарной формулы определяется так же, как в п. 7.2. Аналогично п. 7.3.1 значением $\| \varphi \|$ арифметической формулы оказывается вид $\hat{x}\,(xr_3\varphi)$, а для предложения φ имеем $\|\varphi\| = \top \Leftrightarrow \mathrm{FA} \vdash r_3\varphi$.

9. Каждую формальную теорию, например НА, можно рассматривать как функциональную алгебраическую модель. По существу это — известная алгебра Линденбаума — Тарского.

В качестве алгебры B истинностных значений следует взять просто множество всех оцененных формул, а в качестве множества F форм — множество всех формул. Каждая формула задает форму относительно операции замещения параметров.

Основное отношение на B определяется очевидным образом: $a \leqslant b \Leftrightarrow \mathrm{HA} \vdash a' \supset b'$, где, как всегда, a', b' получены из a, b путем согласованного превращения каналов в переменные. Псевдобулевы операции над формами при этом будут совпадать с синтаксическими операциями над соответствующими формулами.

Если определить $\|\varphi\| = \varphi$ для атомарных формул, то для всякого предложения ψ будем иметь $\|\varphi\| = \top \Leftrightarrow \mathrm{HA} \vdash \varphi$.

10. Однако можно определить и гораздо более интересные и неожиданные модели НА, где в качестве форм будут фигурировать формулы. Для всякой арифметической формулы φ через $\overline{\mathrm{Pr}}\,(\varphi)$ обозначим формулу с теми же параметрами, что и у φ, содержательный смысл которой можно пояснить следующим образом: $\overline{\mathrm{Pr}}\,(\varphi)$ утверждает, что в исчислении НА выводится замкнутая формула $\overline{\varphi}$, полученная из φ замещением ее параметров натуральными числами из некоторого списка y. С внешней точки зрения y есть полный список всех параметров φ. Формула $\overline{\mathrm{Pr}}\,(\varphi)$ строится стандартным образом по формуле φ, с подробностями можно ознакомиться, например, по статье Фефермана [1]. Для всякой формулы φ через $\Box\varphi$ обозначим формулу $\varphi \wedge \overline{\mathrm{Pr}}\,(\varphi)$.

В качестве алгебры B возьмем вновь множество всех оцененных формул, а в качестве множества F форм — множество всех формул, но теперь основное отношение определим иначе:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \mathrm{HA} \vdash \Box a' \supset b'.$$

Для атомарных формул положим $\|\varphi\| = \varphi$.

Псевдобулевы операции в этой модели определяются следующим образом (здесь слева стоит знак операции в нашей модели, а справа — формула, являющаяся значением):

$$(\varphi) \wedge (\psi) = (\varphi \wedge \psi);$$
$$(\varphi) \vee (\psi) = (\Box\varphi \vee \Box\psi);$$
$$(\varphi) \supset (\psi) = (\Box\varphi \supset \psi);$$
$$\neg(\varphi) = (\neg\Box\varphi);$$
$$\forall x\,(\varphi) = (\forall x\varphi);$$
$$\exists x\,(\varphi) = (\exists x\,\Box\varphi);$$
$$\bot = (0 = 1).$$

Реализуемость, соответствующая этой модели, была использована Бизоном [1]. Связь с реализуемостью Бизона выражается эквивалентностью:

$$\|\varphi\| = \top \Leftrightarrow \mathrm{HA} \vdash \varphi^{pr}.$$

11. Рассмотрим еще модель, соответствующую штрих-реализуемости Клини [4].

Множество F форм будет теперь определяться множеством всех пар $\langle\varphi, \psi\rangle$, где φ и ψ суть арифметические формулы, каждый параметр ψ есть и параметр φ, и выполняется еще следующее свойство: если y — полный список всех параметров φ, а n — список натуральных чисел, содержащий столько же членов, сколько членов в y, то из истинности замкнутой формулы $\psi\,(y \mid n)$ (в стандартной арифметической модели) следует $\mathrm{HA} \vdash \varphi\,(y \mid n)$.

В качестве алгебры B истинностных значений возьмем множество всех *оцененных* пар $\langle\varphi, \psi\rangle$, удовлетворяющих вышеуказанному условию. Каждая пара формул $\langle\varphi, \psi\rangle$ задает форму относительно операции одновременного замещения параметров в φ и ψ.

Определим основное отношение $\leqslant$ на B. Пусть $\langle\varphi_1, \psi_1\rangle$, $\langle\varphi_2, \psi_2\rangle \in B$, а $\langle\varphi_1', \psi_1'\rangle$, $\langle\varphi_2', \psi_2'\rangle$ суть формы, получающиеся путем превращения каналов в переменные. Положим $\langle\varphi_1, \psi_1\rangle \leqslant \langle\varphi_2, \psi_2\rangle$ тогда и только тогда, когда, во-первых, $\mathrm{HA} \vdash \varphi_1' \supset \varphi_2'$ и, во-вторых, формула $\psi_1 \supset \psi_2$ истинна (в стандартной арифметической модели), т. е. истинно ее замыкание кванторами общности.

Операции на B определяются следующим образом:

$$\langle\varphi_1, \psi_1\rangle \wedge \langle\varphi_2, \psi_2\rangle = \langle\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi_1 \wedge \psi_2\rangle;$$

$$\langle\varphi_1, \psi_1\rangle \vee \langle\varphi_2, \psi_2\rangle = \langle\varphi_1 \vee \varphi_2, \psi_1 \vee \psi_2\rangle;$$

$$\langle\varphi_1, \psi_1\rangle \supset \langle\varphi_2, \psi_2\rangle = \langle\varphi_1 \supset \varphi_2,\ \overline{\mathrm{Pr}}`(\varphi_1 \supset \varphi_2)' \wedge (\psi_1 \supset \psi_2)\rangle;$$

$$\neg\langle\varphi, \psi\rangle = \langle\neg\varphi,\ \overline{\mathrm{Pr}}(\neg\varphi) \wedge (\psi \supset \overline{\mathrm{Pr}}(0 = 1))\rangle;$$

$$\forall x\langle\varphi, \psi\rangle = \langle\forall x\varphi,\ \overline{\mathrm{Pr}}(\forall x\varphi) \wedge \forall x\psi\rangle;$$

$$\exists x\langle\varphi, \psi\rangle = \langle\exists x\varphi,\ \exists x\psi\rangle;$$

$$\bot = \langle 0 = 1,\ 0 = 1\rangle.$$

Для атомарных формул определим значение $\|\varphi\| = \langle\varphi, \varphi\rangle$.

В терминологии Клини [4] связь между нашей моделью и реализуемостью может быть выражена следующим образом:

$$\|\varphi\| = \top \Leftrightarrow ((\mid \varphi) \wedge \mathrm{HA} \vdash \varphi).$$

Дизъюнктивное свойство НА может быть доказано с помощью нашей модели следующим образом. Пусть $\mathrm{HA} \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, где φ_1, φ_2— замкнутые формулы. Тогда $\|\varphi_1 \vee \varphi_2\| = \top$. Но $\|\varphi_1 \vee \varphi_2\| = \langle\varphi_1 \vee \varphi_2, \psi_1 \vee \psi_2\rangle$, где $\|\varphi_1\| = \langle\varphi_1, \psi_1\rangle$ и $\|\varphi_2\| = \langle\varphi_2, \psi_2\rangle$, причем ψ_1 и ψ_2 — замкнутые формулы. Так как $\|\varphi_1 \vee \varphi_2\| = \top$, то $\psi_1 \vee \psi_2$ истинна, а следовательно, истинна одна из формул ψ_1 или ψ_2. Пусть, например, истина ψ_1. По свойству пары $\langle\varphi_1, \psi_1\rangle$ тогда $\mathrm{HA} \vdash \varphi_1$.

ДОПОЛНЕНИЕ Б

УСИЛЕННАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ О НОРМАЛИЗАЦИИ

Как известно, Генцен в своей классической работе [1] предложил формулировку классического и интуиционистского исчисления предикатов в форме исчисления секвенций и доказал, что каждый вывод в этом исчислении может быть приведен к так называемой нормальной форме, не содержащей правила сечения. Фактически Генцен предлагает некоторую конкретную и весьма естественную систему редукций выводов и показывает, что для каждого вывода можно подобрать конечную последовательность редукций из этой системы, приводящую первоначальный вывод в вывод с той же последней секвенцией, но уже без сечений. Таким образом, описывается некоторый способ приведения каждого вывода к нормальной форме, отличный от тривиального перебора.

Правиц [1] получил аналогичные результаты для исчисления натуральных выводов Генцена. Затем Правицу [3] для исчисления натуральных выводов удалось получить даже более сильный результат: а именно, оказалось, что для системы редукций Правица всякий натуральный вывод приводится к нормальному виду произвольной последовательностью редукций. Основываясь на возможности погружения натуральных выводов в секвециальные, Цукер [1] предложил некоторую систему редукций для исчисления секвенций и показал, что для фрагмента исчисления секвенций без дизъюнкции и существования имеет место аналогичная сильная теорема о нормализации (см. также Поттингер [1]). Что касается полного исчисления секвенций, то Цукер привел конкретный пример бесконечной последовательности редукций (из предложенного им набора редукций), не ведущий к нормальному выводу.

Ниже мы приведем доказательство того, что сильная теорема о нормализации имеет место и по отношению к первоначальной системе редукций Генцена (Драгалин [13]).

1. Для простоты мы будем рассматривать ниже односортные языки без функциональных символов. Каждый такой язык определяется парой $\Omega = \langle \mathrm{Ind}_\Omega, \mathrm{Pr}_\Omega \rangle$, где Ind_Ω — множество (может быть, и пустое) *индивидных символов* или *констант* языка, а Pr_Ω — непустое множество *предикатных символов*.

1.1. *Атомарные формулы* языка имеют вид $P(u_1, \ldots, u_n)$, где P — n-местный предикатный символ языка, а u_i — переменные или константы языка. *Формулы* языка строятся обычным образом из атомарных с помощью связок $\wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$.

Множество формул языка Ω обозначим через $\mathrm{Fm}[\Omega]$, множество всех *предложений*, т. е. замкнутых формул, обозначим через $\mathrm{St}[\Omega]$. Мы систематически отождествляем формулы, отличающиеся лишь переименованием связанных переменных.

Множества Ind_Ω, Pr_Ω мы считаем не более чем счетными. Для данного языка Ω и множества констант B через $\Omega(B)$ обозначим язык, получающийся из Ω путем присоединения констант из B в качестве новых индивидных символов.

Набор есть по определению конечное множество формул. При этом набор Γ трактуется как множество с повторениями, т. е. порядок формул в Γ роли не играет, но одна и та же формула может входить в Γ в нескольких экземплярах. Пустое множество есть также набор.

Секвенция есть по определению фигура вида $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ — наборы. Секвенция называется *интуиционистской*, если Δ пусто или состоит самое большее из одной формулы.

1.2. Пусть фиксирован некоторый язык Ω. Аксиома есть по определению секвенция вида $\varphi \to \varphi$, где $\varphi \in \mathrm{Fm}[\Omega]$.

1.3. *Правила вывода* делятся на группы:

1.3.1. Логические правила вывода:

$$(\wedge\to)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\wedge\psi)\,\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\wedge)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi,\ \Gamma\to\Delta\psi}{\Gamma\to\Delta\,(\varphi\wedge\psi)};$$

$$\frac{\psi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\wedge\psi)\,\Gamma\to\Delta};$$

$$(\vee\to)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\Delta;\ \psi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\vee\psi)\,\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\vee)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi}{\Gamma\to\Delta\,(\varphi\vee\psi)};$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta\psi}{\Gamma\to\Delta\,(\varphi\vee\psi)};$$

$$(\supset\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi;\ \psi\Gamma\to\Pi}{(\varphi\supset\psi)\,\Gamma\to\Delta\Pi};\qquad (\to\supset)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\Delta\psi}{\Gamma\to\Delta\,(\varphi\supset\psi)};$$

$$(\neg\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi}{\neg\varphi\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\neg)\quad \frac{\varphi\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta\neg\varphi};$$

$$(\forall\to)\quad \frac{\varphi(u)\,\Gamma\to\Delta}{\forall x\varphi(x)\,\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\forall)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi(x)}{\Gamma\to\Delta\forall y\varphi(y)};$$

$$(\exists\to)\quad \frac{\varphi(x)\,\Gamma\to\Delta}{\exists y\varphi(y)\,\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\exists)\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi(u)}{\Gamma\to\Delta\exists x\varphi(x)}$$

с обычными ограничениями на переменные.

1.3.2. Основные структурные правила вывода:

$$(\mathrm{ad}\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta}{\varphi\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\mathrm{ad})\quad \frac{\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta\varphi};$$

$$(\mathrm{st}\to)\quad \frac{\varphi\varphi\Gamma\to\Delta}{\varphi\Gamma\to\Delta};\qquad (\to\mathrm{st})\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi\varphi}{\Gamma\to\Delta\varphi}.$$

1.3.3. Дополнительное структурное правило — сечение:

$$(\mathrm{cut})\quad \frac{\Gamma\to\Delta\varphi^n;\ \varphi^m\Pi\to\Phi}{\Gamma\Pi\to\Delta\Phi}\qquad (m,\ n>0).$$

1.4. Древовидные выводы в системе 1.2—1.3 называются LK-выводами (*классическими выводами*). Если вывод состоит лишь из интуиционистских секвенций, мы назовем его LI-выводом (*интуиционистским выводом*). Правило вывода $(\supset\to)$ подобрано как раз таким образом, чтобы это определение согласовалось с обычным.

В рассуждениях дальше через L обозначим одно из исчислений LK или LI. Запись $\mathrm{L} \vdash (\Gamma \to \Delta)$ означает, что $\Gamma \to \Delta$ выводима в L. Запись $\mathrm{L} \vdash^+ (\Gamma \to \Delta)$ означает, что секвенция $\Gamma \to \Delta$ выводима в L без употребления правила (cut).

1.5. Мы желаем показать, что из $\mathrm{L} \vdash (\Gamma \to \Delta)$ следует $\mathrm{L} \vdash^+ (\Gamma \to \Delta)$ и, более того, что существует некоторый стандартный и конкретный набор редукций выводов такой, что *произвольная* последовательность этих редукций, примененная к данному выводу с сечениями, *необходимо* приводит к выводу этой же секвенции без сечений. В этом и состоит сильная теорема о нормализации. Точную формулировку см. в п. 4.1.

2. Опишем некоторые вспомогательные понятия, относящиеся к строению выводов и способам их записи.

2.1. Правило сечения назовем *дополнительным*, а все остальные правила — *основными. Основной формулой* логического правила вывода называется формула, которая вводится в заключении этого правила. Те формулы, которые явно выписаны в посылках логического правила вывода и участвуют в построении основной формулы, называются *боковыми формулами* данного правила вывода. Основной формулой и боковыми формулами структурных правил является формула φ (в обозначениях 1.3.2 и 1.3.3). Так, правило сечения не имеет вхождений основной формулы в заключение, но обязательно имеет вхождения боковых формул в каждую из посылок.

Переменная x в правилах ($\to\forall$) и ($\exists\to$) называется *собственной переменной* данного правила. Переменная или константа t в правилах ($\forall\to$) и ($\to\exists$) называется *основным термом* данного правила.

2.2. *Название правила вывода* есть фигура, указанная в 1.3 перед каждым из правил вывода, и, кроме того, некоторая дополнительная стандартная информация, а именно:

a) указание основной и боковых вхождений формул в данном правиле вывода;

b) в случае $\forall$- и $\exists$-правил — указание вхождений собственных переменных и основных термов данного правила вывода.

Правило вывода рассматривается всегда вместе со своим названием. Практически, однако, при написании правил вывода мы будем обыкновенно опускать названия или записывать их неполно, например, в виде ($\to\exists$), ($\vee\to$), (cut) и т. п.

Правило вывода:

$$q\,\frac{S_1,\ S_2}{S}$$

с названием q мы часто будем записывать линейно в виде (S_1, S_2/Sq), для краткости опуская часто название q, а также внешние скобки. Подобным образом и для правил с одной посылкой.

2.3. Понятие *вывода* в системе L секвенции S в этом стиле определяется индуктивно следующим образом:

a) если S есть аксиома, то S есть L-вывод секвенции S;

b) если $\pi_1, \ldots, \pi_n$ суть L-выводы секвенций $S_1, \ldots, S_n$ соответственно и $(S_1, \ldots, S_n/Sq)$ есть правило вывода (причем, в случае LI, S является интуиционистской секвенцией), то выражение $(\pi_1, \ldots, \pi_n/Sq)$ есть L-вывод секвенции S.

2.4. Совокупность всех вхождений названий правил вывода в данный вывод π называется *анализом вывода*. Таким образом, согласно 2.3, всякий вывод содержит и некоторый фиксированный анализ.

Однако при практическом написании выводов мы будем обыкновенно опускать анализ вывода или записывать его неполно.

Если π есть вывод секвенции S, то сам этот вывод будем записывать в виде (π: S) или просто π: S. Таким образом, по определению, $\pi = (\pi : S)$ и эту запись следует отличать от записи типа (π/S), которая означает, что вывод (π/S) оканчивается правилом вывода с одной посылкой и имеет выводом-посылкой вывод π.

При рассмотрении последнего правила вывода данного вывода π удобно одновременно рассматривать случай, когда это последнее правило имеет две посылки или одну посылку. В таких случаях мы используем запись вида $\pi = (\pi_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$. Здесь π_2 заключено в угловые скобки, чтобы напомнить, что мы исследуем обе возможности, когда рассматриваемое правило является двупосылочным или однопосылочным (и тогда, конечно, π_2 отсутствует).

2.5. *Подвывод* π_1 данного вывода π есть по определению вхождение вывода π_1 в вывод π. *Собственная переменная* вывода π — это переменная, которая фигурирует в качестве собственной переменной одного из правил вывода π. Мы систематически отождествляем выводы, отличающиеся переименованием собственных переменных.

В дальнейшем при манипуляциях с выводами считаем, что необходимые переименования производятся везде, где в них возникает необходимость. Удобно, например, считать, что в рассматриваемых выводах собственные переменные, относящиеся к различным правилам, различны, что каждая собственная переменная встречается только выше того правила, где она нужна, и т. п. Мы не будем явно оговаривать подобного рода требования.

Естественным образом определяется *подстановка* $(\pi\,(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_n))$ термов $t_1, \ldots, t_n$ вместо списка различных переменных $x_1, \ldots, x_n$. При этом собственные переменные π надлежит предварительно переименовать, чтобы они отличались от всех переменных x_i и всех переменных, встречающихся в списке $t_1, \ldots, t_n$. Если это не вызывает недоразумений, результат подстановки будет сокращенно обозначаться через $\pi(t_1, \ldots, t_n)$.

2.6. Следуя Генцену, мы опускаем последовательность применений основных структурных правил, отмечая их присутствие двойной чертой.

Например, вывод

$$(\pi: \varphi^m \Gamma \to \Delta \,//\, \varphi\Gamma \to \Delta\psi)$$

оканчивается серией сокращений (st $\to$) и правилом добавления ($\to$ ad). Порядок применения этих структурных правил несуществен.

3. В этом разделе мы определим отношение между выводами, которое мы будем обозначать в виде $\pi > \sigma$ и читать: π *редуцируется за один шаг в вывод* σ. Для истинности $\pi > \sigma$ необходимо, чтобы вывод π содержал правило сечения. При этом вывод σ получается из π применением одного из нижеследующих *правил редукции.*

3.1. Мы начнем с перечисления *примитивных правил редукции.* В этом случае вывод π необходимо оканчивается сечением и именно это последнее сечение подвергается преобразованию. Итак, пусть вывод π имеет вид

$$(\pi': \Gamma \to \Delta\varphi^n,\ \ \pi'': \varphi^m\, \Pi \to \Phi / \Gamma\Pi \to \Delta\Phi \text{ (cut)}).$$

В зависимости от строения выводов π', π'' можно применить любую из следующего ниже списка примитивных рекурсий для получения вывода σ, $\pi > \sigma$.

3.1.1. *Аксиомная редукция* может быть применена, если один из выводов, π' или π'', является аксиомой. В результате этой редукции последнее сечение исчезает.

Например, если π': $\varphi \to \varphi$, то π следует преобразовать в вывод

$$(\pi'': \varphi^m\Pi \to \Phi \,//\, \varphi\Pi \to \Phi).$$

3.1.2. *Редукция перестановки правил* применяется, когда по крайней мере один из выводов, π' или π'', оканчивается основным правилом q с основной формулой, отличной от экземпляров основной формулы φ в рассматриваемом сечении. Редукция состоит в том, что сечение с формулой φ следует применить сначала к посылкам правила q, а уже затем применить правило q.

Например, если

$$\pi' = (\sigma': \Gamma' \to \Delta'\varphi^n,\ \sigma'': \Gamma'' \to \Delta''\varphi^n / \Gamma \to \Delta\varphi^n q),$$

то первоначальный вывод следует преобразовать к виду

$$(\sigma': \Gamma' \to \Delta'\varphi^n,\ \pi'': \varphi^m\Pi \to \Phi / \Gamma'\Pi \to \Delta'\Phi \text{ (cut)}),$$
$$(\sigma'': \Gamma'' \to \Delta''\varphi^n,\ \pi'': \varphi^m\Pi \to \Phi / \Gamma''\Pi \to \Delta''\Phi \text{ (cut)}) / \Gamma\Pi \to \Delta\Phi q.$$

Некоторое своеобразие возможно в случае, если вывод π' оканчивается правилом ($\supset \to$). Например, пусть

$$\pi' = (\sigma': \Gamma' \to \psi,\ \sigma'': \eta\Gamma' \to \varphi / (\psi \supset \eta)\, \Gamma' \to \varphi \ (\supset \to)),$$

здесь $n = 1$. Тогда вывод π следует преобразовать к виду

$$(\sigma': \Gamma' \to \psi \,//\, \Gamma'\Pi \to \psi),$$
$$(\sigma'': \eta\Gamma' \to \varphi,\ \pi'': \varphi^m\Pi \to \Phi / \eta\Gamma'\Pi \to \Phi \text{ (cut)}) / (\psi \supset \eta)\, \Gamma'\Pi \to \Phi \ (\supset \to).$$

3.1.3. *Редукция добавления* применяется, когда по крайней мере один из выводов, π' или π'', оканчивается правилом добавления (ad), вводящим основную формулу последнего сечения. Редукция состоит в том, что сечение следует применить к посылке добавления. Если же в посылке добавления формула сечения отсутствует, то последнее сечение исчезает. Например, если $k > 0$ и

$$\pi'' = (\sigma'': \varphi^k\Pi \to \Phi / \varphi^{k+1}\Pi \to \Phi \text{ (ad} \to)),$$

то результирующий вывод имеет вид

$$\pi': \Gamma \to \Delta\varphi^n,\ \sigma'': \varphi^k\Pi \to \Phi / \Gamma\Pi \to \Delta\Phi \text{ (cut)}.$$

Если же

$$\pi'' = (\sigma'': \Pi \to \Phi / \varphi\Pi \to \Phi \text{ (ad} \to)),$$

то результат имеет вид

$$\sigma'': \Pi \to \Phi \,//\, \Gamma\Pi \to \Delta\Phi.$$

3.1.4. *Редукция сокращения* применяется, когда по крайней мере один из выводов, π' или π'', оканчивается правилом сокращения (st), которое относится к основной формуле рассматриваемого сечения. Редукция состоит в том, что сечение следует применить к посылке сокращения.

Например, если

$$\pi' = (\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\varphi^{n+1}/\Gamma \to \Delta\varphi^{n}\ (\to \mathrm{st})),$$

то результирующий вывод имеет вид

$$\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\varphi^{n+1},\ \pi''\colon \varphi^{m}\Pi \to \Phi/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi\ (\mathrm{cut}).$$

3.1.5. *Редукция переброса* применяется, когда по крайней мере один из выводов, π' или π'', оканчивается основным логическим правилом q, вводящим основную формулу φ сечения, причем в заключении правила q имеются и другие экземпляры формулы φ, относящиеся к последнему сечению. Редукция состоит в том, что последнее сечение расщепляется на два вида сечений. Сначала следует применить сечение с формулой φ к посылкам правила q, затем применить к результату логическое правило q, а затем вновь применить сечение ко вновь появившейся формуле φ.

Пусть, например, $\pi' = (\sigma'\colon \Gamma' \to \Delta'\varphi^{k}/\Gamma \to \Delta\varphi^{k+1}q)$, где $k > 0$, q — основное логическое правило с основной формулой φ. Тогда данный вывод π следует преобразовать к виду

$$(((\sigma'\colon \Gamma' \to \Delta'\varphi^{k},\ \pi''\colon \varphi^{m}\Pi \to \Phi/\Gamma'\Pi \to \Delta'\Phi\ (\mathrm{cut}))/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi q),\ (\pi''\colon \varphi^{m}\Pi \to \Phi)/\Gamma\Pi\Pi \to \Delta\Phi\Phi\ (\mathrm{cut}))//\Gamma\Pi \to \Delta\Phi.$$

3.1.6. *Редукция вилки* применяется, когда в последнем сечении вывода π имеем $m = n = 1$ и каждый из выводов π', π'' получен по основному логическому правилу, вводящему основную формулу φ. Редукция состоит в том, что сечение следует применить к посылкам последних правил π' и π''. В отличие от всех других видов редукций, здесь вновь полученные сечения имеют основной формулой не φ, а некоторые другие формулы. Вид редукции зависит от внешнего логического знака формулы φ. Это может быть один из символов $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Таким образом, имеется всего шесть видов редукции вилки.

Рассмотрим примеры редукций вилки.

3.1.6.1. $\wedge$-вилка. $\varphi = (\psi \wedge \eta)$,

$$\pi' = (\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\psi,\ \sigma''\colon \Gamma \to \Delta\eta/\Gamma \to \Delta\ (\psi \wedge \eta)\ (\to \wedge)),$$

$$\pi'' = (\delta\colon \psi\Pi \to \Phi/(\psi \wedge \eta)\ \Pi \to \Phi\ (\wedge \to)).$$

Результат имеет вид

$$\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\psi,\ \delta\colon \psi\Pi \to \Phi/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi\ (\mathrm{cut}).$$

3.1.6.2. $\vee$-вилка, $\varphi = (\psi \vee \eta)$,

$$\pi' = (\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\eta/\Gamma \to \Delta\ (\psi \vee \eta)\ (\to \vee)),$$

$$\pi'' = (\delta'\colon \psi\Pi \to \Phi,\ \delta''\colon \eta\Pi \to \Phi/(\psi \vee \eta)\ \Pi \to \Phi\ (\vee \to)).$$

Результат:

$$\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\eta,\ \delta''\colon \eta\Pi \to \Phi/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi\ (\mathrm{cut}).$$

3.1.6.3. $\supset$-вилка, $\varphi = (\psi \supset \eta)$,

$$\pi' = (\sigma'\colon \psi\Gamma \to \Delta\eta/\Gamma \to \Delta\ (\psi \supset \eta)\ (\to \supset)),$$

$$\pi'' = (\delta'\colon \Pi \to \Phi'\psi,\ \delta''\colon \eta\Pi \to \Phi''/(\psi \supset \eta)\ \Pi \to \Phi'\Phi''\ (\supset \to)).$$

Результат:

$$((\delta'\colon \Pi \to \Phi'\psi,\ \sigma'\colon \psi\Gamma \to \Delta\eta/\Pi\Gamma \to \Delta\Phi'\eta\ (\mathrm{cut})),\ \delta''\colon \eta\Pi \to \Phi''/\Pi\Pi\Gamma \to \Delta\Phi'\Phi''\ (\mathrm{cut}))//\Pi\Gamma \to \Delta\Phi'\Phi''.$$

3.1.6.4. $\neg$-вилка, $\varphi = \neg\psi$,

$$\pi' = (\sigma'\colon \psi\Gamma \to \Delta/\Gamma \to \Delta\ \neg\psi\ (\to \neg)),$$

$$\pi'' = (\delta'\colon \Pi \to \Phi\psi/\neg\psi\Pi \to \Phi\ (\neg \to)).$$

Результат:

$$\delta'\colon \Pi \to \Phi\psi,\ \sigma'\colon \psi\Gamma \to \Delta/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi\ (\mathrm{cut}).$$

3.1.6.5. $\forall$-вилка, $\varphi = \forall x\psi(x)$,

$$\pi' = (\sigma'(x)\colon \Gamma \to \Delta\psi(x)/\Gamma \to \Delta\forall y\psi(y)(\to \forall)),$$

$$\pi'' = (\delta\colon \psi(t)\Pi \to \Phi/\forall y\psi(y)\Pi \to \Phi(\forall \to)).$$

Результат:

$$\sigma'(t)\colon \Gamma \to \Delta\psi(t),\ \delta\colon \psi(t)\ \Pi \to \Phi/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi\ (\mathrm{cut}).$$

3.1.6.6 $\exists$-вилка, $\varphi = \exists x\psi(x)$,

$$\pi' = (\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\psi(t)/\Gamma \to \Delta\exists y\psi(y)\ (\to \exists)),$$

$$\pi'' = (\delta(x)\colon \psi(x)\ \Pi \to \Phi/\exists y\psi(y)\Pi \to \Phi\ (\exists \to)).$$

Результат:

$$\sigma'\colon \Gamma \to \Delta\psi(t),\ \delta(t)\colon \psi(t)\Pi \to \Phi/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi\ (\mathrm{cut}).$$

3.2. Если теперь π — произвольный вывод, содержащий вхождение правила сечения, то применение *правила редукции* состоит в том, что в π выбирается некоторый подвывод, оканчивающийся сечением, и к этому подвыводу применяется одно из примитивных правил редукции п. 3.1. Результаты замены этого подвывода его редукцией и образуют вывод σ такой, что $\pi > \sigma$.

3.3. Заметим, что если $\pi > \sigma$, то π и σ суть выводы одной и той же секвенции. Кроме того, для каждого вывода π существует лишь конечное число выводов σ таких, что $\pi > \sigma$.

4. Вывод π назовем *нормальным*, если для всякого вывода σ не имеет места $\pi > \sigma$.

Лемма. *Вывод тогда и только тогда нормален, когда он не содержит сечений.*

$\triangleright$ Если вывод не содержит сечений, то он тривиально нормален. Пусть, обратно, вывод π нормален и содержит сечения. Выберем подвывод π_1 вывода π такой, что π_1 оканчивается сечением и посылки π_1 уже сечений не содержат.

Из содержания п. 3.1 можно усмотреть, что к выводу π_1 применимо одно из примитивных правил редукций. Достаточно рассмотреть случаи, когда a) одна из посылок π_1 есть аксиома; b) одна из посылок получена по правилу, не относящемуся к основной формуле сечения; c) одна из посылок π_1 получена по основному структурному правилу, вводящему основную формулу сечения; d) одна из посылок π_1 получена по основному логическому правилу, вводящему основную формулу сечения, причем эта посылка содержит и другие экземпляры основной формулы сечения; e) в π_1 можно применить редукцию вилки. Эти случаи исчерпывают все возможности строения π_1. Таким образом, нормальный вывод не может содержать сечений. $\square$

4.1. Рассмотрим теперь исчисление Red, в котором будут выводится L-выводы.

1) Аксиомами Red являются нормальные L-выводы.

2) Пусть π — не нормальный L-вывод и $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — полный список всех выводов таких, что $\pi > \pi_i$. Тогда $(\pi_1, \ldots, \pi_n/\pi)$ есть правило вывода Red.

L-вывод назовем *редуктивным*, если π выводится в системе Red.

Теперь можно уточнить, что является основной задачей. А именно, мы стремимся показать, что *всякий* вывод является редуктивным.

Заметим, что по всякому редуктивному выводу π соответствующий вывод в Red восстанавливается фактически однозначно.

4.2. Следующие три леммы отмечают простейшие свойства редукций.

4.2.1. *Пусть вывод π оканчивается основным правилом $\pi = (\pi_1\langle\pi_2\rangle/Sq)$. Пусть $\pi > \sigma$. Тогда σ оканчивается тем же правилом $\sigma = (\sigma_1, \langle\sigma_2\rangle/Sq)$, причем в точности для одной из посылок π_i имеем $\pi_i > \sigma_i$, в то время как для другой посылки $\pi_i = \sigma_i$.*

4.2.2. *Пусть вывод $\pi = (\pi_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$ оканчивается основным правилом, причем π_1, π редуктивны. Тогда π — также редуктивный вывод.*

$\triangleright$ Индукцией по сумме сложностей выводов π_1 и π_2 в исчислении Red. Используется 4.2.1. $\square$

4.2.3. *Пусть π — вывод, x — переменная и t — терм. Пусть $\pi\,(x \mid t) > \sigma$. Тогда существует вывод δ такой, что $\pi > \delta$, $\delta\,(x \mid t) = \sigma$, и $\pi > \delta$ есть редукция того же вида, что и $\pi\,(x \mid t) > \sigma$.*

$\triangleright$ Сначала следует рассмотреть случай примитивной редукции $\pi\,(x \mid t) > \sigma$. Здесь нужное δ находится непосредственным рассмотрением видов редукций. Далее применяем несложную индукцию по построению π. $\square$

5. Рассмотрим теперь исчисление Ind, в котором будут выводиться L-выводы.

1) Аксиомами Ind являются L-выводы, являющиеся аксиомами L.

2) Пусть $\pi = (\pi_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$ оканчивается основным правилом q. Тогда $(\pi_1, \langle\pi_2\rangle/\pi)$ есть правило вывода Ind.

3) Пусть $\pi = (\pi_1, \pi_2/S\ (\mathrm{cut}))$ оканчивается правилом сечения. Пусть, далее, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — полный список всех L-выводов таких, что $\pi > \sigma_i$. Тогда $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n/\pi)$ есть правило вывода Ind.

L-вывод назовем *индуктивным*, если он выводится в исчислении Ind. Заметим, что, как и в случае редуктивных выводов, по всякому индуктивному выводу соответствующий вывод в Ind восстанавливается фактически однозначно. Это позволяет, в частности, корректно определить *индуктивную сложность* ind (π) для индуктивного вывода π — количество вершин дерева вывода в исчислении Ind для вывода π.

5.1. *Всякий индуктивный вывод является и редуктивным.*

$\rhd$ Индукцией по ind (π). Если π — аксиома, то π — нормальный, а следовательно, и редуктивный вывод. Если π оканчивается основным правилом, то посылки π имеют меньшую индуктивную сложность и достаточно использовать лемму 4.2.2. Пусть π оканчивается сечением и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n/\pi)$ — правило вывода Ind. Для доказательства редуктивности π, согласно 4.1, достаточно установить, что все σ_i редуктивны. Но это непосредственно следует из индуктивного предположения индукции по ind (π). $\square$

5.2. Следующие пять лемм описывают простейшие свойства индуктивных выводов.

5.2.1. *Пусть* $\pi = (\pi_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$ *оканчивается основным правилом. Тогда* π *индуктивен в том и только в том случае, когда индуктивны* π_1 *и* π_2, *причем* ind $(\pi_1) <$ ind (π) и ind $(\pi_2) <$ ind (π).

$\rhd$ Это следствие определения индуктивности. $\square$

5.2.2. *Если* π *индуктивен и* $\pi > \sigma$, *то* σ *также индуктивен и* ind $(\sigma) <$ ind (π).

$\rhd$ Индукцией по величине ind (π). Если π — аксиома, то $\pi > \sigma$ невозможно. Пусть $\pi = (\pi_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$ оканчивается основным правилом и $\pi > \sigma$. Согласно 4.2.1 тогда $\sigma = (\sigma_1, \langle\sigma_2\rangle/Sq)$ и, например, $\pi_1 > \sigma_1$, $\pi_2 = \sigma_2$. По индуктивному предположению, σ_1 и σ_2 индуктивны, причем ind $(\sigma_1) <$ ind (π_1). По определению индуктивности тогда σ индуктивен и ind $(\sigma) =$ ind (σ_1) + ind (σ_2) + + 1 $<$ ind (π). Пусть, наконец, π оканчивается сечением и π выводится в Ind по правилу $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n/\pi)$. Тогда из $\pi > \sigma$ следует, что $\sigma = \sigma_j$ для некоторого j и утверждение леммы очевидно из определений. $\square$

5.2.3. *Вывод* π *индуктивен тогда и только тогда, когда для всякого* σ *из* $\pi > \sigma$ *следует, что* σ *индуктивен.*

$\rhd$ В одну сторону, утверждение следует из 5.2.2. Обратно, допустим, что для всякого σ из $\pi > \sigma$ следует, что σ — индуктивный вывод. Индуктивность π установим индукцией по построению π.

Если π — аксиома, то π индуктивен. Пусть π оканчивается основным правилом: $\pi = (\pi_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$. Пусть $\pi_1 > \sigma_1$. Тогда $\pi > (\sigma_1, \langle\pi_2\rangle/Sq)$. Так как $(\sigma_1, \langle\pi_2\rangle\ /Sq)$ — индуктивный по допущению вывод, то и σ_1 индуктивен (см. 5.2.1). Таким образом, для всякого σ_1 из $\pi_1 > \sigma_1$

следует индуктивность σ_1. Отсюда π_1 индуктивен по индуктивному предположению. Аналогично установим индуктивность π_2. Ввиду 5.2.1 отсюда следует индуктивность π.

Наконец, индуктивность π в случае, когда π оканчивается сечением, вытекает непосредственно из допущения. $\square$

5.2.4. *Всякий нормальный вывод индуктивен.*

$\rhd$ Нормальный вывод π не содержит сечений (см. 4.0). Индуктивность такого вывода докажем непосредственной индукцией по построению π с использованием леммы 5.2.1. $\square$

5.2.5. *Пусть* π — *индуктивный вывод,* x — *переменная и* t — *терм. Тогда вывод* $\delta = \pi\,(x\,|\,t)$ *также индуктивен и* ind $(\delta) =$ ind (π).

$\rhd$ Индукцией по ind (π). Пусть, например, π оканчивается сечением. Будем обозначать штрихом результат подстановки $(x\,|\,t)$. Тогда, если $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — полный список всех выводов таких, что $\pi > \sigma_i$, то $\sigma_1', \ldots, \sigma_m'$ — полный список всех выводов таких, что $\pi' > \sigma_i'$ (мы используем лемму 4.2.3). Утверждение следует из индуктивного предположения. $\square$

5.3. Введенная индуктивная сложность, как показано в 5.2, уменьшается при произвольной редукции, уменьшается при переходе к посылкам основного правила вывода и сохраняется при подстановках.

Так как, кроме того, всякий индуктивный вывод редуктивен, то для решения основной задачи 4.1 достаточно показать, что *всякий* вывод индуктивен.

Ввиду леммы 5.2.1 достаточно доказать следующее утверждение: если вывод $\pi = (\pi_1, \pi_2/S\ (\mathrm{cut}))$ оканчивается сечением и π_1, π_2 — индуктивные выводы, то π — также индуктивный вывод.

6. Рассмотрим некоторые понятия, относящиеся к выводам с сечениями. Назовем *фигурой сечения* или просто *фигурой* всякий вывод, оканчивающийся сечением, т. е. вывод вида

$$\pi = (\pi_1\colon \Gamma \to \Delta\varphi^n,\ \pi_2\colon \varphi^m\,\Pi \to \Phi/\Gamma\Delta \to \Pi\Phi\ (\mathrm{cut})).$$

Формула φ называется *основной формулой*, а π_1 и π_2 — *посылками* фигуры.

Редукцию $\pi > \sigma$ фигуры назовем *дальней редукцией*, если она не является примитивной, т. е. не затрагивает последнего сечения, а относится к посылкам. В этом случае σ также является фигурой с той же основной формулой. Вывод σ назовем *фрагментом* редукции $\pi > \sigma$.

Редукцию $\pi > \sigma$ фигуры π назовем *финальной*, если она является примитивной и в результате редукции последнее сечение исчезает. Это в точности редукции вида 3.1.1 или 3.1.3 в вырожденных случаях, когда сечение исчезает.

Редукцию $\pi > \sigma$ фигуры π назовем *простой*, если она примитивна и не финальна, а кроме того, отлична от редукции вилки 3.1.6. Результат σ простой редукции уже не обязательно является фигурой. Однако в результате простой редукции в составе результата σ появляется одна или несколько фигур, которых не было в первоначальном выводе π. Эти фигуры назовем *фрагментами* редукции $\pi > \sigma$.

Пусть, например, фигура π имеет вид

$$\pi = (\pi'\colon \Gamma \to \Delta\varphi^{k+1},\ \pi''\colon \varphi^m\Pi \to \Phi/\Gamma\Delta \to \Pi\Phi\ (\text{cut})),$$

причем $k > 0$ и π' оканчивается логическим правилом, вводящим φ:

$$\pi' = (\sigma'\colon \Gamma' \to \Delta'\varphi^k/\Gamma \to \Delta\varphi^{k+1}q).$$

В этом случае к π можно применить простую редукцию переброса 3.1.5 и получить вывод σ, $\pi > \sigma$:

$$(((\sigma'\colon \Gamma' \to \Delta'\varphi^k,\ \pi''\colon \varphi^m\Pi \to \Phi/\Gamma'\Pi \to \Delta'\Phi\ (\text{cut}))/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi q),\ (\pi''\colon \varphi^m\Pi \to \Phi)/\Gamma\Pi\Pi \to \Delta\Phi\Phi\ (\text{cut}))//\Gamma\Pi \to \Delta\Phi.$$

Следующие две фигуры:

$$\sigma'\colon \Gamma' \to \Delta'\varphi^k,\ \pi''\colon \varphi^m\Pi \to \Phi/\Gamma'\Pi \to \Delta'\Phi\ (\text{cut}),$$

а также

$$(((\sigma'\colon \Gamma' \to \Delta'\varphi^k,\ \pi''\colon \varphi^m\Pi \to \Phi/\Gamma'\Pi \to \Delta'\Phi\ (\text{cut}))/\Gamma\Pi \to \Delta\Phi q),\ (\pi''\colon \varphi^m\Pi \to \Phi)/\Gamma\Pi\Pi \to \Delta\Phi\Phi\ (\text{cut}))$$

являются фрагментами этой редукции.

Наконец, редукцию $\pi > \sigma$ фигуры π назовем *главной*, если это есть примитивная редукция вилки. В этом случае вновь полученные фигуры сечения (эти фигуры будут уже с другими основными формулами) также назовем *фрагментами* редукции $\pi > \sigma$.

Фрагмент редукции, в состав которого не входят другие фрагменты этой редукции, мы назовем *верхним*. В противном случае фрагмент называется *нижним*. Так, в вышеприведенном примере первый фрагмент является верхним, а второй — нижним, так как второй фрагмент содержит в своем составе первый. Таким образом, все редукции фигур сечения мы подразделяем на четыре непересекающихся класса: дальние, финальные, простые и главные редукции. В результате нефинальной редукции фигуры возникают новые фигуры, называемые фрагментами первоначальной фигуры. В случае дальней и простой редукций фрагменты имеют ту же основную формулу, что и первоначальная фигура. Фрагменты главной редукции имеют другие основные формулы. Результат нефинальной редукции получается из нижнего фрагмента с помощью серии основных структурных правил.

6.1. Рассмотрим фигуру

$$\pi = (\pi_1\colon \Gamma_1 \to \Delta_1\varphi^{m_1},\ \pi_2\colon \varphi^{m_2}\Gamma_2 \to \Delta_2/\Gamma_1\Gamma_2 \to \Delta_1\Delta_2\ (\text{cut})).$$

Будем говорить, что *индекс посылки* π_i равен нулю, если $m_i = 1$ и вывод π_i оканчивается основным логическим правилом, вводящим основную формулу φ. В остальных случаях индекс посылки π_i считаем равным единице. Индекс посылки обозначим через $a(\pi_i)$. *Индексом фигуры* назовем сумму индексов посылок $a(\pi) = a(\pi_1) + a(\pi_2)$. Таким образом, $a(\pi)$ может принимать в качестве значений только 0, 1 или 2.

Если посылки π индуктивны, то *весом* фигуры π назовем натуральное число $b(\pi) = \mathrm{ind}(\pi_1) + \mathrm{ind}(\pi_2)$.

Наконец, если фигура π имеет индуктивные посылки, то *сложностью* фигуры назовем ординальное число $h(\pi) < 3\omega$. А именно, $h(\pi) = a(\pi)\cdot\omega + b(\pi)$. Сложность определена для всякой фигуры с индуктивными посылками. Такую фигуру мы назовем *правильной*.

6.2. Докажем несколько лемм, относящихся к правильным фигурам.

6.2.1. *Результат финальной редукции правильной фигуры есть индуктивный вывод.*

$\triangleright$ Очевидно, так как в этом случае результат получается из индуктивной посылки первоначальной фигуры с помощью основных правил (см. 5.2.1). $\square$

6.2.2. *Пусть $\pi > \sigma$ — простая или дальняя редукция, а σ' — ее верхний фрагмент. Тогда, если π — правильная фигура, то σ' — также правильная фигура и $h(\sigma') < h(\pi)$.*

$\triangleright$ Следует убедиться, что $a(\sigma') \leqslant a(\pi)$ и $b(\sigma') < b(\pi)$. Первый факт связан с тем, что если индекс некоторой посылки равен нулю, то эта посылка может участвовать только в редукции вилки и поэтому не меняется в результате простой редукции. Для доказательства второго факта используем свойства 5.2—5.3 индуктивной сложности. $\square$

6.2.3. *Если все верхние фрагменты простой редукции правильной фигуры индуктивны, то нижний фрагмент этой редукции есть правильная фигура сложности, меньшей, чем сложность исходной фигуры.*

$\triangleright$ Речь может идти лишь о редукции переброса п. 3.1.5. Рассмотрение этой редукции показывает, что посылки нижнего фрагмента получаются с помощью основных правил из верхних фрагментов, так что из условия леммы и 5.2.1 следует, что эти посылки индуктивны, а, следовательно, нижний фрагмент есть правильная фигура. Далее, индекс посылки нижнего фрагмента, содержащей в качестве подвыводов верхние фрагменты, равен нулю, в то время как индекс соответствующей посылки исходной фигуры равен единице (для применения редукции переброса необходимо, чтобы в соответствующей посылке исходной фигуры было *несколько* экземпляров основной формулы, а это влечет, что индекс упомянутой посылки равен единице). Тогда индекс нижнего фрагмента оказывается меньше, чем индекс исходной фигуры, так что и сложность нижнего фрагмента ниже. $\square$

6.2.4. *Если π — правильная фигура с основной формулой φ, то $\pi(x|t)$ есть правильная фигура с основной формулой $\varphi(x|t)$ и с той же сложностью, что и π.*

$\triangleright$ Это следствие леммы 5.2.5. $\square$

7. Теорема. *Всякая правильная фигура индуктивна.*

$\triangleright$ По определению индуктивного вывода достаточно установить, что для всякой правильной фигуры π если $\pi > \sigma$ есть редукция π, то σ — индуктивный вывод. Это утверждение будем доказывать индукцией по *логической сложности* основной формулы π, т. е. индукцией по количеству знаков $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ в основной формуле π. При фиксированной логической сложности основной формулы π используем индукцию по сложности правильной фигуры π. Случаи финальной, дальней и простой редукций трактуются с помощью лемм 6.2.1—6.2.3. Индукция по логической сложности используется лишь в случае главной редукции $\pi > \sigma$. Здесь следует заметить, что фрагменты главной редукции имеют основные формулы меньшей логической сложности. При рассмотрении $\forall$- и $\exists$-вилок используется лемма 6.2.4. $\square$

7.1. Теорема. *Всякий вывод редуктивен.*

$\triangleright$ Ввиду 7 5.3 и 4.1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

А ц е л (Aczel P.H.G.)
1. Saturated intuitionistic theories.— In: Contributions to mathematical logic, ed. by H. A. Schmidt et al.— Amsterdam, 1969, p. 1—11.

Б е р н и н и (Bernini S.)
1. A very strong intuitionistic theory.— Studia Logica, 1976, **35**, № 4, p. 377—385.

Б е т (Beth E. W.)
1. The foundations of mathematics.— Amsterdam, 1959.

Б и з о н (Beeson M.)
1. The nonderivability in intuitionistic formal system of theorems on the continuity of effective operations.— J. Symbolic Logic, 1975, **40**, p. 321—346.
2. Derived rules of inference related to the continuity of effective operations.— J. Symbolic Logic, 1976, **41**, p. 328—337.
3. Principles of continuous choice and continuity of functions in formal systems for constructive mathematics.— Ann. Math. Logic, 1977, **12**, № 3, p. 249—322.
4. A type-free Gödel interpretation.— J. Symbolic Logic, 1978, **43**, № 2, p. 213—227.
5. Some relations between classical and constructive mathematics.— J. Symbolic Logic, 1978, **43**, № 2, p. 228—246.

Б и ш о п (Bishop E.)
1. Foundations of constructive analysis.— N. Y.: McGraw-Hill Co., 1967.

Б р а у э р (Brouwer L.E.J.)
1. Consciousness, philosophy and mathematics.— Proc. X Intern. Congress Philosophy, Amsterdam, 1948, p. 1235—1249.
2. De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderellatie in het continuum.— Indag. math., 1949, **11**, p. 1—17.
3. An example of contradictory in classical theory of functions.— Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A, **57**, p. 204—206; Indag. math., 1954, **16**, p. 204—206.

Б у х х о л ь ц (Buchholz W.)
1. Ein ausgezeichnetes Modell fur die intuitionistische Typenlogik.— Arch. math. Logik Grundlagenforsch., 1975, **17**, S. 55—60.

В а р п а х о в с к и й Ф. Л.
1. Об одном классе реализуемых формул логики высказываний.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1972, **20**, с. 8—23.

В е л ь д м а н (Veldman W.)
1. An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic.— J. Symbolic Logic, 1976, **41**, № 1, p. 159—166.

В е с л и (Vesley R. E.)
1. A palatable substitute for Kripke's schema.— In: Intuitionism and proof theory. Proc. of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968. Amsterdam, 1970, p. 197—207.
2. Choice sequences and Markov's principle.— Compositio math., 1972, **24**, p. 33—53.

Г а б б а й (Gabbay D. M.)
1. On some new intuitionistic propositional connectivies I.— Studia logica, 1977, **36**, № 1—2, p. 127—139.

Г а р г о в Г. К.
1. Интуиционистский анализ и промежуточные логики.— ДАН СССР, 1975, **224**, № 6, с. 1245.

Г е й т и н г (Heyting A.)
1. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.— Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1930, S. 42—56.
2. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.— Sitzungsber preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1930, S. 57—71, 158—169.
3. Интуиционизм.— М.: Мир, 1965.

Г е н к и н, Т а р с к и й (Henkin L., Tarski A.)
1. Cylindric algebras.— In: Lattice theory. Proc. of symp. in pure math., 1961, **2**. Providence, R. I., p. 83—113.

Г е н ц е н (Gentzen G.)
1. Исследования логических выводов.— В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 9—76.
2. Непротиворечивость частной теории чисел.— В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 77—153.
3. Новое изложение доказательства непротиворечивости для частной теории чисел.— В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 154—191.

Г ё д е л ь (Gödel K.)
1. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie.— Ergebnisse eines math. Koll., 1931—1932, S. 34—38.
2. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül.— Akad. der Wiss. in Wien, math.-naturwiss. Klasse, Anzeiger, 1932, **69**, S. 65—66.
3. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения.— В кн.: Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967, с. 499—510.

Г ж е г о р ч и к (Grzegorczyk A.)
1. A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic.— Indag. math., 1964, **26**, p. 596—601.
2. Assertions depending on time and corresponding logical calculi.— Composito math., 1968, **20**, p. 83—87.

Г у д м е н (Goodman N. D.)
1. Relativized realizability in intuitionistic arithmetic of all finite types.— J. Symbolic Logic, 1978, **43**, № 1, p. 23—44.

Г у д с т е й н (Goodstein R. L.)
1. Рекурсивный математический анализ.— М.: Наука, 1970.

Г у р е в и ч (Gurevich Y.)
1. Intuitionistic logic with strong negation.— Studia Logica, 1977, **36**, p. 49—59.
Д а л е н в а н (van Dalen D.)
1. An interpretation of intuitionistic analysis.— Ann. Math. Logic, 1978, **13**, p. 1—43.
2. Lectures on intuitionism.— Lect. Notes Math., 1973, **337**, p. 1—94.
Д а л е н в а н, Т р у л с т р а (van Dalen D., Troelstra A. S.)
1. Projections of lawless sequences.— In: Intutitionism and proof theory. Proc. of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968, Amsterdam, 1970, p. 163—186.
Д а м м е т (Dummet M.)
1. Elements of intuitionism.— Oxford: Oxford Press, 1978.
Д ж е р в е л (Jervell H. R.)
1. A normalform in first-order arithmetic.— Proc. of the second Scand Logic Symp., ed. J. E. Fenstad, 1971, p. 93—108.
Д р а г а л и н А. Г.
1. К обоснованию принципа конструктивного подбора А. А. Маркова.— ДАН СССР, 1967, **177**, с. 13—16.
2. Вычислимость примитивно-рекурсивных термов конечного типа и примитивно-рекурсивная реализуемость.— Зап. научн. семин. Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1968, **8**, с. 32—45.
3. Сложные аксиоматические теории и полнота интуиционистского исчисления предикатов.— Тезисы конф. педвузов центр. зоны РСФСР, Иваново, 1970, с. 8—10.
4. К интуиционистской теории моделей.— В кн.: История и методология естественных наук, вып. XIV. Математика и механика. М.: Изд. МГУ, 1973, с. 106—126.
5. Constructive mathematics and models of constructive theories.— In: Logic, Methodology and Philosophy of Science IV (ed. P. Suppes etc.). Amsterdam, 1973, p. 111—128.
6. Конструктивные модели теорий интуиционистских последовательностей выбора.— В кн.: Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. с. 214—252.
7. Конструктивная модель интуиционистского анализа.— В кн.: Философия и логика. М.: Наука, 1974, с. 55—78.
8. Полнота арифметики с конструктивным правилом бесконечной индукции.— В кн.: Теория алгоритмов и машинная логика. М.: ВЦ АН СССР, 1974, с. 14—33.
9. Алгебраические модели интуиционистской логики.— В кн.: Теория логического вывода, ч. 1 (тезисы докладов Всесоюзного симпозиума, Москва, март 25—27 1974). М.: АН СССР, Ин-т философии, 1974, с. 29—32.
10. Алгебраические модели интуиционистских теорий.— В кн.: Логический вывод. М.: Наука, 1979, с. 206—244.
11. Функциональные алгебраические модели.— В кн.: Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, вып. 13, с. 188—199.
12. Устранение сечения в теории определимых множеств натуральных чисел.— В кн.: Теория множеств и топология. Ижевск, 1977, с. 27—36.

13. Сильная теорема о нормализации выводов в исчислении секвенций Генцена.— В кн.: Исследования по теории алгоритмов и математической логике. М.: Наука, 1979, с. 26—39.
14. New kinds of realizability.— In: VI Intern. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science (Gannover, august 1979), abstracts. Gannover, 1979.
Е р ш о в Ю. Л.
1. О модели G теории BR.— ДАН СССР, 1974, **217**, № 5, с. 1004—1006.
Ж и р а р (G i r a r d J. Y.)
1. Une extension de l'interpretation de Godel a l'analyse.— Proc. of the second Scand. Logic Symp., ed. J. E. Fenstad, 1971, p. 63—92.
Й е х (Jech T. Y.)
1. Теория множеств и метод Ферсинга.— М.: Мир, 1973.
Й о н г д е (de Jongh D.H.J.)
1. The maximality of the intuitionistic predicate calculus with respect to Heyting's arithmetic (abstract).— J. Symbolic Logic, 1970, **35**, p. 606.
К а н о в е й В. Г.
1. Определимость с помощью степеней конструктивности.— В кн.: Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976, с. 5—95.
2. О непустоте классов в аксиоматической теории множеств.— ИАН СССР, сер. матем., 1978, **42**, № 2, с. 550—579.
К и п н и с М. М.
1. Об одном свойстве пропозициональных формул.— ДАН СССР, 1967, **174**, № 2, с. 277—278.
2. О реализациях предикатных формул.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1971, **20**, с. 40—48.
К л и н и (Kleene S. C.)
1. On the interpretation of intutionistic number theory.— J. Symbolic Logic, 1945, **10**, p. 109—124.
2. Введение в метаматематику.— М.: ИЛ, 1957.
3. Extension of an effectively generated class of functions by enumeration.— Colloq. Math., 1958, **6**, p. 67—78.
4. Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalism.— J. Symbolic Logic, 1962, **27**, p. 11—18. Добавление.— Там же, 1963, **28**, с. 154—156.
5. Constructive functions in FIM.— In: Logic, Methodology and Philosophy of Sciences III. Amsterdam, 1968, p. 137—144.
6. Formalized recursive functionals and formalized realizability.— Mem. Amer. Math. Soc., 1969.
К л и н и, В е с л и (Kleene S. C., Vesley R. E.)
1. Основания интуиционистской математики.— М.: Наука, 1978.
К о л м о г о р о в А. Н.
1. Zur Deutung der intuitionistichen Logik.— Math. Z., 1932, **35**, S. 58—65.
К р а й з е л (Kreisel G.)
1. A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs.— J. Symbolic Logic, 1958, **23**, p. 369—388.

2. The non-derivability of $\neg (x)A(x) \to (Ex)A(x)$, A primitive recursive, in intutitionistic formal systems (резюме).— J. Symbolic Logic, 1959, **23**, p. 456—457.
3. On weak completeness of intutionistic predicate logic.— J. Symbolic Logic, 1959, **23**, p. 456—457.
4. Informal rigour and completeness proofs.— In: Problems in the philosophy of mathematics. Amsterdam, 1967, p. 138—186.
5. Lawless sequences of natural numbers.— Compositio math., 1968, **20**, p. 222—248.

Крайзел, Трулстра (Kreisel G., Troelstra A. S.)
1. Formal systems for some branches of intutionistic analysis.— Ann. Math. Logic, 1970, **1**, p. 229—387.

Крипке (Kripke S. A.)
1. Semantical analysis of intutionistic logic I.— In: Formal systems and recursive functions. Amsterdam, 1965, p. 92—129.

Кроль М. Д.
1. К топологическим моделям интуиционистского анализа. Один контрпример.— Матем. заметки, 1976, **19**, № 6, с. 859—862.
2. Дизъюнктивное и экзистенциальное свойство интуиционистского анализа со схемой Крипке.— ДАН СССР, 1977, **234**, № 4, с. 750—753.
3. Об экзистенциальном свойстве интуиционистского анализа со схемой Крипке.— Деп. ВИНИТИ, 1977, № 1895-77, с. 1—50.
4. Различные варианты схемы Крипке в интуиционистском анализе.— ДАН СССР, 1978, **239**, № 5, с. 1048—1051.
5. A topological model for intuitionistic analysis with Kripke's scheme.— Z. math. Logik Grundl. Math., 1978, **24**, p. 427—436.

Кузнецов А. В.
1. О функциональной выразимости в суперинтуиционистских логиках.— Матем. исследования, Кишинев, 1971, **6**, № 4, с. 75—122.
2. О суперинтуиционистских логиках.— Матем. исследования, Кишинев, 1975, **10**, № 2, с. 150—158.

Кузнецов А. В., Герчиу В. Я.
1. О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости.— ДАН СССР, 1970, **195**, № 5, с. 1029—1032.

Кушнер Б. А.
1. Лекции по конструктивному математическому анализу.— М.: Наука, 1973.

Левин А. М.
1. Аксиома выбора в классическом анализе.— Вестн. МГУ, сер. матем. мех., 1975, № 4, с. 59—65.
2. Сравнение различных форм аксиомы выбора в классическом анализе.— ДАН СССР, 1975, **225**, № 4, с. 759—763.
3. Об одном фрагменте классического анализа.— Вестн. МГУ, сер. матем. мех., 1978, № 1, с. 3—9.

Лейвант (Leivant D.)
1. Absolutness of intuitionstic logic.— Report ZW 45/75, Math. Centrum, Amsterdam, May 1975.
2. Failure of completeness properties of intuitionistic predicate logic for constructive models.— Ann. Sci. Univ. Clermont Math., 1976, **13**, p. 93—107.

Лифшиц В. А. (Lifschitz V. A.)
1. CT_0 is stronger than $CT_0!$. — Report of Brigham Young Univ., Provo, Utah 84602, 1976.

Лопес-Эскобар, Вельдман (Lopez-Escobar G. K., Veldman W.)
1. Intiuitionistic completeness of a restrieted second-order logic.— Lect. Notes Math., 1975, **500**, p. 198—232.

Лукасевич, Тарский (Lukasiewicz J., Tarski A.)
1. Untersuchungen über den Ausssagenkalkül.— C. r. Soc. Sci. Lettres Varsovie, Cl. III, 1930, **23**, S. 30—50.

Любецкий В. А.
1. Случайные последовательности чисел и A_2-множества.— В кн.: Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976, с. 96—122.

Майхилл (Myhill J.)
1. Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis.— Logique et Analyse, 1967, **35**, p. 280—297.
2. Formal systems of intuitionistic analysis I.— In: Logic, Methodology and Philosophy of Science III. Amsterdam, 1968, p. 161—178.
3. Formal systems of intuitionistic analysis II.— In: Intuitionism and proof theory. Proc. of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968. Amsterdam, 1970, p. 151—162.
4. Embedding classical type theory.— Proc. Symp. Pure Math., 1971, **13**, № 1, p. 267—270. Errata.— Lect. Notes Math., 1972, **274**, p. 92.
5. Some properties of intuitionistic Zermelo — Fraenkel set theory.— Lect. Notes Math., 1973, **337**, p. 206—231.
6. Constructive set theory. — J. Symbolic Logic, 1975, **40**, p. 347—382.

Максимова Л. Л.
1. Предтабличные суперинтуиционистские логики.— Алгебра и логика, 1972, **11**, с. 558—570.
2. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр.— Алгебра и логика, 1977, **16**, с. 643—681.

Марков А. А.
1. О конструктивной математике.— Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **67**. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 8—14.
2. О логике конструктивной математики.— Вестн. МГУ, сер. матем. мех., 1970, № 2, с. 7—29.
3. Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive.— Revue internationale de Phil., 1971, **25**, p. 477—507.

Мартин-Лёф (Martin-Löf Per)
1. Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated indiductive definitions.— Proc. of the second Scand. Logic. Symp., ed. J. E. Fenstad, 1971, p. 179—216.
2. Hauptsatz for the intutionistic theory of species.— Proc. of the second Scand. Logic Symp., ed. J. E. Fenstad, 1971, p. 217—233.
3. Очерки по конструктивной математике.— М.: Мир, 1975.

Мендельсон (Mendelson E.)
1. Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1976.
Минц Г. Е.
1. Трансфинитные развертки арифметических формул.— Зап. научн. семинаров Ленингр.отд. матем. ин-та АН СССР, 1975, 49, с. 51—66.
2. Теория доказательств (Арифметика и анализ).— Итоги науки и техники. сер. Алгебра. Топология. Геометрия, ВИНИТИ, 1975, 13.
3. Что можно сделать в ПРА.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1976, 60, с. 93—102.
Московакис (Moschovakis J. R.)
1. Can there be no nonrecursive functions? — J. Symbolic Logic, 1971, 36, № 2, p. 309—315.
2. A topological interpretation of second order intuitionistic arithmetic.— Compositio math., 1973, 26, p. 261—275.
Новиков П. С.
1. On the consistency of certain logical calculus.— Матем. сб., 1943, 12 (54), с. 231—261.
2. Элементы математической логики.— М.: Наука, 1974.
Оревков В. П.
1. Связь конструктивной общезначимости с выводимостью в классическом исчислении предикатов.— Всесоюзный симпозиум по математической логике (тезисы докладов, 2—7 июня 1969 г.). Алма-Ата, 1969, с. 35.
Освальд (Osswald H.)
1. Vollständigkeit und Schnittelimination in der intuitionistischen Typelogik.— Manusripta math., 1972, 6, S. 17—31.
2. Ein syntaktischer Beweis für die Zulässigkeit der Schnittregel im Kalkül von Schütte fur die intuitionistische Typenlogik.— Manuscripta math., 1973, 8, S. 243—249.
Плиско В. А.
1. Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул.— ИАН СССР, сер. матем., 1977, 41, с. 483—502.
2. Некоторые варианты понятия реализуемости для предикатных формул.— ИАН СССР, сер. матем., 1978, 42, № 3, с. 636—653.
Полерс (Pohlers W.)
1. Ein starker Normalisationssatz für die intuitionistische Typentheorie.— Manuscripta math., 1973, 8, S. 371—387.
Поттингер (Pottinger G.)
1. Normalization as a homomorphie image of cut-elimination.— Ann. Math. Logic, 1977, 12, № 3, p. 323—357.
Поуэлл (Powell W. C.)
1. Extending Gödel negative interpretation to ZF.— J. Symbolic Logic, 1975, 40, p. 221—229.
Правиц (Prawitz D.)
1. Natural deduction.— Almquist & Wiksell, Stokholm, 1965.
2. Completeness and Hauptsatz for second order logic.— Theoria, 1967, 33, p. 246—258.
3. Ideas and results of proof theory.— Proc. of the second Scand. Logic Symp., ed. J. E. Fenstad, 1971, p. 235—307.

Расёва, Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.)
1. Математика метаматематики.— М.: Наука, 1972.
Раца М. Ф.
1. О функциональной полноте в некоторых логиках, промежуточных между классической и интуиционистской.— Матем. исследования, Кишинев, 1970, 5, № 4, с. 171—176.
Роджерс (Rogers H., Jr.)
1. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
Роотселаар ван (Rootselaar van B.)
1. On subjective mathematical assertions.— In: Intuitionism and proof theory. Proc. of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968. Amsterdam, 1970, p. 187—196.
Роуз (Rose Gene F.)
1. Propositional calculus and realizability.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, p. 1—19.
Сварт (Swart de H.)
1. Another intuitionistic completeness proof.— J. Symbolic Logic, 1976, 41, № 3, p. 644—662.
2. An intuitionistically plausible interpretation of intuitionistic logic.— J. Symbolic Logic, 1977, 42, № 4, p. 564—578.
3. First steps in intuitionistic model theory.— J. Symbolic Logic, 1978, 43, № 1, p. 3—12.
Скарпеллини (Scarpellini B.)
1. A model for intuitionistic analysis.— Commentarii Math. Helvetici, 1970, 45, p. 440—471.
2. Proof theory and intutionistic systems.— Lect. Notes Math., 1971, p. 212.
3. Induction and transfinite induction in intuitionistic systems.— Ann. Math. Logic, 1972, 4, p. 173—227.
4. A new realizability notion for intuitionistic analysis.— Z. math. Logik Grundl. Math., 1977, 23, p. 137—167.
Скотт (Scott D.)
1. Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis.— Compositio math., 1968, 20, p. 194—220.
2. Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis II.— In: Intuitionism and proof theory. Proc. of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968. Amsterdam, 1970, p. 235—255.
Сморинский (Smorynski C. A.)
1. Application of Kripke models.— In: Metamathematical investigation in intuitionistic arithmetic and analysis (ed. A. S. Troelstra).— Lect. Notes Math., 1973, 344, p. 324—391.
Соболев С. К.
1. Об интуиционистском исчислении высказываний с кванторами.— Матем. заметки, 1977, 22, с. 69—76.
2. О конечномерных суперинтуиционистских логиках.— ИАН СССР, сер. матем., 1977, 41, № 5.
Такахаси (Takahashi M.)
1. A proof of cut-elimination theorem in simple type theory.— J. Math. Soc. Japan, 1967, 19, p. 399—410.

2. A system of simple type theory of Gentzen style with inference of extensionality and the cut-elimination in it.— Comment. math. Univ. St. Pauli, 1970, **18**, p. 129—147.
3. Cut-elimination theorem and Brouwerian-valued models for intuitionistic type theory.— Comment. math. Univ. St. Pauli, 1971, **19**, p. 55—72.

Такеути (Takeuti G.)
1. On the fundamental conjecture of GLC I, II.— J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 3, p. 249—275; № 4, p. 394—408.

Тейт (Tait W.)
1. A non-constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic.— Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, p. 980—983.
2. A realizability interpretation of the theory of species.— Lect. Notes Math., 1975, **453**, p. 240—251.

Томасон (Thomason R. H.)
1. On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate calculus.— J. Symbolic Logic, 1968, **33**, p. 1—7.

Трулстра (Troelstra A. S.)
1. The theory of choice sequences.— In: Proc. of congr. logic, method and phil. of sci. III. Amsterdam, 1968, p. 201—233.
2. Principles of intuitionism.— Lect. Notes Math., 1969, **95**.
3. Informal theory of choice sequences.— Studia Logica, 1969, **25**, p. 31—54.
4. Notes on the intuitionistic theory of choice sequences III.— Indag. math., 1970, **32**, p. 245—252.
5. Notions of realizability for intuitionistic arithmetic and intuitionistic arithmetic in all finite types.— Proc. of the second Scand. Logic. Symp., ed. J. E. Fenstad, 1971, p. 369—405.
6. Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis (ed.).— Lect. Notes Math., 1973, **344**.
7. Completeness and validity for intuitionistic predicate logic.— In: Colloq. int. log. Clermont-Ferrand, 1975. Paris, 1977, p. 35—98.

Фан Динь Зиеу
1. Некоторые вопросы конструктивного функционального анализа.— Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **114**. М.: Наука, 1970.

Феферман (Feferman S.)
1. Arithmetization of metamathematics in general setting.— Fundamenta math., 1960, **49**, p. 35—92.

Фиттинг (Fitting M.)
1. Intuitionistic logic model theory and forcing.— Amsterdam: North-Holland Publishing. Co., 1969.

Фридман (Friedman H.)
1. Some applications of Kleene's methods for intuitionistic systems.— Lect. Notes Math., 1973, **337**, p. 113—170.
2. The consistency of classical set theory relative to a set with intuitionistic logic.— J. Symbolic Logic., 1973, **38**, p. 315—319.
3. The disjunction property implies the numerical existence property.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1975, **72**, p. 2877—2878.
4. Set-theoretic foundations for constructive analysis.— Ann. Math., 1977, **105**, № 1, p. 1—28.

5. On the derivability of instantiation properties.— J. Symbolic Logic, 1977, **42**, № 4, p. 506—514.

Халмош (Halmos P.)
1. The basic concepts of algebraic logic.— Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, p. 363—387.

Харроп (Harrop R.)
1. Concerning formulas of types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ in intuitionistic formal systems.— J. Symbolic Logic, 1960, **25**, p. 27—32.

Хината (Hinata S.)
1. A normalization theorem in formal theories of natural numbers.— J. Math. Soc. Japan, 1977, **29**, p. 327—340.

Ховард, Крайзел (Howard W. A., Kreisel G.)
1. Transfinite induction and bar induction to types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis.— J. Symbolic Logic, 1966, **31**, № 2, p. 325—358.

Хувен ван (van der Hoeven G. F.)
1. Models for LS projected from a single lawless sequence and Dragalin's elimination translation.— Univ. of Amsterdam dept. of math., report 78-10, 1978.

Цейтин Г. С.
1. О дизъюнктивном ранге формул конструктивной арифметики.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1968, **8**, с. 260—271.

Цукер (Zucker J.)
1. The correspondence between cut-elimination and normalization.— Ann. Math. Log., 1974, **7**, № 1, p. 1—112.

Шанин Н. А.
1. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.— Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **67**. М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 15—294.
2. Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике.— Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **129**. М.: Наука, 1973, с. 203—266.
3. О кванторе предельной осуществимости.— Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 1976, **60**, с. 209—220.

Шенфилд (Shoenfield J. R.)
1. Математическая логика.— М.: Наука, 1975.

Шехтман В. Б.
1. О неполных логиках высказываний.— ДАН СССР, 1977, **235**, № 3, с. 542—545.
2. Лестница Ригера — Нишимуры.— ДАН СССР, 1978, **241**, № 6, с. 1288—1291.
3. Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний.— ДАН СССР, 1978, **240**, № 3, с. 549—552.

Шломюк (Schlomiuk D.)
1. Topos di Grothendieck e topos di Lawvere e Tierney.— Rend. Math., 1974, **7**, № 3—4.

Шютте (Schütte K.)
1. Полные системы модальной и интуиционистской логики.— В кн.: Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974, с. 324—421.

Эсакиа Л. Л.
1. О модальных «напарниках» суперинтуиционистских логик.— VII Всесоюзн. симп. по логике (тезисы), Киев, 1976, с. 135—136.

Янков В. А.
1. О реализуемых формулах логики высказываний.— ДАН СССР, 1963, 151, № 5, с. 1035—1037.
2. Об исчислении слабого закона исключенного третьего.— ИАН СССР, сер. матем., 1968, 32, № 5, с. 1044—1051.
3. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений.— ДАН СССР, 1968, 181, № 1, с. 33—34.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

3. Обозначения формул и термов

4. Реализуемости